Слабая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Исследование сходимости итерационыых способов решения BiCGStab и MUMPS

Работу выполнял: Копытков Дмитрий

Октябрь 2024

1 Слабая постановка

Выпишем задачу Дирихле для уравненея Пуассона на гладкой области Ω :

$$\Delta u = -f, u \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_{out}} = u_{out}, \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_{in}} = u_{in}. \tag{3}$$

Для этой задачи возьмём ненулевую функцию v такую, что

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

умножим (1) на нее и проинтегрируем по Ω:

$$\begin{gathered}
-\int_\Omega fv\,dx\,dy = \int_\Omega \Delta uv\,dx\,dy \xlongequal{\text{Свойство div}} \\
\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla uv)\,dx\,dy - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx\,dy \xlongequal{\text{Формула Гаусса-Остроградского}} \\
\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v\,dx\,dy - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx\,dy \xlongequal{v|_{\partial\Omega}=0} \\
-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx\,dy
\end{gathered} \tag{5}$$

Таким образом, выписана слабая постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона, то есть мы получили новое уравнение (5) с ГУ (2), (3), (4).

2 Численные результаты. Исследование сходимости

В качестве точного решения я взял $u(x, y) = x \cdot sin(\pi y) + y \cdot sin(\pi x)$. Также взял $u_{out} = u_{in} = u$ и

$$f = -\Delta u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \pi^2 \cdot y \cdot sin(\pi x) + \pi^2 \cdot x \cdot sin(\pi y) = \pi^2 \cdot u.$$

Введём следующие параметры:

$$N_{In} = 70;$$

$$coef = 2.5;$$

$$N_{Out} = int(coef * N_{In}) = 175;$$

$$\epsilon = 10^{-12}$$

$$iter_{max} = 10000$$

$$||u||_{L_2} = 158.323$$

Рассморим и сравним итерационный метод BiCGStab с прямым методом MUMPS seq.
Таблица с численными результатами при решении задачи с помощью метода BiCGStab:

tgv	Количество итераций, $iter$	Норма численного решения, $\|u_B\|_{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\|u_B - u\|_{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\|u_B - u\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}$
-1	395	157.381	3.50602	0.0221447
10^5	857	157.381	3.50604	0.0221448
10^8	482	157.382	3.57479	0.0225791
10^{10}	116	157.21	5.59016	0.0353085
10^{30}	1	30.7175	156.911	0.99108

Вывод по методу BiCGStab: данный метод хорошо работает с матрицами без положительной-определённости, что подтверждает значение абсолютной и относительной погрешности при $tgv = -1$. Однако метод плохо применим

для матриц с большим числом обусловленности, как показывают значения погрешностей при $tgv = 10^{10}$ и $tgv = 10^{30}$. Большие значения tgv быстрее устремляют невязку к нулю, из-за чего снижается количество итераций, что приводит к значительному ухудшению результата. Помимо этого, итерационный метод BiCGStab зависит от начального приближения. В моём случае начальное приближение одинаково для любых tgv, а значит для некоторых tgv результат может быть не объективен в силу выбора "плохого" u_0.
BiCGStab может подойти только для матриц с малым числом обусловленности и не портиться, если матрица является несимметричной или не положительно-определённой. Если это условие выполнено, то данный метод позволяет быстро и достаточно точно решить СЛАУ. Также, BiCGStab устойчив для несимметричных или не положительно-определённых матриц, что даёт преимущество по отношению к другим итерационным методам.

Таблица с численными результатами при решении задачи с помощью метода MUMPS seq:

tgv	Норма точного решения, $\|u_M\|_{L_2}$	Абсолютная погрешность, $\|u_M - u\|_{L_2}$	Относительная погрешность, $\frac{\|u_M - u\|_{L_2}}{\|u\|_{L_2}}$
-1	157.381	3.50602	0.0221447
10^5	157.381	3.50604	0.0221448
10^8	157.381	3.50602	0.0221447
10^{10}	157.381	3.50602	0.0221447
10^{30}	157.381	3.50602	0.0221447

Вывод по методу MUMPS seq: данный метод является стабильным для любых tgv, а также показывает достаточно высокую точность решения уравнения. Благодаря мультифронтальности, то есть разбиению матрицы A на особые подматрицы, сохраняется разреженность основной матрицы и метод имеет преимущество во времени работы по отношению к другим прямым методам. Из-за прямого решения изменение tgv практически не влияет на сам алгоритм, поскольку MUMPS seq воспринимает огромные значения tgv как бесконечно большие — они могут быть нормализованы или усечены.
Однако, стабильность не позволяет сделать численные результаты лучше, что может являться недостатком по сравнению с итерационным методом.

Общий вывод: MUMPS seq является наиболее предпочтительным вариантом для решения уравнения Пуассона с точки зрения точности. Однако важно не забывать, что прямые методы не эффективны по памяти, поскольку содержат информацию о дополнительных матрицах.