Гидравлический удар

Работу выполняли: Копытков Дмитрий, Игорь Тарасов

Декабрь 2024

1 Слабая постановка

Рассматривается ламинарное течение в трубопроводе. Для этого берутся следующие уравнения:
Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho a^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

Уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\lambda \mathbf{v}^2}{2d} \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = 0 \tag{2}$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, t)$, $p = p(x, y, t)$, λ - коэффициент гидравлического трения, $Re = \frac{||\mathbf{v}||d}{\mu}$ - число Рейнольдса, определенное по диаметру трубопровода d, a - скорость распространения волн давления в жидкости, $\mathbf{v}^2$ - скалярное произведение $\mathbf{v}$ само на себя, $\mathbf{v}^2 = ||\mathbf{v}||^2$. Для ламинарного течения $\lambda = \frac{64}{Re}$.
Область, на которой рассматриваются уравнения, представлена на рисунке:

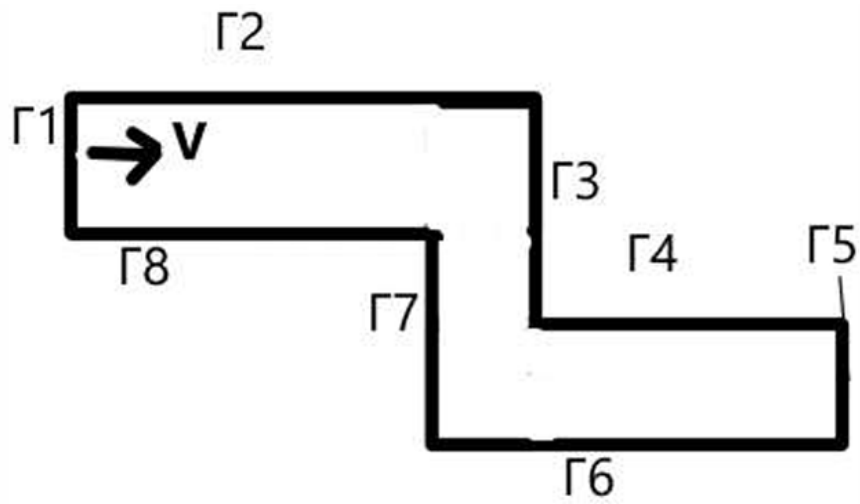

Рис.1: Область Ω с границами

Высотой h обозначим длину Γ_1, L - длина Γ_2, H - высота Γ_3.
Начальные условия:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = v_0 = 6 \cdot u_{max} \cdot \frac{(H+h-y)(y-H)}{h^2},\ p|_{t=0} = p_0 \tag{3}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 : v_x = v_0,\ v_y = 0.\\
&\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8 : v_x = 0, v_y = 0.\\
&\Gamma_5 : \frac{dv_x}{dt} = 0,\ v_y = 0,\ p = p_0,\ \ t \leq t_0.\\
&\Gamma_5 : v_x = 0,\ v_y = 0,\ p = p_0 + \Delta p,\ \ t > t_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\Delta p = \rho v_0 a$ по формуле Жуковского, t_0 - момент закрытия границы Γ_5 - подбирается когда устанавливается стационарное течение жидкости. В нашем случае устанавливается следующее правило:

$$t > t_0 \iff ||\mathbf{v_{prev}} - \mathbf{v}|| < \varepsilon \tag{5}$$

где $\mathbf{v_{prev}}$ - скорость на предыдущем шаге по времени.
Слабая постановка уравнения (1) имеет вид:

$$\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t} \cdot q\, dx\, dy + \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla p \cdot q\, dx\, dy + \int_\Omega \rho a^2 \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot q\, dx\, dy = 0 \tag{6}$$

для любых q таких, что $q = 0$ на $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{9} \Gamma_i$.
Слабая постановка уравнения (2) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy + \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy\\
&+ \int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy + \int_\Omega \frac{\rho \lambda ||\mathbf{v}||}{2d} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy \xlongequal{\lambda = \frac{64}{Re},\, Re = \frac{||\mathbf{v}|| d}{\mu}}\\
&\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy + \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy\\
&+ \int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy + \frac{32 \rho \mu}{d^2} \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy.
\end{aligned} \tag{7}$$

Были взяты следующие численные параметры:

$$\begin{aligned}
&\rho = 10^3 \text{ кг/м }^3,\ \mu = 10^{-3},\ d = 0.1 \text{ м},\\
&u_{max} = 10^{-4} \text{ м/с},\ p_0 = 10^5 \text{ Па},\ \varepsilon = 10^{-5}
\end{aligned}$$

Скорость a была вычислена по формуле Жуковского:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta + \frac{\rho d}{E\delta}}}, \tag{8}$$

где $\beta = 5 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$ - сжимаемость жидкости, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па - модуль Юнга, $\delta = 7 \cdot 10^{-3}$ м - толщина стенок трубы.