Слабая постановка задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона. Исследование сходимости

Работу выполнял: Копытков Дмитрий

Сентябрь 2024

1 Слабая постановка

Выпишем смешанную задачу Дирихле-Неймана для уравненея Пуассона на гладкой области Ω :

$$\Delta u = -f, u \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_{out}} = u_{out}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{in}} = u_{in}. \tag{3}$$

Для этой задачи возьмём ненулевую функцию v такую, что

$$v|_{\Gamma_{out}} = 0, \tag{4}$$

умножим (1) на нее и проинтегрируем по Ω:

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega fv\,dx\,dy = \int_\Omega \Delta uv\,dx\,dy \xlongequal{\text{Свойство div}} \\
&\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla uv)\,dx\,dy - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\,dy \xlongequal{\text{Формула Гаусса-Остроградского}} \\
&\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v\,dx\,dy - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\,dy = \int_{\Gamma_{out}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v\,dx\,dy \\
&+\int_{\Gamma_{in}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v\,dx\,dy - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\,dy \xlongequal{v|_{\Gamma_{out}}=0} \\
&\int_{\Gamma_{in}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v\,dx\,dy - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\,dy \xlongequal{\frac{\partial u}{\partial n}=\nabla u\cdot n} \\
&\int_{\Gamma_{in}} \nabla u\cdot nv\,dx\,dy - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\,dy
\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, выписана слабая постановка задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона, то есть мы получили новое уравнение (5) с ГУ (2), (3), (4).

2 Исследование сходимости

Теперь покажем как вычисляется порядок сходимости. По определению, порядок сходимости - это такое число p, что

$$\|u_h - u\|_{L_2} = Ch^p + O(h^{p+1}), \tag{6}$$

или

$$\log\|u_h - u\|_{L_2} = p\log h + \log C + O(h). \tag{7}$$

Зная точное решение u, мы исследуем сходимость следующим образом:

$$\log_2 \frac{\|u_h - u\|_{L_2}}{\|u_{h/2} - u\|_{L_2}} = p + O(h). \tag{8}$$

Если же точное решение неизвестно, то можно определить порядок сходимости следующим образом:

$$\log_2 \frac{\left\|u_h - u_{h/2}\right\|_{L_2}}{\left\|u_{h/2} - u_{h/4}\right\|_{L_2}} = \\ = \log_2 \frac{1 + 2^{-p} + O(h)}{2^{-p+1} + O(h)} = p + O(h). \tag{9}$$

В качестве точного решения я взял $u(x,y) = x \cdot sin(\pi y) + y \cdot sin(\pi x)$. Тогда $f = -\Delta u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \pi^2 \cdot y \cdot sin(\pi x) + \pi^2 \cdot x \cdot sin(\pi y) = \pi^2 \cdot u$,

$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla u, n) = (sin(\pi y) + \pi \cdot y \cdot cos(\pi x)) \cdot n_x + (\pi \cdot x \cdot cos(\pi y) + sin(\pi x)) \cdot n_y$.

В качестве u_{out} я взял $u = x \cdot sin(\pi y) + y \cdot sin(\pi x)$.
Далее, в таблице представлены результаты с выбранными функциями.

Таблица с численными результатами, если точное решение известно:

NIn	NOut	Норма численного решения, $\|u_h\|_{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\|u_h - u\|_{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\|u_h-u\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}$	Порядок сходимости, $\log_2 \frac{\|u_h-u\|_{L_2}}{\|u_{h/2}-u\|_{L_2}}$
20	50	108.016	37.3469	0.331754	-
40	100	137.409	10.9984	0.0787798	1.7637
80	200	160.286	2.58262	0.0160463	2.09038
160	400	167.2	0.70182	0.00419195	1.87967
320	800	169.088	0.178358	0.00105448	1.97633

Таблица с численными результатами, если точное решение неизвестно:

NIn	NOut	Норма численного решения, $\lVert u_h \rVert_{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\lVert u_h - u_{h/2} \rVert_{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\lVert u_h - u_{h/2} \rVert_{L_2}}{\lVert u_h \rVert_{L_2}}$	Порядок сходимости, $\log_2 \frac{\lVert u_h - u_{h/2} \rVert_{L_2}}{\lVert u_{h/2} - u_{h/4} \rVert_{L_2}}$
20	50	108.016	30.5957	0.283252	-
40	100	137.409	9.55009	0.0695013	1.67974
80	200	160.286	2.1255	0.0132607	2.16771
160	400	167.2	0.565212	0.00338045	1.91094
320	800	169.088	-	-	-

Вывод: при уменьшении шага сетки погрешность уменьшается, что может говорить о сходимости метода. Однако численные данные дают нестабильную картину.
Основные причины, по которым численные результаты отличаются от теоретических:

- Выводы оценки порядка сходимости делаются при $h \to 0$. Чем больше h, тем выше значения $O(h)$. Тогда получаем, что из (9) значение может существенно отличаться.

- В численном решении начальные условия могут задаваться не точно, а значит порядок будет завситеть ещё и от порядка аппроксимации граничных условий, что заставляет задуматься о начальном шаге, с которого стоит рассматривать численное решение.