

Адаптация сетки задачи Дирихле-Неймана  
для уравнения Пуассона. Исследование  
СХОДИМОСТИ

Работу выполнял: Копытков Дмитрий

Октябрь 2024

## 1 Адаптация сетки

Для функции  $u$ , которая является численным решением смешанной задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона на гладкой области  $\Omega$ :

$$\Delta u = -f, u \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_{out}} = u_{out}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{in}} = u_{in}. \quad (3)$$

используем адаптацию сетки.

В качестве точного решения взята  $u(x, y) = x \cdot \sin(\pi y) + y \cdot \sin(\pi x)$ . Тогда  $f = -\Delta u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \pi^2 \cdot y \cdot \sin(\pi x) + \pi^2 \cdot x \cdot \sin(\pi y) = \pi^2 \cdot u$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla u, \mathbf{n}) = (\sin(\pi y) + \pi \cdot y \cdot \cos(\pi x)) \cdot n_x + (\pi \cdot x \cdot \cos(\pi y) + \sin(\pi x)) \cdot n_y.$$

В качестве  $u_{out}$  взята  $u = x \cdot \sin(\pi y) + y \cdot \sin(\pi x)$ .

Введём следующие параметры для адаптации сетки:

$$NIn = 20;$$

$$coef = 2.5;$$

$$NOut = \text{int}(coef * NIn) = 50;$$

$$hMinUExact = 0.01;$$

$$hMaxUExact = 0.6;$$

Далее рассматривается сетка и значение  $u$  в области на каждом новом итерации адаптации.

Выход: по рисункам видно, что на каждом шаге итерации увеличивается область значений  $u$ , а также идёт уточнение в каждой точке. Рисунки представлены ниже:

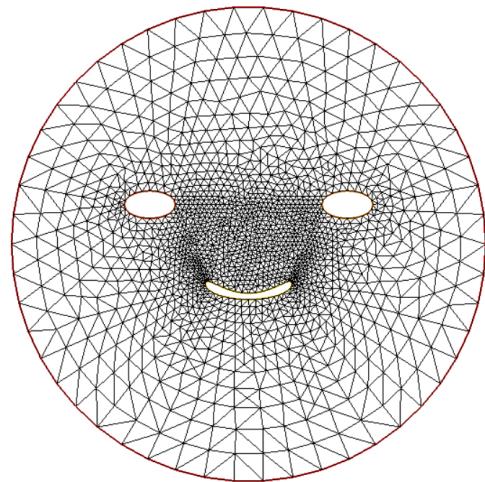


Figure 1: Сетка при итерации №1

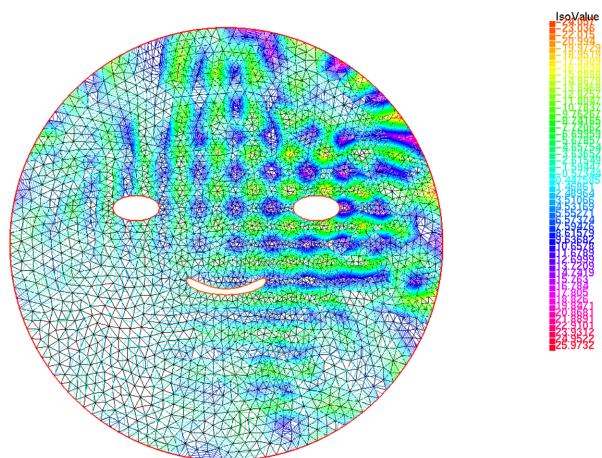


Figure 2: Значение  $u$  в области при итерации №1

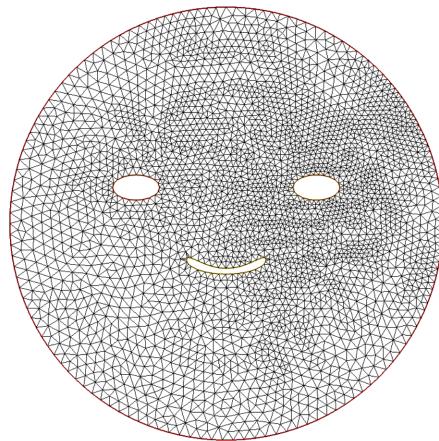


Figure 3: Сетка при итерации №2

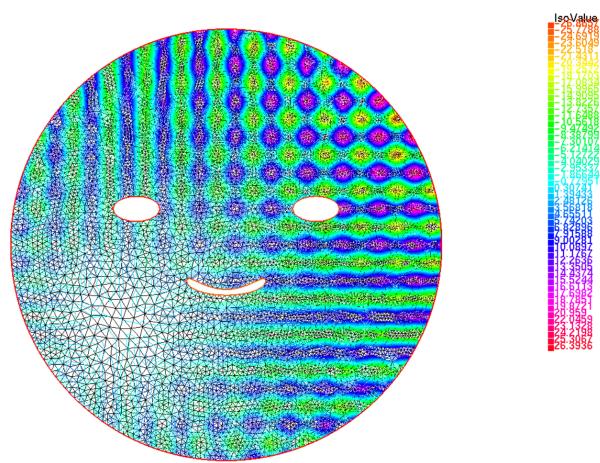


Figure 4: Значение  $u$  в области при итерации №2

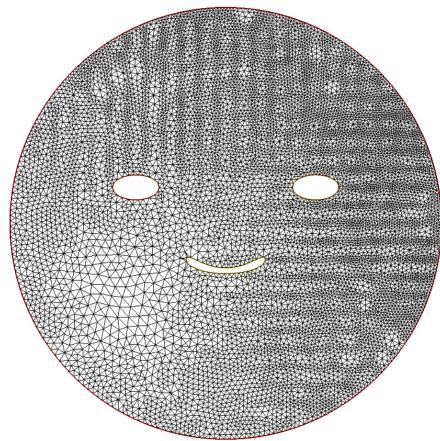


Figure 5: Сетка при итерации №3

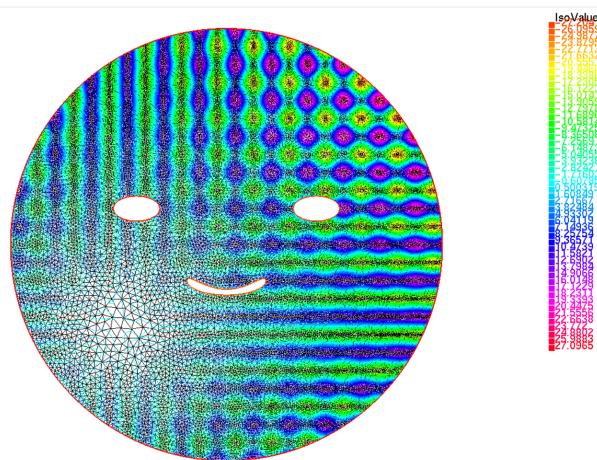


Figure 6: Значение  $u$  в области при итерации №3

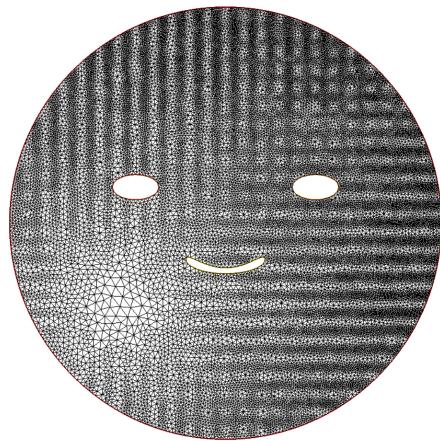


Figure 7: Сетка при итерации №4

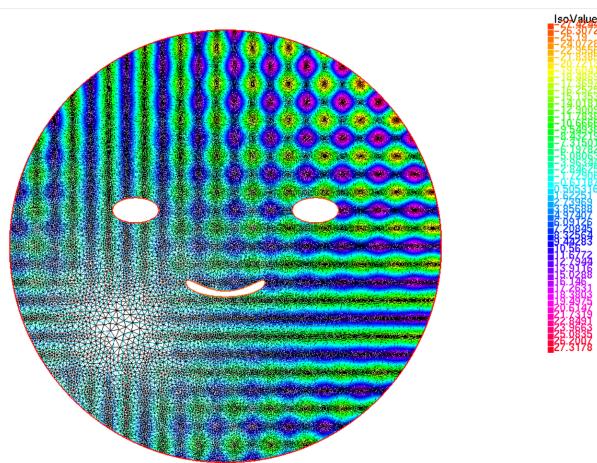


Figure 8: Значение  $u$  в области при итерации №4



Figure 9: Сетка при итерации №5

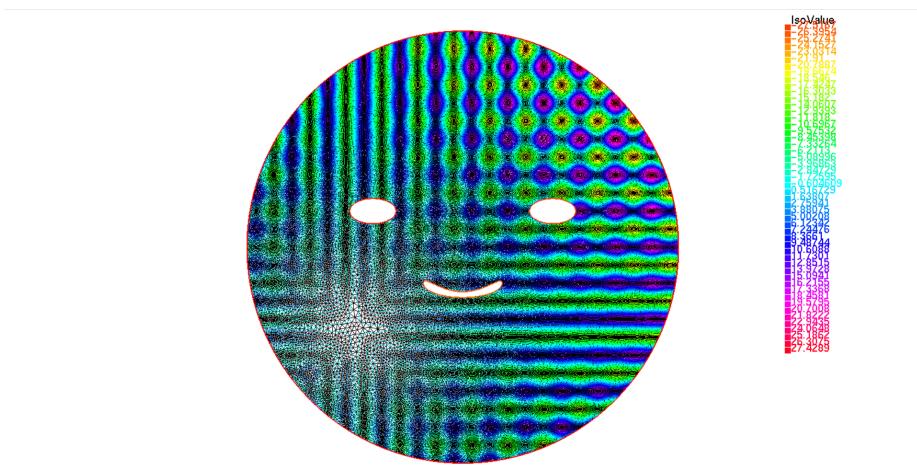


Figure 10: Значение  $u$  в области при итерации №5

## 2 Численные результаты. Исследование сходимости

Таблица с численными результатами:

Error	$u[] . n$	Норма точного решения, $\ u\ _{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\ u_{it} - u\ _{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\ u_{it} - u\ _{L_2}}{\ u\ _{L_2}}$	Порядок сходимости, $\log_2 \frac{\ u_{it} - u\ _{L_2}}{\ u_{it/2} - u\ _{L_2}}$
0.1	3125	150.055	116.113	0.773804	-
0.05	9865	165.168	24.2204	0.146641	2.26124
0.025	22845	167.817	5.35032	0.0318819	2.17853
0.0125	42255	168.712	2.19274	0.0129969	1.28689
0.00625	93215	169.271	1.18027	0.00697263	0.893624

Вывод: новый шаг итерации по адаптации даёт улучшенную картину в области, а также уменьшает относительную погрешность, что может говорить о сходимости метода. Порядок сходимости имеет нестабильную картину в связи с быстрым темпом снижения абсолютной погрешности и уточнением сетки в области.