# **TUGAS BESAR 2**

# IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

# Aplikasi Nilai Eigen dan Vektor Eigen dalam Kompresi Gambar







# Dipersiapkan oleh:

# Kelompok 8 (ALGEOGRAFI)

Nadia Mareta Putri Leiden 13520007

Taufan Fajarama Putrawansyah R 13520031

Raden Haryosatyo Wisjnunandono 13520070

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG 2021

# **DAFTAR ISI**

DAFTAR ISI BAB 1: DESKRIPSI MASALAH BAB 2: TEORI SINGKAT		1
		2
		2
2.1	Perkalian Matriks	2
2.2	Nilai Eigen	2
2.3	Vektor Eigen	3
2.4	Matriks SVD (Singular Value Decomposition)	3
BAB 3: IMPLEMENTASI		4
3.1	Front End	4
3.2	Back End	4
3.3	Algoritma SVD (Singular Value Decomposition)	7
BAB 4: EKSPERIMEN		16
BAB 5: PENUTUP		19
5.1	Kesimpulan	19
5.2	Saran	19
5.3	Refleksi	19
REFERENSI		20

### **BAB 1: DESKRIPSI MASALAH**

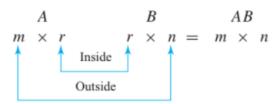
Gambar adalah suatu hal yang sangat dibutuhkan pada dunia modern ini. Kita seringkali berinteraksi dengan gambar baik untuk mendapatkan informasi maupun sebagai hiburan. Gambar digital banyak sekali dipertukarkan di dunia digital melalui file-file yang mengandung gambar tersebut. Seringkali dalam transmisi dan penyimpanan gambar ditemukan masalah karena ukuran file gambar digital yang cenderung besar.

Kompresi gambar merupakan suatu tipe kompresi data yang dilakukan pada gambar digital. Dengan kompresi gambar, suatu file gambar digital dapat dikurangi ukuran filenya dengan baik tanpa mempengaruhi kualitas gambar secara signifikan. Terdapat berbagai metode dan algoritma yang digunakan untuk kompresi gambar pada zaman modern ini. Salah satu algoritma yang dapat digunakan untuk kompresi gambar adalah algoritma SVD (Singular Value Decomposition). Pada kesempatan kali ini, kami mendapatkan tantangan untuk membuat website kompresi gambar sederhana dengan menggunakan algoritma SVD.

#### **BAB 2: TEORI SINGKAT**

#### 2.1 Perkalian Matriks

Definisi perkalian matriks mensyaratkan bahwa jumlah kolom matriks pertama A sama dengan jumlah baris matriks kedua B untuk membentuk produk AB. Jika kondisi ini tidak terpenuhi, produk tidak terdefinisi. Cara mudah untuk menentukan apakah produk dari dua matriks terdefinisi adalah dengan menuliskan ukuran matriks pertama dan di sebelah kanannya, tuliskan ukuran matriks kedua. Jika angka-angka di dalamnya sama, maka hasil kali terdefinisi dan angka-angka di luar memberikan ukuran produk.



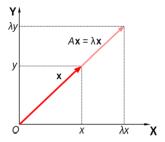
# 2.2 Nilai Eigen

Nilai Eigen adalah nilai karakteristik dari matriks yang berukuran n x n. Karena Eigen berasal dari bahasa jerman yang berarti "asli" atau "karakteristik". Penggunaan nilai Eigen ini akan sangat mempengaruhi pada penentuan Vektor Eigen. Adapun, persamaan nilai Eigen yang dapat dipakai adalah seperti di bawah ini.

$$Ax = \lambda x$$

A menyatakan vektor yang ditentukan, x menyatakan vektor eigen, dan  $\lambda$  menyatakan nilai eigen. Nilai – nilai eigen ini bisa bernilai 1 angka atau 2 angka tergantung dengan vektor

A. Operasi ini menyebabkan vektor Eigen menyusut ataupun memanjang bergantung dengan nilai eigen yang digunakan seperti pada ilustrasi di bawah.



#### 2.3 Vektor Eigen

Vektor Eigen menyatakan sebuah vektor kolom pada formula yang sudah diberikan pada poin 2.2, yang apabila vektor ini dikalikan dengan vektorn n x n akan menghasilkan vektor yang merupakan kelipatan dari vektor itu sendiri. Sehingga setelah mendapatkan nilai-nilai Eigen, dapat dicari Vektor Eigen melalui formula di bawah ini:

$$\lambda I - Ax = 0$$

Kemudian, untuk mencari terlebih dahulu nilai karakteristik nya dapat digunakan formula:

$$\det(\lambda I - Ax) = 0$$

#### 2.4 Matriks SVD (Singular Value Decomposition)

Matriks SVD adalah teorema dalam aljabar linier yang menyatakan bahwa sebuah matriks dua dimensi dapat dipecah menjadi hasil perkalian dari 3 sub-matriks yaitu

matriks ortogonal U, matriks diagonal S, dan transpose dari matriks ortogonal V. Dekomposisi matriks ini dapat dinyatakan sesuai persamaan berikut.

$$A_{m \times n} = U_{m \times m} \ S_{m \times n} \ V_{nxn}^T$$

Matriks U adalah matriks yang kolomnya terdiri dari vektor eigen ortonormal dari matriks AA<sup>T</sup>. Matriks ini menyimpan informasi yang penting terkait baris-baris matriks awal, denganinformasi terpenting disimpan di dalam kolom pertama. Matriks S adalah matriks diagonal yang berisi akar dari nilai eigen matriks U atau V yang terurut menurun. Matriks V adalah matriks yang kolomnya terdiri dari vektor eigen ortonormal dari matriks A<sup>T</sup>A. Matriks ini menyimpan informasi yang penting terkait kolom-kolom matriks awal, dengan informasi terpenting disimpan dalam baris pertama.



#### **BAB 3: IMPLEMENTASI**

#### 3.1 Front End

Tech stack: Flask

Menggunakan Flask dengan format penulisan yang terletak pada directory template. File yang digunakan ber-ekstensi html. Pada file ini terdiri dari tata letak tombol submit, input tingkat kompresi diatur dengan minimum 0 sampai 100. Untuk bisa menyatukan front-end dengan back-end kami menggunakan render\_template yang diimport pada back-end.

```
<title>Kompresi Foto Menggunakan SVD</title>
<link rel="stylesheet" href="https://maxcdn.bootstrapcdn.com/bootstrap/3.3.6/css/bootstrap.min.css" />
<script src="https://ajax.googleapis.com/ajax/libs/jquery/3.1.0/jquery.min.js"></script</pre>
cp><h1 align="center">Kompresi Foto Menggunakan SVD</h1>
<div class="container">
<div class="row">
    ch2>Pilih file yang ingin di-upload</h2>
<h5>Perhatian: file anda akan secara otomatis terkompresi, anda akan di-direct ke tab berisi foto yang sudah dikompresi.</h5>
         {% with messages = get_flashed_messages() %}
           {% if messages %}
             {% for message in messages %}
                \langle li \rangle \{\{ message \} \} \langle /li \rangle
             {% endfor %}
           {% endif %}
         {% endwith %}
     <form method="post" action="/" enctype="multipart/form-data">
                 <label for="const">Masukkan konstanta:</label>
                  <input type="number" id="const" name="cons" min="0" max = "100">
                  <input type="file" name="file" class="form-control" autocomplete="off" required>
```

#### 3.2 Back End

Tech stack: Flask

Pada bagian ini berisikan routing-routing yang dibutuhkan pada program, termasuk untuk mengolah input user, menyimpan file ke directory, dan mengatur url untuk download file. Pada bagian backend ini juga terdapat algoritma SVD yang akan digunakan dalam pengolahan foto, yang nantinya akan lebih jauh dibahas pada bagian selanjutnya. Untuk

bisa menggunakan fitur routing tersebut kami mengimport beberapa fitur bawaan dari flask untuk digunakan antara lain: render\_template, url\_for, redirect, send\_from\_directory, dna masih banyak lainnya.

Supaya program dapat berjalan user harus mengganti variabel UPLOAD\_FOLDER ke

path ../api/uploads pada directory masing-masing.

```
🕏 app.py > 😭 upload_image
 1 from flask import Flask, flash, request, redirect, url_for, render_template, send_from_directory
     import urllib.request
     import os
     from werkzeug.utils import secure filename
     from PIL import Image
     import numpy as np
     from numpy.linalg import norm
     from math import sqrt
     from random import normalvariate
     import time
     app = Flask(__name__)
     UPLOAD FOLDER = 'D:/algeodum/api/uploads'
     app.secret key = "secret key"
     app.config['UPLOAD_FOLDER'] = UPLOAD_FOLDER
     ALLOWED_EXTENSIONS = set(['png', 'jpg', 'jpeg'])
     def randomUnitVector(n):
         unnormalized = [normalvariate(0, 1) for _ in range(n)]
         theNorm = sqrt(sum(x * x for x in unnormalized))
         return [x / theNorm for x in unnormalized]
     def svd_1D(A, epsilon=1e-10):
         n, m = A.shape
         x = randomUnitVector(min(n,m))
         lastV = None
         currentV = x
         if n > m:
            B = np.dot(A.T, A)
         else:
```

```
def allowed_file(filename):
    return '.' in filename and filename.rsplit('.', 1)[1].lower() in ALLOWED EXTENSIONS
@app.route('/')
def home():
    return render_template('index.html')
@app.route('/', methods=['GET', 'POST'])
def upload_image():
    if 'file' not in request.files:
        flash('Tidak ada file.')
        return redirect(request.url)
    file = request.files['file']
    constant = request.form.get('cons', type=int)
    if file.filename == '':
        flash('Tidak ada foto yang Anda pilih.')
        return redirect(request.url)
    if constant == 0:
        flash('Masukkan angka yang benar, yaitu lebih dari 0.')
        return redirect(request.url)
    if file and allowed file(file.filename):
        # pemrosesan file dilakukan disini
        starttime = time.time()
        #file extension
        if(file.filename.rsplit('.', 1)[1].lower() == 'jpg'):
            file = imgcompres(file.filename, constant)
            filename = "result.jpg"
        elif(file.filename.rsplit('.', 1)[1].lower() == 'png'):
            file = imgcompres(file.filename, constant)
            filename = "result.png"
        else:
            file = imgcompres(file.filename, constant)
            filename = "result.jpeg"
```

```
195
              else:
                  file = imgcompres(file.filename, constant)
                  filename = "result.jpeg"
              end = time.time()
              flash(f"Image compression time is {end - starttime} s")
              file.save(os.path.join(app.config['UPLOAD_FOLDER'], filename))
              flash('Foto Anda telah berhasil di upload')
              return redirect(url for('download file', name=filename))
          else:
              flash('Anda hanya boleh mengupload jpg, jpeg atau png.')
              return redirect(request.url)
      @app.route('/uploads/<name>')
210
      def download file(name):
          return send from_directory(app.config["UPLOAD_FOLDER"], name)
211
212
213
      if __name__ == "__main__":
214
          app.run()
```

# 3.3 Algoritma SVD (Singular Value Decomposition)

Tech stack: Python

Pada bagian ini berisi tentang alogritma yang digunakan untuk mengkompresi gambar dengan menggunakan singlular value decomposition. Pada bagian ini dijelaskan tentang algoritma SVD yang dipakai yaitu randomized SVD dan Power Iteration. Algoritma Power Iteration memungkinkan kita untuk mendapatkan vektor eigen dan nilai eigen dari yang terbesar. Dari hasi power iteration itu kita dapat menyusun SVD. Randomized SVD digunakan untuk mempercepat algoritma dengan cara mengecilkan terlebih dahulu matrix yang ingin didekomposisi dengan power iteration.

Untuk kompresi gambar, awalnya gambar diubah kedala bentuk matriks. Karena gambar berwarna merupakan array dimensi, maka mula-mula gambar dipisah dulu menjadi 3 bagian (R, G, B). Masing-masing dari array 2 dimensi R, G, B tersebut kemudian didekomposisi dengan SVD yang terdapat pada paragraf sebelumnya. Setelah didekomposisi, ketiga array 2 dimensi tersebut disatukan kembali.

### I. Import Library yang ingin digunakan

```
from PIL import Image
import numpy as np
from numpy.linalg import norm
from math import sqrt
from random import normalvariate
import time
```

### II. Algoritma SVD dengan cara Power Iteration

```
def randomUnitVector(n):
    unnormalized = [normalvariate(0, 1) for _ in range(n)]
    theNorm = sqrt(sum(x * x for x in unnormalized))
    return [x / theNorm for x in unnormalized]
def svd_1D(A, epsilon=1e-10):
    x = randomUnitVector(min(n,m))
   lastV = None
    currentV = x
      B = np.dot(A.T, A)
    B = np.dot(A, A.T)
    iterations = 0
    while True:
       iterations += 1
       lastV = currentV
       currentV = np.dot(B, lastV)
       currentV = currentV / norm(currentV)
        if abs(np.dot(currentV, lastV)) > 1 - epsilon:
            return currentV
```

```
def svd(A, k=None, epsilon=1e-10):
   A = np.array(A, dtype=float)
   n, m = A.shape
   svdSoFar = []
   if k is None:
       k = min(n, m)
    for i in range(k):
       matrixFor1D = A.copy()
        for singularValue, u, v in svdSoFar[:i]:
           matrixFor1D -= singularValue * np.outer(u, v)
           v = svd_1D(matrixFor1D, epsilon=epsilon) # vektor singular selanjutnya
           u_unnormalized = np.dot(A, v)
           sigma = norm(u_unnormalized) # singular value selanjutnya
           u = u_unnormalized / sigma
           u = svd 1D(matrixFor1D, epsilon=epsilon) # vektor singular selanjutnya
           v_unnormalized = np.dot(A.T, u)
           sigma = norm(v_unnormalized) # singular value selanjutnya
           v = v unnormalized / sigma
        svdSoFar.append((sigma, u, v))
    singularValues, us, vs = [np.array(x) for x in zip(*svdSoFar)]
    return us.T, singularValues, vs
```

III. Algoritma Randomized SVD untuk mempercepat runtime program

```
def randomSVD(X,r,q,p):
    #FASE 1: dekomposisi matrix X dengan cara sampling kolom X dengan random oleh matrix P
    ny = X.shape[1]
    P = np.random.randn(ny,r+p)
    Z = X @ P
    for k in range(q):
        Z = X @ (X.T @ Z)

    Q, R = np.linalg.qr(Z,mode='reduced')
    #FASE 2: Menghitung SVD dari matrix Y
    Y = Q.T @ X
    UY, S, VT = svd(Y)
    U = Q @ UY
    return U, S, VT
```

IV. Main program untuk kompresi gambar

```
def imgcompres(x, k):
    img = np.asarray(Image.open(x))
    m = img.shape[0]
    n = img.shape[1]
    r = img[:,:,0]
    g = img[:,:,1]
    b = img[:,:,2]
    print("compressing...")
    starttime = time.time()
    Ur, Sr, VTr = randomSVD(r,k,q,p)
    Ug, Sg, VTg = randomSVD(g,k,q,p)
    Ub, Sb, VTb = randomSVD(b,k,q,p)
    k = round(((100-k)*m*n)/(100*(m+1+n)))
    rr = np.dot(Ur[:,:k],np.dot(np.diag(Sr[:k]), VTr[:k,:]))
    rg = np.dot(Ug[:,:k],np.dot(np.diag(Sg[:k]), VTg[:k,:]))
    rb = np.dot(Ub[:,:k],np.dot(np.diag(Sb[:k]), VTb[:k,:]))
    print("arranging...")
```

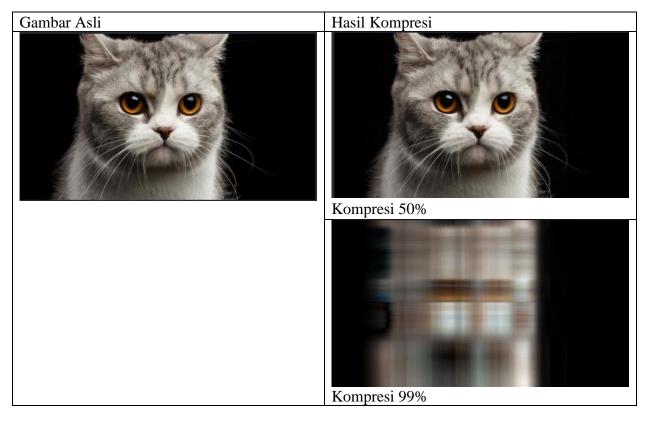
```
from PIL import Image
import numpy as np
from numpy.linalg import norm
from math import sqrt
from random import normalvariate
import time
app = Flask(__name__)
UPLOAD FOLDER = 'D:/algeodum/api/uploads'
app.secret_key = "secret key"
app.config['UPLOAD_FOLDER'] = UPLOAD_FOLDER
ALLOWED_EXTENSIONS = set(['png', 'jpg', 'jpeg'])
def randomUnitVector(n):
    unnormalized = [normalvariate(0, 1) for _ in range(n)]
    theNorm = sqrt(sum(x * x for x in unnormalized))
    return [x / theNorm for x in unnormalized]
def svd 1D(A, epsilon=1e-10):
    n, m = A.shape
    x = randomUnitVector(min(n,m))
    lastV = None
    currentV = x
    if n > m:
       B = np.dot(A.T, A)
    else:
        B = np.dot(A. A.T)
```

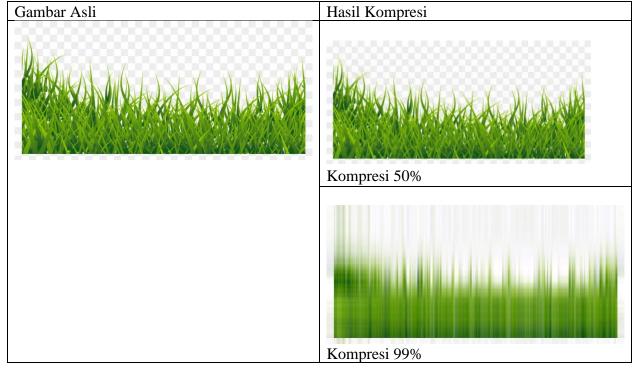
```
B = np.dot(A, A.T)
    iterations = 0
       iterations += 1
       lastV = currentV
       currentV = np.dot(B, lastV)
       currentV = currentV / norm(currentV)
        if abs(np.dot(currentV, lastV)) > 1 - epsilon:
           return currentV
def svd(A, k=None, epsilon=1e-10):
   A = np.array(A, dtype=float)
   n, m = A.shape
   svdSoFar = []
    k = min(n, m)
   for i in range(k):
       matrixFor1D = A.copy()
        for singularValue, u, v in svdSoFar[:i]:
           matrixFor1D -= singularValue * np.outer(u, v)
        if n > m:
           v = svd_1D(matrixFor1D, epsilon=epsilon) # vektor singular selanjutnya
           u_unnormalized = np.dot(A, v)
           sigma = norm(u_unnormalized) # singular value selanjutnya
           u = u_unnormalized / sigma
           u = svd_1D(matrixFor1D, epsilon=epsilon) # vektor singular selanjutnya
           v_unnormalized = np.dot(A.T, u)
           sigma = norm(v_unnormalized) # singular value selanjutnya
```

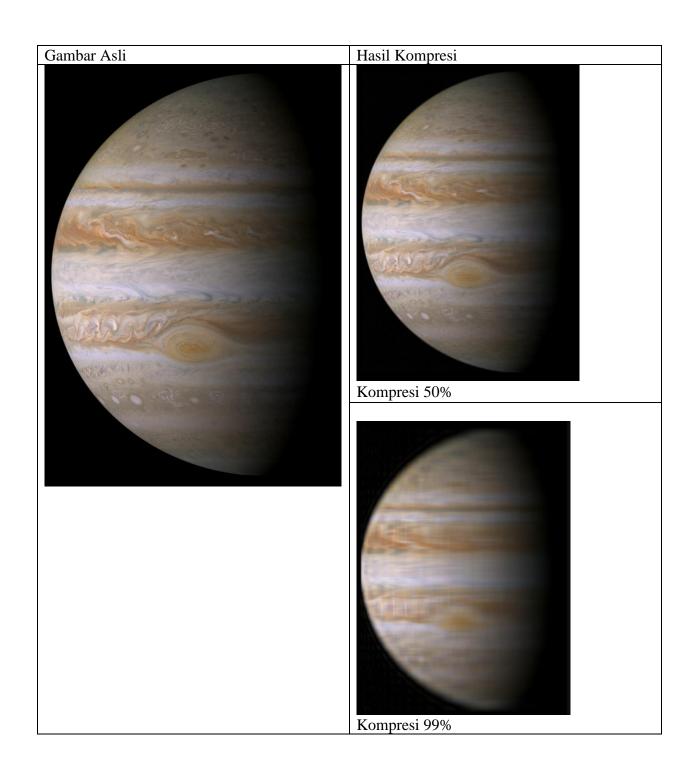
```
sigma = norm(v_unnormalized) # singular value selanjutnya
            v = v_unnormalized / sigma
        svdSoFar.append((sigma, u, v))
    singularValues, us, vs = [np.array(x) for x in zip(*svdSoFar)]
   return us.T, singularValues, vs
def randomSVD(X,r,q,p):
   ny = X.shape[1]
   P = np.random.randn(ny,r+p)
   Z = X @ P
   for k in range(q):
       Z = X @ (X.T @ Z)
   Q, R = np.linalg.qr(Z,mode='reduced')
   Y = Q.T @ X
   UY, S, VT = svd(Y)
   U = Q @ UY
def imgcompres(x, k):
   img = np.asarray(Image.open(x))
   m = img.shape[0]
   n = img.shape[1]
   r = img[:,:,0]
   g = img[:,:,1]
   b = img[:,:,2]
   print("compressing...")
    starttime = time.time()
```

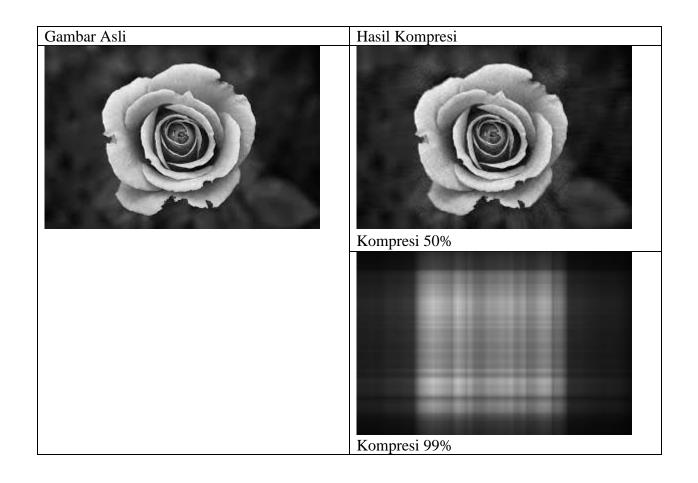
```
p = 5
        Ur, Sr, VTr = randomSVD(r,k,q,p)
        Ug, Sg, VTg = randomSVD(g,k,q,p)
        Ub, Sb, VTb = randomSVD(b,k,q,p)
        k = round(((100-k)*m*n)/(100*(m+1+n)))
        rr = np.dot(Ur[:,:k],np.dot(np.diag(Sr[:k]), VTr[:k,:]))
        rg = np.dot(Ug[:,:k],np.dot(np.diag(Sg[:k]), VTg[:k,:]))
        rb = np.dot(Ub[:,:k],np.dot(np.diag(Sb[:k]), VTb[:k,:]))
        print("arranging...")
        rimg = np.zeros(img.shape)
        rimg[:,:,0] = rr
        rimg[:,:,1] = rg
        rimg[:,:,2] = rb
        for ind1, row in enumerate(rimg):
           for ind2, col in enumerate(row):
               for ind3, value in enumerate(col):
                  if value < 0:
                     rimg[ind1,ind2,ind3] = abs(value)
                     rimg[ind1,ind2,ind3] = 255
147
                                   rimg[ind1,ind2,ind3] = 255
148
              # konversi gambar & save file
149
              compressed image = rimg.astype(np.uint8)
150
              compressed image = Image.fromarray(compressed image)
151
152
153
154
              end = time.time()
155
              # total time taken
156
              print(f"Runtime of the program is {end - starttime}")
157
158
159
              return compressed image
```

**BAB 4: EKSPERIMEN** 









#### BAB 5: PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Salah satu penerapan Singular Value Decomposition dalam kehidupan nyata adalah kompresi gambar. Singular Value Decomposition mendekomposisi matrix m x n menjadi 3 matrix yakni, matrix ortoghonal m x m, matrix singular m x n, dan matrix transpose orthogonal n x n. Matrix-marix orthognal terdiri atas vektor-verktor eigen matrix yang tersusun dari yang memiliki nilai eigen terbesar hingga terkecil. Untuk mencari vektor eigen dan nilai eigen dapat digunakan algoritma power iteration. Karena power iteration merupakan algoritma yang mencari nilai eigen dan vektor eigen terbesar terlebih dahulu, maka untuk membuat matrix orthogonal yang diperlukan dalam SVD kita dapat menyusun hasil dari Power Iteration.

#### 5.2 Saran

Tim penulis memeliki beberapa saran mengenai pengembangan program ini, antara lain:

- 1. Optimalisasi algoritma yang digunakan. Algoritma SVD utama yang digunakan dalam program ini, Power Iteration, masih belum secepat algoritma SVD standar bawaan python (Golub-Kahan).
- 2. Memperbaiki tampilan antarmuka program sehingga lebih mudah digunakan khalayak umum.
- 3. Program dapat dipublikasikan ke khalayak umum supaya dapat dirasakan kebermanfaaatannya dan mendorong terjadinya kolaborasi yang membangun dalam pengembangan program kedepannya.

#### 5.3 Refleksi

Untuk kedepannya masih ada beberapa hal yang dapat kami perbaiki, termasuk kecepatan algoritma, dan juga tampilan website tugas kami. Kemudian kami juga berharap untuk dapat memperbaiki tampilan website sehingga lebih baik dan dapat di-deploy secara online menggunakan tools-tools tertentu.

Kami juga ingin sehingga *image* yang dicompress dapat diambil dari berbagai macam directory tidak hanya terbatas pada directory dimana algoritma backend dan SVD tersebut disimpan.

## **REFERENSI**

Howard Anton, Elementary Linear Algebra, 10th edition, John Wiley and Sons, 2010

Hogben, Leslie, ed. Handbook of linear algebra. CRC press, 2006.

http://www.math.iit.edu/~fass/477577\_Chapter\_12.pdf