

Адаптация сетки задачи Дирихле-Неймана
для уравнения Пуассона. Исследование
СХОДИМОСТИ

Работу выполнял: Копытков Дмитрий

Октябрь 2024

1 Адаптация сетки

Для функции u , которая является численным решением смешанной задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона на гладкой области Ω :

$$\Delta u = -f, u \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_{out}} = u_{out}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{in}} = u_{in}. \quad (3)$$

используем адаптацию сетки.

В качестве точного решения взята $u(x, y) = x \cdot \sin(\pi y) + y \cdot \sin(\pi x)$. Тогда $f = -\Delta u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \pi^2 \cdot y \cdot \sin(\pi x) + \pi^2 \cdot x \cdot \sin(\pi y) = \pi^2 \cdot u$,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla u, \mathbf{n}) = (\sin(\pi y) + \pi \cdot y \cdot \cos(\pi x)) \cdot n_x + (\pi \cdot x \cdot \cos(\pi y) + \sin(\pi x)) \cdot n_y.$$

В качестве u_{out} взята $u = x \cdot \sin(\pi y) + y \cdot \sin(\pi x)$.

Введём следующие параметры для адаптации сетки:

$$NIn = 20;$$

$$coef = 2.5;$$

$$NOut = \text{int}(coef * NIn) = 50;$$

$$hMinUExact = 0.01;$$

$$hMaxUExact = 0.6;$$

Далее рассматривается сетка и значение u в области на каждом новом итерации адаптации.

Выход: по рисункам видно, что на каждом шаге итерации увеличивается область значений u , а также идёт уточнение в каждой точке. Рисунки представлены ниже:

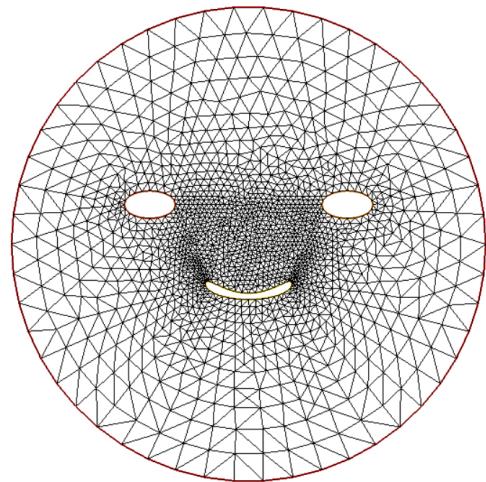


Figure 1: Сетка при итерации №1

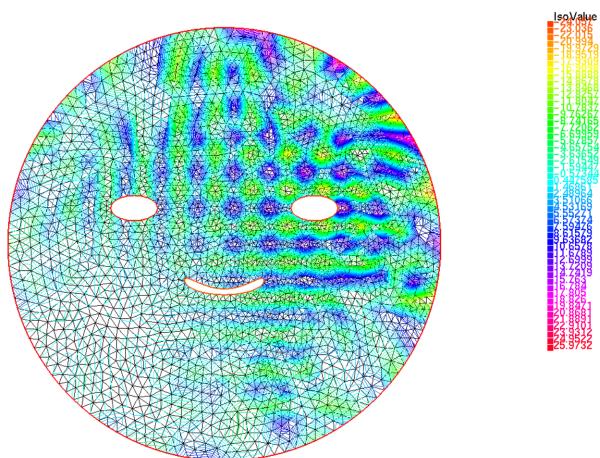


Figure 2: Значение u в области при итерации №1

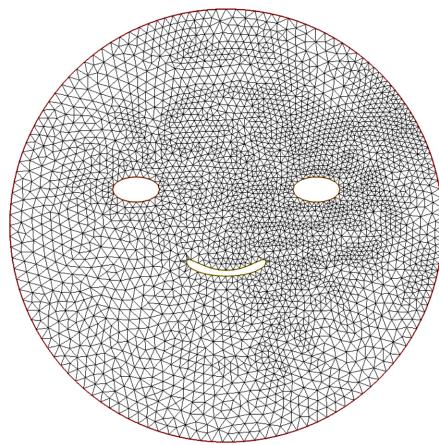


Figure 3: Сетка при итерации №2

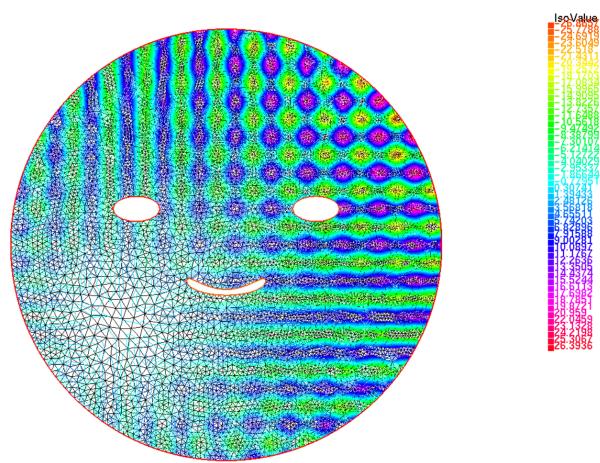


Figure 4: Значение u в области при итерации №2

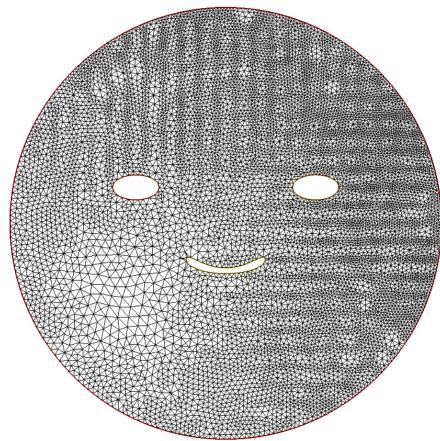


Figure 5: Сетка при итерации №3

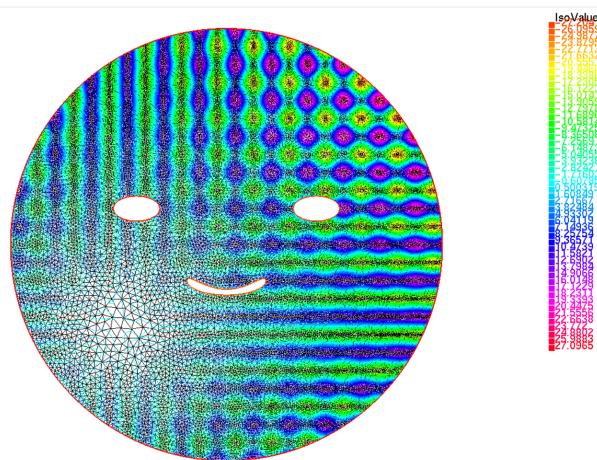


Figure 6: Значение u в области при итерации №3

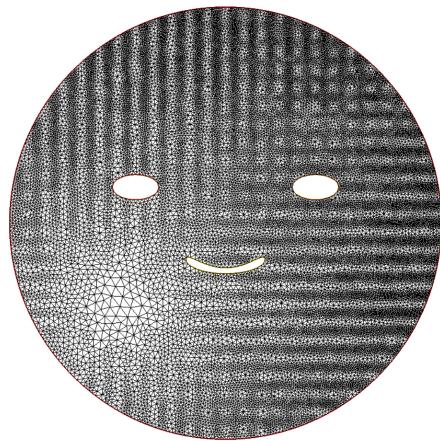


Figure 7: Сетка при итерации №4

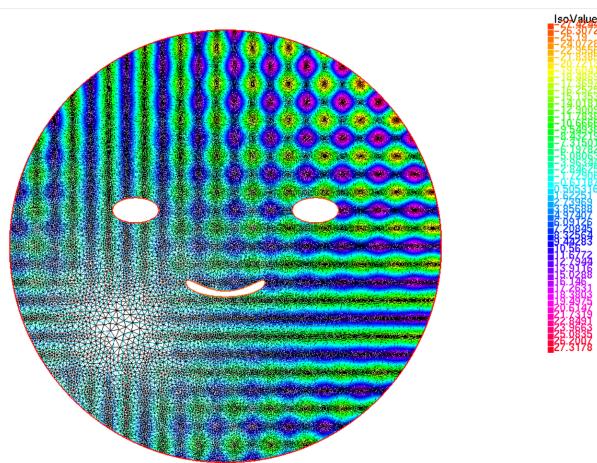


Figure 8: Значение u в области при итерации №4



Figure 9: Сетка при итерации №5

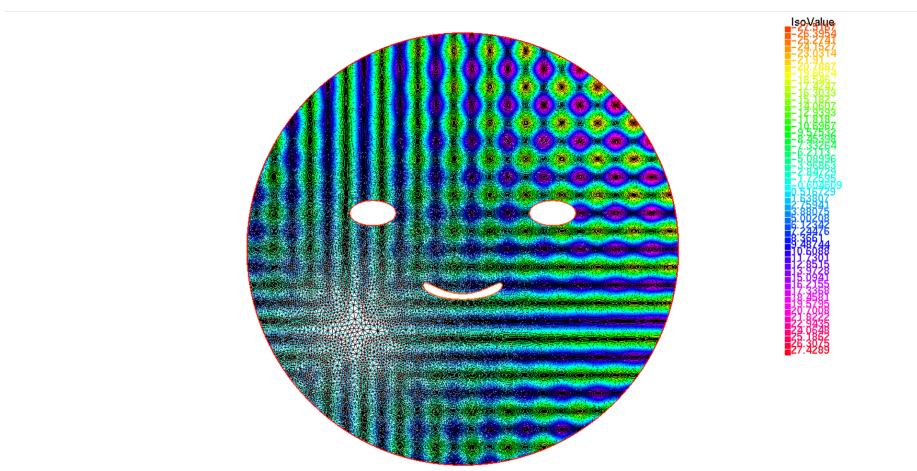


Figure 10: Значение u в области при итерации №5

2 Численные результаты. Исследование сходимости

Таблица с численными результатами:

| Error | $u[] . n$ | Норма точного решения, $\ u\ _{L_2}$ | Абсолютная погрешность, $\ u_{it} - u\ _{L_2}$ | Относительная погрешность, $\frac{\ u_{it} - u\ _{L_2}}{\ u\ _{L_2}}$ | Порядок сходимости, $\log_2 \frac{\ u_{it} - u\ _{L_2}}{\ u_{it/2} - u\ _{L_2}}$ |
|---------|-----------|---|---|--|---|
| 0.1 | 3125 | 150.055 | 116.113 | 0.773804 | - |
| 0.05 | 9865 | 165.168 | 24.2204 | 0.146641 | 4.79402 |
| 0.025 | 22845 | 167.817 | 5.35032 | 0.0318819 | 4.52691 |
| 0.0125 | 42255 | 168.712 | 2.19274 | 0.0129969 | 2.44001 |
| 0.00625 | 93215 | 169.271 | 1.18027 | 0.00697263 | 1.85784 |

Вывод: новый шаг итерации по адаптации даёт улучшенную картину в области, а также уменьшает относительную погрешность, что может говорить о сходимости метода. Порядок сходимости имеет нестабильную картину в связи с быстрым темпом снижения абсолютной погрешности и уточнением сетки в области.