

Гидравлический удар

Работу выполняли: Копытков Дмитрий, Игорь Тарасов

Декабрь 2024

1 Слабая постановка

Рассматривается ламинарное течение в трубопроводе. Для этого берутся следующие уравнения:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho a^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

Уравнение Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\lambda \mathbf{v}^2}{2d} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = 0 \quad (2)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, t)$, $p = p(x, y, t)$, λ - коэффициент гидравлического трения, $Re = \frac{\|\mathbf{v}\|d}{\mu}$ - число Рейнольдса, определенное по диаметру трубопровода d , a - скорость распространения волн давления в жидкости, \mathbf{v}^2 - скалярное произведение \mathbf{v} само на себя, $\mathbf{v}^2 = \|\mathbf{v}\|^2$. Для ламинарного течения $\lambda = \frac{64}{Re}$. Область, на которой рассматриваются уравнения, представлена на рисунке:

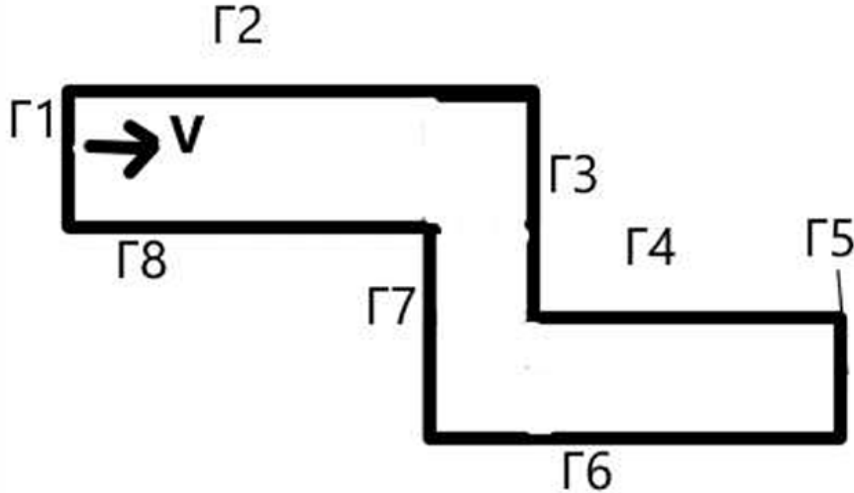


Рис.1: Область Ω с границами

Высотой h обозначим длину Γ_1 , L - длина Γ_2 , H - высота Γ_3 .
Начальные условия:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = v_0 = 6 \cdot u_{max} \cdot \frac{(H + h - y)(y - H)}{h^2}, p|_{t=0} = p_0 \quad (3)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : v_x &= v_0, v_y = 0. \\ \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8 : v_x &= 0, v_y = 0. \\ \Gamma_5 : \frac{dv_x}{dt} &= 0, v_y = 0, p = p_0, t \leq t_0. \\ \Gamma_5 : v_x &= 0, v_y = 0, p = p_0 + \Delta p, t > t_0. \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta p = 1.5 \cdot \rho v_{max} a$ по формуле Жуковского, t_0 - момент закрытия границы Γ_5 - подбирается когда устанавливается стационарное течение жидкости. В нашем случае устанавливается следующее правило:

$$t > t_0 \iff \|\mathbf{v}_{prev} - \mathbf{v}\| < \varepsilon \quad (5)$$

где \mathbf{v}_{prev} - скорость на предыдущем шаге по времени.

Слабая постановка уравнения (1) имеет вид:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} \cdot q \, dx \, dy + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla p \cdot q \, dx \, dy + \int_{\Omega} \rho a^2 \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot q \, dx \, dy = 0 \quad (6)$$

для любых q таких, что $q = 0$ на $\Gamma = \bigcup_{i=1}^9 \Gamma_i$.

Слабая постановка уравнения (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy \\ & + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy + \int_{\Omega} \frac{\rho \lambda \|\mathbf{v}\|}{2d} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy \stackrel{\lambda = \frac{64}{Re}, Re = \frac{\|\mathbf{v}\|d}{\mu}}{=} \\ & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy \\ & + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy + \frac{32\rho\mu}{d^2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Были взяты следующие численные параметры:

$$\begin{aligned} \rho &= 10^3 \text{ кг/м}^3, \mu = 10^{-3}, d = 0.1 \text{ м}, \\ u_{max} &= 10^{-4} \text{ м/с}, p_0 = 10^5 \text{ Па}, \varepsilon = 10^{-5} \end{aligned}$$

Скорость a была вычислена по формуле Жуковского:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta + \frac{\rho d}{E\delta}}}, \quad (8)$$

где $\beta = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ - сжимаемость жидкости, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ - модуль Юнга, $\delta = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ - толщина стенок трубы.