Точки задающие треугольники с попарно различными радиусами описанных окружностей

Кора Александр *

18 декабря 2017 г.

Аннотация

П. Эрдёш поставил вопрос, всегда ли среди большого числа точек общего положения, найдутся k таких, что все треугольники с вершинами в этих точках имеют попарно различные радиусы описанных окружностей. Позже он доказал, что это действительно так. Однако, он упустил нетривиальный случай в своем доказательстве, и в этой статье мы разберем этот случай, используя теорему Безу для оценки количества точек пересечения двух кривых n порядка.

Введение

В 1975 [1] П. Эрдёш поставил задачу:

Задача. *Верно ли, для любого k найдется такое n_k, что среди любых n_k точек на плоскости, находящихся в общем положении, всегда найдутся k таких, что все $\binom{k}{3}$ треугольников с вершинами в этих точках имеют попарно различные радиусы описанных окружностей.*

В 1978 году, П. Эрдеш опубликовал статью [2], в которой доказал существование такого $n_k \leqslant 2\binom{k-1}{2}\binom{k-2}{3} + k$. Позже в 2014 году в статье [3] было замечено, что доказательство П. Эрдёша содержит ошибку, и доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть дано натуральное положительное k, а n_k — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее следующим условиям: среди любых n_k точек на плоскости, находящихся в общем положении, найдутся k таких, что все треугольники с вершинами в этих точках имеют попарно различные радиусы описанных окружностей. Тогда $n_k = O(k^9)$.*

Далее, в разделе 1 мы приведем вспомогательные утверждения, которые могут оказаться полезными. В разделе 2 будет приведен план доказательства теоремы 1, а так же будет приведен путь, возможно улучшающий оценку n_k.

*ФИВТ МФТИ, группа 699, научный руководитель: А.А. Полянский. e-mail: kabutops@mail.ru

1 Возможно полезные утверждения

Для доказательства теоремы 1 в статье [3] используются следующие вспомогательные кривые:

Пусть $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ две различные пары точек на плоскости. Обозначим через $R(ABC)$ радиус описанной окружности треугольника $\triangle ABC$, через $C(AB, CD)$ геометрическое место точек X таких, что $R(ABX) = R(CDX)$. Считая радиус описанной окружности треугольников по формуле

$$R(ABX) = \frac{|AB||BX||AX|}{4|ABX|},$$

имеем, что $C(AB, CD)$ является алгебраической кривой порядка не больше 6, задающейся уравнением

$$|AB|^2|BX|^2|AX|^2|CDX|^2 - |CD|^2|CX|^2|DX|^2|ABX|^2 = 0,$$

где $|AB|$ это площадь треугольника $\triangle ABC$. Действительно, перемножая квадраты модулей отрезков получаем многочлен не более чем 4 степени. Считая площади треугольников как полупроизведения расстояний от точки X до отрезков AB и CD на длину соответствующих отрезков, получаем многочлены второй степени. Значит в произведении имеем многочлен не более чем 6 степени.

Однако, при рассмотрении специфического случая совпадения двух точек A и C, $C(AB, CD)$ можно будет заменить на многочлен второй степени (это будет гипербола). Действительно,

$$|AB|^2|BX|^2|AX|^2|ADX|^2 - |AD|^2|AX|^2|DX|^2|ABX|^2 = 0 \Longleftrightarrow \\ |AX|^2(|AB|^2|BX|^2|ADX|^2 - |AD|^2|DX|^2|ABX|^2) = 0. \quad (1)$$

Случай $X = A$ не является интересным. Выражение в скобках является многочленом четвёртой степени. Заметим, что все точки лежащие на описанной окружности ω треугольника $\triangle ABD$ удовлетворяют данному уравнению, а по условию все точки должны находится в общем положении. Так как ω определена неразложимым многочленом второй степени, $C(AB, AD)$ представляется в виде многочлена шестой степени и в пересечении они дают бесконечное множество точек, то по теореме Безу имеем, что искомое ГМТ представляется в виде многочлена не более чем второй степени.

2 Пути улучшения оценки

Приведем краткое доказательство теоремы 1 (полное представлено в статье [3]). Для этого используем без доказательства следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть дана неразложимая алгебраическая кривая Γ порядка не больше 6.Тогда для любого натурального k существует натуральное $m_k = O(k^5)$ удовлетворяющее следующим условиям: в любом множестве $\Theta \subset \Gamma$ содержащим m_k точек, находящихся в общем положении, найдется подмножество Λ состоящее из k точек такое, что все треугольники с вершинами из Λ имеют попарно различные радиусы описанных окружностей.*

Доказательство теоремы 1. Пусть Θ множество состоящее из n точек общего положения, l размер максимального подмножества $\Lambda \subset \Theta$ такого, что радиусы всех треугольников с вершинами из Λ попарно различны. Так как Λ максимальное, то каждая из $n-l$ точек множества $\Theta \setminus \Lambda$ на одной из следующих кривых:

(1) Окружность, проходящая через две точки Λ, с радиусом равным радиусу описанной окружности какого-то треугольника с вершинками из Λ.

(2) $C(AB, CD)$, где $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ две различные пары точек множества Λ.

Оценим $n-l$ сверху. Так как по условия никакие 4 точки не лежат на одной окружности, точек множества $\Theta \setminus \Lambda$ не больше чем $2\binom{l}{2}\binom{l}{3}$. Действительно, $\binom{l}{2}$ способов выбрать пару точек, $\binom{l}{3}$ всевозможных радиусов, 2 варианта расположения точки относительно выбранного отрезка. Количество способов выбрать 2 пары точек из $\Theta \setminus \Lambda$ равно $\binom{\binom{l}{2}}{2}$, каждая четверка задает кривую порядка не полее чем 6, на которой по лемме 1 лежит не более $m_l = O(l^5)$ точек. Значит $|\Theta \setminus \Lambda|$ можно оценить следующей суммой:

$$n - l \leqslant 2\binom{l}{2}\binom{l}{3} + \binom{\binom{l}{2}}{2} m_l$$

Откуда следует, что $n_k = O(k^9)$. $\square$

Авторы статьи получают оценку на n_k за счет рассмотрения отдельных четверок точек и применения к ним леммы 1 (так как степень в неравенстве идет от второго слагаемого). Мы же разобьем наше множество четверок на группы по l штук (примерно). В таком случае степень кривой C рассматриваемой в разделе 1 будет равна $6l$. Сформулируем новую лемму 2 похожую на лемму 1.

Лемма 2. *Пусть дана алгебраическая кривая Γ порядка не больше $6l$.Тогда существует натуральное $m_l = O(l^5)$ удовлетворяющее следующим условиям: в любом множестве $\Theta \subset \Gamma$ содержащим m_l точек, находящихся в общем положении, найдется подмножество Λ состоящее из l точек такое, что все треугольники с вершинами из Λ имеют попарно различные радиусы описанных окружностей.*

Для доказательства леммы 2 необходимо проверить следующую гипотезу:

$$|C(AB, CD) \cap C(A_1B_1, C_1D_1)| < \infty,$$

для любых не совпадающих точек $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$, находящихся в общем положении.

Так как все четверки точек разбились на множества примерно по l штук второе слагаемое в оценке на $n-l$ выглядит следующим образом $\frac{\binom{\binom{l}{2}}{2} m_l}{l}$. Степень m_l по-прежнему равна 5, а значит степень всего слагаемого равна 8. Значит, если мы докажем лемму, то улучшим оценку n_k до $O(k^8)$.

Список литературы

[1] L. Martínez, E. Roldán-Pensado *Points defining triangles with distinct circumradii*, Acta Math. Hungar., **145** (**1**) (2015), стр. 136–141.

[2] P. Erdös, *Some problems on elementary geometry*, Austral. Math. Soc. Gaz., **2**, (1975), стр. 2–3.

[3] P. Erdös, *Some more problems on elementary geometry*, Austral. Math. Soc. Gaz., **5**, (1978), no. 371 стр. 52–54