

# Table des matières

<b>I Codage de canal, analyse et transmission du signal</b>	<b>5</b>
<b>1 Analyse et traitement du signal 1D</b>	<b>7</b>
1.1 Définition et représentation d'un signal . . . . .	7
1.2 Représentation et classification des signaux . . . . .	8
1.2.1 Signaux analogiques ou numériques . . . . .	8
1.2.2 Signaux périodiques et apériodiques . . . . .	9
1.2.3 Signaux déterministes ou stochastiques . . . . .	9
1.2.4 Signaux d'énergie ou de puissance . . . . .	9
1.2.5 Exemples de signaux analogiques . . . . .	10
1.3 Analyse spectrale : Représentation fréquentielle . . . . .	14
1.4 Système . . . . .	14
1.4.1 Système linéaire . . . . .	15
1.4.2 Système permanent . . . . .	16
1.4.3 Réponse impulsionnelle . . . . .	16
1.4.4 Fonction de transfert . . . . .	17
1.4.5 Réponse fréquentielle . . . . .	17
1.4.6 Exemple . . . . .	18
1.5 Filtre linéaire . . . . .	21
1.5.1 Filtre idéal . . . . .	22
1.5.2 Filtre non-idéal . . . . .	25
1.6 Numérisation . . . . .	26
1.6.1 Échantillonnage . . . . .	27
1.6.2 Quantification . . . . .	34
1.6.3 Codage . . . . .	37
1.6.4 Synthétisons... . . . . .	38
1.7 Transformée de FOURIER discrète . . . . .	39
1.7.1 Discréttisation de la transformée de FOURIER . . . . .	39
1.7.2 DFT - IDFT . . . . .	41
<b>2 Transmission du signal</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction . . . . .	45
2.1.1 La modulation . . . . .	45
2.1.2 Schéma complet d'une transmission analogique . . . . .	48
2.2 Généralités . . . . .	48
2.2.1 La porteuse . . . . .	49
2.2.2 Le signal modulé . . . . .	49
2.3 Modulation d'amplitude . . . . .	49
2.3.1 Modulation AM . . . . .	50
2.3.2 Modulation DSB-SC . . . . .	57
2.3.3 Modulation BLU . . . . .	59

2.3.4	Modulation en quadrature . . . . .	64
2.4	Modulation angulaire . . . . .	67
2.4.1	Modulation de phase (PM) . . . . .	69
2.4.2	Modulation de fréquence (FM) . . . . .	69
2.4.3	Modulation FM à bande étroite (NBFM) . . . . .	71
2.4.4	Modulation FM à large bande . . . . .	76
2.5	Multiplexage en fréquence (FDM) . . . . .	81
<b>II</b>	<b>Codage de source</b>	<b>85</b>
<b>3</b>	<b>Introduction à la théorie de l'information, du codage et de la compression</b>	<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	87
3.1.1	Modèle mathématique d'une source . . . . .	87
3.1.2	Source discrète sans mémoire . . . . .	88
3.2	Mesure de l'information . . . . .	88
3.2.1	Quantité d'information . . . . .	89
3.2.2	Entropie d'une source . . . . .	90
3.2.3	Entropie jointe entre deux sources . . . . .	91
3.2.4	Quantité d'information mutuelle . . . . .	93
3.2.5	Entropie conditionnelle . . . . .	94
3.2.6	Lien entre entropie conditionnelle et information mutuelle . . . . .	95
3.2.7	Exemple : Canal de communication binaire symétrique . . . . .	96
3.3	Codage de sources discrètes . . . . .	98
3.3.1	Codage avec mots de longueur fixe . . . . .	99
3.3.2	Codage par blocs : Extension de la source . . . . .	100
3.3.3	Codage avec mots de longueur variable . . . . .	101
3.3.3.1	Codages avec et sans préfixe . . . . .	102
3.3.3.2	Arbre d'un codage . . . . .	102
3.3.3.3	Longueur moyenne des mots de code . . . . .	103
3.3.3.4	Inégalité de KRAFT . . . . .	104
3.3.3.5	Premier théorème de SHANNON : Théorème de codage de source	105
3.4	Introduction à la compression de données . . . . .	107
3.4.1	Codage de HUFFMAN . . . . .	108
3.4.2	Codage arithmétique . . . . .	111
3.4.3	Codage par dictionnaire : méthode de LEMPEL-ZIV . . . . .	114
3.4.4	Codage par répétition : méthode RLE (RLC) . . . . .	118
3.5	Exercices . . . . .	120
3.6	Annexes . . . . .	121
3.6.1	Maximisation de l'entropie d'une source de $K$ symboles . . . . .	121
3.6.2	Expansion binaire d'un nombre réel . . . . .	122
3.6.3	Table ASCII . . . . .	122
3.7	Références . . . . .	122
<b>III</b>	<b>Traitement d'images</b>	<b>125</b>
<b>4</b>	<b>Analyse et traitement d'images</b>	<b>127</b>
4.1	Introduction . . . . .	127
4.1.1	Type d'images . . . . .	127
4.1.2	Image numérique . . . . .	129

4.1.3	Traitement d'images . . . . .	131
4.2	Traitements linéaires . . . . .	132
4.2.1	Transformée de FOURIER discrète et convolution discrète . . . . .	132
4.2.2	Traitement global . . . . .	134
4.2.3	Traitement local : masques de convolution . . . . .	139
4.3	Traitements non-linéaires . . . . .	141
4.3.1	Images binaires . . . . .	141
4.3.1.1	Rappels sur la théorie des ensembles . . . . .	141
4.3.1.2	Transformations morphologiques élémentaires . . . . .	143
4.3.1.3	Transformations morphologiques complexes . . . . .	147
4.3.2	Images en niveaux de gris . . . . .	148
4.3.2.1	De la notion d'ensemble à celle de fonction . . . . .	149
4.3.2.2	Transformations morphologiques élémentaires . . . . .	149
4.3.2.3	Filtrage non-linéaire . . . . .	150
4.4	Traitement spécifique : Rehaussement et restauration . . . . .	155
4.4.1	Définitions . . . . .	155
4.4.2	Amélioration du contraste par transformation de l'histogramme . . . . .	157
4.4.2.1	Transformation linéaire . . . . .	157
4.4.2.2	Transformation linéaire avec saturation . . . . .	157
4.4.2.3	Transformation linéaire par morceaux . . . . .	159
4.4.2.4	Transformation non-linéaire . . . . .	159
4.4.2.5	Autre fonction possible... Le négatif d'une photo . . . . .	159
4.4.3	Égalisation de l'histogramme . . . . .	161
4.5	Traitement spécifique : Détection de contours . . . . .	165
4.5.1	Opérateurs linéaires basés sur le calcul des dérivées . . . . .	165
4.5.1.1	Opérateur de dérivée première et Gradient . . . . .	166
4.5.1.2	Opérateur de dérivée seconde et Laplacien . . . . .	170
4.5.1.3	Calcul pratique des dérivées et masques de convolution . . . . .	170
4.5.2	Opérateurs non-linéaires basés sur la morphologie mathématique . . . . .	172
4.6	Traitement spécifique : Segmentation et seuillage . . . . .	177
4.6.1	Définition . . . . .	177
4.6.2	Seuillage simple . . . . .	178
4.6.3	Seuillage multiple . . . . .	178
4.6.4	Seuillage automatique . . . . .	179
4.7	Bibliographie . . . . .	181
<b>IV</b>	<b>Analyse de FOURIER</b>	<b>183</b>
<b>5</b>	<b>Séries de FOURIER</b>	<b>185</b>
5.1	Introduction . . . . .	185
5.1.1	Fonction continue par morceaux . . . . .	187
5.1.2	Fonctions périodiques . . . . .	188
5.2	Polynômes de FOURIER (ou trigonométriques) . . . . .	189
5.2.1	Définition . . . . .	189
5.2.2	Intégrales intéressantes . . . . .	189
5.2.3	Calcul des coefficients $a_0$ , $a_n$ et $b_n$ . . . . .	190
5.3	Théorème de FOURIER . . . . .	191
5.3.1	Exemple : Fonction carrée . . . . .	191
5.3.2	Définition et énoncé du théorème . . . . .	194

5.4	Mise en forme des séries de FOURIER . . . . .	195
5.4.1	Forme complexe ou exponentielle . . . . .	195
5.4.2	Forme trigonométrique . . . . .	197
5.4.3	Cas particuliers : fonctions paires, impaires et demi-onde . . . . .	197
5.5	Formule de PARSEVAL . . . . .	198
5.6	Exemple : Droite de FOURIER . . . . .	199
5.6.1	Phénomène de GIBBS . . . . .	200
5.7	Exercices . . . . .	200
5.8	Références . . . . .	201
<b>6</b>	<b>Transformée de FOURIER 1D</b>	<b>203</b>
6.1	Transformée de FOURIER 1D . . . . .	203
6.1.1	Définitions . . . . .	203
6.1.2	Propriétés . . . . .	204
6.1.3	Exemples . . . . .	206
6.2	La fonction Delta de DIRAC . . . . .	209
6.2.1	Définition . . . . .	209
6.2.2	Transformée de FOURIER . . . . .	209
6.2.3	Applications directes . . . . .	210
6.3	Retour à la transformée de FOURIER . . . . .	213
6.4	Quelques signaux fondamentaux . . . . .	213
6.4.1	Définitions . . . . .	213
6.4.2	Paires de transformées de FOURIER . . . . .	214
<b>7</b>	<b>Transformée de FOURIER 2D</b>	<b>215</b>
7.1	Transformée de FOURIER 2D . . . . .	215
7.1.1	Définition . . . . .	215
7.1.2	Propriétés . . . . .	216
7.1.3	Exemples . . . . .	218
7.2	La fonction Delta de DIRAC . . . . .	220
7.2.1	Définition . . . . .	220
7.2.2	Transformée de FOURIER . . . . .	221
7.2.3	Applications directes . . . . .	221

# Chapitre 4

## Analyse et traitement d'images

### 4.1 Introduction

Une image est avant tout un signal bidimensionnel (2D). Le traitement d'images entre donc dans une catégorie plus vaste qui est le traitement du signal en général. Dès lors, il est normal de retrouver des similitudes entre le traitement du signal 1D et le traitement d'images (ou traitement du signal 2D) : convolution, filtrage, transformées, ... Néanmoins, décrire une image n'est pas chose facile. Plusieurs approches existent :

- considérer une image comme une fonction bidimensionnelle  $f(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont les deux paramètres du signal, représentant les coordonnées d'un point (on dit plutôt pixel) de l'image,
- considérer une image comme une matrice  $f(m, n)$  ( $m = 0, \dots, M - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ ) contenant  $M \times N$  valeurs numériques,
- ou encore considérer une image comme un ensemble d'objets (ou de formes) présents sur un arrière plan.

De plus, que représente exactement la valeur de  $f$ ? Cela dépend en plus du type d'image considéré... Commençons donc par une classification simplifiée d'images les plus rencontrées dans la pratique.

#### 4.1.1 Type d'images

Dans le contexte de cette introduction, nous nous limiterons à 3 grandes catégories d'images (voir figure 4.1) :

- les images en niveaux de gris pour lesquelles la fonction ou la matrice  $f$  représente l'intensité lumineuse ou encore la *luminance*.
- les images couleurs, sur lesquelles nous revenons ci-dessous,
- les images binaires, souvent représentées avec deux couleurs uniques ; en général blanc et noir mais ce n'est pas une obligation. Ce type d'image est généralement obtenu après traitement d'une image en niveau de gris ou en couleurs dans le but d'en extraire de l'information pertinente (recherche de formes ou d'objets, segmentation, contrôle industriel, ...).

La représentation des images couleurs est toutefois plus complexe que les deux autres. Il est en effet nécessaire de caractériser l'information "couleur". Pour cela, il existe différents systèmes de couleurs comme par exemple

- le système RVB (ou RGB en anglais) qui est le plus commun et qui est un système additif de couleurs utilisé pour la représentation des couleurs sur écran. Dans ce système, chaque couleur est représentée par trois composantes : le rouge (R), le vert (V) et le bleu

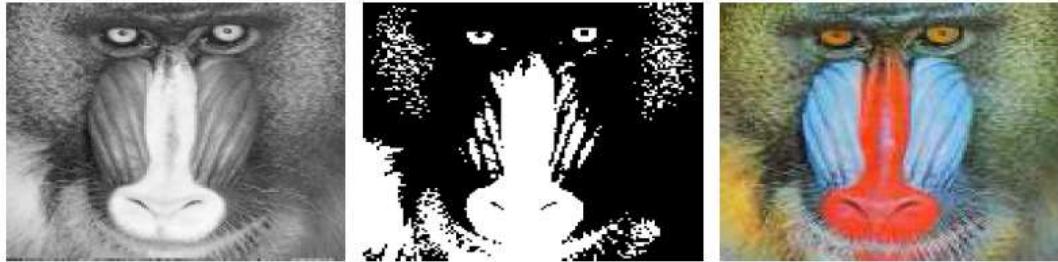


FIGURE 4.1 – Différents types d'image : En niveaux de gris, binaire et en couleurs.

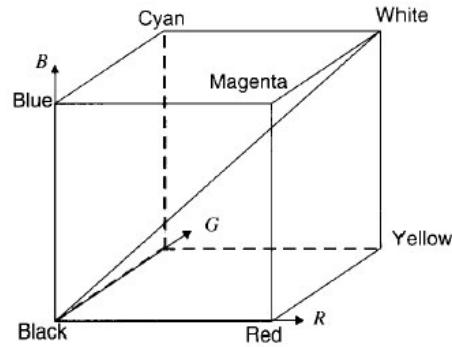


FIGURE 4.2 – Addition des composantes Rouge, Vert, bleu pour reproduire une couleur  $G$ .

(B). Une couleur  $G$  est alors obtenue en additionnant les trois composantes R,V,B qui la composent. En termes simplifiés, on ajoute des composantes au noir (origine du système) pour obtenir une couleur. Voir figure 4.2.

- le système CMJ (ou CMY en anglais) qui est un système soustractif de couleurs utilisé dans les systèmes d'impression. Dans ce système, chaque couleur est représentée par trois composantes : le cyan (C), la magenta (M) et le jaune (J). De manière imagée, pour obtenir une couleur dans ce système, on part du blanc et on retire les composantes nécessaires.
- les systèmes YIQ, YUV,  $YC_bC_r$ , ...

Remarquons que pour chaque système de couleurs, il faut 3 composantes pour représenter une couleur. Il existe des transformations matricielles permettant de passer d'un système à un autre. Mais revenons à notre image  $f$ . Pour un pixel  $(x, y)$ ,  $f$  doit donc contenir les trois informations liées à la couleur correspondante. On peut en effet décomposer une image couleur  $f(x, y)$  en trois images, on dira plutôt *plans de couleurs* :

$$f_R(x, y), f_V(x, y), f_B(x, y)$$

si on considère la décomposition RVB à laquelle nous nous limiterons dans ces notes. Une image couleur est dès lors représentée par trois fonctions 2D. La figure 4.3 illustre la décomposition RVB d'une image couleurs en ses trois plans de couleurs.

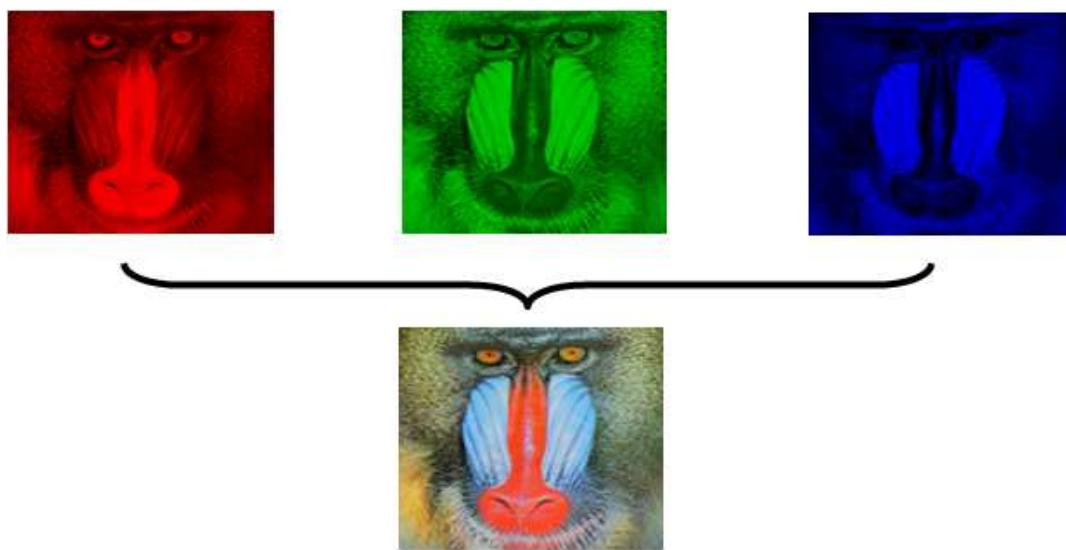


FIGURE 4.3 – Décomposition d'une image couleurs en ses plans de couleurs RVB.

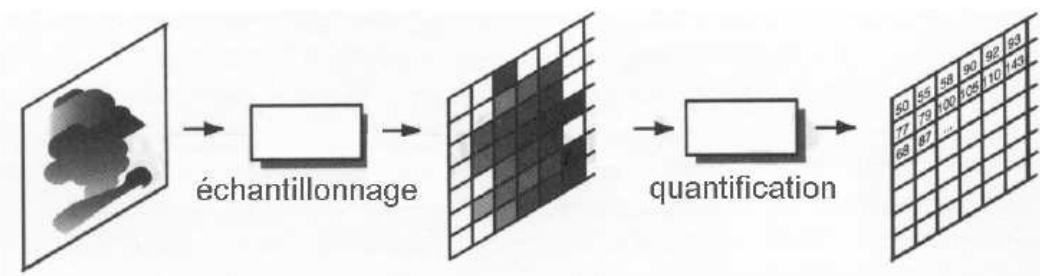


FIGURE 4.4 – Numérisation d'une image.

### 4.1.2 Image numérique

Les images numériques naturelles<sup>1</sup> proviennent d'un système d'acquisition d'image qui réalise en fait la numérisation d'une fonction analogique 2D  $f(x, y)$  afin d'obtenir une matrice de pixels. Nous retrouvons donc ici des notions déjà vues en traitement du signal 1D. Il s'agit de l'échantillonnage et de la quantification. L'échantillonnage est caractérisé par la taille  $M \times N$  de la matrice de sortie ; il est souvent limité à la capacité du capteur de l'appareil photo par exemple. La quantification est par contre directement liée aux nuances de niveaux de gris ou de couleurs que l'on désire représenter. La figure 4.4 illustre la chaîne de numérisation d'une image.

Il en résulte deux notions importantes liées aux images numériques :

- la résolution spatiale, et
- la résolution de tons (ou de niveaux ou de nuances) de gris. Cette notion est également valable pour les images couleurs mais pour les 3 composantes.

#### Résolution spatiale

La résolution spatiale est directement liée à la taille du plus petit détail discernable dans l'image. La figure 4.5 illustre la même image pour trois résolutions spatiales différentes.

1. Les images naturelles sont à opposer aux images artificielles qui sont synthétisées par ordinateur selon différentes techniques algorithmiques.

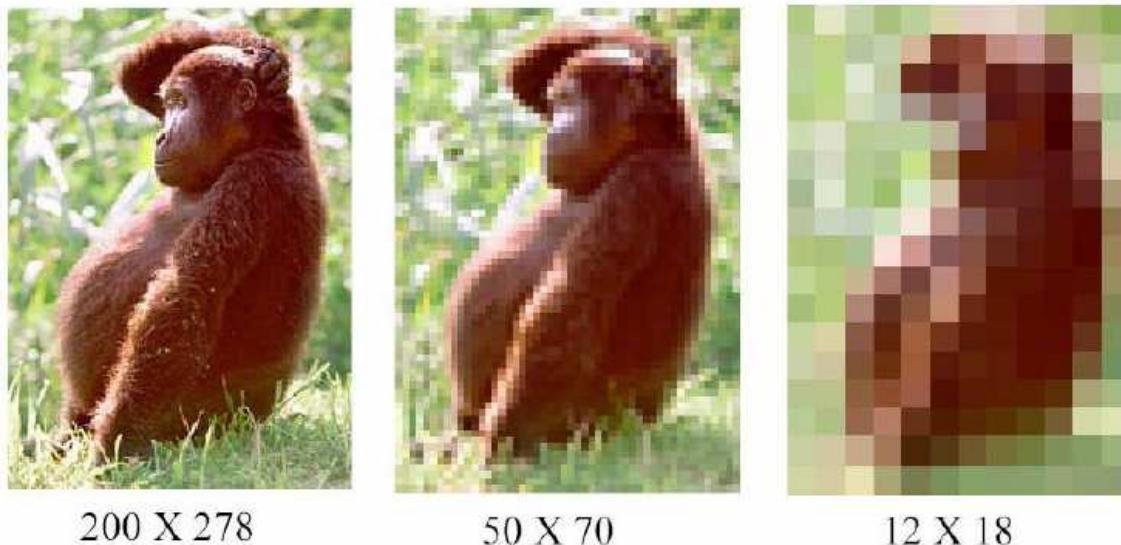


FIGURE 4.5 – Résolution spatiale.

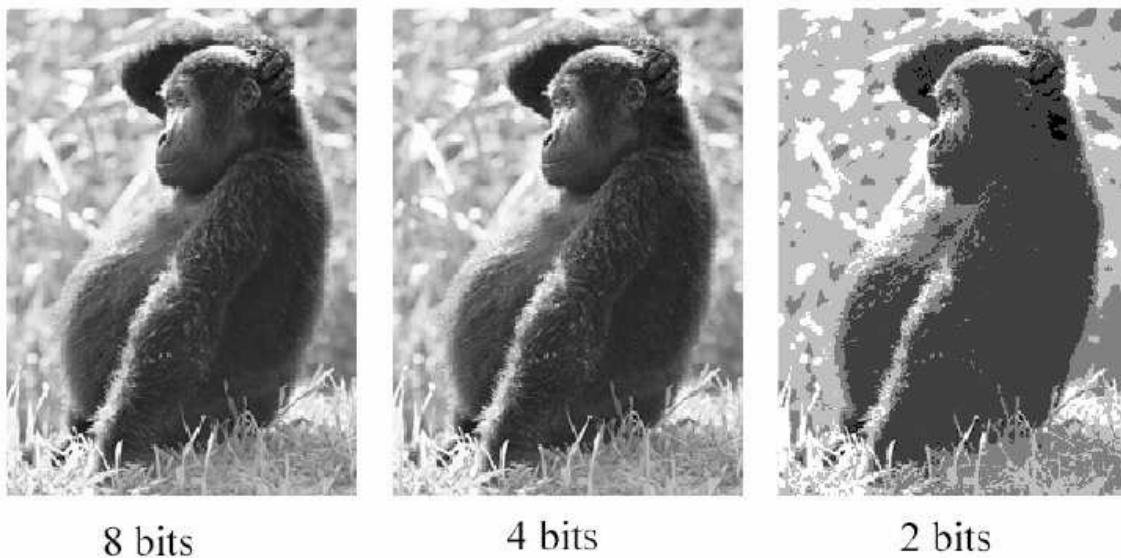


FIGURE 4.6 – Résolution des tons de gris.

### Résolution des tons de gris (ou de couleurs)

La résolution des tons de gris est directement liée à la plus petite nuance de gris discernable dans l'image. La figure 4.6 illustre la même image pour trois résolutions de niveaux de gris différentes. Cette notion est intimement liée à celle de *codage* des niveaux de gris. Plus on utilisera de bits pour représenter un niveau de gris, meilleure sera la résolution des tons de gris. Par exemple, si on code une couleur sur 8 bits, on pourra ainsi représenter 256 niveaux de gris différents, ce qui est déjà suffisant pour une visualisation satisfaisante par l'oeil humain.

Dans le cas des images couleurs, il faudra coder les trois composantes RVB. Par exemple, lorsque l'on parle d'une image couleurs 32 bits, cela signifie que l'on code chaque composante RVB sur 8 bits, ce qui permet de représenter  $256 \times 256 \times 256 = 16.777.216$  couleurs.

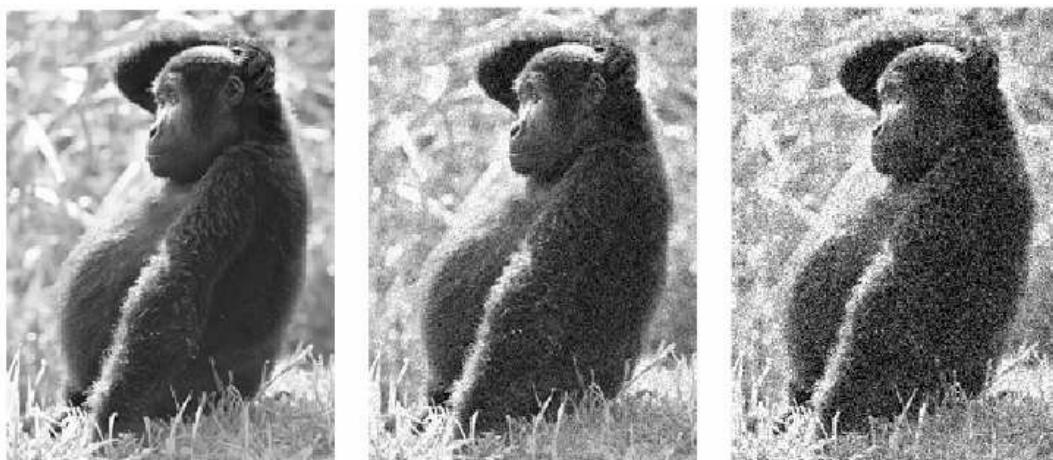


FIGURE 4.7 – Bruit dans les images.

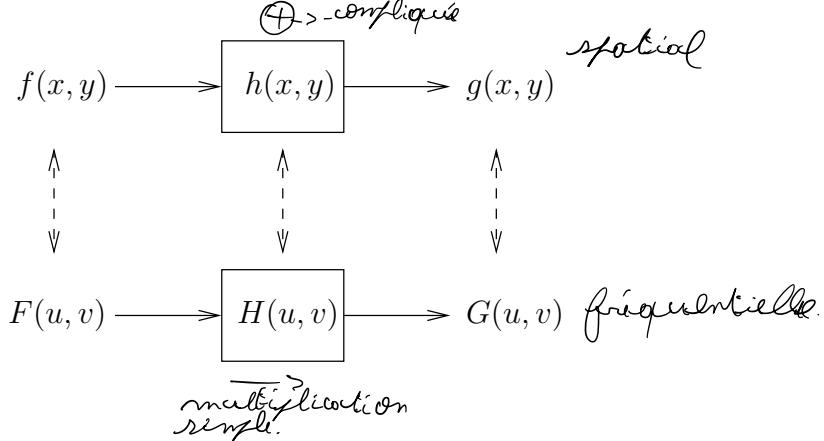
### Bruit dans les images

Les systèmes d'acquisition numérique d'images entachent généralement les images obtenues de bruit et cela d'autant plus que les conditions d'éclairage sont mauvaises. La figure 4.7 illustre la même image avec des niveaux de bruit différents.

### 4.1.3 Traitement d'images

Les applications et les techniques de traitement d'images sont nombreuses et variées. En voici une liste des plus fréquentes :

- Filtrage dans le but d'améliorer la qualité en supprimant le bruit, de supprimer certaines composantes indésirables, mettre en évidence les contours d'objets présents dans l'image... Ces techniques fournissent en sortie une image du même type que celle d'entrée mais avec les modifications ou altérations souhaitées. Elles peuvent être linéaires (convolution, FOURIER, ...) mais également non-linéaires comme celles basées sur la morphologie mathématique.
- Segmentation et reconnaissance de formes qui sont des domaines liés à la vision automatisée par ordinateur (ou robotique) et au contrôle industriel. Dans ce cas, le résultat du traitement peut être une image du même type que celle d'entrée (exemple : suppression du fond d'une image en laissant le personnage intact à des fins filmographiques) mais également un simple résultat numérique (exemple : comptage de particules présentes dans une image). Les techniques utilisées combinent souvent plusieurs opérations : transformation de l'image en niveaux de gris (ou couleurs) en images binaires, puis application de techniques morphologiques de traitement d'images binaires.
- Restauration et rehaussement afin de rendre à une image un aspect visuellement acceptable
- Contrôle de qualité par analyse des propriétés de l'image
- Suppression d'une inhomogénéité d'éclairage
- Reconnaissance de caractères

FIGURE 4.8 – Filtrage linéaire d'une image  $f(x, y)$ .

— ...

Dans cette introduction au traitement d'images, nous nous limiterons aux techniques et applications les plus courantes.

## 4.2 Traitements linéaires

Le filtrage linéaire d'une image (ou signal 2D) est la généralisation à deux dimensions du filtrage des signaux temporels que nous avons déjà étudié. À ce niveau, la variable temporelle  $t$  est remplacée par les deux variables spatiales  $x$  et  $y$ . La variable fréquentielle  $f$  est remplacée par les variables  $u$  et  $v$ . Dans ce contexte, la transformée de FOURIER constitue toujours un outil extrêmement intéressant. Pour son étude, nous renvoyons le lecteur à l'annexe consacrée à la transformée de FOURIER 2D.

Le filtrage linéaire d'une image peut être représenté à l'aide de la figure 4.8. Un filtre linéaire est donc toujours caractérisé par sa *réponse impulsionnelle*  $h(x, y)$  ou sa *fonction de transfert*  $H(u, v)$ .

Le filtrage de l'image peut donc se réaliser de deux manières différentes. La première possibilité est de le réaliser dans le domaine spatial en utilisant la convolution :

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad , \text{ dans dom spatial pas pour nous on passe par } \text{ (4.1)}$$

où  $g(x, y)$  est l'image filtrée. La seconde possibilité est de passer par la transformée de FOURIER  $F(u, v)$  de l'image de départ  $f(x, y)$ . La transformée de FOURIER de l'image filtrée  $G(u, v)$  s'obtient alors par simple multiplication (dans le domaine fréquentiel) :

on multiplie la mat des nombres complexes, pas le module  $G(u, v) = H(u, v) F(u, v)$  (4.2)

Toutefois, les images que l'on rencontre le plus souvent sont discrètes, c'est-à-dire qu'elles sont fournies sous la forme d'une matrice  $f(m, n)$  de pixels avec  $m = 0, \dots, M - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ . Il est donc nécessaire de recourir à la transformée de FOURIER discrète ou à la convolution discrète.

### 4.2.1 Transformée de FOURIER discrète et convolution discrète

Considérons une image donnée sous sa forme matricielle  $f(m, n)$  connue pour  $m = 0, \dots, M - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ .



FIGURE 4.9 – L'image *Lena* et le module de sa transformée de FOURIER discrète.

**Définition [Transformée de FOURIER 2D discrète] (DFT pour *Discrete Fourier Transform*).** La transformée de FOURIER discrète de l'image  $f(m, n)$  est définie par

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[ -j2\pi \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right] \quad (4.3)$$

avec  $u = 0, \dots, M - 1$  et  $v = 0, \dots, N - 1$ .

Il est possible de retrouver l'image de départ par transformée de FOURIER discrète inverse :

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[ j2\pi \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right] \quad (4.4)$$

avec  $m = 0, \dots, M - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ .

### Propriétés de périodicité intrinsèque de la DFT

La périodicité est une propriété importante de la transformée de FOURIER discrète. La transformée est définie par une matrice d'éléments  $F(u, v)$  pour  $u = 0, \dots, M - 1$  et  $v = 0, \dots, N - 1$ . Si on permet aux indices  $u$  et  $v$  de prendre d'autres valeurs, on obtient une transformée périodique et une image périodique :

$$\begin{aligned} F(u, -v) &= F(u, N - v) & F(-u, v) &= F(M - u, v) \\ f(-m, n) &= f(M - m, n) & f(m, -n) &= f(m, N - n) \end{aligned}$$

Plus généralement,

$$F(aM + u, bN + v) = F(u, v) \quad f(aM + m, bN + n) = f(m, n)$$

où  $a$  et  $b$  sont entiers. Ces propriétés ne sont pas étonnantes car elles résultent de l'échantillonnage de l'image analogique dans les deux plans.

La figure 4.9 montre une image ainsi que le module de sa transformée de FOURIER.

Une remarque est à faire au sujet de la visualisation de la transformée de FOURIER discrète. La composante fréquentielle  $F(0, 0)$ , appelée composante continue ou DC, se trouve en haut et à gauche de l'image alors qu'on a l'habitude de voir cette composante située au milieu de l'image. En utilisant les propriétés de périodicité, il est possible d'observer le module de la transformée de FOURIER d'une manière plus conventionnelle. Voir figure 4.10. Le spectre modifié par décalage de l'image Lena est donné à la figure 4.11.

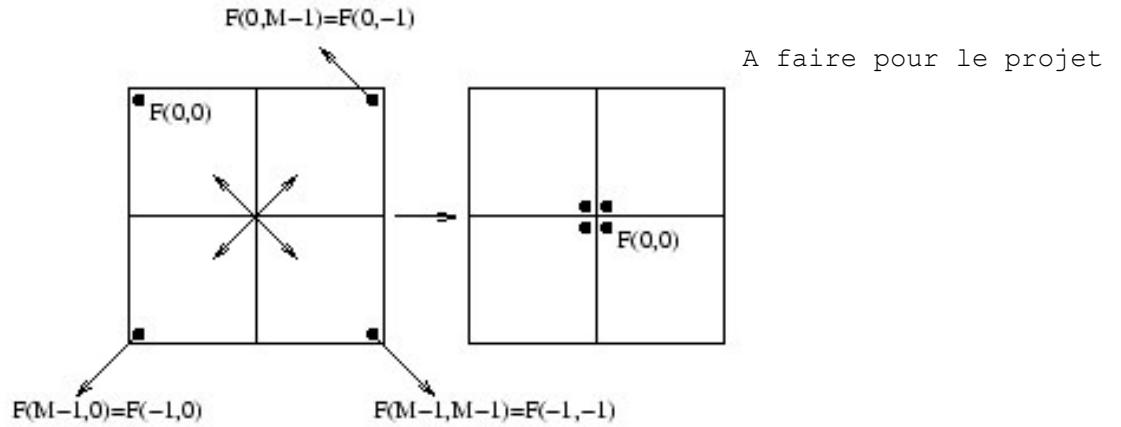


FIGURE 4.10 – Décalage du spectre pour arriver à centrer l'origine.

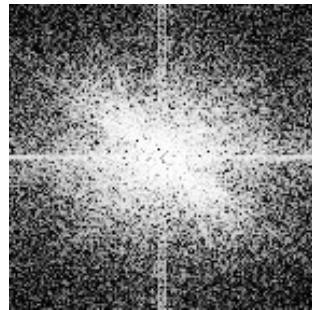


FIGURE 4.11 – Visualisation du spectre de l'image Lena après centrage de l'origine.

### Convolution discrète

La convolution discrète d'une image  $f(m, n)$  par la réponse impulsionnelle (discrète nécessairement)  $h$  est définie par

$$g(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(k, l) h(m - k, n - l) \quad (4.5)$$

avec  $m = 0, \dots, M - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ . La réponse impulsionnelle  $h(i, j)$  doit donc être connue pour  $i = -(M - 1), \dots, (M - 1)$  et  $j = -(N - 1), \dots, (N - 1)$ .

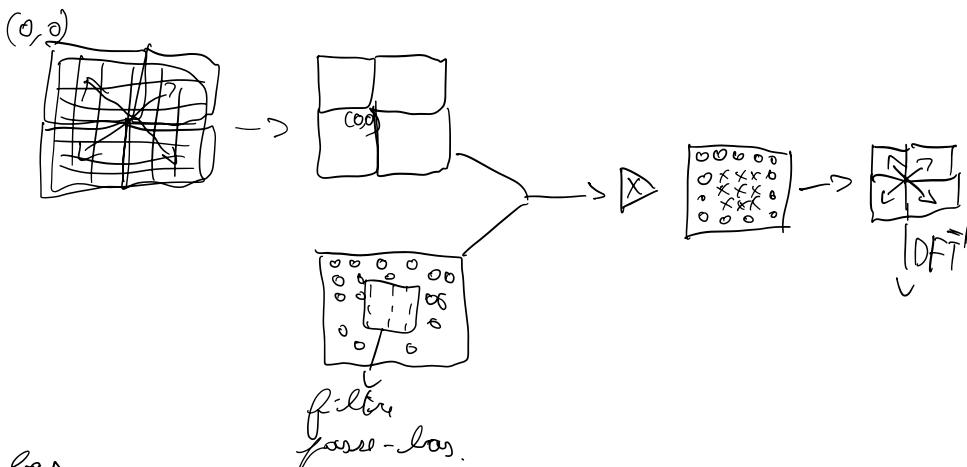
Cette définition nous montre que la valeur d'un pixel de l'image filtrée est égale à une somme de tous les pixels de l'image originale pondérés par les coefficients  $h(i, j)$ . Chaque pixel de l'image filtrée dépend donc de *tous* les pixels de l'image originale. On dit alors que le traitement réalisé sur l'image est *global*. Dans le cas où la plupart des coefficients  $h(i, j)$  sont nuls et donc que la valeur d'un pixel de l'image filtrée ne dépend que de quelques pixels de l'image originale (et généralement situés dans le voisinage du pixel traité), on parle de *traitement local* de l'image.

#### 4.2.2 Traitement global

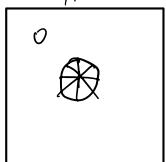
##### Filtre idéal

La notion de filtre idéal des images est similaire à celle rencontrée pour les signaux 1D.

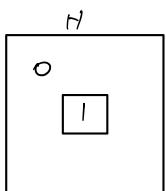
image  $\xrightarrow{\text{FFT}}$  Fourier



filter passe-bas



limite les grandes variations  $\rightarrow$  floue

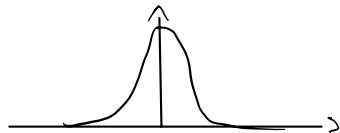


est uniforme  $\rightarrow$  après filtrage effet étrange alias  
pourquoi? ! examen  
phénomène de Gibbs

filter passe-bas, isolé:

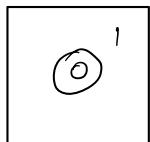


filter non-isolé:

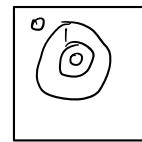


filter passe haut  $\rightarrow$

détecter les contours.



filter passe basse



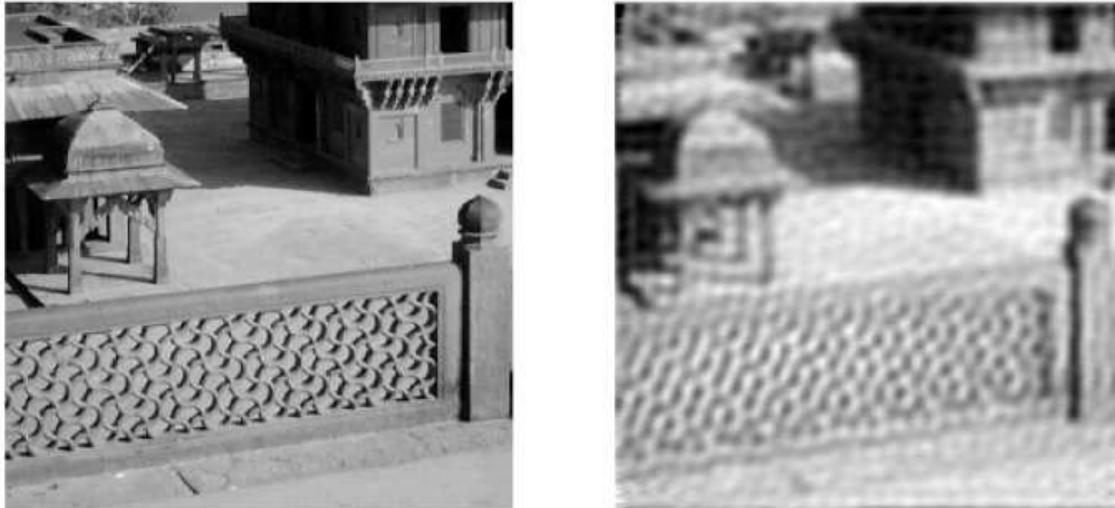


FIGURE 4.12 – Filtrage passe-bas d’une image : (Gauche) Image originale. (Droite) Image filtrée.

**Définition [Filtre idéal].** Un filtre est idéal si sa fonction de transfert est telle que

$$H(u, v) = 1 \text{ ou } 0 \quad \text{pour tout } (u, v) \quad (4.6)$$

Dans le cas d’un signal 1D, on distingue habituellement 3 catégories de filtres idéaux en fonction de leur gabarit le long de l’axe des fréquences. L’extension à des signaux 2D est simple si l’on utilise des filtres à symétrie circulaire.

### Filtre passe-bas idéal

Un filtre passe-bas idéal est caractérisé par le fait que seuls les coefficients  $H(u, v)$  à proximité de l’origine sont non nuls. Physiquement, un filtre passe-bas à pour effet d’atténuer les variations rapides d’intensité de l’image pouvant aller jusqu’à faire apparaître une certaine impression de flou dans l’image filtrée.

La figure 4.12 montre image de taille  $256 \times 256$  et l’image filtrée au moyen d’un filtre à symétrie circulaire de fréquence de coupure  $R_0 = 30$  pixels. Ce filtre a un effet moyenneur sur le niveau de luminance. En raison de la suppression des composantes à haute fréquence, les transitions se retrouvent adoucies.

Le filtre passe-bas idéal circulaire est défini par une fonction de transfert de la forme

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \leq R_0 \\ 0 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} > R_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Les composantes fréquentielles de l’image correspondant aux couples  $(u, v)$  situées à l’intérieur du disque de rayon  $R_0$ , dites basses fréquences, ne subissent aucune modification tandis que les autres composantes fréquentielles, dites hautes fréquences, sont complètement supprimées. La réponse impulsionnelle du filtre est obtenue par transformée de FOURIER inverse de la fonction de transfert :

$$h(x, y) = R_0 \frac{J_1(2\pi R_0 \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4.8)$$

### Filtre passe-haut idéal

Ce filtre supprime les composantes basse fréquence de l'image, tandis qu'il laisse intact les composantes haute fréquence. Visuellement, un filtre passe-haut a pour effet de supprimer la composante continue de l'image et de ne garder que les variations rapides d'intensité dans l'image filtrée. Le filtre passe-haut idéal est défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq R_0 \\ 0 & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} < R_0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Les basses fréquences dont la fréquence radiale  $\sqrt{u^2 + v^2}$  est inférieure à  $R_0$  sont complètement rejetées tandis que les hautes fréquences restent inchangées.

### Filtre passe-bande idéal

Un filtre passe-bande idéal est un filtre qui supprime les basses et les hautes fréquences de l'image. Seule une plage de fréquences n'est pas modifiée. Le filtre passe-bande idéal est défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_0 \leq \sqrt{u^2 + v^2} \leq R_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.10)$$

Seules les composantes fréquentielles dont la fréquence radiale est comprise entre  $R_0$  et  $R_1$  sont conservées. Toutes les autres composantes fréquentielles sont rejetées.

Le figure 4.13 compare les effets d'un filtrage passe-bas, d'un filtrage passe-bande et d'un filtrage passe-haut. Pour la visualisation des spectres, nous avons adopté la convention de *vidéo inverse* ; elle consiste simplement à inverser l'échelle de luminance.

### Forme de la fenêtre

Le problème majeure dans le choix d'un filtre est la forme de la fenêtre. Les trois filtres idéaux décrits ci-dessus ont tous une fenêtre circulaire. Ceci n'est pas une obligation. En effet, on pourrait choisir une fenêtre de forme rectangulaire afin de faciliter l'implémentation. Ou encore, on pourrait construire des filtres idéaux hybrides comme par exemple un filtre idéal qui serait passe-bas dans la direction  $x$  ( $u$ ) et passe-haut dans la direction  $y$  ( $v$ ). La forme de la fenêtre serait alors une bande verticale englobant l'axe  $v$ .

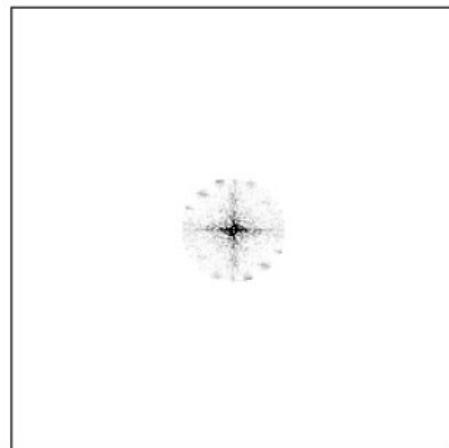
On remarquera que les filtres idéaux ont une fonction de transfert limitée spectralement mais une réponse impulsionnelle infinie. Cela signifie que, dans le plan spatial, une information locale va être fortement étalée. On parle bien de traitement global de l'image.

### Filtre non-idéal

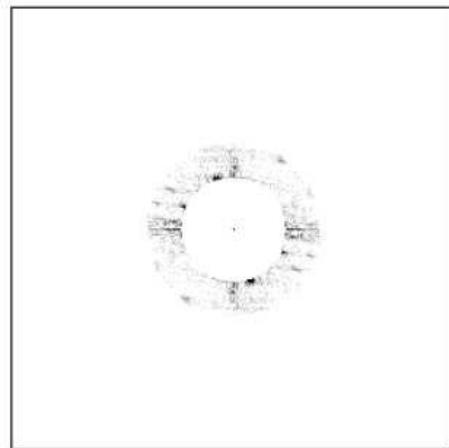
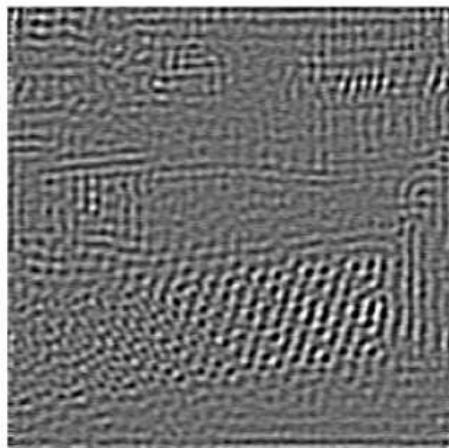
Un filtre non-idéal est un filtre dont la fonction de transfert

$$H(u, v) = ||H(u, v)|| e^{-j2\pi\theta(u, v)} \quad (4.11)$$

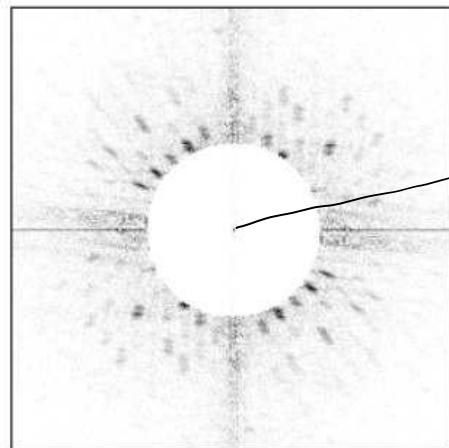
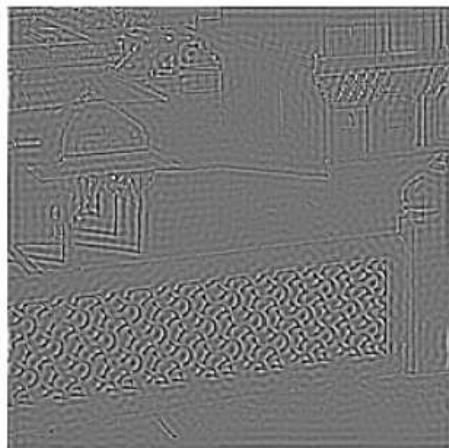
ne vaut pas simplement 1 ou 0 mais dont le module et la phase vérifient les propriétés de symétrie nécessaires pour que la réponse impulsionnelle  $h(x, y)$  soit réelle. Pour exemple, nous citons ci-après le filtre de BUTTERWORTH.



Application d'un filtre passe-bas circulaire de fréquence de coupure  $R_0 = 30$  pixels.



Application d'un filtre passe-bande circulaire conservant les fréquences  $[30, 50]$  pixels.



Application d'un passe-haut circulaire de fréquence de coupure  $R_0 = 50$  pixels.

FIGURE 4.13 – Images filtrées au moyen de filtres idéaux circulaires et spectres correspondants.

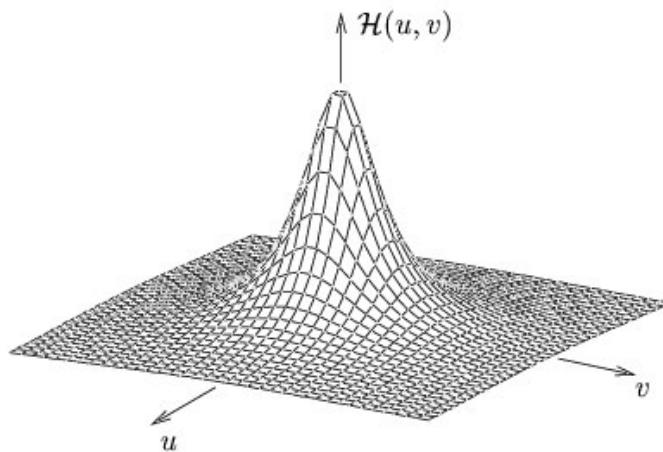


FIGURE 4.14 – Fonction de transfert du filtre passe-bas de BUTTERWORTH pour  $n = 1$ .

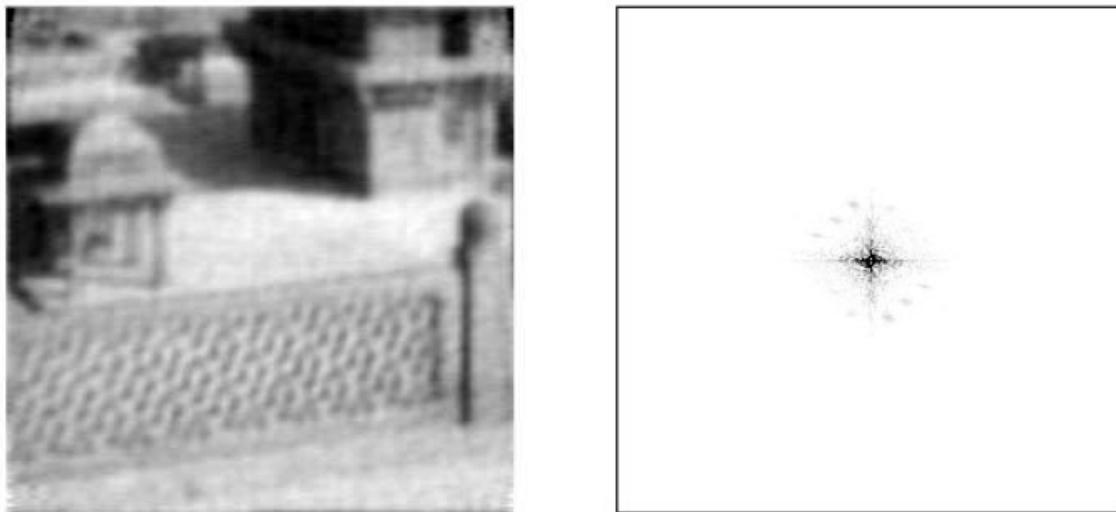
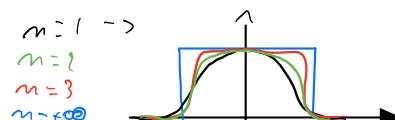


FIGURE 4.15 – Image filtrée par un filtre passe-bas de BUTTERWORTH d'ordre 1 ( $R_0 = 30$  pixels).

### Filtre passe-bas non-ideal

Un exemple de filtre passe-bas non-ideal est le filtre passe-bas de BUTTERWORTH d'ordre  $n$  défini par la fonction de transfert suivante

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{R_0}\right)^{2n}} \quad \text{ordre diffusif} \quad (4.12)$$



On remarque ici que toutes les composantes fréquentielles, hormis l'origine, subissent une atténuation d'autant plus grande que le couple  $(u, v)$  est éloigné de l'origine. Plus l'ordre  $n$  du filtre est élevé, plus l'atténuation des hautes fréquences est importante. La fonction de transfert du filtre passe-bas de BUTTERWORTH pour  $n = 1$  est représentée à la figure 4.14. La figure 4.15 montre une image filtrée par le filtre passe-bas de BUTTERWORTH.

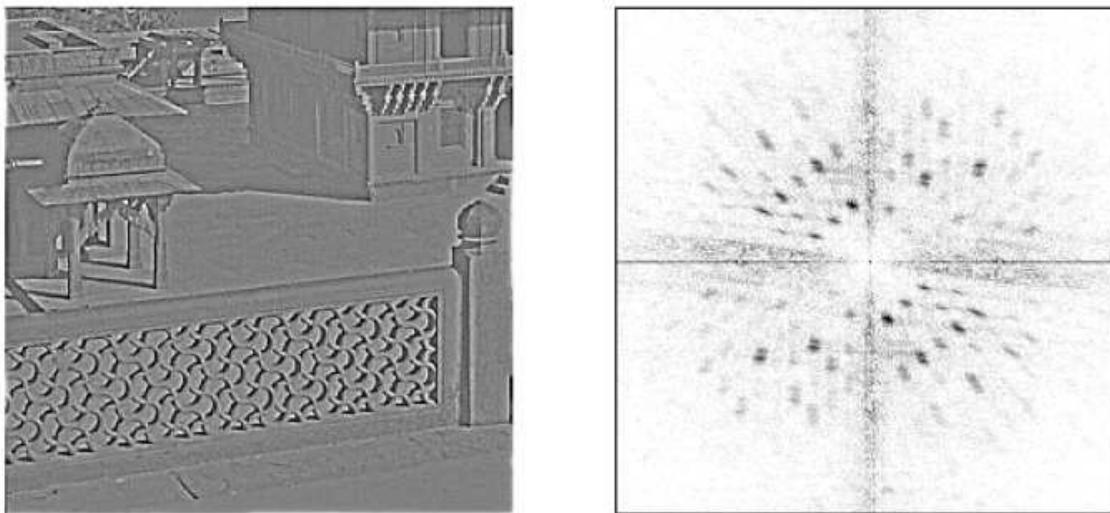


FIGURE 4.16 – Image filtrée par un filtre passe-haut de BUTTERWORTH d’ordre 1 ( $R_0 = 50$  pixels).

### Filtre passe-haut

Un exemple de filtre passe-haut non-ideal est celui de BUTTERWORTH d’ordre  $n$  dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_0}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)^{2n}} \quad \begin{array}{l} u \neq 0 \\ 1 + \infty \end{array} \quad \frac{1}{100} \leq 0 \quad (4.13)$$

Comme pour le cas du filtre passe-bas, toutes les fréquences sont atténuées et cela d’autant plus que  $\sqrt{u^2 + v^2}$  est petit par rapport à  $R_0$ . De plus,  $n$  fixe la pente de la transition entre basses et hautes fréquences. La figure 4.16 montre une image filtrée par le filtre passe-haut de BUTTERWORTH.

### 4.2.3 Traitement local : masques de convolution

Le problème d’un traitement global de l’image est qu’il n’est pas adapté aux usages industriels qui nécessitent des temps de traitement très courts. En effet, comme nous l’avons vu plus haut, chaque pixel de l’image filtrée dépend de tous les pixels de l’image originale. L’image filtrée s’obtient soit par une convolution assez lourde, vu le nombre important de coefficients, soit par transformée de FOURIER, multiplication par la fonction de transfert du filtre et transformée de FOURIER inverse. Dans les deux cas, les opérations à effectuer peuvent prendre un temps trop long.

Un filtre local est un filtre pour lequel la réponse impulsionale  $h(i, j)$  est nulle pour un très grand nombre de coefficients. Dès lors, la valeur d’un pixel de l’image filtrée ne dépend plus que d’un petit nombre (en général 9 ou 25) de pixels proches du pixel traité, ce qui rend le traitement local et nettement plus rapide. Dans ce contexte, la réponse impulsionale porte plutôt le nom de *masque de convolution* ou encore de *noyau du filtre*. Dans la plupart des cas, le masque de convolution a une forme carrée de taille  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  pixels et peut se représenter

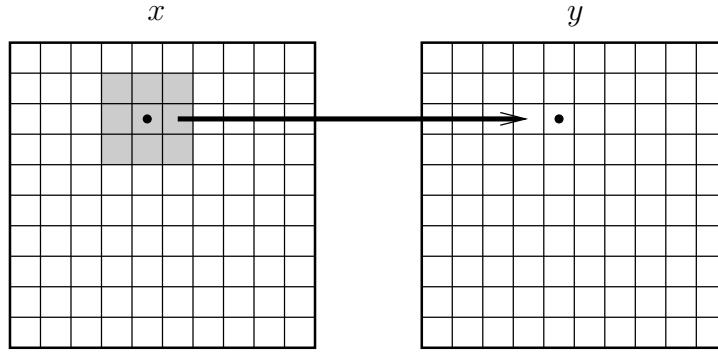


FIGURE 4.17 – Application d'un masque de convolution local de taille  $3 \times 3$ .

par une matrice carrée de la forme

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

L'origine  $h(0, 0)$  de la réponse impulsionnelle étant le coefficient  $h_{22}$  dans le cas d'un masque  $3 \times 3$  ou le coefficient  $h_{33}$  dans le cas d'un masque  $5 \times 5$ . On pourrait imaginer des masques de taille  $7 \times 7$ ,  $9 \times 9$  mais leur comportement serait alors de moins en moins local.

L'application d'un filtre local se réalise alors simplement par une sommation de produits, c'est-à-dire la sommation des pixels de l'image originale pondérés par les coefficients  $h_{11}, h_{12}, \dots$ . Dans le cas d'un masque  $3 \times 3$ , nous avons

$$\begin{aligned} y(m, n) = & h_{11} x(m-1, n-1) + h_{12} x(m, n-1) + h_{13} x(m+1, n-1) \\ & + h_{21} x(m-1, n) + h_{22} x(m, n) + h_{23} x(m+1, n) \\ & + h_{31} x(m-1, n+1) + h_{32} x(m, n+1) + h_{33} x(m+1, n+1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

On remarque bien qu'un pixel  $y(m, n)$  de l'image filtrée  $y$  ne dépend que de, au plus, 9 pixels de l'image originale  $x$ . La figure 4.17 illustre la situation.

La formule (4.15) s'applique sans problème pour tous les pixels situés au sein de l'image, c'est-à-dire pour  $m = 1, \dots, M-2$  et  $n = 2, \dots, N-2$ . Mais qu'en est-il des bords de l'image, c'est-à-dire des pixels pour lesquels  $m = 0, m = M-1, n = 0$  et  $n = N-1$ ? En effet, pour ces pixels, la valeur de l'image filtrée dépend de pixels situés en-dehors de l'image originale... Plusieurs possibilités existent :

- considérer ces pixels "extérieurs" comme étant égaux à la valeur 0. Ce n'est sans doute pas la meilleure solution...
- considérer que ces pixels "extérieurs" prolongent l'image. On ajoute donc lors du calcul un bord, épais d'un pixel, à l'image originale avec des valeurs identiques aux pixels adjacents.
- "Miroiriser" l'image autour de ses bords.

Néanmoins, il n'y a pas de solution miracle...

La plupart du temps, on s'arrangera pour que la somme des coefficients du masque de convolution soit égale à 1 afin de ne pas modifier la dynamique de l'image. Nous citons ci-après quelques exemples de filtres locaux simples. D'autres seront étudiés ultérieurement pour l'extraction de caractéristiques de l'image.

### Filtre Moyenne

Un premier exemple de filtre local simple est le filtre moyenne dont le masque de convolution est donné par

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ce filtre

- remplace la valeur d'un pixel par la moyenne des valeurs de tous ses pixels voisins, y compris lui-même;
- permet de lisser l'image ("smoothing")
- réduit le bruit présent dans l'image
- "réduit" les détails de l'image
- rend floue l'image ("blur edge")
- a typiquement le comportement d'un filtre passe-bas. Ceci pourrait être montré en calculant la transformée de FOURIER de la relation (4.15).

## 4.3 Traitements non-linéaires

Les traitements non-linéaires de signaux ne peuvent pas se mettre sous la forme d'un produit de convolution. Dès lors, la transformée de FOURIER ne sera ici d'aucune utilité. De plus, la plupart des méthodes non-linéaires sont locales et sont donc particulièrement appréciées pour l'usage industriel de part leur rapidité de traitement mais également par la qualité des résultats de traitement obtenus. En effet, nous verrons que de nombreux filtres non-linéaires donnent des résultats préférés à ceux fournis par les filtres linéaires "équivalents".

Les méthodes non-linéaires que nous envisagerons ici sont basées sur la morphologie mathématique. Cette branche des mathématiques est fondamentalement géométrique. Elle consiste à comparer les objets d'une image à analyser à un autre objet de forme connue appelé *élément structurant*. Cette théorie repose sur des notions ensemblistes que nous rappellerons brièvement. Néanmoins, elle s'appliquera aussi bien à des images binaires qu'à des images en niveaux de gris.

### 4.3.1 Images binaires

#### 4.3.1.1 Rappels sur la théorie des ensembles

Les ensembles seront notés par des majuscules  $A, B, \dots$  et les éléments qu'ils contiennent par les minuscules  $a, b, \dots$  L'ensemble vide sera noté  $\emptyset$ .

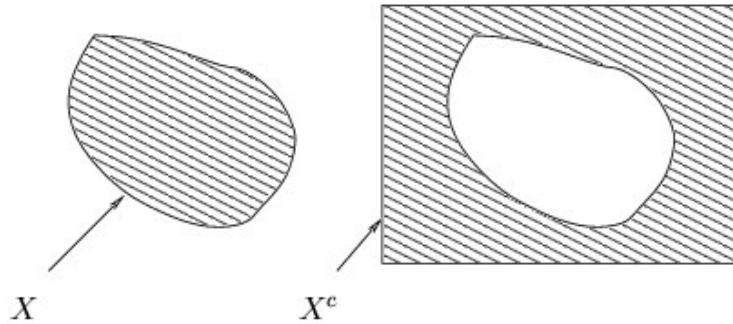


FIGURE 4.18 – Complémentaire d'un ensemble.

### Égalité d'ensembles

Deux ensembles sont égaux s'ils sont formés des mêmes éléments :

$$X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y) \text{ et } (x \in Y \Rightarrow x \in X)$$

### Inclusion

$X$  est inclus dans  $Y$  si tous les éléments de  $X$  appartiennent à  $Y$  :

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

### Intersection

L'intersection de deux ensembles  $X$  et  $Y$  est l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux :

$$X \cap Y = \{x : x \in X \text{ et } x \in Y\}$$

### Union

L'union de deux ensembles est constituée des éléments appartenant à l'un ou à l'autre, c'est-à-dire

$$X \cup Y = \{x : x \in X \text{ ou } x \in Y\}$$

### Différence

Étant donnés  $X$  et  $Y$ , la différence de  $X$  par  $Y$ , notée  $X - Y$  ou  $X \setminus Y$  est l'ensemble des éléments de  $X$  qui n'appartiennent pas à  $Y$  :

$$X - Y = \{x : x \in X \text{ et } x \notin Y\}$$

### Complémentaire

Soit un ensemble  $X$  contenu dans un ensemble  $\varepsilon$  servant de référentiel (en bref l'encadrement de l'image). Le complémentaire de  $X$  dans  $\varepsilon$  est l'ensemble  $X^c$  fourni par

$$X^c = \{x : x \in \varepsilon \text{ et } x \notin X\}$$

La figure 4.18 illustre la notion de complémentaire.

FIGURE 4.19 – Translation d'un ensemble par un élément  $b$ .

### Translaté

Le translaté d'un ensemble  $X$  par un point (ou vecteur)  $b$  vaut

$$X_b = \{z : z = x + b, x \in X\}$$

Comme le montre la figure 4.19, la translation d'un ensemble consiste à déplacer l'ensemble dans le référentiel.

#### 4.3.1.2 Transformations morphologiques élémentaires

##### Érosion

Pour définir de manière intuitive l'opération d'érosion, situons-nous dans le plan de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  partiellement occupé par un ensemble  $X$ . Prenons un élément structurant  $B$  représentant une figure géométrique simple, par exemple un disque (ou un carré). Cet élément  $B_z$  est repéré par son centre et placé en  $z$  dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Il est ensuite déplacé de telle sorte que son centre occupe successivement toutes les positions de l'espace. Pour chacune de ces positions, la question suivante est posée : l'ensemble  $B$  est-il entièrement inclus dans l'ensemble  $X$  ( $B_z \subseteq X$ ) pour cette position de  $z$ ? L'ensemble des  $z$  fournissant une réponse positive forme un nouvel ensemble appelé érosion de  $X$  par  $b$  et noté  $X \ominus B$ . Il vaut

$$X \ominus B = \{z : B_z \subseteq X\} \rightarrow \text{géométrique}$$

On peut montrer que la définition suivante, de forme plus algébrique, fournit le même résultat :

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \rightarrow \text{algébrique}$$

Ce qui signifie que la transformation par érosion d'un ensemble  $X$  par  $B$  s'obtient en translatant  $X$  par l'opposé de chaque élément de  $B$  et en ne conservant que les points appartenant à toutes les translations de  $X$ . La figure 4.20 illustre cette formulation algébrique. Avec cette interprétation, il est clair que si la taille de  $B$  dépasse celle de  $X$ , l'ensemble  $X$  érodé par  $B$  est vide.

L'opération d'érosion est illustrée à la figure 4.21. Les effets habituels de l'érosion sont :

- la séparation des objets à l'endroit des étranglements,
- le rétrécissement des objets de taille supérieure à  $B$ , et
- la disparition des petits objets (dont la taille est inférieure à  $B$ ).

##### Dilatation

La dilatation se définit de manière analogue à l'érosion. En prenant le même élément structurant  $B$ , pour chaque position  $z$  du centre de  $B$  la question est : l'ensemble  $B_z$  touche-t-il  $X$

érosion : si tous les points de  $B$  sont inclus dans  $X$

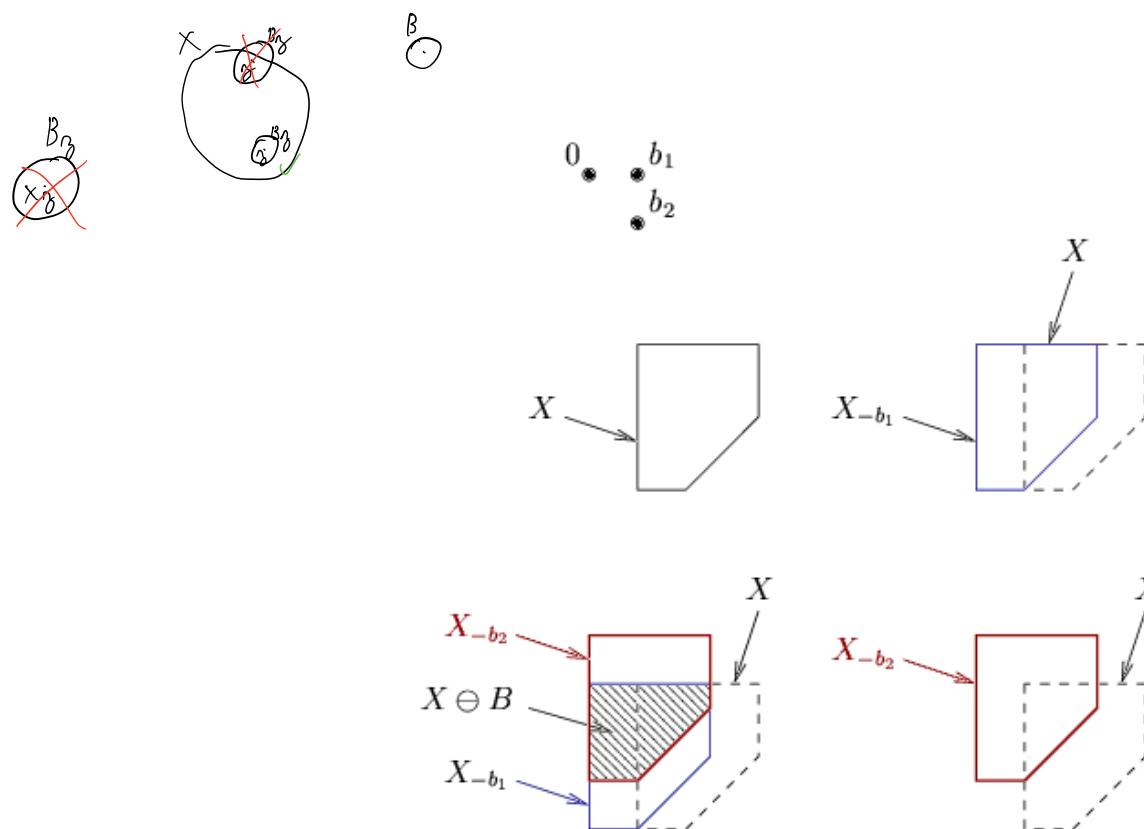


FIGURE 4.20 – Interprétation algébrique de l'érosion.

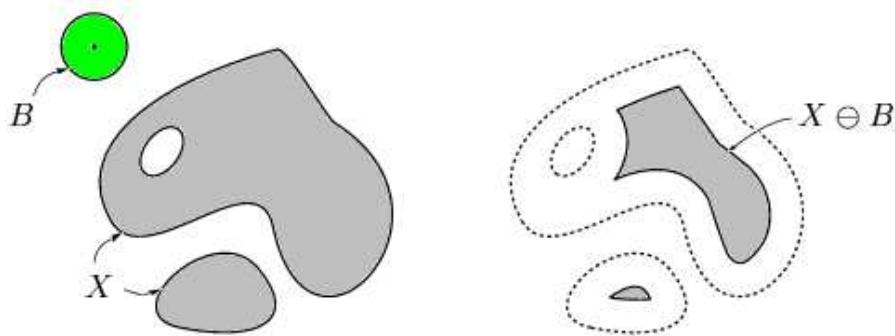


FIGURE 4.21 – Érosion de  $X$  par un disque  $B$ . L'origine de l'élément structurant est représentée par un point noir.

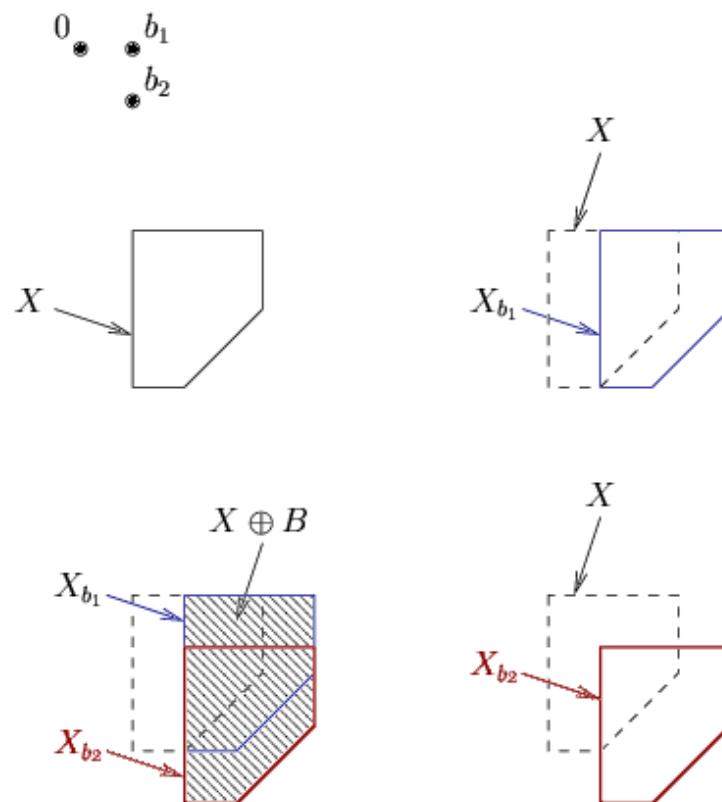
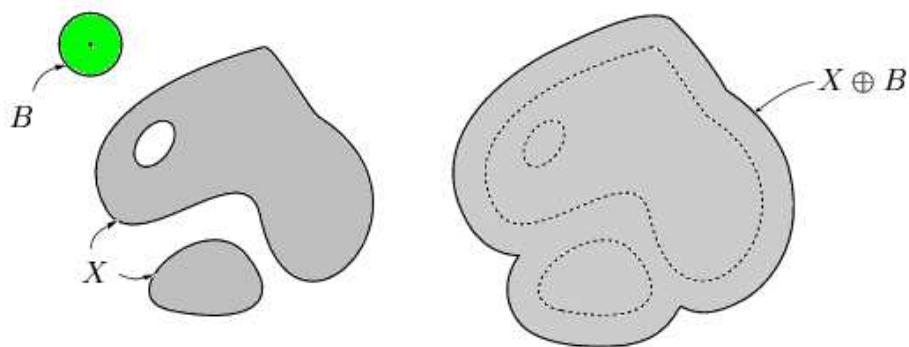


FIGURE 4.22 – Illustration de la définition algébrique de la dilatation.

FIGURE 4.23 – Dilatation de  $X$  par un disque  $B$ .

$(X \cap B_z \neq \emptyset)$ ? L'ensemble des points  $z$  correspondant à une réponse positive forme le nouvel ensemble  $X \oplus B$ :

$$X \oplus B = \bigcup_{x \in X} B_x = \bigcup_{b \in B} X_b = \{x + b : x \in X, b \in B\}$$

Le principe de la dilatation, à savoir l'union des translatés de  $X$  par les éléments de  $B$ , est illustré à la figure 4.22.

La figure 4.23 montre la dilatation par un disque du même ensemble  $X$  que celui traité lors de l'érosion. Dans cet exemple, les deux composantes connexes<sup>2</sup> sont réunies dans le dilaté.

2. Un ensemble  $X$  est connexe si  $\forall x_1, x_2 \in X$ , il existe un chemin reliant  $x_1$  à  $x_2$  totalement inclus dans  $X$ .

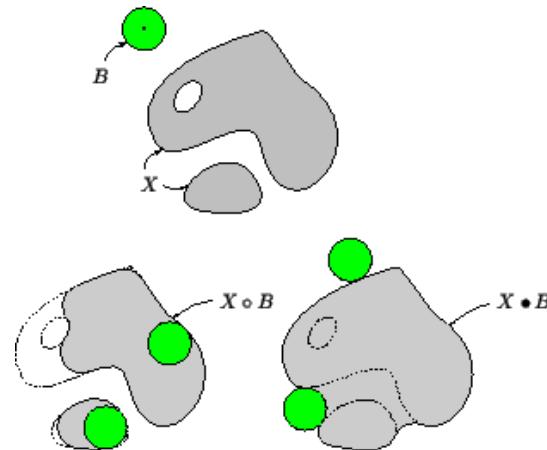


FIGURE 4.24 – Ouverture et fermeture de  $X$  par un disque  $B$ .  
filtre linéaire

Ouverture  $\rightarrow$  érosion  $\rightarrow$  dilatation

L'opération obtenue par la succession d'une érosion et d'une dilatation est l'ouverture morphologique. Elle se note

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B$$

En général, l'ensemble traité diffère de l'ensemble de départ : l'ensemble ouvert est plus régulier et moins riche en détails que l'ensemble initial. La transformation par ouverture adoucit les contours. L'ouverture peut donc jouer le rôle d'un filtre.

Fermeture  $\rightarrow$  dilatation  $\rightarrow$  érosion

En inversant l'ordre des opérations utilisées pour définir l'ouverture, nous obtenons une nouvelle opération appelée fermeture, c'est-à-dire la transformation

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

L'ouverture et la fermeture sont illustrées par la figure 4.24.

### Interprétation de l'ouverture et de la fermeture

L'interprétation la plus commode de l'opération d'ouverture est illustrée par la propriété que voici :

$$X \circ B = \bigcup \{B_z : B_z \subseteq X\}$$

Ainsi, l'ouverture d'une figure par un élément structurant  $B$  est l'ensemble des points recouverts lors du déplacement de  $B$  à l'intérieur de la figure. Une propriété similaire vaut pour la fermeture ; mais cette fois, l'élément structurant parcourt le complémentaire de la figure.

### Notes sur l'implémentation de la dilatation et de l'érosion

Considérons un élément structurant  $B$  carré de taille  $N \times N$ . L'opération de dilatation d'un ensemble  $X$  de pixels est une opération aisée dans une architecture actuelle. Le nombre d'opérations nécessaires au calcul “brutal” de la dilatation  $X \oplus B$  est proportionnel à  $N^2$ , le facteur de proportionnalité dépendant du nombre de pixels de l'ensemble  $X$ . Il est possible de diminuer le nombre d'opérations en se basant sur la propriété d'associativité de la dilatation :

$$X \oplus B = X \oplus (B_1 \oplus B_2) = (X \oplus B_1) \oplus B_2$$

Dès lors, si l'élément structurant  $B$  peut se décomposer en la dilatation de deux éléments structurants plus simple  $B_1$  et  $B_2$ , la dilatation de  $X$  par  $B$  peut être réalisée par la dilatation successive de  $X$  par  $B_1$ , suivie de la dilatation de l'ensemble obtenu par  $B_2$ . Dans le cas de notre élément structurant carré de taille  $N \times N$ , on pourrait le décomposer en deux éléments structurants de taille  $1 \times N$  (ligne horizontale de longueur  $N$ ) et de taille  $N \times 1$  (ligne verticale de longueur  $N$ ). Ceci conduirait alors à un nombre d'opérations proportionnel à  $2N$  au lieu de  $N^2$ , d'où l'intérêt.

Une propriété similaire peut être utilisée pour réduire le nombre d'opérations nécessaires à une érosion par un élément structurant  $B = B_1 \oplus B_2$ . Il s'agit de *avant, plus utile*

$$\cancel{X \ominus B = X \ominus (B_1 \oplus B_2) = (X \ominus B_1) \ominus B_2}$$

L'érosion de  $X$  par  $B$  peut alors être réalisée par l'érosion successive de  $X$  par  $B_1$ , suivie de l'érosion de l'ensemble obtenu par  $B_2$ .

#### 4.3.1.3 Transformations morphologiques complexes

À partir des opérations élémentaires d'érosion, de dilatation, d'ouverture et de fermeture, il est possible de construire de nouveaux opérateurs morphologiques plus évolués et dont l'utilité sera précisée plus loin dans cet exposé.

##### Dilatation géodésique

Une dilatation géodésique fait toujours intervenir deux images. La première image est le dilaté par un élément structurant élémentaire adapté à la trame; il s'agit d'un carré de taille  $3 \times 3$  pour une trame carrée. Quant à la seconde image, elle limite l'extension de la dilatation de la première.

La dilatation géodésique de taille 1 de l'ensemble  $X$  conditionnellement à  $Y$ , notée  $D_Y^{(1)}(X)$ , est définie comme l'intersection du dilaté de taille 1 et de  $Y$  :

$$\boxed{\forall X \subseteq Y : D_Y^{(1)}(X) = (X \oplus B) \cap Y} \quad (4.16)$$

où  $B$  est l'élément le plus simple adapté à la trame. Suite à l'apparition de l'intersection dans la définition,  $D_Y^{(1)}(X)$  est toujours inclus ou égal à  $Y$ . On dit aussi que  $Y$  sert de *masque géodésique*. La figure 4.25 illustre le principe de la dilatation géodésique de taille 1 sur un ensemble dans une trame carrée.

La dilatation géodésique de taille  $n$  de l'ensemble  $X$  conditionnellement à  $Y$ , notée  $D_Y^{(n)}(X)$ , est définie comme une succession du dilaté géodésique de taille 1 :

$$\boxed{\forall X \subseteq Y : D_Y^{(n)}(X) = \underbrace{D_Y^{(1)}(D_Y^{(1)}(\dots D_Y^{(1)}(X)))}_{n \text{ fois}}}$$

où  $B$  est l'élément le plus simple adapté à la trame.

##### Érosion géodésique

L'érosion géodésique de taille  $n$  de l'ensemble  $X$  conditionnellement à  $Y$ , notée  $(X \ominus B)^{(n)}$ , est définie comme une succession de l'érodé géodésique de taille 1 et de  $Y$  :

$$(X \ominus B)^{(n)} = \underbrace{(((X \ominus B)^{(1)} \ominus B)^{(1)} \dots)}_{n \text{ fois}}$$

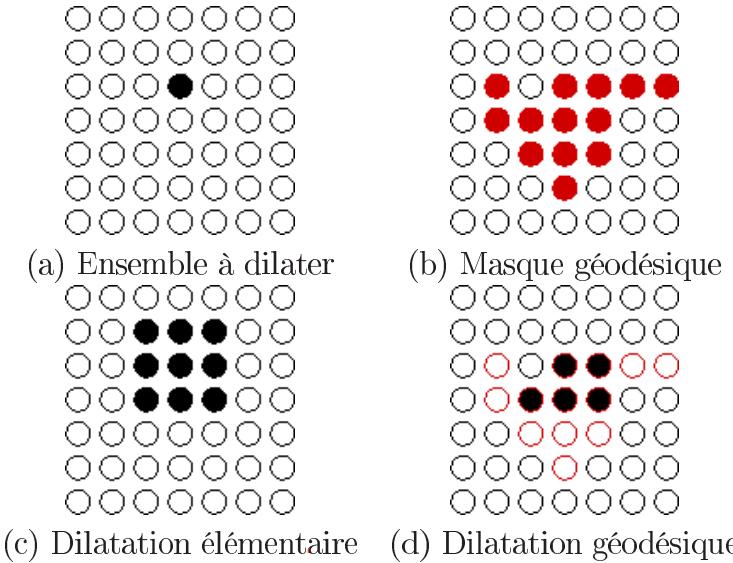


FIGURE 4.25 – Dilatation géodésique de taille 1 d'un ensemble.

où l'érodé géodésique de taille 1 est égal à

$$\forall X \supseteq Y : (X \ominus B)^{(1)} = (X \ominus B) \cup Y \quad (4.17)$$

### Reconstruction géodésique

Les opérations géodésiques sont rarement utilisées en tant que telles. C'est plutôt l'ensemble vers lequel convergent ces opérations lorsque  $n$  croît qui permet de résoudre certains problèmes pratiques, comme par exemple l'extraction de particules pré-sélectionnées dans une image. En fait, l'érosion et la dilatation géodésique convergent après un certain nombre d'itérations. Le procédé de reconstruction géodésique tire profit de ce principe.

La reconstruction de  $X$  conditionnellement à  $Y$  est la dilatation géodésique de  $X$  jusqu'à convergence. Soit  $i$  la valeur à partir de laquelle la limite de convergence est atteinte, la reconstruction de  $X$  est définie par

$R_Y(X) = D_Y^{(i)}(X)$  avec  $D_Y^{(i+1)}(X) = D_Y^{(i)}(X)$

(4.18)

Comme l'indique son nom, cette opération permet de reconstruire des détails perdus éventuellement lors d'une autre opération. La figure 4.26 représente les 3 étapes mises en oeuvre pour extraire des particules choisies dans une image. L'image (a) est le signal de départ. Dans l'image (b), on sélectionne certaines particules en insérant quelques points dans celles-ci. La reconstruction conduit alors à l'image (c) où ne sont reconstituées que les particules sélectionnées ; les autres ont été gommées.

### 4.3.2 Images en niveaux de gris

Il est possible de généraliser les notions d'érosion et de dilatation que nous avons vues plus haut aux images en niveaux de gris. Pour cela, nous devons tout d'abord généraliser les notions ensemblistes aux fonctions. Nous verrons donc une image comme une fonction qui, à tout point du plan, fait correspondre une valeur.

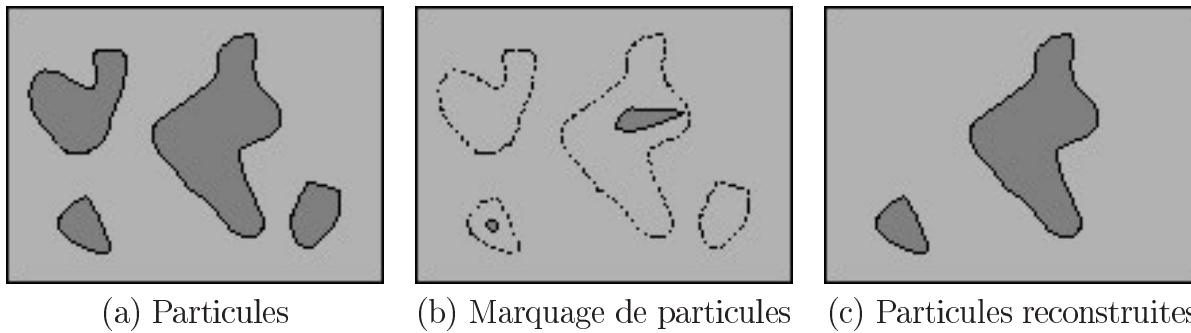


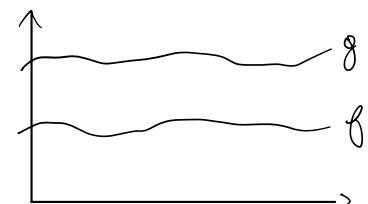
FIGURE 4.26 – Extraction de particules pré-sélectionnées dans une image.

#### 4.3.2.1 De la notion d'ensemble à celle de fonction

Pour la morphologie mathématique en niveaux de gris, les opérations de base ne sont plus l'union et l'intersection mais le *supremum*  $\vee$  et l'*infimum*  $\wedge$ . Pour aborder les autres notions, il faut d'abord définir la notion d'ordre entre fonctions, tout comme nous l'avions fait pour les ensembles en utilisant la notion d'inclusion.

**Ordre entre fonctions (inclusion)**  $\rightarrow x \subseteq Y$   
 $f < g$

Soient deux fonctions  $f$  et  $g$ . La fonction  $f$  est inférieure à  $g$  se note :

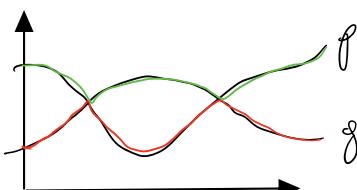


$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \quad (4.19)$$

La relation “est plus grand”, notée  $\geq$ , est définie de la même manière.

**Infimum et Suprénum (intersection et union)**  $\rightarrow x \wedge Y \quad x \vee Y$   
 $f \wedge g \quad f \vee g$

Soient deux fonctions  $f$  et  $g$ . L'infimum et le suprénum se ramènent en fait à la notion de minimum et de maximum :



$$\bullet (f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \quad (4.20)$$

$$\bullet (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)) \quad (4.21)$$

Translaté

La translation de la fonction  $f$  par  $b$  est la fonction  $f_b$  définie par

$$f_b(x) = f(x - b) \quad (4.22)$$

#### 4.3.2.2 Transformations morphologiques élémentaires

Il est possible de remplacer la notion d'élément structurant par celle de fonction quelconque dite structurante. Néanmoins, cela ne conduit guère à des implémentations satisfaisantes. Nous nous limiterons donc au cas d'éléments structurant représentés par une fonction  $B$  caractérisée par un support fini que nous noterons  $D$ . Ce support peut être dans les cas les plus simples un carré ou un disque. Ce support est à mettre en rapport direct avec les masques de convolution que nous avons étudiés plus haut.

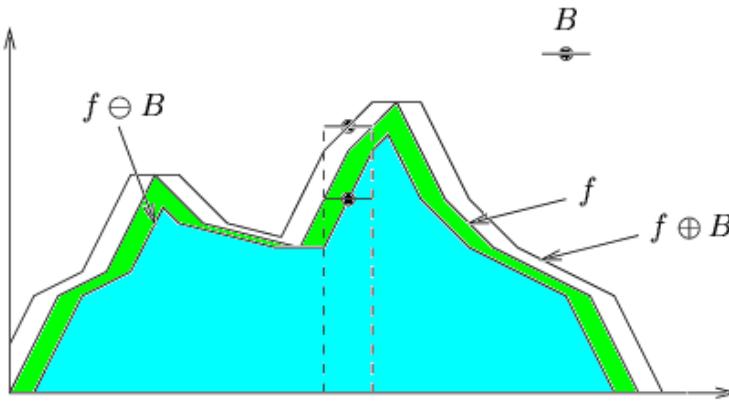


FIGURE 4.27 – Érosion et dilatation d'une fonction.

### Érosion et dilatation

Avec les notions introduites ci-dessus, il est maintenant possible de donner les définitions des opérateurs d'érosion et de dilatation d'une fonction  $f$  par un élément structurant  $B$  :

$$f \ominus B = \bigwedge_{h \in D} f_{-h}(x) \quad (4.23)$$

$$f \oplus B = \bigvee_{h \in D} f_h(x) \quad (4.24)$$

Ces opérations sont illustrées à la figure 4.27. Avec des éléments structurants de ce type, une dilatation se calcule comme l'enveloppe supérieure de tous les translatés de la fonction par les éléments  $h$  de l'élément structurant  $B$ . Quant à l'érosion, elle devient équivalente à la recherche du minimum sur le support de  $B$ .

### Ouverture et fermeture

Comme dans le cas des images binaires, l'ouverture  $f \circ B$  et la fermeture  $f \bullet B$  résultent de la mise en cascade de l'érosion et de la dilatation :

$$f \circ B = (f \ominus B) \oplus B \quad (4.25)$$

$$f \bullet B = (f \oplus B) \ominus B \quad (4.26)$$

Les figures 4.28 et 4.29 montrent le résultat d'une ouverture et d'une fermeture sur une fonction unidimensionnelle.

Par analogie avec le traitement d'ensembles, l'ouverture sur des images produit un effet de filtrage comme le montre la figure 4.30 où sont rassemblées plusieurs images dont l'image érodée, l'image dilatée et l'image ouverte, obtenues toutes avec un élément structurant carré. Puisqu'elle recherche un minimum, l'érosion assombrit l'image alors qu'à l'inverse, la dilatation éclaircit l'image. L'ouverture produit une image qui ne conserve que les parties claires ayant la taille et la forme de l'élément structurant ; les autres sont proprement gommées, c'est-à-dire noircies.

#### 4.3.2.3 Filtrage non-linéaire

Dans cette introduction au traitement d'images, nous nous limiterons au filtre de rang et au filtre médian qui est un cas particulier de ce dernier et qui est couramment utilisé pour la suppression du bruit dans les images.

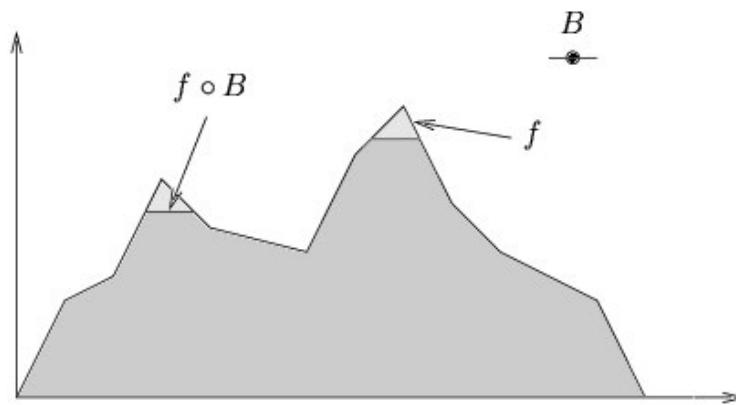


FIGURE 4.28 – Ouverture d'une fonction.

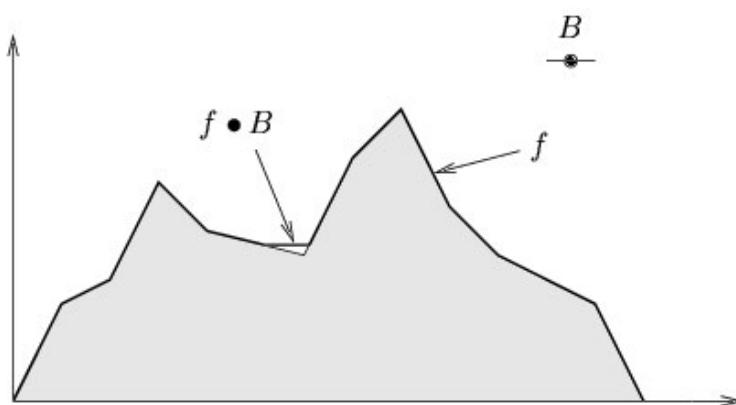


FIGURE 4.29 – Fermeture d'une fonction.



(a) Image originale



(b) Érosion par un carré



(c) Dilatation par un carré



(d) Ouverture par un carré

FIGURE 4.30 – Illustration des opérations élémentaires sur une image en niveaux de gris.

### Filtre de rang

L'érosion ou la dilatation correspondent à la sélection des valeurs extrêmes puisqu'il s'agit de déterminer l'infimum ou le supremum. Ce type d'opérations est donc très sensible au bruit, particulièrement à un bruit impulsif. On songe donc tout naturellement à considérer d'autres valeurs que ces valeurs extrêmes dans l'espoir de diminuer la sensibilité au bruit ; c'est la notion de *filtre de rang* qui s'en dégage.

Considérons un élément structurant carré  $B$  de taille  $n \times n$ . Une fois positionné sur un pixel de  $(x, y)$  de l'image, l'élément structurant englobe  $\sharp(B) = n^2$  pixels que l'on peut classer par ordre décroissant :

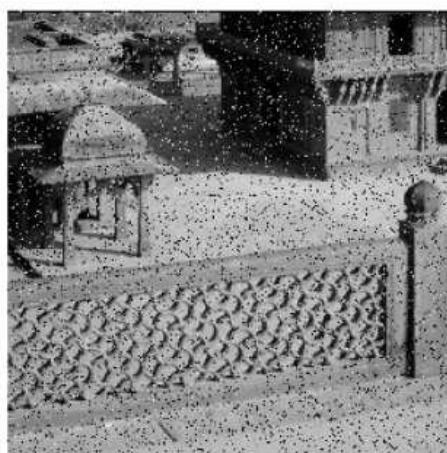
$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq f_{\sharp(B)-1} \geq f_{\sharp(B)}$$

Le filtre de rang d'ordre  $k$  remplace la valeur du pixel  $(x, y)$  par la  $k$ -ième valeur de la série ainsi obtenue. L'opération d'érosion correspond alors au filtre de rang d'ordre  $k = \sharp(B)$  tandis que la dilatation correspond au filtre de rang d'ordre  $k = 1$ .

### Filtre médian

Si  $\sharp(B)$  est impair, le choix  $k = \frac{1}{2}(\sharp(B) + 1)$  conduit à la définition d'un cas particulier de filtre de rang. Il s'agit du filtre médian car il sélectionne la médiane des valeurs de la série construite plus haut. Le filtrage médian est une technique de filtrage non-linéaire couramment utilisée en pratique. Il s'avère particulièrement efficace pour juguler les effets d'un bruit impulsif. Sa caractéristique essentielle est sa capacité à conserver des transitions fortes tout en supprimant une partie importante du bruit.

La figure 4.31 compare quelques opérations de filtrage. De même, la figure 4.32 montre l'effet d'un changement de la taille de la fenêtre sur la qualité de l'image filtrée.



(a) Image originale bruitée

(b) Ouverture par un carré  $5 \times 5$ (c) Passe-bas BUTTERWORTH ( $R_0 = 50$ )(d) Médian par un carré  $5 \times 5$ 

FIGURE 4.31 – Illustration des opérations élémentaires sur une image en niveaux de gris.



(a) Image originale

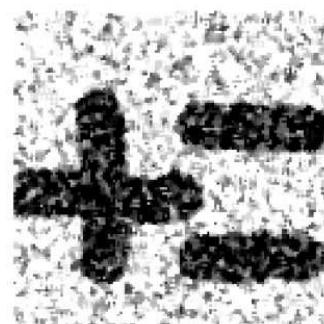
(b) Médian  $3 \times 3$ (c) Médian  $5 \times 5$ 

FIGURE 4.32 – Effet de la taille de l'élément structurant sur le filtrage.

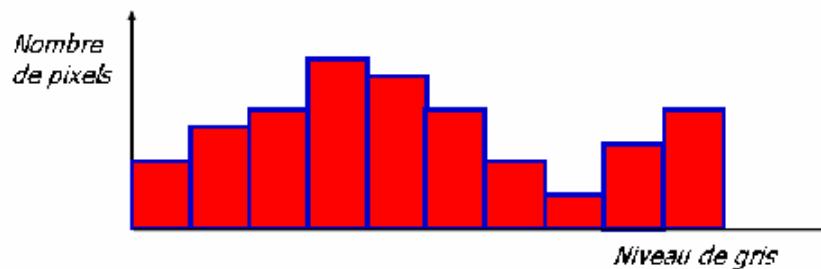


FIGURE 4.33 – Définition de l'histogramme d'une image.

## 4.4 Traitement spécifique : Rehaussement et restauration

L'acquisition d'une image s'accompagne souvent d'une distorsion ou d'une certaine dégradation. On peut songer à un éclairage trop faible ou non-uniforme, à des poussières sur une lentille, etc... Il n'y a dès lors pas d'autres solutions que de chercher à corriger les défauts par un procédé algorithmique. Dans ce contexte, on distingue deux familles de procédés de correction de défauts :

- le rehaussement, qui consiste à donner à l'image un aspect visuellement correct, et
- la restauration qui vise à rétablir la valeur exacte des pixels, c'est-à-dire des pixels de l'image qui aurait été obtenue en l'absence des conditions perturbatrices.

Dans cette introduction, nous parlerons essentiellement du rehaussement car la restauration nécessite de connaître les sources précises de la dégradation. Néanmoins, avant d'aborder différentes techniques, il nous faut introduire quelques définitions.

### 4.4.1 Définitions

Plusieurs termes apparaissent fréquemment lorsque l'on s'intéresse à la qualité d'une image : la *luminance* (ou luminosité, ou encore la brillance), le *contraste* mais aussi la *dynamique* d'une image. Un outil intéressant à l'analyse d'une image est l'*histogramme* des niveaux de gris.

#### Histogramme

L'histogramme d'une image représente la distribution des niveaux de gris (ou de couleurs). Il s'agit simplement d'une fonction que nous noterons *hist* dont la valeur *hist(k)* représente le nombre de pixels de l'image ayant la valeur *k*. Cette fonction est généralement représentée sous la forme d'un diagramme en bâtonnets, comme illustré à la figure 4.33.

#### Dynamique

Comme dans le cas des signaux 1D, la dynamique d'une image *f* est définie comme l'intervalle des valeurs comprises entre le minimum et le maximum de l'image :

$$[min(f), max(f)] \quad (4.27)$$

#### Luminance (ou brillance)

La luminance d'une image *f(m, n)* est définie comme la moyenne de tous les pixels de l'image

$$L = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \quad (4.28)$$

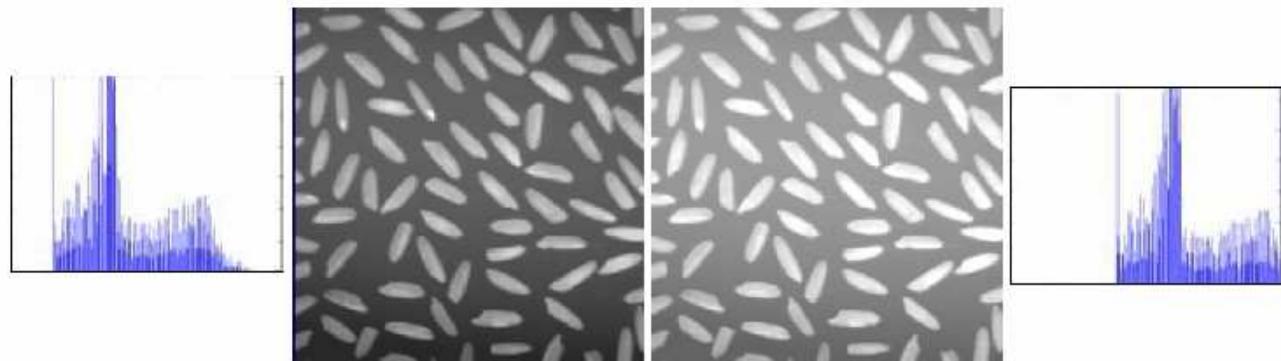


FIGURE 4.34 – Deux images de luminosité différente.

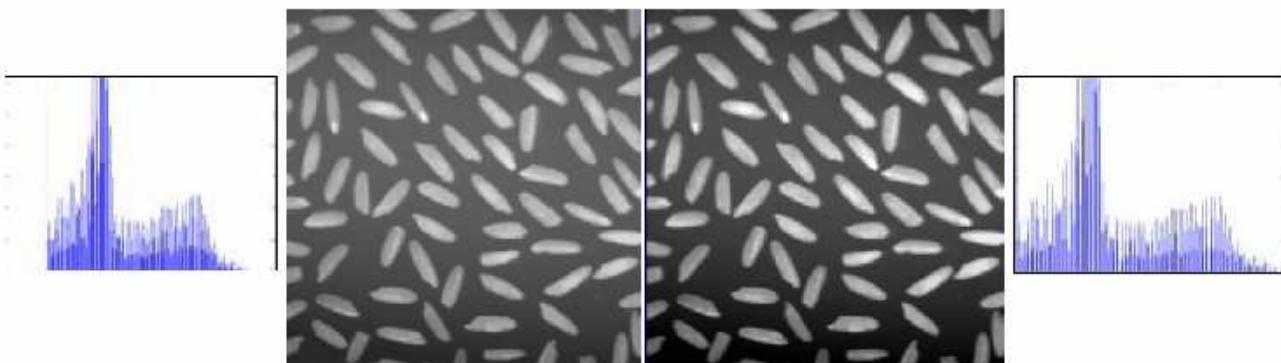


FIGURE 4.35 – Deux images de contraste différent.

La figure 4.34 illustre deux images de luminosité différente, ainsi que leur histogrammes respectifs.

### Contraste

Le contraste d'une image peut être défini de plusieurs façons :

- l'écart-type des variations des niveaux de gris :

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} (f(m, n) - L)^2} \quad (4.29)$$

- la variation entre niveaux de gris minimum et maximum :

$$C_2 = \frac{\max(f) - \min(f)}{\max(f) + \min(f)} \quad (4.30)$$

La figure 4.35 illustre deux images de contraste différent ainsi que leur histogrammes respectifs.

Le rehaussement d'une image (que nous verrons ici comme une amélioration du contraste) consiste à appliquer une fonction particulière à toutes les valeurs d'intensité  $I$  de l'image. Le type de rehaussement dépend essentiellement de la forme de la fonction à appliquée. On impose généralement que cette fonction soit croissante, de sorte que toute relation d'ordre entre pixels traduite par leur valeur soit maintenue, mais elle peut être de forme quelconque. Nous en donnons quelques exemples ci-dessous. Ces différentes techniques sont connues sous l'appellation de “manipulation de l'histogramme”.

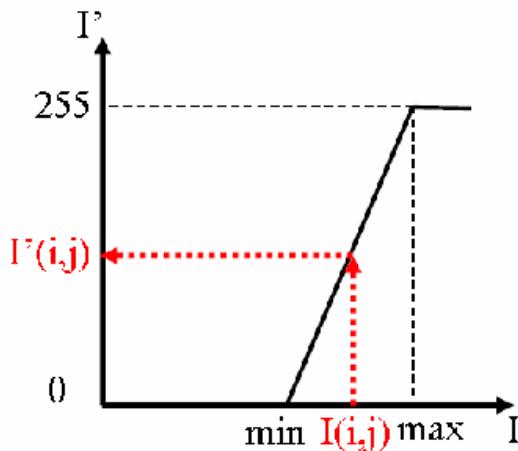


FIGURE 4.36 – Transformation linéaire de l'histogramme.

## 4.4.2 Amélioration du contraste par transformation de l'histogramme

### 4.4.2.1 Transformation linéaire

Cette transformation consiste à appliquer une fonction *rampe* aux valeurs d'intensité  $I$  de l'image. Chaque valeur  $I$  est ainsi transformée en une valeur  $I'$  selon une loi linéaire. Dans ce qui suit, nous noterons  $\min = \min(f)$ ,  $\max = \max(f)$ ,  $I(i, j)$  l'intensité du pixel  $f(i, j)$  avant transformation et  $I'(i, j)$  l'intensité du même pixel après transformation. La figure 4.36 illustre la loi linéaire considérée ici. La courbe ainsi représentée est appelée *courbe tonale*.

L'effet de cette transformation est de dilater au maximum la dynamique de l'image originale, ce qui s'exprime par

$$\frac{\max - \min}{I(i, j) - \min} = \frac{255 - 0}{I'(i, j) - 0}$$

pour une image ayant 256 niveaux de gris compris entre 0 et 255, et enfin conduit à la loi de transformation suivante :

$$I'(i, j) = 255 \frac{I(i, j) - \min}{\max - \min} \quad (4.31)$$

où

$$\frac{I(i, j) - \min}{\max - \min} \in [0, 1]$$

La figure 4.37 illustre l'effet de cette transformation sur une image. Au départ de cette transformation, il est possible d'imaginer d'autres transformations du même type.

### 4.4.2.2 Transformation linéaire avec saturation

Cette transformation consiste à choisir deux niveaux de saturation  $S_{min}$  et  $S_{max}$  en-dessous et au-dessus desquels les niveaux d'intensité  $I$  de l'image sont tous respectivement mis à 0 ou à 255. Ceci a pour effet d'accentuer une zone particulière de la dynamique de l'image :  $[S_{min}, S_{max}]$ . Cette transformation est caractérisée par la loi suivante :

$$I'(i, j) = \begin{cases} 255 \frac{I(i, j) - S_{min}}{S_{max} - S_{min}} & \text{si } S_{min} \leq I(i, j) \leq S_{max} \\ 0 & \text{si } I(i, j) < S_{min} \\ 255 & \text{si } S_{max} < I(i, j) \end{cases} \quad (4.32)$$

La figure 4.38 illustre l'effet de cette transformation sur une image. De nouveau, la dynamique de l'image sortie est dilatée au maximum.

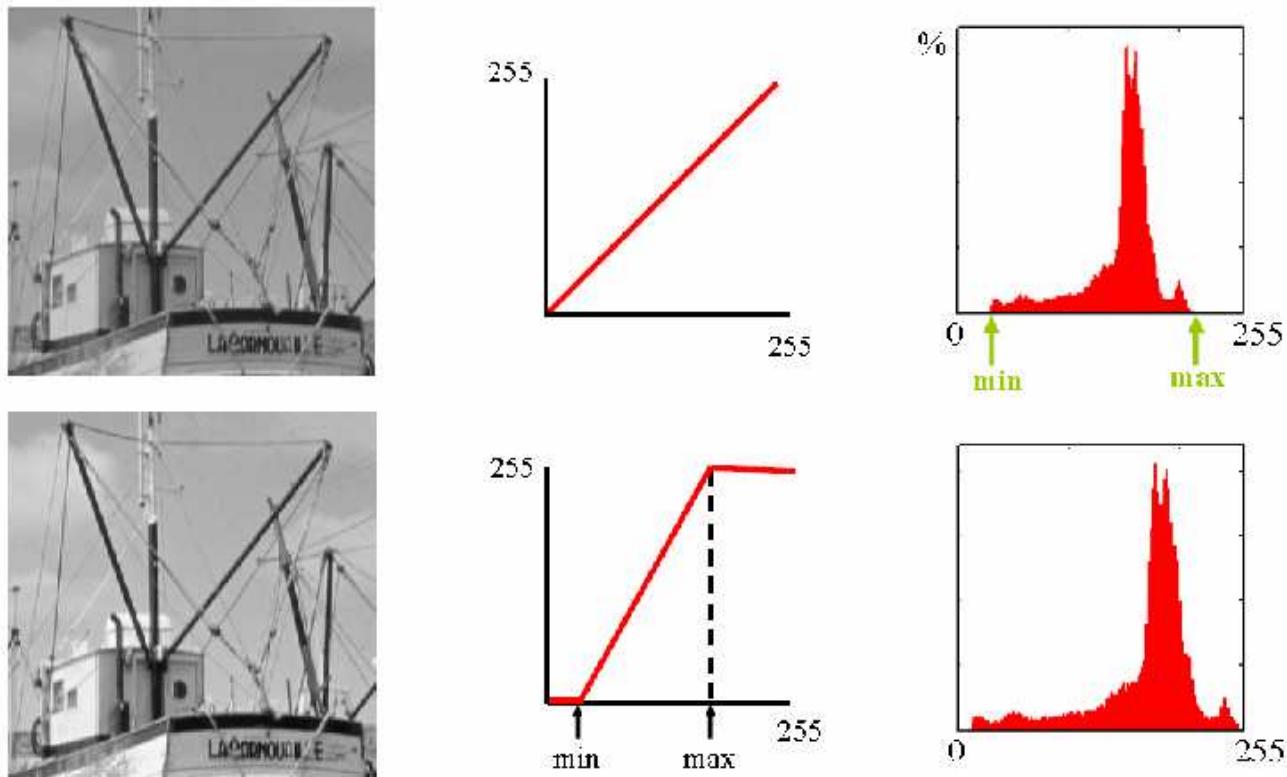


FIGURE 4.37 – Effet d'une transformation linéaire de l'histogramme.

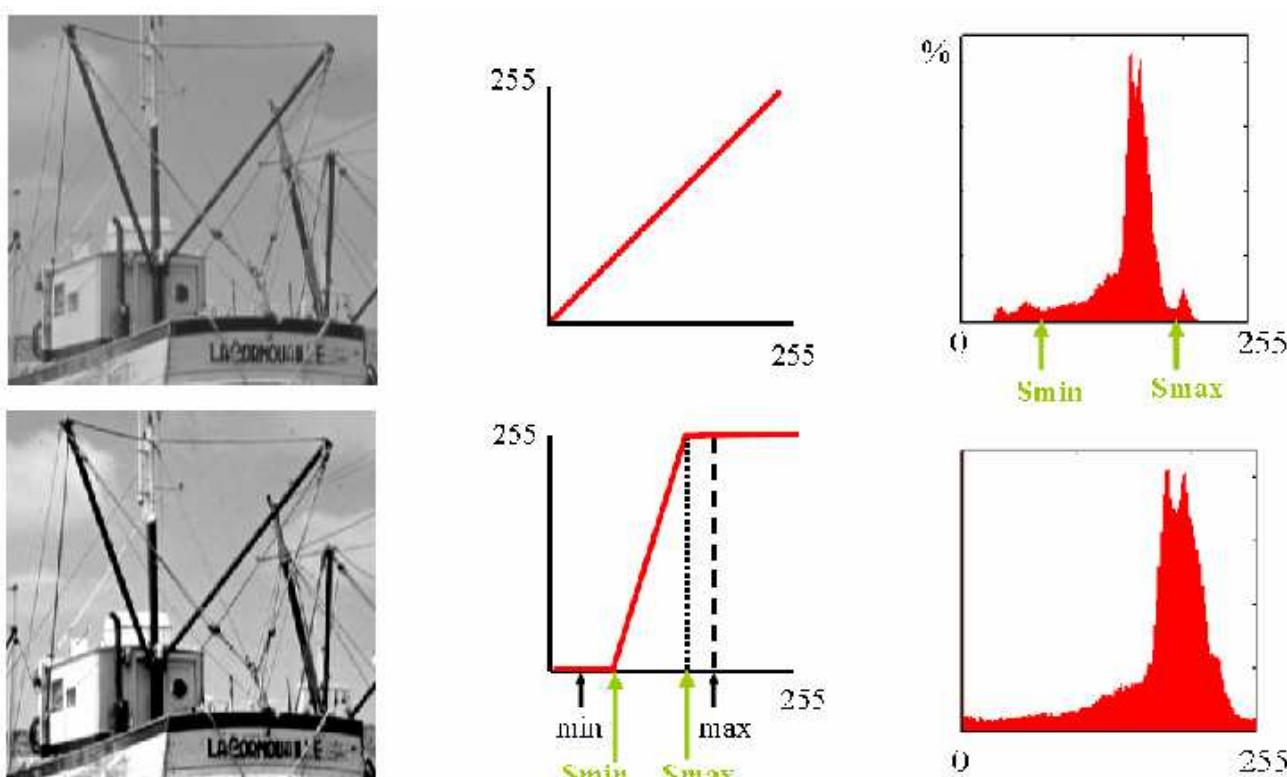


FIGURE 4.38 – Effet d'une transformation linéaire avec saturation.

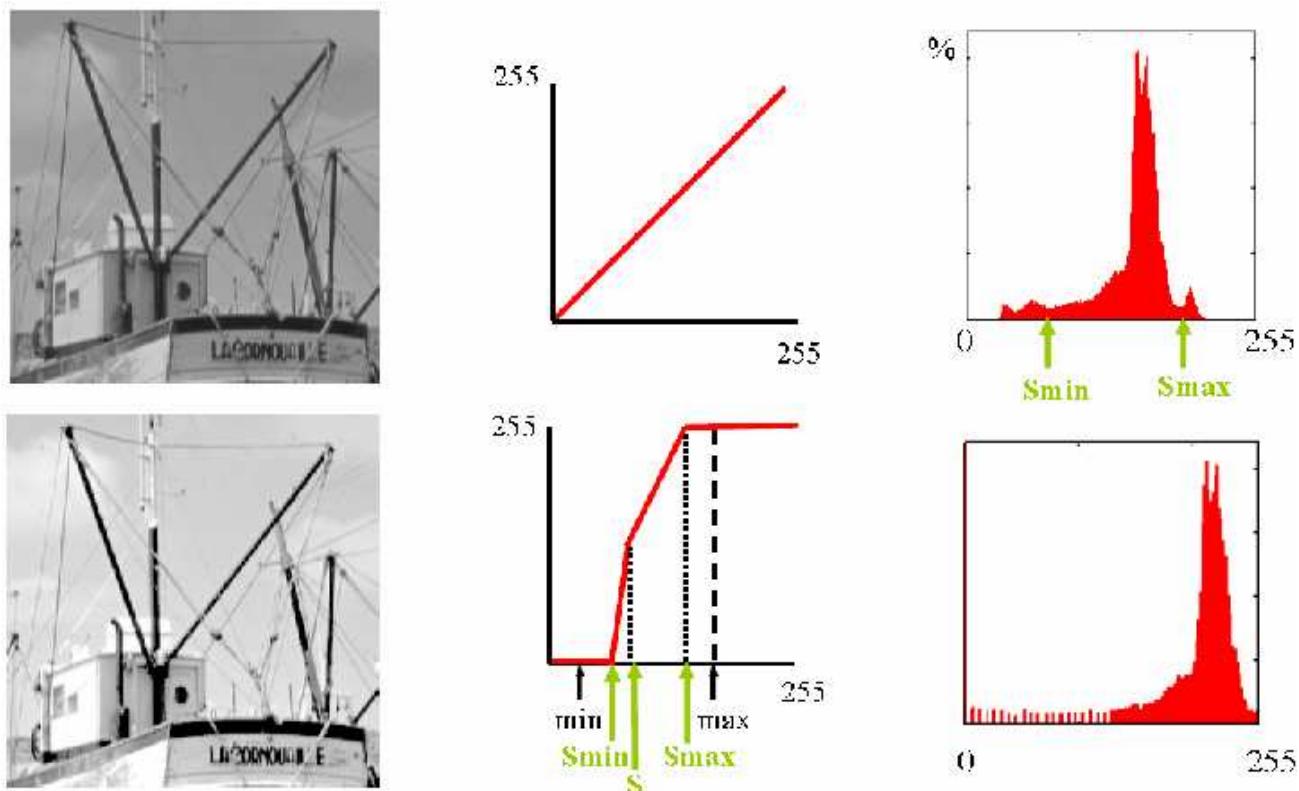


FIGURE 4.39 – Effet d'une transformation linéaire par morceaux.

#### 4.4.2.3 Transformation linéaire par morceaux

À la transformation précédente, il est possible d'ajouter un (ou plusieurs) paramètre supplémentaire  $S$  coupant la rampe de base en deux rampes de pente différente. Cela permet d'accentuer différemment plusieurs zones de la dynamique de l'image de départ. Cette transformation est illustrée à la figure 4.39.

#### 4.4.2.4 Transformation non-linéaire

On peut également imaginer d'utiliser comme loi de transformation une fonction non-linéaire. Par exemple, nous citons ici la *correction Gamma*<sup>3</sup> caractérisée par la loi

$$I'(i, j) = 255 \left( \frac{I(i, j)}{255} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.33)$$

où  $\gamma$  est compris dans l'intervalle  $[1, 3 ; 3, 0]$  pour compenser les effets dûs à la physique des composants, ou  $[1/2, 1/3]$  pour compenser les effets dûs à la perception visuelle humaine. L'effet de cette transformation est illustrée à la figure 4.40.

#### 4.4.2.5 Autre fonction possible... Le négatif d'une photo

La transformation envisagée ici n'est pas à proprement parler une amélioration du contraste mais plutôt une inversion complète de la dynamique de l'image afin de faire ressortir ce que l'on appelle le "négatif d'une photo". Néanmoins, cette transformation rentre dans la catégorie

3. Cette correction permet de compenser les effets non-linéaires de la reproduction de l'intensité lumineuse. Ce facteur Gamma s'explique par divers phénomènes physiques relevant non seulement de la physique (écrans à tube cathodique, écrans à cristaux liquides (LCD), photographie, acquisition video, impression) mais aussi de la perception visuelle humaine.

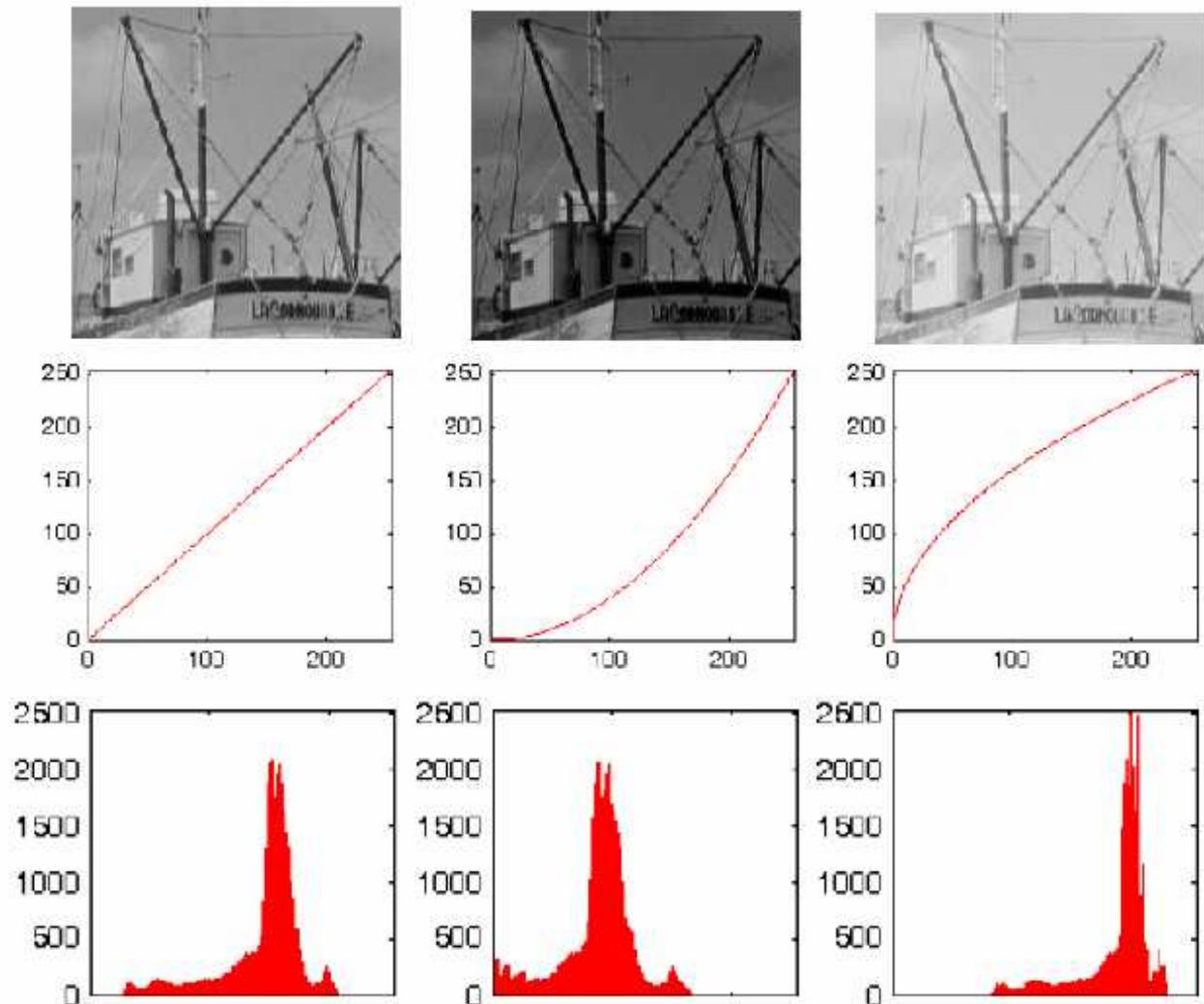


FIGURE 4.40 – Effet de la correction Gamma sur une image en 256 niveaux de gris. (À gauche) image originale. (Au milieu)  $\gamma < 1$ , effet assombrissant. (À droite)  $\gamma > 1$ , effet éclaircissant.

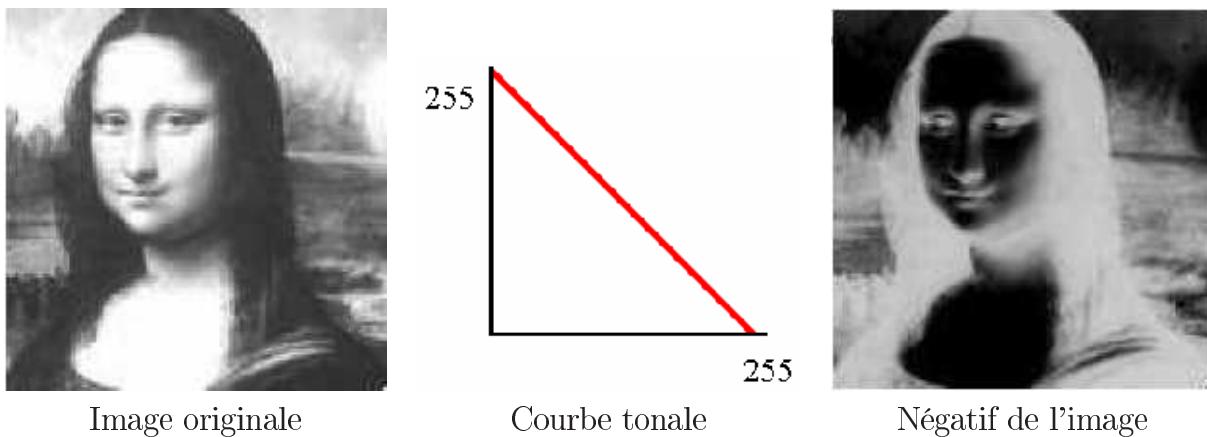


FIGURE 4.41 – Négatif d'une image.

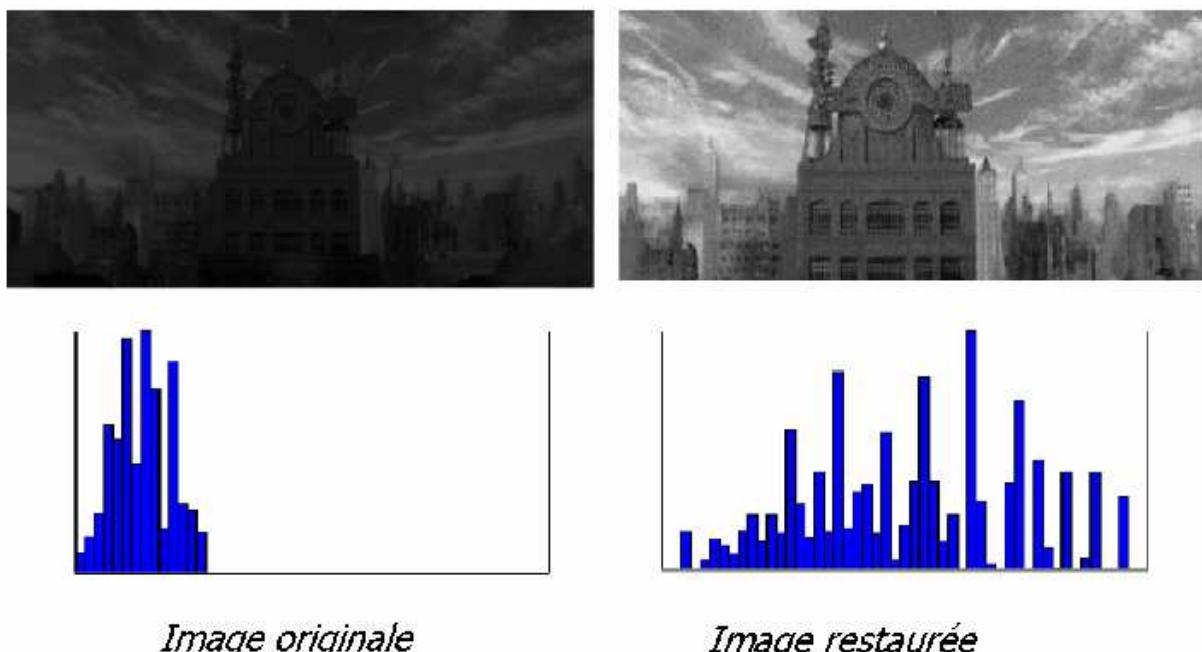


FIGURE 4.42 – Effet bénéfique d'une transformation de l'histogramme.

des opérations de manipulation de l'histogramme. La loi associée à cette transformation est simplement

$$I'(i, j) = 255 - I(i, j) \quad (4.34)$$

Celle-ci est illustrée à la figure 4.41.

#### 4.4.3 Égalisation de l'histogramme

Les techniques de transformation de l'histogramme vues plus haut donnent souvent de bons résultats. Elles dilatent la dynamique de l'image d'entrée afin que l'image de sortie présente une dynamique maximale. Un bon résultat d'une de ces techniques est illustré à la figure 4.42. Dans cet exemple, l'image originale est très sombre et son histogramme est concentré sur les faibles valeurs de niveaux de gris. L'effet de la dilatation de la dynamique de l'image originale est donc très net.

Par contre, dans certains cas, les transformations décrites plus haut ne s'avèrent pas très efficaces. La figure 4.43 illustre une image pour laquelle ces techniques ne donnent pas de bons

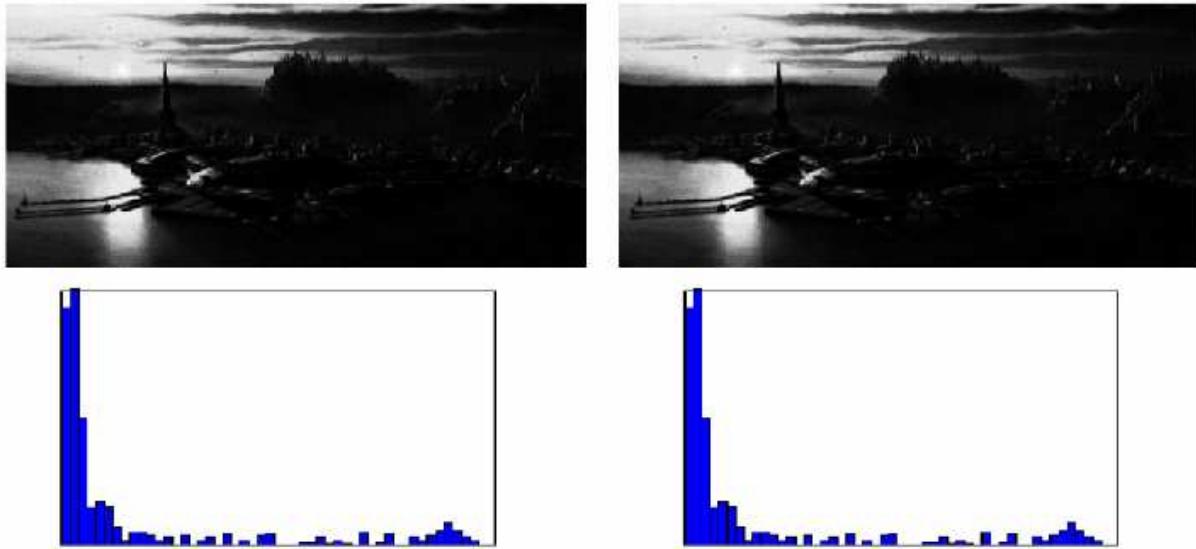


FIGURE 4.43 – Aucun effet bénéfique dans le cas où l'histogramme initial occupe déjà toute la plage de dynamique.

résultats. Il s'agit d'une image sombre mais présentant des zones claires. Dès lors, la dynamique de l'image originale est déjà très large et il est donc difficile de la dilater plus encore. L'histogramme, bien que très large, présente une forte concentration dans les faibles valeurs de niveaux de gris. Dans ce cas, on peut recourir à une autre technique qui porte le nom d'égalisation de l'histogramme.

Dans une image réelle, tous les niveaux de gris ne sont pas présents avec une même occurrence. Il en résulte donc des disparités dans l'histogramme, comme nous venons de le voir avec l'image de la figure 4.43. L'égalisation de l'histogramme est une méthode courante de rehaussement. Elle vise à assurer une distribution homogène des valeurs dans la totalité de la plage dynamique des valeurs possibles de niveaux de gris. Il s'agit donc d'une distorsion de l'échelle des valeurs.

La loi de la transformation de l'égalisation de l'histogramme est calculée à partir de l'histogramme même de l'image originale. Elle varie donc pour chaque image. Plusieurs étapes sont nécessaires pour réaliser l'égalisation d'une image  $f(m, n)$  ( $m = 0, \dots, M - 1$  et  $n = 0, \dots, N - 1$ ) :

1. Calcul de l'histogramme de l'image originale  $hist(k)$ ,  $k \in [0, 255]$
2. Normalisation de l'histogramme (assimilation d'une probabilité ou fréquence d'occurrence d'un niveau de gris dans l'image) :

$$hist_n(k) = \frac{hist(k)}{NM} \quad \text{avec } k \in [0, 255]$$

3. Calcul de l'histogramme des fréquences cumulées :

$$C(k) = \sum_{l=0}^k hist_n(l) \quad \text{avec } k \in [0, 255]$$

4. Transformation des niveaux de gris en utilisant la loi

$$I'(i, j) = 255 C(I(i, j))$$

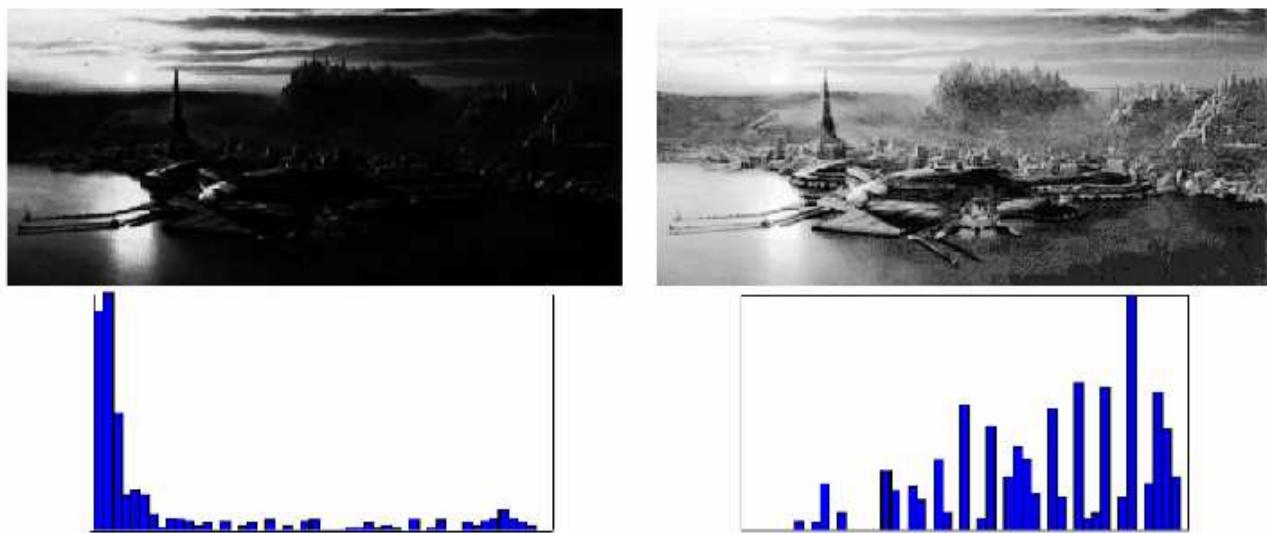


FIGURE 4.44 – Égalisation de l'histogramme d'une image en niveaux de gris.

La figure 4.44 illustre l'application de l'algorithme d'égalisation de l'histogramme sur une image en niveau de gris. L'image résultante est nettement plus contrastée. Par contre, son histogramme n'est pas vraiment uniforme... En fait, cet algorithme vise à rendre l'histogramme cumulatif de l'image résultante le plus linéaire possible, comme en témoigne la figure 4.45 où sont affichés les histogramme et histogramme cumulé d'une image avant et après égalisation.

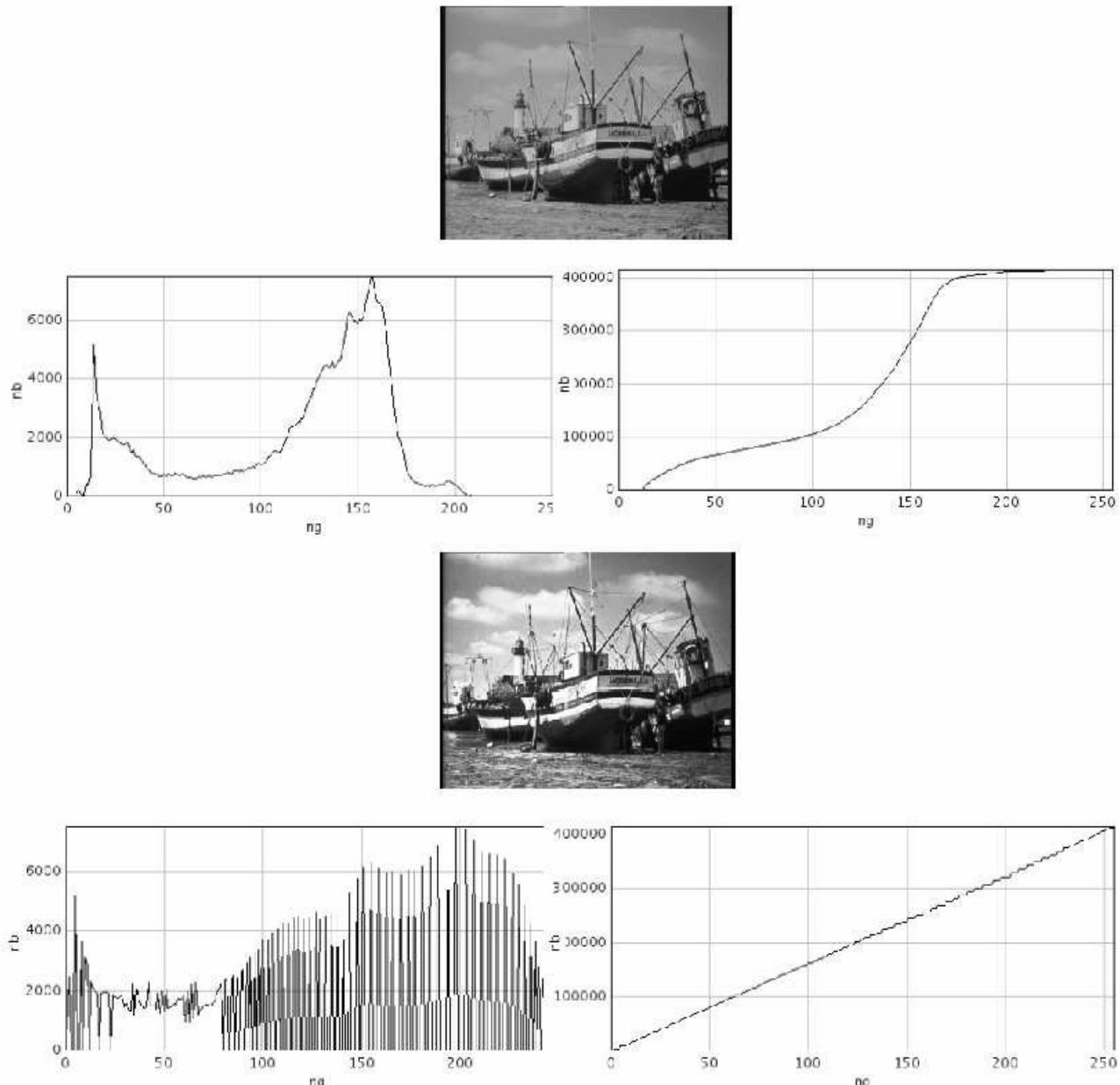


FIGURE 4.45 – Histogramme et histogramme cumulé d'une image avant et après égalisation.

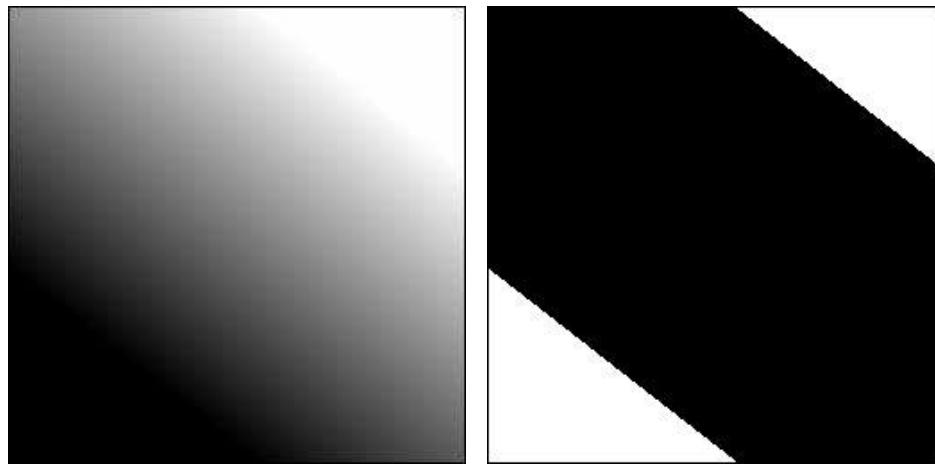


FIGURE 4.46 – Une image en dégradé et ses contours (en noir).

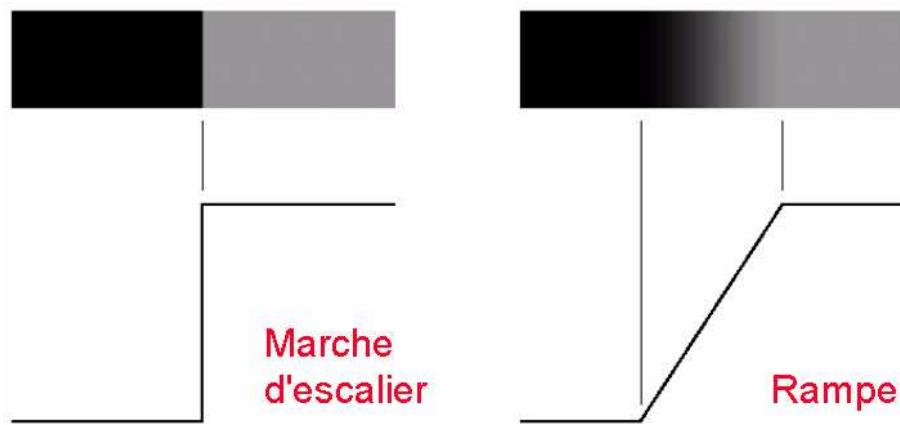


FIGURE 4.47 – Types de contours.

## 4.5 Traitement spécifique : Détection de contours

La détection de contours d'objets présents dans une image est utilisée à différentes occasions, par exemple lors de la segmentation d'une image que nous aborderons un peu plus loin dans ces notes. Intuitivement, un contour est une transition marquée entre deux régions ayant chacune une luminosité distincte. Un contour est donc fondamentalement une transition haute fréquence mais son contenu spectral est très large. C'est là tout le problème de la détection de contours. Enfin, il se peut qu'une image contienne des contours alors que l'œil ne les perçoit pas. Cet effet est illustré à la figure 4.46. La figure 4.47 illustre dans le même ordre d'idée différents types de contours.

### 4.5.1 Opérateurs linéaires basés sur le calcul des dérivées

Le but d'un opérateur d'extraction de contours est de fournir, en réponse à son application sur une image  $I_1$ , une image  $I_2$  à fortes variations aux différents endroits où  $I_1$  présente des contours. Un opérateur répondant à ce critère est, sans conteste, l'opérateur différentiel ou dérivée. Deux choix s'offrent à nous :

- Si l'on se place dans le contexte d'une fonction continue  $f(x)$  à une dimension, sa dérivée  $f'(x)$  est maximale (en valeur absolue) aux différents endroits où  $f(x)$  présente de fortes variations ; cette valeur maximale étant d'autant plus grande que la variation de  $f$  est importante sur une courte distance. Ceci est illustré à la figure 4.48.

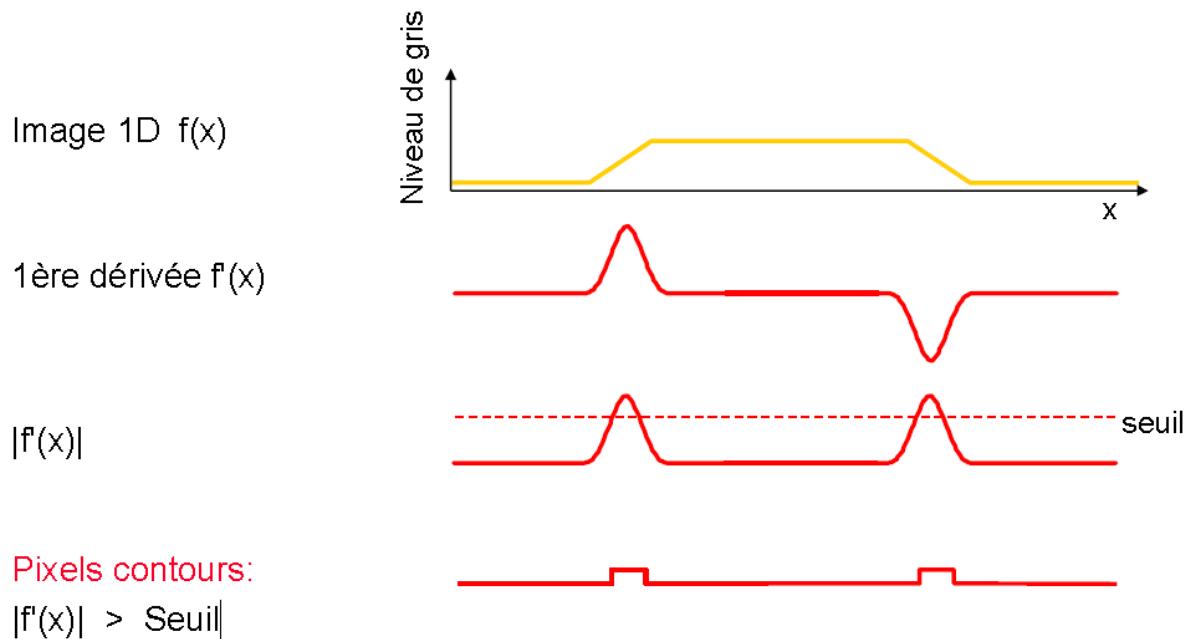


FIGURE 4.48 – Illustration de la dérivée première pour la détection de contours.

- La dérivée seconde  $f''(x)$  présente, quant à elle, un passage par zéro aux différents endroits où  $f(x)$  contient de fortes variations. Ceci est illustré à la figure 4.49.

L'opérateur dérivée (première ou seconde) est linéaire et peut être vu comme un filtre. Nous verrons plus loin que le filtre dérivée est un filtre de type passe-haut. L'application de l'opérateur dérivée impliquera donc un très net effet accentuateur des hautes fréquences.

Le problème majeur que l'on rencontre en pratique est qu'une image n'est pas une fonction continue. Il n'est donc pas possible d'en calculer la dérivée exacte ; on peut tout juste l'approximer par différentes formules. D'autre part, l'effet accentuateur des hautes fréquences entraîne une amplification du bruit. On est donc face à un double problème :

- approximer au mieux la dérivée et
- éviter une amplification excessive du bruit. L'effet d'amplification du bruit sur la détection des bords est illustré à la figure 4.50.

#### 4.5.1.1 Opérateur de dérivée première et Gradient

Par commodité, nous considérons une image caractérisée par une fonction  $f(x, y)$  bidimensionnelle. Il faut, dans ce cas, indiquer dans quelle direction on calcule la dérivée. Les principaux choix sont les directions horizontales  $\vec{e}_x$  ou verticale  $\vec{e}_y$  mais on pourrait également considérer une direction quelconque  $\vec{\theta}$  en se ramenant à une combinaison linéaire des dérivées suivant les axes principaux - il s'agit alors de dérivée directionnelle.

Considérons la dérivée partielle de la fonction  $f(x, y)$  par rapport à  $x$ . La transformée de FOURIER de cet opérateur vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \rightleftharpoons j2\pi u F(u, v) \quad (4.35)$$

Dériver par rapport à  $x$  équivaut donc à multiplier la transformée de FOURIER de  $f$  par la

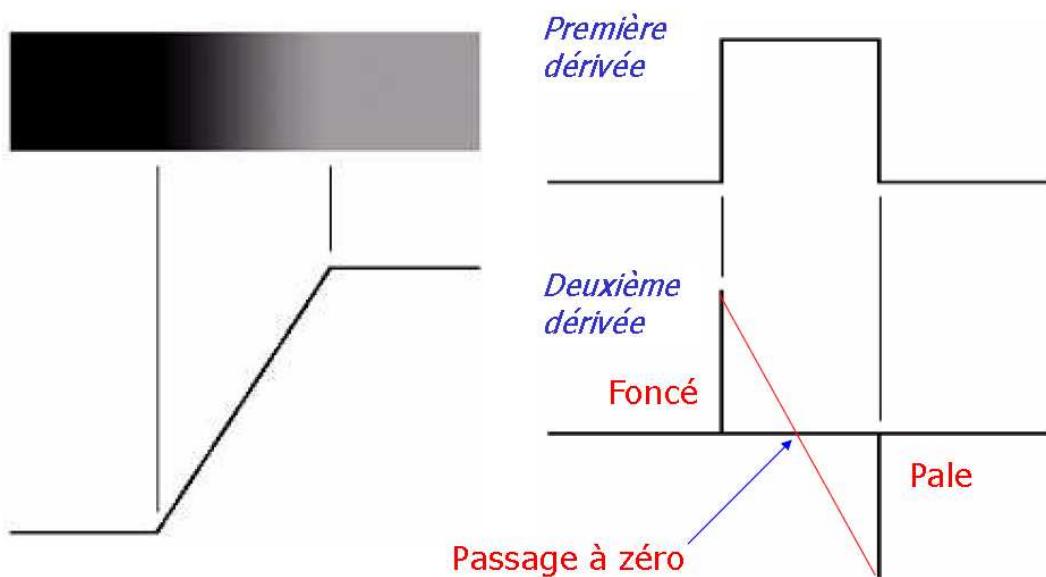


FIGURE 4.49 – Illustration de la dérivée seconde pour la détection de contours.

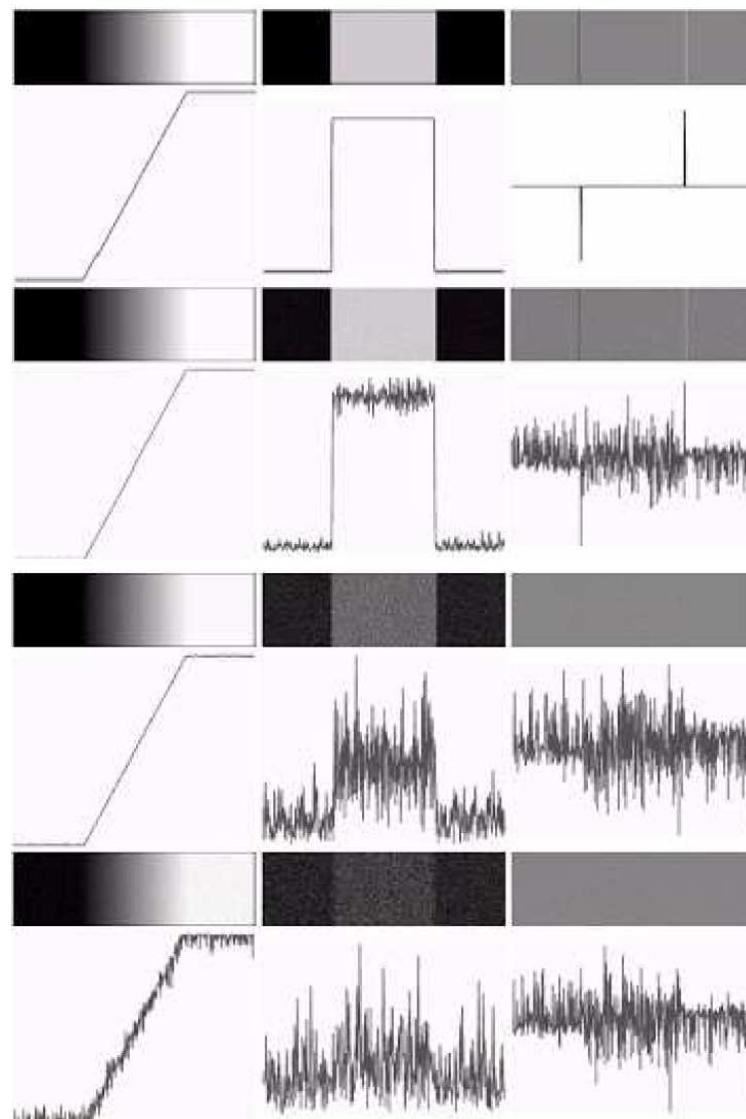


FIGURE 4.50 – Effet du bruit sur la détection des bords par les dérivées première et seconde.

fonction de transfert  $H_x(u, v) = j2\pi u$ , c'est-à-dire filtrer  $f(x, y)$  avec le filtre de réponse impulsionale  $h_x(x, y)$  (transformée de FOURIER inverse de  $H_x$ ). De même, on peut définir la réponse impulsionale  $h_y(x, y)$  correspondant au filtre dérivée dans la direction  $\vec{e}_y$ . Le module de la fonction de transfert étant égal à  $2\pi|u|$ , on voit clairement qu'il y a un effet accentuateur des hautes fréquences, d'où le caractère passe-haut de l'opérateur dérivée. C'est pareil pour  $h_y(x, y)$ .

En adoptant une notation vectorielle de la dérivée, on définit le gradient  $\nabla f$  de l'image par

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y \quad (4.36)$$

Le gradient d'une fonction  $f(x, y)$  est donc une fonction vectorielle. Mais plutôt que de recourir aux composantes en  $x$  et  $y$ , on peut caractériser un gradient par son amplitude et sa direction.

### Amplitude du gradient

L'amplitude du gradient est donnée par

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \quad (4.37)$$

On approxime parfois l'amplitude du gradient par l'expression

$$|\nabla f| \simeq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \quad (4.38)$$

pour éviter le calcul de la racine carrée et les élévations au carré afin d'accélérer le calcul mais cette formule n'est qu'une approximation. La figure 4.51 illustre le calcul de  $|\nabla f|$  par l'utilisation de cette approximation.

### Direction du gradient

La direction du gradient est donnée par

$$\tan^{-1} \left( \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)} \right) \quad (4.39)$$

### Dérivée directionnelle

Étant donnée la définition du gradient d'une fonction, il est maintenant possible de définir sa dérivée directionnelle par

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} = \vec{\theta} \cdot \nabla f \quad (4.40)$$

Il s'agit du produit scalaire du gradient de  $f$  et d'un vecteur caractérisant la direction dans laquelle on désire calculer la dérivée. Si la direction  $\vec{\theta}$  fait un angle  $\theta$  avec l'axe  $x$ , c'est-à-dire  $\vec{\theta} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ , la dérivée directionnelle peut encore s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.41)$$

Pour  $\theta = 0$ , nous retrouvons la dérivée directionnelle dans la direction  $\vec{e}_x$ . La dérivée directionnelle est utile pour mettre en évidence les contours d'une image qui ont une orientation particulière.

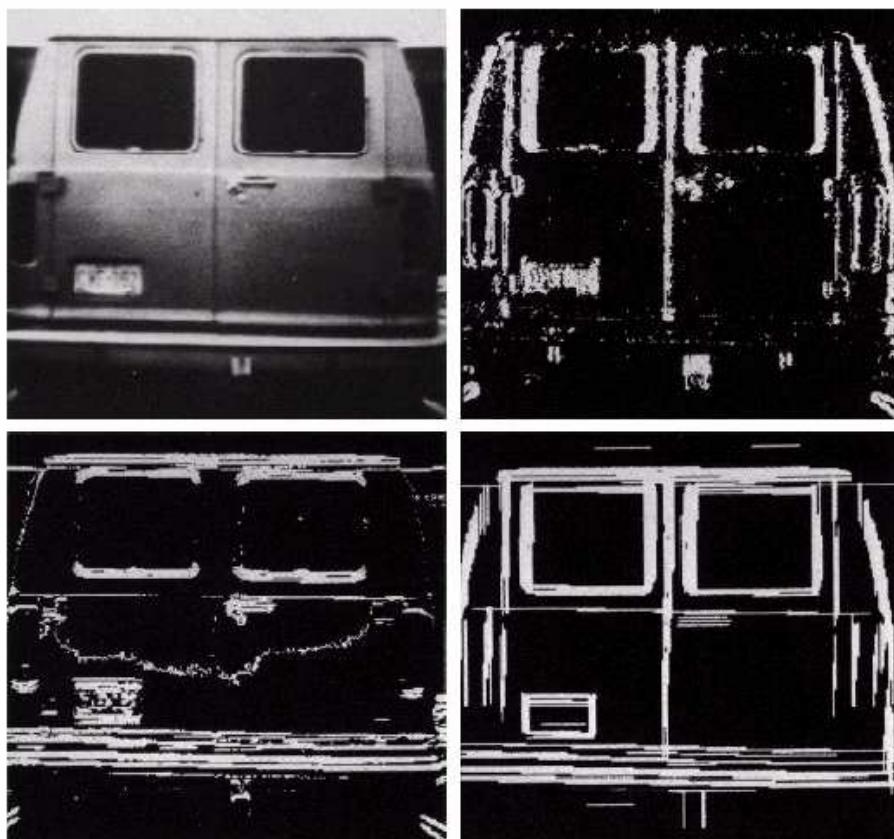


FIGURE 4.51 – Calcul de l'amplitude du gradient d'une image. En haut à gauche : image originale  $f$ . En haut à droite :  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ . En bas à gauche :  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ . En bas à droite :  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ .

### 4.5.1.2 Opérateur de dérivée seconde et Laplacien

Comme pour la dérivée première, on peut définir les réponses impulsionales  $h_{xx}(x, y)$  et  $h_{yy}(x, y)$  correspondant aux filtres dérivée seconde dans les directions  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ . On définit alors le laplacien d'une fonction par

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (4.42)$$

On peut calculer facilement la transformée de FOURIER de cet opérateur

$$\nabla^2 f \rightleftharpoons -4\pi^2(u^2 + v^2) F(u, v) \quad (4.43)$$

Ici encore, on remarque l'effet accentuateur des hautes fréquences.

### 4.5.1.3 Calcul pratique des dérivées et masques de convolution

En pratique, les images sur lesquelles nous devons calculer la dérivée sont échantillonnées et sont fournies sous la forme d'une matrice de pixels. Il est alors nécessaire d'échantillonner l'opérateur de dérivée première et seconde en les approximant au mieux.

#### Dérivée première

Considérons une fonction  $f(x)$  à une dimension. Une première approximation de sa dérivée première est donnée par

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (4.44)$$

où  $h$  est la pas d'échantillonnage. Cette approximation correspond à l'utilisation du masque de convolution centré suivant

$$\frac{1}{2h} [ -1 \ 0 \ 1 ] \quad (4.45)$$

Pour son application, le facteur  $\frac{1}{2h}$  est en général omis. Ce petit masque s'applique directement sur la grille de pixels de l'image à traiter, en plaçant le 0 sur le pixel en cours de traitement. Une approximation de la dérivée première dans la direction  $y$  est donnée par

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Dans la foulée, on peut imaginer l'utilisation du masque suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

pour procéder à une dérivation directionnelle dans la direction diagonale  $135^\circ$ . La figure 4.52 montre le résultatat de l'application de divers opérateurs de dérivée première. L'image originale est définie sur 256 niveaux de gris ; les images gradients ont été décalées de 128. En effet, l'opérateur de dérivation modifie la dynamique de l'image originale. Si celle-ci présente une dynamique de  $[0, 255]$ , l'image gradient présente une dynamique de  $[-255, 255]$ .

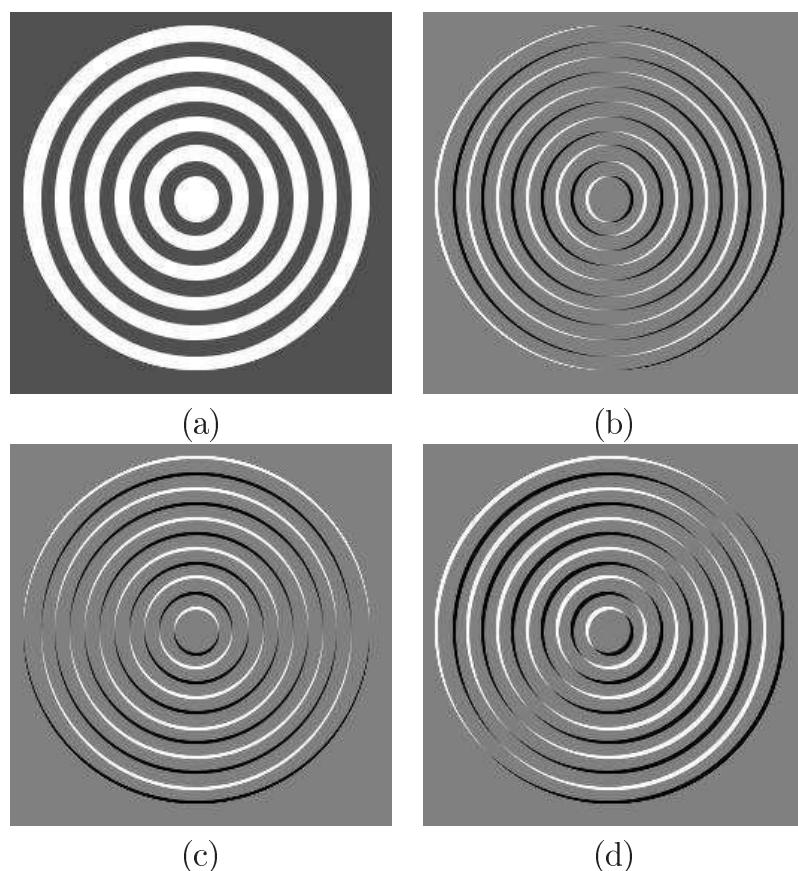


FIGURE 4.52 – Illustrations de l’application de masques de dérivées premières : (a) Image originale. (b) Application d’un masque horizontal. (c) Application d’un masque vertical. (d) Application d’un masque à  $135^\circ$ .

### Filtres gradients de PREWITT

Les formes de base effectuent un gradient ligne par ligne ou colonne par colonne. Les directions horizontales et verticales sont dès lors privilégiées. Il existe des formes qui permettent de fournir un gradient aux caractéristiques plus isotropes et qui permettent en plus de limiter l'effet du bruit en réalisant un filtrage passe-bas dans la direction perpendiculaire à celle dans laquelle on calcule la dérivée. Pour y parvenir, ces formes s'étendent dans les deux directions. Les filtres gradients de PREWITT appartiennent à cette classe d'opérateur gradient. Ils valent

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

### Filtres gradients de SOBEL

Les filtres de SOBEL constituent une alternative aux filtres de PREWITT. Ils s'expriment comme suit

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

### Dérivée seconde et filtres Laplacien

Considérons à nouveau une fonction  $f(x)$  à une dimension. Pour la dérivée seconde, nous avons l'approximation suivante

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (4.50)$$

Cette approximation conduit tout naturellement aux deux masques de convolution suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

On peut obtenir un filtre bidimensionnel en combinant les deux expressions précédentes ou lui préférer un masque du type

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

La figure 4.53 illustre l'application de ces différents masques.

### 4.5.2 Opérateurs non-linéaires basés sur la morphologie mathématique

Si  $B$  est un élément structurant de petite taille, la différence ensembliste  $X - (X \ominus B)$  fournit les contours intérieurs de l'image  $X$ , alors que la différence  $(X \oplus B) - X$  produit les contours extérieurs de l'image. On peut réaliser des opérations similaires sur des images en niveaux de gris.

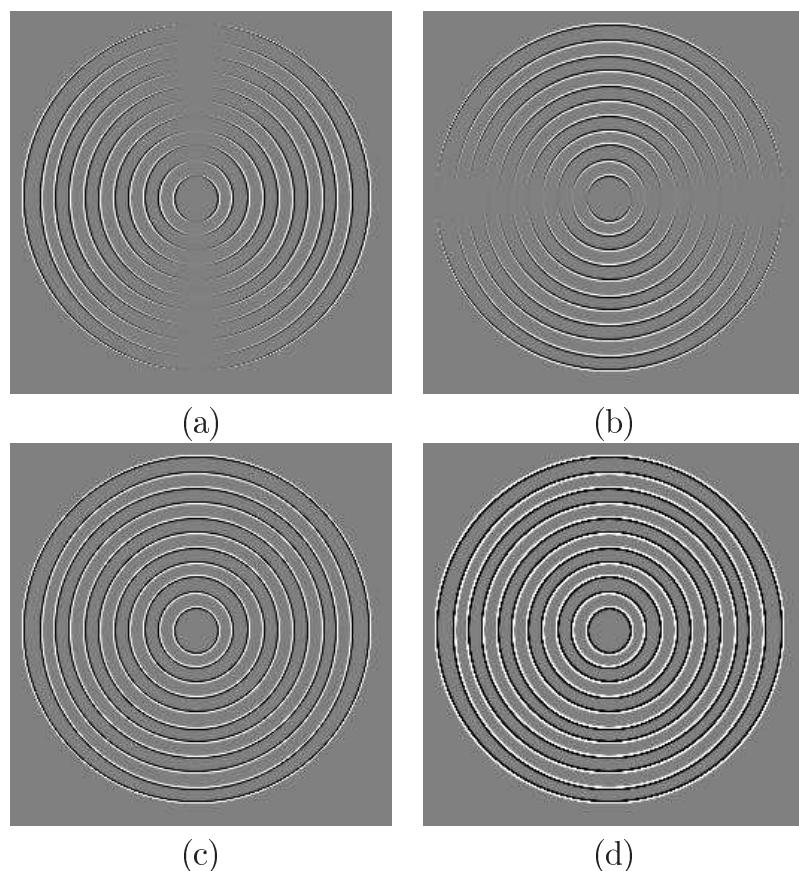


FIGURE 4.53 – Illustrations de l’application de masques de dérivées secondees (décalage de 128) :  
(a) Laplacien horizontal. (b) Laplacien vertical. (c) Laplacien obtenu avec le masque (4.52). (d)  
Laplacien obtenu avec le masque (4.53).

## Gradient d'érosion

L'opérateur

$$GE(f) = f - (f \ominus B) \quad (4.54)$$

appelé gradient d'érosion constitue un moyen commode d'accentuer les transitions d'une image en niveaux de gris  $f$ .

## Gradient de dilatation

Un opérateur qui remplit la même fonction que le précédent est le gradient de dilatation

$$GD(f) = (f \oplus B) - f \quad (4.55)$$

Par combinaison de ces deux opérateurs, il est possible de synthétiser une kyrielle de nouveaux opérateurs, tous destinés à extraire les contours de l'image. L'objectif d'une utilisation des deux opérateurs est la symétrisation du traitement d'une image et de son arrière-fond. Les exemples sont nombreux (voir figures 4.54 et 4.55).

## Gradient de BEUCHER

Il est défini par

$$GE(f) + GD(f) = (f \oplus B) - (f \ominus B) \quad (4.56)$$

et est illustré à la figure 4.54.

## Chapeau haut-de-forme (“top-hat” en anglais)

Cet opérateur est égal à l'image moins l'ouvert :

$$f - (f \circ B) \quad (4.57)$$

## Opérateurs de détection de contours marqués

Ils sont définis par

$$\min(GE(f), GD(f)) \quad (4.58)$$

et

$$\max(GE(f), GD(f)) \quad (4.59)$$

## Laplacien non-linéaire

Enfin, le laplacien non-linéaire est défini par

$$GD(f) - GE(f) \quad (4.60)$$

Tous ces opérateurs sont illustrés à la figure 4.55.

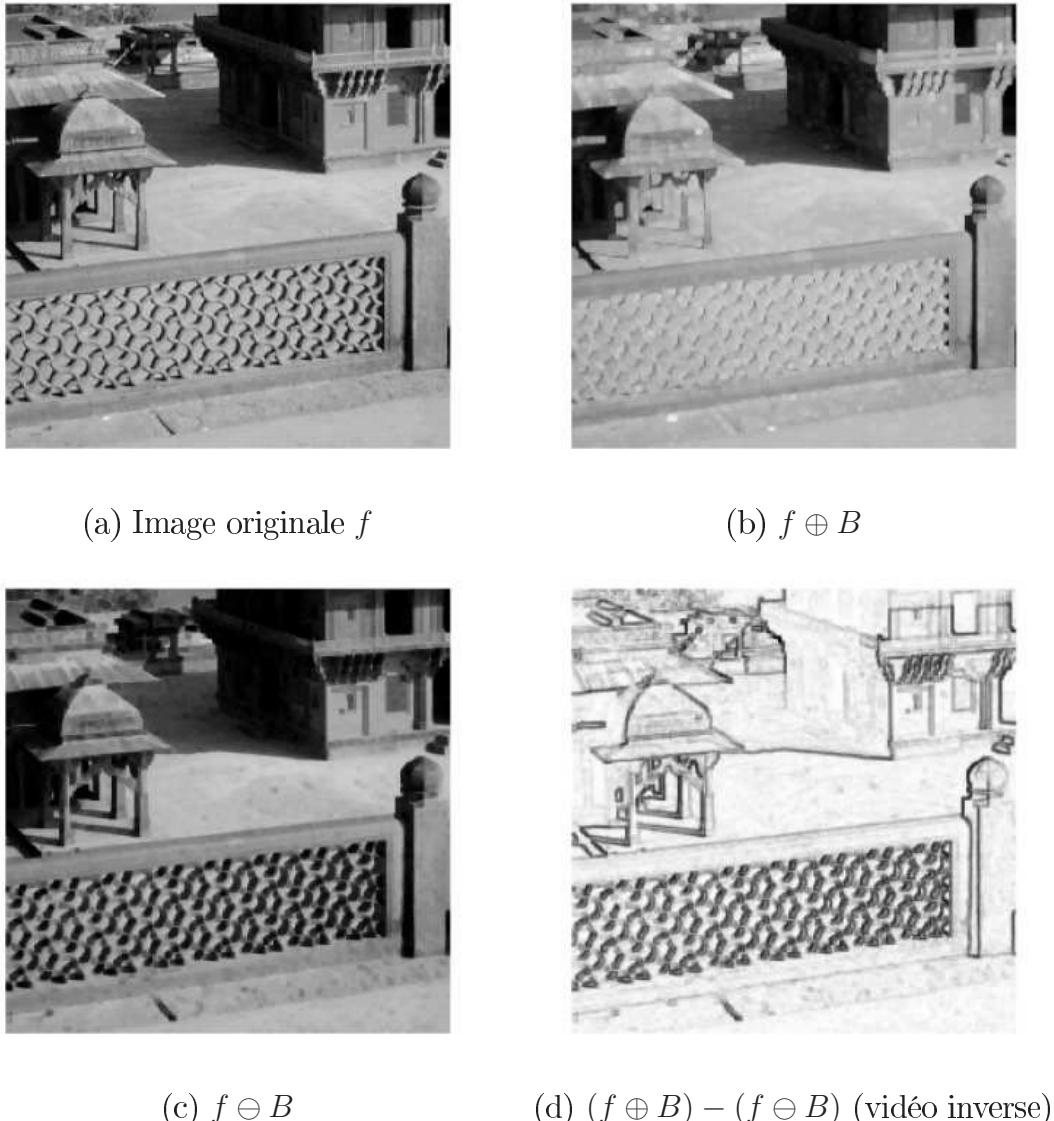


FIGURE 4.54 – Gradient de BEUCHER.

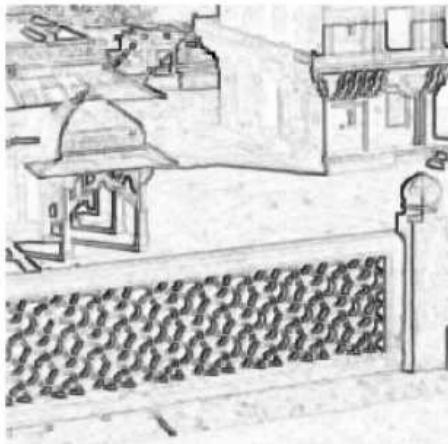
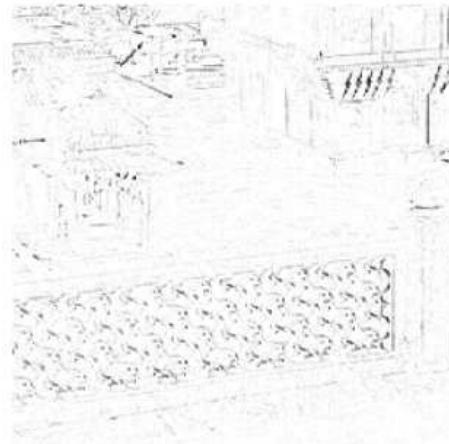
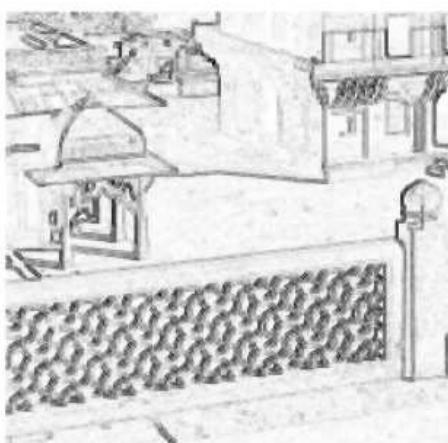
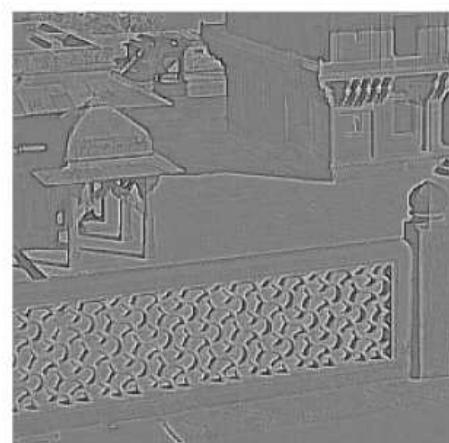
(a)  $(f \oplus B) - (f \ominus B)$ (b)  $f - (f \circ B)$ (c)  $\max(GE(f), GD(f))$ (d)  $GD(f) - GE(f)$ 

FIGURE 4.55 – Différents détecteurs de contours non-linéaires (vidéo inverse).



FIGURE 4.56 – Une image originale et le résultat d'une segmentation.

## 4.6 Traitement spécifique : Segmentation et seuillage

La segmentation est une des branches du traitement d'images qui s'occupe de l'analyse d'image et de scène. Elle vise donc des applications automatisées de vision par ordinateur et la robotique. Dans ce domaine, l'entrée est toujours une image mais la sortie est une description de l'image. La plupart des descriptions nécessitent une détection préalable des formes présentes dans l'image. C'est cette étape qui est appelée segmentation. Les techniques de segmentation sont nombreuses et présentent chacune des avantages et des inconvénients. Le plus souvent, il faudra trouver la méthode adaptée à l'image traitée. Dans cette introduction, nous nous limiterons à la segmentation par seuillage.

### 4.6.1 Définition

Le seuillage vise à sous-diviser l'image en constituants distincts appelés objets ou encore régions selon l'application visée. Par exemple, la figure 4.56 illustre une image d'une fleur et le résultat d'une segmentation ayant extrait trois régions : le fond, les pétales et le pistille.

La segmentation est donc normalement basée sur

- les discontinuités : arrêtes, changements abruptes d'intensité, ...
- les similitudes (zones homogènes) : couleurs, textures, intensités, ...

et plusieurs approches sont possibles :

- *l'approche régions* qui consiste à rechercher les zones dans l'image sur un critère d'homogénéité (comme à la figure 4.56),
- *l'approche contours* qui consiste à rechercher les discontinuités entre régions. Dans ce cas, les opérateurs de détection de contours que nous avons étudiés plus haut sont utilisés. Cependant, les détecteurs ne donnent pas des contours fermés et sont sensibles au bruit. Dans ce contexte, une étape de seuillage du gradient (ou du laplacien) est nécessaire au préalable. Ensuite, il faut fermer les contours et conserver les contours significatifs. Ce qui n'est pas tâche aisée...
- *l'approche duale* qui vise à combiner les deux approches précédentes. En effet, il existe une dualité entre régions et contours. Une région est délimitée par un contour et un contour sépare deux régions.

Une méthode simple et très populaire pour la segmentation de régions dans les images est le seuillage qui peut être binaire ou à plusieurs niveaux (le seuillage de la figure 4.56 est à 3 niveaux).

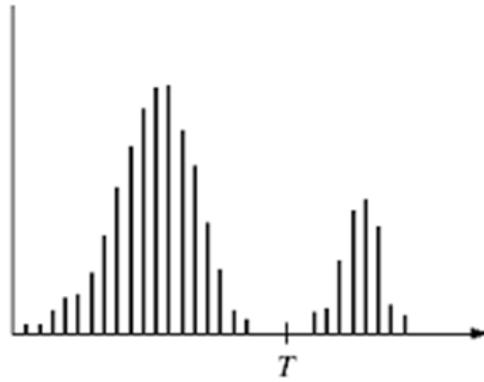


FIGURE 4.57 – Choix du seuil dans le cas d'un histogramme simple.

## 4.6.2 Seuillage simple

La méthode consiste à choisir un seuil  $T$  qui va séparer les pixels de l'image en deux zones, une comprenant les pixels d'intensité supérieure à  $T$  et ceux d'intensité inférieure à  $T$ . Pour une image en niveau de gris  $f(m, n)$ , l'image résultant de la segmentation est alors une *image binaire*  $g$  donnée par

$$g(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(m, n) > T \\ 0 & \text{si } f(m, n) \leq T \end{cases} \quad (4.61)$$

Le principal souci est le choix de la valeur du seuil  $T$ . Lorsque l'histogramme est clairement *bimodal*, comme celui de la figure 4.57, le fond est bien séparé des objets présents dans l'image et la segmentation donne de bons résultats. La figure 4.58 illustre un résultat de seuillage simple valable<sup>4</sup>. Il est clair que pour obtenir un résultat valable, il doit y avoir un contraste suffisant entre les objets à extraire et le fond. Si tel n'est pas le cas, il faut prévoir un traitement préalable de rehaussement ou de restauration de l'image<sup>5</sup>.

Par contre, lorsque l'image originale présente des problèmes d'éclairage non uniforme, problème courant en pratique, le seuillage simple ne donne pas de bons résultats. La figure 4.59 illustre la situation. Dans ce cas, il est nécessaire de recourir à des techniques plus complexes combinant seuillage, opérations morphologiques ou autres... Nous n'entrerons cependant pas dans le détail de ces méthodes.

## 4.6.3 Seuillage multiple

Le seuillage multiple permet d'extraire d'une image plusieurs régions. Elle est basée sur le choix de plusieurs seuils  $T_1, T_2, \dots$  permettant ainsi de scinder l'image en sous-groupes de pixels. L'image résultant de la segmentation n'est plus binaire mais *multimodale*. Par exemple, pour un seuillage à deux niveaux, l'expression de l'image résultante est

$$g(m, n) = \begin{cases} 2 & \text{si } f(m, n) > T_2 \\ 1 & \text{si } T_2 \geq f(m, n) > T_1 \\ 0 & \text{si } f(m, n) \leq T_1 \end{cases} \quad (4.62)$$

où les valeurs 0, 1, 2 sont arbitraires et peuvent donc être choisies en fonction de l'utilisation que l'on veut faire du résultat. Un résultat de seuillage multiple est présenté à la figure 4.56.

4. Source : [http://www.ext.upmc.fr/urfirst/image\\_numerique/segmentation.html](http://www.ext.upmc.fr/urfirst/image_numerique/segmentation.html)

5. Dans les applications industrielles, il est préférable de travailler en environnement contrôlé, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de mettre en place un dispositif efficace d'éclairage afin d'obtenir des résultats de segmentation optimaux.

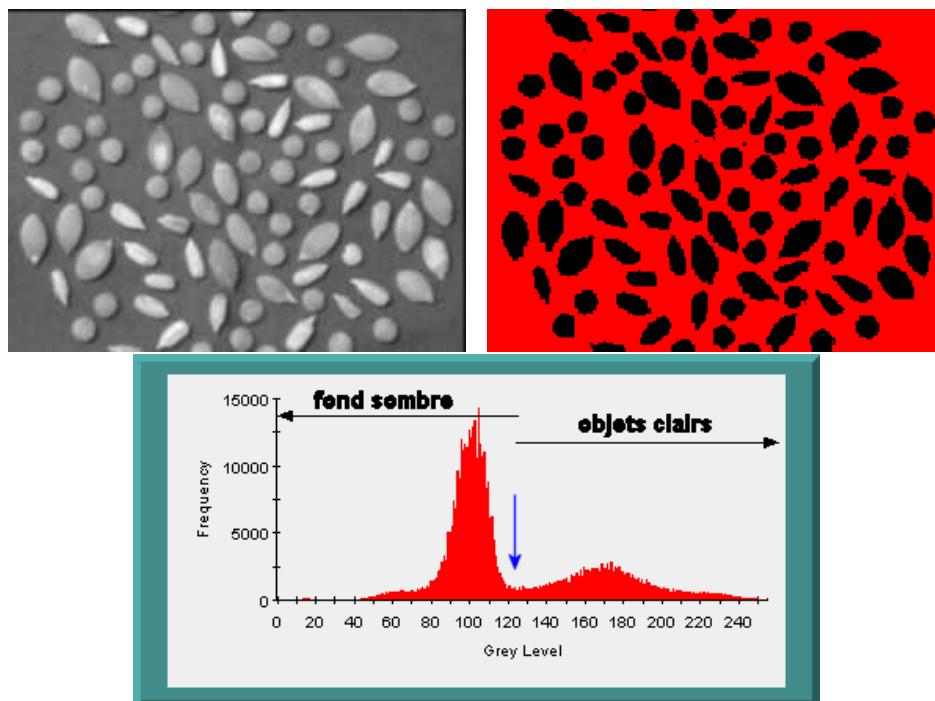


FIGURE 4.58 – Seuillage simple d'une image en 256 niveaux de gris ( $T = 120$ ).

Les avantages des méthodes de seuillage sont assez évidents. Elles sont simples à implémenter et permettent le temps réel étant donné la simplicité des opérations. Par contre, les inconvénients sont également présents : apparition de faux éléments, choix entre seuillage simple ou multiple, et surtout quels choix réaliser pour le (les) seuil(s) ? Voici quelques moyens simples permettant de choisir une valeur de seuil dans le cas du seuillage simple :

- valeur obtenue par essais-erreurs (on aurait pu s'en douter... mais ce n'est pas vraiment à cela que l'on s'attendait !)
- valeur moyenne des tons de gris
- valeur médiane entre le ton maximum et le ton minimum
- ...

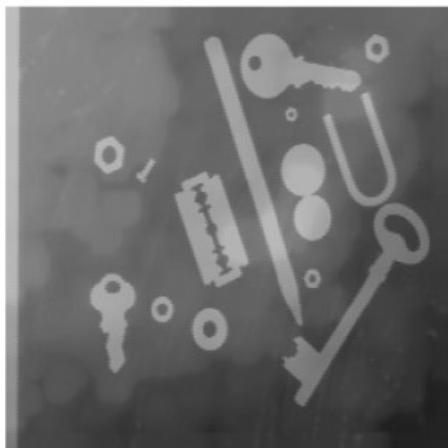
Plusieurs algorithmes ont néanmoins vu le jour afin de réaliser un seuillage automatique en recherchant une valeur du seuil qui balance au mieux les deux sections de l'histogramme. Nous en présentons un ci-après.

#### 4.6.4 Seuillage automatique

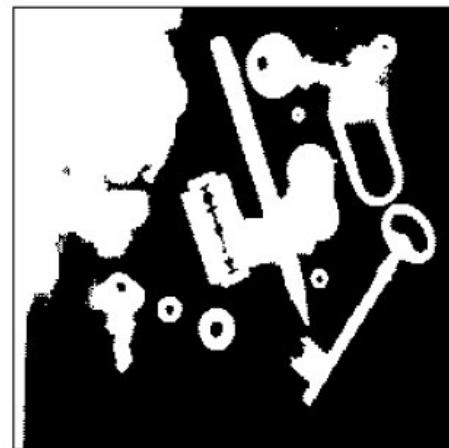
Voici un exemple d'algorithme simple de seuillage simple automatique :

1. Choisir un seuil  $T$  initial (moyenne, médiane, ...)
2. On obtient alors 2 groupes de pixels : le groupe  $G_1$  contenant les pixels d'intensité supérieure à  $T$  et le groupe  $G_2$  contenant les pixels d'intensité inférieure à  $T$ .
3. Calculer les moyennes des niveaux de gris sur les deux groupes de pixels  $G_1$  et  $G_2$  ; ceci fournit les deux moyennes  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .
4. Mettre à jour la valeur du seuil

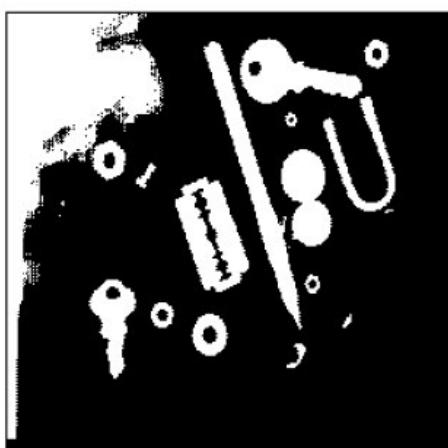
$$T \rightarrow \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$



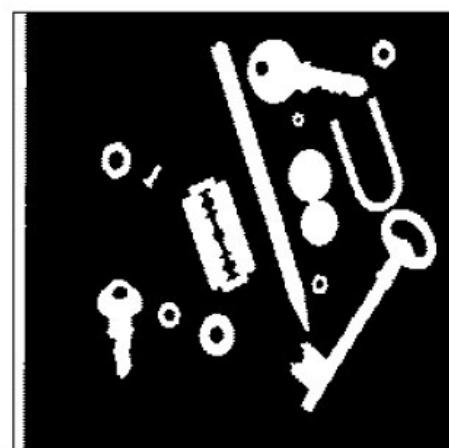
(a) Image originale



(b) Seuillage à 110



(c) Seuillage à 128



(d) Seuillage “idéal”

FIGURE 4.59 – Seuillage simple dans le cas de problème d'éclairage non uniforme.

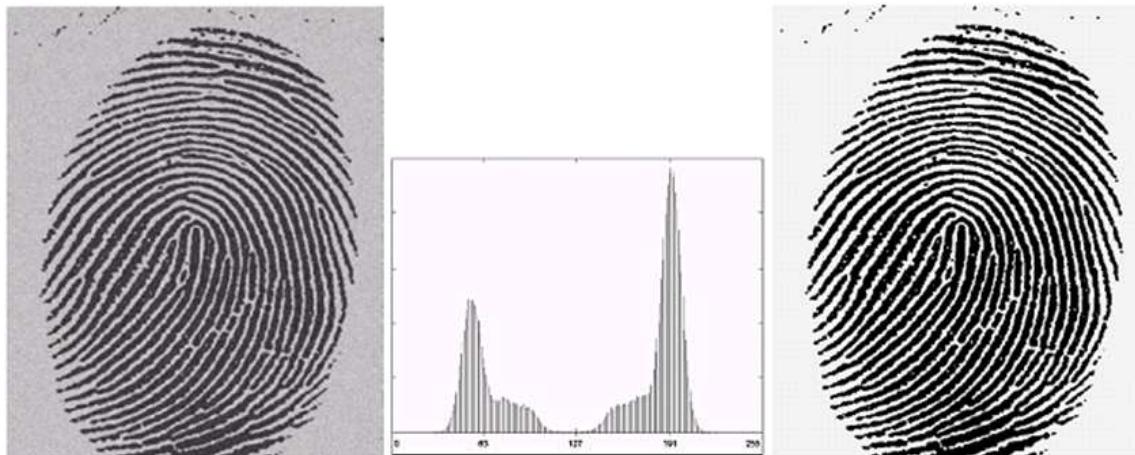


FIGURE 4.60 – Résultat de l’algorithme de seuillage automatique, seuil trouvé :  $T = 125$ .

5. Recommencer à l’étape 1 jusqu’à ce que la valeur du seuil  $T$  converge vers une valeur constante.

Le résultat de l’application de cet algorithme est illustré à la figure 4.60. Évidemment, pour qu’un tel algorithme fournisse de bons résultats, il faut à nouveau un contraste important entre le fond et les objets à détecter.

## 4.7 Bibliographie

1. “Traitement numérique des images”, M. VAN DROOGENBROECK, Université de Liège, Faculté des Sciences appliquées.  
URL : <http://www2.ulg.ac.be/telecom/teaching/notes/totali/elen016/index.html>
2. “Traitement d’images”, A. BOUCHER, Institut de la Francophonie pour l’informatique.  
URL : [http://www.ifi.auf.org/personnel/Alain.Boucher/cours/traitement\\_images/index.html](http://www.ifi.auf.org/personnel/Alain.Boucher/cours/traitement_images/index.html)



# Quatrième partie

## Analyse de FOURIER



# Chapitre 5

## Séries de FOURIER

Ce chapitre a pour but de définir les séries de FOURIER. Celles-ci constituent un outil essentiel dans le domaine de l'analyse et du traitement du signal.

### 5.1 Introduction

L'étude de la musique et en particulier des signaux audio est une manière concrète d'aborder la théorie mathématique des séries de FOURIER. Un son est une onde sonore, “plus ou moins” périodique qui se propage dans l’air, le “plus ou moins” venant du fait qu’un son “harmonieux” peut évoluer au cours du temps. Un son peut être représenté à l'aide d'une fonction mathématique, dont un exemple est donné à la figure 5.1.

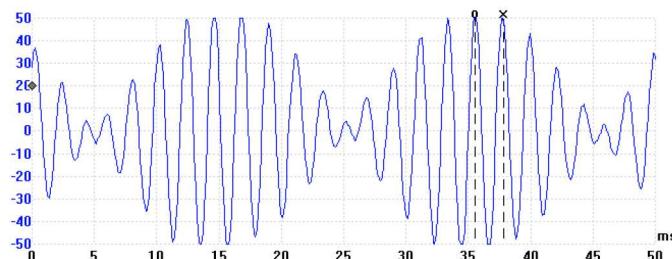


FIGURE 5.1 – Un son, caractérisé par une certaine répétition.

Le fait qu'un son soit plus ou moins périodique le différencie de ce qu'on appelle communément un bruit. Un exemple de bruit est donné à la figure 5.2.

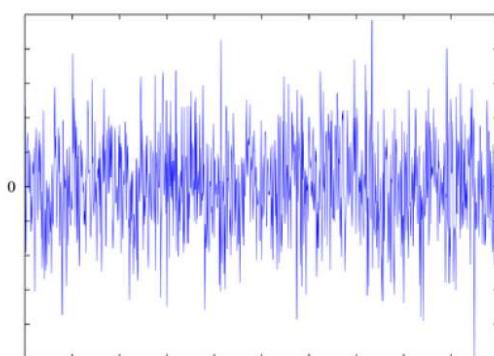


FIGURE 5.2 – Du bruit, aucun aspect répétitif ni structuré.

Apparemment, créer un son consiste donc à créer des déformations périodiques de l'air. Cependant, cela n'est pas aussi simple que cela. En effet, considérons le son ré à 290 Hz. Ce son correspond donc à une oscillation de la pression de l'air à une cadence de 290 déformations par seconde. Cependant, il existe des milliers de ré à 290 Hz différents, caractérisés chacun par leur spécificité, on parle encore du timbre de ce son. On peut facilement distinguer un ré 290 Hz issu d'un piano de celui généré par une guitare. L'illustration graphique des similitudes et différences d'un même son ré 290 Hz générés par deux instruments différents est fournie aux figures 5.3 et 5.4.

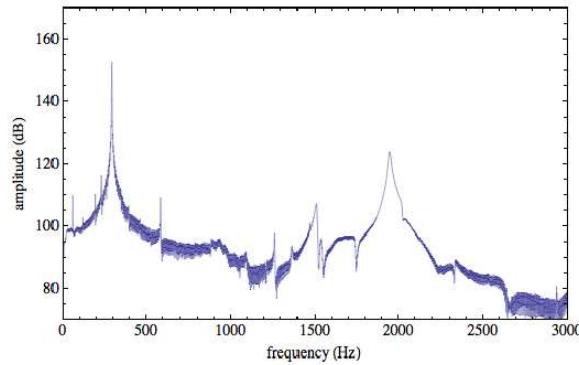


FIGURE 5.3 – Une note jouée sur un piano.

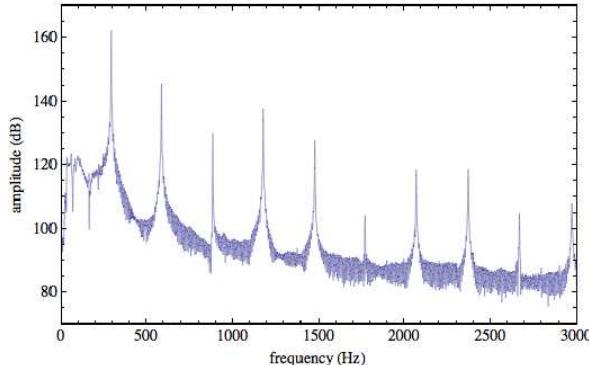


FIGURE 5.4 – Même note jouée sur une guitare.

On peut remarquer une corrélation importante entre les deux graphiques correspondant à la même note pour des instruments différents. On y voit clairement apparaître un “pic”, commun aux deux graphiques, à la fréquence de la note (290 Hz). Ce pic porte le nom d’harmonique fondamentale du son ou de la note, et 290 Hz est appelée “fréquence fondamentale” de la note. Le reste correspond au timbre du son, ce qui différencie un instrument d’un autre. En particulier, sur la figure 5.4, on voit la présence d’autres pics situés aux multiples de la fréquence 290 Hz. Ces pics s’appellent les harmoniques (secondaires) du son ou de la note. Selon l’instrument, l’amplitude des harmoniques secondaires peut être nulle ou non.

Une note de musique peut donc être vue comme la superposition d’une onde (harmonique) fondamentale à la fréquence de la note et d’une multitude d’ondes (harmoniques) secondaires dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, l’amplitude de ces harmoniques dépendant de l’instrument considéré et constituant le timbre de la note. Nous arrivons donc à la conclusion que nous pouvons créer toute une variété de sons en additionnant une fonction sinusoïdale (onde fondamentale) et un ensemble de fonctions sinusoïdales de

fréquence multiple de la fréquence fondamentale. Mais inversément, peut-on décrire tout son comme une somme d'harmoniques ? La réponse à cette question est donnée par l'étude des séries de FOURIER.

Mais avant de se lancer dans leur étude, il convient de définir quelques notions comme celle de périodicité d'une fonction ou encore celle de fonction continue par morceaux.

### 5.1.1 Fonction continue par morceaux

Avant de donner la définition précise de cette notion, la figure 5.5 montre un exemple de fonction continue par morceaux sur l'intervalle  $[a_0, a_4]$ . Il convient donc tout d'abord de rappeler la notion de continuité.

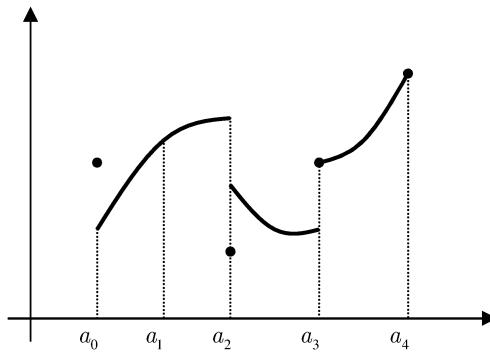


FIGURE 5.5 – Fonction continue par morceaux.

**Rappel (Fonction continue sur un ouvert).** Une fonction  $g$  d'une variable  $t$ , notée  $g(t)$ , est continue sur un intervalle ouvert  $]a, b[$ , ce que l'on note  $g \in C_0(]a, b[)$ , si

- $g(t)$  est définie pour tout  $t \in ]a, b[$ , et
- pour tout  $t_0 \in ]a, b[$ , nous avons

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = g(t_0)$$

Dans cette définition, l'intervalle considéré est ouvert. Qu'en est-il sur le fermé ? Donc...

**Rappel (Fonction continue sur un fermé).** Une fonction  $g(t)$  est continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , ce que l'on note  $g \in C_0([a, b])$ , si

- $g$  est continue sur l'ouvert  $]a, b[$ , et
- $g$  est définie en  $a$  et  $b$ , et
- la limite à droite en  $a$  et la limite à gauche en  $b$  existent et sont telles que

$$g(a^+) \triangleq \lim_{t \rightarrow a^+} g(t) = g(a) \quad \text{et} \quad g(b^-) \triangleq \lim_{t \rightarrow b^-} g(t) = g(b)$$

Nous pouvons à présent définir la notion de fonction continue par morceaux.

**Définition (Fonction continue par morceaux).** Une fonction  $g(t)$  est continue par morceaux sur l'intervalle  $[a, b]$  lorsqu'elle ne présente qu'un nombre fini de discontinuités sur cet intervalle, c'est-à-dire si on peut trouver un nombre fini de points  $a_1, \dots, a_p$  ( $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p < a_{p+1} = b$ ), tels que pour tout  $i = 0, \dots, p$ ,

- $g(t)$  est continue sur  $]a_i, a_{i+1}[$ , et
- les limites

$$\lim_{t \rightarrow a_i^+} g(t) \text{ et } \lim_{t \rightarrow a_{i+1}^-} g(t)$$

sont des réels.

En particulier, la fonction donnée en exemple à la figure 5.5 est continue sur  $]a_0, a_2[, ]a_2, a_3[$  et  $]a_3, a_4]$  et présente des discontinuités en  $a_0, a_2$  et  $a_3$ .

### 5.1.2 Fonctions périodiques

Intuitivement, une fonction est périodique si elle se répète à intervalles réguliers. Précisons.

**Définition (Fonction périodique).** Une fonction  $g(t)$  est périodique si elle satisfait la relation suivante

$$g(t) = g(t + T) \quad (5.1)$$

pour tout  $t$  où  $g$  est définie et où  $T$  est une constante positive appelée une période de  $g$ .

Remarquons que si  $T$  est une période de  $g$ , alors  $2T, 3T, 4T, \dots$  sont également des périodes de  $g$ . La plus petite valeur de  $T$  satisfaisant la relation (5.1) est appelée **période fondamentale** de la fonction  $g$ . On définit alors la **fréquence fondamentale**  $f_0$  de la fonction  $g$  comme l'inverse de cette période fondamentale

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad (5.2)$$

Avant de passer aux choses sérieuses, considérons la propriété suivante. Soit une fonction  $g(t)$  périodique de période  $T$  et continue par morceaux sur  $[t_0, t_0 + T]$ . Alors, pour tout  $t_0$ , nous avons

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) dt \quad (5.3)$$

En effet,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = \int_{t_0}^{-\frac{T}{2}} g(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) dt + \int_{+\frac{T}{2}}^{t_0+T} g(t) dt$$

Si l'on effectue le changement de variable  $t' = t - T$  dans la dernière intégrale, nous obtenons

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt = \int_{t_0}^{-\frac{T}{2}} g(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{t_0} g(t' + T) dt'$$

Etant donné que  $g(t' + T) = g(t')$ , la somme de la première et de la dernière intégrale est nulle, d'où le résultat annoncé.

Cette propriété va nous permettre, dans la suite, pour toute fonction périodique de période  $T$ , de nous limiter à son étude sur une seule de ses périodes, en particulier sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ .

## 5.2 Polynômes de FOURIER (ou trigonométriques)

Soit une fonction  $g(t)$  périodique de période fondamentale  $T$  et continue par morceaux sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ . Afin de faire le lien avec l'introduction, nous allons à présent tenter d'approximer cette fonction par la somme d'une onde fondamentale de fréquence  $f_0 = 1/T$  et d'un ensemble d'ondes "secondaires" de fréquence  $2f_0, 3f_0, \dots$ . Nous introduisons donc le polynôme suivant.

### 5.2.1 Définition

Les fonctions

$$\cos(2\pi n f_0 t) \text{ et } \sin(2\pi n f_0 t)$$

où  $n = 1, 2, 3, \dots$  sont périodiques et de périodes égales à  $\frac{1}{n f_0}$ . Elles sont donc également de période  $\frac{1}{f_0} = T$ . Toute combinaison linéaire de ces fonctions est donc également une fonction périodique de période  $T$ . Nous définissons donc le **polynôme trigonométrique** suivant

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \quad (5.4)$$

où  $N$  est un entier supérieur ou égal à 1 et où  $a_0, a_n$  et  $b_n$  sont des constantes réelles. La constante  $a_0$  correspond à la valeur moyenne de  $p(t)$ <sup>1</sup>. Dans cette expression, on voit bien apparaître l'harmonique fondamentale (ou onde fondamentale) :

$$H_1(t) = a_1 \cos(2\pi f_0 t) + b_1 \sin(2\pi f_0 t) \quad (5.5)$$

mais également les harmoniques secondaires

$$H_n(t) = a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t) \quad (5.6)$$

dont les fréquences respectives sont bien des multiples entiers de la fréquence fondamentale  $f_0$ .

La question qui va donc se poser dans la suite est de savoir dans quelle mesure le polynôme trigonométrique (5.4) va pouvoir approximer la fonction  $g(t)$ . Il sera alors indispensable de déterminer les constantes  $a_0, a_n$  et  $b_n$  pour une fonction  $g(t)$  donnée mais également le nombre d'harmoniques  $N$  qu'il faudra retenir. Avant de répondre à ces questions, nous devons encore aborder les considérations mathématiques suivantes.

### 5.2.2 Intégrales intéressantes

Nous donnons ici la valeur de quelques intégrales dont nous allons avoir besoin dans la section suivante :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi m f_0 t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi m f_0 t) \sin(2\pi n f_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi m f_0 t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = 0 \quad (5.9)$$

1. Dans le cas des signaux, on parle encore de composante continue ou DC du signal  $p(t)$ .

où  $m$  et  $n$  sont des naturels non nuls. Le calcul de ces intégrales est laissé au bon soin du lecteur. Nous pouvons encore donner les deux intégrales suivantes :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi m f_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ T & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi m f_0 t) dt = 0 \quad (5.11)$$

où  $m$  est un entier.

### 5.2.3 Calcul des coefficients $a_0$ , $a_n$ et $b_n$

Etant donné la définition (5.4) du polynôme trigonométrique, il est à présent possible d'exprimer les coefficients  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  pour un polynôme  $p(t)$  donné. Les formules qui suivent nous permettront dans la suite de calculer ces mêmes coefficients pour la fonction  $g(t)$  que nous souhaitons approximer.

Commençons par le coefficient  $a_0$ . Pour cela, il suffit d'intégrer la relation (5.4) entre  $-\frac{T}{2}$  et  $+\frac{T}{2}$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} a_0 dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) dt \\ &= a_0 T + \sum_{n=1}^N a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi n f_0 t) dt + \sum_{n=1}^N b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi n f_0 t) dt \end{aligned}$$

Etant données les deux relations (5.10) et (5.11), il vient finalement

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) dt \quad (5.12)$$

Cette dernière expression montre bien que  $a_0$  représente la valeur moyenne de  $p(t)$  sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ .

Pour calculer  $a_n$ , nous multiplions l'expression (5.4) par  $\cos(2\pi k f_0 t)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) avant de l'intégrer entre  $-\frac{T}{2}$  et  $+\frac{T}{2}$ . Cela donne :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} a_0 \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &\quad + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &= a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^N a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi n f_0 t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^N b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi n f_0 t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

En regard des intégrales fournies à la section 5.2.2, il vient que seule l'intégrale faisant intervenir les deux cosinus (pour  $n = k$ ) est non nulle. Il vient donc

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.13)$$

pour  $k = 1, \dots, N$ .

Le calcul des coefficients  $b_n$  est relativement similaire à celui des coefficients  $a_n$ . Il suffit de multiplier la relation (5.4) par  $\sin(2\pi k f_0 t)$  ( $k = 1, \dots, N$ ) avant de l'intégrer entre  $-\frac{T}{2}$  et  $+\frac{T}{2}$ . Il vient

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} a_0 \sin(2\pi k f_0 t) dt \\ &\quad + \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \sin(2\pi k f_0 t) dt \\ &= a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi k f_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^N a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi n f_0 t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^N b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi n f_0 t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

De la même manière que précédemment, il vient que seule l'intégrale faisant intervenir les deux sinus (pour  $n = k$ ) est non nulle. Nous obtenons donc

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} p(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad (5.14)$$

pour  $k = 1, \dots, N$ .

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour mettre en place le lien entre les polynômes trigonométriques (5.4) et une fonction périodique  $g(t)$  continue par morceaux.

## 5.3 Théorème de FOURIER

Avant d'énoncer le théorème attendu, commençons par étudier l'exemple suivant.

### 5.3.1 Exemple : Fonction carrée

Considérons la fonction périodique  $g(t)$  de période  $T$ , continue par morceaux sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$  et définie par

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ +1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases} \quad (5.15)$$

Celle-ci présente des discontinuités en  $0$ ,  $-\frac{T}{2}$  et  $+\frac{T}{2}$ .

Bien qu'elle ne soit pas un polynôme trigonométrique, calculons les coefficients  $a_0$ ,  $a_k$  et  $b_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) pour la fonction  $g(t)$ . Le coefficient  $a_0$  est donné par

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) dt + \frac{1}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} 1 dt \\ &= \frac{1}{T} (-t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{1}{T} t \Big|_0^{+\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Venons-en au calcul de  $a_k$  pour  $k = 1, \dots, N$ . En partant de (5.13), nous avons

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-\cos(2\pi k f_0 t)) dt + \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, nous effectuons le changement de variable  $t' = -t$ . Il vient

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 \cos(2\pi k f_0 t') dt' + \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi k f_0 t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Calculons à présent  $b_k$  pour  $k = 1, \dots, N$ . L'application de (5.14) à  $g(t)$  fournit

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-\sin(2\pi k f_0 t)) dt + \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi k f_0 t) dt \end{aligned}$$

Le changement de variable  $t' = -t$  dans la première intégrale conduit à

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^0 \sin(-2\pi k f_0 t') dt' + \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} \sin(2\pi k f_0 t) dt \\ &= \frac{4}{T} \left[ \frac{-\cos(2\pi k f_0 t)}{2\pi k f_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi k} \left( -\cos\left(2\pi k f_0 \frac{T}{2}\right) + 1 \right) \\ &= \frac{2(1 - \cos(k\pi))}{\pi k} \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons, si l'on tient compte de la parité de  $k$ ,

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

A partir des coefficients calculés, nous construisons à présent le polynôme trigonométrique suivant

$$p(t) = \sum_{n=1}^N \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{\pi n} \sin(2\pi n f_0 t)$$

où on a tenu compte que  $a_0 = 0$  et que  $a_k = 0$  pour  $k = 1, \dots, N$ . Etudions à présent dans quelle mesure le polynôme  $p(t)$  ainsi construit se rapproche de  $g(t)$ . Pour cela, la table 5.1 montre  $g(t)$  et  $p(t)$  pour différentes valeurs de  $N$ .

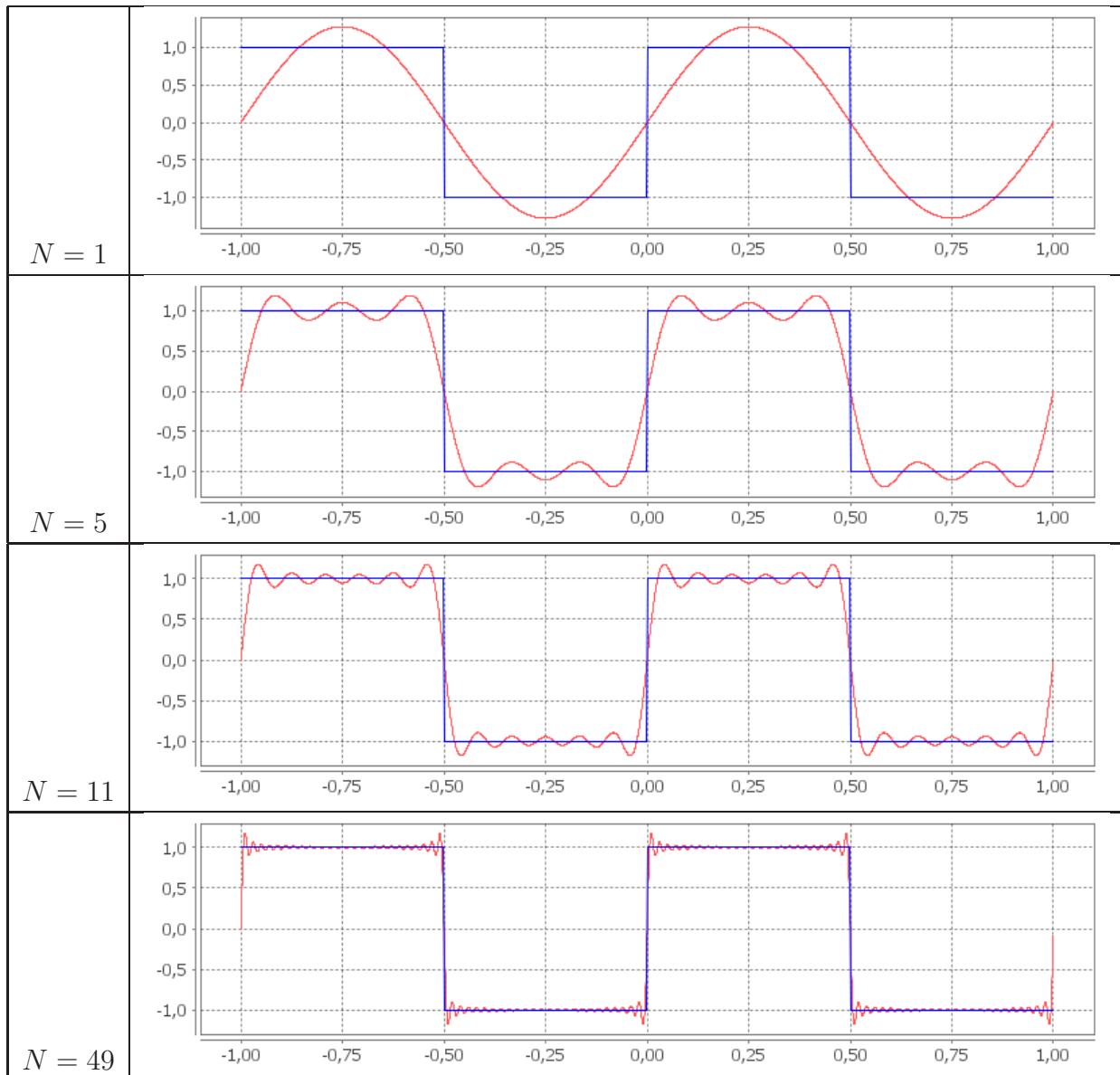


TABLE 5.1 – Polynôme trigonométrique construit à partir des coefficients de la fonction carrée (pour  $T = 1$ ).

A la table 5.1, pour  $N = 1$ , on observe clairement l'onde fondamentale. On peut également faire les observations suivantes :

- Plus le nombre d'harmoniques  $N$  augmente, plus la différence entre la fonction  $g(t)$  et le polynôme trigonométrique  $p(t)$  semble diminuer.

- Aux points de discontinuités, une différence importante subsiste. Cela est dû au fait que l'on tente d'approcher une fonction discontinue par une somme de fonctions continues.

Néanmoins, l'intuition nous fait penser que si l'on fait tendre  $N$  vers l'infini, la différence entre  $p(t)$  et  $g(t)$  tend vers 0. C'est la même intuition que FOURIER eut en son temps. En faisant tendre  $N$  vers l'infini, la somme de  $N$  termes, apparaissant dans (5.4), devient une série mathématique qui porte le nom de série de FOURIER.

### 5.3.2 Définition et énoncé du théorème

**Définition (Série de FOURIER).** Soit une fonction périodique  $g(t)$  de période  $T = \frac{1}{f_0}$  et continue par morceaux sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ . La série de FOURIER de  $g(t)$ , notée  $SF_g(t)$ , est définie par

$$SF_g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \quad (5.16)$$

où les coefficients  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) dt \quad (5.17)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \quad (5.18)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad (5.19)$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de FOURIER donnant les conditions pour que la série (5.16) converge.

**Théorème (Théorème de FOURIER).** Si la fonction périodique  $g(t)$  de période  $T$  est continûment dérivable par morceaux sur  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ , alors

1. la série de FOURIER  $SF_g(t)$  converge en tout réel ;
2. en tout  $t \in ]-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}[$ , la série de FOURIER converge vers la moyenne de la limite à gauche et de la limite à droite en  $t$  de  $g$ , c'est-à-dire

$$SF_g(t) = \frac{1}{2} (g(t^-) + g(t^+))$$

en particulier, si  $f$  est continue en  $t$ , la série de FOURIER converge vers  $g(t)$ , c'est-à-dire

$$SF_g(t) = g(t)$$

3. Aux extrémités  $-\frac{T}{2}$  et  $+\frac{T}{2}$ , la série de FOURIER converge vers la moyenne de la limite à droite en  $-\frac{T}{2}$  et la limite à gauche en  $+\frac{T}{2}$ , c'est-à-dire

$$SF_g\left(-\frac{T}{2}\right) = SF_g\left(+\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(g\left(-\frac{T}{2}^+\right) + g\left(+\frac{T}{2}^-\right)\right)$$

Nous pouvons à présent revenir sur l'exemple de la fonction carrée (5.15) introduite plus haut. La fonction carrée  $g(t)$  respecte les hypothèses du théorème de FOURIER et nous pouvons

donc écrire

$$g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{\pi n} \sin(2\pi n f_0 t)$$

ou encore, en tenant compte de la parité de  $n$ ,

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin(2\pi(2n+1)f_0 t)$$

Aux points de discontinuités, la série de FOURIER converge vers la moyenne de +1 et -1, c'est-à-dire 0. Ceci peut être observé à la table (5.1).

## 5.4 Mise en forme des séries de FOURIER

La manière (5.16) d'écrire la série de FOURIER avec une somme de sinus et de cosinus n'est pas son unique représentation. Comme nous allons le voir, elle peut également être représentée par une somme d'exponentielles, ce qui en simplifiera l'écriture.

### 5.4.1 Forme complexe ou exponentielle

Commençons par nous rappeler que les fonctions cosinus et sinus ont une représentation exponentielle complexe. Ainsi,

$$\cos(2\pi n f_0 t) = \frac{e^{j2\pi n f_0 t} + e^{-j2\pi n f_0 t}}{2} \text{ et } \sin(2\pi n f_0 t) = \frac{e^{j2\pi n f_0 t} - e^{-j2\pi n f_0 t}}{2j}$$

Les harmoniques  $H_n(t)$  (voir (5.5) et (5.6)) peuvent dès lors s'écrire

$$\begin{aligned} H_n(t) &= a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t) \\ &= a_n \frac{e^{j2\pi n f_0 t} + e^{-j2\pi n f_0 t}}{2} + b_n \frac{e^{j2\pi n f_0 t} - e^{-j2\pi n f_0 t}}{2j} \\ &= \frac{a_n}{2} (e^{j2\pi n f_0 t} + e^{-j2\pi n f_0 t}) - \frac{j b_n}{2} (e^{j2\pi n f_0 t} - e^{-j2\pi n f_0 t}) \\ &= \frac{a_n - j b_n}{2} e^{j2\pi n f_0 t} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-j2\pi n f_0 t} \end{aligned}$$

On pose alors

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \tag{5.20}$$

pour  $n$  entier différent de 0. Remarquons que, si on remplace  $n$  par  $-n$  dans cette dernière expression, nous obtenons

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_{-n} - j b_{-n}) = \frac{1}{2} (a_n + j b_n) = \overline{c_n}$$

étant donné que  $a_{-n} = a_n$  et que  $b_{-n} = -b_n$  (voir (5.18) et (5.19)). Nous pouvons donc réécrire les harmoniques sous la forme

$$H_n(t) = c_n e^{j2\pi n f_0 t} + c_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} \tag{5.21}$$

Si on pose en plus

$$c_0 = a_0 \tag{5.22}$$

la série de FOURIER (5.16) peut à présent s'écrire

$$\begin{aligned} SF_g(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{j2\pi n f_0 t} + c_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} + \sum_{n'=-\infty}^{-1} c_{n'} e^{j2\pi n' f_0 t} \end{aligned}$$

où, dans la dernière somme, nous avons posé  $n = -n'$ . Finalement, en rassemblant les trois termes, nous obtenons

$$SF_g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad (5.23)$$

Cette dernière formule constitue la forme complexe ou exponentielle de la série de FOURIER de  $g(t)$ . Nous allons à présent voir que les coefficient  $c_n$  peuvent également avoir une représentation complexe.

### Calcul des coefficients $c_n$

En repartant de l'expression (5.20) de  $c_n$  et des définitions (5.18) et (5.19) de  $a_n$  et  $b_n$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt - \frac{j}{2} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) (\cos(2\pi n f_0 t) - j \sin(2\pi n f_0 t)) dt \end{aligned}$$

et finalement, en utilisant la relation d'EULER, nous obtenons

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (5.24)$$

Remarquons que cette dernière expression est valable tout entier  $n$ , y compris  $n = 0$ . En effet, en remplaçant  $n$  par 0 dans cette dernière expression, nous retrouvons bien  $c_0 = a_0$ .

### Remarque

Si une série converge, son terme général tend vers 0 lorsque l'indice  $n$  tend vers l'infini. Dès lors, pour  $n$  qui tend vers l'infini, nous avons  $\|c_n e^{j2\pi n f_0 t}\| \rightarrow 0$  et donc  $\|c_n\| \rightarrow 0$ . Nous pouvons donc écrire finalement

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \|c_n\| = 0$$

mais encore

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} b_n = 0$$

### 5.4.2 Forme trigonométrique

Une autre représentation intéressante de la série de FOURIER est de voir la fonction  $g(t)$  comme une somme de sinusoïdes déphasées dont l'amplitude et la phase dépendent de  $g(t)$ . Pour cela, commençons par mettre les coefficients complexes  $c_n$  sous leur forme polaire :

$$c_n = r_n e^{j\theta_n}$$

où nous avons les relations suivantes entre  $(a_n, b_n)$  et  $(r_n, \theta_n)$  :

$$\begin{cases} r_n &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan \theta_n &= -\frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

Les harmoniques  $H_n(t)$  provenant de (5.21), pour  $n = 1, \dots$  peuvent alors s'écrire

$$\begin{aligned} H_n(t) &= c_n e^{j2\pi n f_0 t} + c_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} \\ &= c_n e^{j2\pi n f_0 t} + \overline{c_n} e^{-j2\pi n f_0 t} \\ &= r_n e^{j\theta_n} e^{j2\pi n f_0 t} + r_n e^{-j\theta_n} e^{-j2\pi n f_0 t} \\ &= r_n e^{j(2\pi n f_0 t + \theta_n)} + r_n e^{-j(2\pi n f_0 t + \theta_n)} \\ &= 2r_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) \end{aligned}$$

La série de FOURIER peut finalement s'écrire sous la forme

$$SF_g(t) = a_0 + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

(5.25)

qui constitue la représentation trigonométrique de la série de FOURIER de la fonction  $g(t)$ .

### 5.4.3 Cas particuliers : fonctions paires, impaires et demi-onde

Dans le cas de certaines fonctions, nous allons voir que l'expression des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  se simplifie, voire même s'annule complètement.

#### Fonction paire : $g(-t) = g(t)$

Dans ce cas, en partant de (5.18), les coefficients  $a_n$  peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \end{aligned}$$

étant donné que l'intégrant est une fonction paire, obtenue par le produit de deux fonctions paires.

Les coefficients  $b_n$  (voir (5.19)) sont, quant à eux, égaux à

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

vu que l'intégrant est une fonction impaire, obtenue par le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On remarque dès lors que les coefficients  $c_n$  sont purement réels et valent  $c_n = \frac{1}{2} a_n$ . Du coup, la série de FOURIER d'une fonction  $g(t)$  paire ne comporte que des termes en cosinus.

**Fonction impaire :**  $g(-t) = -g(t)$

Dans ce cas, en partant de (5.18), les coefficients  $a_n$  peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

étant donné que l'intégrant est une fonction impaire, obtenue par le produit d'une fonction impaire et d'une fonction paire.

Les coefficients  $b_n$  (voir (5.19)) sont, quant à eux, égaux à

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} g(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \end{aligned}$$

vu que l'intégrant est une fonction paire, obtenue par le produit de deux fonctions impaires.

On remarque dès lors que les coefficients  $c_n$  sont purement imaginaires et valent  $c_n = \frac{i}{2} b_n$ . Du coup, la série de FOURIER d'une fonction  $g(t)$  impaire ne comporte que des termes en sinus.

**Fonction demi-onde :**  $g(t - \frac{T}{2}) = -g(t)$

Pour ces fonctions, si  $n$  est pair, les fonctions  $\cos(2\pi n f_0 t)$  et  $\sin(2\pi n f_0 t)$  sont de période  $\frac{T}{2}$  et nous avons

$$\int_{-\frac{T}{2}}^0 g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt = - \int_0^{+\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

Dès lors,  $a_n = 0$  et de même  $b_n = 0$ . Par conséquent, tous les coefficients de FOURIER d'indice pair, y compris  $c_0 = a_0$ , sont nuls. La fonction carrée (voir (5.15)) est un exemple de fonction demi-onde.

## 5.5 Formule de PARSEVAL

Dans le domaine de l'analyse des signaux, il est courant de différencier les signaux de puissance des signaux d'énergie. On pourrait montrer que les signaux périodiques ont une énergie infinie et une puissance moyenne finie, ils font partie de la catégorie des signaux de puissance. La formule de PARSEVAL va nous permettre de calculer la puissance moyenne d'une fonction périodique connaissant les coefficients de sa série de FOURIER.

Commençons par donner la définition de la puissance moyenne  $P$  d'une fonction périodique  $g(t)$  de période  $T$  :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g^2(t) dt \tag{5.26}$$

Nous avons le résultat important suivant.

**Théorème (Formule de PARSEVAL).** Si la fonction périodique  $g(t)$  de période  $T$  est continûment dérivable par morceaux sur  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ , alors

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (5.27)$$

La preuve de cette formule est relativement aisée. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g^2(t) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n c_m e^{j2\pi n f_0 t} e^{j2\pi m f_0 t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n c_m \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{j2\pi(n+m)f_0 t} dt \end{aligned}$$

Mais étant données les intégrales (5.10) et (5.11), nous savons grâce à la formule d'EULER que

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{j2\pi(n+m)f_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n+m \neq 0 \\ T & \text{si } n+m = 0 \end{cases}$$

Dès lors,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_{-n} T = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n\|^2$$

vu que  $c_{-n} = \overline{c_n}$ .

## 5.6 Exemple : Droite de FOURIER

Un premier exemple a déjà été donné plus haut lors de l'étude de la fonction carrée. Pour clôturer ce chapitre, nous allons étudier un second exemple, celui de la fonction "dents de scie". Celle-ci, sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ , se comporte comme la droite d'équation  $g(t) = t$ . On en parle donc souvent en utilisant l'appellation de "droite de FOURIER".

Soit la fonction périodique  $g(t)$  de période  $T$ , définie sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$  par

$$g(t) = \frac{2}{T} t \quad (5.28)$$

Cette fonction respecte les hypothèses du théorème de FOURIER, sa série de FOURIER existe donc. Calculons ses coefficients. Etant donné que la fonction  $g(t)$  est impaire, les coefficients  $a_0$  et  $a_n$  sont nuls. Les coefficients  $b_n$  sont alors obtenus par

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t \sin(2\pi n f_0 t) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_0^{+\frac{T}{2}} t \sin(2\pi n f_0 t) dt \end{aligned}$$

En utilisant la technique de l'intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{8}{T^2} \left\{ \left[ -\frac{t}{2\pi n f_0} \cos(2\pi n f_0 t) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{2\pi n f_0} \int_0^{+\frac{T}{2}} \cos(2\pi n f_0 t) dt \right\} \\ &= \frac{8}{T^2} \frac{1}{2\pi n f_0} \left[ -\frac{T}{2} \cos\left(2\pi n f_0 \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{2\pi n f_0} \sin\left(2\pi n f_0 \frac{T}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Finalement, en tenant compte de la parité de  $n$ , nous obtenons

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est pair} \\ +\frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

La série de FOURIER de  $g(t)$  peut enfin s'écrire

$$SF_g(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(2\pi n f_0 t) \quad (5.29)$$

Les polynômes de FOURIER pour différentes valeurs de  $N$  sont présentés à la table 5.2. En choisissant  $T = 2$ , nous pouvons finalement déduire que sur l'intervalle  $] -1, +1 [$ , nous avons

$$t = \frac{2}{\pi} \left( \sin(\pi t) - \frac{1}{2} \sin(2\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) - \dots \right) \quad (5.30)$$

### 5.6.1 Phénomène de GIBBS

Nous avons vu lors de l'analyse de la fonction carrée, et maintenant de la fonction dents de scie, que plus on additionne des termes trigonométriques (en augmentant  $N$ ), plus la fonction obtenue tend vers la fonction carrée (ou dents de scie). Mais nous remarquons aussi que sur les points anguleux de la fonction (aux discontinuités), bien qu'on puisse ajouter un grand nombre de termes, un défaut d'approximation persistera.

Etant donné que tout terme de la série de FOURIER est une fonction continue, il est normal que la série ne puisse approcher uniformément la fonction aux points de discontinuité. Des études ont déjà montré que l'amplitude d'oscillation autour des discontinuités est toujours plus importante. Ce phénomène porte le nom de phénomène de GIBBS. Quantitativement, il en ressort que très régulièrement l'oscillation y est de 18% plus importante que sur le reste de la fonction. C'est le cas de la fonction carrée mais aussi de la fonction dents de scie.

## 5.7 Exercices

- Déterminer le développement en série de FOURIER de la fonction périodique  $g(t)$  de période  $T$  et définie sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$  par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ \frac{2}{T}t & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

- Déterminer le développement en série de FOURIER de la fonction périodique  $g(t)$  de période  $2\pi$  et définie sur l'intervalle  $[-\pi, +\pi]$  par  $g(t) = t^2$ .
- Déterminer le développement en série de FOURIER de la fonction triangle, c'est-à-dire de la fonction périodique  $g(t)$  de période  $T$  et définie sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$  par

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{4t}{T} - 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ \frac{4t}{T} - 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

## 5.8 Références

1. Mathématiques appliquées. A. PETRY. 2013. Haute Ecole de la Province de Liège.
2. Séries de FOURIER et applications. A. ETESSE, F. JACOBS, J.-F. ZHANG. 2011.

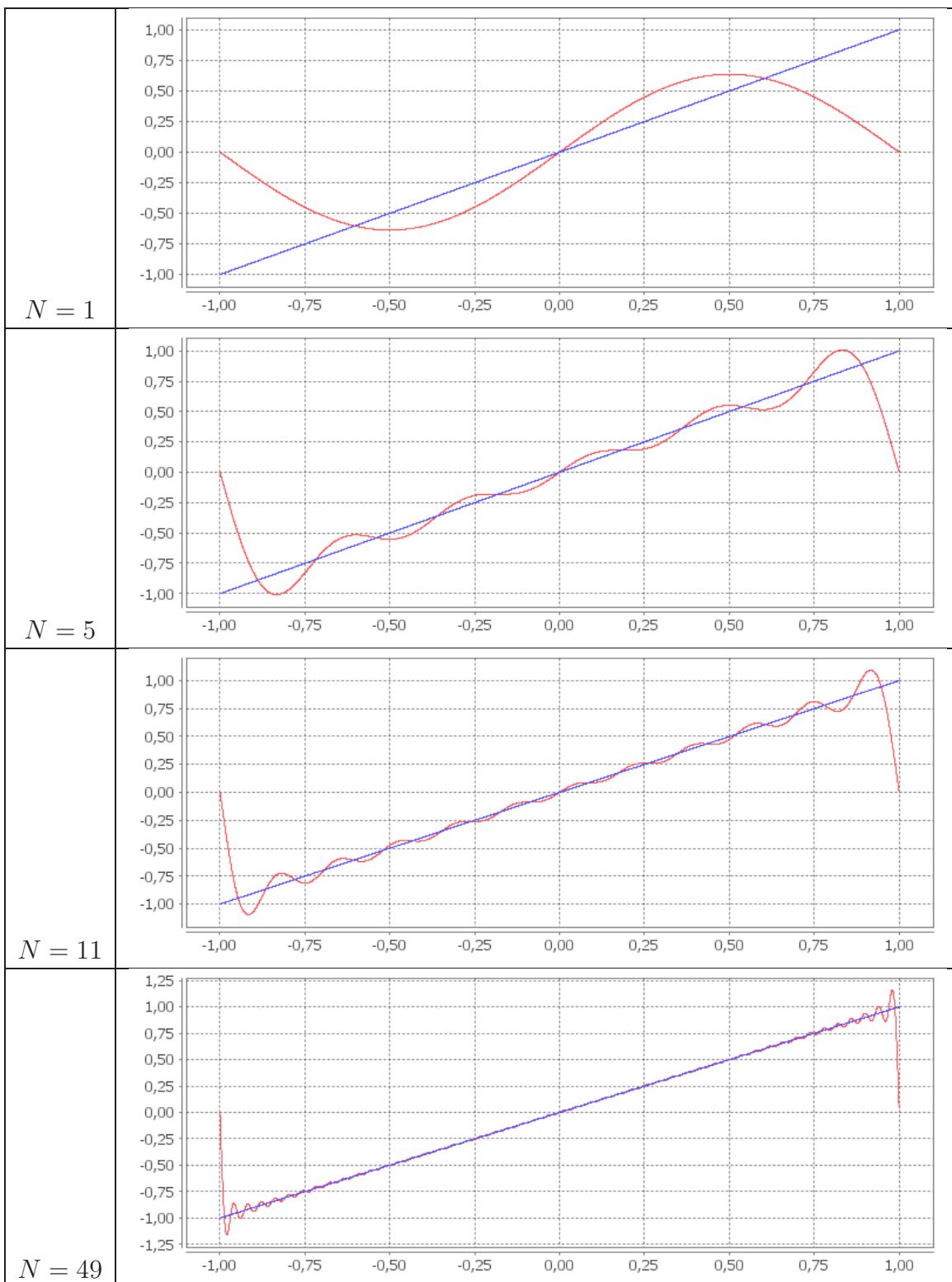


TABLE 5.2 – Polynôme trigonométrique construit à partir des coefficients de la fonction “dents de scie” (pour  $T = 2$ ).

# Chapitre 6

## Transformée de FOURIER 1D

### 6.1 Transformée de FOURIER 1D

#### 6.1.1 Définitions

Soit  $g(t)$  un signal déterministe.

**Définition [Transformée de FOURIER].** La transformée de FOURIER du signal  $g(t)$  est définie par

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi t f} dt \quad (6.1)$$

À partir de  $G(f)$ , il est possible de retrouver exactement le signal  $g(t)$  au moyen de

**Définition [Transformée de FOURIER inverse].** La transformée de FOURIER inverse de  $G(f)$  est définie par

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi t f} df \quad (6.2)$$

Pour que la transformée de FOURIER d'un signal  $g(t)$  existe, il faut que l'intégrale (7.1) converge et fournit un résultat fini quelque soit la fréquence  $f$ . Mathématiquement, il est possible d'introduire un ensemble de contraintes sur la fonction  $g(t)$ . Dans le cadre de ce cours,  $g(t)$  est un signal et on pourrait montrer que pour les signaux physiques, c'est-à-dire les signaux d'énergie, la transformée de FOURIER existe toujours.

Les signaux de puissance, ayant une énergie infinie, ne possède pas de transformée de FOURIER au sens classique des mathématiques. En particulier, il est impossible de calculer la transformée de FOURIER des signaux périodiques, comme une sinusoïde. En effet, dans ce cas, l'intégrale (7.1) donne un résultat infini quelque soit  $f$ ... Cela est particulièrement gênant pour l'étude de nombreux systèmes de traitement ou de transmission du signal qui font abondamment usage de ce genre de signal. Néanmoins, la théorie des distributions introduit un signal particulier, l'impulsion de DIRAC, qui permet de résoudre ce problème. Nous y reviendrons très bientôt.

Dans la suite, nous dirons que  $g(t)$  et  $G(f)$  forment une paire de transformées de FOURIER représentée par

$$g(t) \rightleftharpoons G(f)$$

En général,  $G(f)$  est une fonction à valeurs complexes, ce qui n'est pas spécialement pour ravis le lecteur... Pour rappel, un nombre complexe peut s'exprimer en utilisant la notation

module-argument. Nous pouvons donc écrire

$$G(f) = \|G(f)\| e^{j\theta(f)} \quad (6.3)$$

où

- $\|G(f)\|$  est appelé *module* de  $G(f)$ , ou encore *spectre* de  $g(t)$ , et
- $\theta(f)$  est appelée phase de  $G(f)$ .

Dans le cas important où  $g(t)$  est un **signal à valeurs réelles**, nous avons

$$G^*(f) = G(-f)$$

où \* représente le complexe conjugué. Il vient

$$\boxed{\|G(-f)\| = \|G(f)\|}$$

$$\boxed{\theta(-f) = -\theta(f)}$$

Dès lors, nous pouvons déduire deux propriétés importantes d'un signal à valeurs réelles :

- Le *spectre* du signal est une *fonction paire* de la fréquence, c'est-à-dire que le graphe de  $\|G(f)\|$  est symétrique par rapport à l'axe vertical.
- La *phase* du signal est une *fonction impaire* de la fréquence, c'est-à-dire que le graphe de  $\theta(f)$  est symétrique par rapport à l'origine des axes.

Ces deux propriétés sont très importantes dans le cas du filtrage linéaire des signaux. En effet, si un traitement dans le domaine fréquentiel modifie le spectre et/ou la phase du signal de telle sorte qu'une, au moins, de ces deux propriétés ne soit plus vérifiée, le signal obtenu après transformée de FOURIER inverse ne sera plus réel...

### 6.1.2 Propriétés

#### 1. Linéarité

Soient  $g_1(t) \rightleftharpoons G_1(f)$  et  $g_2(t) \rightleftharpoons G_2(f)$ . Alors, pour toutes constantes  $c_1$  et  $c_2$ , nous avons

$$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \rightleftharpoons c_1 G_1(f) + c_2 G_2(f) \quad (6.4)$$

#### 2. Dilatation temporelle

Soit  $g(t) \rightleftharpoons G(f)$ . Nous avons

$$g(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right) \quad (6.5)$$

La fonction  $g(at)$  représente une version de  $g(t)$  compressée dans le temps par un facteur  $a$  tandis que la fonction  $G(f/a)$  représente une version de  $G(f)$  dilatée en fréquence par le même facteur  $a$ . Dès lors, il vient qu'une compression dans le domaine temporel équivaut à une dilatation dans le domaine fréquentiel et vice versa.

#### 3. Dualité

Si  $g(t) \rightleftharpoons G(f)$ , alors

$$G(t) \rightleftharpoons g(-f) \quad (6.6)$$

#### 4. Translation temporelle

Si  $g(t) \rightleftharpoons G(f)$ , alors

$$g(t - t_0) \rightleftharpoons G(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (6.7)$$

Il en résulte que le fait de translater la fonction  $g(t)$  de  $t_0$  ne modifie pas le module de la transformée de FOURIER, par contre sa phase est modifiée d'un facteur linéaire  $-j2\pi f t_0$ .

#### 5. Translation fréquentielle

Si  $g(t) \rightleftharpoons G(f)$ , alors

$$g(t) e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons G(f - f_0) \quad (6.8)$$

La multiplication de la fonction  $g(t)$  par le facteur  $e^{j2\pi f_0 t}$  est équivalente à une translation de la transformée de FOURIER  $G(f)$  dans le domaine fréquentiel. On appelle encore cette propriété théorème de *modulation*.

#### 6. Dérivée temporelle

Si  $g(t) \rightleftharpoons G(f)$ , alors

$$\frac{d}{dt} g(t) \rightleftharpoons j2\pi f G(f) \quad (6.9)$$

#### 7. Intégration temporelle

Si  $g(t) \rightleftharpoons G(f)$  et que  $G(0) = 0$ , ce qui signifie que le signal  $g(t)$  n'a pas de composante continue ou encore que le signal  $g(t)$  oscille en moyenne autour de la valeur 0, alors

$$\int_{-\infty}^t g(x) dx = \int g(t) dt \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f} G(f) \quad (6.10)$$

#### 8. Multiplication dans le domaine temporel

Si  $g_1(t) \rightleftharpoons G_1(f)$  et  $g_2(t) \rightleftharpoons G_2(f)$ , alors

$$g_1(t) g_2(t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda) G_2(f - \lambda) d\lambda = (G_1 \otimes G_2)(f) \quad (6.11)$$

L'intégrale apparaissant dans cette expression est connue sous le nom d'*intégrale de convolution* dans le domaine fréquentiel. L'opérateur  $\otimes$  est appelé opérateur de convolution et la nouvelle fonction  $(G_1 \otimes G_2)$  ainsi créée est appelé *produit de convolution* de  $G_1$  et  $G_2$ . Dès lors, une multiplication dans le domaine temporel est équivalente à une convolution dans le domaine fréquentiel.

#### 9. Convolution dans le domaine temporel

Si  $g_1(t) \rightleftharpoons G_1(f)$  et  $g_2(t) \rightleftharpoons G_2(f)$ , alors

$$(g_1 \otimes g_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\tau) g_2(t - \tau) d\tau \rightleftharpoons G_1(f) G_2(f) \quad (6.12)$$

Dès lors, le produit de convolution dans le domaine temporel équivaut à un simple produit dans le domaine fréquentiel. Cette propriété est essentielle dans l'étude des systèmes linéaires, elle porte le nom de *théorème de convolution*.

### 10. Égalité de PARSEVAL

Si  $g(t) \rightleftharpoons G(f)$ , alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(f)\|^2 df \quad (6.13)$$

Cette propriété porte également le nom de *théorème d'énergie de RAYLEIGH*. La quantité  $\|G(f)\|^2$  est appelée *densité spectrale d'énergie* du signal  $g(t)$ .

### 6.1.3 Exemples

#### Exemple 1

Considérons une impulsion rectangulaire  $g(t)$  de durée  $T$ , d'amplitude  $A$  et centrée à l'origine. Afin de définir ce signal, nous introduisons la fonction

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

appelée fonction rectangle. Dès lors, nous pouvons écrire

$$g(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

La transformée de FOURIER du signal  $g(t)$  est donnée par

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi t f} dt \\ &= AT \left( \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right) \end{aligned}$$

Afin de simplifier la notation précédente, nous introduisons la fonction sinus cardinal, *sinc*, définie par

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (6.14)$$

Cette fonction est représentée à la figure 6.1.

Finalement, il vient

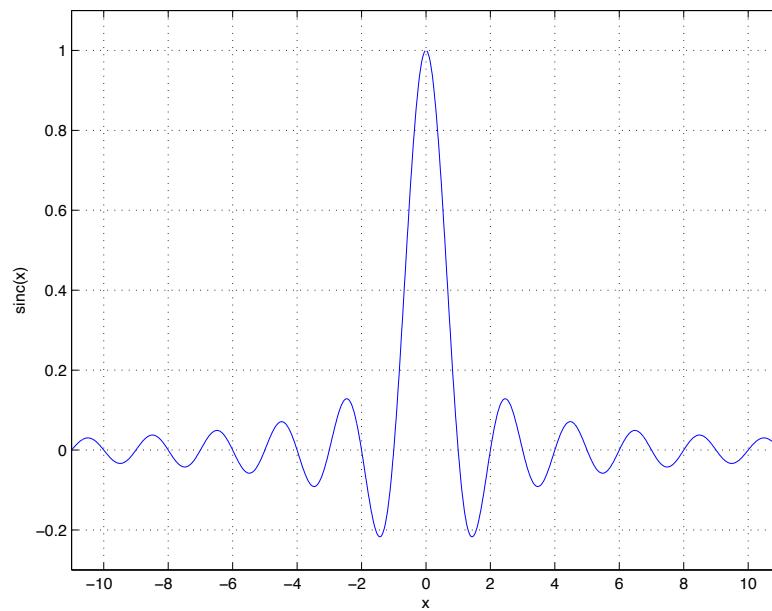
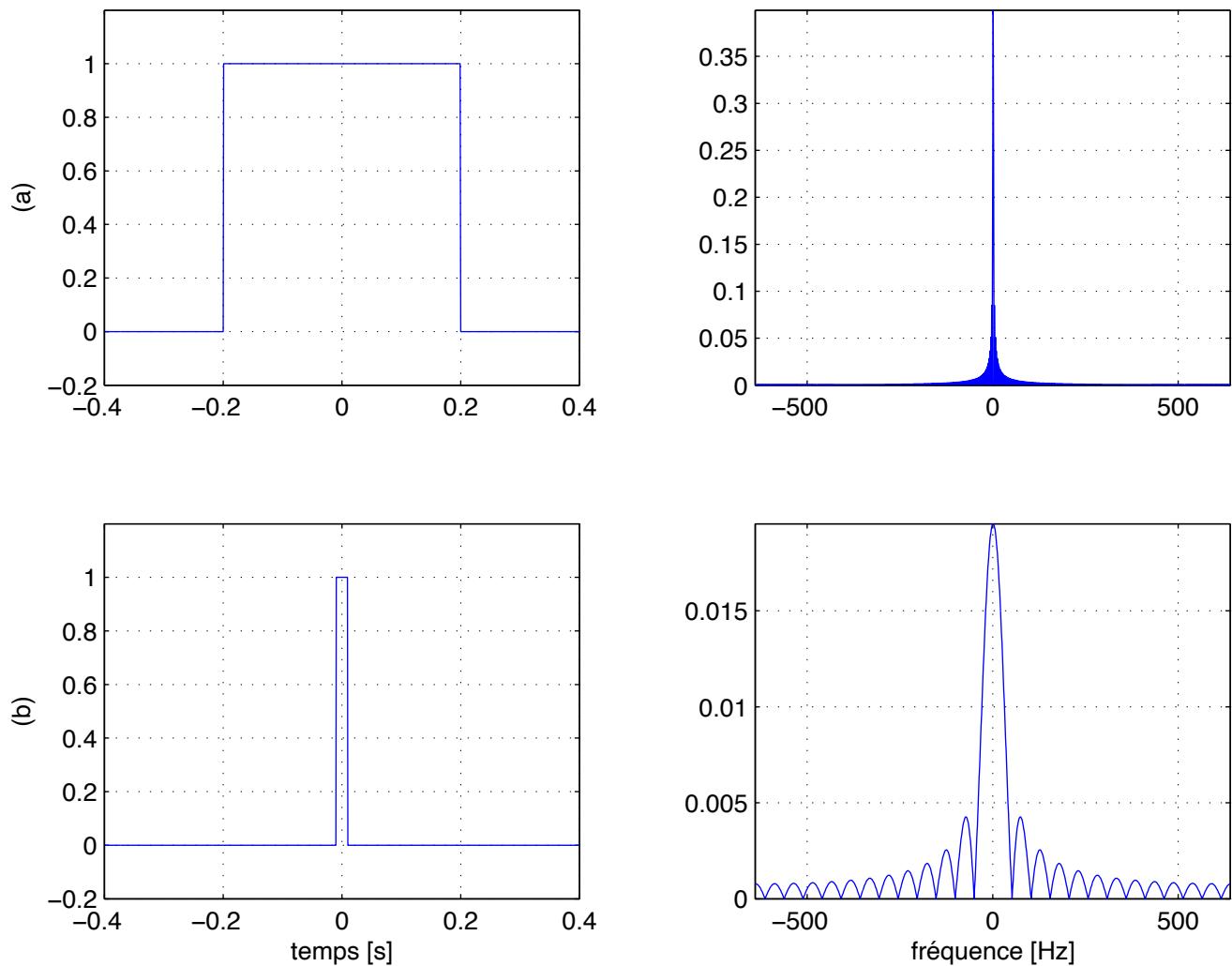
$$G(f) = AT \text{sinc}(fT)$$

Nous avons donc la paire de transformée de FOURIER suivante :

$$A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons AT \text{sinc}(fT) \quad (6.15)$$

Ce signal, ainsi que son spectre, sont représentés à la figure 6.2 pour  $T = 0,4 [s]$  et  $T = 0,02 [s]$  ( $A = 1$  dans les deux cas).

Dans les deux exemples de la figure 6.2, la propriété de dilatation de la transformée de FOURIER est bien illustrée. Pour passer de (a) à (b), la durée de l'impulsion a été réduite d'un facteur 20, on observe donc une contraction dans le domaine temporel. Par contre, dans le domaine fréquentiel, on observe bien une dilatation selon l'axe des fréquences. Nous constatons donc ici un phénomène important : plus un signal est bref, plus il s'étend sur l'axe des fréquences. On dit qu'il présente une grande *bande passante*.

FIGURE 6.1 – La fonction  $\text{sinc}(x)$ .FIGURE 6.2 – L'impulsion rectangulaire et son spectre : (a)  $A = 1$  et  $T = 0,4 [s]$ . (b)  $A = 1$  et  $T = 0,02 [s]$ .

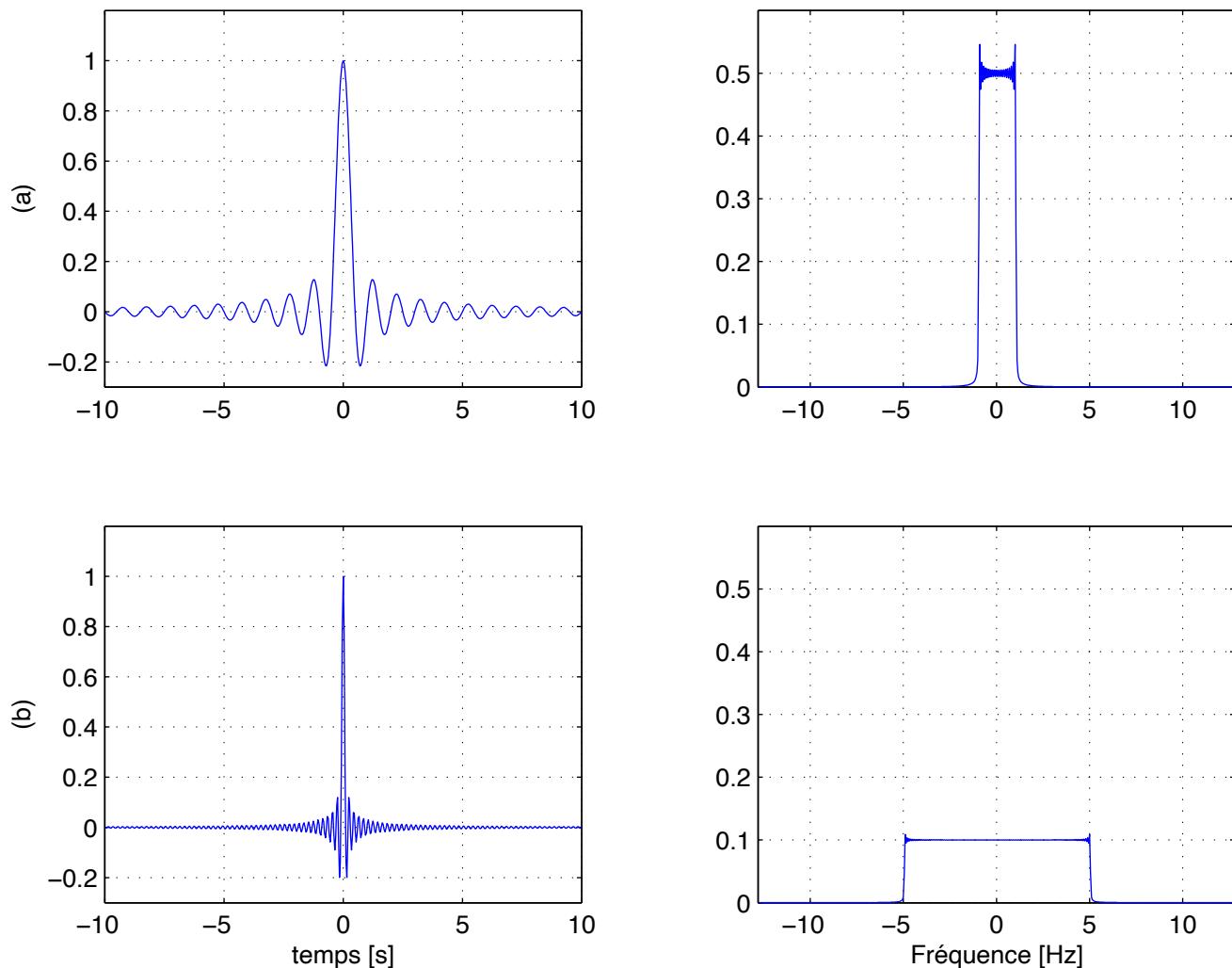


FIGURE 6.3 – Le signal  $g(t) = A \text{sinc}(2Wt)$  et son spectre : (a)  $W = 1 \text{ [Hz]}$  et  $A = 1$ . (b)  $W = 5 \text{ [Hz]}$  et  $A = 1$ .

### Exemple 2

Considérons le signal suivant

$$g(t) = A \text{sinc}(2Wt)$$

En appliquant la propriété de dualité de la transformée de FOURIER à la relation (6.15), et étant donné que la fonction rectangle est une fonction paire, il vient

$$AT \text{sinc}(tT) \rightleftharpoons A \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

En posant  $T = 2W$ , nous obtenons la paire de transformée de FOURIER suivante

$$A \text{sinc}(2Wt) \rightleftharpoons \frac{A}{2W} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right) \quad (6.16)$$

La figure 6.3 illustre le signal  $g(t)$ , ainsi que son spectre, pour  $W = 1 \text{ [Hz]}$  et  $W = 5 \text{ [Hz]}$  ( $A = 1$  dans les deux cas).

On observe que le spectre du signal  $g(t)$  est nul pour des fréquences supérieures à  $+W$  et inférieures à  $-W$ . Tout signal présentant cette particularité est dit à *bande limitée* et  $W$

est appelée *bande passante* du signal. Dans le cas particulier du signal  $A \text{sinc}(2Wt)$ , le spectre est constant sur l'intervalle  $[-W, +W]$ . Il n'en est pas ainsi pour tous les signaux à bande limitée.

Pour conclure ces exemples, nous dirons donc qu'un signal est à *bande limitée* si son spectre s'étend sur une *bande finie* de fréquences et vaut 0 en dehors de cette zone.

## 6.2 La fonction Delta de DIRAC

La fonction Delta de DIRAC, encore appelée *impulsion de DIRAC*, définie et décrite ci-dessous n'est pas une fonction au sens classique des mathématiques. Elle est issue de la théorie des distributions qui sort du cadre de ce cours. Néanmoins, elle va nous être d'un grand secours dans la suite de notre apprentissage des signaux.

### 6.2.1 Définition

La fonction Delta de DIRAC, notée  $\delta(t)$ , est définie par

$$\delta(t) = 0 \text{ pour tout } t \neq 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Donc, reprenons. La fonction Delta de DIRAC est une fonction qui est nulle partout sauf en 0 où elle n'est pas définie. Néanmoins, son intégrale vaut 1. Mouais, admettons...

Il est possible de donner une autre définition de la fonction  $\delta(t)$  qui incorpore les deux relations précédentes :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \delta(t - t_0) dt = g(t_0)} \quad (6.17)$$

où  $g(t)$  est une fonction continue. Donc, si on prend un signal  $g(t)$ , qu'on le multiplie par une impulsion de DIRAC centrée sur l'instant  $t_0$  et que l'on fait l'intégrale de ce produit, on obtient la valeur du signal  $g(t)$  à l'instant  $t_0$ . Quel intérêt ? Jusque là, aucun... un peu de patience. Nous demandons juste au lecteur d'admettre pour le moment cette définition un peu surprenante.

### 6.2.2 Transformée de FOURIER

Par définition, la transformée de FOURIER de  $\delta(t)$  est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi tf} dt$$

Étant donné que la fonction  $e^{-j2\pi tf}$  évaluée en  $t = 0$  vaut 1, il vient

$$\boxed{\delta(t) \rightleftharpoons 1} \quad (6.18)$$

Donc, le spectre de la fonction Delta de DIRAC s'étend uniformément sur tout l'intervalle de fréquence  $]-\infty, +\infty[$ . Ce signal présente donc une *bande passante infinie*.

Valant zéro presque partout et n'étant pas définie à l'origine, il n'est pas facile de représenter graphiquement la fonction  $\delta(t)$ . Par convention, on la représentera comme à la figure 6.4a. Sa

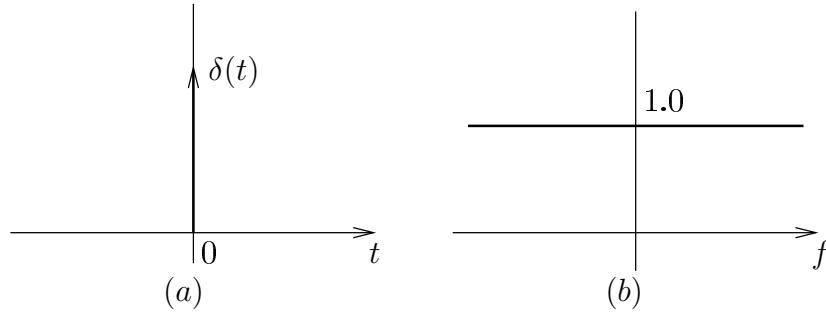


FIGURE 6.4 – (a) La fonction Delta de DIRAC. (b) La transformée de FOURIER de  $\delta(t)$ .

transformée de FOURIER est représentée à la figure 6.4b. On appelle également la fonction Delta de DIRAC l'*impulsion de DIRAC* étant donné son caractère (extrêmement !) limité dans le temps. On parlera également de *raie de DIRAC*.

### 6.2.3 Applications directes

#### Signal continu ou signal DC

Considérons le signal continu suivant

$$g(t) = A$$

Ce signal n'a pas de transformée de FOURIER au sens classique des mathématiques car l'intégrale (7.1) n'existe pas. Néanmoins, en appliquant la propriété de dualité (7.7) de la transformée de FOURIER à la relation (7.14) et étant donné que la fonction  $\delta$  est paire, il vient

$$\boxed{1 \rightleftharpoons \delta(f)} \quad (6.19)$$

et donc

$$A \rightleftharpoons A \delta(f) \quad (6.20)$$

La transformée de FOURIER d'un signal continu comporte donc une seule impulsion de DIRAC située en  $f = 0$ . On dira que ce signal présente une seule *harmonique* en  $f = 0$ . La figure 6.5a illustre ce signal et son spectre pour  $A = 1$ .

#### Signal complexe exponentiel

En appliquant la propriété de translation fréquentielle (7.9) de la transformée de FOURIER à la relation (7.15), nous obtenons

$$e^{j2\pi f_0 t} \rightleftharpoons \delta(f - f_0) \quad (6.21)$$

Le spectre d'un signal complexe exponentiel de fréquence  $f_0$  se limite à une raie située en  $f = f_0$ .

#### Signal sinusoïdal

Considérons le signal

$$g(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

pour lequel nous connaissons bien (enfin j'espère !) la relation suivante

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

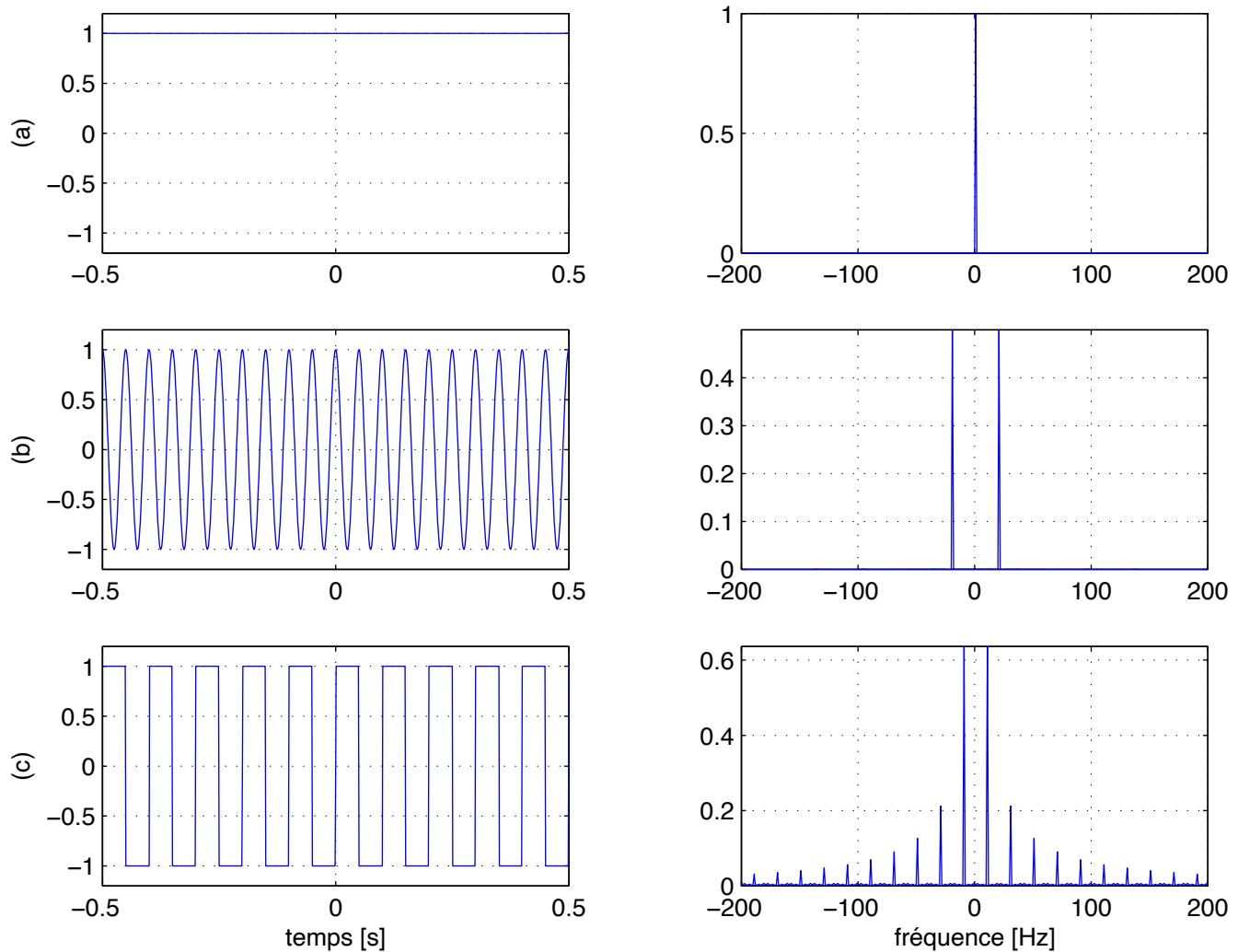


FIGURE 6.5 – (a) Signal continu ( $A = 1$ ). (b) Signal cosinusoidal ( $A = 1$  et  $f_0 = 20$  [Hz]). (c) Signal périodique rectangulaire de fréquence fondamentale  $f_0 = 10$  [Hz].

En utilisant la propriété de linéarité (7.5) de la transformée de FOURIER, il vient

$$\boxed{\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}} \quad (6.22)$$

Le spectre d'un signal cosinusoidal comporte donc 2 raies pondérées par le facteur 1/2 situées en  $f = \pm f_0$ . Dès lors,

$$G(f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

Le signal  $g(t)$ , ainsi que son spectre sont représentés à la figure 6.5b pour  $A = 1$  et  $f_0 = 20 [Hz]$ .

De la même manière, on pourrait montrer que

$$\boxed{\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}} \quad (6.23)$$

On peut remarquer que les fonctions sinus et cosinus ont le même spectre mais pas la même phase. En effet, graphiquement, ils ont exactement le même comportement ; leur différence réside dans le déphasage de 90°.

### Signaux périodiques

La plupart des signaux périodiques ont une énergie infinie et donc n'ont pas de transformée de FOURIER au sens classique des mathématiques. Néanmoins, l'impulsion de DIRAC et les applications que nous venons d'en tirer vont permettre de nous en sortir.

Tout signal périodique  $g(t)$  fini (c'est-à-dire dont les valeurs restent bornées) de période fondamentale  $T_0$ , et donc de fréquence fondamentale  $f_0 = 1/T_0$ , peut être décomposé en une somme infinie de "sinusoïdes" en usant de la série de FOURIER :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi(\frac{n}{T_0})t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi(nf_0)t} \quad (6.24)$$

où les coefficients  $c_n$  de FOURIER sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} g(t) e^{-j2\pi(\frac{n}{T_0})t} dt \quad (6.25)$$

En appliquant la propriété de linéarité (7.5) à la relation (6.24) et étant donné la relation (7.17), il vient

$$\boxed{G(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - nf_0)} \quad (6.26)$$

Le spectre d'un signal périodique est donc constitué d'une infinité de raies situées aux multiples de la fréquence fondamentale du signal. Toutes ces raies constituent les *harmoniques* du signal. On dit que le spectre d'un signal périodique est *discret*, car le spectre est nul entre les différentes raies. La raie située à l'origine

$$c_0 \delta(f)$$

est appelée *composante continue* du signal. Si  $c_0 = 0$ , nous dirons que le signal  $g(t)$  n'a pas de composante continue. Lorsque l'on parle de la *composante fondamentale* du signal, il s'agit de la composante

$$c_{-1} \delta(f + f_0) + c_1 \delta(f - f_0)$$

qui représente les raies situées à la fréquence fondamentale  $f_0$  du signal. Un exemple de signal périodique et son spectre sont représentés à la figure 6.5c.

## 6.3 Retour à la transformée de FOURIER

Nous pouvons à présent donner une meilleure interprétation physique de la transformée de FOURIER. À la section précédente, nous avons observé que le signal (co)sinusoidal a un comportement particulier vis-à-vis de la transformée de FOURIER. En effet, son spectre est constitué d'une seule raie située à la fréquence de la (co)sinusoïde. Les signaux périodiques, quant à eux, présentent un spectre composé de raies ou d'harmoniques situées aux multiples de la fréquence fondamentale du signal. Chaque harmonique représente donc une composante du signal, composante correspondant à une fréquence. Pour les signaux non périodiques, on pourrait dire que les harmoniques sont tellement proches que le spectre devient une fonction continue de la fréquence. Dès lors, on peut considérer que la grandeur  $G(f)$  constitue la composante fréquentielle du signal  $g(t)$  à la fréquence  $f$ . La transformée de FOURIER peut donc être vue comme une généralisation de la série de FOURIER qui n'est applicable qu'aux signaux périodiques.

Plusieurs notions sont à retenir. La *bande passante* d'un signal est une caractéristique importante de celui-ci ; il s'agit de la bande de fréquence dans laquelle le spectre du signal est non nul. Son spectre est donc nul en dehors de sa bande passante.

Une autre notion importante est celle des hautes et des basses fréquences d'un signal. Les hautes fréquences d'un signal correspondent à ses composantes  $G(f)$  pour  $f$  élevé ; il s'agit donc des variations rapides de  $g(t)$ . Par contre, les basses fréquences du signal correspondent à ses composantes  $G(f)$  pour  $f$  considéré autour de 0. La valeur  $G(0)$  constitue la composante continue du signal, c'est-à-dire sa valeur moyenne. Les basses fréquences correspondent aux variations lentes du signal. Notons qu'il n'y a pas de distinction nette entre les basses et les hautes fréquences. Cela dépend de l'application et de la gamme de fréquence dans laquelle on travaille.

## 6.4 Quelques signaux fondamentaux

### 6.4.1 Définitions

1. Fonction rectangle

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Fonction échelon

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

3. Fonction signe

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

4. Fonction sinc

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

### 6.4.2 Paires de transformées de FOURIER

$$\begin{aligned}
rect\left(\frac{t}{T}\right) &\rightleftharpoons; T \operatorname{sinc}(fT) \\
sinc(2Wt) &\rightleftharpoons; \frac{1}{2W} rect\left(\frac{f}{2W}\right) \\
e^{-at}u(t), a > 0 &\rightleftharpoons; \frac{1}{a + j2\pi f} \\
e^{-a|t|}, a > 0 &\rightleftharpoons; \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} \\
e^{-\pi t^2} &\rightleftharpoons; e^{-\pi f^2} \\
\delta(t) &\rightleftharpoons; 1 \\
1 &\rightleftharpoons; \delta(f) \\
\delta(t - t_0) &\rightleftharpoons; e^{-j2\pi f_0 t} \\
e^{j2\pi f_0 t} &\rightleftharpoons; \delta(f - f_0) \\
\cos(2\pi f_0 t) &\rightleftharpoons; \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\
\sin(2\pi f_0 t) &\rightleftharpoons; \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \\
sign(t) &\rightleftharpoons; \frac{1}{j\pi f} \\
\frac{1}{\pi t} &\rightleftharpoons; -j sign(f) \\
u(t) &\rightleftharpoons; \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \\
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) &\rightleftharpoons; \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)
\end{aligned}$$

# Chapitre 7

## Transformée de FOURIER 2D

### 7.1 Transformée de FOURIER 2D

#### 7.1.1 Définition

Soit  $f(x, y)$  un signal 2D (nous dirons image dans la suite) déterministe.

**Définition [Transformée de FOURIER 2D].** La transformée de FOURIER de  $f(x, y)$  est définie par

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy \quad (7.1)$$

À partir de  $F(u, v)$ , il est possible de retrouver exactement l'image  $f(x, y)$  au moyen de

**Définition [Transformée de FOURIER 2D inverse].** La transformée de FOURIER inverse de  $F(u, v)$  est définie par

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(xu+yv)} du dv \quad (7.2)$$

Pour que la transformée de FOURIER d'une image  $f(x, y)$  existe, il faut que l'intégrale (7.1) converge et fournit un résultat fini quelque soit la fréquence  $(u, v)$ . Mathématiquement, il est possible d'introduire un ensemble de contraintes sur la fonction  $f(x, y)$ .

Les signaux de puissance, ayant une énergie infinie, ne possède pas de transformée de FOURIER au sens classique des mathématiques. En particulier, il est impossible de calculer la transformée de FOURIER des signaux périodiques, comme une sinusoïde. En effet, dans ce cas, l'intégrale (7.1) donne un résultat infini quelque soit  $(u, v)$ ... Cela est particulièrement gênant pour l'étude de nombreux systèmes de traitement du signal qui font abondamment usage de ce genre de signal. Néanmoins, la théorie des distributions introduit un signal particulier, l'impulsion de DIRAC  $\delta(x, y)$ , qui permet de résoudre ce problème. Nous y reviendrons très bientôt.

Dans la suite, nous dirons que  $f(x, y)$  et  $F(u, v)$  forment une paire de transformées de FOURIER représentée par

$$f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$$

En général,  $F(u, v)$  est une fonction à valeurs complexes, ce qui n'est pas spécialement pour ravis le lecteur... Pour rappel, un nombre complexe peut s'exprimer en utilisant la notation module-argument. Nous pouvons donc écrire

$$F(u, v) = \|F(u, v)\| e^{j\theta(u, v)} \quad (7.3)$$

où

- $\|F(u, v)\|$  est appelé *module* de  $F(u, v)$ , ou encore *spectre* de  $f(x, y)$ , et
- $\theta(u, v)$  est appelée phase de  $f(x, y)$ .

Dans le cas important où  $f(x, y)$  est une image à valeurs réelles, nous avons

$$F^*(u, v) = F(-u, -v)$$

où \* représente le complexe conjugué. Il vient

$$\boxed{\|F(-u, -v)\| = \|F(u, v)\|}$$

$$\boxed{\theta(-u, -v) = -\theta(u, v)}$$

Dès lors, nous pouvons déduire deux propriétés importantes d'une image à valeurs réelles :

- Le *spectre*  $\|F(u, v)\|$  de l'image est symétrique par rapport à l'origine  $(0, 0)$  du système d'axes  $u - v$ .
- La *phase*  $\theta(u, v)$  de l'image est anti-symétrique par rapport à l'origine  $(0, 0)$  du système d'axes  $u - v$ .

Ces deux propriétés sont très importantes dans le cas du filtrage linéaire des images. En effet, si un traitement dans le domaine fréquentiel modifie le spectre et/ou la phase de l'image de telle sorte qu'une, au moins, de ces deux propriétés ne soit plus vérifiée, l'image obtenue après transformée de FOURIER inverse ne sera plus réelle...

### 7.1.2 Propriétés

#### 1. Séparabilité

En permutant l'ordre d'intégration dans (7.1), nous avons

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi x u} dx \right] e^{-j2\pi y u} dy \quad (7.4)$$

La transformée de FOURIER d'une image  $f(x, y)$  peut se réaliser en deux étapes : (i) transformée de FOURIER 1D de la fonction  $f(x, y)$  pour tout  $y$  fixé, transformant la variable  $x$  en la variable  $u$  et (ii) transformée de FOURIER 1D de la fonction obtenue pour tout  $u$  fixé, transformant la variable  $y$  en la variable  $v$ .

#### 2. Linéarité

Soient  $f_1(x, y) \rightleftharpoons F_1(u, v)$  et  $f_2(x, y) \rightleftharpoons F_2(u, v)$ . Alors, pour toutes constantes  $c_1$  et  $c_2$ , nous avons

$$c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \rightleftharpoons c_1 F_1(u, v) + c_2 F_2(u, v) \quad (7.5)$$

#### 3. Dilatation spatiale ou homothétie

Soit  $f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$ . Nous avons

$$f(ax, by) \rightleftharpoons \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (7.6)$$

La fonction  $f(ax, by)$  représente une version de  $f(x, y)$  compressée dans l'espace par un facteur  $a$  dans la direction  $x$  et par un facteur  $b$  dans la direction  $y$ . Une compression

dans le domaine spatial équivaut à une dilatation dans le domaine fréquentiel et vice versa.

#### 4. Dualité

Si  $f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$ , alors

$$F(x, y) \rightleftharpoons f(-u, -v) \quad (7.7)$$

#### 5. Translation spatiale

Si  $f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$ , alors

$$f(x - x_0, y - y_0) \rightleftharpoons F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)} \quad (7.8)$$

Il en résulte que le fait de translater la fonction  $f(x, y)$  de  $(x_0, y_0)$  ne modifie pas le module de la transformée de FOURIER, par contre sa phase est modifiée d'un facteur  $-j2\pi(ux_0 + vy_0)$ .

#### 6. Translation fréquentielle

Si  $f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$ , alors

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0x+v_0y)} \rightleftharpoons F(u - u_0, v - v_0) \quad (7.9)$$

La multiplication de la fonction  $f(x, y)$  par le facteur  $e^{j2\pi(u_0x+v_0y)}$  est équivalente à une translation de la transformée de FOURIER  $F(u, v)$  dans le domaine fréquentiel.

#### 7. Aire

Si  $f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$ , alors

$$F(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \quad (7.10)$$

Le coefficient  $F(0, 0)$ , appelé parfois *composante DC*, est la somme des valeurs de pixel de l'image. Sa dynamique est donc très importante par rapport aux autres coefficients. Ceci pose des problèmes pratiques qui amène à traiter séparément ce coefficient.

#### 8. Multiplication dans le domaine spatial

Si  $f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$  et  $g(x, y) \rightleftharpoons G(u, v)$ , alors

$$f(x, y) g(x, y) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) G(u - \alpha, v - \beta) d\alpha d\beta = (F \otimes G)(u, v) \quad (7.11)$$

L'intégrale apparaissant dans cette expression est connue sous le nom d'*intégrale de convolution* dans le domaine fréquentiel. L'opérateur  $\otimes$  est appelé opérateur de convolution et la nouvelle fonction  $(F \otimes G)$  ainsi créée est appelée *produit de convolution* de  $F$  et  $G$ . Dès lors, une multiplication dans le domaine spatial est équivalente à une convolution dans le domaine fréquentiel.

#### 9. Convolution dans le domaine spatial

Si  $f(x, y) \rightleftharpoons F(u, v)$  et  $g(x, y) \rightleftharpoons G(u, v)$ , alors

$$(f \otimes g)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \rightleftharpoons F(u, v) G(u, v) \quad (7.12)$$

Dès lors, le produit de convolution dans le domaine spatial équivaut à un simple produit dans le domaine fréquentiel.

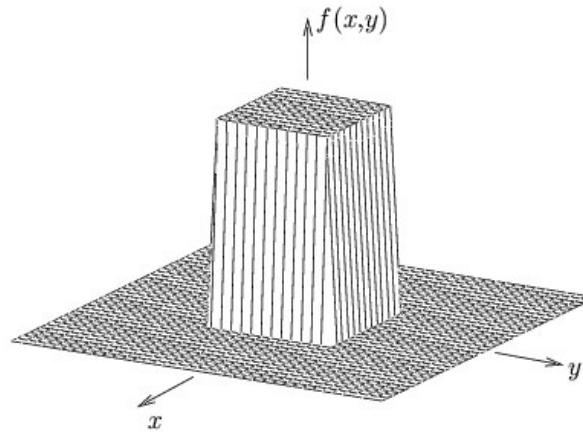


FIGURE 7.1 – Illustration de la fonction Rectangle.

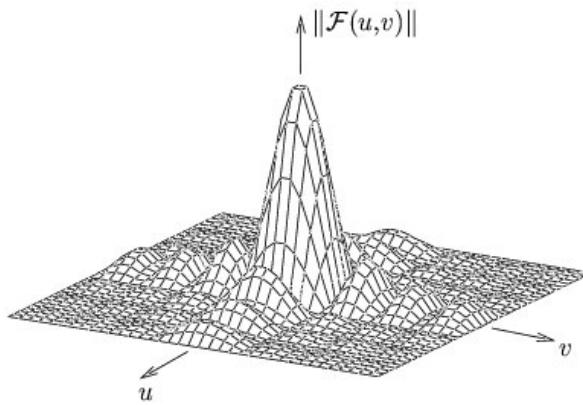


FIGURE 7.2 – Module de la transformée de FOURIER de la fonction Rectangle.

### 7.1.3 Exemples

#### Exemple 1

Considérons l'image  $f(x, y)$  définie par

$$f(x, y) = A \operatorname{Rect}_{a,b}(x, y)$$

où

$$\operatorname{Rect}_{a,b}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{a}{2}, |y| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est appelée *fonction Rectangle*. L'image  $f(x, y)$  vaut donc  $A$  à l'intérieur du rectangle de longueur  $a$  et de largeur  $b$  dont les côtés sont parallèles aux axes  $x$  et  $y$ , et zéro partout ailleurs. La transformée de FOURIER de l'image  $f(x, y)$  est donnée par

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-b/2}^{+b/2} dy A e^{-j2\pi(xu+yv)} \\ &= Aab \operatorname{sinc}(au) \operatorname{sinc}(bv) \end{aligned}$$

Une représentation de l'image  $f(x, y)$  est donnée à la figure 7.1 tandis que le module de sa transformée de FOURIER est représenté à la figure 7.2.

#### Exemple 2

Considérons l'image  $f(x, y)$  définie par

$$f(x, y) = A \operatorname{Disque}_R(x, y)$$

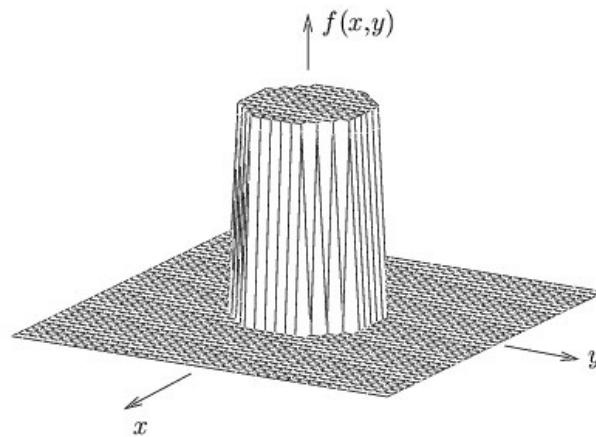


FIGURE 7.3 – Illustration de la fonction Disque.

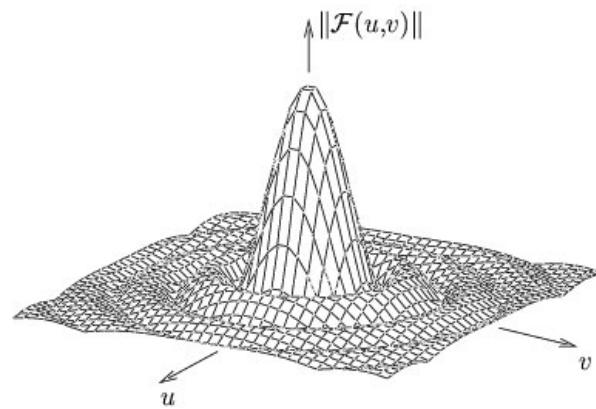


FIGURE 7.4 – Module de la transformée de FOURIER de la fonction Disque.

où

$$\text{Disque}_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est appelée *fonction disque*. L'image  $f(x, y)$  vaut donc  $A$  sur le disque de rayon  $R$  et zéro partout ailleurs. La transformée de FOURIER de l'image  $f(x, y)$  est donnée par

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy \\ &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} A e^{-j2\pi r(u \cos \theta + v \sin \theta)} d\theta \end{aligned}$$

où nous avons effectué un changement de variables des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées polaires. En se basant sur les propriétés des fonctions de BESSEL, nous obtenons le résultat suivant

$$F(u, v) = A R \frac{J_1(2\pi R \sqrt{u^2 + v^2})}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

où  $J_1(r)$  est la fonction de BESSEL d'ordre 1. Il est à noter que la transformée de Fourier de l'image  $f(x, y)$  est purement réelle et à symétrie radiale, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la distance  $\sqrt{u^2 + v^2}$  à l'origine. L'image  $f(x, y)$  est représentée à la figure 7.3 tandis que le module de sa transformée de FOURIER est représenté à la figure 7.4.

### Exemple 3 : dual de la fonction Rectangle

Pour rappel, nous avons la paire de transformée de FOURIER suivante

$$\text{Rect}_{a,b}(x, y) \rightleftharpoons ab \text{sinc}(au) \text{sinc}(bv)$$

En utilisant la propriété de dualité (relation 7.7) de la transformée de FOURIER, nous obtenons

$$\text{sinc}(ax) \text{sinc}(by) \rightleftharpoons \frac{1}{ab} \text{Rect}_{a,b}(u, v)$$

La nouvelle image ainsi obtenue est dite à bande limitée car son spectre est limité à une région finie du plan  $u - v$ . En l'occurrence, cette région est, dans ce cas-ci, un rectangle de longueur  $a$  et de largeur  $b$  centré à l'origine. D'après la définition de la fonction rectangle, le spectre est nul est dehors de ce rectangle.

### Exemple 4 : dual de la fonction Disque

Pour rappel, nous avons la paire de transformée de Fourier suivante

$$\text{Disque}_R(x, y) \rightleftharpoons R \frac{J_1(2\pi R\sqrt{u^2 + v^2})}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

En utilisant la propriété de dualité (relation 7.7) de la transformée de Fourier, nous obtenons

$$\frac{J_1(2\pi f_0 \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{f_0} \text{Disque}_{f_0}(u, v)$$

La nouvelle image ainsi obtenue est à bande limitée. Dans ce cas, le spectre est limité au disque de rayon  $f_0$  centré à l'origine.  $f_0$  est appelée fréquence radiale de coupure.

## 7.2 La fonction Delta de DIRAC

La fonction Delta de DIRAC, encore appelée *impulsion de DIRAC*, définie et décrite ci-dessous n'est pas une fonction au sens classique des mathématiques. Elle est issue de la théorie des distributions qui sort du cadre de ce cours. Néanmoins, elle va nous être d'un grand secours dans la suite.

### 7.2.1 Définition

La fonction Delta de DIRAC, notée  $\delta(x, y)$ , est définie par

$$\delta(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \neq (0, 0)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) dx dy = 1$$

La fonction Delta de DIRAC est une fonction qui est nulle partout sauf à l'origine  $(0, 0)$  où elle n'est pas définie. Néanmoins, son intégrale vaut 1.

Il est possible de donner une autre définition de la fonction  $\delta(x, y)$  qui incorpore les deux relations précédentes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0)$$

(7.13)

où  $f(x, y)$  est une fonction continue. Donc, si on prend une image  $f(x, y)$ , qu'on le multiplie par une impulsion de DIRAC centrée sur l'instant sur le pixel  $(x_0, y_0)$  et que l'on fait l'intégrale de ce produit, on obtient la valeur de l'image  $f(x, y)$  au pixel  $(x_0, y_0)$ .

### 7.2.2 Transformée de FOURIER

Par définition, la transformée de FOURIER de  $\delta(x, y)$  est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) e^{-j2\pi(xu+yv)} dx dy$$

Étant donné que la fonction  $e^{-j2\pi(xu+yv)}$  évaluée à l'origine  $(0, 0)$  vaut 1, il vient

$$\boxed{\delta(x, y) \rightleftharpoons 1} \quad (7.14)$$

Donc, le spectre de la fonction Delta de DIRAC s'étend uniformément sur tout l'intervalle de fréquence  $]-\infty, +\infty[ \times ]-\infty, +\infty[$ . Cette image présente donc une *bande passante infinie*.

### 7.2.3 Applications directes

#### Image continue ou constante

Considérons l'image continue suivante

$$f(x, y) = A$$

Cette image n'a pas de transformée de FOURIER au sens classique des mathématiques car l'intégrale (7.1) n'existe pas. Néanmoins, en appliquant la propriété de dualité (7.7) de la transformée de FOURIER à la relation (7.14) et étant donné que la fonction  $\delta$  est symétrique par rapport à l'origine, il vient

$$\boxed{1 \rightleftharpoons \delta(u, v)} \quad (7.15)$$

et donc

$$A \rightleftharpoons A \delta(u, v) \quad (7.16)$$

La transformée de FOURIER d'une image continue ou constante comporte donc une seule raie de DIRAC située à l'origine  $(0, 0)$  du plan  $u - v$ .

#### Image complexe exponentielle

En appliquant la propriété de translation fréquentielle (7.9) de la transformée de FOURIER à la relation (7.15), nous obtenons

$$e^{j2\pi(u_0x+v_0y)} \rightleftharpoons \delta(u - u_0, v - v_0) \quad (7.17)$$

Le spectre d'une image complexe exponentielle de fréquence  $(u_0, v_0)$  se limite donc à une raie située en  $(u_0, v_0)$  du plan  $u - v$ .

### Image sinusoïdale

Considérons l'image

$$f(x, y) = A \cos(2\pi(u_0x + v_0y))$$

pour lequel nous avons la relation suivante

$$\cos(2\pi(u_0x + v_0y)) = \frac{e^{j2\pi(u_0x + v_0y)} + e^{-j2\pi(u_0x + v_0y)}}{2}$$

En utilisant la propriété de linéarité (7.5) de la transformée de FOURIER, il vient

$$\cos(2\pi(u_0x + v_0y)) \rightleftharpoons \frac{\delta(u - u_0, v - v_0) + \delta(u + u_0, v + v_0)}{2} \quad (7.18)$$

Le spectre d'une image cosinusoïdale comporte donc 2 raies pondérées par le facteur 1/2 situées en  $(u_0, v_0)$  et  $(-u_0, -v_0)$ . Dès lors,

$$F(u, v) = \frac{A}{2} (\delta(u - u_0, v - v_0) + \delta(u + u_0, v + v_0))$$

De la même manière, on pourrait montrer que

$$\sin(2\pi(u_0x + v_0y)) \rightleftharpoons \frac{\delta(u - u_0, v - v_0) - \delta(u + u_0, v + v_0)}{2j} \quad (7.19)$$

On peut remarquer que les fonctions sinus et cosinus ont le même spectre mais pas la même phase.