

Слабая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Исследование сходимости методов BiCGStab и MUMPS

Работу выполнял: Копытков Дмитрий

Октябрь 2024

1 Слабая постановка

Выпишем задачу Дирихле для уравнения Пуассона на гладкой области Ω :

$$\Delta u = -f, u \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_{out}} = u_{out}, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_{in}} = u_{in}. \quad (3)$$

Для этой задачи возьмём ненулевую функцию v такую, что

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4)$$

умножим (1) на нее и проинтегрируем по Ω :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} f v \, dx \, dy &= \int_{\Omega} \Delta u v \, dx \, dy \xrightarrow{\text{Свойство div}} \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u v) \, dx \, dy - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy \xrightarrow{\text{Формула Гаусса-Остроградского}} \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dx \, dy - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy \xrightarrow{v|_{\partial\Omega} = 0} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, выписана слабая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона, то есть мы получили новое уравнение (5) с ГУ (2), (3), (4).

2 Численные результаты. Исследование сходимости

В качестве точного решения я взял $u(x, y) = x \cdot \sin(\pi y) + y \cdot \sin(\pi x)$. Также взял $u_{out} = u_{in} = u$ и

$$f = -\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \pi^2 \cdot y \cdot \sin(\pi x) + \pi^2 \cdot x \cdot \sin(\pi y) = \pi^2 \cdot u.$$

Введём следующие параметры:

$$N_{In} = 70;$$

$$coef = 2.5;$$

$$N_{Out} = coef * N_{In} = 175;$$

$$\epsilon = 10^{-12}$$

$$iter_{max} = 10000$$

$$\|u\|_{L_2} = 158.323$$

Рассмотрим и сравним итерационный метод BiCGStab с прямым методом MUMPS seq.

Таблица с численными результатами при решении задачи с помощью метода BiCGStab:

tg ν	Количество итераций, $iter$	Норма численного решения, $\ u_B\ _{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\ u_B - u\ _{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\ u_B - u\ _{L_2}}{\ u\ _{L_2}}$
-1	395	157.381	3.50602	0.0221447
10^5	857	157.381	3.50604	0.0221448
10^8	482	157.382	3.57479	0.0225791
10^{10}	116	157.21	5.59016	0.0353085
10^{30}	1	30.7175	156.911	0.99108

Вывод по методу BiCGStab: данный метод хорошо работает с матрицами без положительной-определённости, что подтверждает значение абсолютной и относительной погрешности при $tg\nu = -1$. Однако метод плохо применим

для матриц с большим числом обусловленности, как показывают значения погрешностей при $tg\upsilon = 10^{10}$ и $tg\upsilon = 10^{30}$. Большие значения $tg\upsilon$ быстрее устремляют невязку к нулю, из-за чего снижается количество итераций, что приводит к значительному ухудшению результата.

Существуют модифицированные методы BiCGStab (в качестве примера написан код BiCGStabNew.edp). Они включают себя предобуславливатель, который помогает лучше контролировать число обусловленности, что даёт преимущество при значениях $tg\upsilon = 10^{30}$ и выше. Однако предобуславливатели требуют дополнительную память, а также расчёты могут тратить куда больше времени. Помимо этого, итерационный метод BiCGStab зависит от начального приближения. В моём случае начальное приближение одинаково для любых $tg\upsilon$, а значит для некоторых $tg\upsilon$ результат может быть не объективен в силу выбора "плохого" u_0 .

BiCGStab может подойти только для матриц с малым числом обусловленности и не портиться, если матрица является несимметричной или не положительно-определённой. Если это условие выполнено, то данный метод позволяет быстро и достаточно точно решить СЛАУ. Также, BiCGStab устойчив для несимметричных или не положительно-определённых матриц, что даёт преимущество по отношению к другим итерационным методам.

Таблица с численными результатами при решении задачи с помощью метода MUMPS:

tg v	Норма точного решения, $\ u_M\ _{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\ u_M - u\ _{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\ u_M - u\ _{L_2}}{\ u\ _{L_2}}$
-1	157.381	3.50602	0.0221447
10^5	157.381	3.50604	0.0221448
10^8	157.381	3.50602	0.0221447
10^{10}	157.381	3.50602	0.0221447
10^{30}	157.381	3.50602	0.0221447

Вывод по методу MUMPS: данный метод является стабильным для любых $tg v$, а также показывает достаточно высокую точность решения уравнения. Благодаря мультифронтальности, то есть разбиению матрицы A на особые подматрицы, сохраняется разреженность основной матрицы и метод имеет преимущество во времени работы по отношению к другим прямым методам. Из-за прямого решения изменение $tg v$ практически не влияет на сам алгоритм, поскольку MUMPS воспринимает огромные значения $tg v$ как бесконечно большие — они могут быть нормализованы или усечены. Однако, данный метод нельзя серьезно улучшить, что может являться недостатком по сравнению с итерационным методом.

Общий вывод: MUMPS является наиболее предпочтительным вариантом для решения уравнения Пуассона с точки зрения точности. Однако важно не забывать, что прямые методы не эффективны по памяти, поскольку содержат информацию о дополнительных матрицах.

Литература по модифицированному методу BiCGStab:

Boris Krasnopol'sky. The reordered BiCGStab method for distributed memory computer systems. 2010 г. p.214