Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа № 3

по дисциплине «Вычислительная математика»

Численное интегрирование

Выполнил:

Гурьянов Кирилл Алексеевич

Группа: P32302

Преподаватель:

Перл Ольга Вячеславовна

Санкт-Петербург

2023

1. Описание методов, расчетные формулы. Метод трапеций.

Метод трапеций — это один из методов численного интегрирования, который используется для приближенного вычисления определенного интеграла функции на заданном интервале. Он основан на замене интегрируемой функции линейной функцией на каждом интервале интегрирования, что приводит к замене интеграла на площадь трапеции под графиком функции.

Идея метода заключается в том, что для заданной функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ мы можем разбить этот интервал на n частей, а затем заменить подынтегральную функцию на каждом интервале линейной функцией, проходящей через точки $(a;\ f(a))$ и $(b;\ f(b))$. Затем мы вычисляем площади трапеций, ограниченных линейной функцией, на каждом интервале и складываем их, чтобы получить приближенное значение интеграла.

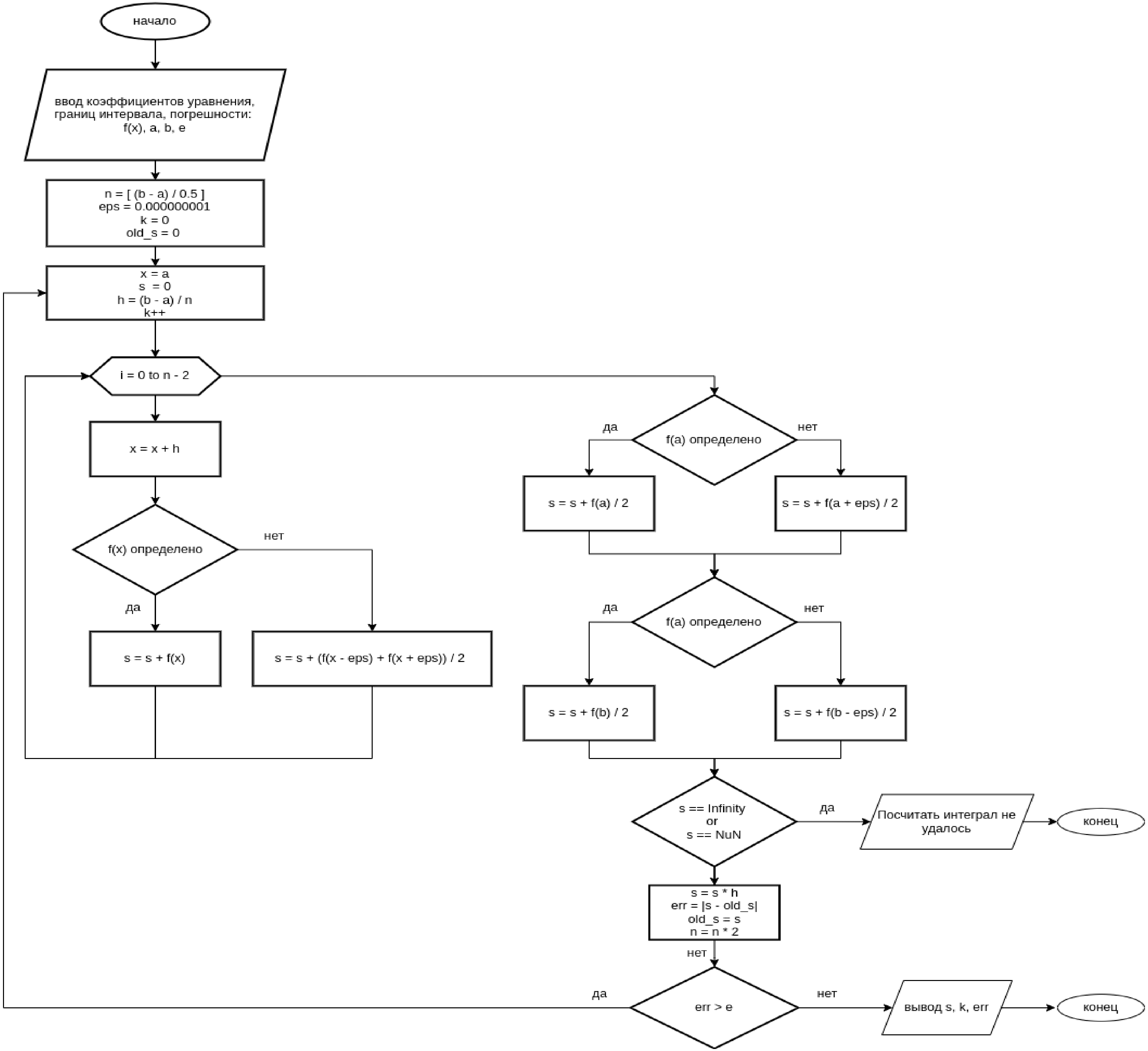
Метод трапеций для приближенного вычисления определенного интеграла функции на интервале $[a,\ b]$ можно записать:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

где $h = (b - a) / n -$ шаг разбиения интервала на n частей.

Иными словами, мы заменяем подынтегральную функцию на каждом интервале линейной функцией, затем вычисляем площадь трапеции на каждом интервале и складываем их, умножая на половину шага разбиения. Чем меньше шаг разбиения n, тем более точным будет приближенное значение интеграла.

2. Блок-схемы методов


начало
ввод коэффициентов уравнения,
границ интервала, погрешности:
f(x), a, b, e
n = [(b - a) / 0.5]
eps = 0.000000001
k = 0
old_s = 0
x = a
s = 0
h = (b - a) / n
k++
i = 0 to n - 2
x = x + h
f(x) определено
нет
да
s = s + f(x)
s = s + (f(x - eps) + f(x + eps)) / 2
да
f(a) определено
нет
s = s + f(a) / 2
s = s + f(a + eps) / 2
да
f(a) определено
нет
s = s + f(b) / 2
s = s + f(b - eps) / 2
s == Infinity
or
s == NuN
да
Посчитать интеграл не удалось
конец
s = s * h
err = |s - old_s|
old_s = s
n = n * 2
нет
да
err > e
нет
вывод s, k, err
конец

3. Листинг реализованных методов программы

```java
package lab3.algorithms;

import lab3.data.Answer;
import lab3.data.IntegratedFunction;

3 usages
public class TrapezoidalMethod {
    1 usage
    public Answer calculateTheIntegral(IntegratedFunction integratedFunction, double leftBoundary, double rightBoundary,
                                       double error) {
        double oldSum = 0;
        double currentError = 0;
        int numberOfIterations = 0;
        long numberOfSegments = Math.round((rightBoundary - leftBoundary) / 0.5);
        double integrationStep;
        double eps = 0.000000001;
        String errorMessage = "Все отлично!";
        boolean isCorrect = true;
        do {
            double x = leftBoundary;
            double currentSum = 0;
            integrationStep = (rightBoundary - leftBoundary) / numberOfSegments;
            numberOfIterations++;
            double y;
            for (int i = 0; i < numberOfSegments - 1; i++) {
                x += integrationStep;
                y = integratedFunction.calculate(x);
                if (Double.isNaN(y))
                    currentSum += (integratedFunction.calculate( x: x - eps) + integratedFunction.calculate( x: x + eps)) / 2;
                else currentSum += y;
            }
            currentSum += addOnBoundaries(integratedFunction, leftBoundary, rightBoundary, eps);
            if (Double.isInfinite(currentSum) || Double.isNaN(currentSum)) {
                errorMessage = "Посчитать интеграл не удалось :(";
                isCorrect = false;
                break;
            }
            currentSum *= integrationStep;
            currentError = Math.abs(currentSum - oldSum);
            oldSum = currentSum;
            numberOfSegments = numberOfSegments * 2;
        } while (currentError > error);

        return new Answer(oldSum, currentError, numberOfIterations, errorMessage, isCorrect);
    }

    1 usage
    private double addOnBoundaries(IntegratedFunction integratedFunction, double leftBoundary,
                                   double rightBoundary, double eps) {
        double sum = 0;
        if (Double.isNaN(integratedFunction.calculate(leftBoundary)))
            sum += integratedFunction.calculate( x: leftBoundary + eps) / 2;
        else sum += integratedFunction.calculate(leftBoundary) / 2;
        if (Double.isNaN(integratedFunction.calculate(rightBoundary)))
            sum += integratedFunction.calculate( x: rightBoundary - eps) / 2;
        else sum += integratedFunction.calculate(rightBoundary) / 2;
        return sum;

    }

}
```

4. Примеры и результаты работы программы на разных данных

```
Численное интегрирование методом трапеций.
Если на интервале интегрирования будет устранимый разрыв первого рода, то для его устранения будет использовано среднее от значений функции в двух соседних точках f(x-e), f(x+e)
Выберите тип уравнения, которое хотите решить
f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - введите 0
f(x) = ax^3 + b * e^{-x} = 0 - введите 1
f(x) = a * sin(x) + b * x + c - введите 2
f(x) = (ax^2 + b) / (cx + d) - введите 3
3
Введите коэффициенты уравнения через пробел в формате: a b c ...:
1 -25 1 -5
Введите левую границу интервала интегрирования:
4
Введите правую границу интервала интегрирования:
7
Введите погрешность вычислений от 0,00001 до 1:
0,00001
Значение интеграла: 31.5
Количество итераций: 2
Погрешность: 0.0
Все отлично!
```

```
Выберите тип уравнения, которое хотите решить
f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - введите 0
f(x) = ax^3 + b * e^{-x} = 0 - введите 1
f(x) = a * sin(x) + b * x + c - введите 2
f(x) = (ax^2 + b) / (cx + d) - введите 3
0
Введите коэффициенты уравнения через пробел в формате: a b c ...:
5 -2 3 -1
Введите левую границу интервала интегрирования:
4
Введите правую границу интервала интегрирования:
7
Введите погрешность вычислений от 0,00001 до 1:
0,00001
Значение интеграла: 2541.750002399061
Количество итераций: 12
Погрешность: 7.1972867772274185E-6
Все отлично!
```

```
Выберите тип уравнения, которое хотите решить
f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - введите 0
f(x) = ax^3 + b * e^{-x} = 0 - введите 1
f(x) = a * sin(x) + b * x + c - введите 2
f(x) = (ax^2 + b) / (cx + d) - введите 3
2
Введите коэффициенты уравнения через пробел в формате: a b c ...:
2 -3 5
Введите левую границу интервала интегрирования:
0
Введите правую границу интервала интегрирования:
4
Введите погрешность вычислений от 0,00001 до 1:
0,00001
Значение интеграла: -0.6927138096311505
Количество итераций: 9
Погрешность: 3.1540758934633928E-6
Все отлично!
```

5. Вывод

Метод трапеций, метод прямоугольников и метод парабол — это все численные методы интегрирования, которые позволяют оценить значение определенного интеграла численно, используя аппроксимацию кривой интегрируемой функции.

Методы основаны на аппроксимации разными функциями. Метод трапеций использует аппроксимацию линейной функцией, которая образуется соединением двух точек графика функции отрезком прямой.

Метод прямоугольников использует аппроксимацию прямыми, а метод Симпсона — параболами.

Метод трапеций прост в реализации и обеспечивает хорошую точность вычислений для гладких функций. Однако для негладких функций его точность может быть невысокой. Метод прямоугольников также достаточно прост в реализации, но его точность может быть невысокой. Метод Симпсона же обеспечивает высокую точность вычислений для гладких функций, но его реализация может быть более сложной по сравнению с методами трапеций и прямоугольников.

Оценки абсолютной погрешности методов:

1) Метод средних прямоугольников:

$|R| \leq \frac{(b-a) * h^2}{24} * |max(f''(x))|$, где $x \in [a, b]$

2) Метод трапеций:

$|R| \leq \frac{(b-a) * h^2}{12} * |max(f''(x))|$, где $x \in [a, b]$

3) Метод Симпсона:

$|R| \leq \frac{(b-a)\, h^4}{180} * |max(f''''(x))|$, где $x \in [a, b]$

Проанализировав абсолютные погрешности методов, можно прийти к выводу, что наиболее точным при равных промежутках интегрирования и шаге интегрирования, является метод Симпсона. Следом идет метод средних прямоугольников и наименее точным является метод трапеций. Однако это лишь оценки погрешностей, которые могут показать нам общие принципы интегрирования тем или иным методов. Однако на практике погрешности методов могут отличаться по точности между собой, в зависимости от интегрируемой функции. Также заметим, что при уменьшении шага интегрирования в n раз метод Симпсона становится точнее в n^4 раз, в отличие от других методов, которые увеличивают точность лишь в n^2 раз.

Проверим, как ведет себя программа в случае наличия разрыва 1 рода. Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$$

Данная функция имеет разрыв 1 рода в точке 5. Попробуем найти определенный интеграл на отрезке от 2 до 6:

$$\int_2^6 \frac{x^2-25}{x-5}dx = \int_2^6 (x + 5)dx = (x^2 + 5x)|^6_2 = 36$$

Значение интеграла, подсчитанного программой: 36.0. Таким образом, программа сумела устранить разрыв 1 рода и корректно посчитать интеграл.