ค่ายอบรมโอลิมปิกวิชาการ 2 (วันที่ 1)

โครงสร้างข้อมูล : ฟังก์ชันเรียกตัวเอง

Data Structure : Recursive function

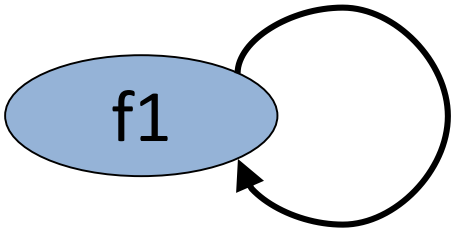
รัชดาพร คณาวงษ์

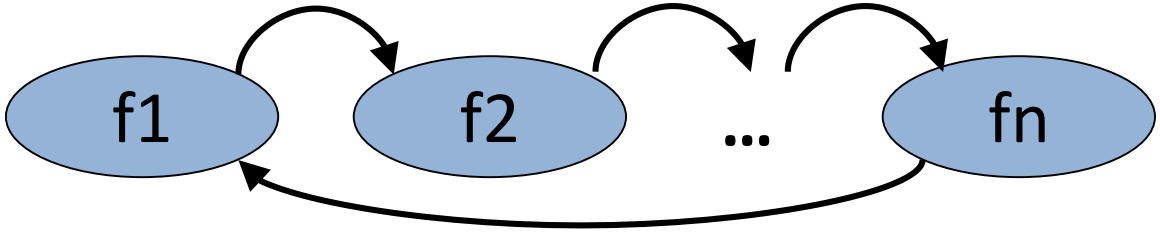
17-18 มีนาคม 2561

ศูนย์มหาวิทยาลัยศิลปากร

ฟังก์ชันเรียกตัวเอง (Recursive Function)

- เป็นฟังก์ชันชนิดที่มีคำสั่งเรียกตัวเอง (ทั้งทางตรงและทางอ้อม)
- ทำให้เกิดการวนการทำงานของชุดคำสั่งเมื่อมีการเรียกฟังก์ชันตัวเองใช้งาน
- ฟังก์ชันนี้จะต้องมีการส่งผ่านค่าพารามิเตอร์เพื่อให้เกิดการหยุดการทำงาน



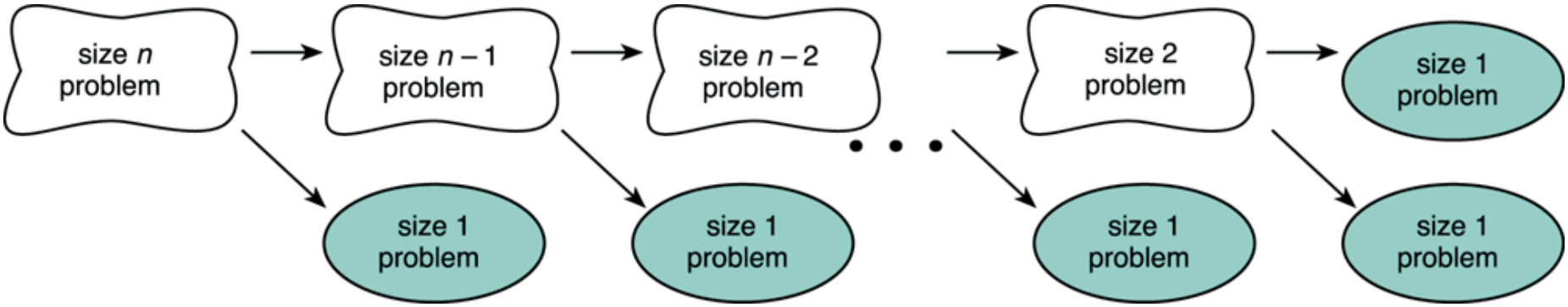


ปัญหาที่เหมาะกับฟังก์ชันเรียกตัวเอง

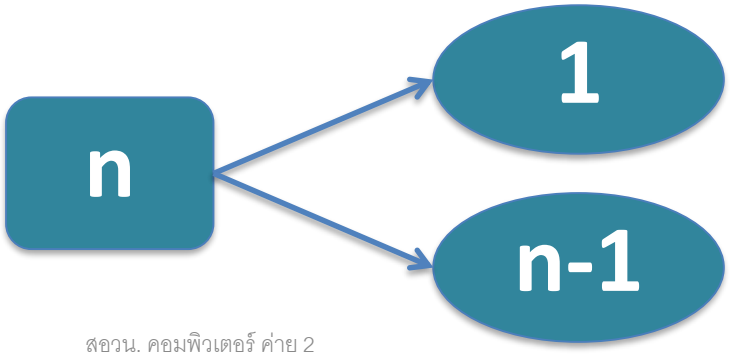
1. แบ่งเป็นกรณีพื้นฐาน (base case) ได้หนึ่งหรือมากกว่าที่สามารถหาค่าได้ตรงไปตรงมา
2. ปัญหาสามารถดำเนินการด้วยกรณีในข้อหนึ่งหรือการเรียกตัวเอง

```
if this is a simple case
    solve it
else
    redefine the problem using recursion
```

การแบ่งปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย



- สมมติว่าปัญหาที่มีขนาด 1 (size 1) สามารถแก้ไขได้ง่ายๆ
- เราสามารถทำการแยกปัญหาเป็นปัญหาที่เป็นขนาด 1 กับปัญหาที่เป็นขนาด n-1



ตัวอย่างของฟังก์ชันเรียกตัวเอง

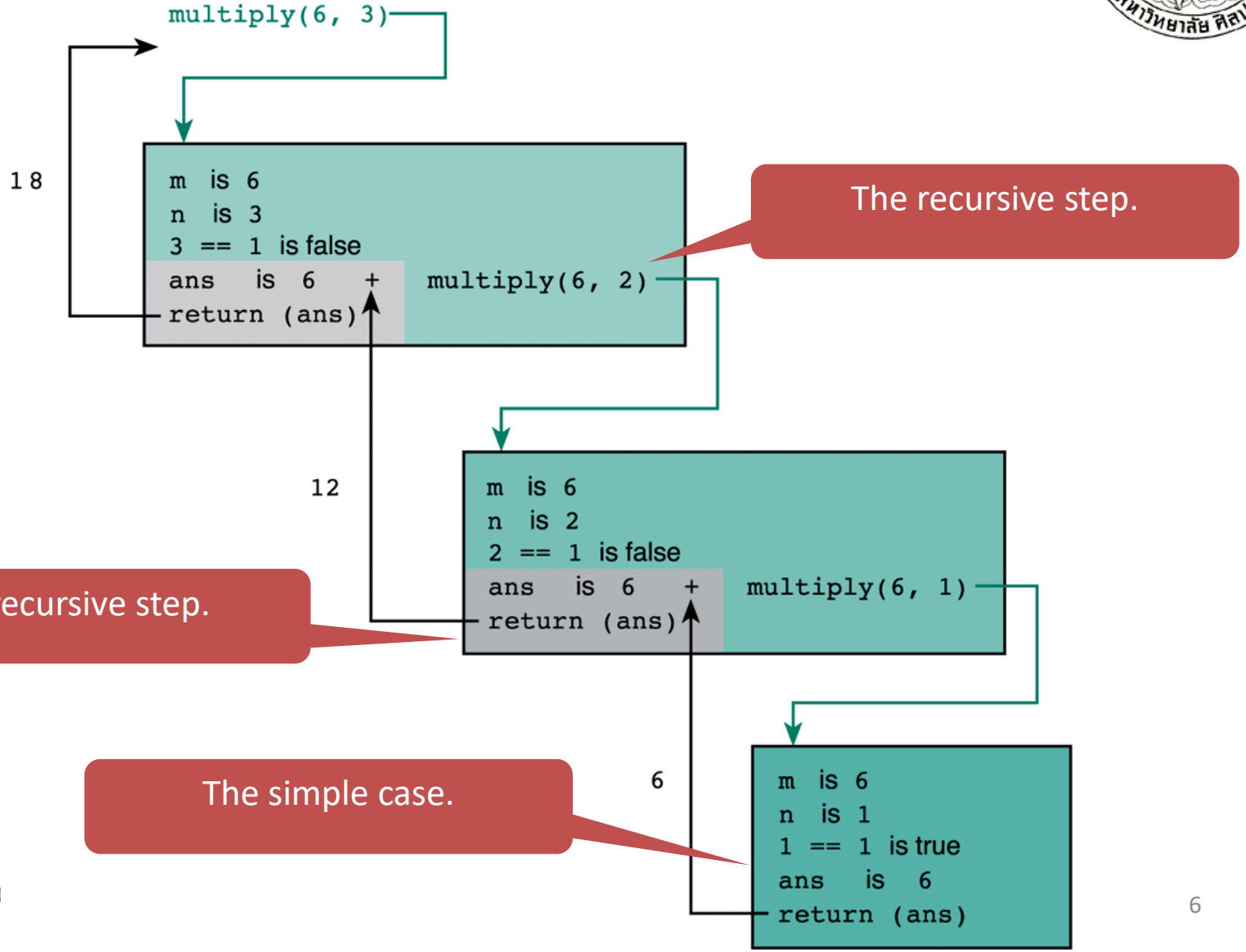
- ลองดูตัวอย่างการคูณด้วยการบวก

```
1.  /*
2.   *  Performs integer multiplication using + operator.
3.   *  Pre:   m and n are defined and n > 0
4.   *  Post:  returns m * n
5.   */
6.  int
7.  multiply(int m, int n)
8.  {
9.        int ans;
10.
11.       if (n == 1)
12.             ans = m;      /* simple case */
13.       else
14.             ans = m + multiply(m, n - 1);  /* recursive step */
15.
16.       return (ans);
17. }
```

The simple case is “m*1=m.”

The recursive step uses the following equation: “m*n = m+m*(n-1).”

ถ้าเราเรียก multiply (6,3) จะเกิดอะไรขึ้น



เราจะเขียนฟังก์ชันเรียกตัวเองได้อย่างไร

- กำหนดพารามิเตอร์ที่มีผลกับการดำเนินการ
- กำหนดกรณีพื้นฐาน (base case) คือกรณีที่มีการคำนวณหรือดำเนินการตรงไปตรงมา
- กำหนดกรณีทั่วไป (general case) คือกรณีที่มีการเรียกใช้ฟังก์ชันตัวเอง
- ตรวจสอบอัลกอริทึม โดยใช้วิธีถามสามคำถาม (Three-Question-Method)

Three-Question Method สำหรับตรวจสอบ

1. The Base-Case Question: มีทางที่จะออกจากฟังก์ชันโดยไม่ต้องเรียกตัวเองหรือไม่
2. The Smaller-Caller Question: ในการเรียกฟังก์ชันเป็นกรณีที่เล็กลงของปัญหาและนำไปสู่กรณีพื้นฐาน (base case) หรือไม่
3. The General-Case Question: ถ้าการเรียกตัวเองทำงานถูกต้อง ฟังก์ชันทั้งหมดทำงานถูกต้องด้วยหรือไม่

เงื่อนไขการจบ (Terminating Condition)

- ฟังก์ชันเรียกตัวเองต้องมีเงื่อนไขการจบ โดยจะมีหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่งก็ได้
- เงื่อนไขการจบคือเงื่อนไขที่จะดำเนินการใดๆ ที่ไม่เรียกใช้ตัวเอง
- ถ้าไม่มีเงื่อนไขการจบ ฟังก์ชันเรียกตัวเองจะทำงานไม่สิ้นสุด
- จากตัวอย่างก่อนหน้า เงื่อนไขการจบคือ if (n==1) ans = m

ตัวอย่างการนับตัวอักษรในสตริง

- การนับจำนวนตัวอักษรที่ปรากฏในสตริง เช่น จำนวนของตัวอักษร ‘s’ ในสตริง “Mississippi” คือ 4

```
1.  /*
2.   *  Count the number of occurrences of character ch in string str
3.   */
4.  int
5.  count(char ch, const char *str)
6.  {
7.
8.        int ans;
9.
10.       if (str[0] == '\0')                          /*  simple case  */
11.             ans = 0;
12.       else                          /*  redefine problem using recursion */
13.             if (ch == str[0])       /*  first character must be counted  */
14.                   ans = 1 + count(ch, &str[1]);
15.             else                    /*  first character is not counted   */
16.                   ans = count(ch, &str[1]);
17.
18.       return (ans);
19. }
```

The terminating condition.

ตัวอย่างการกลับคำ (Reverse Words)

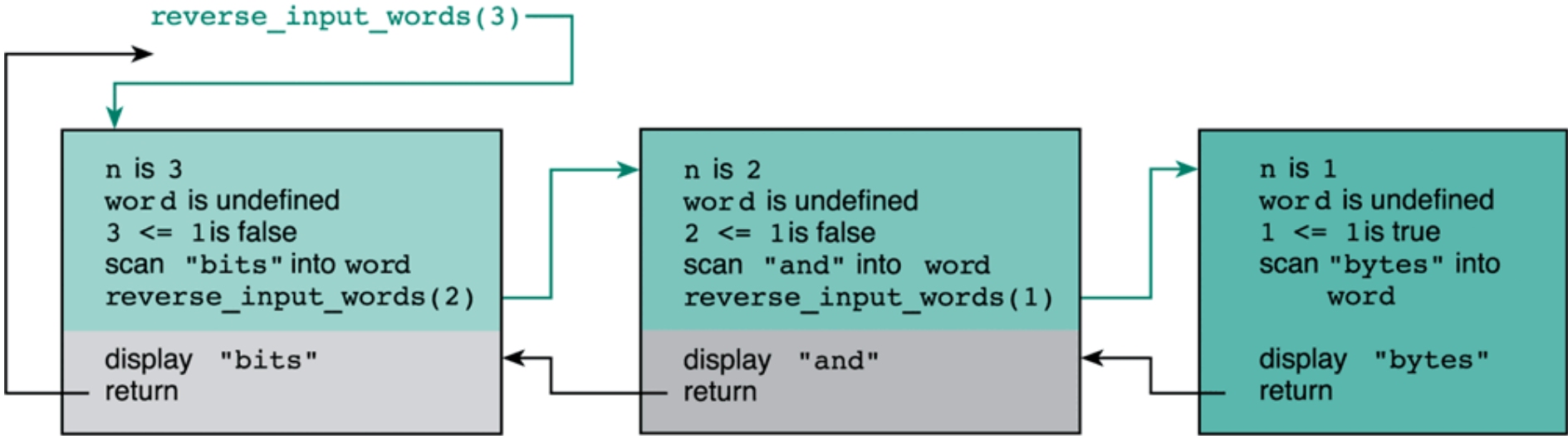
- ฟังก์ชันการเรียกตัวเองสามารถใช้กับการกลับสตริง

```
1.  /*
2.   *  Take n words as input and print them in reverse order on separate lines.
3.   *  Pre: n > 0
4.   */
5.  void
6.  reverse_input_words(int n)
7.  {
8.        char word[WORDSIZ];  /*  local variable for storing one word          */
9.
10.       if (n <= 1) {   /* simple case: just one word to get and print        */
11.
12.             scanf("%s", word);
13.             printf("%s\n", word);
14.
15.       } else {  /* get this word;
16.                  reverse order;
17.
18.             scanf("%s", word);
19.             reverse_input_words(n - 1);
20.             printf("%s\n", word);
21.       }
22. }
```

The scanned word will not be printed until the recursion finishes.

The first scanned word is last printed.

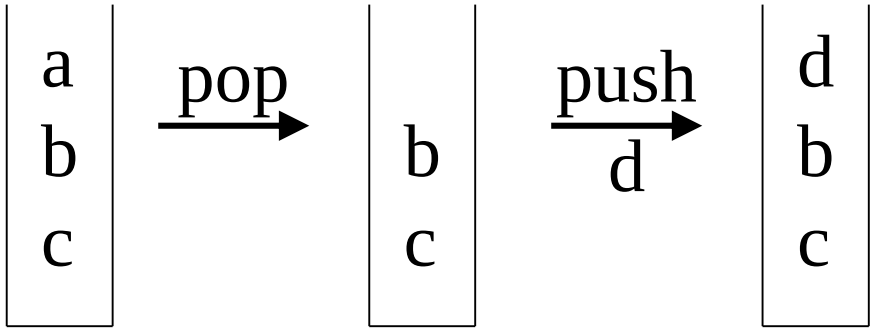
ตัวอย่างการกลับคำ (2/2)



- หมายเหตุ ฟังก์ชันการเรียกตัวเองเป็นแค่วิธีการหนึ่งในการแก้ปัญหา ปัญหานี้สามารถแก้ไขโดยไม่ใช้ฟังก์ชันเรียกตัวเองได้

ภาษาซีมีขั้นตอนในการจัดการฟังก์ชั่นอย่างไร

- ภาษาซีจะเก็บและใช้งานค่าในตัวแปรโดยใช้โครงสร้างสแตก
  - สแตกเป็นโครงสร้างข้อมูลที่ข้อมูลตัวสุดท้ายจะถูกเพิ่มเข้าไปเป็นข้อมูลตัวสุดท้ายและเป็นตัวแรกที่ถูกดึงออกมาใช้งาน
  - มีตัวดำเนินการข้อมูลในสแตก 2 อย่างคือ push และ pop



ภาษาซีมีขั้นตอนในการจัดการฟังก์ชันอย่างไร

- ทุกครั้งที่ฟังก์ชันถูกเรียก สถานะปัจจุบัน (execution state) ของฟังก์ชันเรียก (caller function) ซึ่งสถานะอาจจะเป็นพารามิเตอร์ ตัวแปรท้องถิ่น (local variables) และตำแหน่งหน่วยความจำ จะถูกจัดเก็บในสแตก (pushed onto the stack)
- เมื่อเอ็กซิคิวฟังก์ชันที่ถูกเรียกเสร็จ (called function is finished) ก็จะทำการดึงข้อมูลของฟังก์ชันออกมาจากสแตก (popping up the execution state from stack)
- กระบวนการนี้เพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันเรียกตัวเองทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การดีบักฟังก์ชันเรียกตัวเอง

- ฟังก์ชันเรียกตัวเองจะติดตามการทำงานและดีบักการทำงานได้ยาก เพราะค่าของตัวแปรในฟังก์ชันก่อนการเรียกตัวเองจะถูกเก็บในสแตก และตัวดีบักไม่สามารถแสดงตรงส่วนนี้ได้

```
1.  /*
2.   *  ***  Includes calls to printf to trace execution ***
3.   *  Performs integer multiplication using + operator.
4.   *  Pre:   m and n are defined and n > 0
5.   *  Post:  returns m * n
6.   */
7.  int
8.  multiply(int m, int n)
9.  {
10.       int ans;
11.
12.   printf("Entering multiply with m = %d, n = %d\n", m, n);
13.
14.       if (n == 1)
15.            ans = m;      /* simple case */
16.       else
17.            ans = m + multiply(m, n - 1); /* recursive step */
```

Watch the input arguments passed into each recursive step.

(continued)

การหาค่าแฟคทอเรียล

- ปัญหาหลายอย่างสามารถแก้ได้ด้วยฟังก์ชันเรียกตัวเอง

ตัวอย่างเช่น n factorial (n!)

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 1*2*3*\ldots*(n\text{-}1)*n & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

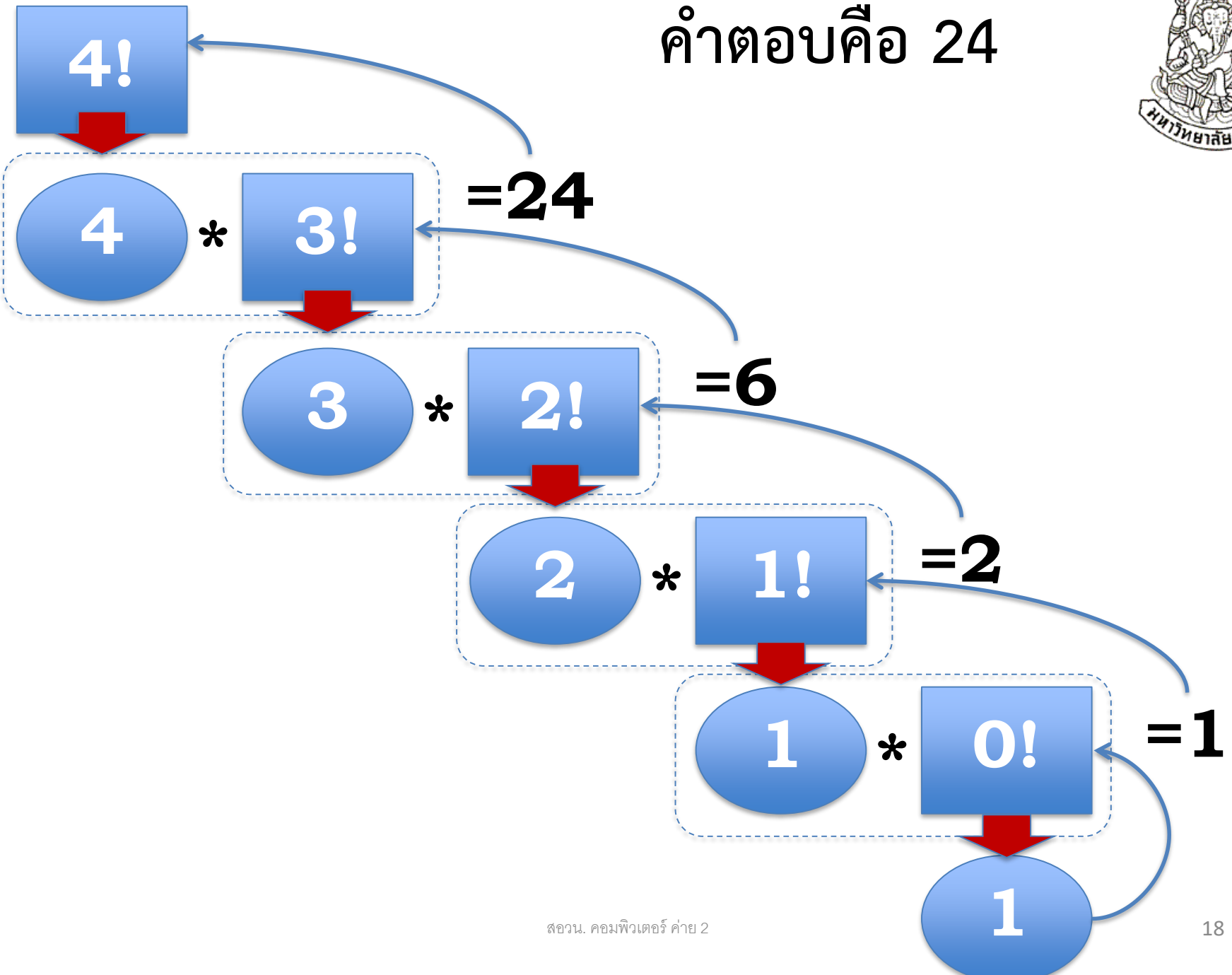
$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ (n\text{-}1)!*n & \text{if } n > 0 \end{cases} \quad (\textit{recursive} \text{ solution})$$

การหาค่าแฟคทอเรียลด้วยฟังก์ชันเรียกตัวเอง

- ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์หลายฟังก์ชันสามารถกำหนดและแก้ปัญหาด้วยการเรียกตัวเอง

```
1.  /*
2.   *  Compute n! using a recursive definition
3.   *  Pre:  n >= 0
4.   */
5.  int
6.  factorial(int n)
7.  {
8.        int ans;
9.
10.       if (n == 0)
11.             ans = 1;
12.       else
13.             ans = n * factorial(n - 1);
14.
15.       return (ans);
16. }
```

คำตอบคือ 24



การหาค่าแฟคทอเรียลด้วยการวนซ้ำ

- การหาค่าแฟคทอเรียลด้วยการวนซ้ำ (loop) ด้วยคำสั่ง for

```
1.  /*
2.   * Computes n!
3.   * Pre: n is greater than or equal to zero
4.   */
5.  int
6.  factorial(int n)
7.  {
8.      int i,              /* local variables */
9.          product = 1;
10.
11.     /* Compute the product n x (n-1) x (n-2) x ... x 2 x 1 */
12.     for  (i = n;  i > 1;  --i) {
13.         product = product * i;
14.     }
15.
16.     /* Return function result */
17.     return (product);
18. }
```

การเขียนโปรแกรมด้วยการวนซ้ำ (iterative) จะมีประสิทธิภาพมากกว่าการใช้ฟังก์ชันเรียกตัวเอง (recursive)

เลขลำดับฟิโบแนซซี่ (fibonacci sequence)

เลขลำดับฟิโบแนซซี่เป็นเลขลำดับที่มีชื่อเสียงมาก ซึ่งมีนิยามดังนี้

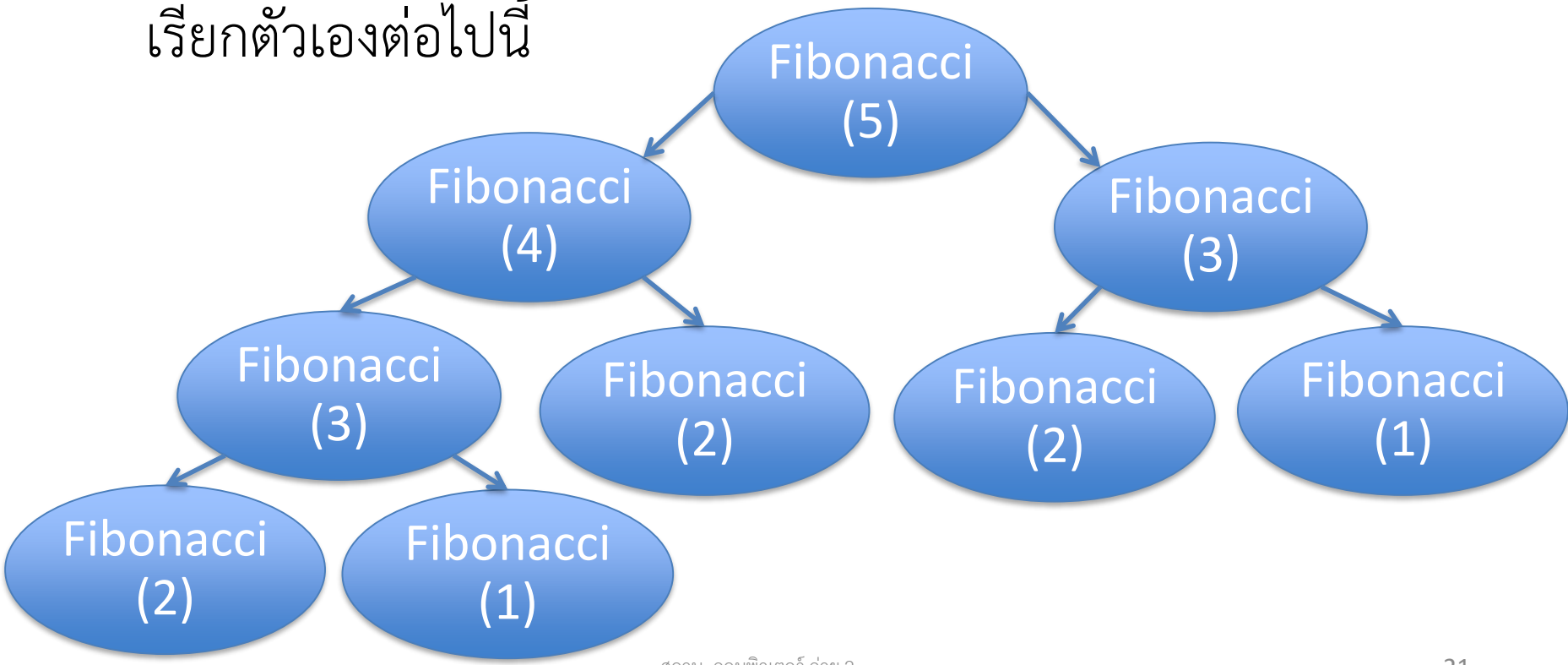
$F(1) = F(2) = 1$ และ $F(n) = F(n-1)+F(n-2)$ เมื่อ $n=3,4,\ldots$

วิธีการแก้ปัญหานี้ เราอาจใช้ฟังก์ชันเรียกตัวเอง

```
1.  /*
2.   *  Computes the nth Fibonacci number
3.   *  Pre: n > 0
4.   */
5.  int
6.  fibonacci(int n)
7.  {
8.        int ans;
9.
10.       if (n == 1  ||  n == 2)
11.             ans = 1;
12.       else
13.             ans = fibonacci(n - 2)  +  fibonacci(n - 1);
14.
15.       return (ans);
16. }
```

เลขลำดับฟิโบแนซซี่ (fibonacci sequence)

- ซึ่งจะเป็นว่าเป็นวิธีที่ไม่ดีเลย เพราะค่าลำดับของฟิโบแนซซี่ค่าเดียวกันอาจจะถูกคำนวณมากกว่าหนึ่งครั้ง ลองดูโครงสร้างการเรียกตัวเองต่อไปนี้



การหาค่าหารร่วมมาก(gcd)

- ถ้าอัลกอริทึมที่ใช้แก้ปัญหาถูกกำหนดให้ดำเนินการเรียกตัวเอง เราก็ควรจะใช้ฟังก์ชันเรียกตัวเองในการแก้ปัญหา
- ตัวอย่างเช่นการหาค่าหารร่วมมาก (the greatest common divisor:GCD) ของสองจำนวนเต็ม m และ n

<u>อัลกอริทึมการหาค่าหารร่วมมาก</u>

gcd(m,n) มีค่าเป็น n เมื่อ n หาร m ลงตัว

gcd(m,n) มีค่าเป็น gcd(m, เศษที่เหลือจากการหาร m ด้วย n)

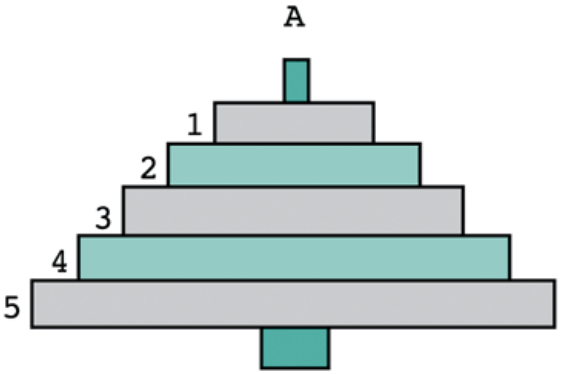
Recursive gcd function


```
1.  /*
2.   *  Displays the greatest common divisor of two integers
3.   */
4.
5.  #include <stdio.h>
6.
7.  /*
8.   *  Finds the greatest common divisor of m and n
9.   *  Pre:  m and n are both > 0
10.  */
11. int
12. gcd(int m, int n)
13. {
14.       int ans;
15.
16.       if (m % n == 0)
17.             ans = n;
18.       else
19.             ans = gcd(n, m % n);
20.
21.       return (ans);
22. }
```

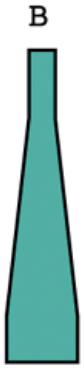
(continued)

A classical case : Towers of Hanoi

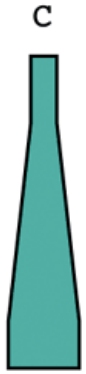
- ปัญหาหอคอยฮานอย (The towers of Hanoi) เป็นการเลื่อนจำนวนของจาน (ที่มีขนาดต่างกัน) จากหอคอยหนึ่งไปอีกหอคอย
  - ข้อจำกัดของปัญหาคือจากขนาดใหญ่จะไม่สามารถวางบนจานขนาดเล็กกว่าได้
  - เราย้ายได้แค่ 1 จานต่อครั้งเท่านั้น
  - ให้มี 3 หอคอยที่สามารถใช้ได้



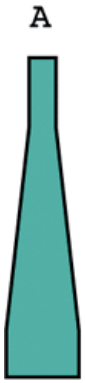
Source

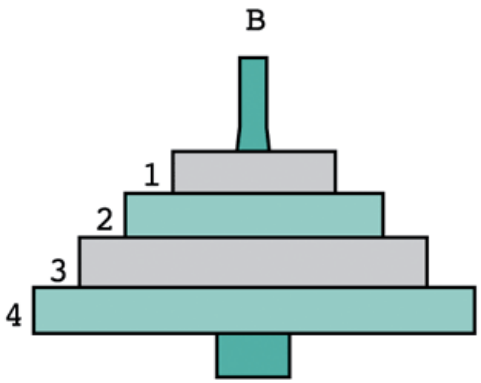


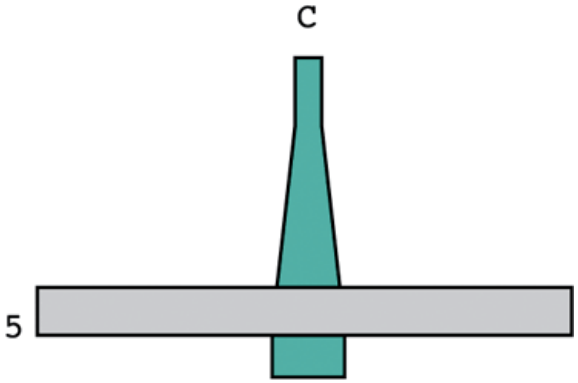
Temp

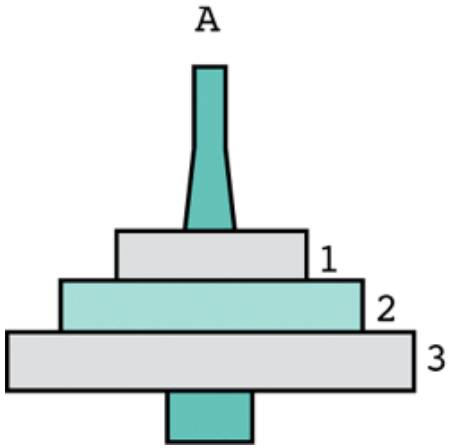


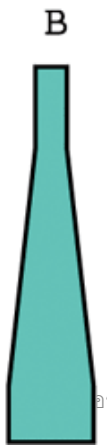
Destination

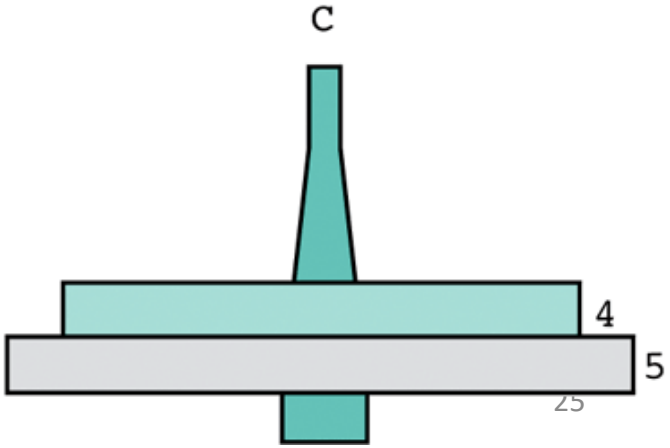












A classical case : Towers of Hanoi

- ปัญหานี้แก้ได้ด้วยการเรียกตัวเอง

<u>อัลกอริทึม</u>

ถ้า n เป็น 1

ย้าย disk 1 จาก source tower ไป destination tower

ถ้า n ไม่เป็น 1

1. ย้าย n-1 disks จาก source tower ไปที่ temp tower
2. ย้าย disk n จาก source tower ไปที่ destination tower
3. ย้าย n-1 disks จาก temp tower ไปที่ source tower

A classical case : Towers of Hanoi


```
1.  /*
2.   *  Displays instructions for moving n disks from from_peg to to_peg using
3.   *  aux_peg as an auxiliary.  Disks are numbered 1 to n (smallest to
4.   *  largest). Instructions call for moving one disk at a time and never
5.   *  require placing a larger disk on top of a smaller one.
6.   */
7.  void
8.  tower(char from_peg,     /* input - characters naming            */
9.        char to_peg,      /*         the problem's                */
10.       char aux_peg,     /*         three pegs                   */
11.       int n)            /* input - number of disks to
12. {
13.       if (n == 1) {
14.             printf("Move disk 1 from peg %c to peg %c\n    from_peg, to_peg);
15.       } else {
16.             tower(from_peg, aux_peg, to_peg, n - 1);
17.             printf("Move disk %d from peg %c to peg %c\n", n, from_peg, to_peg);
18.             tower(aux_peg, to_peg, from_peg, n - 1);
19.       }
20. }
```

The recursive step

The recursive step

A classical case : Towers of Hanoi

ผลลัพธ์เมื่อเรียก Tower(‘A’, ‘B’, ‘C’, 3);

```
Move disk 1 from A to C
Move disk 2 from A to B
Move disk 1 from C to B
Move disk 3 from A to C
Move disk 1 from B to A
Move disk 2 from B to C
Move disk 1 from A to C
```

จงเขียนโปรแกรมแก้ปัญหาต่อไปนี้

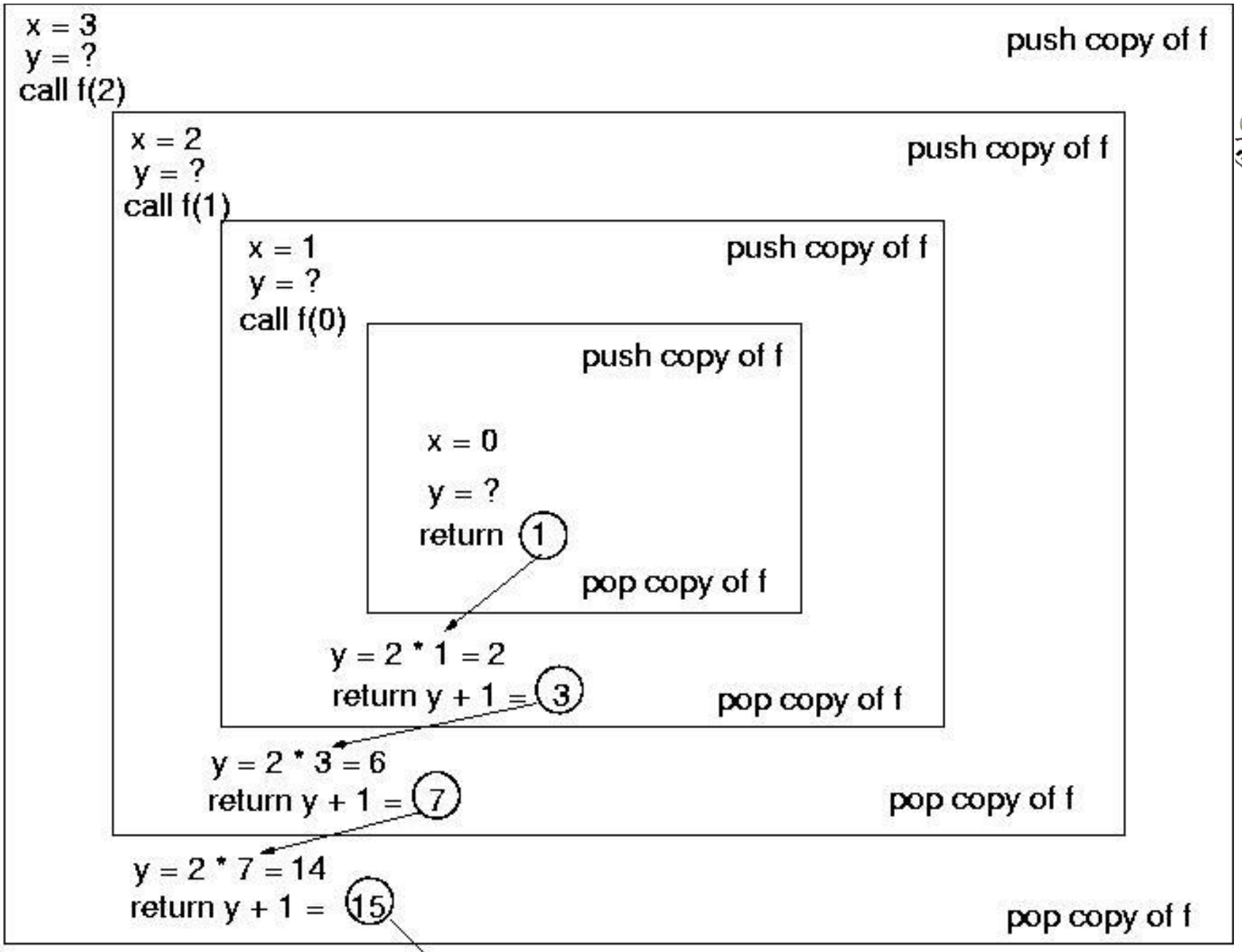
- หาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(n) = 2 * f(n-1) + 1 \text{ when } f(0) = 1$$

F(n) = 2*F(n-1)+1


```
int f(int x)
{
 int y;

 if(x==0)
  return 1;
 else {
   y = 2 * f(x-1);
   return y+1;
 }
}
```


x = 3
y = ?
call f(2)
push copy of f
x = 2
y = ?
call f(1)
push copy of f
x = 1
y = ?
call f(0)
push copy of f
x = 0
y = ?
return 1
pop copy of f
y = 2 * 1 = 2
return y + 1 = 3
pop copy of f
y = 2 * 3 = 6
return y + 1 = 7
pop copy of f
y = 2 * 7 = 14
return y + 1 = 15
pop copy of f
value returned by call is 15

จงเขียนโปรแกรมแก้ปัญหาต่อไปนี้

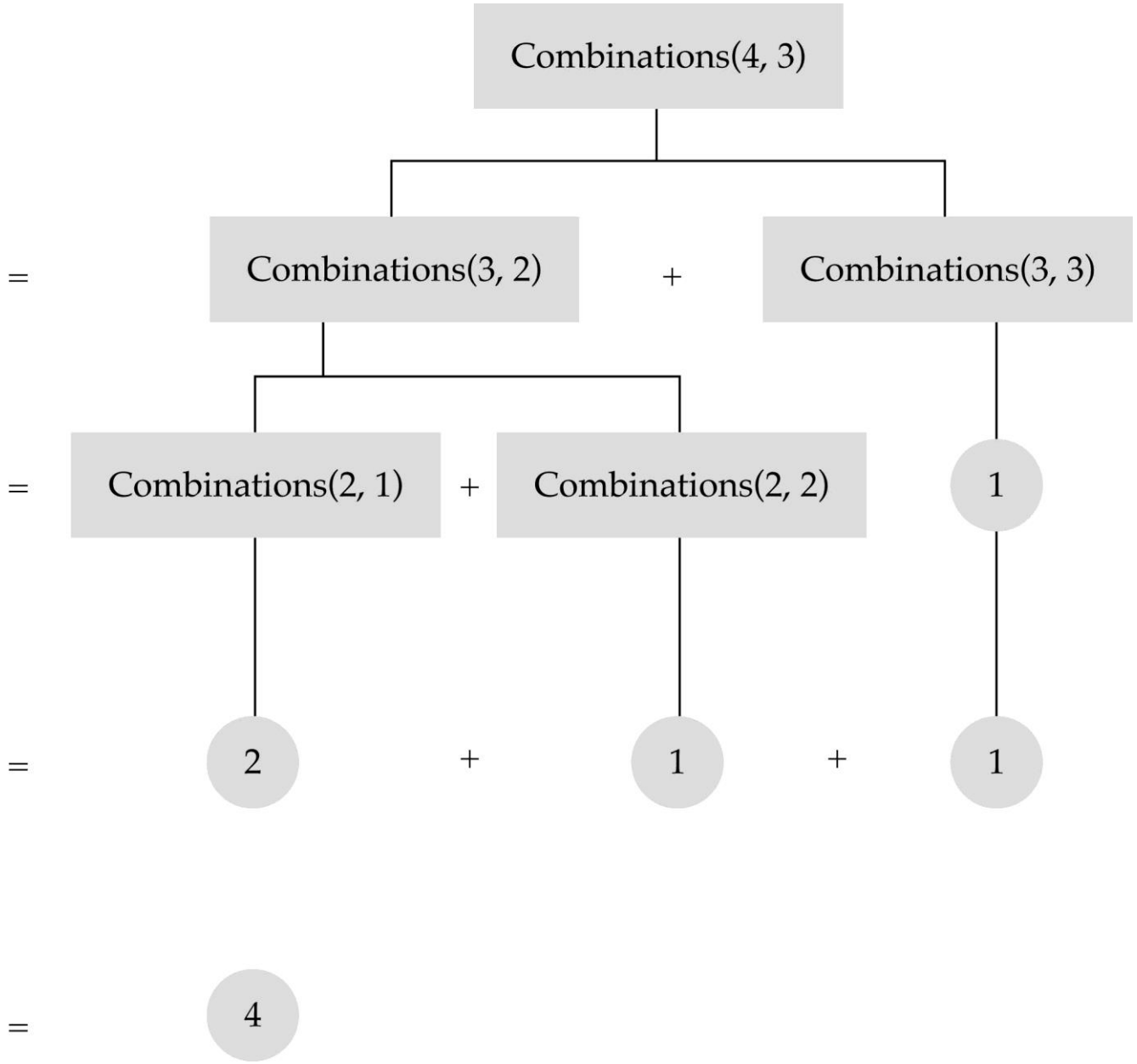
- n choose k Combinations
- ถ้ามี n สิ่ง จะมีวิธีที่แตกต่างในการเลือกสิ่งของ k ชิ้นกี่วิธี

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, 1 < \mathrm{k} < \mathrm{n}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, 1 < \mathrm{k} < \mathrm{n}$$

โดย

$$\binom{n}{1} = n \text{ เมื่อ } \mathrm{k} = 1, \binom{n}{n} = 1 \text{ เมื่อ } \mathrm{k} = \mathrm{n}$$


Combinations(4, 3)
=
Combinations(3, 2)
+
Combinations(3, 3)
=
Combinations(2, 1)
+
Combinations(2, 2)
1
=
2
+
1
+
1
=
4

n choose k Combinations


```
int combinations(int n, int k)
{
 if(k == 1)  // base case 1
   return n;
 else if (n == k)  // base case 2
   return 1;
 else
   return(Combinations(n-1, k) +
  Combinations(n-1, k-1));
}
```

จงใช้ฟังก์ชันเรียกตัวเองเพื่อหาสิ่งต่อไปนี้

- สูตรหาลำดับเลขคณิต

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- สูตรหาลำดับเรขาคณิต

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$