Адаптация сетки задачи Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона. Исследование сходимости.
Адаптация сетки функции u на отрезке. Натуральная параметризация

Работу выполнял: Копытков Дмитрий

Октябрь 2024

1 Выполнение пункта 1)

Адаптация сетки

Для функции u, которая является численным решением смешанной задачи Дирихле-Неймана для уравненея Пуассона на гладкой области Ω :

$$\Delta u = -f, u \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_{out}} = u_{out}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_{in}} = u_{in}. \tag{3}$$

используем адаптацию сетки.
В качестве точного решения взята $u(x, y) = x \cdot sin(\pi y) + y \cdot sin(\pi x)$. Тогда
$f = -\Delta u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \pi^2 \cdot y \cdot sin(\pi x) + \pi^2 \cdot x \cdot sin(\pi y) = \pi^2 \cdot u,$

$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla u, n) = (sin(\pi y) + \pi \cdot y \cdot cos(\pi x)) \cdot n_x + (\pi \cdot x \cdot cos(\pi y) + sin(\pi x)) \cdot n_y.$

В качестве u_{out} взята $u = x \cdot sin(\pi y) + y \cdot sin(\pi x)$.
Введём следующие параметры для адаптации сетки:

$$N_{In} = 20;$$

$$coef = 2.5;$$

$$N_{Out} = int(coef * N_{In}) = 50;$$

$$h_{Min} = 0.01;$$

$$h_{Max} = 0.6;$$

Далее рассматривается сетка и значение u в области на каждом новом итерации адаптации.
Вывод: по рисункам видно, что на каждом шаге итерации увеличивается область значений u, а также идёт уточнение в каждой точке. Рисунки представлены ниже:

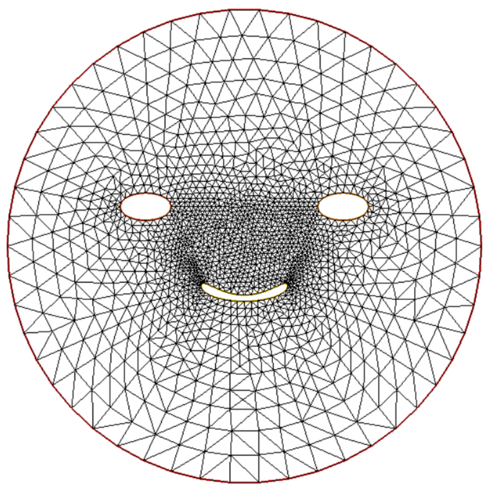

Рис. 1: Сетка при итерации №1

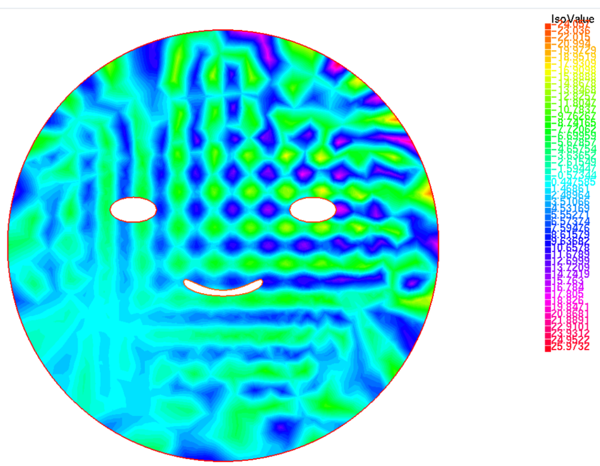

Рис. 2: Значение u в области при итерации №1

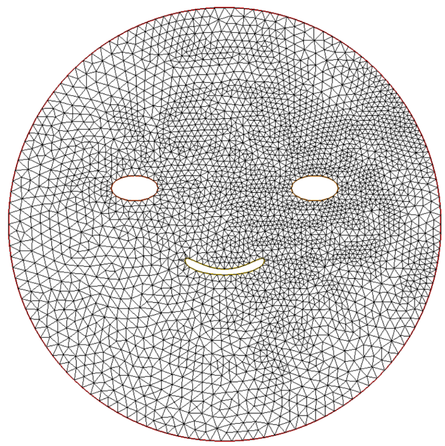

Рис. 3: Сетка при итерации №2

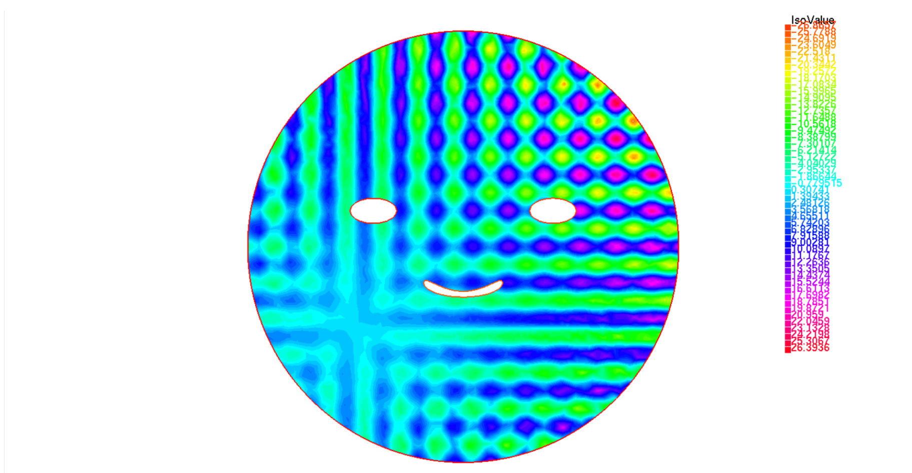

Рис. 4: Значение u в области при итерации №2

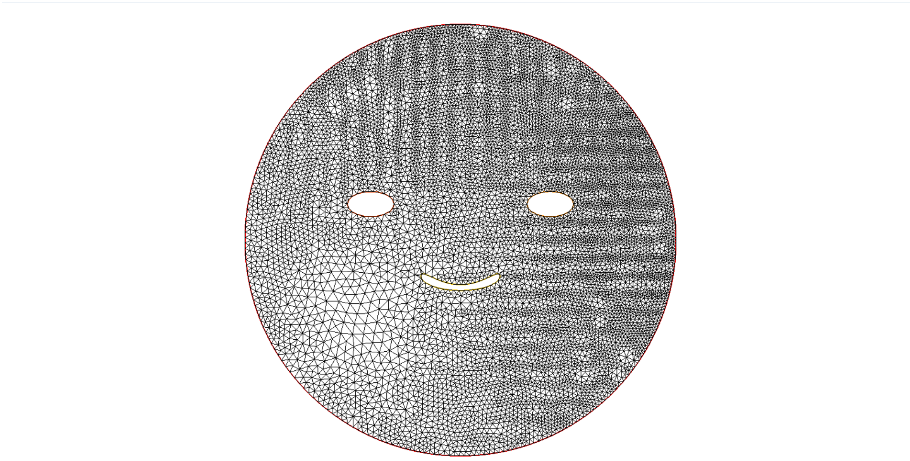

Рис. 5: Сетка при итерации №3

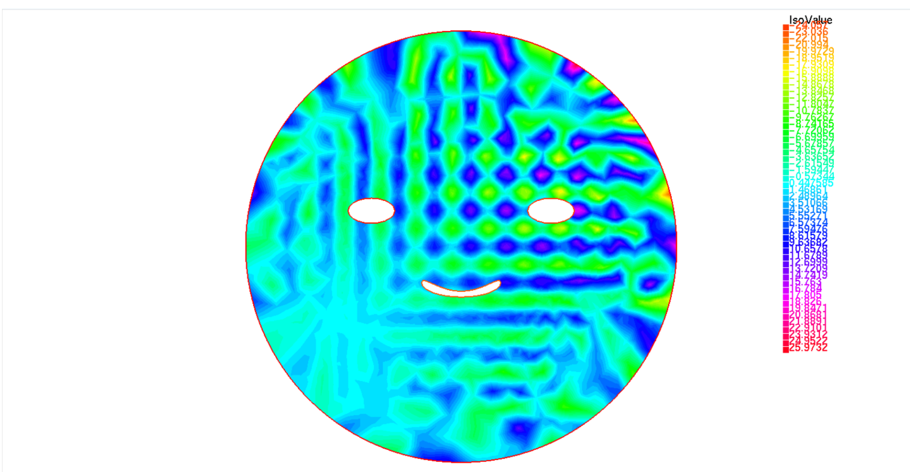

Рис. 6: Значение u в области при итерации №3

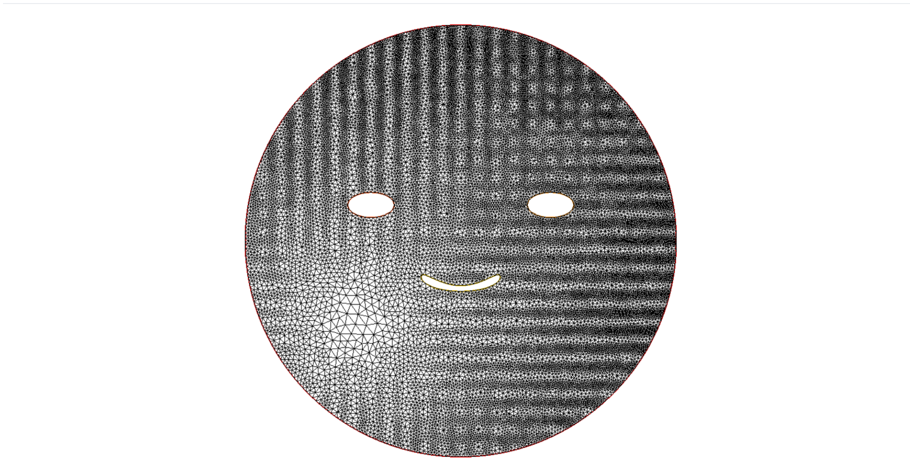

Рис. 7: Сетка при итерации №4

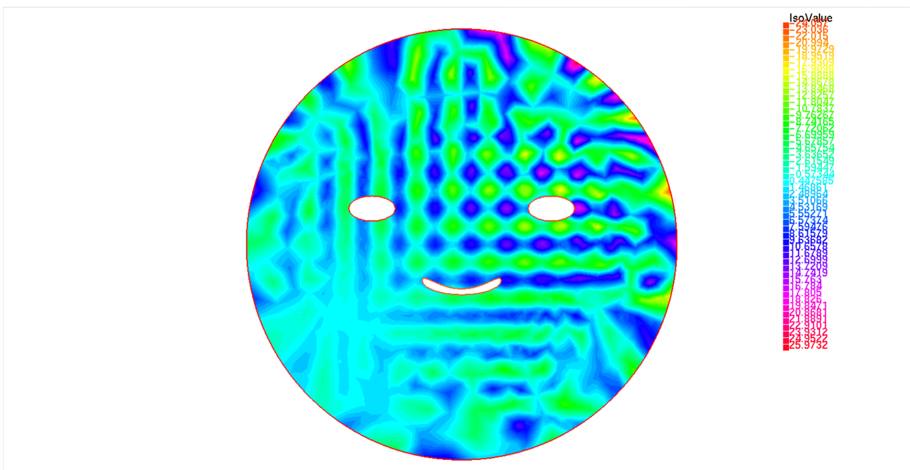

Рис. 8: Значение u в области при итерации №4

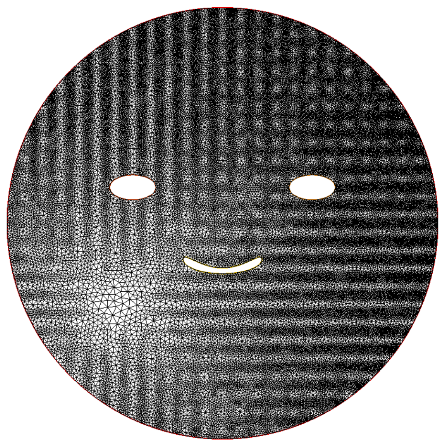

Рис. 9: Сетка при итерации №5

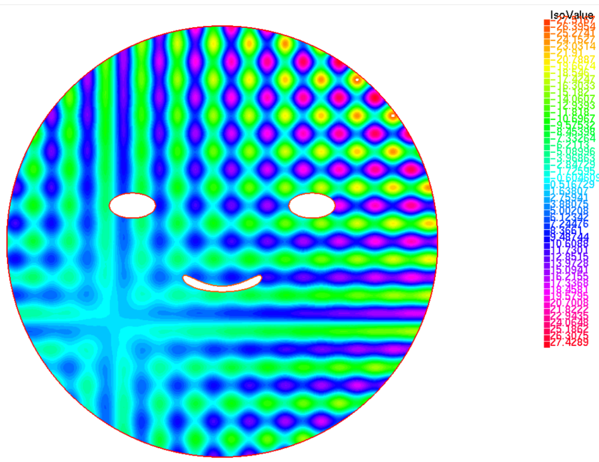

Рис. 10: Значение u в области при итерации №5

Численные результаты. Исследование сходимости

Таблица с численными результатами:

Error	$u[].n$	Норма точного решения, $\|u\|_{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\|u_{it}-u\|_{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\|u_{it}-u\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}$	Порядок сходимости, $\log_2 \frac{\|u_{it}-u\|_{L_2}}{\|u_{it/2}-u\|_{L_2}}$
0.1	3125	150.055	116.113	0.773804	-
0.05	9865	165.168	24.2204	0.146641	2.26124
0.025	22845	167.817	5.35032	0.0318819	2.17853
0.0125	42255	168.712	2.19274	0.0129969	1.28689
0.00625	93215	169.271	1.18027	0.00697263	0.893624

Вывод: новый шаг итерации по адаптации даёт улучшенную картину в области, а также уменьшает относительную погрешность, что может говорить о сходимости метода. Порядок сходимости имеет нестабильную картину в связи с быстром темпом снижения абсолютной погрешности и уточнением сетки в области.

2 Выполнение пункта 2)

Из главы 1 берём функцию u. В качестве стартовой точки, начальной точки и количество точек разбиения берём следующие параметры:

$$x1 = 2.0; \quad y1 = 3.0;$$

$$x2 = 9.0; \quad y1 = 7.0;$$

$$n = 50.$$

Тогда отрезок $\gamma(t)$ параметризуется следующим образом:

$$\gamma(t) = \{x1 + (x2 - x1) \cdot t, \ y1 + (y2 - y1) \cdot t\}, \ t \in [0; 1]$$

Перейдём к натуральному парамертру по через определение:

$$s(t) = \int_0^t \mid \gamma'(\phi) \mid \, d\phi = \int_0^t \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2} \, d\phi =$$

$$= \int_0^t \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} \, d\phi =$$

$$= \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2} \cdot t, \ t \in [0; 1]$$

Введём для удобства обозначение $\alpha = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$. Чтобы получить $\gamma(s)$, нужно через $s(t)$ получить $t(s)$ и подставить полученное в $\gamma(t)$:

$$s(t) = \alpha \cdot t \implies t(s) = \frac{s}{\alpha}, \ s \in [0; \alpha]$$

$$\gamma(s) = \{x1 + (x2 - x1) \cdot \frac{s}{\alpha}, \ y1 + (y2 - y1) \cdot \frac{s}{\alpha}\}, \ s \in [0; \alpha]$$

После чего вводим в файл "OutputAdaptmeshj где j - номер итерации, значения $(s_i, \, u(s_i))$, $i = 1, \ldots, n$ по следующему правилу:

$$s_i = \frac{i \cdot \alpha}{n - 1},$$

$$x_i = x1 + s_i \cdot \frac{x2 - x1}{\alpha},$$

$$y_i = y1 + s_i \cdot \frac{y2 - y1}{\alpha},$$

$$u(s_i) = u(x_i, y_i)$$

Далее написан скрипт на Python ScriptForGraph.py, который по данным файла строит графики u(s). Графики представлены ниже:

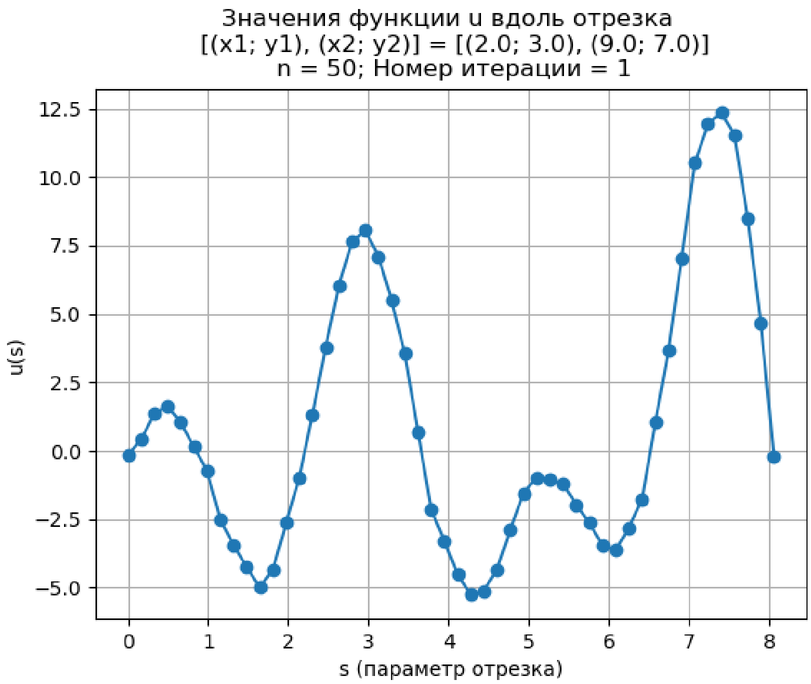

Рис. 11: График u(s) при итерации №1

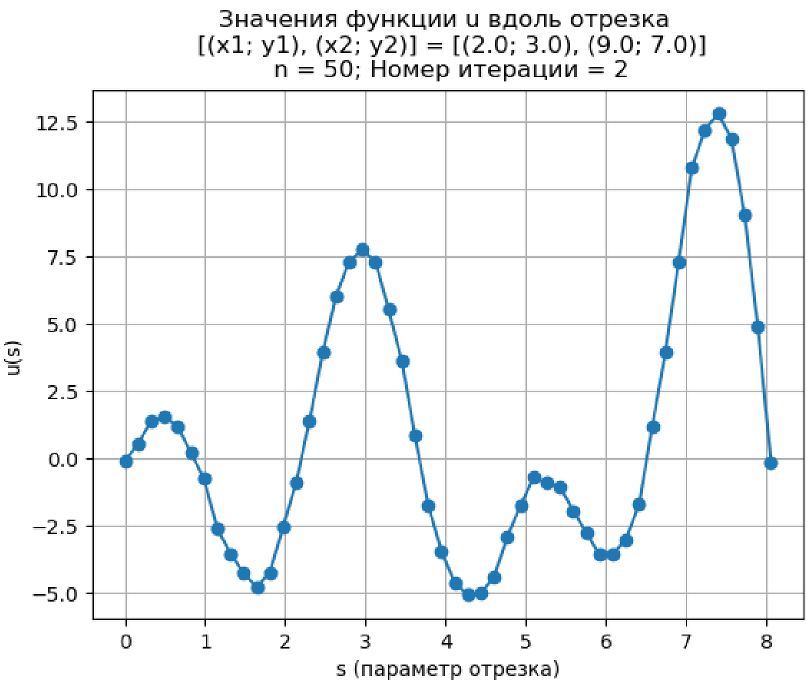

Рис. 12: График u(s) при итерации №2

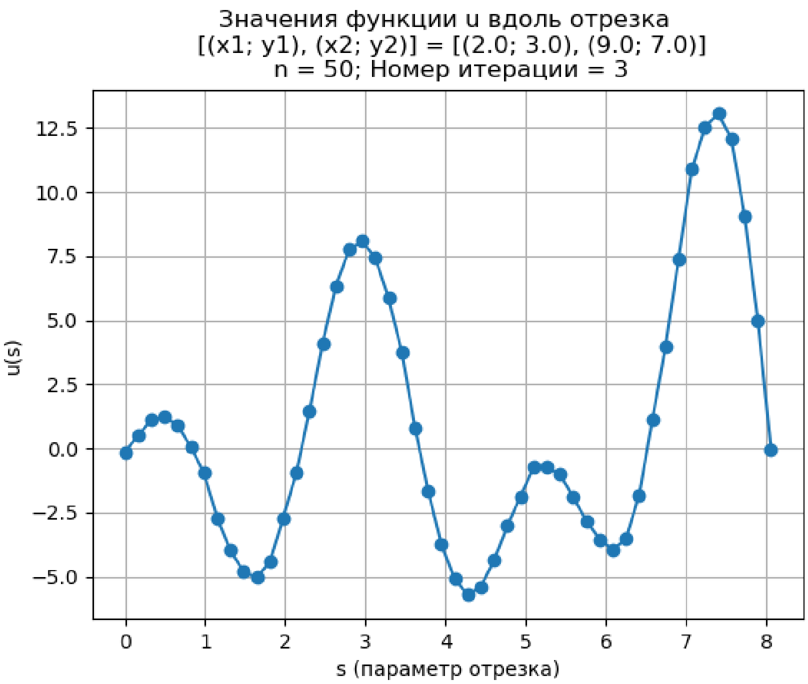

Рис. 13: График u(s) при итерации №3

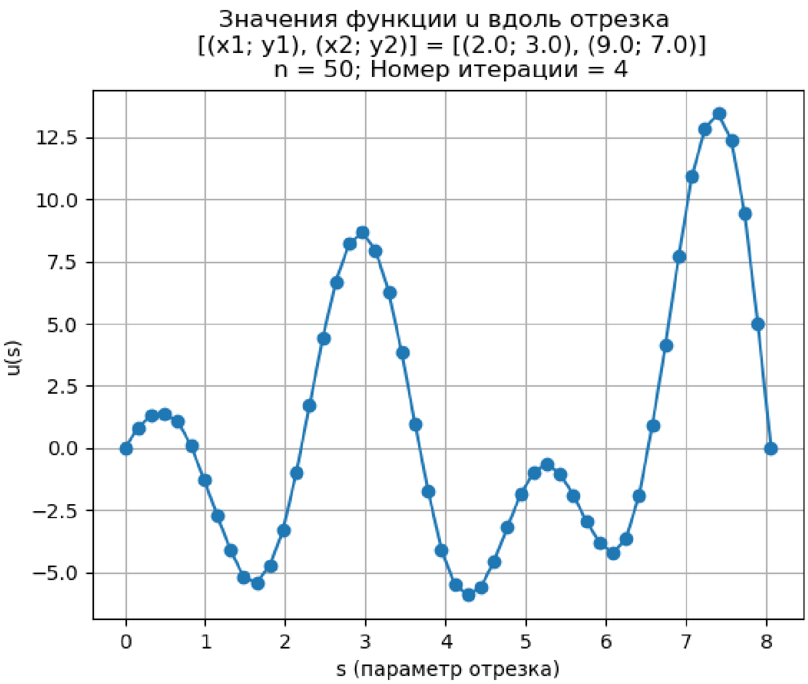

Рис. 14: График u(s) при итерации №4

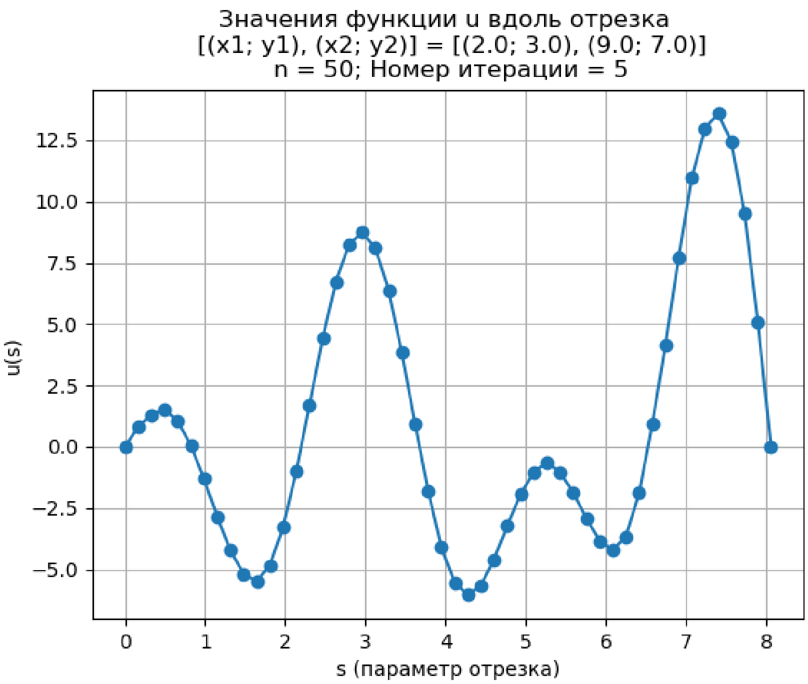

Рис. 15: График u(s) при итерации №5

Вывод: при каждой итерации график уточняется и становяться плавнее в местах точек перегиба.