Решение нестационарной задачи Навье-Стокса. Построение дорожки Кармана

Дмитрий Копытков

Декабрь 2024

Выпишем задачу Дирихле для нестационарного уравненея Навье-Стокса на гладкой области Ω, где $u = u(u_x, u_y)$:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u + \nabla p = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \tag{2}$$

с начальными условиями:

$$u_x|_{\Gamma_{in}} = u_0 + \varepsilon_0 \cdot sin(t) \cdot sin(y/H), \;\; u_y|_{\Gamma_{in}} = 0, \tag{3}$$

$$u_y|_{\Gamma_{Out}} = 0, \;\; p|_{\Gamma_{Out}} = p_0, \;\; \frac{du_x}{dt} = 0. \tag{4}$$

Для этой задачи возьмём ненулевую функцию ψ такую, что

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Для удобства запишем формулу интегрирования по частям для тензоров:

$$\int_\Omega \mathbf{v} \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{A}\langle \mathbf{n} \rangle \, ds - \int_\Omega \boldsymbol{A} : \nabla \mathbf{v} \, dx\, dy \tag{6}$$

Заметим, что:

$$\nabla p = \operatorname{div} pI, \;\; pI : \nabla \boldsymbol{\psi} = p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}, \tag{7}$$

где I - единичный тензор. Таким образом, формулу (6) надо применить к тензору

$$\boldsymbol{A} = -\mu \nabla \mathbf{u} + pI \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (-\mu \operatorname{div} \nabla \boldsymbol{u} + \nabla p) \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx\, dy \overset{(6)}{=\!=\!=} \int_\Omega \operatorname{div} (-\mu \nabla \mathbf{u} + pI) \cdot \boldsymbol{\psi} \, dx\, dy \\ &= \int_\Omega (\mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\psi} - p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}) \, dx\, dy - \int_\Omega \psi_n (\mu \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} - p) + \psi_t \, \mu \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})}{\partial \mathbf{n}} \, ds \\ &\overset{\text{Граничные условия}}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \int_\Omega \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\psi} \, dx\, dy - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} \, dx\, dy, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n} = \psi_n$, $\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{t} = \psi_t$, $\mathbf{t}$ - касательный вектор. Итого:

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\, dx\, dy + \int_\Omega \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\, dx\, dy + \tag{10}$$

$$\int_\Omega \mu \nabla \mathbf{u} : \nabla \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy - \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy = 0,$$

$$\int_\Omega \varepsilon\, pq\, dx\, dy + \int_\Omega q \operatorname{div} \boldsymbol{\psi}\, dx\, dy = 0. \tag{11}$$

Для повышения устойчивости уравнение неразрывности было регуляризовано в виде:

$$\varepsilon p + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \tag{12}$$

Область Ω, а также профиль скорости u_x разных итерациях, можно увидеть на рисунках:

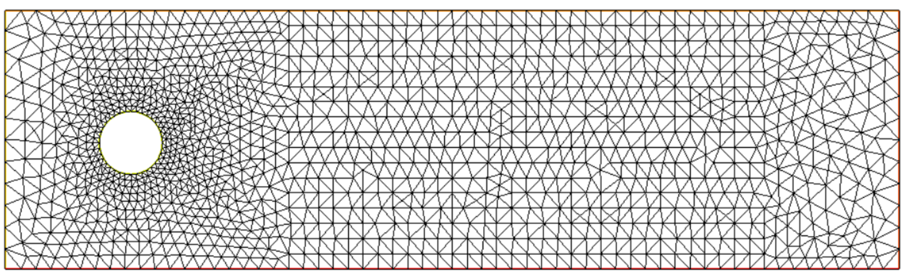

Рис.1: Область Ω с сеткой

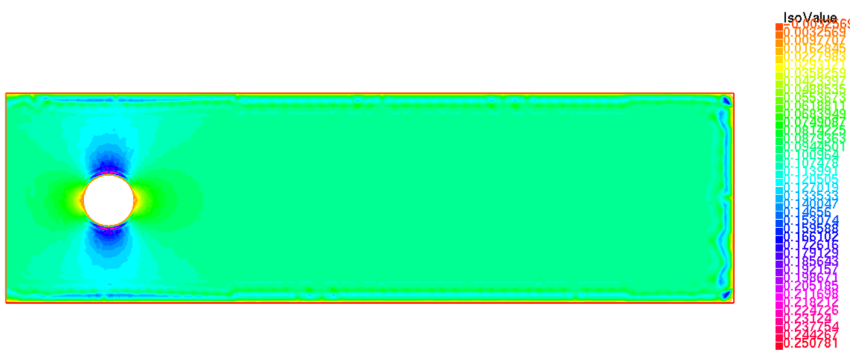

Рис.2: Профиль скорости u_x при $iter = 0$

Рис.3: Профиль скорости u_x при $iter = 10$

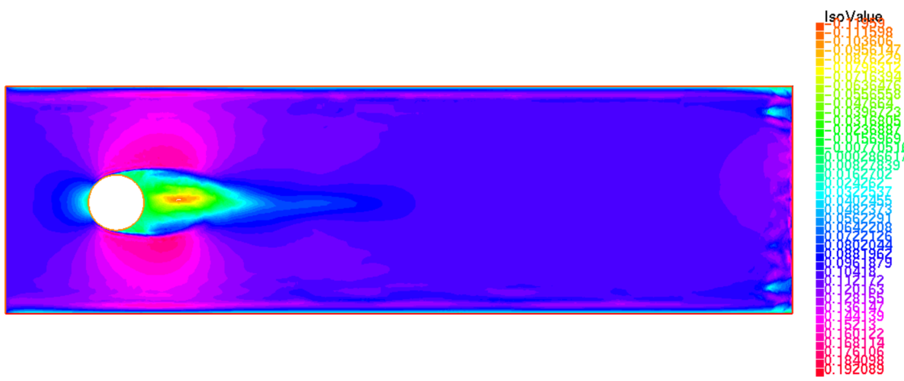

Рис.4: Профиль скорости u_x при $iter = 50$

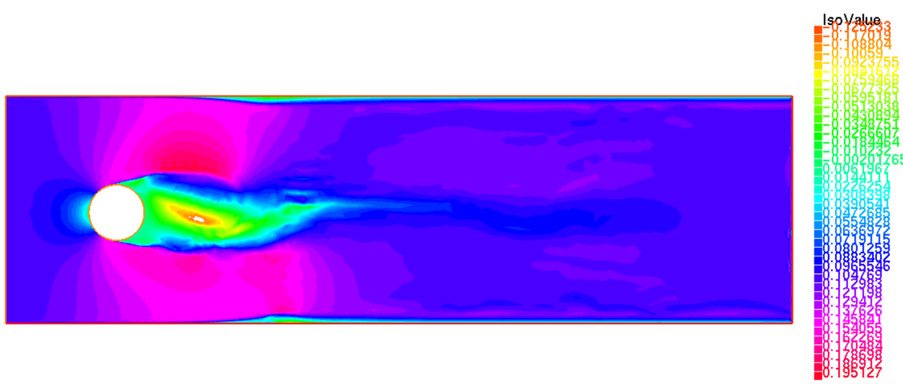

Рис.5: Профиль скорости u_x при $iter = 100$

Также, использовалась адаптация сетки при $iter = K$, где $K = \frac{\beta}{u_0\, n}$, β выбран экспериментальным путём (в моём случае, $\beta = 60$).