Теорема Рейнгольда

Кора Александр *

9 декабря 2018 г.

Аннотация

Неориентированным графом G назовем пару (V, E), где V — это непустое множество вершин, а E — множество неупорядоченных пар вершит, называемых ребрами. В работе я привожу доказательство теоремы Рейнгольда о существовании алгоритма проверки на наличие пути в неориентированном графе с логарифмической памятью.

Введение

Задача поиска пути решается довольно известным вероятностным алгоритмом с использованием логарифмической памяти. Однако данный алгоритм не является детерминированным, что не позволяет отнести задачу к классу L. В 2005 Омер Рейнгольд представил дерандомизацию данного вероятностного алгоритма, использующую аналогичное логарифмическое пространство памяти. Алгоритм Рейнгольда позволил отнести задачу к классу L, а дальнейшее использование зиг-заг произведения (одного из методов предложенных Рейнгольдом) позднее позволило доказать равенство классов SL и L.

Определение 1. *Неориентированным графом* $\mathbf{G}$ назовем пару $(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V}$ — это непустое множество вершин, а $\mathbf{E}$ — множество неупорядоченных пар вершин, называемых ребрами.

Определение 2. *Путем* в неориентированном графе называется последовательность вида $v_0 e_1 v_1 ... e_k v_k$, где $v_i \in \mathbf{V}$, $e_i \in \mathbf{E}$, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, k - длина пути.

Формулировка задачи 1. Задача **UPATH**: пусть дан граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, в котором зафиксированы вершины $s, t \in \mathbf{V}$. Требуется выяснить, есть ли путь из s в t.

1 Вероятностное решение задачи 1

Теорема 1. *Задача* **UPATH** *может быть решена вероятностным алгоритмом с логарифмической памятью.*

*ФИВТ МФТИ, группа 699, e-mail: kabutops@mail.ru

Доказательство теоремы 1 полностью описано в [1]. Основной идеей является рассмотрение случайного блуждания по графу, начиная в вершине s, размера $poly(|\mathbf{V}|)$. Далее доказывается, что распределение вероятностей попадания в произвольную вершину быстро становится близко к равномерному. За счет этого показывается, что если между s и t есть путь, то можно подобрать полином так, чтобы вероятность попадания данным алгоритмом в t была близка к 1.

Нам же для дерандомизации алгоритма понадобиться только следующая лемма, которой мы воспользуемся без доказательства:

Лемма 1. *В d-регулярном однородном и недвудольном графе с n вершинами разница между первым и вторым по абсолютной величине собственным числом не меньше полинома от $1/n$, т.е.*

$$1 - \frac{\lambda}{d} \geqslant \Theta\left(\frac{1}{(n')^c}\right)$$

, где собственные числа берутся нормированными (деленными на степень регулярности), а константа не зависит от d и n.

2 Детерминированное решение задачи 1

Теорема 2. *Задача* **UPATH** *может быть решена детерминированным алгоритмом с логарифмической памятью.*

Для доказательства данной теоремы нам понадобится ввести несколько новых объектов связанных с графами, и доказать про них пару утверждений.

Определение 3. Неориентированный граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на две части $\mathbf{U} \cup \mathbf{W} = \mathbf{V}$, так, что

(1) ни одна вершина в $\mathbf{U}$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $\mathbf{U}$ и

(2) ни одна вершина в $\mathbf{W}$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $\mathbf{W}$,

В таком случае множества $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ называют *долями* двудольного графа $\mathbf{G}$.

Определение 4. Двудольный граф $\mathbf{G} = (\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{E})$ ($\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ — левая и правая доли, $\mathbf{E}$ — множество ребер) называется (n, m, d)-экспандером (расширяющим графом), если $|\mathbf{L}| = n$, $|\mathbf{R}| = m$, степень всех вершин в левой доле равна d и выполняются следующие свойства расширения:

(1) Для любого множества $\mathbf{S} \subset \mathbf{L}, |\mathbf{S}| \leqslant c_1 n$ множество соседей (соседи $\mathbf{S}$ лежат в $\mathbf{R}$) достаточно велико: $|\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S})| > c_2 d |\mathbf{S}|$.

(2) Для любого множества $\mathbf{S} \subset \mathbf{L}, |\mathbf{S}| \leqslant \frac{n}{2}$ множество соседей немного больше самого множества $\mathbf{S}$, а именно, $|\mathbf{\Gamma}(\mathbf{S})| > c_3 |\mathbf{S}|$.

Константы c_1, c_2, c_3 выбираются в зависимости от приложения.

Везде далее считаем, что $c_1 = \frac{1}{1000d}, c_2 = \frac{7}{8}, c_3 = \frac{9}{8}$. Существование (n, m, d)-экспандеров для данных констант при достаточно больших n и d доказано в [1].

Рассмотрим *однородный* ($|\mathbf{L}| = |\mathbf{R}|$) (n, m, d)-экспандер с симметричным графом (т. е. вершины в его долях можно занумеровать таким образом, что, если в графе есть ребро, соединяющее i-ую вершину из левой доли с j-ой вершиной из правой, то должно быть и симметричное ему ребро, ведущее из j-ой вершиной левой доли в i-ую вершину правой, в частности между вершинами с одинаковыми номерами должно быть четное число ребер). Для такого экспандера двудольная конструкция является излишнем усложнением. Его доли можно 'склеить' по соответствующим вершинам. В полученном графе будет n вершин степени d (из каждой выходит по d ребер, с учетом петель и кратных ребер). Такой граф описывается *матрицей смежности* A, где в каждой ячейке a_{ij} записано количество ребер между вершинами i и j.

Определение 5. Граф, степени всех вершин которого равны d, называется *регулярным графом степени* d.

Определение 6. Регулярный граф степени d с n вершинами, у матрицы смежности которого все собственные числа кроме одного по абсолютной величине не превосходят αd, будем называть *алгебраическим* (n, d, α)*-экспандером.*

Для алгебраических экспандеров справедлива следующая теорема и ее следствие:

Теорема 3. *(О реберном расширении) Пусть* $\mathbf{G}$ *- алгебраический* (n, d, α)*-экспандер. Тогда для любого множества* $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$ *такого, что* $|\mathbf{A}| \leqslant \frac{n}{2}$*, не менее чем* $\frac{(1-\alpha)d}{2}|\mathbf{A}|$ *ребер ведут вовне* $\mathbf{A}$.

Воспользуемся теоремой для доказательства следствия (само доказательство теоремы непосредственно не связано с нашей задачей, поэтому приводить его нет необходимости).

Следствие 1. *Диаметр всякого алгебраического* (n, d, α)*-экспандера равен* $O(\log n)$

Доказательство. Рассмотрим подмножество вершин $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$, размер которого не превосходит $n/2$. По теореме 3 из данного подмножества выходит не менее $\frac{(1-\alpha)d}{2}|\mathbf{A}|$ ребер. Степень каждой вершины экспандера равна d, поэтому размер множества соседей $|\mathbf{\Gamma}(\mathbf{A})| \geqslant \frac{(1-\alpha)}{2}|\mathbf{A}|$.

Пусть x и y две вершины экспандера. Рассмотрим шары радиуса r с центрами в этих точках (т. е. вершины, кратчайшее расстояние от которых до x или y не превосходит r). Пока в шаре не более $n/2$ вершин, при увеличении его радиуса на 1 количество вершин увеличивается хотя бы в $1 + \frac{(1-\alpha)}{2}$ раз. Если в обоих шарах будет больше $n/2$ вершин то они пересекутся. Следовательно, на момент пересечения (минимальные размеры радиусов, при которых в каждом шаре будет больше $n/2$ вершин) сумма радиусов шаров будет равна $O(\log n)$. □

Константа в $O(\log n)$ зависит от α (а именно чем меньше α, тем больше основание логарифма, соответственно меньше константа). На данный момент Бордер и Шамир (Border-Shamir) доказали, что второе собственное число большинства графов имеет порядок $O(d^{\frac{3}{4}})$. Намного более сложными рассуждениями Джол Фридман (Joel Friedman) доказал, что на самом деле у большинства d-регулярных графов второе собственное число близко к $2\sqrt{d-1}$. Следовательно α можно сделать достаточно маленьким, и следствие имеет практический смысл.

Далее введем операцию необходимую для доказательства теоремы 2.

Определение 7. *Сбалансированным подстановочным произведением* регулярных графов $\mathbf{G}(n, D), \mathbf{H}(D, d)$ (графы заданы количеством вершин, и степенью регулярности, причем степень регулярности первого графа равна количеству вершин второго) будем называть регулярный граф $\mathbf{K}(nD, 2d) = \mathbf{G}(n, D)\circledR\mathbf{H}(D, d)$, который получается следующим образом:

(1) Каждую вершину графа $\mathbf{G}$ заменяем копией графа $\mathbf{H}$, прикрепив ребра первого графа к ребрам второго. (рис. 1,2)

(2) Все ребра графа $\mathbf{G}$ берем с кратностью d (т. е. делаем так чтобы в полученном графе степень регулярности была $2d$, d пунктирных линий и d сплошных).

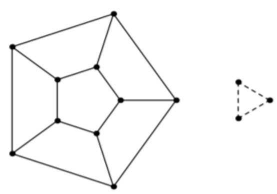

Рис. 1: Графы $\mathbf{G}(10, 3)$ и $\mathbf{H}(3, 2)$

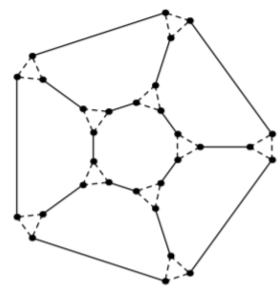

Рис. 2: Результат первого шага.

Смысл введения данной операции состоит в том, что можно хорошо оценить второе (по абсолютной величине) собственное число сбалансированного подстановочного произведения двух алгебраических экспандеров.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{G}$ *— алгебраический* $(n, D, 1 - \epsilon)$*-экспандер,* $\mathbf{H}$ *— алгебраический* $(D, d, 1-\delta)$*-экспандер. Тогда их сбалансированное подстановочное произведение* $\mathbf{G}\circledR\mathbf{H}$ *— алгебраический* $(nD, 2d, 1 - \epsilon\delta^2/24)$*-экспандер.*

Один из вариантов доказательства данной теоремы предложен в [1]. Мы же используем ее без доказательства.

Перейдем непосредственно к доказательству основной теоремы 2

Доказательство. Положим, нам дан граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, $|\mathbf{V}| = n$. Если он является алгебраическим $(n, d, 0.99)$-экспандером, то по следствию 1 его диаметр равен $O(\log n)$. Поэтому перебором всевозможных путей длины $C \log n$, начинающихся в вершине s, мы за полиномиальное время и логарифмическую память определим ведет ли хотя бы один из низ в t. Иначе приведем $\mathbf{G}$ специальному виду похожему на алгебраический $(n, d, 0.99)$-экспандер и проведем аналогичные рассуждения.

Определим граф $\mathbf{G}'$, который получается из $\mathbf{G}$ путем замены каждой вершины степени $d > 3$ на цикл длины d. Ребра ведущие в вершину графа $\mathbf{G}$ теперь будут аналогичным образом вести в разные вершины, соответствующего ей, цикла (т. к. степень вершины и размер цикла совпадают, то в каждую вершину ведет ровно одно ребро). Таким образом максимальная степень вершины графа $\mathbf{G}'$ не превосходит 3, а количество вершин графа n' равно полиному от n (каждая вершина “раздулась” в цикл длины не более $n - 1$ или не поменялась вообще).

Определим граф $\mathbf{G}''$ добавив к каждой вершине графа $\mathbf{G}'$ нужное количество петель так, чтобы получился d^{50}-регулярный граф. Константу d выберем так, чтобы существовал алгебраический $(d^{50}, d/2, 0.01)$-экспандер $\mathbf{H}$. Такая константа существует из теоремы о существовании экспандеров, о которой говорилось вначале и теоремы

Джола Фридмана о графах с достаточно малыми вторыми по абсолютной величине собственными числами.

Определим рекурсивно графы $\mathbf{G_i}$:

$$\mathbf{G_0} = \mathbf{G''}$$
$$\mathbf{G_{i+1}} = (\mathbf{G_i} \circledR \mathbf{H})^{50}$$

Возведение матрицы регулярного графа в степень k позволяет получить нам граф, у которого такое же количество вершин, степень каждой вершины возводится в k (так как суммы по всем столбцам и строкам равны), второе собственное число аналогично возводится в степень k (его собственный вектор умножается на степень). Таким образом каждый граф $\mathbf{G_i}$ является алгебраическим $(n'd^{50i}, d^{50}, 1-\epsilon_i)$-экспандером, где $1-\epsilon_i = \left(1 - \frac{\epsilon_{i-1}0.99^2}{24}\right)^{50}$ (следует из теоремы 4). Заметим, что для малых x имеем $(1-x)^{50} \approx 1 - 50x$. Поэтому, если ϵ_{i-1} достаточно мало, то $\epsilon_i \approx \frac{50\epsilon_{i-1}0.99^2}{24} \approx 2\epsilon_{i-1}$. Так как все степени и коэффициенты фиксированы, то достаточно сделать константное число шагов, чтобы ϵ стало достаточно мало для применения приближенного перехода.

Применим лемму 1 к $\mathbf{G_0} : \epsilon_0 \geqslant \Theta\left(\frac{1}{(n')^c}\right)$. Следовательно при $i = O(\log n)$ мы получим алгебраический экспандер $\mathbf{G_i}$ у которого второе абсолютное число (деленное на степень регулярности) не превосходит 0.99.

Вершины графа $\mathbf{G_i}$ получаются как тензорное произведение вершин $\mathbf{G''}$ и i копий вершин $\mathbf{H}$ (мы каждый раз "раздували" вершины в граф $\mathbf{H}$). Поэтому существование пути из вершины s в вершину t в графе $\mathbf{G}$ равносильно существованию пути из вершин с первой тензорной компонентой s в вершины с первой тензорной компонентой t. Так как $i = O(\log n)$, то количество вершин графа $\mathbf{G_i}$ не превосходит полинома от n, $|\mathbf{V}(\mathbf{G_i})| = n'd^{50i} = poly(n)$(последний переход корректен, так как константа d выбиралась вне зависимости от n). Как показано выше, его второе по абсолютной величине собственное число (нормированное) не превосходит 0.99, а значит, по следствию 1 его диаметр равен $O(\log n)$. Перебирая все пути из вершин с первой тензорной компонентой s размера $C \log n$, мы проверим st-связность. □

Список литературы

[1] А. Ромащенко и А. Шень, *Экспандеры: Построение и некоторые приложения*, 2009, ссылка.

[2] O. Reingold, *Undirected connectivity in log-space*, Journal of the ACM, **55**:4 (2008).

[3] А. Ромащенко, *Экспандеры: Конструкции и приложения*, 2015, ссылка.

[4] S. Arora, B.Barak, *Computational Complexity: A modern Approach*, ссылка.