



Кафедра
ТРАНСПОРТНЫЕ МАШИНЫ



Дьячков Ю.А., Торопцев И.П., Черемшанов М.А.



Пензенский
государственный
университет

Моделирование технических систем

Учебное
пособие

ПЕНЗА
«ТРАНСПОРТНЫЕ МАШИНЫ»



Кафедра

ТРАНСПОРТНЫЕ МАШИНЫ



Дьячков Ю.А., Торопцев И.П., Черемшанов М.А.

Моделирование технических систем



Пензенский
государственный
университет

Издание предназначено для студентов, изучающих дисциплины, связанные с моделированием и автоматизированным проектированием систем автомобилестроения. Может быть полезным для аспирантов и преподавателей соответствующего профиля.

Изложение содержания соответствует последовательности проектных разработок изделий автомобилестроения, теоретические вопросы пояснены примерами их практической реализации из рассматриваемой предметной области.

Материал учебного пособия соответствует программе курса
«Моделирование технических систем» для специальности
190201.65 «Автомобиле- и тракторостроение», и курса
«Моделирование систем» специализации
«Автомобили и тракторы» направления 190109.65
«Наземные транспортно-технологические средства».

ПЕНЗА

«ТРАНСПОРТНЫЕ МАШИНЫ»

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	8
Раздел I. МОДЕЛИРОВАНИЕ. ИНСТРУМЕНТЫ ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ	19
Тема 1. СИСТЕМНАЯ ГАРАНТИЯ РЕЗУЛЬТАТА МОДЕЛИРОВАНИЯ	20
1.1 Неопределенность построения моделей	20
1.2 О методе гарантированного результата	23
Тема 2. ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА	28
2.1 Основные категории теории систем	28
2.2 Полиструктурность и свойства объектов	333
2.3 Критерии целостности системы	35
2.4 Схемы изменения состояния системы	37
Тема 3. СИСТЕМНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ	42
3.1 Среда обитания объекта, элементы среды и их характеристика	42
3.2 Структура действия	48
3.3 Алгоритм анализа и построения системы	553
3.4 Принципы построения информационных структур	56
Раздел II. ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	663
Тема 4. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ БАЗА ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ	64
4.1 Размерности величин	64
4.2 Методы обработки размерностей	67
Тема 5. ПОДОБИЕ ЯВЛЕНИЙ. ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ	76
5.1 Условия подобия явлений	76
5.2 Теоремы подобия	78
5.3 Способы определения критериев подобия	80
5.4 Автоматизированное формирование условий моделирования	83
Тема 6. ОШИБКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ	85
6.1 Природа ошибок моделирования	85
6.2 Оценка ошибки масштабирования	86
6.3 Методика моделирования	89

Раздел III. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	95
Тема 7. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА. ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	96
7.1 Вводные положения	96
7.2 Кодирование переменных	99
7.3 Критерии оптимальности планов эксперимента	10103
7.4 Полный факторный эксперимент 2^k	104
7.5 Пример построения факторной модели	108
Тема 8. ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА.....	111
8.1 Свойства оценок и критерии точности.....	111
8.2 Оценка адекватности модели	117
8.3 Пример статистической обработки эксперимента	120
Тема 9. ПОЛЕЗНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ	123
9.1 Аппроксимация области оптимальных значений	123
9.2 Модели «серого ящика»	128
Раздел IV. ПРОЦЕДУРНЫЕ МОДЕЛИ	135
Тема 10. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ	136
10.1 Типы оптимизационных задач	136
10.2 Модели параметрической оптимизации.....	138
Тема 11. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПРОЕКТА	148
11.1 Общие положения.....	148
11.2 Оптимальность по Парето	151
11.3 Функции желательности	154
Тема 12. МНОГОМЕРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ	157
12.1 Общие положения.....	157
12.2 Алгоритм автоматической классификации.....	160
12.3 Пример реализации алгоритма	169
Раздел V. ТРАНСФОРМИРУЮЩИЕ МОДЕЛИ.....	175
Тема 13. ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА ТРАНСФОРМАЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ	176
13.1 Общие положения.....	176
13.2 Ограничения трансформации описательных моделей	178
13.3 Ошибки численного моделирования	179
Тема 14. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	184
14.1 Основные положения	184
14.2 Одношаговые численные методы	186

14.3 Многошаговые численные методы	189
14.4 Практическая реализация численных методов	192
14.5 Жесткие задачи	194
14.6 Краевые задачи	197
Раздел VI. КОМПЬЮТЕРНОЕ	
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ.....	201
Тема 15. СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО	
МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	202
15.1 Обзор компьютерных систем моделирования	202
15.2 Технология визуального конструирования	203
15.3 Характеристика систем моделирования	211
Тема 16. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС <i>EULER</i>	214
16.1 Назначение и общая характеристика комплекса	214
16.2 Информационное обеспечение комплекса	217
16.3 Режимы работы, элементы интерфейса комплекса	219
16.4 Технология моделирования	222
Тема 17. <i>SOLIDWORKS & COSMOS</i>	227
17.1 Система твердотельного моделирования <i>SolidWorks</i>	227
17.2 Комплекс инженерного моделирования <i>COSMOS</i> .	
<i>COSMOSWorks</i>	233
17.3 <i>COSMOSMotion</i>	237
17.4 <i>COSMOSFloWorks</i>	238

ПРЕДИСЛОВИЕ

Находясь в реальном мире, человек формирует представление о нем, используя свои физиологические возможности и возможности создаваемых им дополнительных орудий труда. В силу объективной ограниченности этих ресурсов формируемые представления являются приближенными. Такие приближения называют **моделями** окружающей действительности (фр. *modele* – образец, прообраз), а процесс построения моделей и их исследования – **моделированием**. Можно сказать, что всю свою жизнь человек занимается моделированием и себя, и своего окружения.

В практике инженерной деятельности используется огромное число инструментов и технологий моделирования, но все они имеют общий алгоритм реализации:

- уяснение существа исследуемого процесса;
- адекватное его описание в зависимости от целей моделирования;
- определение инструментов и технологий моделирования;
- определение разумных форм представления результатов;
- интерпретация результатов;
- корректировка моделей (при необходимости).

Очередность изложения материала в данном издании определена последовательностью построения и преобразования моделей, начиная от системного представления проблемы и заканчивая ее исследованием с помощью современных вычислительных средств.

Учебное пособие состоит из шести разделов.

Первый раздел «Моделирование. Инструменты общего назначения» посвящен терминологии и основным принципам системного исследования задач инженерной практики.

Во втором разделе «Основы физического моделирования» рассматриваются вопросы построения физических моделей на основе теории подобия и моделирования, способы сокращения размерности решаемой задачи, перенесения данных с модели на натурный образец изделия.

В третьем разделе «Статистическое моделирование» освещаются вопросы организации, проведения и обработки результатов эксперимента. Рассмотрены модели «черного» и «серого»

ящика. Даны алгоритмы автоматического построения планов эксперимента, построения эмпирических моделей процессов и оценки их адекватности.

В четвертом разделе «Процедурные модели» рассмотрены вопросы оптимизации технических решений в задачах различных классов.

Пятый раздел «Трансформирующие модели» посвящен вопросам преобразования моделей процессов в конкретные модели численной реализации.

В шестом разделе «Компьютерное моделирование систем» изложен материал о системах компьютерного моделирования. Более подробно рассмотрены система многокомпонентного моделирования технических систем *EULER* и среда твердотельного моделирования *SolidWorks* в сочетании с приложением *CosmosWorks*.

Материал учебного пособия соответствует программе курса «Моделирование технических систем» для специальности 190201.65 «Автомобиле- и тракторостроение», и курса «Моделирование систем» специализации «Автомобили и тракторы» направления 190109.65 «Наземные транспортно-технологические средства».

ВВЕДЕНИЕ

Среда моделирования, ее состав и структура. Понятия модели и моделирования. Необходимые и достаточные условия моделирования. Проблематика теории моделирования. Общие сведения теории моделирования. Предмет и содержание курса, цели обучения.

Моделирование как способ познания

Находясь в окружающей действительности (ОД) и являясь ее частью, человек (Ч) одновременно участвует в двух процессах: приспособляется к ней и преобразует ее исходя из потребностей сохранения жизни – адаптируется в среде своего обитания (рис. 1).

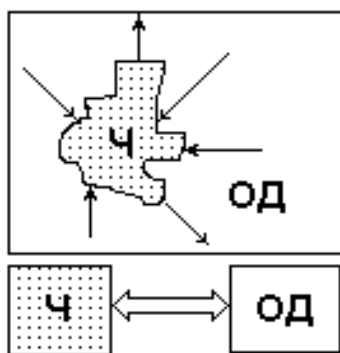


Рис. 1 Человек в своем окружении

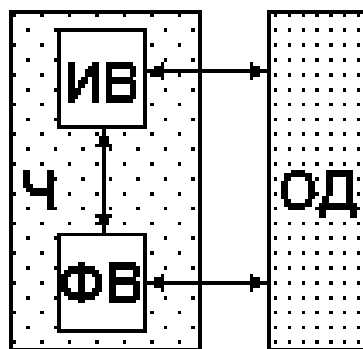


Рис. 2 Возможности человека

Реализация указанных процессов осуществляется на основе присущих человеку интеллектуальных (ИВ) и физиологических (ФВ) возможностей. В результате такого взаимодействия человек добывает информацию об ОД, которая, будучи данной первоначально в ощущениях, трансформируется в представления и далее в определенную совокупность знаний (рис. 2). При этом проверка удовлетворительности взаимодействия с ОД как на интеллектуальном, так и на физиологическом уровне представляет собой оценку адекватности полученных знаний и совершенных действий – адекватности построения (АП). Совокупность сведений об ОД представляет собой базу знаний (БЗ). Знания проверяются на их соответ-

ствие реально существующим явлениям природы, а действия – на соответствие полученных результатов желаемым (рис. 3).

Знания не могут быть полными, но в большинстве случаев позволяют судить об основных чертах ОД. Такое **приближение ОД** **обычно называют ее моделью** (фр. *modele* – образец, прообраз) – МОД (рис. 4).

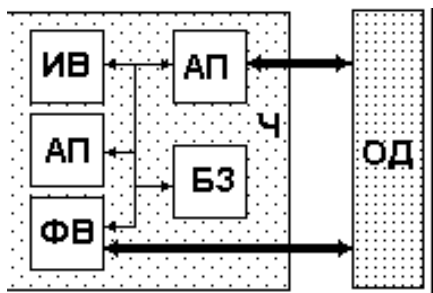


Рис. 3 Оценка адекватности знания

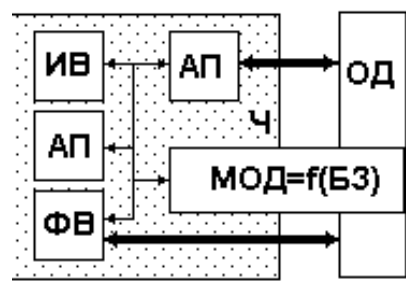


Рис. 4 Модель ОД

Если приближенные знания не обеспечивают нормального существования, то человек предпринимает меры к их пополнению. С этой целью он создает дополнительные средства (ДС), позволяющие наряду с присущими ему возможностями осуществлять познание ОД с целью дальнейшего приспособления к условиям обитания (рис. 5). Изыскивает их человек в ОД и строит, сознательно или нет, по своему образу и подобию. Поэтому в ДС обязательно присутствуют те же четыре основных элемента: ИВДС, ФВДС, АПДС, БЗДС (рис. 6). Часть ОД (ЧОД), являющаяся предметом исследования человека, называется предметной областью (ПО).

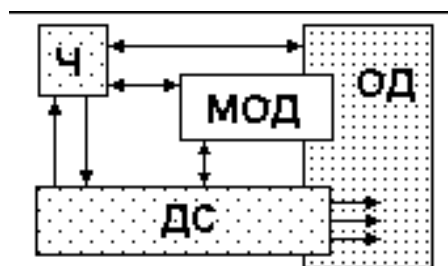


Рис. 5 Дополнительные средства воздействия

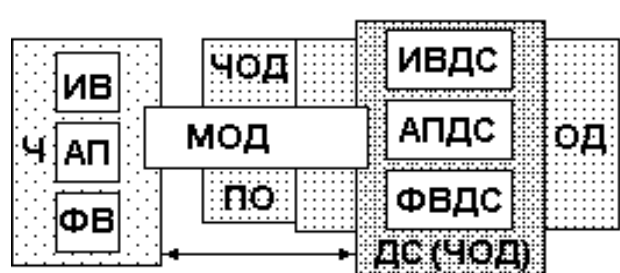


Рис. 6 Структура дополнительных средств

На практике интеллектуальные возможности и аппарат оценки адекватности построения в ДС представлены инструментальными средствами (ИС) познания – совокупностью методов и технологий исследования, используемых в конкретных предметных областях знания, а также в их моделях (МИС). Носителями физиологических возможностей ОД являются аппаратные средства (АС) – конкретные материальные объекты (МО), создаваемые человеком для расширения своего физического потенциала (рис. 7).

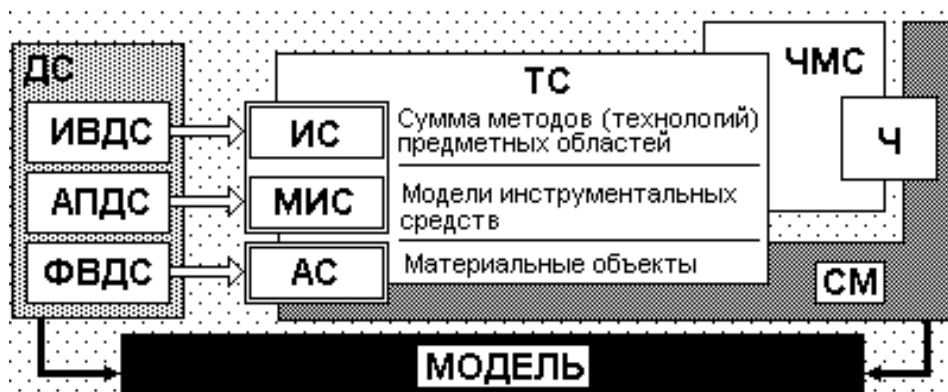


Рис. 7 Элементы среды моделирования:
ТС – техническая система, ЧМС – человекомашинные системы

Таким образом, человек и построенные им дополнительные средства являются конкретным инструментом познания – построения модели и преобразования окружающей действительности. **Процесс исследования ОД на основе ее модели принято называть моделированием. Иногда этим термином определяют и сам процесс построения модели явления.**

Сложность и многогранность действительности предполагает возможность построения нескольких моделей одного и того же явления, описывающих его с разных сторон и с различной степенью подробности. Так, для исследования парашютной системы достаточно применение мешка соответствующих размеров и массы; для игры в дочки-матери модель должна иметь определенное внешнее сходство с человеком; для исследования деятельности пилота в реальном режиме времени требуется использование значительно более сложной и разносторонней информации и т.д. **Совокупность взаимодополняющих моделей принято называть ансамблем моделей.** Различные исходные требования к модели явления предполагают использование различных наборов дополнительных средств.

Совокупность исследуемого и сопутствующих ему явлений, возможностей человека и множества дополнительных средств объединяется в понятие среды моделирования (СМ). Это потенциал познавательной деятельности человека. Наличие среды моделирования является необходимым условием для построения моделей ОД (рис. 7).

Непосредственная возможность построения модели обеспечивается сведением в систему потенциально результативных элементов среды моделирования – приданием их совокупности свойства, не присущего каждому из элементов в отдельности, – свойства целостности. Критериями целостности системы являются симметрия,

ритм, гармония и стиль. При этом системообразующим фактором является желаемый результат, определяемый потребностью в его достижении. В простейшем случае результат может совпадать с целью. В общем случае цель объединяет несколько результатов. Таким образом, **наличие потребности и множества удовлетворяющих ее желаемых результатов, подчиненных достижению одной цели, является достаточным условием построения модели.**

Схема деятельности человека по исследованию ОД показана на рис. 8. Из него следует, что проблематика теории моделирования включает широкий круг вопросов, уходящих корнями в различные предметные области знания, ключевыми из которых являются:

- **теория систем**, определяющая общие процессы и закономерности формирования, развития и взаимодействия объектов природы;
- **теория познания**, определяющая процессы приобретения, преобразования, хранения и использования знаний человеком;
- **естествознание**, исследующее процессы существования ОД, ее развития и преобразования;
- **техносфера**, представляющая собой область человеческой деятельности по построению и использованию искусственных технических объектов ОД – технических систем.

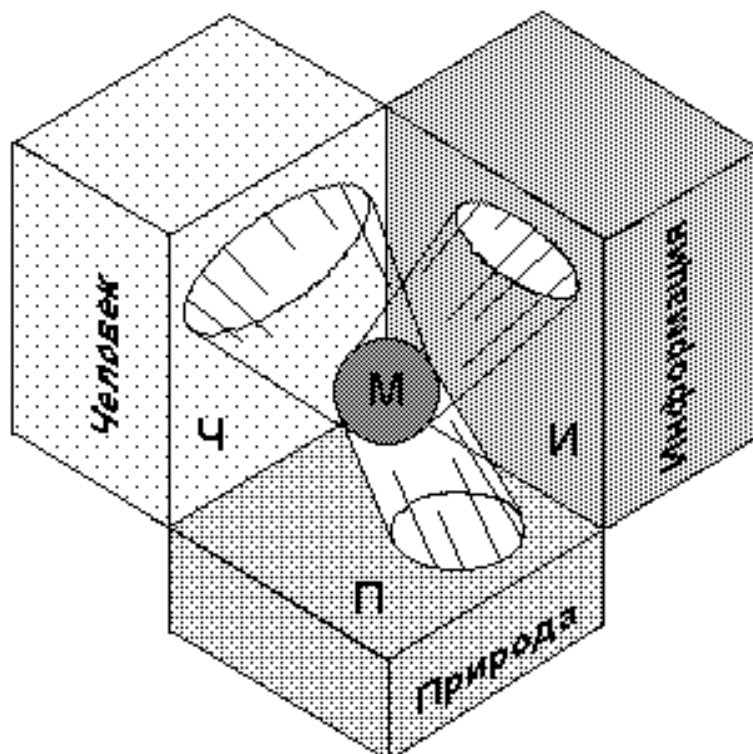


Рис. 8 Познавательная система «человек–природа–информация–метод»

Естественно считать, что рассмотрение столь обширного поля знаний не может являться предметом какого-либо одного учебного

курса. Поэтому *основное содержание дисциплины «Моделирование технических систем» определяется только теми общими вопросами, решение которых обеспечивает возможность построения и исследования объектов техники.* Конкретное построение реальных систем наряду с этим предполагает необходимость использования специфических знаний тех предметных областей, в рамках которых проводится моделирование.

Таковыми общими вопросами, относящимися к каждому из элементов среды моделирования и обеспечивающими практическую возможность построения и исследования моделей, являются следующие:

1. Человек как элемент ОД (рис. 9):

- высшие психические функции как природные инструменты познавательной деятельности (восприятие, внимание, память, мышление, интуиция);
- физиология психических процессов как биологическая основа их существования и проявления (элементы теории функциональных систем), основной элемент и аналог построения человеко-машинных систем;
- эвристические приемы развития и активизации познавательных возможностей человека.

2. Моделируемая ОД:

- закономерности существования, изменения физического состояния и свойств элементов ОД, рассматриваемые предметными областями естествознания (физика, химия, биология и т.д.);
- закономерности строения и развития объектов техники.

3. Инструментальные средства:

- способы, методы и технологии описания, построения и исследования моделей элементов ОД (математика, анализ размерностей, теория подобия, теория алгоритмов, языки и среды программирования, теория оптимизации, теория принятия решения, теория управления и т.д.).

4. Аппаратные средства:

- вычислительная техника, приборы и средства измерения.

Таким образом, *предметом и основным содержанием курса «Моделирование технических систем» является совокупность методов построения, анализа моделей и проведения на их основе моделирования процессов и явлений ОД – моделирующая среда и инструментальная часть среды моделирования.*

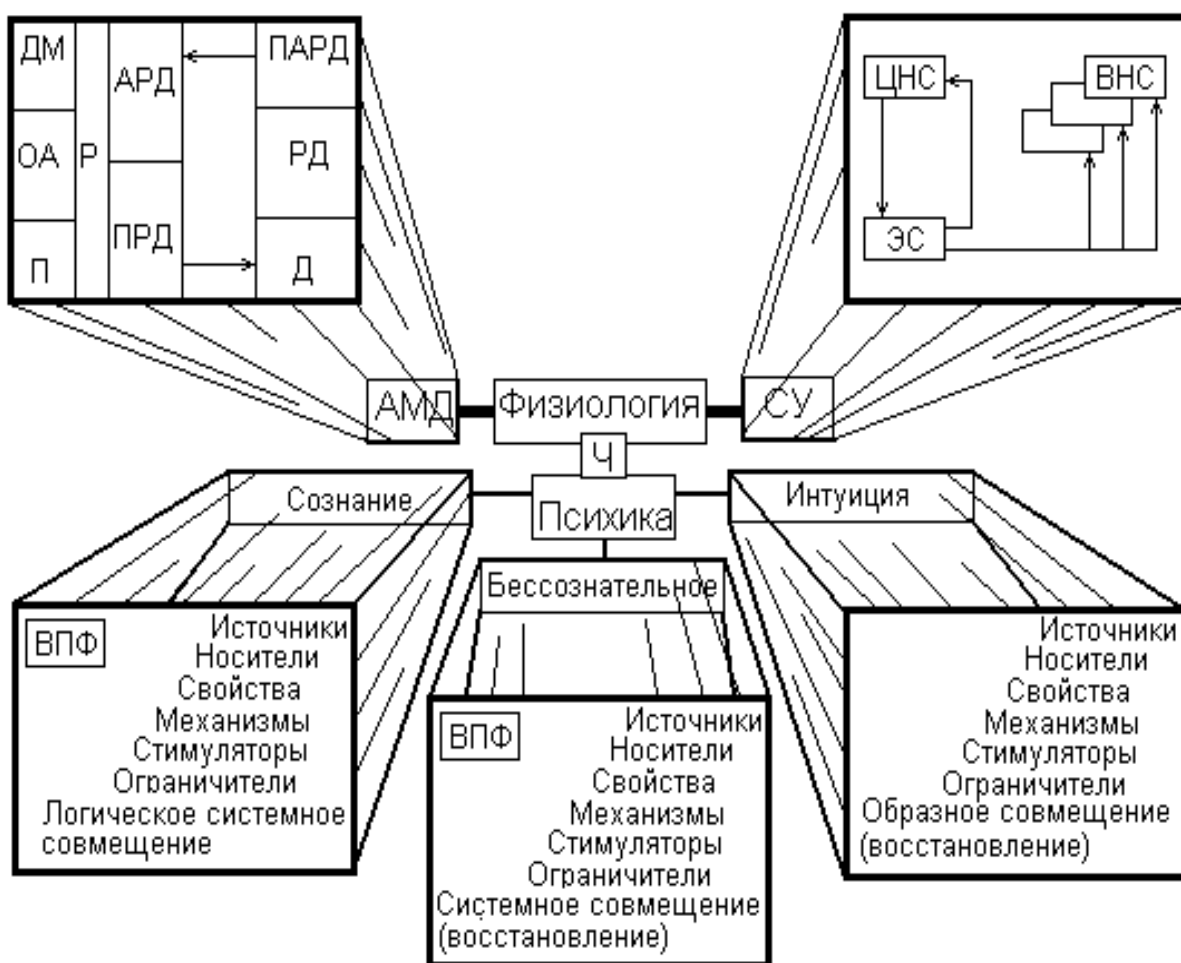


Рис. 9 Познавательные возможности человека: ДМ – доминирующая мотивация; ОА – обстановочная афференция; П – память; Р – решение; АРД – акцептор результата действия; ПРД – программа реализации действия; Д – действие; РД – результат действия; ПАРД – параметры результата действия; ЦНС – центральная нервная система; ЭС – эндокринная система; ВНС – вегетативные нервные системы; АМД – аппарат моделирования действий; Ч – человек; СУ – система управления; ВПФ – высшие психические функции

Моделирующая среда является совокупностью моделей различного назначения, которые целесообразно классифицировать по основным признакам, характеризующим познавательный процесс:

- предметная ориентация;
- вид деятельности;
- соответствие свойствам ОД;
- однозначность причинно-следственных связей описываемых параметров и процессов.

По признаку предметной ориентации можно выделить модели в рамках одной предметной области и модели в рамках пересекающихся предметных областей. Процесс построения моделей реальной действительности представляет собою итеративную процедуру

формирования и системного совмещения совокупности моделей частных предметных областей в интегрированную модель пересекающихся предметных областей.

По виду деятельности можно выделить *модели анализа процесса, синтеза объектов, прогнозирования*. Обязательным элементом указанных типов моделей являются *модели обучения*, которые, кроме того, в педагогической практике имеют самостоятельное значение. *Модели анализа* используются для исследования режимов функционирования технических систем (ТС), границ их реализуемости, физической устойчивости и соответствия совокупности заданных требований. *Модели синтеза* призваны обеспечивать поиск и формирование структуры и объектного наполнения ТС, формирование необходимого набора числовых значений параметров и характеристик ее элементов и процессов. По своему содержанию модели синтеза включают модели анализа и поисковые модели различного уровня информационной определенности – от эвристических приемов построения решений до мощных комплексов математических процедур оптимизации свойств ТС. *Модели прогнозирования* используются для оценки позитивных резервов и направлений их реализации в рамках модернизации ТС, оценки поведения системы за рамками заданных режимов функционирования, определения способов противодействия развитию негативных явлений в процессе эксплуатации ТС. Содержательно модели прогнозирования являются существенным расширением моделей синтеза. Если последние призваны сузить первоначально неопределенную область существования ТС до границ ее практической реализуемости и целесообразности построения, то модели прогнозирования обеспечивают анализ ТС как в рамках этих границ (исследование резервов), так и за этими рамками. В последнем случае они, кроме того, используются для синтеза своего рода противовоядя против разрушения системы и среды ее обитания.

По признаку соответствия свойств модели свойствам ОД можно выделить *натурные модели, физически подобные, функциональные аналоги и математические аналоги*.

Натурные модели по своим свойствам полностью соответствуют моделируемой системе. На них отрабатываются все рассмотренные выше виды деятельности. Натурные модели позволяют получить наиболее достоверные данные моделирования. Их использование ограничено экономическими и временными ресурсами, биологическими и экологическими последствиями моделирования.

Физически подобные модели по ряду основных свойств соответствуют моделируемой ОД либо полностью (физические свойства материалов, пространственная, временная и пространственно-временная топология параметров и характеристик процессов, физическая природа моделируемых процессов), либо в определенном масштабе.

В практике моделирования используются комбинированные масштабные модели. *Функциональные аналоги* имеют те же возможности моделирования ТС, что и физические модели. От последних они отличаются использованием иных физических принципов по сравнению с моделируемыми процессами и явлениями. При этом описание как реального, так и модельного процессов осуществляется на определенном уровне обобщения одними и теми же математическими зависимостями.

Наиболее распространенными в настоящее время моделями являются *математические аналоги*. Этому способствуют их относительная материальная и временная экономичность, полная безопасность использования, высокий уровень развития теоретических и практических вопросов математики и вычислительной техники. Такое положение дел обеспечивает возможность оперативного создания интегрированных моделей больших размерностей и их использование в широких диапазонах варьирования определяющих параметров и характеристик процессов.

По реализуемым с их помощью функциям модели-аналоги делятся на образные, описательные, трансформирующие, процедурные, оценочные, интерфейсные.

Образные модели зрительно воспроизводят характерные черты моделируемых объектов и процессов (структурные формулы химии, физики, биологии; рисунки, чертежи, топографические карты, фотографии, кинокадры и т.д.).

Описательные модели обеспечивают фиксацию соотношений параметров и характеристик системы в знаках математики (математические записи основных законов сохранения, уравнений движения системы и т.д.).

Трансформирующие модели используют с целью приведения описательных моделей к состоянию, наиболее пригодному для их численной реализации (дифференциальные уравнения заменяют алгебраическими на основе конечно-разностных схем представления производных, раскладывают по фундаментальным функциям и т.д.; сложные модели-аналоги заменяют простыми математиче-

ски эквивалентными, например в виде полиномов различной степени и т.д.).

Процедурные модели являются моделями управления процессами исследования описательных и трансформирующих моделей (схемы решения задач, алгоритмы поиска решений жесткой, предписывающей и вариативной рекомендующей природы).

Оценочные модели используют для исследования адекватности построения моделей различных типов отображаемой ОД, точности вычислений и предсказания результатов. Их построение, как правило, осуществляется на основе возможностей математической статистики.

Интерфейсные модели обеспечивают автоматизацию управления диалогом пользователя с вычислительной системой, а также визуализацию результатов исследования. Следует отметить, что в чистом виде выделенные математические модели-аналоги используются крайне редко по причине ограниченности инструментальных возможностей. Практически любой серьезной математической модели, реализуемой с помощью вычислительной техники, присущи черты большинства из перечисленных моделей.

Кроме того, все математические аналоги **по однозначности причинно-следственных связей описываемых параметров и процессов, физической сути моделируемой ОД и типу используемых данных** могут быть *детерминированными* (представления ОД, при которых для заданной совокупности входных значений на выходе может быть получен единственный результат) и *вероятностными (или стохастическими)*, которые строятся на основе операций со случайными числами и процессами, могут задаваться распределением случайных величин, их функциями и т.п.

Общая схема классификации моделей показана на рис. 10. Решение практических задач может потребовать использования других классифицирующих признаков (степень реальности, физический носитель и т.д.).

Построение моделей подчинено определенным правилам, имеющим большую специфику и широкие вариации в рамках различных предметных областей. Но независимо от этого обнаруживаемые при оценке моделей **типичные недостатки** имеют высокую стабильность:

- включение в модель несущественных для решаемой задачи переменных;
- невключение в модель существенных переменных;

– недостаточная точность предсказания параметров и характеристик процессов;

– недостаточная чувствительность модели к изменению переменных – неправильное определение функциональной зависимости критерия качества процесса от его переменных.

МОДЕЛИ	Предметная ориентация	Одна предметная область	
		Пересекающиеся предметные области	
	Вид деятельности	Анализ процесса	Синтез объектов
		Прогнозирование	Обучение
	Соответствие свойств модели свойствам ОД	Натурные	Физически подобные
		Функциональные аналоги	
		Математические аналоги	
		Образные	
		Описательные	
		Трансформирующие	
		Процедурные	
		Оценочные	
		Интерфейсные	
	Однозначность связей параметров и процессов	Детерминированные	
		Стохастические	

Рис. 10 Вариант классификации моделей

Какой-либо общей теории, обеспечивающей априори устранение указанных недостатков моделирования, не существует. Их исключение достигается за счет настройки (обучением, калибровкой) моделей по известным экспериментальным данным, использования нескольких моделей различных классов, а также опыта и искусства строящего модель и ее пользователя. Определенными резервами в этом плане обладают методы математической статистики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эшби, У. Р. Введение в кибернетику / У. Р. Эшби. – М. : Иностранная литература, 1959. – 432 с.
2. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1981. – 448 с.
3. Баловнев, В. И. Моделирование процессов взаимодействия со средой рабочих органов дорожно-строительных машин / В. И. Баловнев. – М. : Высшая школа, 1981. – 335 с.

4. Шрейдер, Ю. А. Системы и модели / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.
5. Шарп, Дж. Гидравлическое моделирование / Дж. Шарп. – М. : Мир, 1984. – 280 с.
6. Нефедов, А. Ф. Планирование эксперимента и моделирование при исследовании эксплуатационных свойств автомобилей / А. Ф. Нефедов, Л. Н. Высочин. – Львов : Вища школа, 1976. – 160 с.
7. Миленко, Н. П. Моделирование испытаний ЖРД / Н. П. Миленко, А. В. Сердюк. – М. : Машиностроение, 1975. – 184 с.
8. Моисеев, Н. Н. Математика ставит эксперимент / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1979. – 224 с.

Раздел I

МОДЕЛИРОВАНИЕ. ИНСТРУМЕНТЫ ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ

Тема 1

СИСТЕМНАЯ ГАРАНТИЯ РЕЗУЛЬТАТА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Информационная неопределенность построения моделей. Основные категории теории систем. Полиструктурность и свойства объектов. Критерии целостности.

1.1 Неопределенность построения моделей

Одной из проблем построения моделей искусственных объектов является разработка поисковых методов, обеспечивающих гарантированное получение результата. На первый взгляд, трудно серьезно претендовать на нахождение того, что заранее в достаточной степени не определено. Вместе с тем вся история человеческой деятельности свидетельствует о возможности нахождения решения проблемы, если в этом имеется потребность. При этом заранее неизвестное решение проблемы обнаруживается в результате его поиска. **Все это позволяет предположить наличие ситуации, когда отсутствует не сам метод поиска как таковой, а лишь осознание его существования.**

Действительно, создание человеком искусственных объектов связано с объективным наличием нескольких уровней информационной неопределенности.

К первому уровню можно отнести факторы (поля неопределенности), которые характеризуют сам искомый предмет и вопросы, непосредственно связанные с его существованием:

- желаемый результат и формы его представления;
- круг направлений объективной реальности, в котором возможно обнаружение результата (необходимый набор законов природы, структура практического применения их продуктивного множества);
- состав элементарных объектов и явлений, обеспечивающих синтез результата;
- степень детализации элементарных объектов и явлений, на основе которых может быть синтезирован искомый объект;

- структура дифференциации степеней детализации элементарных объектов;
- состав свойств (признаков) элементарных объектов;
- структура (комбинация) совокупного множества признаков элементарных объектов;
- необходимый состав методов поиска решения и структура их практического применения;
- материальные и временные затраты;
- социальные, технические, экологические последствия разработки системы;
- границы полей неопределенности и области их пересечения (принципы соответствия) и т.д.

Вторая группа характеризует объективные факторы, исключающие первоначальную уверенность человека в достаточности самого имеющегося знания:

- исходное информационное обеспечение не является полным, оно неоднородно по своему объему и детализации, различно для разных объектов исследуемой системы;
- в исходной информации предметного содержания могут отсутствовать продуктивные части, обеспечивающие процесс генерации последующей информации;
- потребитель информации не может априори определить достоверность наличия в ней продуктивной части;
- потребитель не может идентифицировать продуктивную часть в начальный момент по причине отсутствия знаний о структуре общей информационной неопределенности – неопределенной недостаточности одних ее частей и неопределенной избыточности других и т.д.

Вместе с тем для любого произвольного уровня информационной определенности результативность поиска будет обеспечена, если имеются:

- источники дополнительной информации (раскрытия исходной неопределенности);
- инструментально-методический комплекс обработки источника дополнительной информации.

В любом случае имеются условия, которые исключают ситуации полного неведения относительно направлений поиска и не зависят ни от существа решаемой задачи, ни от предметной области исследования, ни от каких-либо иных факторов. В качестве примера можно привести единую структуру действий по достижению результата (рис. 1.1), реализация которой проиллюстрирована таблицей (табл. 1.1).



Рис. 1.1 Схема решения проблемы

Таблица 1.1

Характеристика этапов реализации задачи

Альпинист	Домохозяйка	Командир полка	Конструктор	Студент
Хочу в горы	Семье следует кушать	Следует выполнить приказ	Нужна новая машина	Хочу стать инженером
Эльбрус	Борщ	Деревня Ивки	Дробилка	Теория проектирования
Снаряжение, местность	Продукты, приборы	Люди, техника, местность	Методы расчета, приборы	Теория познания
Методы преодоления препятствий, применения снаряжения, алгоритм действия, опыт, интуиция	Методы подготовки продуктов, рецепты приготовления, алгоритм действия, опыт, интуиция	Методы подготовки личного состава, техники, тактика боевого применения, замысел боя, опыт, интуиция	Теория моделирования, проектирования, расчетов, методы применения аппаратных средств, опыт, интуиция	Методы познания, методы применения аппаратных средств, опыт, интуиция
Применение инструмента и технологий для достижения результата				
Вершина покорена	Семья сыта и довольна	Деревня Ивки освобождена	Документация подготовлена	Всесторонность, ответственность, глубина освоения, отчетливость воспроизведения
Анализ хода решения, выработка и пополнение профессионального опыта				

Подобные стабильные моменты информационного обеспечения являются отправными для гарантированного нахождения результата. Важно суметь определить тот уровень общности, при котором присущие различным явлениям частности становятся неразличимыми. Именно этот уровень и будет первой ступенью к построению модели искусственного объекта.

1.2 О методе гарантированного результата

Анализ поисковой деятельности позволяет сформулировать ряд положений, которые могли бы составить идею метода, гарантирующего решение проблемы для любой исходной ситуации.

Преобразование окружающей действительности заключается в переводе той ее части, состояние которой не удовлетворяет потребностям человека, из одного (исходного) состояния в другое (конечное) состояние. При этом перевод может быть разовым (исходное состояние \Rightarrow конечное состояние) и многоэтапным (исходное состояние \Rightarrow промежуточные состояния \Rightarrow конечное состояние). В большинстве практических случаев осуществляется многоэтапный перевод, который можно заменить совокупностью разовых.

Любая часть ОД обладает совокупностью свойств и структурой их проявления, а ее состояние характеризуется их конкретными значениями. Поэтому *изменение состояния ОД равнозначно изменению значений ее свойств и структуры их проявления. Их знание обеспечивает выявление наиболее предпочтительного способа организации перехода из начального состояния в конечное.*

Движущей силой изменения состояния ОД является действие, организованное человеком за счет наличного резерва своих возможностей и возможностей ДС. Действие также обладает совокупностью свойств и структурой их проявления. Если свойства и структура действия соответствуют той части свойств и структуры ОД, изменение которых способно перевести ее из начального состояния в желаемое, то такой переход становится возможным.

Перевод ОД может быть реализован изменением различных групп свойств и их комбинаций. Соответственно и построение действия приводит к множеству возможных вариантов. Это порождает задачу выбора такого соответствия, при котором перевод ОД будет наиболее удовлетворительным по совокупности комплекса учитываемых ограничений.

Наличие свойств и структур ОД и действия обеспечивает переход к построению функциональной модели необходимого допол-

нительного средства, способного реализовать желательное действие практически (технически, организационно). Функция может быть реализована разово или многоэтапно, как и само действие. *При этом структура действия и структура функции не обязательно совпадают.*

Наличие функциональной структуры ДС обеспечивает построение реализующих ее принципов действия и физических законов и явлений, знание которых дает возможность перейти к непосредственной технической реализации ДС в виде материального объекта и/или организационной структуры.

Таким образом, нахождение решения будет гарантировано, если метод его поиска будет содержать совокупность инструментов и технологий их применения, обеспечивающих:

- выявление структуры свойств той части ОД, в рамках которой осуществляется ее преобразование (такая часть всегда содержит основную и пересекающиеся с ней предметные области знания);
- выявление структуры действия, включающей процессы обнаружения, измерения свойств выбранной части ОД и непосредственное воздействие на них с целью желательного изменения;
- построение функциональной структуры, обеспечивающей реализацию выбранной структуры действия;
- построение структуры принципов действия, обеспечивающей реализацию функциональной структуры;
- построение технической и/или организационной структур, обеспечивающих реализацию структуры принципов действия.

Однако перечисленные возможности являются необходимыми, но недостаточными элементами поиска. Сведение их в единую систему становится возможным при наличии по крайней мере еще двух инструментальных средств: системообразующего, обеспечивающего системную интеграцию, и навигационного, обеспечивающего направленный поиск решения.

Системообразующим фактором является результат поиска – многомерная категория, имеющая административную, техническую, физическую и энергетическую интерпретации. Реализация поиска предполагает использование всех интерпретаций с преимущественной ориентацией на их варианты в зависимости от уровня информационной определенности (информационной полноты) поиска. Вместе с тем основой является энергетическая интерпретация результата, т.к. в основе любых преобразований ОД лежит перестройка ее энергетической структуры на основе энергетических же воздействий.

Таким образом, системообразующий инструмент призван отслеживать характер энергетических преобразований ОД и оценивать удовлетворительность ее энергетического состояния.

Инструмент навигации призван в каждый момент обеспечивать определение конкретных вопросов, подлежащих рассмотрению в зависимости от уровня информационной определенности поиска, т.е. регламентировать, что и где следует искать, как это делать. Его функционирование непосредственно связано с системообразующим инструментом. Если последний определяет качество энергетического состояния ОД, то инструмент навигации в зависимости от этого должен определять направление повышения этого качества – определять те части ОД, исследование которых необходимо в данный момент. Таким образом, инструмент навигации должен являться основным синхронизирующим элементом метода гарантированного поиска.

Приведенные рассуждения свидетельствуют о принципиальной возможности построения метода гарантированного поиска технических и организационных решений.

На этапе своего построения рассмотренные инструментальные средства являются объектами исследования. Представляется правомерным в качестве инструментов их исследования использовать:

- при выявлении структуры свойств ОД – системный подход с целью построения приемлемой морфологии свойств и возможных схем изменения состояния ОД, а также инструмент навигации поиска;
- при выявлении структуры действия – системный подход с целью построения приемлемой морфологии действия и выбора такой его структуры, которая наилучшим образом (в рамках комплекса объективных ограничений) обеспечивает перевод ОД из исходного состояния в конечное, а также инструмент навигации поиска;
- при построении функциональной структуры – алгоритм установления соответствия структуры свойств ОД и структуры действия, инструмент навигации поиска;
- при построении структуры принципов действия – закономерности ОД и инструмент навигации поиска;
- при построении технической и/или организационной структур – системный подход, закономерности ОД и инструмент навигации поиска.

Системообразующий инструмент должен строиться по результатам системного исследования характеристик энергетического состояния на основе принципа развивающейся системной симметрии и совокупности закономерностей ОД в рамках рассматриваемого множества пересекающихся предметных областей как специфичных проявлений этого принципа.

Все разнообразие закономерностей природы поражает наличием огромного числа аналогий в механизмах их протекания. Так, например, проявление законов неравномерного развития систем, перехода количества в качество, отрицания отрицания и так далее можно проследить в любой области природы и человеческого знания (философия, социология, биология, технические науки, информация и т.д.). Законы строения технической системы характерны для любых живых организмов, по образцу и подобию которых эта система строится. Это свидетельствует о единой первопричине, универсальном принципе, разнообразие проявления которого характеризуется множеством частных законов природы, являющихся следствием этого принципа.

Простейшие рассуждения позволяют констатировать, что такой первопричиной является *развивающаяся системная симметрия энергетических преобразований*. Действительно, условием поддержания системой своего состояния является симметрия внутреннего и внешнего энергетического потенциалов на ее границах. Изменение состояния системы (в сторону желаемого или нет) становится возможным лишь при нарушении такого равновесия. При этом граница системы представляет собой сложную поверхность порядка N (N – число объективно присущих элементам системы и самой системе свойств). Если каждое из таких свойств представить соответствующими координатами пространства свойств (шкалами их количественного измерения), то граница системы будет проходить по сечениям, которые соответствуют равным величинам энергетических потенциалов внутреннего и внешнего действия. Если такого равновесия нет, то граница по этому свойству будет подвижной, а симметрия – развивающейся (неуправляемой, управляемой, сдерживаемой) с различной пространственно-временной структурой движения.

Процесс поиска решения является по своей сути процессом выявления и системной интеграции необходимой информации обо всех элементах на последовательности этапов такого поиска. Поэтому инструмент навигации должен строиться на основе системного исследования процессов построения информационных структур.

Рассмотренные положения позволяют перейти к непосредственному построению по крайней мере одного из работоспособных вариантов метода гарантированного поиска решения проблемы.

В завершение следует отметить, что эффективность применения любого метода решения задачи во многом зависит от человека-пользователя. Поэтому *под «гарантией» следует понимать наличие*

комплекта необходимых для достижения результата инструментальных средств и технологий их системного применения, безусловное нахождение не менее одного «сносного» решения, формирование направлений повышения качества полученных решений. Гарантия окончательного качества решения будет обеспечена лишь при эффективном использовании человеком предоставляемых методом возможностей, а также своих познавательных возможностей, обусловленных психическим и физиологическим потенциалом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Системные исследования. Ежегодник. – М. : Наука, 1969.
2. Системный анализ и структуры управления. – М. : Знание, 1975. – 320 с.
3. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Д. Мако, И. Тахакара. – М. : Мир, 1973. – 344 с.
4. Ильичев, А. В. Эффективность проектируемой техники: основы анализа / А. В. Ильичев. – М. : Машиностроение, 1991. – 336 с.
5. Хубка, В. Теория технических систем / В. Хубка. – М. : Мир, 1987. – 208 с.
6. Шрейдер, Ю. А. Системы и модели / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.
7. Цвиркун, А. Д. Структура сложных систем / А. Д. Цвиркун. – М. : Советское радио, 1975. – 200 с.
8. Яглом, И. М. Математические структуры и математическое моделирование / И. М. Яглом. – М. : Советское радио, 1980. – 144 с.
9. Холл, А. Д. Опыт методологии для системотехники / А. Д. Холл. – М. : Советское радио, 1975. – 448 с.
10. Шарканшэ, А. С. Сложные системы / А. С. Шарканшэ, И. Г. Железнов, В. А. Ивницкий. – М. : Высшая школа, 1977. – 247 с.
11. Ивченко, Б. П. Теоретические основы информационно-статистического анализа сложных систем / Б. П. Ивченко, Л. А. Мартыщенко, М. Л. Монастырский. – СПб. : Лань, 1997. – 320 с.
12. Жуков-Варежников, Н. Н. Теория генетической информации / Н. Н. Жуков-Варежников. – М. : Мысль, 1965. – 320 с.
13. Анохин, П. К. Избранные труды. Философские аспекты теории функциональных систем / П. К. Анохин. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
14. Судаков, К. В. Общая теория функциональных систем / К. В. Судаков. – М. : Медицина, 1984. – 244 с.
15. Мельникова, Л. И. Системный анализ при создании и освоении объектов техники / Л. И. Мельникова, В. В. Шведова. – М. : ВНИИПИ, 1991. – 85 с.
16. Шафрановский, И. И. Гармония мира минералов. Симметрия и статистика / И. И. Шафрановский, Г. И. Шафрановский. – СПб. : Недра, 1992. – 79 с.
17. Шафрановский, И. И. Симметрия в природе / И. И. Шафрановский. – Л. : Недра, 1968. – 184 с.

Тема 2

ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО ПОДХОДА

Основные категории теории систем. Полиструктурность и свойства объектов. Критерии целостности.

2.1 Основные категории теории систем

Одним из заметных моментов развития естествознания является применение системного подхода (СП) в исследовании и построении среды обитания человека. Его осознание как методологического инструмента является результатом диалектического развития человеческой мысли, насущной потребности в разработке аппарата, позволяющего исследовать с единых позиций сложные и разноплановые задачи практической деятельности. *Главным достоинством СП является обеспечение возможности систематизации анализа и синтеза сложных процессов и явлений, а также формирования системного образа мышления как инструмента познавательной деятельности.*

Следует отметить, что терминология теории систем не является абсолютно неизвестной для большинства людей. Многие об этом «слышали». Однако конкретные инструментальные возможности СП известны в меньшей степени.

Основными категориями системного подхода являются: объект, свойства, связь, структура, система, системный анализ, системный синтез и др.

Объект (лат. *objectum* – предмет) – фрагмент реальности, предмет любой природы, выделяющийся на общем фоне объективно присущими ему свойствами (деталь, механизм, система машин, функция, способ, алгоритм, идея и т.д. (рис. 2.1)). В практической деятельности под объектом в большинстве случаев понимают технологическую категорию, включающую совокупности устройств и процессов их функционирования и взаимодействия, подходящие для этого вещества, а также способы, обеспечивающие такое системное построение. В таком представлении объект сливается с понятием системы. *Границы объекта и его содержа-*

тельное наполнение определяются исследователем в зависимости от существа решаемой задачи и требуемого уровня обобщения.

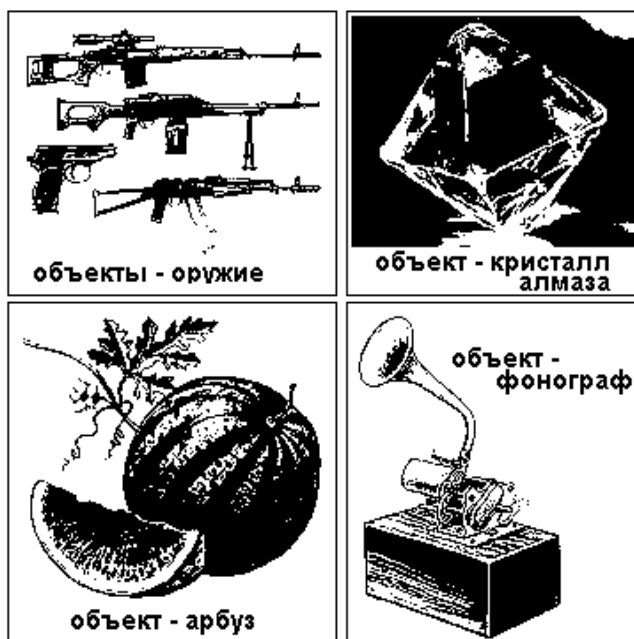


Рис. 2.1 Примеры объектов

Свойства – устойчивая совокупность присущих объекту особенностей (признаков, проявлений), отличающая его от общего фона. Свойства позволяют выделять объекты из их природного множества и используются человеком в качестве классификационных признаков (масса, размер, текучесть, деформации, вкус, запах, цвет и т.д.; красивый, приятный и т.д.). Свойства могут принадлежать всему объекту или только его части. Исходя из толкования понятия «объект» можно заключить, что число и физическая природа свойств достаточно вариативны и также определяются существом решаемой задачи (рис. 2.2).

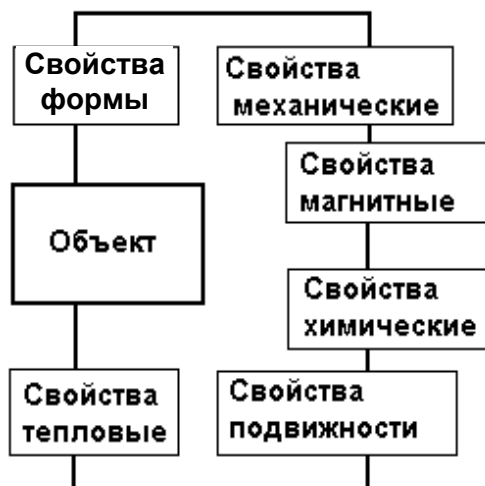


Рис. 2.2 Свойства объекта

Связь – вид отношений между объектами и/или их свойствами. Связи по своей значимости могут быть основными, дополняющими, второстепенными (лишними); по направленности – односторонними и двухсторонними; по физической природе рассматриваемого явления – статическими (стационарными), функциональными, энергетическими, информационными и т.д.; по своей структуре – сходящимися, расходящимися, ветвящимися и т.д. *Связи определяют взаимодействия в системе и сами определяются характером такого взаимодействия. Связи могут рассматриваться как специфичные объекты с присущими им свойствами.*

Структура – внутренняя форма организации объектов посредством связей (рис. 2.3). Каждый объект обладает неисчерпаемым многообразием свойств. Это определяет существование множества структур системы при неизменном наборе составляющих объектов. Благодаря многообразию структурных проявлений каждая материальная совокупность объектов является полиструктурной.

Система – совокупность взаимосвязанных объектов, обеспечивающая генерацию интегративного свойства, не присущего каждому из элементов совокупности (рис. 2.3). Системы могут быть материальной и абстрактной природы. Кроме того, системы могут быть естественными (созданными без вмешательства человека) и искусственными (созданными деятельностью человека).

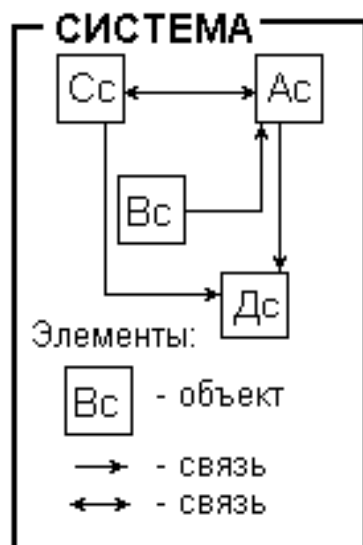


Рис. 2.3 Система и ее элементы: А, В, С, Д – элементы системы (с – система)

В практических приложениях используют *понятие технической системы* – материальной искусственной системы, заменяющей деятельность человека (механизация, автоматизация, интеллектуализация).

В зависимости от иерархии системного построения (вычленения) могут использоваться понятия надсистемы, подсистемы.

Ранее упоминалось, что системообразующим фактором является цель. Исходя из поставленной цели и осуществляется синтезирование системы. Об этом следует помнить постоянно, т.к. в ряде случаев наличие системных свойств какой-либо совокупности объектов далеко не очевидно. Например, автомобиль является реализацией цели создания автономного управляемого средства передвижения и, следовательно, является системой. Разобранный до уровня деталей, он перестает быть системой в упомянутой формулировке цели. Если же целью является подготовка необходимого набора деталей для последующей сборки автомобиля, то в рамках этой цели полный комплект деталей является системой.

Перечисленные категории: объект, свойство, связь, система – в определенном смысле являются «пустыми». Их содержательное наполнение определяется конкретным пользователем в зависимости от типа решаемой проблемы и этапа решения. Главный момент при таком наполнении – обеспечение решения проблемы без слишком далекого выхода за границы понятий.

Системный анализ – совокупность методов и средств, используемых при исследовании сложных систем. Важнейшей особенностью системного анализа является единство используемых в нем формализованных и неформализованных средств и методов исследования. Последнее объясняется отсутствием объективных знаний всего содержания природных явлений. Этот недостаток компенсируется использованием эвристических знаний, которые, не нося объективного характера, позволяют получать позитивный результат исследования.

Системный синтез – совокупность методов и средств объединения объектов в систему с целью формирования интегративного свойства, присущего всей системе. Имея различное назначение, системный синтез и системный анализ являются взаимодополняющими средствами исследования систем. Анализ «разделяет», синтез «воссоздает». Там, где анализ заканчивает свое дело, начинается синтез. Однако процесс такого встречного движения не более чем иллюстрация: для выделения частей их следует предварительно объединить (синтезировать), а для воссоздания частей следует предварительно отделить их из возможного множества (проанализировать). Поэтому анализ и синтез – единый инструмент познавательной деятельности.

Таким образом, на основе рассмотренных категорий можно сформулировать ряд практических рекомендаций общего характера:

1. Любое явление, проблему, задачу можно представить в виде системы, включающей в себя объекты с присущими им свойствами, разноаспектные связи, объединяющие объекты в определенную структуру, если при этом формируется новое качество (соответствующее достижению цели построения системы), не присущее отдельным элементам.

2. Для построения, объективного и всестороннего исследования системы следует:

- определить цель (и результат как показатель ее реализации), ради достижения которой строится система;
- определить совокупность основных составляющих систему объектов;
- выявить наличие, характер и природу связей системы со средой и связей внутри системы между объектами;
- оценить степень необходимости и достаточности совокупности связей с точки зрения полноты характеристики исследуемой системы;
- оценить выявленную таким образом структуру системы и ее возможные изменения;
- определить те свойства элементов системы, которые могут быть подвергнуты воздействию с целью изменения ее качества;
- определить возможные воздействия на систему с целью ее изменения в желаемом направлении.

Общность выделенных выше системных категорий обеспечивает возможность их применения в различных направлениях деятельности специалиста. Это позволяет использовать аппарат теории систем в качестве универсального инструментального средства для построения новых и исследования уже существующих систем любой физической природы.

Характер функционирования системы может иметь различное выражение: выполнение действия, поддержание определенного состояния (своего рода гомеостаз) под воздействием окружения системы, генерация новой информации и т.д. Совокупность свойств элементов системы и видов энергетического взаимодействия между ними является ее энергетическим ресурсом (ЭР). Построение системы (реального объекта или его модели) основано на практической реализации ЭР ОД в рамках исследуемых предметных областей знания. Анализ ЭР проводится исходя из целей построения системы

по всем структурам и свойствам элементов, предполагаемых к использованию.

2.2 Полиструктурность и свойства объектов

Взаимосвязь объектов в системе представляет собой ее структуру. Множество свойств объектов обуславливает и наличие множества структур связей системы. Поэтому благодаря многообразию структурных проявлений каждая совокупность объектов является полиструктурной. *Принцип полиструктурности обеспечивает расширение поисковой базы при анализе и синтезе систем, раскрывая возможные направления их рассмотрения. Полиструктурность характерна для объектов любой физической природы.*

Применительно к ТС выделяются следующие основные структуры:

– *структура энергетической проводимости (ЭС)* – структура связей между элементами системы, обеспечивающая сквозное прохождение энергии от источника (или от входного потребляющего элемента – входа) до инструмента, совершающего конечное действие в энергоцепи (выходного элемента – выхода). Данная структура определяет уровни и направления энергопотоков от входа к выходу. Может предусматривать трансформацию (уменьшение, увеличение) энергетических характеристик потока, многократное преобразование форм энергии;

– *функциональная структура (ФС)* – иерархия функций, обеспечивающая реализацию основной функции ТС. Формирование ФС осуществляется на основе системного анализа путем декомпозиции основной функции ТС. Формирование структуры принципов действия (СПД) осуществляется на основе системного синтеза совокупности физических эффектов и явлений (ФЭЯ) по принципу их совместимости и требуемой эффективности. Источник – банк известных ФЭЯ;

– *структура множества элементов (СМЭ)* – комплекс элементов, обеспечивающий реализацию выделенной иерархии подфункций на основе выявленной СПД. Источник формирования зависит от конкретной ситуации построения системы;

– *пространственная структура* – структура пространственных связей между элементами конструкции. Определяется комплексом требований и ограничений компоновочного характера;

– *внешняя структура элементов* – структура форм элементов ТС, обеспечивающая реализацию иерархии подфункций основной функции. Определяет формы элементов и их контактные поверхности;

– *внутренняя структура элементов* – совокупность структур элементов, определяющая распределение свойств наполнителя (материалов) по элементами внутри элементов конструкции. Соответственно этому можно последовательно рассматривать внутренние структуры первого (распределение по элементам) и второго порядка (распределение в элементах). Совместно с внешней структурой внутренняя определяет свойства устойчивости (прочности) конструкции ТС;

– *структура состояний* – структура режимов функционирования ТС, включающая состояния покоя, нагрузки, напряжения–деформации, смещения границ элементов системы при их совмещении и т.п.;

– *временная структура* – структура последовательности срабатывания элементов, последовательности реализации иерархии подфункций в различных режимах функционирования. Графическое отображение временной структуры – циклограмма срабатывания элементов ТС;

– *обеспечивающая структура* – структура множества обеспечивающих элементов. Например, для ТС это уплотнения, рабочие жидкости, представленные своими свойствами, дополнительные опоры, системы смазки, охлаждения, контроля, регулирования и так далее, а также связи между обеспечивающими элементами, между обеспечивающими и основными элементами.

Каждая из выделенных составляющих, в свою очередь, также является полиструктурной и требует для проведения анализа соответствующих системных инструментальных средств.

Очевидно, что специфика предметных областей может потребовать выделения иных структур. При этом, однако, основные изменения будут относиться не столько к их количеству и наименованию, сколько к содержательному наполнению.

Рассмотренная полиструктурность характеризует систему только как материальную среду. При необходимости же может рассматриваться совокупность «абстрактных» структур, таких как структуры восприятий, ощущений, эмоций и т.д. Подобная полиструктурность характеризует (и во многом определяет) процесс построения систем независимо от их природы. *Выделение структур системы равнозначно категорированию свойств ее элементов по различным видам их проявления.*

Формирование и структуризацию множества свойств системы проводят в зависимости от предметной области, степени обобще-

ния, существа решаемой задачи. Например, для ТС группами свойств могут быть свойство принадлежности, свойства формы, фазовое состояние, свойства деформации, свойства крепления и т.д. Данный перечень характеризует элементы системы как самодостаточные объекты. Наряду с этим можно выделить группы свойств, характеризующих внутреннее состояние исследуемых объектов (свойства замкнутости пространственного и временного поля объекта, характеристика движения, химическая активность, тепловая стойкость и т.д.). Полный перечень свойств, учитываемый при решении задачи, определяется ее спецификой.

Подобная классификация свойств позволяет составлять описательную характеристику любого объекта и исследовать его ЭР, т.е. определять то (или те) свойство, изменение которого обеспечивает переход исследуемой системы в необходимое исследователю состояние.

2.3 Критерии целостности системы

Завершение процесса построения системы осуществляется на основе удовлетворения требования целостности, характеризующегося рядом специфичных критериев. По образному выражению Мальбранша, «...все предположения в отсутствии критерия – неопровержимы». В теории систем критериями целостности принято считать симметрию, ритм, гармонию, стиль.

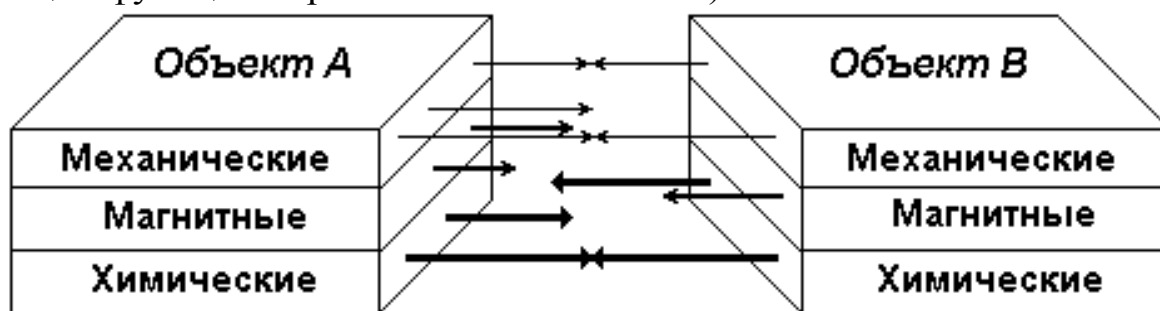
Применительно к ТС можно построить достаточно четкое и практическое инструментальное представление выделенных критериев на основе интерпретации их смыслового значения – семантики.

Симметрия (греч. *simmetria*) – одинаковое, соразмерное расположение чего-либо относительно центра, оси, плоскости.

Очевидно, что для ТС можно ввести понятие симметрии как полиструктурной (с учетом уровней структуры) идентичности всех или только определяющих свойств пары элементов на границе их взаимодействия (предшествующего в цепи реализации функции и последующего) (рис. 2.4).

Тогда становится возможным оценивать симметрию как полную (полная идентичность свойств), достаточную (симметрия определяющих свойств), недостаточную (наличная симметрия свойств не обеспечивает реализацию функции), избыточную (симметрия

определяющих свойств и свойств, не определяющих процесс реализации функции парой элементов системы).



Симметрия свойств:		
Механические	2	Всего свойств: 9
Магнитные	нет	Использовано: 3
Химические	1	Резерв: 6

Рис. 2.4 Симметрия свойств двух объектов

Рассматриваемое понятие допускает отличие характеристик симметричности пары элементов в разные моменты времени функционирования системы. В каждый момент наблюдается изменяющаяся симметрия. Если необходимая симметрия обеспечивается для всех пар элементов системы и в каждый момент ее функционирования, тогда можно считать, что система имеет ритм. Следовательно, *ритм ТС можно интерпретировать как динамичную симметрию совокупности пар ее элементов*. Введенная интерпретация соответствует семантике понятия ритма (греч. *rhythmos*), представляющего собой соразмерное чередование каких-либо элементов.

Гармония (греч. *harmonia*) определяется как связь, стройность, соразмерность, согласованность, стройное сочетание разных качеств, предметов, частей целого. Применительно к ТС понятие гармонии можно интерпретировать как диалектическое единство (симметрию) внутренних свойств системы по всем парам ее элементов и по всей временной структуре ее функционирования – пространственно-временную сбалансированность системы.

Определение указанных критериев становится возможным при наличии описаний свойств элементов системы и связей между ними.

По определению стиль (греч. *stylos* – палочка для письма) – приемы, способы, методы какой-либо работы, деятельности; манера поведения. Для ТС стиль проявляется в обеспечении режимов ее функционирования наиболее рациональным образом.

В практических приложениях наиболее инструментальными являются критерии симметрии, ритма и гармонии как определяющие предварительную завершенность построения системы. Они могут быть совершенно определенно оценены не только качественно, но в ряде случаев и количественно.

Рассмотренные категории целостности являются элементами развивающейся системной симметрии. Поэтому можно заключить, что построение ТС представляет собой процесс поэтапного введения развивающейся симметрии в определенные рамки, очерченные комплексом ограничений на построение системы. При этом на каждом этапе с помощью критериев целостности (симметрии – статической характеристики свойств системы; ритма – динамической характеристики проявления свойств системы в необходимых режимах ее функционирования, гармонии – характеристики полиструктурной динамической симметрии) имеется возможность проведения оценки направлений дальнейших исследований по уравниванию внутреннего потенциала ТС внешним. Проведение такого анализа обеспечивается использованием комплекса принципов построения информационных структур исследуемой системы. Комплекс таких принципов определяет, как и что искать в пространстве поиска. Однако предварительно следует иметь инструментальное представление о самом пространстве поиска.

2.4 Схемы изменения состояния системы

Состояние среды описывается совокупностью конкретных значений ее качественных и количественных параметров и характеристик (ПХ), структурой объектов и их физическими свойствами – показателями состояния. Совокупность показателей сред представляет собой целостную характеристику состояния всей системы. Поэтому под изменением состояния системы понимаются качественные и/или количественные изменения ПХ составляющих ее элементов и связей.

Примерами таких изменений являются:

1. *Изменение положения:*

– линейное перемещение (сдвиг) – сообщение кинетической энергии;

– круговое перемещение (вращение, проворот) за счет изменения положения частей тела без изменения положения некоторой оси вращения – сообщение кинетической энергии;

– круговое перемещение (качение) за счет изменения положения частей тела с изменением положения некоторой оси вращения – сообщение кинетической энергии.

2. *Перенос тела* – перемещение по иному основанию или на ином основании. По отношению к элементарным изменениям положения перенос является многоэтапным перемещением.

3. *Отделение (выделение) среды:*

– целенаправленное воздействие между слоями среды (например, срезание) – изменение энергии внутренних связей;

– общее отделение (например, разрушение) – изменение энергии внутренних связей.

4. *Изменение формы среды:* линейной, плоскостной, объемной и т.д.

Все сложные изменения среды являются совокупностью элементарных изменений, структура членения которых определяется существом рассматриваемой задачи исходя из потребностей практики и уровня наличного информационного обеспечения.

Знание составляющих ПХ связей и основных свойств объектов ТС позволяет осуществить переход к целенаправленным изменениям ее состояния из исходного (наличного) в конечное (желаемое). При этом **изменениям могут подвергаться:**

- отдельный объект;
- природа объектов (физическая, пространственная и временная);
- группа объектов;
- вся система в целом;
- отдельная связь;
- природа связей (физическая и временная);
- группа связей;
- структура связей (пространственная и временная).

Указанные изменения могут относиться как к отдельным надсистемам, системам, подсистемам, так и к комбинациям разноразрядных изменений в них. Непосредственные изменения систем являются внутренними (прямыми). Изменения систем за счет корректировки элементов надсистем и/или их связей с рассматриваемой системой являются косвенными – внешними по отношению к основной системе.

Обобщенная схема изменения состояния системы приведена на рис. 2.5. С информационной точки зрения имеются четыре возможных подхода к изменению системы:

1. Изменение внутренних информационных (энергетических) потоков системы – прямое воздействие.

2. Изменение внешних информационных потоков (формирующих, поддерживающих и контролирующих свойства системы) без изменения свойств источников надсистемы – преобразования в проводящей среде.

3. Изменение определяющих элементов информационного потока от надсистемы за счет изменения источников их формирования, поддержания и контроля – изменения в надсистеме.

4. Комбинации вариантов 1...3:

- изменение связей между системой и надсистемой в проводящей среде и изменения в самой системе;

- изменение в надсистеме и связей между системой и надсистемой в проводящей среде;

- изменение связей в системе и надсистеме;

- изменение связей в надсистеме, проводящей среде и изменения в системе.

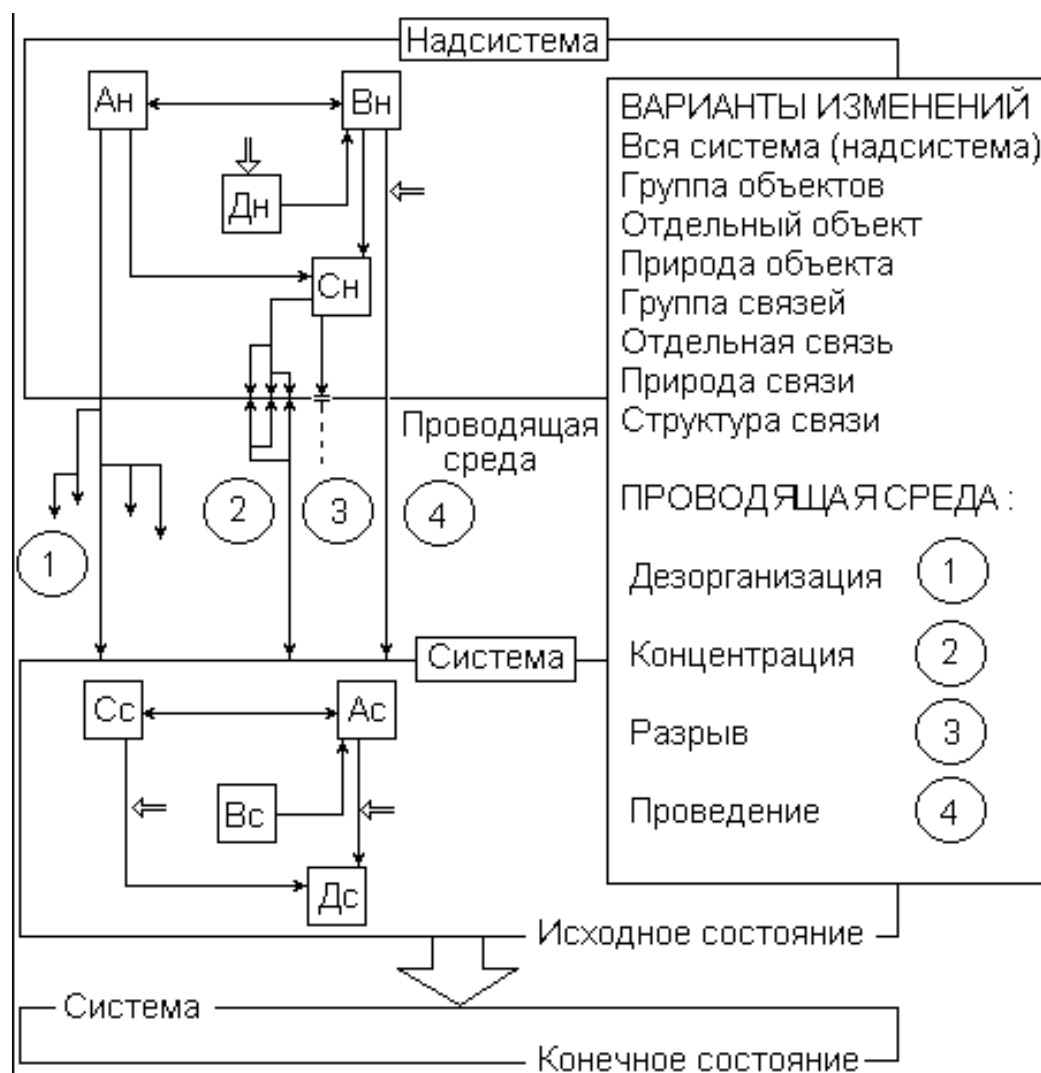


Рис. 2.5 Общая схема изменения состояния системы:

А, В, С, Д – элементы системы (н – надсистема, с – система)

Варианты схемы изменения состояния систем содержат следующие группы действий:

1. Изменение части свойств объектов и связей без подавления остальной части свойств и изменения их физической природы (прямое количественное усиление доминирующих свойств без ограничений изменений фоновых свойств). Такие изменения осуществляются исключительно внутренними ресурсами системы (имеющимися и потенциально возможными).

2. Изменение части свойств объектов и связей без изменения их физической природы за счет подавления остальной части свойств (выделение доминирующих свойств на подавленном фоне). Такие изменения возможны за счет использования внутренних и/или внешних ресурсов (имеющихся и потенциально возможных).

3. Изменение части свойств объектов и связей без подавления остальной части свойств и изменения их физической природы (количественные изменения на неизменном фоне).

4. Усиление части свойств объектов и связей без изменения их физической природы, без подавления остальной части свойств (проявление нужных свойств на остаточном фоне).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Системные исследования. Ежегодник. – М. : Наука, 1969.
2. Системный анализ и структуры управления. – М. : Знание, 1975. – 320 с.
3. Месарович, М. Теория иерархических многоуровневых систем / М. Месарович, Д. Мако, И. Тахакара. – М. : Мир, 1973. – 344 с.
4. Ильичев, А. В. Эффективность проектируемой техники: основы анализа / А. В. Ильичев. – М. : Машиностроение, 1991. – 336 с.
5. Хубка, В. Теория технических систем / В. Хубка. – М. : Мир, 1987. – 208 с.
6. Шрейдер, Ю. А. Системы и модели / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.
7. Цвиркун, А. Д. Структура сложных систем / А. Д. Цвиркун. – М. : Советское радио, 1975. – 200 с.
8. Яглом, И. М. Математические структуры и математическое моделирование / И. М. Яглом. – М. : Советское радио, 1980. – 144 с.
9. Холл, А. Д. Опыт методологии для системотехники / А. Д. Холл. – М. : Советское радио, 1975. – 448 с.
10. Шарканшэ, А. С. Сложные системы / А. С. Шарканшэ, И. Г. Железнов, В. А. Ивницкий. – М. : Высшая школа, 1977. – 247 с.
11. Ивченко, Б. П. Теоретические основы информационно-статистического анализа сложных систем / Б. П. Ивченко, Л. А. Мартыщенко, М. Л. Монастырский. – СПб. : Лань, 1997. – 320 с.
12. Жуков-Варежников, Н. Н. Теория генетической информации / Н. Н. Жуков-Варежников. – М. : Мысль, 1965. – 320 с.
13. Анохин, П. К. Избранные труды. Философские аспекты теории функциональных систем / П. К. Анохин. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
14. Судаков, К. В. Общая теория функциональных систем / К. В. Судаков. – М. : Медицина, 1984. – 244 с.
15. Мельникова, Л. И. Системный анализ при создании и освоении объектов техники / Л. И. Мельникова, В. В. Шведова. – М. : ВНИИПИ, 1991. – 85 с.
16. Шафрановский, И. И. Гармония мира минералов. Симметрия и статистика / И. И. Шафрановский – СПб. : Недра, 1992. – 79 с.
17. Шафрановский, И. И. Симметрия в природе / И. И. Шафрановский. – Л. : Недра, 1968. – 184 с.

Тема 3

СИСТЕМНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

Элементы среды и их характеристика. Взаимодействия в системе. Структура действия. Свойства среды. Алгоритм анализа связей. Информационные принципы построения систем.

3.1 Среда обитания объекта, элементы среды и их характеристика

В ситуации, когда изменению подлежит существующая система, исследованию подвергаются ее полиструктура и свойства составляющих элементов. Для проведения такого анализа целесообразно использовать обобщенную схему изменения состояния системы, рассмотренную ранее. Если же систему предстоит только построить, то следует определиться с источником необходимой для этого информации и инструментом ее обработки.

Наиболее предпочтительной частью ОД для получения необходимой информации при построении ТС является среда обитания создаваемого объекта – окружающая среда (ОС). По своей сути ОС является гиперсистемой, и построение нового объекта будет заключаться в вычленении из нее необходимой для этого части информации – элементов среды, их свойств, связей, процессов, технологии управления ими и т.д. Разрабатываемый на этой основе новый объект, система являются комплементарными (дополнительными) к вычлененной составляющей ОС, формируя функциональную пару: подлежащая обработке среда – объект ее обработки. При этом объект, система понимаются как технологические категории.

Сложность формирования такой функциональной пары заключается в построении (обнаружении, отборе и упорядочении) структуры информационных областей в условиях глубокой неопределенности, характерной для начальных этапов моделирования.

Подсистемы ОС, с одной стороны, обеспечивают объекту возможность реализации им своих функций (позитивное действие), а с другой – препятствуют такой реализации (негативное действие).

Анализ взаимодействия ТС с ОС позволяет выделить пять составляющих ее функциональных частей – сред обитания создаваемого объекта:

C_1 – обрабатываемая искомым объектом, системой среда, та часть ОС, которая подлежит непосредственному изменению с помощью создаваемого объекта;

C_2 – опорная или несущая среда, обеспечивающая пространственно-временную фиксацию объекта, системы;

C_3 – среда сброса энергетических отходов основного действия объекта, системы;

C_4 – среда пассивного действия, объективно существующее фоновое окружение объекта, системы и остальных элементов-сред;

C_5 – среда активного действия, доминирующая в формировании и поддержании свойств остальных сред, в первую очередь обрабатываемой среды C_1 , и/или препятствующая проявлению необходимых свойств объекта, системы.

Выделенные части ОС объективно существуют. При построении же новой системы первоначально они являются «пустыми», наполнение их конкретным содержанием и является целью и результатом формирования моделей.

В принятом понимании объекта элементы ОС могут обладать следующими свойствами:

- иметь свою физическую природу и соответствующие ей свойства;

- иметь единую физическую природу с искомым объектом и/или с частью других сред, но при этом проявляться иным набором из всего множества присущих им свойств (следствием таких свойств сред является возможность изменения обозначений сред в процессе поиска по мере прояснения информационной ситуации);

- объединять в информационном плане элементы различной физической природы, относящиеся к различным физическим объектам и/или уровням структуризации исследуемой системы: подсистемам, надсистемам и т.д.

По своей сути среды представляют набор «заготовок» различной степени завершенности и физической природы, своего рода набор запасных частей, из которых строится ТС. При этом в процессе построения номенклатура таких элементов и их отнесение к типу выделенной среды может неоднократно пересматриваться. Важным является сам факт наличия необходимых элементов, а не первоначальная правильность их отнесения к одной из выделенных составляющих среды обитания. Ситуация построения ТС схожа

с раскладкой карт в пасьянсе. Заданный первоначально случайным образом набор заготовок раскладывается по определенным правилам в организованный набор.

Такое выделение сред обитания искомого объекта обеспечивает направленность их исследования с точки зрения генерации нового знания на имеющемся информационном фоне.

Между выделенными средами имеется свое взаимодействие, следовательно, в отношении таких взаимодействий при необходимости могут быть построены свои среды обитания.

Очевидно, что для осуществления взаимодействия со средой объект (О) должен иметь о ней определенные представления – отражение окружающей среды (ООС) и инструмент обработки этих представлений (ИО). При этом ООС – информационная база объекта, база знаний, а ИО – система управления базой знаний. Совокупность ООС и ИО представляет собой «интеллект» объекта, его «разум». Чем полнее ООС и эффективней ИО, тем более «интеллектуально» развитым является рассматриваемый объект.

Структура системы «объект – окружающая среда» (О–ОС) показана на рис. 3.1.

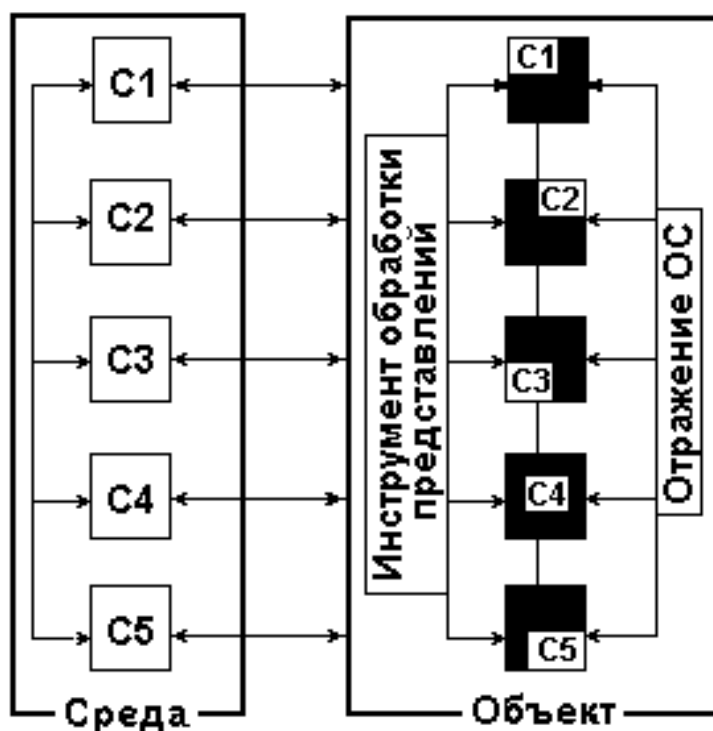


Рис. 3.1 Система «объект – среда обитания»

Представления об окружающей среде и инструменте ее обработки задаются объекту в его конкретной конструкции и технологии реализации необходимых функций.

Таким образом, можно заключить, что:

- любая ТС может быть представлена в виде объекта как элемента системы О–ОС, имеющего определенную структуру связей с окружающей средой, представленной пятью ее составляющими;
- любая ОС является дважды полифизичной. Это означает, что, с одной стороны, ее составные части могут иметь разную физическую природу, а с другой – составные части ОС при неизменной физической природе могут быть объединены сочетанием различных физических свойств, определяющих взаимодействия в системе;
- следствиями взаимодействия в системе О–ОС могут являться изменение или сохранение ее состояний;
- по отношению к средам воздействия объект является одновременно инструментом и источником энергии;
- по отношению к инструменту среды C_1 , C_2 , C_3 формируют противодействие – следствие воздействия на них инструмента. Такое действие можно рассматривать как входной сигнал для управления поведением инструмента;
- определяемый законами построения функциональный состав ТС (источник энергии – передача – инструмент – управление) должен быть дополнен пятым элементом – ОС в ее пяти проявлениях. И сам этот элемент, и его составляющие, в свою очередь, могут быть дополнены аналогичным образом по мере необходимости, обусловленной уровнем рассмотрения поисковой ситуации;
- каждый из выделенных элементов ТС по отношению к предыдущему является одним из проявлений окружающей среды (как правило, C_1), а по отношению к последующему – одновременно источником энергии и инструментом. Это дает возможность проведения последовательного анализа всех цепей передачи потоков энергии от сред C_1 , C_2 , C_3 до последнего завершающего элемента ТС, формирующего энергетический потенциал – источник энергии ТС, а также проведения оценки качества ТС на основе выделенных критериев целостности системы.

Анализ системы О–ОС позволяет выделить единую схему взаимодействия объекта с элементами среды, проявляемую в двух вариантах (рис. 3.2).

При этом основное действие содержит две составляющие: действие и обеспечивающую составляющую (защита) как реакцию

на противодействие обрабатываемой среды. Каждый элемент связей имеет ряд своих составляющих.

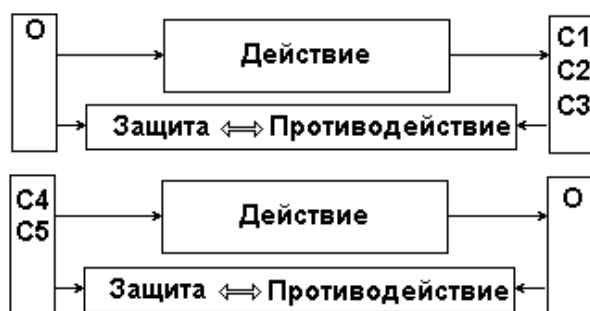


Рис. 3.2 Варианты взаимодействия в системе

1. Действие:

- обнаружение среды;
- измерение среды (определение ее состояния, пространственно-временной структуры и физической природы);
- действие – сообщение потока энергии.

2. Противодействие:

- энергетическое противодействие среды инструменту объекта;
- дезорганизирующее противодействие, связанное с необходимостью управления как самим инструментом объекта, так и состоянием среды (дезорганизирующая неуправляемость среды);
- остаточное – сопутствующие негативные для объекта явления, например явления, связанные с фазовыми переходами среды, обусловленные действием инструмента.

3. Защита:

- прочность, устойчивость (сопротивление энергетическим свойствам среды);
- управление средой (дополнительная организация ее свойств, структуры);
- защита (предохранение от негативных остаточных явлений в среде).

Полная структура связей объекта с элементом среды представлена на рис. 3.3.



Рис. 3.3 Полная структура взаимодействия

Содержательная сторона элементов связей имеет специфичное проявление, зависящее прежде всего от физической природы той или иной среды.

Анализ системы О–ОС позволяет вычлени из всего многообразия условий ее функционирования тот необходимый и достаточный объем, который и будет в дальнейшем использоваться при построении объекта. Такой анализ от современных аналогов отличается целенаправленностью, гарантированной полнотой охвата существенных сторон рассматриваемой ситуации и отсутствием необходимости сведения начальной фазы поиска к узким классам технических систем, рассмотрение которых базируется на статистических данных характера их развития. Последний момент представляется важным, т.к. при этом обеспечивается целенаправленное расширение областей поиска ТС. Совместно же с гарантированной полнотой охвата существенных сторон рассматриваемой ситуации это приводит к определенной оптимизации поисковых процедур как по траектории их реализации, так и по качеству получаемых рекомендаций.

Таким образом, знание структуры окружающей среды обеспечивает формирование значительного объема дополнительной информации, необходимой для исследования и построения ТС.

Организация связей в системе приводит к проявлению свойств ее элементов. Правильная же организация связей обеспечивает условия оптимального проявления ее элементами совокупности необходимых свойств, приводящего к их взаимодействию. Для такого построения связей необходимо иметь развернутое представление об определяющих понятиях, обеспечивающее целенаправленную классификацию вариантов их проявления. Это относится ко всем составляющим системы как таковой, в первую очередь к связям системы, как внешним, так и внутренним.

3.2 Структура действия

Действие – передача энергии среде. Передача может осуществляться *непосредственно* – через поток энергии; *опосредованно* – через материальный объект; *потенциально* – посредством инициации энергетических изменений в среде за счет передачи информации, информационной дестабилизации энергетического состояния среды (рис. 3.4).

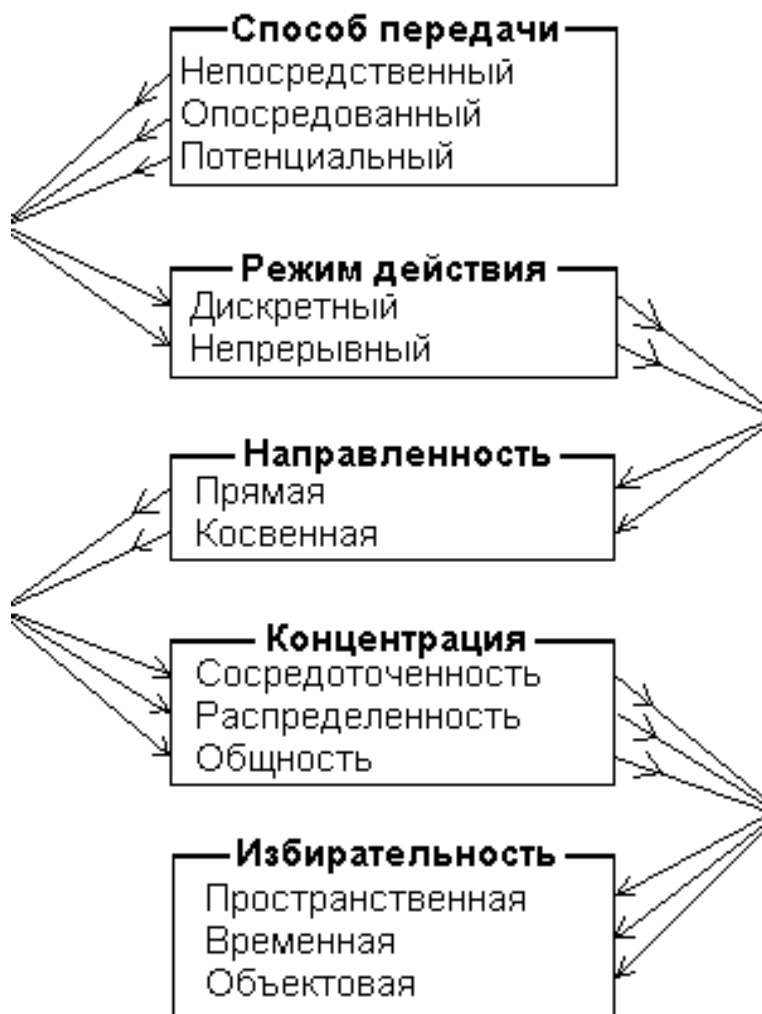


Рис. 3.4 Морфология действия

Действие может быть простым или сложным. Понятия сложности и простоты являются относительными, определяемыми уровнем обобщения при проведении анализа. В общем случае под простым следует понимать действие, детализация которого не дает новой информации о его составе, структуре и характере на принятом уровне общности.

По непрерывности действие может быть *дискретным* и *постоянным*.

Действие может быть *прямым*, направленным на изменение конкретного свойства или группы свойств, и *косвенным*, направленным на изменение одних свойств как следствие прямого изменения других.

По концентрации энергии можно *выделить сосредоточенное, распределенное и общее действие*. Последние три понятия характеризуются пространственно-временной и объектовой структурами: сосредоточенностью, распределенностью и общностью по пространству, времени, объектам (свойствам). Как и понятие сложности, они являются относительными по указанным выше причинам. Сосредоточенность по пространству – передача энергии в ограниченную часть пространства, занимаемого средой; по времени – в ограниченное время; объектовая – на изменение конкретного свойства. Распределенность по пространству – передача энергии нескольким ограниченным частям пространства среды; по времени – в определенные моменты времени; объектовая – на одновременное изменение нескольких свойств. Общее действие по пространству – распространение энергии на всем пространстве, занимаемом средой; объектовое – на изменение всех свойств среды. Степень концентрации энергии зависит от целей обработки среды, ее свойств. Реализация требуемой степени концентрации обеспечивается совокупностью физических принципов и технологией их использования в объекте для ее генерации и передачи энергии, а также степенью управляемости процессов в создаваемом объекте.

Действие становится принципиально возможным, если среда воздействия обнаружена и измерена, т.е. определены необходимые для достижения результата параметры и характеристики ее свойств.

Обнаружение среды считается выполненным, если известна информация о ее пространственно-временном положении. Процесс обнаружения заключается в установлении контакта объекта со средой и фиксации результата. Контакт может устанавливаться непосредственно органами чувств человека, опосредованно с использованием приборного обеспечения, основанного на регистрации одного или нескольких свойств среды. Фиксация результатов заключается в сигнализации об установлении контакта и его регистрации.

Таким образом, **обнаружение** – установление контакта объекта со средой и фиксация результатов (установление контакта может осуществляться *непосредственно, опосредованно*); цель обнаружения – определение пространственно-временного положения среды;

фиксация контакта – сигнализация о наличии и регистрация данных обнаружения.

Измерение среды заключается в определении ее качественного состояния и количественных значений основных параметров и/или характеристик. Качественное состояние определяется фактом нахождения среды в одном из возможных режимов существования и/или происходящими при этом изменениями, переходами из одного состояния в другое. Количественное состояние описывается величинами и динамикой изменения величин ПХ, определяющих состояние среды из их возможного набора, а также протекающих переходных процессов. По инструментальному обеспечению измерение может быть непосредственным (использование органов чувств человека) и опосредованным (использование приборного оснащения). С точки зрения методики измерения возможны прямое измерение (измерение величины ПХ) и косвенное (определение значений одних ПХ по измеренным значениям других).

Процесс измерения состояния по времени следует за процессом обнаружения. Результаты измерения, как и при обнаружении среды, фиксируются (сигнализация и регистрация данных измерения) и, кроме того, могут индизироваться для обеспечения контроля органами чувств человека.

По мере необходимости измерение ПХ может быть дискретным и/или непрерывным, частичным (измерение основных ПХ среды) или полным.

Таким образом, измерение – определение качественного состояния системы и/или процессов ее перехода из одного состояния в другое, количественных показателей качественного состояния (ПХ); измерение качества – установление факта нахождения системы в одном из возможных режимов существования и/или наличия переходного процесса; измерение количества – определение числовых значений параметров и/или характеристик состояния и/или переходного процесса.

Инструментальность измерения может быть непосредственной (органы чувств человека) и опосредованной (приборы); методичность измерений – прямой (измерение конкретной величины свойства) и косвенной (вычисление одной величины по результатам измерения других); периодичность измерения – дискретной и непрерывной; полнота измерения – частичной (измерение определяющих свойств) и полной (измерение всех свойств среды).

В механических конструкциях процессы обнаружения и измерения выполняются заранее и реализуются в их пространственных структурах.

Любая среда (система) всегда стремится к сохранению состояния равновесия. Поэтому всякое действие, направленное на изменение этого состояния, вызывает противодействие среды (системы).

Противодействие – способность среды препятствовать действию объекта (всем составляющим действия: обнаружению, измерению, собственно действию). Противодействие можно разделить на *управляемое* (специально организуемое) и *неуправляемое* (как следствие наличия свойств среды).

Управляемое противодействие характерно для систем активных сред, способных к изменению свойств самостоятельно и/или за счет использования свойств надсистемы (ее элементов), в которые они входят или могут входить. При этом изменение свойств заключается в их исключении, изменении режимов проявления (пространственно-временной структуры), сокрытии (пассивное – маскирование, экранирование; активное – маскирование, дезинформирование, искажение отражательных способностей свойств среды). Пассивное сокрытие есть подавление (экранирование) свойств среды каким-либо одним или несколькими свойствами родственной надсистемы или ее элементами. Активное сокрытие – действие среды на объект как своеобразного объекта на другую среду. Предотвращение управляемого противодействия осуществляется распознаванием и отделением свойств среды от свойств родственной надсистемы, а также подавлением активного сокрытия свойств среды.

Неуправляемое противодействие может быть энергетическим, дезорганизирующим и остаточным.

Энергетическое противодействие есть непосредственное препятствование изменению свойств среды энергией объекта за счет ее потенциала на микроуровне. Наиболее характерным такое противодействие является для механических систем, когда среда и объект находятся в момент действия, например разделения среды, в непосредственном контакте, совмещены. При этом источником противодействия энергии объекта в среде являются межатомные энергетические связи ее материала. Результатом такого противодействия может быть нарушение пространственно-временной

структуры энергопотока объекта, а также его повреждения различной степени.

Дезорганизующее противодействие является результатом объективной неприспособленности среды к взаимодействию с объектом. При попытке изменения изначально присущих среде свойств она приобретает такие новые свойства, которые требуют дополнительных энергетических затрат со стороны объекта: организации дополнительного (обеспечивающего основное) действия объекта, управления состоянием среды для реализации основного действия.

Остаточное противодействие среды характеризуется проявлением при изменении ее состояния эффектов, сопутствующих такому изменению, например эффектов, связанных с фазовыми переходами. Свойства среды взаимосвязаны. Поэтому при изменении одних ее свойств возможно «высвобождение» других, которые также могут быть источником остаточного противодействия. Например, при механическом воздействии на среду возможно ее разрушение, что приводит к потере ее первоначальной формы. Связанные с этим явления также являются источником остаточного противодействия.

Таким образом, противодействие среды характеризуется иерархической структурой, как показано на рис. 3.5.

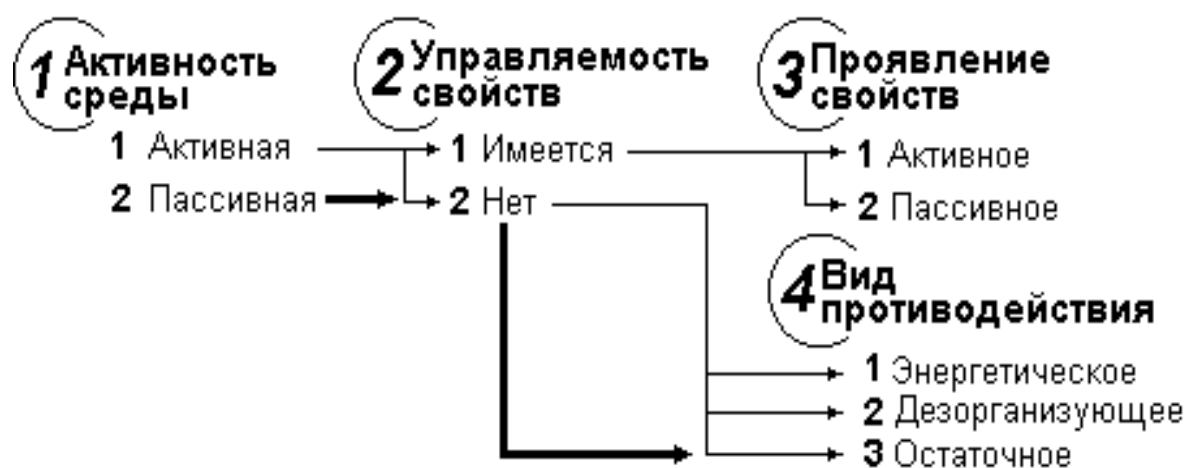


Рис. 3.5 Структура свойств среды

Наличие противодействия приводит к необходимости защиты объекта (разрабатываемой ТС), совершающего действие.

Защита от неуправляемого противодействия заключается в увеличении энергозатрат для:

- поддержания стабильного энергопотока основного действия объекта (защита от энергетического противодействия);
- управления состоянием среды во время ее изменения (защита от дезорганизирующего противодействия);
- сохранения свойств объекта под действием сопутствующих изменению состояния среды эффектов (защита от остаточного противодействия).

Организовать действие – значит установить связи между частями сред, которые войдут или могут войти в создаваемую ТС.

3.3 Алгоритм анализа и построения системы

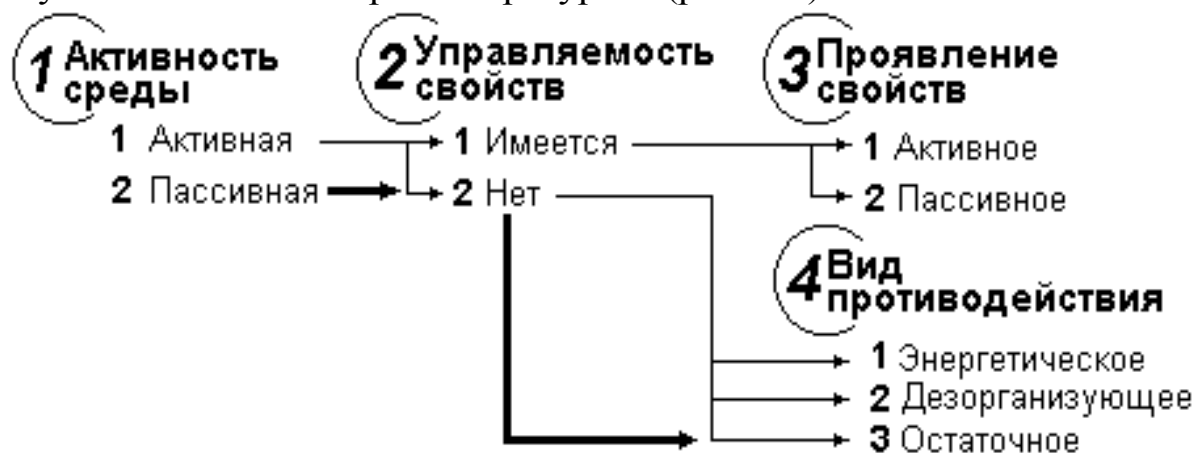
Наличие морфологических структур действия и среды позволяет решать поисковые задачи различной степени определенности. При этом становятся возможными 108 способов оказания действия (активное действие активной среды) и пять способов оказания противодействия: активная управляемая среда с активным проявлением свойств (противодействием), активная управляемая среда с пассивным проявлением свойств (противодействием), активная неуправляемая среда с энергетическим, дезорганизирующим и пассивным противодействием. Пассивная неуправляемая среда способна оказывать только остаточное противодействие – дополнительный вариант противодействия. Если исследуемый энергетический поток имеет унитарную природу (поток энергии одного вида), то оказывается, что существует по меньшей мере $540 + 1$ способов (без учета их совместной реализации по два, три и т.д.) изменения состояния системы.

Проведенный анализ трансформируется в конкретный инструмент, обеспечивающий решение практических задач построения ТС.

Действительно, любая связь характеризует действие и на первом этапе анализа устанавливает структуру отношений между объектами системы: объектом-источником действия (его генерацией, формированием и поддержанием) и средой (принимающим объектом), на которую осуществляется воздействие связи-действия. При этом связь полиструктурна и имеет минимум девять составляющих. Поэтому, если при проведении поиска установлены полиструктуры связи-действия и принимающей ее среды, появляется

принципиальная возможность определения продуктивных способов необходимой перестройки взаимодействующих элементов и самого процесса такого взаимодействия. Характер перестройки зависит от приоритетности операций действия, содействия и противодействия в рассматриваемой задаче и накладываемых обстоятельствами ограничений.

Например, если известны характеристики источника энергии и обрабатываемой среды, то на основе выделенных структур формируется алгоритм оценки способов возможного противодействия с указанием его конкретных ресурсов (рис. 3.6).



Способ и резервы противодействия

11-21-31	Действие среды на объект как нового объекта на новую среду
11-21-32	Подавление - экранирование свойств среды свойствами надсистемы
11-22-41	Препятствование изменению свойств за счет своего потенциала на микроуровне
11-22-42	Противодействие теми свойствами на уровне среды, которые высвобождаются действием объекта
11-22-43	Противодействие спровоцированным действием объекта свойствами среды на уровне фазовых переходов
12-22-43	Перевод среды в активное состояние надсистемой ситуативно и/или заранее

Рис. 3.6 Способы и резервы противодействия среды

Рассмотренный аппарат анализа системы О–ОС представляет собой конкретный механизм перестройки системы, обладающий следующими свойствами:

1. Обеспечивает формирование целенаправленной характеристики искомого действия при наличии характеристики среды или

характеристики искомого противодействия при наличии характеристики действия.

Например, если действие характеризуется как опосредованное (через материальный объект), дискретное (в определенные моменты времени), прямое (направленное на изменение конкретного свойства или группы свойств), сосредоточенное объективное (направленное на изменение конкретного объекта), то и противодействие может быть направлено на защиту свойства или группы свойств этого конкретного объекта во временные промежутки существования действия и против объекта-посредника. При этом варианте противодействие является симметричным действию.

Если такой вариант по какой-либо причине не может быть реализован, то следует использовать другие варианты противодействия согласно рекомендациям алгоритма.

Очевидно, что данный алгоритм может использоваться и при определении путей повышения качества уже существующей системы.

2. Способы перестройки объекта отранжированы так, что обеспечивается их последующая детализация, если таковая необходима. При этом обеспечивается наследование рекомендаций предыдущих уровней по отношению к последующим.

3. Обеспечивает построение функциональной структуры объекта проектирования.

Если природа энергопотока сложная, то число возможных вариантов существенно увеличивается. Тогда возникает ситуация, когда обилие возможностей порождает проблему выбора. Для ее решения следует использовать три инструмента:

- схемы изменения состояния системы;
- критерии завершенности построения (анализа);
- информационные принципы построения (анализа).

В зависимости от свойств среды и возможностей действия схемы изменения состояния системы обеспечивают определение вида и места приложения действия (что и куда направить) или вида и места защиты от него (где и как защититься). Критерии завершенности обеспечивают контроль достаточности действия или защиты. Информационные принципы позволяют сформировать источник действия и технологию его функционирования (чем, на что и в какой последовательности действовать или чем, что и в какой последовательности защищать).

3.4 Принципы построения информационных структур

Основываясь на аналогиях получения, обработки и использования генетической информации, можно построить совокупность принципов построения информационных структур, обеспечивающих целенаправленное исследование по устранению неопределенности поиска.

Можно предположить, что весь комплекс включает следующие группы принципов:

- отбора информации;
- чередования поступления информации к месту ее сборки;
- сборки информации в жизнеспособные структуры;
- образования качественно новых структур;
- синхронизации развития совокупности структур.

Основу «универсальности» любого разрабатываемого аппарата составляют его организационная системность и инструментализм, поэтому интерпретацию законов построения информационных структур следует осуществлять именно на системном уровне.

Принципы отбора информации

1. Отбор информации следует начинать с определения узловых моментов. *Узловыми моментами являются такие составляющие окружающей среды и связи между ними, которые наиболее чувствительны к возможным изменениям, обеспечивающим построение ТС и/или повышение ее качества.* В выделенной системе сред узловые моменты следует искать в среде C_1 .

2. Если узловой момент зафиксирован, то следует определить фактор, оказывающий наибольшее влияние на его состояние (доминанту влияния). Доминантой, как правило, оказывается среда C_5 и ее связи в первую очередь с C_1 , а также с другими элементами системы.

3. Если явная доминанта отсутствует (или ее определение затруднительно), то следует определить потенциально сильные источники информации и элементы системы (инициаторы), которые обеспечивают вскрытие этого потенциала.

4. Если инициаторы отсутствуют в рассматриваемой системе, то их следует искать на уровнях ее элементов (микроуровнях). Достаточными являются один или два микроуровня.

5. Если инициаторы отсутствуют в рассматриваемой системе, то их следует искать в родственной надсистеме (макроуровень). Достаточными являются один или два макроуровня.

6. Если доминанту обнаружить не удастся, то следует определить наиболее «слабые» факторы воздействия на узловой момент с целью контрастирования их недостатков и формирования на этой основе представлений о требуемой доминанте.

Примечание 1. Затруднения в определении доминанты влияния, как правило, значительно снижаются, если на основе анализа свойств среды определены ее слабые места.

Примечание 2. Если рассматриваемое свойство системы (ее элемента) и выбранная потенциальная доминанта имеют различную природу, то следует перейти к определению физического эффекта, обеспечивающего их согласование. При этом в систему может вводиться дополнительная обеспечивающая подсистема.

7. Если узловой момент обнаружен, то следует построить замкнутую цепочку обеспечения воздействия на него доминантой – установить причинно-следственную связь между проявлением доминанты и источником ее формирования.

8. Если узловой момент представляется набором элементов системы с различными свойствами (и, следовательно, различной чувствительностью к той или иной доминанте), то его следует разделить на части и каждую часть рассмотреть на основе приведенных выше принципов.

9. Если узловой момент подвержен действию нескольких доминант, рассмотрение проводится сначала отдельно по каждой доминанте, а затем оценивается их комплексное влияние на состояние исследуемого узлового момента. Наличие нескольких доминант расширяет возможности по перестройке системы.

10. Для полного исследования ситуации указанные принципы отбора информации последовательно применяются ко всей полиструктуре узлового момента, а при наличии нескольких узловых моментов – ко всем узловым моментам рассматриваемых пользователем уровней системы и родственных ей надсистем.

11. Полиструктура характеризует различные аспекты устройства системы (энергетические, пространственные, временные, физические и так далее в зависимости от используемого при анализе комплекса свойств, присущих объектам и связям).

Принципы чередования поступления информации к месту сборки

Так как результатом сборки информации является описание объекта исследования, то при соответствующей структуризации описания (формализации его позиций) очередность поступления не имеет принципиального значения. Вместе с тем очередность поступления имеет важное значение для оптимизации процесса исследования, который осуществляется как на основе анализа процесса выявления нового знания, так и на основе анализа имеющейся в базе знаний пользователя (и системы) уже полученной в результате исследования информации. Исходя из этого можно сформулировать следующие принципы очередности поступления:

1. В каждый момент времени следует выявлять информацию, которая в наибольшей степени способствует последующему раскрытию неопределенности, – полезную (продуктивную) информацию.

2. Полезной является любая вновь выявленная информация о состоянии системы. Продуктивной является информация, обеспечивающая скорейшее и полное раскрытие неопределенности. Как правило, это информация, обеспечивающая продолжение и/или завершение построения цепочки причинно-следственных связей.

3. Информационная неопределенность имеет иерархическую структуру. Поэтому начальные этапы поиска следует осуществлять по горизонтали. Это обеспечивает общую ориентацию в информационной ситуации. Вертикальный поиск целесообразен для осознания горизонтального уровня иерархии или перехода на следующий горизонтальный уровень.

4. Если имеется видимая возможность снятия неопределенности локальным вертикальным поиском, то ей следует воспользоваться (по ходу дела).

5. Любая сложная ТС независимо от ее природы состоит из четырех элементов: источника энергии (ИЭ), передачи (П), инструмента (И) и управления (У). Их выделение возможно на соответствующем уровне абстракции. Поэтому чередование горизонтального и вертикального поиска лучше определять степенью завершенности построения четырех основных элементов.

Принципы сборки информации в жизнеспособные структуры

Целью исследования является построение объекта – искусственной системы. Поэтому правомерно предположить, что принципы сборки информации должны находиться в полном соответствии

с законами ее построения и развития. Однако такое соответствие устанавливается лишь на конечном этапе построения системы. Это обусловлено тем, что принципы сборки характеризуют процесс построения системы, тогда как законы определяют ее конечное состояние. Таким образом, назначение принципов сборки информации заключается в том, что это способствует подготовке элементов ТС для перехода в конечное (жизнеспособное) состояние через ряд промежуточных по функциональному признаку, т.е. формированию способности структуры к выполнению функций объектов от низшего к высшему уровню укрупнения. Исходя из этого можно выделить следующие принципы сборки информации в жизнеспособные структуры:

1. Всю совокупность элементов системы можно представить парами элементов в цепочке их взаимодействия (наличного и/или желаемого): предшествующий элемент + последующий.

2. Первый элемент цепочки является источником энергии (энергетического воздействия). Предшествующий элемент по отношению к последующему является источником энергетического воздействия (кроме того, он может являться элементом передачи и управления), последующий элемент пары является инструментом.

3. Между предшествующим и последующим элементами должна быть проводящая среда.

4. Если элементы пары физически малосовместимы, то следует:

- изменить один или оба элемента пары;
- изменить проводящую среду в направлении обеспечения совместимости;

- установить между элементами согласующий элемент.

5. Изменения следует осуществлять резервами системы и/или ее родственных надсистем с использованием схем изменения состояния. При определении необходимых изменений следует использовать аппарат анализа связей и/или комплексный аппарат решения противоречий.

6. Нарращивание способности к реализации необходимой функции следует вести в направлении от простого к сложному,

например, для ТС: деталь – сборка – узел – механизм – система. При этом следует использовать рекомендацию пятого принципа предыдущей группы.

7. Сборку системы следует вести с учетом нереализованных возможностей составляющих ее элементов (их остаточных свойств).

Принципы образования качественно новых структур

Необходимость в построении новых структур возникает в условиях отсутствия возможности реализации важных для системы или ее части функций на основе свойств входящих в нее объектов. Реализация такой потребности возможна за счет изменений в системе (использование внутренних ресурсов) и/или за счет введения в систему новых элементов. Исходя из этого можно сформулировать следующие принципы образования качественно новых структур:

1. Подготовку следует начинать с выявления в системе (ее части, на микроуровне, макроуровне) имеющихся структур с минимальной недостаточностью свойств по реализации важной функции.

2. При наличии такой структуры следует использовать принципы сборки информации в жизнеспособные структуры, а также принципы отбора информации.

3. Если структура с минимальной недостаточностью не выявлена, то ее следует построить как подсистему, максимально используя при этом свойства наличных элементов системы. Подобная ситуация приводит к необходимости построения новой ТС с требуемыми свойствами.

Принципы синхронизации развития совокупности структур

Синхронизация развития означает совместное раскрытие информационно неопределенности по всем приоритетным элементам системы, обеспечивающим рост и проявление нового качества. Однако для исследователя, способного решать проблемы лишь в определенной последовательности, такая синхронизация трансформируется в череду приоритетного рассмотрения определяющих вопросов, обеспечивающих построение структуры.

Для реализации процесса синхронизации наряду с принципами чередования поступления информации к месту сборки следует использовать следующие положения:

1. При выделении узловых моментов следует регистрировать объекты, раскрывающие их неопределенности, – обеспечивающие моменты поиска.

2. Обеспечивающие моменты следует раскрывать на основе принципов отбора информации.

3. Потребность в рассмотрении очередного вопроса может быть оценена на основе:

- интуиции;
- формальной логики;
- матриц предопределенности рассмотрения очередного объекта по критерию количества указующих на него посылок. Теоретически простое положение не обеспечивается каким-либо разумным аппаратом реализации процесса синхронизации. Возможно, что он может быть построен на основе экспертных знаний по конкретным предметным областям;
- числа незамкнутых связей, ориентированных на последующий объект рассмотрения, по всей полиструктуре анализа.

4. В автоматизированном варианте синхронизация развития структур обеспечивается многорежимностью работы машины.

С целью усиления рассмотренных возможностей следует осуществлять детализацию анализируемых объектов на основе ряда информационных операторов:

- что: какой вид энергии обрабатывается;
- где: в каком месте;
- когда: в какое время;
- кто (что): какой элемент вырабатывает, передает или преобразует энергопоток;
- кому (чему): приемник энергии;
- зачем: назначение (передачи, преобразования);
- как: способ реализации изменений;
- сколько: числовые характеристики.

Анализ исходной ситуации выявляет все необходимые сведения по переводу системы из исходного в конечное состояние:

- исходное состояние системы;
- желаемое (конечное) состояние системы;
- нежелательные изменения в системе;
- энергетические ресурсы и источники их формирования и контроля;
- элементы и связи, обеспечивающие формирование, поддержание и контроль конкретных свойств системы;

- элементы и связи, препятствующие формированию, поддержанию и контролю конкретных свойств системы;
- набор вариантов действий в системах, надсистемах, подсистемах, обеспечивающий перевод исследуемой системы из исходного в конечное состояние;
- предпочтительные варианты действий по такому переводу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хубка, В. Теория технических систем / В. Хубка. – М. : Мир, 1987. – 208 с.
2. Шрейдер, Ю. А. Системы и модели / Ю. А. Шрейдер. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.
3. Жуков-Варежников, Н. Н. Теория генетической информации / Н. Н. Жуков-Варежников. – М. : Мысль, 1965. – 320 с.
4. Анохин, П. К. Избранные труды. Философские аспекты теории функциональных систем / П. К. Анохин. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
5. Судаков, К. В. Общая теория функциональных систем / К. В. Судаков. – М. : Медицина, 1984. – 244 с.
6. Мельникова, Л. И. Системный анализ при создании и освоении объектов техники / Л. И. Мельникова, В. В. Шведова. – М. : ВНИИПИ, 1991. – 85 с.
7. Шафрановский, И. И. Симметрия в природе / И. И. Шафрановский. – Л. : Недра, 1968. – 184 с.

Раздел II

ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Тема 4

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ БАЗА ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Системы размерных величин. Принцип Фурье. Безразмерные комплексы; критерии подобия. Преимущества анализа размерностей. Методы анализа размерностей.

4.1 Размерности величин

В случаях, когда изучение реальных процессов и явлений по тем или иным причинам затруднительно, невозможно или нецелесообразно в реальном масштабе определяющих эти процессы параметров и характеристик, их исследование осуществляют на физических моделях, а полученные при этом данные затем обобщают. Такое обобщение становится возможным при соблюдении определенных условий – условий подобия.

Теоретической базой построения и исследования физических моделей являются анализ размерностей и теория подобия. При этом теория подобия определяет условия возможного обобщения полученных на моделях данных, а анализ размерностей используется для формирования этих условий.

Первоначально анализ размерностей использовался как технический прием, позволяющий в ряде случаев сократить число исследуемых параметров процессов путем формирования их безразмерных комбинаций. Вместе с тем он может использоваться и для построения математических моделей изучаемых явлений, если выявлены определяющие их параметры и характеристики.

Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Если некоторые величины принять за основные и ввести для них определенные единицы измерения – размерности, то размерности остальных величин, называемых производными от основных, можно определенным образом выразить через основные.

На практике можно использовать одну, две, три основные размерности, пользоваться только безразмерными величинами. История человечества богата примерами оригинальных единиц измерения, таких как локоть, ладонь, дюйм (длина верхней фаланги большого пальца), ярд (длина отрезка ткани, зажатой с одного конца зубами, а с другого – отведенной в сторону рукой) и т.д. В ряде случаев одна величина имеет различную меру. Так, «румб» в геодезии – угол между меридианом и направлением на выбранную точку, отсчитываемый от меридиана в обе стороны от 0 до 90°; в морской навигации – мера угла окружности горизонта, разделенная на 32 румба, а в метеорологии – на 16 румбов. Можно привести и другие примеры.

Наибольшее распространение получила система трех измерений: масса $[M]$, линейный размер (длина) $[L]$, время $[T]$ (знак $[]$ является символом размерности). Их выбор удобен тем, что они, по нашему мнению, легко поддаются измерению и достаточно фундаментально описывают окружающую действительность. Размерности остальных физических величин выводятся через принятые в качестве основных. Эта система просто привычна для наших ощущений, хотя практика инженерного эксперимента предполагает выбор наиболее удобного для исследования комплекса основных размерностей. Например, в механике наряду с указанной широко используются системы, в которых основными являются $[F]$ (сила), $[L]$, $[T]$; $[M]$, $[L]$, $[T]$, $[V]$ (объем) и т.д.; нередко размерность времени опускается. Каких-либо объективных аргументов в пользу такого положения привести невозможно. В каждом конкретном случае исследователь вправе самостоятельно определять число и номенклатуру системы основных размерностей.

Если в систему входят величины, связанные с понятием «тепло», то к указанным размерностям следует добавить еще одну: $[\tau]$ – температуру (для построения формул динамики) или $[H]$ – тепловую энергию (для построения «тепловой» формулы). Для электрических и магнитных составляющих добавляются: $[K]$ – диэлектрическая постоянная (используется, как правило, в качестве основной при моделировании электростатических свойств явлений); $[\mu]$ – постоянная магнитного поля (используется, как правило, в качестве основной при моделировании электромагнитных свойств явлений) либо скорость распространения электромагнитных волн в среде $[c]$.

Методы анализа размерностей во многом основаны на работах Фурье, который сформулировал принцип однородности по размерности. Он гласит, что любое уравнение корректно только в том

случае, если все его члены имеют одинаковую размерность: показатели степеней при основных размерностях одинаковы у всех членов уравнения, а его форма не зависит от единиц измерения величин одной природы.

Использование аппарата анализа размерностей как для установления взаимосвязи параметров процесса, так и для сокращения числа исследуемых переменных предполагает выполнение трех условий:

- понимание исследуемого процесса;
- наличие формул размерностей исследуемых величин в принятой основной системе размерностей;
- знание методов обработки размерностей.

Варианты формул размерностей в наиболее часто используемых основных системах приведены в табл. 4.1–4.3.

В качестве методов обработки размерностей используются методы Букингема, Релея, поэтапный метод Ипсена, метод линейных пропорциональностей Барра и др.

Таблица 4.1

Размерности механических величин

Величина	Размерности
Длина L	L
Объем W	L^3
Скорость V	LT^{-1}
Кривизна	L^{-1}
Ускорение A или g	LT^{-2}
Плотность ρ	ML^{-3}
Количество движения	MLT^{-1}
Момент количества движения	ML^2T^{-1}
Сила F	MLT^{-2}
Работа и энергия	ML^2T^{-2}
Мощность	ML^2T^{-3}
Вязкость η	$ML^{-1}T^{-1}$
Кинематическая вязкость ν	L^2T^{-1}
Давление, касательное напряжение P, τ	$ML^{-1}T^{-2}$
Угловая скорость, частота ω, f	T^{-1}
Расход Q	L^3T^{-1}
Объемный модуль упругости E	$ML^{-1}T^{-2}$

Таблица 4.2

Размерности тепловых величин

Величина	Тепловая формула	Динамическая формула
Количество тепла H	H	ML^2T^{-2}
Удельная теплоемкость C_p	$HM^{-1}t^{-1}$	$L^2T^{-2}t^{-1}$
Теплопроводность k	$HL^{-1}T^{-1}t^{-1}$	$LMT^{-3}t^{-1}$
Коэффициент теплопередачи h	$HL^{-2}T^{-1}t^{-1}$	$MT^{-3}t^{-1}$
Энтропия s	Ht^{-1}	$ML^2T^{-2}t^{-1}$
Коэффициент теплового расширения β	t^{-1}	t^{-1}

Таблица 4.3

Размерности электрических и магнитных величин

Величина	Электромагнитная формула	Электростатическая формула
Напряженность магнитного поля	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}K^{1/2}$
Магнитный заряд полюса	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\mu^{1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}K^{-1/2}$
Электрический ток	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}K^{1/2}$
Электрический заряд	$M^{1/2}L^{1/2}\mu^{-1/2}$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}K^{1/2}$
Разность потенциалов	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}\mu^{1/2}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}K^{-1/2}$
Сопротивление	$LT^{-1}\mu$	$L^{-1}TK^{-1}$
Емкость	$L^{-1}T^{-2}\mu^{-1}$	LK
Индуктивность	$L\mu$	$L^{-1}T^2K^{-1}$
Магнитная проницаемость	μ	$L^{-2}T^2K^{-1}$
Диэлектрическая постоянная	$L^{-1}T^2\mu^{-1}$	K

4.2 Методы обработки размерностей

Метод Букингема

Пример. Исследуется силовое гидравлическое устройство автомобиля (рис. 4.1), основными параметрами и характеристиками которого приняты:

F – силовое воздействие;

L – линейные размеры конструкции;

V – скорость движения элементов конструкции;

ρ – плотность рабочей жидкости;
 μ – вязкость рабочей жидкости;
 g – ускорение свободного падения;
 P – давление.

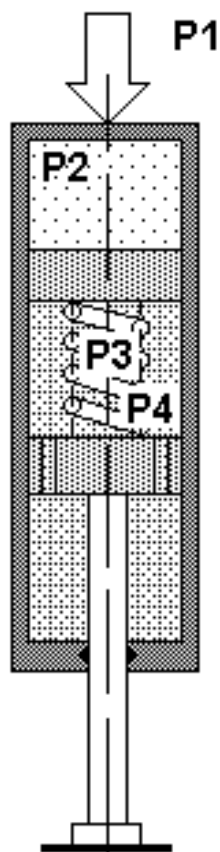


Рис. 4.1 Силовое устройство

Размерности физических величин: $F: MLT^{-2}$; $L: L$; $V: LT^{-1}$; $P: ML^{-3}$; $\mu: ML^{-1}T^{-1}$; $g: LT^{-2}$; $P: ML^{-1}T^{-2}$.

По методу Букингема выбираются три основные величины (выберем для примера в качестве основных V, p, L), а остальные выражаются через них в виде

$$H = kV^x p^y L^z,$$

где H – искомая величина (все исследуемые параметры, кроме выделенных в правой части последнего равенства); k – безразмерный коэффициент пропорциональности.

Уравнивая левые и правые части этого соотношения по размерности и учитывая, что в системе основных размерностей $[M]$, $[L]$, $[T]$

$$V = LT^{-1}, p = ML^{-3}, L = L,$$

получим

$$L^s M^k T^h = L^{x-3y+z} M^y T^{-x}.$$

Первая часть данного соотношения – размерность искомой величины, вторая – размерность правой части исходного соотношения.

Далее следует подставить в левую часть этого уравнения последовательно размерности для величин F , P , m , g и в каждой подстановке решить свою систему уравнений:

$$s = x - 3y + z;$$

$$k = y;$$

$$h = -x.$$

Для выражения сил $s = k = 1$, $h = -2$. Тогда $F = kV^2 p L^2$.

Для остальных величин получим

$$m = k_1 V p L;$$

$$P = k_2 V^2 p;$$

$$g = k_3 V^2 L^{-1}.$$

Входящие в полученные зависимости коэффициенты k_i подлежат экспериментальному определению. В рассмотренном примере все они равны единице, т.е. полученные зависимости выражают объективные закономерности исследуемого процесса.

Для однородных относительно размерностей уравнений справедлива теорема Букингема, первая часть которой констатирует: *«Если какое-либо уравнение однородно относительно размерностей, то его можно преобразовать к соотношению, содержащему набор безразмерных комбинаций величин»*.

Определенные методом Букингема соотношения приводятся к безразмерному виду делением их левых частей на соответствующие правые части:

$$F/(p V^2 L^2) = \Pi_1, P/(V^2 p) = \Pi_2, m/(V p L) = \Pi_3, V/(gL)^{0.5} = \Pi_4.$$

Полученное сокращение параметров процесса (первоначально с семи размерных F , L , V , p , m , g , P до четырех безразмерных Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4) дает два существенных для экспериментатора преимущества:

1. Сокращение необходимого числа экспериментальных исследований.

2. Обеспечение возможности переноса результатов эксперимента на весь класс явлений, подобных исследуемому. Одним из условий

такого переноса является равенство безразмерных Π -комплексов, называемых критериями подобия.

Уравнение, устанавливающее связь между критериями подобия, называется критериальным. Для рассмотренного выше примера одна из возможных записей критериального уравнения имеет вид:

$$F/(pV^2L^2) = f[P/(V^2p), m/(VpL), V/(gL)^{0.5}],$$

или

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4).$$

Справедливость подобных соотношений определяется второй частью теоремы Букингема (Π -теоремы), используемой для контроля результатов анализа размерностей: «Если существует однозначное соотношение $f(A_1, A_2, \dots, A_m) = 0$ между m физическими величинами, для описания которых используется h основных единиц, то существует также соотношение $f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-h}) = 0$ между $(m - h)$ безразмерными комбинациями, составленными из этих физических величин».

Примечание 1. Если не удастся получить систему безразмерных комбинаций, то это является верным признаком того, что было что-то пропущено.

Примечание 2. Теорема Букингема устанавливает лишь минимальное число безразмерных комбинаций. При проведении анализа их может быть получено больше $(m - h)$. При выборе разных комплектов основных определяющих процесс величин можно получить разные комплекты безразмерных комбинаций, хотя их число будет не меньше $(m - h)$.

Примечание 3. Как и при обеспечении однородности по размерности, получение правильного числа Π -членов еще не является гарантией корректного решения. Тем не менее неправильное число таких комплексов определенно указывает на допущенные ошибки.

Правильное число безразмерных комплексов определяется модифицированной Π -теоремой, сформулированной Ван Дристом: «Число безразмерных комбинаций полной системы равно общему числу переменных m минус максимальное число этих переменных n , не образующих безразмерной комбинации». Во многих случаях определение числа n достаточно затруднительно.

Метод Релея

Если в методе Букингема безразмерные комплексы определялись последовательно, то метод Релея позволяет установить все их

одновременно. Порядок его применения проиллюстрируем для рассмотренной ранее задачи о силовом гидравлическом устройстве.

Исходная зависимость параметров имеет следующий вид:

$$F = f(L, V, p, m, g, P).$$

Для обеспечения однородности уравнения по размерности (в данном случае размерности силы) следует ввести соответствующие степени для элементов его правой части:

$$F = f(L^b, V^c, p^d, m^e, g^f, P^h).$$

Далее, используя размерности физических величин, следует уравнивать их с целью определения значений введенных показателей степеней: $F: MLT^{-2}$; $L: L$; $V: LT^{-1}$; $p: ML^{-3}$; $m: ML^{-1}T^{-1}$; $g: LT^{-2}$; $P: ML^{-1}T^{-2}$.

$$MLT^{-2} = f[(L)^b, (LT^{-1})^c, (ML^{-3})^d, (ML^{-1}T^{-1})^e, (LT^{-2})^f, (ML^{-1}T^{-2})^h];$$

$$M: 1 = d + e + h;$$

$$L: 1 = b + c - 3d - e + f - h;$$

$$T: -2 = -c - e - 2f - 2h.$$

Три уравнения содержат шесть переменных. Так как основными выбраны три размерности, то из имеющихся шести переменных любые три следует выразить через остальные, например:

$$1 = d + e + h \rightarrow d = 1 - e - h;$$

$$1 = b + c - 3d - e + f - h \rightarrow b = 1 - c + 3d + e - f + h;$$

$$-2 = -c - e - 2f - 2h \rightarrow c = 2 - e - 2h - 2f \rightarrow 2 - e + f.$$

Этого достаточно, чтобы преобразовать исходное однородное уравнение к виду:

$$F = f(L^{2-e+f}, V^{2-e-2h-2f}, p^{1-e-h}, m^e, g^f, P^h).$$

Теперь следует сформировать безразмерные комплексы объединением переменных с одинаковыми показателями степеней (степени устанавливались для трех основных размерностей):

$$F = f[L^2, V^2, p, (m/(LVp))^e, (Lg/(V^2))^f, (P/(V^2p))^h],$$

или

$$F/(L^2V^2p) = f[(m/(LVp))^e, (Lg/(V^2))^f, (P/(V^2p))^h],$$

что равнозначно ранее полученной совокупности безразмерных комплексов (точное соответствие выполняется при $e = 1$, $f = -2$, $h = 1$).

Относительная сложность метода Релея заключается в преобразовании показателей степеней при определяющих процесс параметрах. Если это удастся сделать без серьезных вычислений, то метод Релея позволяет сразу установить всю совокупность безразмерных комплексов.

Метод Ипсена

Суть метода заключается в поэтапном формировании безразмерных комплексов путем исключения основных размерностей в исходном уравнении связи между переменными исследуемого процесса. По сравнению с рассмотренными выше методами он обеспечивает контроль над процессом построения безразмерных комплексов как путем выбора порядка исключения размерностей, так и путем выбора переменной, которая используется для исключения конкретной размерности.

Порядок использования метода Ипсена можно показать на ранее рассмотренном примере с силовым гидравлическим цилиндром.

Исходная зависимость параметров имеет вид:

$$F = f(L, V, p, m, g, P).$$

Уравнение размерностей:

$$MLT^{-2} = f[(L), (LT^{-1}), (ML^{-3}), (ML^{-1}T^{-1}), (LT^{-2}), (ML^{-1}T^{-2})].$$

Размерность физических величин: $F: MLT^{-2}$; $L: L$; $V: LT^{-1}$; $p: ML^{-3}$; $m: ML^{-1}T^{-1}$; $g: LT^{-2}$; $P: ML^{-1}T^{-2}$.

Для приведения исходной зависимости к безразмерному виду последовательно исключаем основные размерности с использованием параметров, входящих в правую часть уравнения.

Первой исключим размерность массы, используя параметр p (плотность жидкости). Преобразования подлежат только те переменные, которые содержат исключаемую размерность:

$$F/p = f(L, V, p/p, m/p, g, P/p);$$

$$L^4T^{-2} = f[(L), (LT^{-1}), (1), (L^2T^{-1}), (LT^{-2}), (L^2T^{-2})].$$

Параметр p/p теперь можно исключить из правой части:

$$F/p = f(L, V, m/p, g, P/p);$$

$$L^4T^{-2} = f[(L), (LT^{-1}), (L^2T^{-1}), (LT^{-2}), (L^2T^{-2})].$$

Подобные преобразования допустимы лишь в рассматриваемой ситуации, когда форма функциональной связи между параметрами не определена.

Следующей исключим размерность времени, используя для этого скорость V :

$$F/p/V^2 = f(L, V/V, m/p/V, g/V^2, P/p/V^2);$$

$$L^2 = f[(L), (1), (L), (1/L), (1)],$$

или

$$F/p/V^2 = f(L, m/p/V, g/V^2, P/p/V^2);$$

$$L^2 = f[(L), (L), (1/L)].$$

Последней исключаем линейную размерность, используя переменную L :

$$F/p/V^2/L^2 = f(L/L, m/p/V/L, Lg/V^2, P/p/V^2);$$

$$1 = f[(1), (1), (1)],$$

или

$$F/p/V^2/L^2 = f[(m/p/V/L), (Lg/V^2), (P/p/V^2)].$$

Последняя зависимость аналогична ранее полученному критериальному уравнению.

Затруднения в применении метода Ипсена появляются в задачах с увеличением числа переменных и числа используемых для анализа основных размерностей (четыре – пять). В этих случаях для исключения размерностей следует использовать комбинации нескольких определяющих процесс параметров. Каких-либо рекомендаций о последовательности исключения размерностей и о выборе используемых для этого целесообразных комбинаций параметров дать не представляется возможным.

Метод Барра (линейных пропорциональностей)

Рассмотренные выше методы предоставляют небольшую возможность получать не только корректный, но и удобный для исследователя набор безразмерных комплексов. Такие решения можно найти комбинированием переменных, однако эта процедура достаточно утомительна, а полный набор удобных решений далеко не очевиден.

С целью устранения этого недостатка в конце 60-х гг. Барр разработал метод линейных пропорциональностей. Его суть заключается во включении в процедуру анализа размерностей промежуточного шага, обеспечивающего преобразование первоначально неоднородного по размерности уравнения в однородное с одной размерностью, в частности линейной. Полученные таким образом комплексы названы линейными пропорциональностями. Используемый

при этом принцип переопределенности позволяет исследователю осуществить выбор удобных комбинаций из возможного их множества. Такое однородное по размерности уравнение приводится к безразмерному аналогично методу Ипсена.

Применительно к рассмотренному примеру определенные заранее линейные пропорциональности приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Линейные пропорциональности

Переменные	m	P	V	F
Ускорение «g»	$(m/p)^{2/3}/g^{1/3}$	$P/(pg)$	V^2/g	$F/(pg)^{1/3}$
Динамический коэффициент вязкости m		$m/(pP)^{1/2}$	$m/(pV)$	–
Давление P			–	$(F/P)^{1/2}$
Скорость V				$(F/(pV^2))^{1/2}$

Теперь для построения критериального уравнения можно использовать различные наборы безразмерных комбинаций исходя из удобства управления переменными при реализации эксперимента и контроля их изменения. При этом необходимо, чтобы каждая из основных переменных процесса встречалась в безразмерных комплексах не менее одного раза, а число членов однородного по размерности уравнения было на единицу больше числа членов однородного безразмерного уравнения. «Лишним» членом в однородном по размерности уравнении является линейный размер, который исключается при анализе уже известным образом.

В общем случае при комбинировании N переменных (без плотности и линейного размера) можно составить $(N - 1) + (N - 2) + \dots + 1$ линейных пропорциональностей, из которых необходимыми являются только $(N - 1)$. Применительно к примеру реально формируется восемь линейных пропорциональностей и возможными являются приведенные ниже некоторые варианты однородного по размерности уравнения:

$$(F/(pV^2))^{1/2} = f[m/(pV), m/(pP)^{1/2}, (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$(F/(pV^2))^{1/2} = f[m/(pV), P/(pg), (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$(F/(pV^2))^{1/2} = f[V^2/g, m/(pP)^{1/2}, (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$(F/(pV^2))^{1/2} = f[V^2/g, P/(pg), (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$(F/P)^{1/2} = f[m/(pV), m/(pP)^{1/2}, (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$(F/P)^{1/2} = f[m/(pV), P/(pg), (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$(F/P)^{1/2} = f[V^2/g, m/(pP)^{1/2}, (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$(F/P)^{1/2} = f[V^2/g, P/(pg), (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$F/(pg)^{1/3} = f[m/(pV), m/(pP)^{1/2}, (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$F/(pg)^{1/3} = f[m/(pV), P/(pg), (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$F/(pg)^{1/3} = f[V^2/g, m/(pP)^{1/2}, (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L];$$

$$F/(pg)^{1/3} = f[V^2/g, P/(pg), (m/p)^{2/3}/g^{1/3}, L] \text{ и др.}$$

Полученный ранее набор безразмерных комплексов является комбинацией следующих составляющих в приведенных уравнениях: $(F/(pV^2))^{1/2}$, $m/(pV)$, $P/(pg)$, V^2/g .

Таким образом, метод Барра предоставляет широкие возможности по формированию условий построения критериальных уравнений исходя из возможностей по организации и проведению эксперимента.

Получаемые тем или иным методом безразмерные комплексы в дальнейшем используются для построения масштабных физических моделей, контроля правильности экспериментальных исследований и переноса результатов физического эксперимента с моделей на натурные процессы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Мир, 1972. – 381 с.
2. Шарп, Дж. Гидравлическое моделирование / Дж. Шарп. – М. : Мир, 1984. – 280 с.

Тема 5

ПОДОБИЕ ЯВЛЕНИЙ. ТЕОРЕМЫ ПОДОБИЯ

Условия подобия. Индикаторы подобия, масштабы моделирования, интегральные аналоги. Теоремы подобия, дополнительные положения. Способы получения критериев подобия. Подобные преобразования, метод интегральных аналогов. Типовые критерии подобия. Подход к автоматизации процедур формирования условий моделирования.

5.1 Условия подобия явлений

Теория подобия и анализ размерностей являются методами частичного анализа. Каждый из них позволяет получить неполный ответ, и конечный результат применения того и другого представляет собой безразмерное функциональное уравнение, пригодное для разработки моделей. Однако если анализ размерностей служит в первую очередь средством интерпретации экспериментальных данных на основе законов моделирования, полученных из уравнения связи безразмерных параметров, то теория подобия и анализ подобия предназначены главным образом для вывода законов моделирования, на основании которых можно получить безразмерное функциональное уравнение.

Инструменты анализа размерностей являются основой для построения физических масштабных моделей, подобных натурным техническим системам. Подобными являются такие технические системы, у которых подобны все характеризующие параметры, т.е. все векторные величины геометрически подобны, а все скалярные величины пропорциональны в соответствующих точках пространства и в соответствующие моменты времени.

При решении технических задач физическое подобие рассматривается как совокупность подобия частных характеристик явления.

Условиями подобия являются:

– принадлежность явлений природы и модели к одному классу дифференциальных уравнений;

- подобие условий однозначности;
- равенство критериев подобия для натуры и модели в сходственных точках исследуемого пространства.

Первое условие при использовании в модели и натуре тех же физических эффектов выполняется автоматически.

Под **подобием условий однозначности** понимается подобие начальных и граничных условий, геометрическое, кинематическое и динамическое подобие. Если для исследуемой системы характерны температурные и химические процессы, то в условия однозначности входят также температурное и химическое подобие.

Геометрическое подобие выражается равенством всех соответственных углов и пропорциональностью всех линейных размеров:

$$\alpha_{1H} = \alpha_{1M}; \alpha_{2H} = \alpha_{2M}; \dots; \alpha_{iH} = \alpha_{iM};$$

$$\frac{l_{1H}}{l_{1M}} = \frac{l_{2H}}{l_{2M}} = \dots = \frac{l_{iH}}{l_{iM}} = k_l = \text{const.}$$

Кинематическое подобие системы определяется тождественностью направления и пропорциональностью величин времени, действующих скоростей и ускорений:

$$\frac{V_{1H}}{V_{1M}} = \frac{V_{2H}}{V_{2M}} = \dots = \frac{V_{iH}}{V_{iM}} = k_v = \text{const.}$$

Динамическое подобие системы определяется тождественностью направления действия и пропорциональностью вектора сил G или напряжений σ :

$$\frac{G_{1H}}{G_{1M}} = \frac{G_{2H}}{G_{2M}} = \dots = \frac{G_{iH}}{G_{iM}} = k_g = \text{const.},$$

$$\sigma_{1H} / \sigma_{1M} = \sigma_{2H} / \sigma_{2M} = \dots = \sigma_{iH} / \sigma_{iM} = k_\sigma = \text{const.}$$

Температурное подобие и подобие тепловых потоков определяется соответственно геометрическим подобием температурных полей и пропорциональностью всех температур. Химическое подобие предполагает пропорциональность концентраций веществ в сходственных точках пространства.

При моделировании физических явлений масштабы k_l , k_v , k_g , k_σ и другие называют **масштабами модели** (масштабами моделирования, коэффициентами подобия).

В соответствии со свойствами пропорции из соотношения

$$\frac{l_{2H} - l_{1H}}{l_{2M} - l_{1M}} = \frac{\Delta l_{iH}}{\Delta l_{iM}} = k_l = \text{const}$$

следует правило замещения:

$$(\Delta l_n / \Delta l_m)_{\Delta l \rightarrow 0} = dl_n / dl_m = k_l = \text{const},$$

из которого ясно, что при установлении физического подобия явлений вместо производных (и подинтегральных выражений) от характерных величин можно рассматривать соответствующие соотношения их конечных значений, которые называются *интегральными аналогами*. Последнее следует из положения, что предел постоянной величины равняется самой величине.

Третье условие подобия проверяется контролем равенства значений критериев подобия для натуры и модели в сходственных точках исследуемого пространства переменных. Критерии подобия отражают в безразмерном виде основные закономерности и явления, характерные для исследуемого объекта. Их число и состав зависят от физической природы явлений.

Методы установления подобия явлений и процессов базируются на трех основных теоремах подобия и дополнительных положениях.

5.2 Теоремы подобия

Первая теорема постулирует третье условие подобия: *подобные объекты (явления, процессы, системы, знаковые образования и др.) имеют индикаторы подобия, равные единице, и численно одинаковые критерии подобия*.

Под индикаторами подобия понимаются отношения масштабов сходственных величин (сил, масс и т.п.). Равенство индикаторов подобия означает моделирование сходственных параметров процесса в одном масштабе.

Критерии подобия можно преобразовать в критерии другой формы и получать новые критерии путем операций деления и перемножения как между собой, так и на постоянную безразмерную величину. При этом общее число критериев должно оставаться неизменным.

Вторая теорема (П-теорема, теорема Букингема) была уже рассмотрена. Один из ее вариантов: *всякое уравнение физического процесса $x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n)$, объединяющее между собой n величин, среди которых t величин обладают независимыми размерностями, можно преобразовать к критериальному уравнению, которое свя-*

зывает $(n - m)$ критериями подобия. Теорема постулирует возможность построения безразмерных уравнений связи и минимальное число критериев подобия. Практические задачи иногда приводят к получению большего числа критериев подобия. В этих случаях верхняя граница устанавливается правилом Ван Дриста: *возможное число безразмерных комплексов равно числу определяющих процесс величин, исключая число тех величин, которые не дают безразмерных комплексов.*

Третья теорема постулирует необходимые и достаточные условия подобия: *необходимым и достаточным условием подобия двух объектов является пропорциональность сходственных параметров, входящих в условия однозначности, и равенство определяющих критериев подобия.* Так как физическая природа явлений в объекте существенно неравномерна, то построение модели проводится по основным критериям подобия, отражающим наиболее существенные явления исследуемого процесса. Такие критерии называются *определяющими критериями* подобия.

Дополнительные положения

Сформулированные профессором В. А. Вениковым дополнительные условия рассматривают вопросы подобия сложных нелинейных анизотропных и неоднородных систем и сложных явлений:

1. Сложные объекты, явления, процессы, системы, составленные из нескольких подсистем, соответственно подобных в отдельности, подобны и в целом, если подобны условия однозначности на границах между подсистемами или равны критерии подобия, составленные из параметров, общих для подобных систем.

2. Условия подобия, справедливые для линейных систем, могут быть распространены и на нелинейные системы при соблюдении дополнительного условия – совпадения относительных характеристик переменных параметров, т.е. их зависимостей от переменных величин, заданных с учетом динамики происходящих явлений.

3. Условия подобия, справедливые для изотропных и однородных систем, могут быть распространены и на анизотропные и неоднородные системы, если только соответственные относительные анизотропии и неоднородности в сравниваемых системах одинаковы.

В ряде случаев для определяющих компонентов процесса справедливо условие суперпозиции. Тогда подобие явлений целесообразно устанавливать на основе положений аддитивности. Аддитивно подобными называют также тела, которые можно располо-

жить так, что границы тел будут совпадать всеми своими точками в результате равномерной деформации.

Для классической мультипликативной теории подобия связь между параметрами системы определяют выражения типа $x_{hi} = k_{xi}x_{mi}$. Если физические системы аддитивно подобны, то характеризующие их величины преобразуют по формуле

$$x_{hi} = x_{mi} + c_i,$$

где c_i – аддитивная константа подобия.

Между значениями x и c существует соотношение $c_i = x_{mi}(k_{xi} - 1)$.

В некоторых случаях (например, при моделировании рек) модели с пропорциональными линейными масштабами не могут точно воспроизводить физические характеристики натуры. Тогда необходимо и возможно отходить от строгого геометрического подобия без значительных потерь в точности. Для этого вводят несколько линейных масштабов, например вертикальный и горизонтальный. В этих условиях характерный (определяющий) размер (например, вертикальный, горизонтальный или их комбинацию) выбирают на основе рассмотрения физической сущности исследуемого процесса.

В природе нет полностью сходных явлений. При решении конкретных технических задач имеет место приближенное подобие, которое обусловлено наличием упрощающих допущений, оцениваемых в дальнейшем на основании экспериментальных и аналитических исследований. Приближенное моделирование характеризуется различной степенью приближения к полному моделированию.

5.3 Способы определения критериев подобия

При построении физических моделей критерии подобия определяют на основе двух подходов, каждый из которых представлен набором способов. Первый подход основан на применении анализа размерностей, определяющих исследуемый процесс. Второй подход базируется на анализе систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс, и условий однозначности.

Подход на основе анализа размерностей может быть представлен рассмотренными ранее методами Релея, Букингема, Ипсена и методом Барра.

Второй подход представлен тремя наиболее распространенными методами: методом подобных преобразований, интегральных аналогов, методом приведения уравнения к безразмерному виду.

Метод подобных преобразований предписывает запись уравнений для натуры через величины модели, умноженные на соответствующие масштабные коэффициенты. Например, простейшая модель поступательного движения в форме второго закона Ньютона после такого преобразования будет иметь вид:

$$k_M M_M \frac{dk_v V_M}{dk_t t_M} = k_R R_M; \frac{k_L dL_M}{k_t dt_M} = k_v V_M.$$

Далее делением одной части уравнения на другую (например, левую на правую) приводят его к безразмерному виду:

$$\frac{k_M k_v}{k_t k_R} \frac{M_M}{R_M} \frac{dV_M}{dt_M} = 1;$$

$$\frac{k_L}{k_v k_t} \frac{dL_M}{dt_M} \frac{1}{V_M} = 1.$$

Полученные таким образом индикаторы подобия являются критериями подобия, выраженными через масштабные коэффициенты. Первый из них представляет критерий Ньютона, второй – критерий Стурхалля.

Метод интегральных аналогов заключается в приведении исходного уравнения к безразмерному виду, как и в методе подобных преобразований:

$$\frac{M}{R} \frac{dV}{dt} = 1, \quad \frac{dL}{dt} \frac{1}{V} = 1;$$

в замене величин их размерностями (следует предварительно опустить знаки дифференцирования и интегрирования, заменив их знаками соответствия):

$$\frac{MV}{Rt} \sim 1; \quad \frac{L}{tV} \sim 1.$$

Полученные таким образом безразмерные сочетания размерных величин и являются критериями подобия.

Рассмотренные первые два метода используют процедуру приведения уравнений к безразмерному виду, которая в ряде случаев может быть использована самостоятельно для получения критериев подобия.

Типовые критерии подобия

Практикой моделирования технических систем различной физической природы установлены характерные для них типовые критерии подобия.

Действие активных сил определяется **критерием Ньютона**, являющимся модифицированной записью второго закона Ньютона:

$$Ne = \frac{F}{(pV^2L^2)}.$$

Действительно,

$$F = Ma = pva = pL^2vTaT^{-1} = pV^2L^2,$$

где M , p , a , T – масса, плотность, ускорение и время движения рассматриваемого объекта.

Так как сила есть произведение давления на площадь, то из критерия Ньютона элементарно получается следующий безразмерный комплекс – **критерий Эйлера**:

$$Eu = \frac{P}{V^2p}.$$

Если в системе действуют только силы давления, то при наличии геометрического и кинематического подобия, подобия начальных и граничных условий равенство критерия Эйлера в модели и натуре выполняется автоматически.

Критерий Рейнольдса (Re) определяет характер течения вязкой жидкости под действием сил давления при наличии сил внутреннего трения:

$$Re = \frac{m}{VpL},$$

где m – коэффициент динамической вязкости.

Критерий Фруда определяет пропорциональность сил давления и сил тяжести:

$$Fr = V(gL)^{-0.5} = V^2(gL)^{-1}.$$

Зависимость между кинематическими характеристиками процесса устанавливается **критерием Стурхалля**, называемым также критерием **гомохронности (Ho)**:

$$Sh = VT/L = Ho.$$

При исследовании конструкций с учетом упругих свойств материалов важным является **критерий Коши**:

$$Ca = \frac{pV^2}{E},$$

где E – модуль упругости материала.

Типовые наборы критериев подобия формируют для групп процессов, изучаемых конкретными предметными областями зна-

ния. При этом один и тот же критерий, выраженный через величины, характерные для разных предметных областей, может быть выражен различным образом.

Так как сложные системы характеризуются взаимодействием процессов и явлений различной физической природы, то отражающие их критерии подобия находятся в противоречивой связи. Поэтому моделирование таких систем проводится только приближенно по основным, определяющим критериям. Образующиеся при этом погрешности моделирования определяются и учитываются при переводе результатов моделирования на натурную систему. В ряде случаев возможно согласование противоречивых критериев специальными мерами (подогрев жидкости с целью получения необходимой вязкости; использование сосредоточенных упругостей в модели, эквивалентных распределенным в натуре и т.д.).

5.4 Автоматизированное формирование условий моделирования

Наличие стандартных наборов критериев подобия, характеризующих исследуемые процессы, обеспечивает возможность построения процедур, формирующих условия моделирования в автоматизированном режиме. Один из вариантов таких процедур может использовать следующий алгоритм диалога пользователя с автоматизированной системой:

Автоматизированная система (АС). *Предложение пользователю перечня предметных областей, в рамках которых автоматизированная система способна работать.* Для этого база данных системы наполняется перечнями процессов, характерных для набора предметных областей, в которых применение теории подобия является наиболее целесообразным.

Пользователь (П). *Определение пользователем списка предметных областей, совокупность которых способна (по его мнению) сформировать модель исследуемой системы.* В большинстве случаев достаточно выбрать одну или две предметные области.

АС. *Предложение пользователю перечня процессов и явлений, характерных для рассматриваемой предметной области.* Такой перечень хранится в базе данных системы.

П. *Выбор определяющих процессов и явлений пользователем.* Сущность и особенности решаемой задачи известны только пользователю. Поэтому из предложенного списка ему следует выбирать только те, которые важны для решаемой им задачи.

АС. *Предложение пользователю перечня характеристик и параметров, определяющих протекание интересующих его процессов.* Перечень хранится в базе данных системы.

П. *Выбор пользователем характеристик и параметров, определяющих существо решаемой задачи.* Так как моделирование является приближенным, то следует использовать ограниченный набор параметров и характеристик.

АС. *Предложение пользователю списка возможных ограничений, характерных для рассматриваемого класса задач.* В принципе, АС уже имеет всю информацию для определения набора критериев подобия и масштабов модели. Однако наличие физических ограничений на проведение экспериментов может внести коррективы в определение конкретных величин масштабов моделирования. Здесь же указывается и интервал изменения основного масштаба строящейся физической модели.

П. *Указание ограничений.*

АС. *Предложение пользователю перечня критериев подобия, характерных для решаемой задачи моделирования.* Такой перечень формируется либо простым выбором из базы данных, либо на основе полученных в ходе диалога данных одним из методов анализа размерностей. В принципе, возможна обработка символической информации об уравнениях процесса и построение необходимой информации методами анализа математической модели. В сложных моделях такой процесс не является целесообразным.

П. *Выбор определяющих критериев.*

АС. *Предложение списка значений масштабов моделирования, способов технического устранения противоречий между определяющими критериями и погрешностей моделирования.*

Такая система автоматизированного формирования условий моделирования может являться частью более общей системы построения масштабных физических моделей, планирования эксперимента и комплексной обработки его результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Мир, 1972. – 381 с.
2. Шарп, Дж. Гидравлическое моделирование / Дж. Шарп. – М. : Мир, 1984. – 280 с.
3. Баловнев, В. И. Моделирование процессов взаимодействия со средой рабочих органов дорожно-строительных машин / В. И. Баловнев. – М. : Высшая школа, 1981. – 335 с.

Тема 6

ОШИБКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Природа ошибок моделирования. Способы оценки ошибок масштабирования. Методика моделирования.

6.1 Природа ошибок моделирования

Исследование процессов на физической модели сопровождается рядом погрешностей, исключающих возможность получения точных данных при переносе их с модельной системы на натуру. Основными причинами такого положения являются: 1) статистическая неоднородность среды, с которой взаимодействует моделируемый образец; 2) погрешности приборов и методов измерения определяющих величин исследуемого процесса; 3) недостаточная точность воспроизведения на модели параметров, входящих в критерии подобия; 4) несоблюдение некоторых критериев подобия; 5) объективное отсутствие возможности моделирования в едином масштабе одноименных параметров и др. Приоритетность того или иного фактора определяется конкретными условиями задачи исследования.

Во всех случаях суммарная ошибка включает систематическую и случайную составляющие. Случайная составляющая появляется вследствие вероятностного характера практически всех параметров, определяющих исследуемый процесс. Изучение закономерностей и условий вероятностного подобия является предметом стохастической теории подобия. Если по условиям точности моделирования возможно использование детерминированного представления исследуемого процесса, то ошибка моделирования будет иметь систематический характер.

Оценку систематической ошибки, когда моделирование проводится с учетом только определяющих критериев подобия, можно определить, например, следующим образом:

1. Записывается основное уравнение процесса (зависимость для нахождения определяющей величины). Например, при исследований динамики системы это может быть уравнение движения вида

$$P = P_1 - P_2 - P_3 - P_4,$$

где P – обобщенная, результирующая сила; P_1 – активная движущая сила; $P_2...P_4$ – силы сопротивления движению.

2. Исходное уравнение приводится к безразмерному виду:

$$1 = P_1 / P + P_2 / P + P_3 / P + P_4 / P.$$

3. Раскрывается содержание полученных таким образом безразмерных комплексов $P_1 / P, P_2 / P, P_3 / P, P_4 / P$. Так как сумма составляющих обобщенного безразмерного комплекса равна единице, то при этом появляется возможность оценить степень вклада каждого элемента суммы в формирование изменения определяющего параметра процесса. Для этого необходимо провести элементарные вычисления, задаваясь характерными значениями параметров исследуемого процесса.

Полученные таким образом данные позволяют определить целесообразность последующего моделирования по тем или иным критериям подобия и зарегистрировать те критерии, исключение которых из рассмотрения в последующем следует учесть при оценке погрешностей моделирования.

В случае, когда физическая модель строится на основе анализа размерностей параметров, которые согласно априорной информации являются существенными для исследуемого процесса, а расчетно-теоретическая модель процесса не разработана, учет систематической ошибки, возникающей в результате отклонения параметров модели от величин, требуемых условиями подобия, производится также с использованием формул размерности.

Делается предположение о линейном характере системы при малых изменениях параметров. В качестве основной системы единиц, используемых для приведения к безразмерному виду как входных, так и выходных параметров, выбирается, как правило, триада величин, являющихся наиболее существенными входными параметрами системы. Эти параметры в соответствии с формулами размерности и основными критериальными зависимостями, из которых вытекают масштабные соотношения моделирования, используются для построения формул перехода от модели к натуре. Формулы перехода, в свою очередь, с помощью линейных преобразований дают возможность получить поправочные формулы для учета систематической ошибки результата.

6.2 Оценка ошибки масштабирования

Приведем пример. Исследуется на физической модели динамика станка импульсного гидромонитора. Существенными параметрами могут считаться масса (M), среднее значение силового фактора (P_{cp}), линейный размер (L). Для решения поставленной задачи, как

правило, используют критерии Коши (Ca) и Ньютона (Ne), обеспечивающие построение модели для изучения вопросов прочности и устойчивости. Однако для определения смещений станка и возможных углов поворота его относительно точки опоры при «прыжках» импульсного гидромонитора существенными для процесса оказываются силы тяжести, моделирование которых должно было проводиться по критерию Фруда (Fr). Неучет этого критерия приводит к большим отклонениям в величинах смещения на модели по отношению к образцу, причем эта разность растет с уменьшением масштаба.

Непосредственно из этого вытекает вопрос об учете систематической ошибки, связанной с так называемым «масштабным эффектом», когда при моделировании отбрасываются «второстепенные» критерии подобия.

Исследование углов поворота гидромонитора относительно точки опоры для моделей, переведенных на натуру, позволяет заключить, что ошибка в определении смещений весьма существенна и уже при масштабе моделирования 1:2 ($K_L = 2$) необходимы специальные мероприятия по обеспечению компенсации неучета критерия Фруда.

Для рассмотренных критериев подобия масштабные соотношения имеют следующий вид:

$$K_{FNe} = K_P K_L^2 K_V^2 - \text{масштаб сил по критерию Ньютона};$$

$$K_{FCa} = K_P K_L^2 K_E - \text{масштаб сил по критерию Коши};$$

$$K_{FFr} = K_g K_P K_L^3 - \text{масштаб сил по критерию Фруда}.$$

При моделировании по критерию Коши $K_{FNe} = K_{FCa}$ (индикатор подобия сил $K_{FNe} / K_{FCa} = 1$)

$$K_P K_L^2 K_V^2 = K_P K_L^2 K_E,$$

откуда при $K_L \neq 1$ и $K_E = 1$, $K_P = 1$ (материалы натуре и модели идентичны) следует, что скорости в модели будут моделироваться в масштабе $K_V = 1$.

При моделировании по критерию Фруда $K_{FNe} = K_{FFr}$

$$K_P K_L^2 K_V^2 = K_g K_P K_L^3,$$

откуда при $K_L \neq 1$ и $K_P = 1$, $K_g = 1$ следует, что скорости в модели должны моделироваться в масштабе $K_V = K_L^{0.5}$.

Если в модели используется материал натуре ($K_E = 1$, $K_P = 1$) и $K_L \neq 1$, то согласовать критерии Коши и Фруда не представляется возможным. Действительно:

$$(K_P K_L^2 K_E \neq K_g K_P K_L^3) = (K_L^2 \neq K_L^3) = (K_{FCa} \neq K_{FFr}).$$

Таким образом, модель, разработанная по критериям Ньютона и Коши, позволяющая исследовать динамику колебательного процесса в металлоконструкции станка гидромонитора, оказывается

недогруженной силами тяжести. Оценку систематической ошибки в величинах усилий, возникающих в связи с таким построением модели, можно определить следующим образом.

Усилия в металлоконструкции натурального образца:

$$F_H = F_{EH} + F_{QH},$$

где F_{EH} , F_{QH} – усилия, возникающие от упругих колебаний и веса самой металлоконструкции станка гидромонитора.

При моделировании по критерию Коши усилия на модели должны быть следующими:

$$F'_M = F_H / K_{Fk} = F_{EH} / K_{Fk} + F_{QH} / K_{Fk}.$$

Фактически, при геометрическом подобии конструкций:

$$F_M = F_{EH} / K_{Fk} + F_{QH} / K_{F\Phi}.$$

Абсолютная систематическая ошибка на модели:

$$\Delta F_M = F'_M - F_M = F_{QH} / K_{Fk} - F_{QH} / K_{F\Phi}.$$

Абсолютная систематическая ошибка при переводе модельного результата на натурный образец:

$$\Delta F_H = \Delta F_M K_{Fk} = F_{QH} (1 - K_{Fk} / K_{F\Phi}).$$

Относительная систематическая ошибка:

$$\varepsilon = \Delta F_H / F_H = F_{QH} / F_H (1 - K_{Fk} / K_{F\Phi}) = F_{QH} / F_H (1 - 1 / K_L).$$

Из этого выражения видно, что относительная систематическая ошибка зависит и от отношения нагрузок сил тяжести к суммарным нагрузкам, возникающим при функционировании гидромонитора, и от активных сил, и от сил упругости, и от сил тяжести, а также от соотношения масштабов моделирования силы по критериям Коши и Фруда. Для большинства ответственных элементов металлоконструкций отношение нагрузки от сил тяжести к суммарной меньше или равно 10–15 %. Зависимость выражения $(1 - K_{Fk} / K_{F\Phi}) = (1 - 1 / K_L)$ показывает, что, например, для масштабов от $K_L = 2$ до $K_L = 5$ $\varepsilon / (F_{QH} / F_H) = 0,5 \dots 0,8$, а относительная систематическая ошибка в определении усилия не превышает 5–12 %, что является допустимым для учета в виде поправочных формул. Можно показать, что неучет критерия Коши в аналогичных условиях приводит к относительной систематической ошибке до 43–72 %.

Таким образом, для оценки погрешностей масштабирования необходимо:

- определить форму записи суммарного эффекта через его составляющие (в аддитивной, мультипликативной или иной формах) для натуре;

- используя эту форму, выразить результирующий эффект для модели (с применением соответствующих масштабных коэффици-

ентов) с учетом моделирования сходственных параметров по принятому критерию подобия;

- используя эту же форму, выразить результирующий эффект для модели с учетом реального моделирования сходственных составляющих параметров по соответствующему критерию подобия;

- алгебраическим сложением двух последних выражений определить абсолютную систематическую ошибку моделирования;

- определить абсолютную систематическую ошибку при переводе модельного результата на натурный образец (умножением на соответствующий масштабный коэффициент);

- определить относительную систематическую ошибку моделирования рассматриваемого параметра;

- определить влияние масштабного коэффициента на величину относительной систематической ошибки;

- определить рациональное значение масштабного коэффициента, обеспечивающего минимизацию ошибки масштабирования.

Значимость критериев подобия и целесообразные масштабы моделирования во многом зависят от физической природы исследуемого процесса, целей моделирования и технических возможностей такого моделирования.

6.3 Методика моделирования

Исследование природных явлений на физических моделях проводится в определенной последовательности, включающей следующие этапы:

1. Теоретическое исследование явления. Проводится с целью определения характера происходящих процессов, выявления режимов проявления, определяющих параметров и характеристик, установления основных соотношений. По результатам исследования формируется концептуальная модель явления.

Пример. Исследуется течение жидкости в напорной магистрали (без образования свободных поверхностей) через дроссельное устройство. Данное явление истечения в зависимости от величины и закона изменения скорости потока жидкости может включать: 1) ламинарное течение; 2) турбулентное течение, определяемое вязкостью жидкости (не достигается область квадратичного сопротивления); 3) турбулентное квадратичное (автомодельное) течение, определяемое только скоростью течения жидкости; 4) волновые процессы, обусловленные скачкообразным изменением скорости течения жидкости по различным причинам; 5) кавитацию жидкости вследствие существенного перепада давления на границе дроссельного устройства и т.д.

Концептуальная модель формируется в возможно более полном виде с определением номенклатуры и значений параметров, обуславливающих границы перехода между режимами проявления исследуемых процессов. Как правило, концептуальная модель представляется в виде описания исследуемого явления.

2. Схематизация концептуальной модели. Для последующего исследования концептуальная модель упрощается и трансформируется в новое описание, как правило, в математических символах.

Если имеется возможность построения математической модели процесса, описывающей с учетом принимаемых допущений достаточно точно исследуемое явление, то такая возможность реализуется. По результатам исследования математической модели определяют степень существенности основных параметров и их критические значения, определяющие переход от одного режима проявления к другому.

Пример. Определяется характер изменения давления и скорости в рассмотренном выше дроссельном устройстве напорной магистрали с учетом допущения: реализован режим турбулентного вязкого течения жидкости без кавитации и волновых процессов (допустимо ими пренебречь). В подобной ситуации простейшая математическая модель формируется на основе уравнения Бернулли (сохранение энергии потока) и уравнения неразрывности потока (постоянство расхода). Далее следует изучить по математической модели исследуемый процесс и выявить критические значения определяющих его параметров и характеристик. Режим функционирования такого устройства с учетом принятой схематизации полностью определяется критериями Рейнольдса и Ньютона.

Если математическую модель построить невозможно, т.к. функциональные связи неизвестны или ее построение нецелесообразно, то переходят к формированию перечня определяющих исследуемое явление параметров.

В рассматриваемом примере такими параметрами процесса являются: скорость течения жидкости, вязкость и плотность жидкости, геометрия дросселя, а также подводящей и отводящей магистралей.

3. Моделирование процесса. Осуществляется с целью формирования безразмерных комплексов – критериев подобия и определения масштабов моделирования.

Критерии подобия определяются либо простым комбинированием определяющих параметров, либо одним из существующих методов (Релея, Букингема, Ипсена, Барра). Для обеспечения управляемости дальнейшего экспериментирования с физической моделью производят отбор того состава критериев подобия и их разнообразно-

стей, контроль реализации которых позволителен для имеющегося в распоряжении экспериментатора измерительного комплекса.

В ряде случаев по объективным условиям требуется моделирование физических «постоянных», например ускорения свободного падения. Для этого приходится использовать специальную экспериментальную базу (прибегать к так называемому центробежному моделированию).

Пример 1. Требуется определить напряжения и перемещения в элементах конструкции фермы моста при наличии нагрузок от собственно массы и внешних нагрузок, распределенных определенным образом. Определяющими параметрами в этом случае являются модуль упругости (Юнга) E , безразмерный коэффициент Пуассона σ , удельный вес материала конструкции γ , линейный размер B и внешняя нагрузка P , которые дают три безразмерных комплекса:

$$\sigma, E / (\gamma B) = E / (\rho g B), P / (E B^2).$$

При соблюдении этих критериев деформации в натуре и в модели будут подобными. Если модель выполняется из материала натуры, то параметры σ , E и ρ не могут выбираться в определенных масштабах и для выполнения условий подобия при изменении линейного размера модели по отношению к этому размеру в натуре необходимо обеспечить выполнение условия (второй безразмерный комплекс) $gB = \text{const}$. В такой ситуации приходится изменять ускорение g в обратной пропорции к B . Аналогичная ситуация возникает при моделировании взаимодействия машин с сыпучими средами.

Масштабы моделирования определяются либо исходя из физических закономерностей, либо задаются произвольным образом (с учетом возможностей проведения эксперимента) для основных параметров. Масштабы остальных параметров определяются через масштабы основных.

Пример 2. Исследуется динамика станка гидромонитора с учетом критериев Ньютона ($K_{FNe} = K_P K_L^2 K_V^2$) и Фруда ($K_{FFr} = K_g K_P K_L^3$). При использовании в модели материала натуры и при соблюдении равенства индикаторов подобия следует, что соотношение между линейным масштабом и масштабом скорости должно быть $K_L = K_V^2$ (или $K_V = K_L^{0,5}$). Тогда кинематический критерий Стурхалля дает масштаб временных характеристик исследуемого явления $K_L = K_T^2$.

Здесь определяющим является линейный масштаб, который в общем случае выбирается произвольно. Остальные масштабы вычисляются через него на основе известных физических закономерностей.

Если возможности по использованию энергетического источника импульсного действия ограничены, то для того же примера

определяющим будет масштаб импульса силы K_I , а остальные коэффициенты определяются либо через него, либо через линейный масштаб, предварительно вычисленный через масштаб импульса силы.

При моделировании явлений с длительным временем проявления выбор соответствующего масштаба времени обеспечивает проведение исследований в обозримых временных рамках.

В общем случае масштаб модели выбирается исходя из существа исследуемого явления, целей исследования, возможностей построения модели и имеющейся экспериментальной базы.

4. Построение модели. Целью данного этапа является претворение теоретических посылок в конкретную конструкцию модели.

5. Исследование модели. В тех случаях, когда необходимо исследование при использовании противоречивых критериев подобию, реализуют дополнительные меры с целью согласования таких критериев.

Пример. Исследуется течение вязкой жидкости в напорной магистральной с большим перепадом высот. Моделирование осуществляется по критериям Рейнольдса и Фруда, которые являются противоречивыми. В этом случае в модели используется жидкость с той же плотностью, что и в натуре, но с иной вязкостью. Однако можно в модели применить жидкость природы, изменяя (моделируя) ее вязкость путем подогрева.

6. Перевод данных эксперимента на натурную ситуацию. Для перевода данных с модели на натуру используют соответствующие масштабные коэффициенты сходственных величин: полученные на модели характеристики процесса умножают на соответствующие масштабные коэффициенты.

Иногда такой перевод осуществляется не для самой характеристики, а только для некоторой ее составляющей. Тогда уточнение данных проводят путем математических вычислений.

Пример. При исследовании сил сопротивления движению судна моделированию подлежат как силы вязкости (критерий Рейнольдса), так и силы тяжести (критерий Фруда). Критерии противоречивы. Испытательный бассейн обычно бывает длиной 70 м. Заполнять его жидкостью с вязкостью, отличной от вязкости воды, дорого и практически невозможно. Подогрев проблематичен и малоэффективен. В этих условиях моделирование ведется по критерию Фруда. Далее на модели определяется результирующая сила сопротивления движению, из которой вычитается вязкая составляющая, определяемая расчетным путем. Остаток – составляющая сопротивления от действия сил тяжести – через масштабный коэффициент переводится на натуру. Зная характеристики природы, вычисляют вязкую со-

ставляющую сопротивления, которая, будучи суммированной с экспериментально определенной гравитационной составляющей сопротивления движения, позволяет получить значение полного сопротивления движению натуры.

7. Проверка модели. Проверка осуществляется на примере уже известных данных (решение типовых задач в типовых условиях). Сравниваться должны результаты, характеризующие весь диапазон изменения определяющих параметров, в рамках исследования которого строилась модель.

Если моделирование проводилось для системы с сосредоточенными параметрами, то, как правило, при соблюдении критериев подобия модель в достаточной степени воспроизводит исследуемые процессы. Для систем с распределенными параметрами адекватное воспроизведение процессов достаточно затруднительно. Как писал С. Инса, «большинство гидравлических моделей не обеспечивает полного геометрического подобия, а динамическое подобие достигается в них только на словах». Аналогичная ситуация наблюдается при моделировании тепловых процессов в газах, процессов, связанных с быстрым преобразованием энергии (взрыв, выстрел и т.д.). Структуры полей определяющих параметров для таких процессов моделируются по их средним значениям.

8. Калибровка модели. Суть калибровки заключается в подгонке условий эксперимента и/или параметров модели таким образом, что, будучи искаженными по сравнению с предписываемыми исходными условиями подобия, они в то же время позволяют достаточно точно предсказывать характер течения процесса в натуре по данным, полученным на модели. Это аналогично введению «поправочных» коэффициентов в математическом моделировании.

Пример. Моделируется гидротормоз высокоэнергетической импульсной системы. Использование моделей меньшего масштаба приводит к тому, что несущественные для натуры зазоры истечения становятся сопоставимыми с рабочими регулирующими зазорами в модели. Подобная ситуация возникает в связи с имеющимся станочным оборудованием и является объективной. Калибровка такой модели должна проводиться с целью исключения подобных каналов истечения жидкости путем изменения конструкции модельного тормоза. При этом остальные параметры модели при необходимости не изменяются. Если при этих исследованиях важной характеристикой является температурное поле моделируемой системы, то калибровка модели может заключаться в использовании в ней материалов с иными по сравнению с натурой тепловыми характеристиками либо материалов натуры с измененной геометрией «свободных» поверхностей.

9. Полномасштабное исследование модели, обработка результатов эксперимента и перенос данных на натуру. Следует иметь в виду, что в ряде случаев исследование явлений на физических моделях является единственным способом экспериментального изучения важных вопросов практического характера. Вместе с тем *«моделирование – ответственная научная задача, имеющая общее принципиальное и познавательное значение, но его нужно рассматривать только как исходную базу для главной задачи. Последняя состоит в фактическом определении законов природы, в отыскании общих свойств и характеристик различных классов явлений, в разработке экспериментальных и теоретических методов исследования и разрешения различных проблем, наконец, в получении систематических материалов, приемов, правил и рекомендаций для решения конкретных практических задач»* (Л. И. Седов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Мир, 1972. – 381 с.
2. Шарп, Дж. Гидравлическое моделирование / Дж. Шарп. – М. : Мир, 1984. – 280 с.
3. Баловнев, В. И. Моделирование процессов взаимодействия со средой рабочих органов дорожно-строительных машин / В. И. Баловнев. – М. : Высшая школа, 1981. – 335 с.
4. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1981. – 448 с.

Раздел III

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Тема 7

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА. ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Кибернетическая модель. Формы записи модели. Факторы модели. Планирование и обработка результатов эксперимента. Типы планов. Критерии эффективности планов эксперимента. Полный факторный эксперимент. Дробные реплики. Генерирующее соотношение. Определяющий контраст. Пример применения факторного планирования.

7.1 Вводные положения

При построении моделей реальной действительности часто возникает ситуация, когда описать характеризующие явление процессы с достаточной степенью точности в рамках исследуемой предметной области не представляется возможным. Причинами такого положения являются: недостаточность информации о существе проявления «внутренних» закономерностей процесса; невозможность описания сложных явлений системами дифференциальных уравнений; нецелесообразность применения полной модели процесса в связи с ее существенной сложностью или практической непригодностью и др.

Одним из эффективных приемов построения моделей процессов в подобных ситуациях является кибернетический подход к изучаемому явлению. Его суть заключается в представлении явления в виде «черного ящика», преобразующего (преобразователь P) входные воздействия (вектор X) в выходную реакцию (отклик Y): стимул \Rightarrow \Rightarrow преобразование \Rightarrow реакция (рис. 7.1).

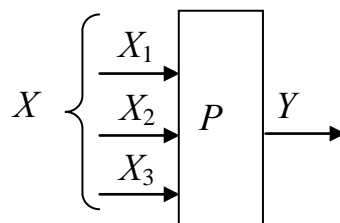


Рис. 7.1 Преобразование воздействия

При этом категория «преобразование» строится в виде связующего математического выражения предельно допустимой простой формы. Как правило, это полиномы первого, второго или третьего порядка:

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^N e_i X_i ;$$

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^N e_i X_i + \sum_{i=1}^N e_{ii} X_i X_i ;$$

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^N e_i X_i + \sum_{i=1}^N e_{ii} X_i X_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N B_{ij} X_i X_j .$$

Также могут использоваться мультипликативные формы, приводимые к полиномам операциями логарифмирования и замены переменных:

$$\begin{aligned} Z &= H A^a B^b C^c D^d; \\ \ln Z &= \ln(H A^a B^b C^c D^d); \\ \ln Z &= \ln H + a \ln A + b \ln B + c \ln C + d \ln D; \\ \ln Z &= \ln H + a \ln A + b \ln B + c \ln C + d \ln D; \\ \ln Z &= Y; \ln A = X_1; \ln B = X_2; \\ \ln C &= X_3; \ln D = X_4; \\ \ln H &= B_0; a = B_1; b = B_2; c = B_3; d = B_4; \end{aligned}$$

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_4 = B_0 + \sum_{i=1}^N B_i X_i, N = 1, \dots, 4.$$

Факторы, определяющие функционирование системы, могут быть систематизированы в четыре группы:

- *управляемые факторы*, которые можно изменять в широких пределах;
- *ограниченно управляемые*, значения которых коррелированы с другими факторами и которые можно изменять лишь в определенных пределах;
- *неуправляемые*, значения которых не коррелированы с другими факторами и которые изменяются независимо от воли экспериментатора;

– *неуправляемые, коррелированные с другими* и изменяющиеся независимо от воли экспериментатора.

Построение и исследование кибернетической модели проводится в рамках теории планирования эксперимента, основой которой является математическая статистика.

Преимущества теории планирования эксперимента связаны с организацией процедур направленного поиска формы связи между управляющими и управляемыми параметрами. Проведение планирования эксперимента позволяет:

- минимизировать общее число опытов;
- выбирать четкие, логически обоснованные процедуры, последовательно выполняемые экспериментатором при проведении исследований;
- одновременно варьировать несколькими переменными и оптимально использовать факторное пространство;
- получать модели, имеющие лучшие свойства по сравнению с моделями пассивного эксперимента, при котором набор статистического материала осуществляется по результатам наблюдения реальной системы без управляющего воздействия на происходящие при этом процессы;
- рандомизировать условия опытов, т.е. превратить многочисленные мешающие факторы в случайные величины;
- оценивать элементы неопределенности, связанные с экспериментом, что дает возможность сопоставлять результаты, полученные разными исследователями.

Планирование эксперимента включает следующие этапы:

- анализ априорной информации об исследуемом процессе;
- выбор плана эксперимента и его реализация;
- статистическая обработка и интерпретация результатов эксперимента.

Анализ априорной информации проводится с целью определения существенных факторов процесса и диапазонов их изменения, динамики его протекания, оценки целесообразных режимов функционирования системы для последующего исследования. Правильное сочетание интервалов изменения основных факторов обеспечивает получение результатов в рамках существующей реальности. Анализ априорной информации может быть проведен на основе корреляционного анализа, функции полезности, автоматической классификации объектов, экспертного опроса, анализа размерностей и т.д.

Выбор плана эксперимента связан с формой функциональной связи параметров, статистической эффективностью самих планов и

вариативными ограничениями практического характера в зависимости от условий экспериментирования. Пригодность аппроксимирующей модели проверяется предварительной оценкой априорной информации и по результатам статистической оценки экспериментальных данных.

Статистическая обработка эксперимента включает расчет коэффициентов эмпирической модели, проверку их статистической значимости и адекватности модели – статистической пригодности для описания исследуемого процесса в заданном диапазоне изменения параметров.

7.2 Кодирование переменных

Возникновение современных статистических методов планирования эксперимента связано с первой работой профессора биологии Р. Фишера (1923). В 1935 г. вышла его монография «The Design of Experiments», давшая название всему направлению.

В теории планирования эксперимента уравнение связи называют регрессионным, имея в виду описание сложного реального процесса упрощенной зависимостью (регрессия от лат. *regressio* – движение назад). Понятие регрессии введено Френсисом Гальтоном (двоюродным братом Чарльза Дарвина), издавшим в 1885 г. известную работу «Регрессия в направлении к общему среднему размеру при наследовании роста».

Простейшей формой связи является линейная регрессия следующего вида

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^N B_i X_i,$$

а при $N = 1$:

$$Y = b_0 + b_1 X_1.$$

Пример результатов эксперимента, описываемых простейшей регрессией, показан на рис. 7.2. В связи с ограниченностью статистической выборки коэффициенты регрессии являются статистическими оценками реальных коэффициентов, что приводит к необходимости изучения правомерности их использования.

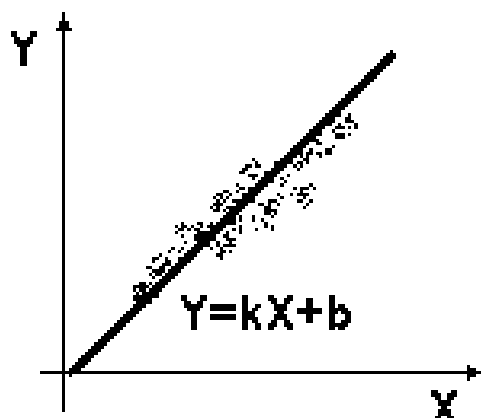


Рис. 7.2 Простейшая линейная регрессия

Определение коэффициентов уравнения регрессии осуществляется на основе метода наименьших квадратов. Сумма квадратов отклонения значения функции Y , рассчитанной по уравнению регрессии, от экспериментального значения функции в одноименных точках минимально возможная:

$$\sum_{i=1}^N (Y_{\text{расч}} - Y_{\text{эксп}})^2 \Rightarrow \min.$$

Для подбора уравнения можно было бы выдвинуть требование нулевой суммы отклонений всех точек от линии регрессии, однако такому требованию удовлетворяет бесконечное число уравнений, проходящих через координату со средними значениями $X_{\text{ср}}$ и $Y_{\text{ср}}$ (рис. 7.3).

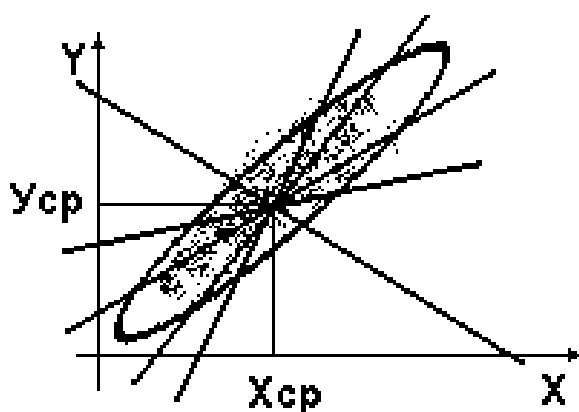


Рис. 7.3 Регрессии с нулевыми суммами отклонений

Планом эксперимента называют таблицу, указывающую число необходимых опытов и характер сочетания варьируемых переменных в конкретном опыте. В зависимости от формы уравнения регрессии выделяют линейные планы, планы второго, третьего и так

далее порядков. Планы, в которых варьируемые факторы фиксированы на двух уровнях (например, верхний и нижний), называются двухуровневыми. Широко используются также планы трех-, четырех- и пятиуровневые. Эксперимент, в котором реализуются все возможные комбинации уровней всех факторов, называют полным факторным экспериментом. Пример двухуровневого плана полного факторного эксперимента (вариант плана типа 2^k) для двух переменных ($k = 2$) приведен в табл. 7.1.

Таблица 7.1

План эксперимента 2^2

Номер опыта	Переменные		Выход Y_i
	X_1	X_2	
1	4	2	12
2	8	2	16
3	4	10	10
4	8	10	14

Для упрощения записи структуры плана верхний и нижний уровни варьирования обозначают соответственно +1 и –1 или (+) и (–). Переход от натуральных значений факторов к кодированным и обратно осуществляют по формулам перехода:

$$x_i = (X_i - X_{icp}) / \Delta X_i;$$

$$\Delta X_i = X_{iv} - X_{in},$$

где X_{iv} , X_{in} , X_i , X_{icp} – верхнее, нижнее, текущее и среднее значения параметра соответственно; ΔX_i – интервал варьирования параметра; x_i – кодированное текущее значение параметра.

Таблица 7.1 в кодированном виде заменяется табл. 7.2.

Таблица 7.2

План эксперимента 2^2

Номер опыта	Переменные		Выход Y_i
	X_1	X_2	
1	–	–	12
2	+	–	16
3	–	+	10
4	+	+	14

Графическая интерпретация приведенных в таблицах планов показана на рис. 7.4 и 7.5.

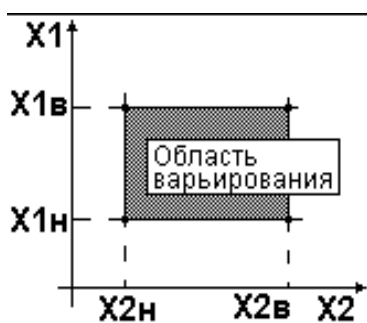


Рис. 7.4 Область варьирования



Рис. 7.5 Область варьирования

Определение коэффициентов уравнения регрессии для приведенного плана осуществляется совместным решением четырех уравнений, соответствующих строкам плана:

$$b_1x_{11} + b_2x_{21} = y_1;$$

$$b_1x_{12} + b_2x_{22} = y_2;$$

$$b_1x_{13} + b_2x_{23} = y_3;$$

$$b_1x_{14} + b_2x_{24} = y_4,$$

что равносильно записи

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \\ x_{14} & x_{24} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

или в матричной форме $XB = Y$.

Умножая части последнего уравнения слева последовательно на матрицу X^T и матрицу $(X^T X)^{-1}$ и имея в виду, что $(X^T X)^{-1}(X^T X) = E$, получим зависимость для определения коэффициентов уравнения регрессии в общем виде:

$$B = (X^T X)^{-1}(X^T Y).$$

Эта формула используется для определения коэффициентов уравнения регрессии независимо от типа выбранного плана эксперимента (порядка плана и числа уровней варьирования) при равномерном дублировании опытов для каждой строки плана или при отсутствии дублей. Если число дублей в строках плана неравномерное, то используется иная формула:

$$B = (X^T P X)^{-1}(X^T P Y),$$

где P – матрица, все элементы которой (за исключением диагональных) равны нулю, а диагональные элементы равны числу дублей для соответствующей строки плана.

Статистические свойства планов полностью определяются свойствами обратной матрицы $A^{-1} = (X^T X)^{-1}$ (матрицы дисперсий-ковариаций) или свойствами (в равной мере) информационной матрицы $X^T X$. Исходя из этого используют различные критерии оптимальности при построении планов.

7.3 Критерии оптимальности планов эксперимента

Выбор плана эксперимента зависит от целей и решаемых в исследовании задач и обусловлен статистическими свойствами плана или организацией и порядком проведения опытов. Условно выделяют три группы критериев оптимальности планов.

В первую группу входят критерии, связанные с точностью оценок коэффициентов регрессии эмпирического уравнения связи: ортогональность, D -, A -, E -оптимальность и др.

Ортогональность плана позволяет находить коэффициенты уравнения независимо друг от друга, обеспечивает упрощение исходной модели или ее усложнение исключением или добавлением в него новых членов без пересчета уже найденных. Такими свойствами обладают линейные модели.

D -оптимальность в статистическом смысле дает минимум обобщенной дисперсии всех оценок коэффициентов модели.

A -оптимальность обеспечивает минимум суммы дисперсий оценок коэффициентов.

E -оптимальность исключает слишком большие дисперсии некоторых оценок коэффициентов.

Критерии второй группы определяют точность предсказания выходной характеристики (целевой функции, цели, отклика) с помощью построенной эмпирической модели.

Ротатабельность обеспечивает одинаковую точность предсказаний для точек, равноудаленных от центра плана по любому направлению.

Униформность в дополнение к ротатабельности обеспечивает примерно постоянную дисперсию предсказания в некоторой области вокруг центра плана.

G -оптимальность гарантирует отсутствие в области эксперимента точек, имеющих слишком низкую точность предсказания функции отклика.

Q -оптимальность обеспечивает минимальную среднюю дисперсию предсказания.

Планы, которые сохраняют свойства оптимальности независимо от числа варьируемых параметров, называются непрерывными. Если свойства оптимальности справедливы только при определенном числе факторов, то такие планы называют точными. Для непрерывных D -оптимальных планов справедлива G -оптимальность. Это свойство важно, если целью эксперимента является построение поверхности отклика с последующим поиском экстремальных значений функции отклика.

В ряде случаев возможности планирования эксперимента удобно использовать при решении задач оптимизации процессов, описываемых достаточно сложной математической моделью, реализация которой требует значительных временных затрат. С этой целью в программу расчета вводят модуль автоматического построения планов эксперимента, а формируемый с его помощью план используют для построения приближенной эмпирической модели процесса, которую и используют при нахождении области оптимальных значений показателей процесса. Контроль результатов осуществляют решением исходной сложной модели процесса. Такой поход обеспечивает снижение затрат времени на несколько порядков, давая приемлемую точность конечных результатов решения задачи.

К третьей группе относятся свойства планов, связанные со стратегией эксперимента.

Насыщенность планов означает, что число экспериментов равно числу строк в плане. Минимальное число экспериментов (k) зависит от числа определяющих процесс факторов (m) и определяется зависимостью $k = (m + 1)(m + 2)/2$.

Рандомизация – проведение опытов плана в случайной последовательности с целью устранения погрешностей эксперимента, вызванных систематическими действиями неконтролируемых факторов. Порядок опытов определяют по таблице случайных чисел, равномерно распределенных в интервале от 0 до 100.

7.4 Полный факторный эксперимент 2^k

Первоначально наибольшее распространение в практике инженерного эксперимента получили факторные планы 2^k , которые обеспечивают построение регрессий видов:

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^N B_i X_i ;$$

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^N B_i X_i + \sum_{i=1}^N B_{ii} X_i X_i.$$

Такое положение было обусловлено характерными для этих планов положительными свойствами, существенно облегчающими обработку результатов экспериментов. К таким свойствам относятся:

- симметричность: сумма элементов любого столбца матрицы планирования равна нулю ($\sum_{u=1}^N x_{iu} = 0$);
- нормировка: сумма квадратов элементов любого столбца равна числу опытов ($\sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = N$);
- ортогональность – почленное произведение двух разных столбцов матрицы планирования равно нулю ($\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} = 0, i \neq j$).

Свойство ортогональности позволяет определять коэффициенты регрессии по простой формуле:

$$b_i = (\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u) / n.$$

Для вычисления коэффициента b_0 по этой же формуле в матрицу планирования вводится столбец фиктивного фактора x_0 , равного для всех опытов +1. При этом искомый коэффициент становится равным среднему арифметическому значению отклика – выходной характеристике.

Полученные оценки коэффициентов регрессии являются независимыми друг от друга. Их численные значения и знаки указывают на характер и силу влияния.

Полный факторный эксперимент позволяет при необходимости оценить эффекты взаимодействия факторов. Для этого следует получить столбцы произведения факторов обычным перемножением соответствующих значений. При этом все свойства плана сохраняются, что дает возможность обращаться с новыми столбцами как со столбцами значений самих факторов.

Столбцы факторов задают непосредственное планирование, остальные же столбцы используются только для проведения расчетов. Пример полного факторного плана для двух переменных показан в табл. 7.3.

Таблица 7.3

План эксперимента 2^2

Номер опыта	Переменные				Выход Y_i
	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	
1	+	–	–	+	Y_1
2	+	+	–	–	Y_2
3	+	–	+	–	Y_3
4	+	+	+	+	Y_4

Полный факторный эксперимент не позволяет определять квадратичные члены модели. В этом случае эффекты взаимодействия (квадраты факторов) в плане эксперимента полностью совпадают с первым столбцом. Поэтому величина первого коэффициента (b_0) будет включать как свободный член, так и вклады квадратичных членов уравнения регрессии.

Другим недостатком полного факторного эксперимента является существенное увеличение числа опытов с ростом числа варьируемых параметров. В тех случаях, когда взаимодействие факторов не является существенным, матрица планирования будет обладать свойством избыточности, что дает возможность сократить общее число опытов. Это позволяет устранить указанный недостаток, используя дробные реплики.

Например, для эксперимента, заданного табл. 7.2, в случае незначительности парного взаимодействия X_1X_2 можно использовать соответствующий столбец для задания третьего фактора – X_3 . Тогда для изучения влияния трех факторов можно ограничиться четырьмя опытами вместо восьми. При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств.

В общем случае для сокращения числа экспериментов следует присвоить новому фактору значения столбца пренебрегаемого взаимодействия. Сформированные таким образом планы называются репликами полного факторного эксперимента и обозначаются как планы 2^{k-p} , где p – число линейных эффектов, приравниваемых к эффектам взаимодействия. Исключение одного взаимодействия дает полуреплику, двух – четвертьреплику и т.д.

Использование дробных реплик приводит к смешению оценок коэффициентов регрессии. Это следует учитывать при интерпретации влияния факторов на искомую выходную характеристику. Например, для матрицы 5.3 оценки смешиваются следующим образом:

$$b_1 \rightarrow B_1 + B_{23}; b_2 \rightarrow B_2 + B_{13}; b_3 \rightarrow B_3 + B_{12},$$

где b_1, b_2, b_3 – вычисляемые коэффициенты регрессии; $B_1, B_2, B_3, B_{12}, B_{23}, B_{13}$ – неизвестные истинные коэффициенты регрессии.

Дробная реплика может иметь разную систему смешивания. При постановке эксперимента следует стремиться к тому, чтобы максимальное число линейных эффектов не смешивалось с парными взаимодействиями. Число таких линейных эффектов называется разрешающей способностью реплики.

Для оценки разрешающей способности используют генерирующие соотношения, которые показывают, с какими столбцами смешан (закоррелирован) столбец данного фактора. Например, для плана таблицы 7.3 (полуреплика 2^{3-1}) можно использовать две полуреплики (две половины полного факторного эксперимента), каждая из которых задается одним из генерирующих соотношений $X_3 = X_1X_2$ и $X_3 = -X_1X_2$.

Если обе части этих соотношений умножить на X_3 , то получим $X_3^2 = 1 = X_3X_1X_2$ и $X_3^2 = 1 = -X_3X_1X_2$. Соотношения $1 = X_3X_1X_2$ и $1 = -X_3X_1X_2$ называются определяющими контрастами. По ним легко найти все смешанные оценки последовательным умножением всех независимых переменных на определяющий контраст, помня, что в кодированном представлении квадрат фактора равен единице:

$$X_1 = X_2X_3; X_1 = -X_2X_3;$$

$$X_2 = X_1X_3; X_2 = -X_1X_3;$$

$$X_3 = X_1X_2; X_3 = -X_1X_2.$$

Вычисленные коэффициенты будут оценками следующих истинных коэффициентов регрессии:

$$b_1 = B_2B_3; B_1 = -B_2B_3;$$

$$b_2 = B_1B_3; B_2 = -B_1B_3;$$

$$b_3 = B_1B_2; B_3 = -B_1B_2.$$

Для планирования можно использовать любую из возможных реплик. Эффективность применения реплик возрастает с увеличением числа варьируемых факторов. Удачность применения зависит от выбора интервалов варьирования факторов, системы смешивания

и во многом определяется априорными сведениями о значимости взаимодействия.

Получив по результатам эксперимента значения коэффициентов уравнения регрессии, следует перейти к оценке качества построенной эмпирической модели.

7.5 Пример построения факторной модели

Постановка задачи: построить полиномиальную модель для определения расхода топлива автомобиля ЗИЛ-130 в зависимости от четырех факторов:

x_1 – пересеченность продольного профиля дорог (Π);

x_2 – коэффициент сопротивления качению (f);

x_3 – помехонасыщенность маршрута (K);

x_4 – удельная мощность ($N_{уд}$).

Уровни варьирования приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Уровни варьирования факторов

Уровни	Факторы			
	x_1	x_2	x_3	x_4
	Π , %	f	K , град/км	$N_{уд}$, Вт/Н
Средний	33,7	0,0256	30	1,17
Интервал	17,1	0,0135	25	0,15
Нижний	16,6	0,0130	5	1,02
Верхний	50,9	0,0400	55	1,33

Переход от действительных значений к кодированным осуществляется по формулам:

$$x_1 = (\Pi - 33,7) / 17,1;$$

$$x_2 = (f - 0,0256) / 0,0135;$$

$$x_3 = (K - 30) / 25;$$

$$x_4 = (N_{уд} - 1,17) / 0,15.$$

Матрица планирования и результаты параллельных опытов представлены в табл. 7.5.

Расчет коэффициентов уравнения регрессии по формуле

$$b_i = (\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u) / n$$

дает следующие значения:

$$\begin{aligned} b_0 &= 60,31; b_1 = 5,24; \\ b_2 &= 6,84; b_3 = 3,61; \\ b_4 &= 1,98; b_{12} = -0,59; \\ b_{13} &= -0,76; b_{14} = 0,43; \\ b_{23} &= -1,44; b_{24} = 0; b_{34} = 0. \end{aligned}$$

Формула для определения расхода топлива при любом сочетании в заданных интервалах изменения варьируемых параметров имеет вид:

$$\begin{aligned} Y &= 60,31 + 5,24X_1 + 6,84X_2 + 3,61X_3 + 1,98X_4 - 0,59X_1X_2 - \\ &\quad - 0,76X_1X_3 + 0,43X_1X_4 - 1,44X_2X_3. \end{aligned}$$

По силе влияния на расход топлива факторы располагаются в следующем порядке: коэффициент сопротивления качению, пере-сеченность продольного профиля, помехонасыщенность маршрута, удельная мощность. При возрастании этих факторов расход топлива увеличивается. Эффекты взаимодействия на порядок меньше линейных эффектов (за исключением эффекта X_2X_3).

Таблица 7.5

Матрица планирования

Номер опыта	Переменные				Расход топлива, л / 100 км				
	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_{cp}	$Y_{теор}$
1	–	–	–	–	40,0	40,7	39,0	39,9	40,28
2	+	–	–	–	53,0	52,5	53,5	53,0	52,60
3	–	+	–	–	58,5	59,0	57,6	58,4	58,03
4	+	+	–	–	67,6	67,0	68,2	67,6	67,98
5	–	–	+	–	52,1	52,8	51,9	52,3	51,90
6	+	–	+	–	60,7	60,5	61,2	60,8	61,18
7	–	+	+	–	63,0	64,0	63,5	63,5	63,88
8	+	+	+	–	71,2	70,7	71,8	71,2	70,80
9	–	–	–	+	43,1	43,8	42,1	43,0	43,38
10	+	–	–	+	57,8	57,3	58,3	57,8	57,42
11	–	+	–	+	61,6	62,1	60,7	61,5	61,12
12	+	+	–	+	72,4	71,8	73,0	72,4	72,80

Окончание табл. 7.5

13	–	–	+	+	55,2	55,9	55,1	55,4	55,00
14	+	–	+	+	65,2	65,3	66,0	65,6	66,00
15	–	+	+	+	66,1	67,1	66,6	66,6	66,98
16	+	+	+	+	76,0	75,1	76,6	76,0	75,62

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефедов, А. Ф. Планирование эксперимента и моделирование при исследовании эксплуатационных свойств автомобилей / А. Ф. Нефедов, Л. Н. Высочин. – Львов : Вища школа, 1976. – 160 с.
2. Зедгинидзе, И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем / И. Г. Зедгинидзе. – М. : Наука, 1976. – 390 с.
3. Ферстер, Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа / Э. Ферстер, Б. Ренц. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 302 с.
4. Новик, Ф. С. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования эксперимента / Ф. С. Новик, Я. Б. Арсов. – М. : Машиностроение ; София : Техника, 1980. – 304 с.
5. Круг, Г. К. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. – М. : Наука, 1977. – 208 с.

Тема 8

ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Статистические свойства оценок. Основные допущения МНК. Анализ остатков. Предварительная обработка результатов эксперимента. Определение коэффициентов регрессии и оценка их значимости. Причины незначимости. Проверка адекватности модели.

8.1 Свойства оценок и критерии точности

Статистическая оценка эксперимента включает ряд мероприятий подготовительного характера и непосредственную его обработку:

1. Предварительная часть. Включает рандомизацию последовательности проведения опытов и оценку принадлежности результатов эксперимента к одной генеральной совокупности.

2. Рандомизация опытов. Проводится с целью исключения влияния систематической ошибки, связанной с внешними условиями (например, неточным контролем условий эксперимента, изменением типа сырья, участием разных людей в проведении эксперимента и т.д.). Для этого опыты плана проводят в случайной последовательности, определяемой, например, с помощью таблицы случайных чисел. Например, если число опытов в эксперименте равно 8, то по таблице равномерно распределенных чисел последовательно выбираются числа от 1 до 8 (каждое число берется только один раз) в том порядке, в котором они встречаются при последовательном обходе столбцов таблицы, начиная с первого. При рандомизации второй серии опытов за первый столбец принимают столбец, следующий за последним столбцом предыдущей серии. Аналогичным образом рандомизируется третья и так далее серии опытов.

3. Обработка результатов эксперимента. Правомерность применения полученных по результатам эксперимента эмпирических моделей определяется свойствами оценок их коэффициентов и степенью точности описания исследуемого процесса. Свойства оценок определяются статистическими показателями, а точность описания характеризует правильность включения в модель всего объе-

ма независимых переменных и точность предсказания по модели зависимой переменной.

Статистическими показателями свойств оценок являются несмещенность, состоятельность и эффективность.

Несмещенность оценки. Если из одной генеральной совокупности извлекаются выборки из n элементов и по каждой выборке вычисляется оценка какого-либо параметра этой совокупности (математическое ожидание, дисперсия и т.д), то такая оценка называется несмещенной при условии равенства среднего всех оценок параметру генеральной совокупности.

Состоятельность оценки. Если с увеличением объема выборки ($n \rightarrow \infty$) оценка сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то такая оценка называется состоятельной.

Эффективность оценки. Оценка параметра представляет собой случайную величину с определенными математическим ожиданием и дисперсией. Таких оценок может быть несколько в силу использования различных способов их получения. Если при равенстве математических ожиданий оценок их дисперсии различны, то оценка, обладающая минимальной дисперсией, является наиболее эффективной из всех возможных оценок.

В основе регрессионного анализа лежит метод наименьших квадратов (МНК). При построении такого аналога принимают следующие основные допущения:

- погрешности моделирования независимы;
- погрешности имеют нулевые средние;
- погрешности имеют одинаковую дисперсию;
- погрешности подчинены нормальному закону распределения.

Графическое отображение допущений показано на рис. 8.1 на примере простой линейной регрессии. Оценки, полученные на основе метода наименьших квадратов, обладают свойствами несмещенности, являются состоятельными и эффективными.

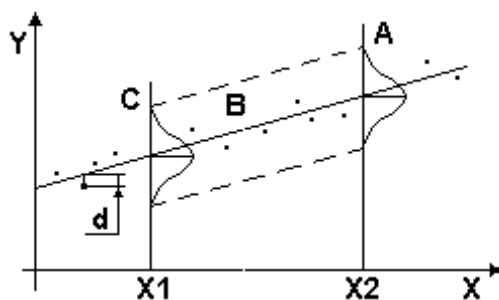


Рис. 8.1 Модель простой линейной регрессии:

A – распределение Y при $X = x_2$, среднее $\beta_0 + \beta_1 x_2$, дисперсия σ^2 ; C – распределение Y при $X = x_1$, среднее $\beta_0 + \beta_1 x_1$, дисперсия σ^2 ; B – прямая $y = \beta_0 + \beta_1 x$; d – остаток

После получения оценок следует определить степень их значимости – проверить влияние варьируемых параметров на характер течения исследуемого процесса. При этом в зависимости от условий эксперимента используют различные расчетные формулы.

Если число дублей в каждом опыте одинаковое или все опыты проведены без повторений, то коэффициенты регрессии определяют по следующим формулам:

– в общем случае:

$$b_i = \sum_{j=0}^k (c_{ij} \sum_{u=1}^N x_{ju} y_u);$$

– при ортогональном планировании:

$$b_i = c_{ii} \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u = \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u / \sum_{u=1}^N x_{iu}^2;$$

– при ортогональном планировании и выполнении условий нормировки:

$$b_i = c_{ii} \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u = \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u / \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 = \sum_{u=1}^N x_{iu} y_u / N.$$

Ортогональным является планирование, при котором сумма почленного произведения любых двух столбцов матрицы планирования равна нулю. **Планы являются нормированными**, если сумма квадратов элементов любого столбца матрицы равна числу опытов. Планы, у которых сумма элементов любого столбца матрицы планирования равна нулю, являются **симметричными**.

В приведенных зависимостях c_{ii} , c_{ij} являются соответственно диагональным и недиагональным элементами матрицы A^{-1} , обратной к информационной матрице $X^T X$:

$$A^{-1} = (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{0k} \\ C_{10} & C_{11} & C_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k0} & C_{k1} & C_{kk} \end{bmatrix}.$$

Матрица $(X^T X)^{-1}$, умноженная на оценку дисперсии опыта S_y^2 , называется матрицей дисперсий – ковариаций или ковариационной. Ее диагональные члены являются оценками дисперсии коэффициентов регрессии S_{bi}^2 и используются при определении их значимости.

При ортогональном планировании значимость коэффициента можно проверить двумя равноценными способами. Первый способ предполагает сравнение абсолютной величины коэффициента с его доверительным интервалом, который определяется зависимостью

$$\Delta b_i = t_{\alpha; f_1} S_{b_i},$$

где t – критерий Стьюдента, определяемый по таблице в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы f_1 при определении дисперсии опыта S_y^2 ; S_{b_i} – среднеквадратичная ошибка в определении коэффициента регрессии, равная S_y^2 / N .

Число степеней свободы – понятие, учитывающее в статистических ситуациях связи, ограничивающие свободу изменения случайных величин. Это число определяется как разность между числом выполняемых опытов и числом констант (средних, коэффициентов и т.д.), подсчитанных по результатам тех же опытов.

Коэффициент считается значимым, когда выполнено условие

$$|b_i| \geq \Delta b_i \text{ или } |b_i| \geq t_{\alpha; f_1} S_{b_i}.$$

Смысл последнего неравенства заключается в том, что абсолютная величина коэффициента регрессии должна быть в t раз больше, чем ошибка его определения.

В другом случае значимость коэффициента можно проверить по t -критерию, рассчитывая его по формуле

$$t^{\text{расч}} = |b_i| / S_{b_i}.$$

Коэффициент значим, если выполнено условие

$$t^{\text{расч}} \geq t_{\alpha; f_1}^{\text{табл}}.$$

Статистическая незначимость коэффициента может быть обусловлена следующими причинами:

- уровень среднего значения интервала варьирования переменной у незначимого коэффициента близок к точке частного экстремума этой переменной;
- шаг варьирования переменной выбран малым;
- отсутствует связь переменной с выходным параметром;
- велика погрешность воспроизведения эксперимента вследствие наличия неуправляемых и неконтролируемых переменных.

При ортогональном планировании исключение незначимых членов уравнения регрессии не приводит к необходимости пересчета остальных коэффициентов, т.к. все они определяются независимо друг от друга.

В иных случаях исключение незначимых членов требует пересчета всех коэффициентов регрессии. Указанный способ построения доверительных интервалов для каждого из коэффициентов в общем случае оценки их статистической значимости является недостаточным. Следует оценить совместную доверительную область одновременно для всех коэффициентов. Она представляет собой эллипсоид рассеяния оценок коэффициентов регрессии. Доверительный интервал можно тогда установить, если выбрать некоторые фиксированные значения для остальных коэффициентов. Поэтому при неортогональном планировании проверка статистической значимости коэффициентов является непростой задачей. Следует отметить, что при построении моделей с ограниченным числом независимых переменных иногда легче оставить вопрос о значимости коэффициентов в покое, т.к. дальнейшее использование модели в принципе невозможно без применения ЭВМ.

При организации эксперимента следует учитывать необходимость иметь оценку дисперсии опытов (дисперсии воспроизводимости) S_y^2 с целью проверки принадлежности результатов к одной генеральной совокупности. Эта дисперсия может быть известна и до начала эксперимента по ранее проведенным исследованиям. В противном случае ее определяют по результатам дублирующих (повторных) опытов. При этом дублирование подразумевает полное повторение всего цикла работ по настройке оборудования и созданию условий проведения эксперимента. В зависимости от характера дублирования возможно несколько способов оценки дисперсии опыта.

Если все опыты реализуются по одному разу, а один из них (чаще в центре плана) дублируется несколько раз, то используют зависимость

$$S_y^2 = \sum_{g=1}^{N_0} (Y_{0g} - Y'_0)^2 / f_1,$$

где Y_{0g} – результат g -го дубля в центре плана, Y'_0 – среднее арифметическое значение всех N_0 дублей центрального опыта; f_1 – число степеней свободы.

Для использования приведенной выше зависимости требуется предварительно подсчитать одну константу Y'_0 . Поэтому в рассмотренном случае $f_1 = N_0 - 1$.

Другие способы предполагают дублирование всех или нескольких опытов плана. При этом число повторений может быть одинаковым или неодинаковым.

При неравномерном дублировании сначала определяют построчные дисперсии (для каждого опыта) по формуле, имеющей тот же вид, что и приведенная выше:

$$S_y^2 = \sum_{g=1}^{N_u} (Y_{ug} - Y'_u)^2 / f_u,$$

где Y_{ug} – результат g -го повторения u -го опыта; Y'_u – среднее арифметическое значение всех N_u дублей u -го опыта; f_u – число степеней свободы при определении u -й построчной дисперсии S_y^2 ; $f_u = N_u - 1$.

Перед вычислением Y'_u имеет смысл исключить возможные промахи (грубые результаты в сериях повторных опытов) с помощью соответствующих статистических критериев.

Затем определяется средняя дисперсия опыта по формуле

$$S_y^2 = \left(\sum_{u=1}^{N_s} f_u S_{yu}^2 \right) / \sum_{u=1}^{N_s} f_u,$$

где N_s – число опытов в матрице планирования.

Для последующего применения дисперсии опыта S_y^2 необходимо проверить однородность ряда дисперсий, т.е. выяснить, определяются ли различные значения отклика с одинаковой точностью (ряд дисперсий однороден) или с разной (ряд неоднороден). *При неоднородном дублировании однородность ряда дисперсий проверяется по критерию Бартлетта.* Для этого определяют величину

$$B = 2,3026 \left(\lg S_y^2 \sum_{u=1}^{N_s} f_u - \sum_{u=1}^{N_s} f_u \lg S_{yu}^2 \right),$$

в которой используемые величины определены ранее. Найденную величину B сопоставляют с критерием χ^2 , который берут из таблиц в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы $f = N' - 1$ (N' – число дублируемых опытов). Ряд дисперсий считается однородным в том случае, если $B \leq \chi_{\alpha; N'-1}^2$.

Значение B в этом случае сильно завышено. Если оно сравнимо или немного превышает $\chi_{\alpha; N'-1}^2$, то B уточняют по формуле

$$B^* = B/c,$$

где

$$c = \left(\left(\sum_{u=1}^N 1/f_u \right) - 1 / \sum_{u=1}^N f_u \right) / 3 / (N - 1) + 1,$$

где $N = N_s$, а затем снова сравнивают с $\chi_{\alpha; N'-1}^2$.

При равномерном дублировании опытов $N_u = N = N_s$, поэтому формула $S_y^2 = \left(\sum_{u=1}^{N_s} f_u S_{yu}^2 / \sum_{u=1}^{N_s} f_u \right)$ после преобразования принимает вид:

$$S_y^2 = \left(\sum_{u=1}^N S_{yu}^2 \right) / N_s.$$

Перед использованием последней зависимости также следует проверить однородность ряда дисперсий. При однородном дублировании опытов эту проверку проводят по критерию Кохрена:

$$G^{\text{расч}} = S_{yu}^2 \max / \sum_{u=1}^N S_{yu}^2,$$

который сравнивают с его табличным значением в зависимости от уровня значимости α , числа степеней свободы $f = n - 1$ и числа опытов N .

Ряд дисперсий считается однородным, если $G^{\text{расч}} < G^{\text{табл}}$.

8.2 Оценка адекватности модели

После проверки значимости коэффициентов уравнения регрессии следует оценить адекватность построенной модели – определить достаточность аппроксимации исследуемого процесса построенной эмпирической моделью. Такая оценка может быть проведена несколькими способами.

Первый способ базируется на анализе остатков d (рис. 8.1). Второй способ базируется на статистической оценке самой модели.

Анализ остатков

Исследование остатков позволяет на качественном уровне оценить результативность построения регрессионной модели.

Для проверки адекватности простой линейной регрессии модели можно использовать график d_i в зависимости от x_i или y' , $i = 1, \dots, n$. Если остатки попадают в горизонтальную полосу с центром на оси абсцисс, то модель можно рассматривать как адекватную. Если полоса расширяется, когда x или y' возрастают, то это указывает на отсутствие постоянства дисперсии (гетероскедастичность). В частности, дисперсия может быть функцией модели, что делает необходимым преобразование переменной y . График, пока-

зывающий линейный тренд, дает основание для введения в модель дополнительной независимой переменной. График в виде параболы указывает на то, что в модель должен быть добавлен линейный или квадратичный член. Примеры распределения остатков показаны на рис. 8.1.



Рис. 8.1 Примеры графиков остатков

Для проверки нормальности случайных погрешностей подходит гистограмма d_i . Нормальность может быть также проверена с помощью критериев согласия (например, по критерию χ^2).

Если данные упорядочены некоторым образом (например, последовательность точек по времени или по расположению), то график остатков d_i в том же самом порядке, в котором собирались данные, позволяет проверить случайность. Гипотезу о случайности можно отвергнуть, если выявлен тренд (смещение), причем тренд может иметь как сезонный, так и линейный характер. Примеры трендов показаны на рис. 8.2.



Рис. 8.2 Примеры отсутствия случайности

Оценка по критерию Фишера

Проверку адекватности модели (независимо от выбранной формы ее математического представления) осуществляют чаще всего с помощью критерия Фишера (F -критерия), расчетное значение которого определяют по формуле

$$F_{f_2; f_1}^{\text{расч}} = S_{\text{неад}}^2 / S_y^2.$$

В знаменателе стоит дисперсия опытов S_y^2 с f_1 (число степеней свободы), в числителе – дисперсия неадекватности $S_{\text{неад}}^2$ с числом степеней свободы f_2 .

$$S_{\text{неад}}^2 = \left(\sum_{i=1}^N (y_{i \text{ расч}} - y_{i \text{ эксп}})^2 \right) / f_2 = SS_{\text{неад}} / f_2.$$

Степень свободы f_2 определяется как разность между числом опытов плана и числом оставленных коэффициентов уравнения регрессии. Критерий Фишера отвечает на вопрос, во сколько раз модель предсказывает хуже по сравнению с опытом. Могут быть использованы зависимости, в которых критерий Фишера определяет, во сколько раз модель предсказывает результат лучше по сравнению со средним значением зависимой переменной – функции отклика.

Гипотезу об адекватности уравнения принимают в том случае, когда выполняется условие для выбранного уровня значимости

$$F^{\text{расч}} \leq F^{\text{табл}}.$$

Приведенная зависимость для определения $SS_{\text{неад}}$ справедлива при отсутствии дублирования или при дублировании опытов в центре плана.

При равномерном дублировании

$$SS_{\text{неад}} = n_u \sum_{i=1}^N (y_{i \text{ расч}} - y'_{i \text{ эксп}})^2,$$

где $y'_{i \text{ эксп}}$ – это среднее из n_u – дублей i -го опыта.

При неравномерном дублировании

$$SS_{\text{неад}} = \sum_{i=1}^N n_u (y_{i \text{ расч}} - y'_{i \text{ эксп}}).$$

Оценка коэффициента нелинейной множественной корреляции

Для проверки адекватности любых зависимостей можно использовать коэффициент нелинейной множественной корреляции, определяемый зависимостью

$$R = \sqrt{(1 - S_{\text{неад}}^2 / S_y^2)}.$$

Выражение в правой части уравнения под знаком радикала является коэффициентом множественной детерминации. Он указывает

долю дисперсии, вносимой варьируемыми факторами в общую дисперсию аппроксимации исследуемой области. При этом независимо от стратегии проводимого эксперимента входящие в последнее выражение дисперсии можно рассчитывать по следующим формулам:

$$S_{\text{неад}}^2 = \sum_{u=1}^N (y_{u \text{ расч}} - y_{u \text{ эксп}})^2 / (n - k - 1);$$

$$S_y^2 = \sum_{u=1}^N (y_{u \text{ эксп}} - y_{u \text{ эксп}})^2 / (n - 1),$$

где n – число опытов в матрице планирования; k – число варьируемых параметров.

Значимость коэффициента корреляции и адекватность модели для уровня достоверности $p = 0,95$ определяется неравенством

$$t_R = R(n - k - 1)^{0,5} / (1 - R^2) > 2.$$

Подобная методика проверки адекватности не требует дублирования экспериментов, обеспечивая практически ту же достоверность, что и рассмотренные выше способы.

8.3 Пример статистической обработки эксперимента

Практическую обработку эксперимента рассмотрим на примере определения расхода топлива автомобиля ЗИЛ-130. Данные эксперимента приведены в табл. 8.1. Последовательность проведения экспериментов, определяемая на основе таблицы равномерно распределенных в интервале 0 – 100 чисел, приведена в табл. 8.2.

Таблица 8.1

Матрица планирования

Номер опыта	Переменные				Расход топлива, л / 100 км				
	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	$Y_{\text{ср}}$	$Y_{\text{теор}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	–	–	–	–	40,0	40,7	39,0	39,9	40,28
2	+	–	–	–	53,0	52,5	53,5	53,0	52,60
3	–	+	–	–	58,5	59,0	57,6	58,4	58,03
4	+	+	–	–	67,6	67,0	68,2	67,6	67,98
5	–	–	+	–	52,1	52,8	51,9	52,3	51,90
6	+	–	+	–	60,7	60,5	61,2	60,8	61,18
7	–	+	+	–	63,0	64,0	63,5	63,5	63,88
8	+	+	+	–	71,2	70,7	71,8	71,2	70,80

Окончание табл. 8.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	–	–	–	+	43,1	43,8	42,1	43,0	43,38
10	+	–	–	+	57,8	57,3	58,3	57,8	57,42
11	–	+	–	+	61,6	62,1	60,7	61,5	61,12
12	+	+	–	+	72,4	71,8	73,0	72,4	72,80
13	–	–	+	+	55,2	55,9	55,1	55,4	55,00
14	+	–	+	+	65,2	65,3	66,0	65,6	66,00
15	–	+	+	+	66,1	67,1	66,6	66,6	66,98
16	+	+	+	+	76,0	75,1	76,6	76,0	75,62

Таблица 8.2

Результаты рандомизации

Серия	Последовательность опытов															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	10	8	12	11	15	4	9	1	6	5	7	8	2	14	3	13
2	7	6	9	2	5	3	14	11	16	1	15	10	8	4	13	12
3	16	5	15	3	10	4	13	7	14	2	1	11	9	8	12	6

Формула для определения расхода топлива при любом сочетании в заданных интервалах изменения варьируемых параметров (табл. 7.4) имеет вид:

$$Y = 60,31 + 5,24X_1 + 6,84X_2 + 3,61X_3 + 1,98X_4 - 0,59X_1X_2 - 0,76X_1X_3 + 0,43X_1X_4 - 1,44X_2X_3.$$

Так как число для всех шестнадцати опытов одинаковое, то при использовании зависимости $S_y^2 = (\sum_{u=1}^N S_{yu}^2) / N_s$, например для девятого опыта, получим:

$$S_{y9}^2 = ((43,1 - 43)^2 + (43,8 - 43)^2 + (42,1 - 43)^2) / (3 - 1) = 0,73.$$

Просуммировав дисперсии для всех проведенных опытов, получим общую дисперсию опыта $S_y^2 = 5,74$.

Перед использованием последней зависимости также следует проверить однородность ряда дисперсий. При однородном дублировании опытов используют критерий Кохрена, который сравнивают с его табличным значением в зависимости от уровня значимости $p = 0,95$, числа степеней свободы $f = n - 1 = 2$ и числа опытов $N = 16$ ($G^{\text{табл}} = 0,7341$).

$$G^{\text{расч}} = S_{yu \max}^2 / \sum_{u=1}^N S_y^2 = 0,73 / 5,47 = 0,127.$$

Ряд дисперсий считается однородным, т.к. $G_{\text{расч}} < G_{\text{табл}}$ и ошибка опыта $S_y^2 = 5,74 / 16 = 0,179$.

Оценку значимости коэффициентов уравнения регрессии проводим с использованием доверительного интервала

$$\Delta b_i = t_{\alpha; f_1} S_{b_i},$$

где $S_{b_i} = S_y^2 / N = 0,179 / 16 = 0,0112$, $t_{\alpha; f_1} = 2,92$, $\Delta b_i = 2,92 \cdot 0,0112 = 0,0327$.

Следовательно, незначимыми являются коэффициенты при парных эффектах X_2X_4 и X_3X_4 , которые и при вычислении дали нулевые значения.

Дисперсию неадекватности определяем по формуле

$$S_{\text{неад}}^2 = \sum_{u=1}^N (y_{u \text{ расч}} - y_{u \text{ эксп}})^2 / (n - k - 1) =$$

$$= 2,3865 / (16 - 11 - 1) = 0,5966 ,$$

а критерий Фишера согласно формуле

$$F_{f_2 f_1}^{\text{расч}} = S_{\text{неад}}^2 / S_y^2 = 0,5966 / 0,179 = 3,33,$$

что меньше табличного значения со степенями свободы 2 и 4, равного 19,2. Следовательно, модель адекватна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нефедов, А. Ф. Планирование эксперимента и моделирование при исследовании эксплуатационных свойств автомобилей / А. Ф. Нефедов, Л. Н. Высочин. – Львов : Вища школа, 1976. – 160 с.
2. Зедгинидзе, И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем / И. Г. Зедгинидзе. – М. : Наука, 1976. – 390 с.
3. Ферстер, Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа / Э. Ферстер, Б. Ренц. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 302 с.
4. Новик, Ф. С. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования эксперимента / Ф. С. Новик, Я. Б. Арсов. – М. : Машиностроение ; София : Техника, 1980. – 304 с.
5. Таблицы по математической статистике / П. Мюллер [и др.]. – М. : Финансы и статистика, 1982. – 278 с.
6. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент : справочник / под ред. В. А. Григорьева и В. М. Зорина. – М. : Энергоиздат, 1982. – 512 с.
7. Малышев, В. П. Вероятностно-детерминированное планирование эксперимента / В. П. Малышев. – Алма-Ата : Наука КазССР, 1981. – 116 с.

Тема 9

ПОЛЕЗНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Аппроксимация математических моделей. Планы единой структуры. Автоматизация построения планов. Частные модели. Свертка частных моделей. Пример построения частных моделей и модели свертки.

9.1 Аппроксимация области оптимальных значений

Одним из наиболее полезных приложений статистического моделирования является аппроксимация области оптимальных значений зависимой переменной. Наличие такой модели позволяет существенно упростить процедуру нахождения независимых параметров, соответствующих оптимуму функции отклика, т.к. исключает необходимость многократного решения сложных математических построений, описывающих исследуемый процесс.

В большинстве технических приложений область оптимума достаточно точно аппроксимируется полиномами второй степени, например следующего вида:

$$Y = B_0 + \sum_{i=1}^N B_i X_i + \sum_{i=1}^N B_{ii} X_i X_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N B_{ij} X_i X_j .$$

Построение модели в такой форме возможно при использовании значительного числа планов эксперимента, обладающих различными статистическими свойствами оптимальности. При решении же задач оптимизации в автоматизированном режиме целесообразно использовать те из них, которые обладают регулярной структурой при различном числе варьируемых параметров, – непрерывные планы одной структуры. Это означает, что независимо от числа варьируемых параметров построение матрицы планирования подчинено одним закономерностям. Примерами таких планов являются четырехуровневые планы второго порядка Бокса–Дрейпера для числа независимых параметров от 2 до 15 и трехуровневые планы Рехтшафнера для неограниченного числа независимых параметров.

Планы Рехтшафнера являются насыщенными и представляют собой выборки строк полного факторного эксперимента 3^k . Способ их построения ясен из табл. 9.1.

Таблица 9.1

Структура планов Рехтшафнера

Номер множества	Точки множества	Число опытов множества
I	$(-1, \dots, -1)$ для всех k	—
II	$(-1, 1, \dots, 1)$ для всех k	k
III	$(-1, -1, 1)$ для $k = 3$ $(1, 1, -1, \dots, -1)$ для $k > 3$	$(k - 1)k / 2$
IV	$(1, 0, 0, \dots, 0)$ для всех	k

Структура планов Рехтшафнера была использована Боксом и Дрейпером для построения насыщенных D -оптимальных планов на кубе (табл. 9.2). Значения промежуточных уровней для разных планов были получены из критерия D -оптимальности минимизацией определителя информационной матрицы (табл. 9.3).

Таблица 9.2

Структура планов Бокса-Дрейпера

Номер множества	Точки множества	Число опытов множества
I	$(-1, \dots, -1)$ для всех k	1
II	$(+1, -1, \dots, -1)$ для всех k	k
III	$(\lambda, \lambda, -1, \dots, -1)$ для $k > 3$	$(k - 1)k / 2$
IV	$(\mu, 1, 1, \dots, 1)$ для всех	k

Таблица 9.3

Значения промежуточных уровней

k	λ	μ	k	λ	μ
2	-0,1315	0,3944	9	0,7544	-0,9602
3	0,1925	-0,2912	10	0,7808	-0,9693
4	0,4141	-0,6502	11	0,8022	-0,9757
5	0,5355	-0,8108	12	0,8198	-0,9802
6	0,6183	-0,8854	13	0,8346	-0,9836
7	0,6772	-0,9242	14	0,8471	-0,9862
8	0,7208	-0,9464	15	0,8579	-0,9882

Пример планов Рехтшафнера и Бокса-Дрейпера на четыре варьируемых фактора приведен в табл. 9.4.

Таблица 9.4

Насыщенные планы на четыре фактора

№ опыта	X_1		X_2		X_3		X_4	
	Р	БД	Р	БД	Р	БД	Р	БД
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
4	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
5	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
6	1	λ	1	λ	-1	-1	-1	-1
7	1	λ	-1	-1	1	λ	-1	-1
8	1	λ	-1	-1	-1	-1	1	λ
9	1	-1	1	λ	1	λ	-1	-1
10	-1	-1	1	λ	-1	-1	1	λ
11	-1	-1	-1	-1	1	λ	1	λ
12	1	μ	0	1	0	1	0	1
13	0	1	1	μ	0	1	0	1
14	0	1	0	1	1	μ	0	1
15	0	1	0	1	0	1	1	μ

Применение планов неизменной структуры позволяет заменить их непосредственный ввод в программу исследований набором правил, которые в зависимости от заданного числа исследуемых переменных обеспечивают формирование соответствующего плана и реализацию по нему математического эксперимента с последующей статистической обработкой результатов и определением области оптимальных значений. Простейшая программа автоматизированного построения планов Рехтшафнера приведена ниже. Вариативной величиной является число независимых факторов m .

```

{Программа построения насыщенных
трехуровневых планов Рехтшафнера}
Uses crt;
var
k2,k1,k,m,n,n1,n2,n3,n4: integer;
x:array[1..7,1..36] of real;
begin
{Число факторов; для примера m=5}
m:=5;
{Первая строка}
n1:=1;
{Последняя строка второго блока}

```

```
n2:=m+1;  
{Последняя строка третьего блока}  
n3:=n2+((m-1)*m) div 2;  
{Последняя строка четвертого блока}  
n4:=(((m+1)*(m+2)) div 2);  
clrscr;  
{Построение первого блока}  
for k:=1 to m do  
begin  
x[k,1]:=-1;  
end;  
{Построение второго блока=====}  
for n:=n1+1 to n2 do  
begin  
for k:=1 to m do  
begin  
x[k,n]:=1;  
if (k=n-1) then x[k,n]:=-1;  
end;  
end;  
{Построение третьего блока=====}  
for n:=n2+1 to n3 do  
begin  
for k:=1 to m do  
begin  
x[k,n]:=-1;  
end;  
end;  
k1:=1;k2:=1;  
for n:=n2+1 to n3 do  
begin  
k2:=k2+1;  
for k:=1 to m do  
begin  
if (k=k2) then  
begin  
x[k,n]:=1;  
x[k1,n]:=1;  
end;  
end;  
if k2=m then
```

```

begin
k1:=k1+1;
k2:=k1;
end;
end;
{Построение четвертого блока===}
k2:=0;
for n:=n3+1 to n4 do
begin
k2:=k2+1;
for k:=1 to m do
begin
x[k,n]:=0;
if (k=k2) then x[k,n]:=1;
end;
end;
{Распечатка плана=====}
for n:=1 to n4 do
begin
WriteLn;
for k:=1 to m do
begin
TextColor(15);
Write(x[k,n]:3:0);
end;
end;
ReadLn;
end.

```

Результаты работы программы приведены ниже.

```

-1 -1 -1 -1 -1
-1 1 1 1 1
1 -1 1 1 1
1 1 -1 1 1
1 1 1 -1 1
1 1 1 1 -1
1 1 -1 -1 -1
1 -1 1 -1 -1
1 -1 -1 1 -1
1 -1 -1 -1 1
-1 1 1 -1 -1
-1 1 -1 1 -1

```

-1 1 -1 -1 1
 -1 -1 1 1 -1
 -1 -1 1 -1 1
 -1 -1 -1 1 1
 1 0 0 0 0
 0 1 0 0 0
 0 0 1 0 0
 0 0 0 1 0
 0 0 0 0 1

9.2 Модели «серого ящика»

Считается, что основным преимуществом рассмотренных методов планирования эксперимента является хорошо апробированная методика обработки экспериментальных данных и статистической оценки результатов построения полиномиальных моделей. Вместе с тем такой подход имеет два существенных ограничения: 1) жесткое соответствие плана эксперимента форме используемой модели аппроксимации; 2) невозможность исследования характера непосредственного влияния каждого из варьируемых факторов на зависимую переменную, т.к. анализ полученной модели по коэффициентам чувствительности приводит к неконтролируемым погрешностям неопределенной величины.

Устранение указанных ограничений становится возможным при использовании такого подхода, при котором полная модель исследуемого процесса является результатом обобщения частных моделей, описывающих влияние каждого из варьируемых факторов на зависимую переменную. Такой подход называют вероятностно-детерминированным. Его суть заключается в следующем:

1. Используя вероятностную основу, проводят эксперимент по определению величины зависимой переменной при сочетаниях независимых факторов, задаваемых планом эксперимента (как и в предыдущих случаях). Отличие состоит в том, что план эксперимента строится на базе латинских квадратов (известных, начиная с третьего порядка, как гипер-греко-латинские квадраты). Пример такого плана четвертого порядка на пяти уровнях для шести варьируемых факторов показан на рис. 9.1. Каждый из выделенных на рисунке элементов, в свою очередь, является сочетанием еще двух факторов:



X_5 и X_6 . Примеры некоторых таких элементов, представленных сочетанием факторов X_5 и X_6 , показаны на рис. 9.2.

X_1		1					2					3					4					5				
X_2		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1																									
	2																									
	3																									
	4																									
	5																									
2	1																									
	2																									
	3																									
	4																									
	5																									
3	1																									
	2																									
	3																									
	4																									
	5																									
4	1																									
	2																									
	3																									
	4																									
	5																									
5	1																									
	2																									
	3																									
	4																									
	5																									
		X_3 : уровни варьирования фактора																								
		X_4 : уровни варьирования фактора																								

Рис. 9.1 Пример плана

		X_5					X_5				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
X_6	1						1				
	2						2				
	3			$X_1 = 1;$			3		$X_1 = 4;$		
	4			$X_2 = 1;$			4		$X_2 = 3;$		
	5			$X_3 = 1;$			5		$X_3 = 1;$		
				$X_4 = 1.$					$X_4 = 4.$		

Рис. 9.2 Фрагменты вариаций факторов X_5 и X_6

Более удобное представление латинского квадрата приведено в табл. 9.5.

Таблица 9.5

План шестифакторного эксперимента на пяти уровнях

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
X_1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
X_2	1	3	2	5	4	1	3	2	5	4	1	3	2	5	4	1	3	2	5	4	1	3	2	5	4
X_3	1	3	2	5	4	3	2	5	4	1	2	5	4	1	3	5	4	1	3	2	4	1	3	2	5
X_4	1	3	2	5	4	2	5	4	1	3	4	1	3	2	5	3	2	5	4	1	5	4	1	3	2
X_5	1	3	2	5	4	5	4	1	3	2	3	2	5	4	1	4	1	3	2	5	2	5	4	1	3
X_6	1	3	2	5	4	4	1	3	2	5	5	4	1	3	2	2	5	4	1	3	3	2	5	4	1
	1...10										11...20										21...25				

Такие планы гарантируют статистическую равноценность выборки результатов на каждый уровень фактора.

Если факторов меньше, чем закодировано в плане, то факторы плана, оставшиеся свободными, не принимаются во внимание. Каждому фактору задается пять уровней, которые также кодируются. Порядок кодирования произвольный. Если число уровней фактора физически меньше назначенных, то одно и то же значение может быть задано всем оставшимся уровням. Например, если прибор имеет только три фиксированных значения, то первое и второе значения кодируют на первый и второй уровни, а третье – на оставшиеся третий, четвертый и пятый уровни. То же делают при вариации качественного фактора, например сорта исследуемого материала. При этом число экспериментов остается неизменным (25).

2. Построение частных (точечных) зависимостей искомой переменной от конкретного фактора проводится следующим образом. Например, для второго фактора первому уровню соответствуют результаты опытов 1, 6, 11, 16, 21. Следует получить один результат усреднением указанных пяти опытов. При этом происходит усреднение каждого из остальных факторов, т.к. каждый из них в этих опытах принимает значения всех своих уровней варьирования.

Эту операцию необходимо проделать для всех уровней каждого фактора. При этом появляется возможность построения частных шести функций по пяти усредненным значениям для каждого фактора.

Рассматриваемый метод не накладывает никаких ограничений на вид частных функций, обеспечивая тем самым учет реального протекания внутренних процессов в исследуемой системе. Построение зависимостей осуществляется удобным способом – сглаживани-

ем результатов полиномами различной формы и степени. Поиск получаемых при этом коэффициентов регрессии можно в общем случае осуществлять на основе метода наименьших квадратов. Соответствие полученных таким образом зависимостей данным эксперимента оценивается статистически.

Следует еще раз отметить, что обычно приводимые в регрессионном анализе предпосылки метода наименьших квадратов (МНК) о нормальном законе распределения исследуемых величин в общем случае не являются критерием его применения. При соблюдении таких ограничений дисперсия оценок получается минимальной из всех возможных (доказательство этого факта приводится в курсе математической статистики как интерпретация общего принципа Лежандра, не более того). Если требование соответствия нормальному закону распределения не гарантируется по результатам эксперимента, то это приводит лишь к необходимости статистической оценки иными методами – непараметрическими. Метода, обладающего лучшей результативностью, чем МНК (иное название принципа Лежандра), в настоящее время не обнаружено.

Обобщение полученных частных уравнений регрессии в единую модель осуществляется на основе уравнения Протодяконова, предложенного для статистической обработки массива данных со случайным сочетанием уровней факторов:

$$y_n = \frac{\prod_{i=1 \dots k} y_i}{y_{\text{ср}}^{k-1}},$$

где y_n – многофакторная функция Протодяконова; y_i – частные функции; k – число факторов (частных функций); $y_{\text{ср}}$ – среднее значение всех учитываемых результатов эксперимента.

3. Предложенное уравнение может приводить к отклонениям полученных по нему расчетных данных от экспериментальных, хотя и в рамках его статистической значимости, а также к превышению реального физического значения зависимой переменной даже в тех случаях, когда частные значения находятся в этом пределе. Поэтому при построении конечной модели осуществляют коррекцию исходного уравнения различными способами.

Если имеются ограничения на физические пределы изменения зависимой переменной ($y_{\text{пв}}$ – верхнее значение, $y_{\text{пн}}$ – нижнее значение), то конечное выражение уравнения регрессии можно представить в виде

$$y = y_{\text{пн}} + (y_{\text{пв}} - y_{\text{пн}}) \exp(-A y_{\text{п}}^{-B}).$$

Неизвестные коэффициенты A и B можно найти методом наименьших квадратов или по результатам совместного решения последнего уравнения для двух групп экспериментальных данных, например дающих результат больше и меньше среднего значения зависимой переменной.

Использование рассмотренного подхода позволяет резко сократить число экспериментов при получении адекватного описания системы в целом и частных аспектов ее состояния. Чтобы провести шестифакторный эксперимент на пяти уровнях согласно этому подходу, требуется всего 25 экспериментов, тогда как в полном факторном эксперименте для этих условий их понадобится 15 625.

Пример модели «серого ящика»

Одним из важных показателей качества грузового автомобиля является удельная мощность двигателя ($N_{\text{уд}}$). Анализ априорной информации позволяет заключить, что среди множества факторов, оказывающих влияние на этот показатель, основными являются:

$G(X_1)$ – полный вес автопоезда;

$\Pi(X_2)$ – цена топлива;

$f(X_3)$ – коэффициент сопротивления качению;

$\Pi(X_4)$ – пересеченность продольного профиля;

$K(X_5)$ – помехонасыщенность маршрута;

$\text{И}(X_6)$ – интенсивность движения.

Уровни варьирования указанных переменных представлены ниже в табл. 9.6.

Таблица 9.6

Уровни варьирования переменных

Уровни	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	235,0	6,08	0,03000	10	15,0	600
2	197,4	5,26	0,02615	9	12,5	525
3	159,4	4,44	0,00225	8	10,0	450
4	121,4	3,62	0,18650	7	7,5	375
5	83,4	2,80	0,01500	6	5,0	300
Интервал варьирования	76,0	1,64	0,00750	2	5,0	150

Реализация модели проведена по рассмотренному выше плану шестифакторного эксперимента на пяти уровнях.

Обработкой статистических данных получены частные выражения зависимой переменной от определяющих факторов:

$$N_{уд}(X_1) = 1,13 - 0,24 X_1;$$

$$N_{уд}(X_2) = 1,13 - 0,12 X_2;$$

$$N_{уд}(X_3) = 1,13 + 0,11 X_3;$$

$$N_{уд}(X_4) = 1,13 + 0,10 X_4;$$

$$N_{уд}(X_5) = 1,13 - 0,05 X_5;$$

$$N_{уд}(X_6) = 1,13 - 0,05 X_6.$$

Общая модель строилась в виде уравнения Протоdjeяконова. Экспериментальные данные и результаты теоретических расчетов по полученной модели показаны ниже в табл. 9.7. В связи со значительными погрешностями предсказания теоретическая модель корректировалась на основе приведенных выше рекомендаций. Окончательно уравнение связи имеет следующий вид:

$$y_{kor} = 0,825 + 0,82 \exp(-0,765 \exp(-3,947 \ln y_n)).$$

Полученные на его основе данные приведены в табл. 9.7. Там же указаны относительные погрешности определения функции отклика по соответствующим зависимостям.

Таблица 9.7

Сводные данные

Номер опыта	Данные эксперимента	Расчетные данные	Относительная погрешность, %	С учетом корректировки	Относительная погрешность, %
1	0,880	0,676	-23,20	0,848	-3,68
2	0,890	0,716	-19,52	0,872	-2,00
3	0,885	0,699	-21,05	0,860	-2,81
4	0,900	0,735	-18,39	0,887	-1,47
5	0,895	0,728	-18,63	0,882	-1,50
6	1,135	0,963	-15,17	1,162	2,40
7	1,060	0,918	-13,38	1,106	4,33
8	0,860	0,768	-10,56	0,920	6,98
9	1,270	1,108	-12,78	1,317	3,69
10	1,325	1,156	-12,74	1,358	2,47
11	0,945	0,784	-17,06	0,936	-0,96
12	1,000	0,836	-16,43	0,998	-0,16
13	0,895	0,761	-14,96	0,912	1,86
14	1,375	1,100	-16,31	1,310	-0,35
15	0,895	0,769	-14,03	0,920	2,82
16	1,140	0,999	-12,33	1,206	5,78
17	1,365	1,236	-9,47	1,413	3,55
18	1,345	1,199	-10,88	1,389	3,27
19	1,365	1,245	-8,78	1,419	3,98
20	1,635	1,65	-4,67	1,543	-5,62
21	0,950	0,841	-11,46	1,005	5,83
22	1,335	1,188	-11,00	1,382	3,49
23	1,365	1,212	-11,22	1,398	2,42
24	1,400	1,268	-9,36	1,493	2,37
25	1,200	1,006	-11,13	1,278	6,50

Анализ полученных данных позволяет заключить, что в ряде случаев уравнение Протоdjeяконова дает расчетные значения, которые существенно отличаются от данных эксперимента. Вместе с тем корректировка этого уравнения позволяет привести его к виду, вполне пригодному для решения практических задач.

Следует отметить, что организация полного факторного эксперимента (ПФЭ) потребовала бы провести $2^6 = 64$ эксперимента. Много это или мало? Этот вопрос решает сам экспериментатор. В любом случае проведение простейших вычислений предпочтительнее проведения сложных натурных исследований, связанных с серьезными материальными и временными затратами.

Численные данные для иллюстрации процесса построения модели «серого ящика» заимствованы из литературного источника. В качестве инструмента их получения использована математическая модель движения автопоезда в различных условиях эксплуатации. Модель включает несколько десятков дифференциальных и алгебраических уравнений, всесторонне описывающих как сам процесс движения, так и функционирование основных элементов автопоезда. Разработка такой модели, ее настройка являются достаточно трудоемким делом, невозможным без проведения натурных экспериментальных исследований.

Модели «серого ящика» полезны по крайней мере в двух случаях:

- когда необходимо знание характера влияния отдельных факторов на исследуемую характеристику системы;
- когда невозможно предсказать форму уравнения связи при ограниченных возможностях экспериментальных исследований.

Вместо традиционной статистической обработки экспериментальных исследований во многих случаях достаточно провести корректировку полученного уравнения без проведения дополнительных экспериментов и пересчета коэффициентов уравнений регрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новик, Ф. С. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования эксперимента / Ф. С. Новик, Я. Б. Арсов. – М. : Машиностроение ; София : Техника, 1980. – 304 с.
2. Таблицы по математической статистике / П. Мюллер [и др.]. – М. : Финансы и статистика, 1982. – 278 с.

Раздел IV

ПРОЦЕДУРНЫЕ МОДЕЛИ

Тема 10

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Параметры и характеристики процесса. Типы оптимизационных задач. Простейшие методы параметрической оптимизации: полный перебор, покоординатный спуск, покоординатный спуск с обучением, наискорейший спуск. Рекомендации по решению практических задач.

10.1 Типы оптимизационных задач

Выбор параметров и характеристик систем, обеспечивающих их функционирование при выполнении комплекса предъявляемых требований, осуществляется по математической модели. Модель должна отражать основные существенные свойства проектируемого объекта. В зависимости от целей моделирования при составлении модели используют (описывают) различные свойства объекта. Поэтому один и тот же проектируемый объект может иметь несколько математических моделей. При этом в модели выделяют следующие элементы:

- неизменные в процессе моделирования величины – вектор Y . Например, при проектировании станка это плотность материала, его прочностные характеристики и т.д.;
- параметры модели, которые допускают вариацию в определенном интервале их изменения, – вектор X . Например, массово-габаритные параметры, свойства материалов и т.п.;
- управляющие функции (R) – определяющие характер протекания исследуемого процесса. Как правило, это либо закон изменения основного силового фактора, обеспечивающего поведение системы, либо функция, обеспечивающая реализацию этого закона (например, для шлифовального станка это закон изменения скорости движения по времени или пути).

В зависимости от целей решаемых проектных задач различают следующие их типы:

1. Если необходимо определить вектор X , обеспечивающий удовлетворение комплекса требований к проектируемому объекту, перед нами задача параметрической оптимизации.

Пример. Для шлифовального станка определить массово-габаритные параметры его элементов, обеспечивающие требуемую точность обработки детали при наибольшей компактности элементов. Массово-габаритные параметры – искомый вектор X , компактность деталей – критерий качества проекта.

2. Если известны составляющие Y , X и требуется определить управление R , переводящее систему из начального состояния (индекс O) в конечное (индекс T) при минимальном значении совершаемой работы (минимуме импульса действующей силы и т.п.), перед нами задача оптимального управления.

Пример. Для сообщения снаряду скорости собственного вращения выбирают такой закон изменения угла наклона нарезки, при котором затраты энергии на всем пути движения снаряда были бы минимальными. Закон изменения угла наклона – искомая функция, работа собственного вращения снаряда – критерий качества.

3. Если требуется осуществить X и R совместно, перед нами задача оптимального управления параметрами.

Пример. Для шлифовального станка определить массово-габаритные параметры его элементов и закон движения инструмента, обеспечивающие требуемую точность обработки детали при наибольшей компактности элементов и наименьшем времени перемещения инструмента. Массово-габаритные параметры – искомый вектор X , закон перемещения инструмента – управляющая функция, компактность деталей и время перемещения инструмента – критерии качества проекта.

4. Если имеется несколько образцов с известными Y , X , R и следует определить их минимальный набор, обеспечивающий реализацию присущих им основных функций, задача может быть двух типов:

4.1. Если при решении используются все существенные признаки объекта (векторы Y , X), то перед нами задача многомерного статистического анализа (автоматической классификации объектов).

Пример. Имеется набор технических объектов, каждый из которых в определенной мере удовлетворяет всему комплексу требований по качеству его функционирования. Требуется определить с учетом всех свойств объектов возможность замены имеющихся объектов их ограниченным множеством.

4.2. Если при решении используется интегральный критерий K как показатель качества системы, мы имеем дело с задачей целочисленного программирования, а по содержательному аспекту – с задачей выбора типажа средств, оптимальной унификации, стандартизации.

Пример. Имеется набор технических средств, каждое из которых способно выполнять несколько видов работ. Следует определить минимальный набор средств, обеспечивающий выполнение всех видов работ с минимальными затратами.

Каждый из рассмотренных типов задач решается соответствующими методами, хотя жесткой границы между типом задачи и определенным методом нет. Можно говорить лишь о той или иной степени эффективности метода при решении определенного типа задач.

К настоящему времени разработано несколько сотен методов решения проектных задач.

Основными категориями теории оптимизации являются:

- *модель процесса* – аналог реальной совокупности параметров и характеристик исследуемого процесса, описанных достаточным числом математических зависимостей;

- *критерий качества* (цель, целевая функция) – математическое выражение совокупности требований к результатам исследования технического объекта;

- *область варьирования параметров* – совокупный интервал допустимого изменения изменяемых в процессе исследования параметров;

- *ограничения* – математическое представление границ изменения характеристик, определяющих исследуемый процесс (в общем случае в ограничения может включаться и область варьирования параметров процесса);

- *метод оптимизации* – процедура непосредственного поиска решения, обеспечивающего достижение заданного, допустимого или максимального (минимального) критерия качества; процедура поиска варианта технического решения, удовлетворяющего комплексу предъявляемых требований к проекту объекта.

10.2 Модели параметрической оптимизации

Параметрическая оптимизация модели объекта осуществляется одним или несколькими методами, входящими в классы методов полного перебора, покоординатного спуска, наискорейшего спуска и т.д. Выбор метода определяется характером изменения

функции отклика математической модели и удобством контроля результатов промежуточных и конечных вычислений.

Полный перебор вариантов

Суть метода заключается в последовательном расчете всех возможных вариантов сочетания искомых параметров системы в задаваемых интервалах их изменения. Стратегия поиска решения методом полного перебора состоит из следующих этапов (рис. 10.1):

1. Задают интервал изменения искомых параметров и шаг их изменения.

Пример. Определить минимальное значение показателя системы

$$Z = 5x^2 + xy - 7y^2$$

при заданных интервалах изменения параметров системы X и Y :

$$0,9 x_0 < x < 1,1 x_0;$$

$$0,5 y_0 < y < 2,5 y_0,$$

начальных значениях параметров:

$$x_0 = 3,72; y_0 = 6,28,$$

шаге изменения параметров соответственно:

$$d_x = 0,01; d_y = 0,02.$$

2. Последовательно давая приращение по координатам X и Y ($x_i = x_0 + d_x$, $y_j = y_0 + d_y$ соответственно), вычисляют критерий Z , запоминая значения x^* , y^* , дающие минимальное значение $Z^* = Z_{\min}(x^*, y^*)$. Число циклов расчета равно числу варьируемых параметров рис. 10.1.

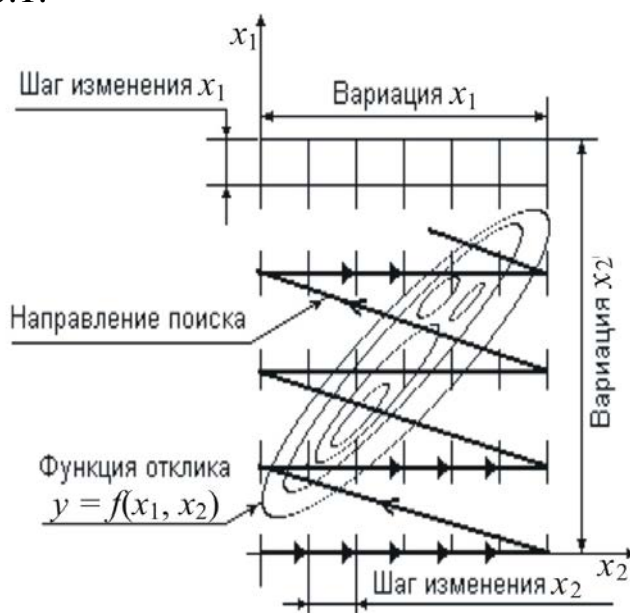


Рис. 10.1 Стратегия поиска решения методом полного перебора

Процедура реализации метода полного перебора для рассматриваемого примера:

```
Uses crt;  
const  
xo=3.72; yo=6.28;  
dx=0.01; dy=0.02;  
var  
zm,xz,yz,x,y,z: real;  
i,j: integer;  
  
begin  
clrscr;  
zm:=100;i:=0;  
x:=0.9*xo;  
y:=0.5*yo;  
while x<1.1*xo do  
begin  
while y<2.5*yo do  
begin  
i:=i+1;  
z:=5*x*x+x*y-7*y*y;  
if z<zm then  
begin  
zm:=z; xz:=x; yz:=y;  
end;  
y:=y+dy;  
end;  
x:=x+dx;  
end;  
WriteLn('Zmin= ',zm:5:2);  
WriteLn('Xzmin= ',xz:5:2);  
WriteLn('Yzmin= ',yz:5:2);  
WriteLn('Рассчитано вариантов: ', i);  
end.  
Результаты решения:  
Zmin= -1612.49;  
Xzmin= 3.35;  
Yzmin= 15.68.  
Рассчитано вариантов: 628.
```


Методом полного перебора удобно пользоваться при исследовании простых зависимостей с числом переменных от 2 до 4–6 и крупном шаге перебора или при определении характера изменения поверхности исследуемой функции. При наличии сложных математических моделей даже с небольшим числом исследуемых факторов применение этого метода приводит к недопустимым затратам машинного времени.

Покоординатный спуск

Суть метода заключается в изменении одного из параметров системы при фиксированных значениях других до тех пор, пока осуществляется обнаружение лучшего значения показателя системы. После этого значение изменяемого параметра фиксируется и осуществляется переход к изменению следующего.

При этом в отличие от полного перебора исключается необходимость расчета всех возможных комбинаций параметров. Схема реализации метода покоординатного спуска (рис. 10.2):

1. Первый пункт аналогичен методу полного перебора.
2. Изменяют одну из координат, например x , при неизменном значении второй координаты (y) до тех пор, пока есть улучшение критерия Z . Запоминают последнее (лучшее) значение $Z = Z^*(x_i^*, y)$.
3. Изменяют вторую координату (y), находят $Z = Z^*(x_i^*, y_i^*)$.
4. Пункты 2, 3 повторяют до тех пор, пока не будет определено значение $Z^* = Z_{\min}(x^*, y^*)$.



Рис. 10.2 Стратегия поиска решения методом покоординатного спуска

Направление изменения координаты (увеличение или уменьшение) зависит от выбранной начальной точки расчета и стратегии поиска. Если в качестве начальной выбирается точка с минимальными значениями переменных, то их изменение осуществляется

прибавлением шага приращения. Если начальная точка выбирается случайным образом, то для начала движения следует определить знак приращения, которое обеспечивает улучшение варианта.

Недостатком метода является неопределенность в выборе наиболее предпочтительного фактора для изменения показателя качества и шага движения. Кроме того, расчеты следует проводить из нескольких начальных точек, число которых неизвестно.

Покоординатный спуск с обучением

Метод аналогичен рассмотренному выше. Отличие состоит в том, что предварительно определяют координату и направление ее изменения (увеличение или уменьшение), которые быстрее приводят к уменьшению критерия Z . Пробы на определение продуктивной координаты и направления ее изменения осуществляют последовательно для каждого варьируемого параметра. Только после этого осуществляют его целенаправленное изменение. Процедура повторяется до выполнения условия $Z^* = Z_{\min}(x^*, y^*)$.

Пример. Определить значения параметров, минимизирующих критерий качества

$$Z = 125 - 2X + 3Y + 2X^2 - 0,67Y^2 + 1,35XY,$$

при ограничениях на изменяемые параметры

$$-1,23 < X < 3,45;$$

$$-2,78 < Y < 6,37$$

и ограничении на функцию исследуемого процесса

$$g = 13,67 - X^2 + 1,34XY - Y < 37,87.$$

Начиная с покоординатного спуска, используют не одну, а несколько начальных точек расчета. Можно показать, что для обнаружения глобального экстремума критерия с вероятностью $p = 0,95$ достаточно использовать 96 начальных точек при изменении искомых параметров в интервале $[-1; +1]$. Точки выбираются по закону равномерного распределения чисел в интервале от 0 до 1. Для обеспечения интервала изменения параметров $[-1; +1]$ осуществляют их кодирование, например по формулам теории планирования эксперимента:

$$x' = (X - X_{\text{cp}}) / dX;$$

$$X_{\text{cp}} = (X_{\text{в}} + X_{\text{н}}) / 2;$$

$$dX = (X_{\text{в}} - X_{\text{н}}) / 2,$$

где x' – кодированное значение параметра; $X_{\text{в}}$ – верхнее (как правило, наибольшее), $X_{\text{н}}$ – нижнее (как правило, наименьшее) натураль-

ное значение параметра в интервале изменения dX ; $X_{\text{ср}}$ – среднее натуральное значение параметра.

Представление параметров в кодированном виде обеспечивает создание универсальных программ оптимизации, не зависящих от предметной области решаемой задачи.

Примечание. При решении практических задач наряду с основной моделью процесса используются различные ограничения. Их удовлетворение следует проверять на каждом шаге расчетов. К таким ограничениям относятся:

- интервал изменения варьируемого параметра $[+1, -1]$;
- физические ограничения на изменения сочетаний параметров.

Пример. Определить значения параметров, максимизирующих критерий качества

$$Z = 125 - 2X + 3Y + 2X^2 - 0,67Y^2 + 1,35XY,$$

при ограничениях на изменяемые параметры

$$-1,23 < X < 3,45;$$

$$-2,78 < Y < 6,37$$

и ограничении на функцию исследуемого процесса

$$g = 13,67 - X^2 + 1,34XY - Y < 37,87.$$

Кодирование переменных дает следующие значения:

$$X_{\text{ср}} = 1,11; dX = 2,34;$$

$$Y_{\text{ср}} = 1,795; dY = 4,575.$$

Процедура, реализующая метод покоординатного спуска с обучением приведена ниже.

Uses crt;

var

gpr,gm,g,dxx,dx,x11,xdx,a1,a2,zm,xz,yz,x,y,z: real;

ij,j1,n1,il,j9,i,j,il,n: integer;

x1,y1,dux,dsn: array[1..10] of real;

Procedure nach_toch;

begin

for il:=1 to n do

begin

*x1[i1]:=-1+2*Random;*

end;

end;

```

Procedure opt;
begin
  for ij:=1 to n do
    begin
      y1[ij]:=(dsn[ij]+x1[ij]*dux[ij]);
    end;
    z:=125-2*y1[1]+3*y1[2]+2*y1[1]*y1[1]-
    0.67*y1[2]*y1[2]+1.35*y1[1]*y1[2];
    g:=13.67-y1[1]*y1[1]+1.34*y1[1]*y1[2]+
    y1[2]*y1[2];
    end;

```

```

Procedure zap;
begin
  zm:=z; xz:=y1[1];
  yz:=y1[2]; gm:=g;
end;

```

```

Procedure prir;
begin
  i:=i+1;
  x1[i1]:=x1[i1]+dx;
  if abs(x1[i1])<=1 then
    begin
      opt;
      x1[i1]:=x11;
      if (z>zm) and (g<gpr) then
        begin
          zap;
          j9:=i1;
          xdx:=dx;
        end;
      end;
      if abs(x1[i1])>1 then x1[i1]:=x1[i1]-dx;
    end;

```

```

Procedure prirasc;
begin
  il:=il+1;
  for i1:=1 to n do
    begin

```



```
prir;  
end;  
end;
```

```
Procedure opt1;  
begin  
for j1:=1 to n1 do  
begin  
j9:=0;il:=0;  
nach_toch;  
dx:=dxx;  
x11:=x1[i1];  
prirasc;  
dx:=-dxx;  
x11:=x1[i1];  
prirasc;  
if j9<>0 then  
begin  
dx:=xdx;  
i1:=j9;  
prir;  
end;  
end;  
end;
```

```
begin  
clrscr;  
dxx:=0.01;n:=2;n1:=100;i:=0;zm:=0;  
gpr:=37.87;  
dsn[1]:=1.11;dsn[2]:=1.795;  
dux[1]:=2.34; dux[2]:=4.575;  
opt1;  
WriteLn('Zmax= ',zm:5:2);  
WriteLn('Xzmax= ',xz:5:2);  
WriteLn('Yzmax= ',yz:5:2);  
WriteLn('gm= ',gm:5:2);  
WriteLn('Рассчитано вариантов: ', i);  
end.
```

На основе рассмотренной процедуры получены данные:
Zmax = 159.63;

$$X_{zmax} = 3.31;$$

$$Y_{zmax} = 4.05;$$

$$gm = 37.10.$$

Рассчитано вариантов: 404.

Наискорейший спуск

Метод аналогичен рассмотренному выше. Отличие состоит в том, что предварительно определяют влияние каждого параметра на изменение критерия Z , после чего осуществляют изменение параметров (шага их изменения) в соответствующих пропорциях одновременно. Шаг изменения координат назначают (корректируют) в соответствии с их вкладом в изменение критерия качества (пропорционально). Например, увеличение X дает приращение Z в два раза больше, чем увеличение Y . Тогда шаг $d_y = 0,5d_x$. Изменяют сразу все координаты. Шаг изменения корректируется на каждом этапе определения Z . Окончание поиска – выполнение условия $Z = Z_{\min}(x,y)$. Стратегия поиска этим методом показана на рис. 10.3.



Рис. 10.3 Реализация метода наискорейшего спуска

Примечание. Прерывание поиска (и промежуточного, и конечного) осуществляют при выполнении условия

$$(Z_{i+1} - Z_i) \cdot 100 / Z_i < e,$$

где e – заданная точность вычислений критерия Z (например, 1; 5; 10 % и т.п.).

Следует помнить, что никакой метод оптимизации не освобождает от необходимости предварительного анализа содержательной стороны задачи. Понимание этого вопроса обеспечивает построение простых и достаточно достоверных поисковых процедур, использующих разновидности рассмотренных методов. *Анализируются в первую очередь:* интервалы изменения параметров и суще-

ственность их вклада в формирование критерия качества; важность накладываемых ограничений и рациональная последовательность проверок их выполнения; возможные величины шагов изменения варьируемых параметров; возможность перехода к решению задачи в безразмерном представлении параметров.

С математической точки зрения задачи параметрической оптимизации являются неопределенными: число искомых параметров больше числа независимых уравнений, составляющих математическую модель. Поэтому число вариантов решения, обеспечивающих выполнение конечных требований, может существенно отличаться от одного. В такой ситуации возникает проблема многозначности, т.е. наличия множества вариантов, каждый из которых «достаточно хорош», т.к. удовлетворяет заданным поисковым требованиям. В подобных ситуациях можно либо воспользоваться любым из полученных вариантов; либо принять дополнительные меры для исключения подобной ситуации (постановка дополнительных ограничений); либо использовать процедуру «отсеивания» менее представительных вариантов решения (автоматическая таксономия).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петренко, А. И. Основы автоматизации проектирования / А. И. Петренко. – Киев : Техника, 1982. – 295 с.
2. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
3. Гарбарчук, В. И. Математическое проектирование сложных судовых систем / В. И. Гарбарчук. – Л. : Судостроение, 1982. – 108 с.
4. Курицкий, Б. Я. Оптимизация вокруг нас / Б. Я. Курицкий. – Л. : Машиностроение, 1989. – 144 с.

Тема 11

КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ПРОЕКТА

Понятие критерия качества, требования к показателю качества. Относительность критериев. Формы записи критериев качества. Многокритериальность, оптимальность по Порето. Функция желательности.

11.1 Общие положения

Критерий качества – признак, на основе которого производится оценка, сравнение эффективности отдельных решений, классификация объектов и явлений. Частным случаем критерия является критерий оптимальности – показатель предельной меры эффективности принимаемого решения для сравнительной оценки возможных решений и выбора наилучшего из них.

К критериям как основной категории теории принятия решений предъявляется **целый комплекс требований**, суть которых заключается в двух положениях:

- достоверность интерпретации требований к проекту;
- чувствительность к изменению величин и структуры параметров рассматриваемого явления.

Такие требования, как простота записи, удобство вычисления, единственность, непротиворечивость и так далее, относятся скорее к математической процедуре поиска решения.

При поиске проектного решения реализуются две задачи.

Первая задача: как найти оптимальное решение? При наличии определяющего требования, выраженного одним критерием качества, это задача чисто математическая, связанная с организацией численной процедуры поиска. На практике такие задачи в чистом виде не встречаются, хотя решаются достаточно часто ввиду упрощения реальной ситуации до возможно разрешимой.

Вторая задача: что следует понимать под оптимальным проектом? Эта задача встречается всегда: комплекс требований порождает комплекс критериев – многокритериальность, при которой не существует проекта, наилучшего сразу по всем критериям. Поэтому оптимальное решение чаще всего является компромиссным.

Многообразие проектных ситуаций порождает многообразие содержания критериев качества. Это многообразие можно классифицировать по группам требований (функциональные, общетехнические, конструктивные и т.д.), по типам элементов ТС (источник энергии, трансмиссия, исполнитель, управляющий элемент).

В зависимости от назначения элемента ТС можно выделить следующие группы критериев:

1. *Силовой элемент* – источник (аккумулятор-источник) энергии:

- минимум времени срабатывания;
- неизбыточность накопления энергии;
- минимум рассеивания энергии (остаточного накопления);
- обеспечение требуемого закона силового нагружения;
- температурная нечувствительность и т.д.

2. *Передающий элемент* – преобразователь энергии:

- максимальный КПД;
- неискажение закона силового нагружения;
- минимум времени срабатывания;
- минимальная инерционность;
- функциональная достаточность (неизбыточность).

3. *Управляющий элемент* – регулятор, ограничитель:

– точность управления (своевременность и требуемый уровень воздействия);

- минимальная инерционность;
- минимум энергопотребления ;
- структурная совместимость;
- многофункциональность и т.д.

4. *Опорный элемент*:

- прочность;
- максимальный КПД;
- динамическая устойчивость;
- статическая устойчивость;
- минимум массы и т.д.

Каждый из критериев может быть охарактеризован на более детальном уровне. Например, критерий прочности:

- контактная прочность;
- поверхностная прочность;
- сопротивление изгибу, кручению, срезанию и т.п.;
- равнопрочность;
- дифференцированная прочность и т.д.

Критерии могут быть сгруппированы определенным образом в интегральный критерий качества. Если интегральный (обобщенный, составной) критерий получен в результате проникновения в физическую суть функционирования ТС и вскрытия объективно существующей взаимосвязи между частными критериями и интегральным, то и конечное решение будет объективным. Однако ввиду сложности или невозможности установления такой связи в математически строгой форме на практике интегральный критерий образуют путем формального объединения частных критериев, что неизбежно ведет к субъективности получаемого оптимального решения.

Наибольшее распространение получили *три формы записи интегрального критерия*, варианты некоторых из них приведены ниже:

– *аддитивные*:

$$K = \sum \omega_i \varphi_i, i = 1, \dots, n,$$

$$K = \sum \varphi_i^{\omega_i}, i = 1, \dots, n;$$

– *мультиплексные (мультипликативные)*:

$$K = \prod \omega_i \varphi_i, i = 1, \dots, n,$$

$$K = \prod \varphi_i^{\omega_i}, i = 1, \dots, n;$$

– *комбинированные*:

$$K = \sum \omega_i \varphi_i + \prod \omega_i \varphi_i, i = 1, \dots, n,$$

$$K = \sum \varphi_i^{\omega_i} + \prod \omega_i \varphi_i, i = 1, \dots, n,$$

$$K = \sum \varphi_i^{\omega_i} + \prod \varphi_i^{\omega_i}, i = 1, \dots, n,$$

$$K = \sum \omega_i \varphi_i + \prod \varphi_i^{\omega_i}, i = 1, \dots, n.$$

Величины ω_i рассматриваются как веса, определяющие важность частных критериев φ_i .

Основным недостатком приведенных форм записи является то, что они не определяют объективной роли частных критериев в функционировании системы и выступают как формальный математический прием, придающий задаче удобный для решения вид. Все формы записи допускают компенсацию частных критериев. Слож-

ность их реализации обусловлена необходимостью обоснования величин весов. В практике решения задач для этого используют методы экспертных оценок, имитационное моделирование, возможности регрессионного анализа. В некоторых случаях имеется возможность автоматического определения и корректировки значимости частных критериев качества на основе анализа математических закономерностей их изменения в области варьирования искомых параметров модели изделия.

11.2 Оптимальность по Парето

Использование принципа Парето обеспечивает возможность сведения задачи с множеством частных критериев к задаче с одним интегральным критерием качества. При этом определение весовых коэффициентов частных критериев можно определять и уточнять автоматически в ходе решения задачи. Определение системы весовых коэффициентов и ранжирование по ней решений из области Парето приводит к получению оптимального компромиссного варианта, сбалансированного по противоречивости частных критериев. При этом интегральный показатель качества представляется следующим образом:

– если $\varphi_i \rightarrow \min$, то

$$K = \left(\sum \omega_i^2 (\varphi_i / \varphi_{i \min} - 1)^2 \right)^{0,5};$$

– если $\varphi_i \rightarrow \max$, то

$$K = \left(\sum \omega_i^2 (\varphi_{i \max} / \varphi_i - 1)^2 \right)^{0,5}.$$

Такая форма записи устраняет возможность компенсации потери качества по одному частному критерию путем увеличения качества по другому и обеспечивает предпочтительный выбор таких вариантов решения, при которых частные критерии располагаются ближе всего к некоторому идеальному набору своих экстремальных значений.

Пример области Парето для двух частных критериев качества показан на рис. 11.1. Области Парето – это те области изменения интегрального критерия, в которых повышение качества по одному

частному критерию возможно лишь ценой снижения качества по другому частному критерию (область компромисса).

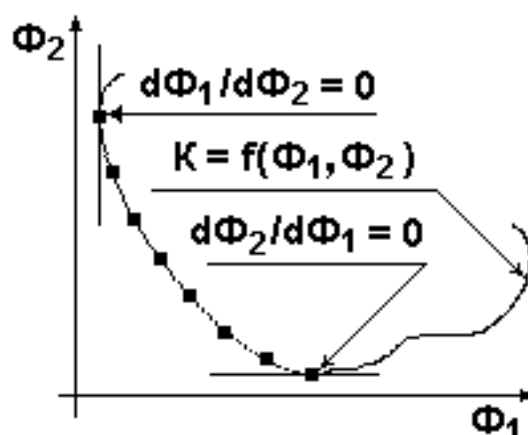


Рис. 11.1 Область Парето функции $K = f(\Phi_1, \Phi_2)$

Искомый вектор частных критериев W является нормалью к поверхности Парето. Его поиск и определение оптимального решения проводится в следующей последовательности:

- проводится минимизация отдельно по каждому критерию качества (например, $\Phi_{1\min}$), остальные частные критерии вычисляются с учетом полученных таким образом параметров модели ($\Phi_i | \Phi_{1\min}$);

- по результатам частных оптимизаций формируется матрица Φ .

Это позволяет определить область возможных изменений частных критериев. Матрица частных критериев Φ связана с вектором весов W соотношением

$$\Phi W = e,$$

где $e^T = [1, 1, \dots, 1]$ – единичный вектор.

Это соотношение позволяет определить веса частных критериев:

$$\Phi^{-1} \Phi W = \Phi^{-1} e,$$

$$W = \Phi^{-1} e.$$

С найденным вектором W проводится минимизация интегрального критерия качества. Расчеты проводят до момента выполнения условий

$$\frac{K_j - K_{j+1}}{K_j} \cdot 100 \leq \varepsilon;$$

$$g_j \leq [g_j],$$

где ε – заданная точность расчета критерия K (1; 5; 10 %); $[g_j]$ – ограничения на варьируемые параметры.

Квадратичная форма записи обеспечивает наличие «прогиба» – точки компромиссного проекта. Весовые коэффициенты определяются и уточняются в ходе решения задачи автоматически, путем последовательного сужения интервала варьирования искомых параметров около точки оптимума (прогиба), т.к. веса являются функцией ширины участка варьирования.

Пример. В результате исследований технической задачи установлена зависимость двух противоречивых частных критериев K_1 и K_2 , которые следует минимизировать, от одного варьируемого параметра C . Для интервала его изменения получены следующие значения:

C	1,5	2,0	2,5	3,0
K_1	0,3661	0,4195	0,4650	0,5059
K_2	3,732	2,420	1,997	1,755

После приведения значений частных критериев к безразмерному (делением на максимум частного критерия) виду Φ имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0,470 & 1 \\ 1 & 0,691 \end{pmatrix}.$$

Так как $\Phi^{-1}\Phi = E$,

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,470 & 1 \\ 1 & 0,691 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следует решить совместно четыре алгебраических уравнения для определения неизвестных членов обратной матрицы Φ^{-1} :

$$0,47f_1 + f_2 = 1;$$

$$f_1 + 0,691f_2 = 0;$$

$$0,47f_3 + f_4 = 0;$$

$$f_3 + 0,691f_4 = 1,$$

откуда с учетом формул вычисления весов частных критериев следует: $w_1 = 0,459$; $w_2 = 0,784$.

Расчет интегрального критерия по зависимости

$$K = \left(\sum \omega_i^2 (\varphi_i / \varphi_{i \min} - 1)^2 \right)^{0,5}$$

дает следующие результаты:

C	1,5	2,0	2,5	3,0
K_1	0,3661	0,4195	0,4650	0,5059
K_2	3,732	2,420	1,997	1,755
K	0,243	0,167	0,193	0,242

Таким образом, в принятых условиях оптимальное значение варьируемого параметра, обеспечивающее компромисс между двумя противоречивыми требованиями, соответствует $C = 2,0$.

В заключение следует отметить два момента.

Во-первых, итерационность процесса моделирования требует применения на разных этапах своих критериев качества с учетом появления новой информации.

Во-вторых, для осуществления контроля хода решения и оценки конечного результата следует использовать графическое представление значений частных критериев.

11.3 Функции желательности

В ряде случаев сведение многокритериальности к единому интегральному показателю качества осуществляется на основе функций желательности.

Под желательностью d понимается тот или иной желательный уровень параметра оптимизации. Разработана специальная шкала желательности. Величина d может меняться от 0 до 1. **Шкала выглядит следующим образом:**

$d = 1,00$ – максимально возможный уровень качества. Этот уровень часто неизвестен (как правило, это то, чего мы не знаем, например искомое значение критерия), иногда точно определен (как правило, это то, чего бы мы не хотели; по этому показателю желательность равна 1 и известна заранее). Максимального значения не всегда следует добиваться. В практических задачах исповедуется принцип: «Лучшее – враг хорошего»;

$d = 1,00...0,80$ – допустимый и превосходный (очень высокий) уровень качества, которого также не всегда следует добиваться;

$d = 0,80...0,60$ – допустимый и хороший уровень качества (он все же выше того, которого реально добиваются);

$d = 0,60...0,37$ – допустимый и достаточный уровень качества;

$d = 0,37$ – заданный уровень качества (соответствует тому значению параметра оптимизации, которое необходимо получить);

$d = 0,37...0$ – недопустимый уровень качества;

$d = 0$ – максимально нежелательный уровень качества.

Значение d на шкале желательности можно смещать вверх или вниз в зависимости от конкретных ситуаций.

Идея использования функции желательности в качестве параметра оптимизации заключается в том, что значения каждого из параметров оптимизации (y_i), которых в задаче может быть сколько угодно много, переводятся в соответствующие желательности (d_i), после чего формируется обобщенная функция желательности (D), представляющая собой среднее геометрическое желательностей отдельных параметров оптимизации:

$$D = (d_1 d_2, \dots, d_n)^{1/n},$$

где n – число изучаемых параметров оптимизации.

Выбор одного из двух вариантов перевода параметра оптимизации в соответствующие желательности определяется видом накладываемых на него ограничений.

При односторонних ограничениях типа $y \leq y_{\max}$ или $y \geq y_{\min}$ функция желательности определяется уравнением

$$d_i = e^{-(a_i)}, a_i = e^{-y'_i},$$

где y'_i – некоторая безразмерная величина, линейно (чаще всего) или нелинейно связанная с y_i . Для изменения по этой зависимости функции желательности d_i в интервале $0...1$ безразмерная величина y'_i должна изменяться от -4 до $+4$.

При наличии двусторонних ограничений $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ функцию желательности удобно задавать выражением

$$d_i = e^{-(a_i)}, a_i = ([y'_i])^q,$$

где q – положительное число, а y'_i определяется выражением

$$y'_i = (2y_i - (y_{\max} + y_{\min})) / (y_{\max} - y_{\min}).$$

Показатель степени q можно вычислить, если задать некоторому свойству y_i значение желательности в интервале $0,6...0,9$, определить по последней формуле модуль безразмерной величины y'_i , а затем воспользоваться выражением

$$q = (\ln(\ln(1/d))) / (\ln[y'_i]).$$

Выбирая разные значения q , можно задавать различную кривизну функции желательности. Это обстоятельство позволяет

учесть особую важность отдельных свойств: для них этот показатель будет иметь большее значение, и малому изменению свойства вблизи ограничивающих пределов будет соответствовать резкое изменение желательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопатников, Л. И. Краткий экономико-математический словарь / Л. И. Лопатников. – М. : Наука, 1979. – 358 с.
2. Уайлд, Д. Оптимальное проектирование / Д. Уайлд. – М. : Мир, 1980. – 272 с.
3. Гоминтерн, В. И. Методы оптимального проектирования / В. И. Гоминтерн, Б. М. Каган. – М. : Энергия, 1980. – 160 с.
4. Новик, Ф. С. Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов / Ф. С. Новик, Я. Б. Арсов. – М. : Машиностроение ; София : Техника, 1980. – 304 с.
5. Петренко, А. И. Основы автоматизации проектирования / А. И. Петренко. – Киев : Техника, 1982. – 295 с.
6. Брахман, Т. Р. Многокритериальность и выбор альтернативы в технике / Т. Р. Брахман. – М. : Радио и связь, 1984. – 288 с.
7. Гарбарчук, В. И. Математическое проектирование сложных судовых систем / В. И. Гарбарчук. – Л. : Судостроение, 1982. – 108 с.

Тема 12

МНОГОМЕРНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ

Основные допущения. Мера близости по совокупности параметров. Число классов и представительные центры. Критерий качества классификации. Нормирование величин параметров. Алгоритм автоматической классификации. Оценка существенности признаков объектов классификации.

12.1 Общие положения

С точки зрения математики задачи параметрической оптимизации являются неопределенными, предполагающими множество допустимых вариантов решений с различным набором варьируемых параметров. Определение целесообразного решения в этом случае можно проводить на основе статистического анализа вариантов на предмет существенности их различий. При этом используют всю совокупность параметров как существенных признаков исследуемого объекта.

Среди множества методов многомерного статистического анализа удобными с точки зрения их практической реализации являются методы автоматической классификации объектов.

Впервые метод автоматической классификации, известный как «вроцлавская таксономия», был использован группой польских статистиков в 1952 г. В 1963 г. вышла первая обобщающая работа, посвященная классификации живых организмов на примере ботаники и зоологии. По словам Г. Парницкого, «коварство (и очарование) проблемы распознавания образов заключается в ее простоте. При первом знакомстве с ней исследователь прежде всего с легкостью привлекает для решения своей задачи знакомый ему аппарат и... иногда получает удовлетворительный результат, но чаще его преследуют неприятности. И лишь хорошо разобравшись в своей конкретной задаче, ему удастся решить ее». Простота заключается в самой идее. Совокупность объектов какого-либо множества мож-

но разбить на классы таким образом, чтобы в каждом из них находились наиболее близкие по совокупности характеристик объекты, а в разных классах – наиболее непохожие. Сложность такой классификации заключается в выборе математического аппарата, критерия оптимальности, адекватного решаемой задаче алгоритма, интерпретации результатов решения задачи.

Методы автоматической классификации (таксономия, кластерный анализ) основаны на следующих посылах (допущениях):

1. Каждый объект может быть описан набором параметров.
2. Параметры могут быть основными (например, ширина, длина и т.п.) и производными от основных (например, площадь, периметр и т.д.).
3. Параметры могут быть количественными и качественными.
4. Предполагается, что каждый объект обладает совокупностью параметров, выделяющих его на фоне остальных объектов.
5. Предполагается, что близкие по совокупности параметров объекты можно выделить в компактную группу, а все множество объектов разбить на компактные группы.

Последнее допущение основано на принципе ограниченного многообразия. Например, во всем множестве сказок мира насчитано всего 17 типовых фрагментов, число основных типов моделей равно 10, существует около 2700 типов внешности человека и т.д.

Непосредственно проверить справедливость сделанных посылок не представляется возможным, проверка может быть только косвенной, например проведением классификации несколькими принципиально отличными методами.

Каждый объект может быть представлен точкой в пространстве параметров, где координаты точки определяются численными значениями соответствующих параметров. Следовательно, в этом случае можно определить удаление одного объекта от другого. Например, если объекты X_1 и X_2 характеризуются двумя параметрами: $X_1 = \{x_{11}, x_{12}\}$; $X_2 = \{x_{21}, x_{22}\}$ (объект – точка на плоскости), то можно использовать меру расстояния между ними в виде

$$d(X_1, X_2) = [X_1 - X_2] = [(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2]^{0,5},$$

где первая цифра обозначает номер объекта, вторая – номер признака объекта.

Данная зависимость используется и при большем числе параметров, например равном n :

$$d(X_1, X_2) = [X_1 - X_2] = [(x_{11} - x_{21})^2 + (x_{12} - x_{22})^2 + \dots + (x_{1n} - x_{2n})^2]^{0,5}.$$

Мера $d(X_1, X_2)$ в приведенной форме называется евклидовым расстоянием. В зависимости от рассматриваемой ситуации в литературе рекомендуется использовать различные меры.

Задавая разное количество групп классов, можно определить такое их число и состав, когда качество разделения будет наивысшим. Очевидно, что чем компактнее объекты расположены у центра группы и чем дальше разнесены центры групп, тем выше качество разделения.

Обозначим через K_1 среднее по всем группам расстояние от объектов группы до своих центров, а через K_2 – среднее расстояние между всеми парами центров групп. Тогда обобщенный критерий можно представить в следующем виде:

$$K = (K_2 - K_1) / (K_2 + K_1).$$

При увеличении K_1 и $K_2 = \text{const}$ критерий K убывает (объекты в классах недостаточно компактны), а при увеличении K_2 и $K_1 = \text{const}$ K возрастает (классы хорошо дистанцированы).

Не менее полезным может быть критерий, построенный на принципе паритетности требований в форме:

– если $\varphi_i \rightarrow \min$, то

$$K = \left(\sum \omega_i^2 (\varphi_i / \varphi_{i\min} - 1)^2 \right)^{0,5};$$

– если $\varphi_i \rightarrow \max$, то

$$K = \left(\sum \omega_i^2 (\varphi_{i\max} / \varphi_i - 1)^2 \right)^{0,5}.$$

В качестве частных критериев при этом могут быть использованы критерии K_1 и K_2 , а также критерий $N \rightarrow \min$. N – число классов, групп.

Следует отметить, что число групп классификации и их представительные центры заранее не являются известными. Поэтому при проведении классификации исходят из предположения о наличии объективной статистической целостности системы исходных данных, т.е. полагают, что исходные данные содержат информацию, обеспечивающую в конечном итоге стабильную конечную классификацию, результаты которой не зависят от числа первоначально заданных классов и их представительных центров. При отсутствии математической строгости такого предположения резуль-

таты применения методов автоматической классификации в различных прикладных задачах свидетельствуют о его практическом выполнении.

Такова суть идеи, заложенной в алгоритмы автоматической классификации объектов.

12.2 Алгоритм автоматической классификации

Практическую реализацию можно осуществить на основе различных алгоритмов. Один из простейших предполагает выполнение следующих процедур:

1. Формируют базы независимых значимых свойств объектов классификации. Набор таких свойств заранее определить не всегда представляется возможным. Поэтому процесс классификации является итерационным. Добавление свойств проводят по ходу исследования. Если при этом происходит изменение результатов классификации, то добавляемые в анализ свойства можно считать значимыми.

2. При недостаточности исходного множества объектов его расширение проводят реализацией математической модели их функционирования. В этом случае попутно решается задача оптимизации параметров конструкции объекта.

3. В настоящее время не решен вопрос о влиянии на результаты классификации размерностей параметров объекта и используемых для их описания масштабов. Поэтому параметры приводят к безразмерному виду. Для этого величины либо нормируют, либо делят на максимальное значение однотипного параметра. В первом случае реальный i -й параметр j -го объекта заменяют нормированной величиной $x_{ij \text{ norm}}$, получаемой делением отклонения параметра в объекте (x_{ij}) от величины его математического ожидания по всем объектам m ($M(x_{ij})$) на среднеквадратическое отклонение этого параметра по всем исследуемым объектам $G(x_{ij})$:

$$x_{ij \text{ norm}} = (M(x_{ij}) - x_{ij}) / G(x_{ij}).$$

При этом нормированные параметры могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Во втором случае вычисление проводят по формуле

$$x_{ij \text{ norm}} = x_{ij} / x_{i \text{ max}}.$$

Получаемые параметры будут положительными и меньшими или равными единице.

4. Назначают число классов и образцы, их представляющие (центры). Так как истинное число классов N заранее неизвестно, то задание осуществляется случайным образом по закону равномерного распределения в интервале $N_{\min} < N < N_{\max}$.

По определенному таким образом числу классов на основе датчика случайных чисел назначают N образцов в качестве центров будущих классов.

5. Определяют меру $d(X, Z)$ между объектом X и центрами заданных классов Z_1, Z_2, \dots, Z_N , разносят образцы по классам по следующему правилу: *образец относят к тому классу, расстояние до центра которого является наименьшим*. Например, если $d(X, Z_1) > d(X, Z_2)$, то объект X следует отнести ко второму классу с центром Z_2 . Разнесение является формальным актом регистрации факта принадлежности объекта к тому или иному классу. При этом величины его параметров не изменяются.

6. Производят локализацию центров классов (определяют средние значения параметров образцов, вошедших в класс). Это приводит к появлению «среднего образца», представляющего собою центр класса. Отсутствуя как материальный объект, центр класса представлен параметрами только формально. Его введение позволяет определить предполагаемый недостающий образец, который действительно мог бы являться центром класса.

7. Производят коррекцию группирования по локализованным центрам классов: повторяют реализацию пунктов 5 и 6 (не менее 3–4 раз). Коррекция обусловлена необходимостью исключения ситуации, когда первоначально отнесенный к одному классу образец после локализации его центра по совокупности значений параметров становится ближе к центру иного класса.

8. Для каждого класса определяют среднее расстояние D между его центром и вошедшими в класс образцами:

$$D^R = (d(X^{1R}, Z^R) + d(X^{2R}, Z^R) + \dots + d(X^{hR}, Z^R)) / h,$$

где R – номер класса; h – число образцов, вошедших в R -й класс.

Затем усредняют данный показатель по всем сформированным таким образом классам – определяют критерий компактности образцов в классах:

$$K_1 = (D^1 + D^2 + \dots + D^R + \dots + D^N) / N.$$

9. Находят среднее расстояние между всеми парами центров классов – определяют критерий отдаленности центров классов между собой:

$$\Phi^{j,j+1} = d(Z^j, Z^{j+1}), j = 1 \dots N-1;$$

$$K_2 = 2 (\Phi^{1,2} + \Phi^{1,3} + \dots + \Phi^{1,N} + \Phi^{2,3} + \Phi^{2,4} + \dots + \Phi^{2,N} + \dots + \Phi^{N-1,N}) / N(N-1),$$

где $2 / N(N-1)$ – число комбинаций из N по 2.

10. Рассчитывают критерий K , например в следующем виде:

$$K = (K_2 - K_1) / (K_2 + K_1).$$

11. Если расчет проводится первый раз, то значение критерия качества и соответствующие ему число классов и результаты разнесения образцов по классам запоминаются. Далее переходят к пункту 4. Поиск продолжается до тех пор, пока не будет получено устойчивое разбиение при $K = \max(K)$. Соответствующее ему число классов можно считать устойчивым ограниченным многообразием первоначально исследуемого множества решений задачи параметрической оптимизации.

Следует отметить два момента. Во-первых, при правильном описании объектов значимыми параметрами при многократном использовании алгоритма практически гарантировано выделение устойчивых групп объектов независимо от числа и количественных значений их признаков. Во-вторых, в первом приближении условные значения параметров центров классов могут быть заменены наиболее близкими к ним объектами по совокупности присущих им параметров.

Рассмотренный алгоритм классификации позволяет при необходимости решить и задачу об определении существенности признаков рассматриваемых объектов. Для этого можно поступить следующим образом:

1. Добиться оптимального распределения образцов по классам.
2. Определить дисперсии отклонения значений параметров всех образцов от их математического ожидания.
3. Отранжировать дисперсии параметров, начиная с наибольшего значения. Чем больше величина дисперсии, тем больший вклад в разбиение дает параметр. Нулевая дисперсия говорит об одинаковости значений параметров для всех образцов. По этому параметру образцы неразличимы.

4. Постепенно исключая из рассмотрения менее значимые параметры, провести повторную классификацию образцов.

Устойчивость классификации будет нарушаться при исключении существенных параметров. В этом случае следует прекратить исключение параметров, т.к. оставшаяся их совокупность будет представлять существенное ядро исходного множества.

Рассмотренный аппарат анализа легко реализуется в виде программного продукта, обеспечивающего автоматизацию процесса исследования решаемой задачи.

Инженерный вариант алгоритма приведен ниже.

{Программа автоматической классификации объектов}

Uses crt;

var

x:array[1..20,1..30] of real;

z,zopt,zopt1:array[1..10,1..30] of real;

d,dopt:array[1..30] of real;

dd:array[1..20,1..10] of real;

ck,nkl:array[1..10] of integer;

duu,optduu:array[1..20] of integer;

dz:array[1..10] of real;

i,j,j1,n,m,m1,nk,ic,cck,ixsr,ii,ira,nkopt,iraopt,za: integer;

xx,xmax,xsr,du,dzz,ddzz,k,optk:real;

Procedure vvod_n;

{Процедура ввода числа объектов}

begin

GotoXY(2,2);TextColor(10);

Write('Введите число исследуемых объектов (не более 20):n= ');

ReadLn(n);

GotoXY(2,2);

WriteLn(' ');

GotoXY(42,2);

WriteLn('Число исследуемых объектов n=',n);

end;

Procedure vvod_m;

{Процедура ввода значений свойств объектов}

begin

GotoXY(2,3);TextColor(14);

```
Write('Введите число признаков объектов (не более 30):m= ');
ReadLn(m);
GotoXY(2,3);
WriteLn(' ');
GotoXY(42,3);
WriteLn('Число признаков объектов m=',m);
end;
```

```
Procedure izob_mat;
{Изображение матрицы параметров объектов}
begin
for i:=1 to n do begin
for j:=1 to m do begin
GoToXY(2+j*2,3+i);
TextColor(4);
WriteLn('*');
end;end;
i:=0;
while i<n do
begin
i:=i+1;j:=1;
GoToXY(2,2);TextColor(7);
WriteLn('Образец N ',i);
while j<(m+1) do
begin
GoToXY(2,3);TextColor(7);
Write('Признак N ',j,': ');
GoToXY(2+j*2,3+i);
TextColor(14);WriteLn('*');
GoToXY(15,3);
ReadLn(x[i,j]);
GoToXY(2+j*2,3+i);TextColor(10);
WriteLn('*');GoToXY(2,3);
WriteLn(' ');
j:=j+1;
end;
end;
end;
```

```
Procedure razn;
```



```

{Разнесение объектов по классам}
begin
  for ic:=1 to nk do begin
    nkl[ic]:=0;end;
  for i:=1 to n do begin
    for ic:=1 to nk do begin
      if ic=1 then begin du:=dd[i,ic];duu[i]:=ic;
      end;
      if dd[i,ic]<=du then begin du:=dd[i,ic];duu[i]:=ic;
      nkl[ic]:=nkl[ic]+1;end;
    end;
  end;
  for ic:=1 to nk do begin
    nkl[ic]:=0;end;
  for ic:=1 to nk do begin
    for i:=1 to n do begin
      if duu[i]=ic then nkl[ic]:=nkl[ic]+1;
    end;
  end;
end;

Procedure raz_lok;
begin
  {Определение мер близости объектов к центрам классов}
  for ic:=1 to nk do begin
    for i:=1 to n do begin
      dd[i,ic]:=0;
    end;end;
  for ic:=1 to nk do begin
    for i:=1 to n do begin
      for j:=1 to m do begin
        dd[i,ic]:=dd[i,ic]+((x[i,j]-z[ic,j])*(x[i,j]-z[ic,j]));
      end;
    end;
  end;
  razn;
  {Локализация центров классов}
  for ic:=1 to nk do begin
    for j:=1 to m do begin

```

```

z[ic,j]:=0;
end;
end;
for ic:=1 to nk do begin
  for i:=1 to n do begin
    if duu[i]=ic then begin
      for j:=1 to m do begin
        z[ic,j]:=z[ic,j]+x[i,j]/nkl[ic];
      end;end;
    end;
  end;
end;
end;

```

```

Procedure priv;
{Определение максимальных значений и приведение призна-
ков к безразмерному виду, определение дисперсий признаков}
begin
  for j:=1 to m do begin
    d[j]:=0;xsr:=0;
    for i:=1 to n do begin
      if i=1 then xmax:=x[i,j];
      if x[i,j]>xmax then xmax:=x[i,j];
    end;
    for i:=1 to n do begin
      x[i,j]:=x[i,j]/xmax;
      xsr:=xsr+x[i,j];
    end;
    xsr:=xsr/n;
    for i:=1 to n do begin
      d[j]:=d[j]+(x[i,j]-xsr)*(x[i,j]-xsr);
    end;
  end;
end;
end;

```

```

Procedure class;
{Назначение числа классов}
begin
  Randomize;
  nk:=(Random(n) div 2);

```

```
if nk<2 then nk:=2;  
{Назначение центров классов}  
for ic:=1 to nk do begin  
  Randomize;  
  ck[ic]:=1+Random(n-1);  
  cck:=ck[ic];  
  for j:=1 to m do begin  
    z[ic,j]:=x[cck,j];  
  end;  
end;  
end;
```

```
Procedure optim_class;  
begin  
  nkopt:=nk;  
  optk:=k;  
  iraopt:=ira;  
  for ic:=1 to nk do begin  
    for i:=1 to n do begin  
      {Принадлежность объектов к классам}  
      optduu[i]:=duu[i];  
      for j:=1 to m do begin  
        zopt[ic,j]:=z[ic,j];  
      end;end;  
    end;end;
```

```
Procedure ch_kr;  
{Определение среднего расстояния между  
объектами класса и его центром}  
begin  
  for ic:=1 to nk do begin  
    dz[ic]:=0;end;  
    dzz:=0;ddzz:=0;  
  for ic:=1 to nk do begin  
    for i:=1 to n do begin  
      if duu[i]=ic then begin  
        for j:=1 to m do begin  
          dz[ic]:=dz[ic]+(z[ic,j]-x[i,j])*(z[ic,j]-x[i,j])/nkl[ic];  
        end;end;
```

```

end;
dzz:=dzz+dz[ic]/nk;
end;
{Определение среднего расстояния между всеми центрами
классов}
for ic:=1 to nk-1 do begin
for j:=1 to m do begin
ddzz:=ddzz+(z[ic,j]-z[ic+1,j])*(z[ic,j]-z[ic+1,j]);
end;end;
ddzz:=ddzz/nk/(nk-1)*2;
Delay(300);
{Расчет интегрального критерия качества классификации}
k:=(ddzz-dzz)/(ddzz+dzz);
end;
begin
clrscr;
{Ввод значений признаков объектов,
i-номер объекта,j-номер признака,
n-число объектов,m-число признаков}
vvod_n;
vvod_m;
izob_mat;
priv;
for ira:=1 to 10 do
begin
class;
{Изображение результатов классификации}
for ii:=1 to 3 do begin
raz_lok;
for i:=1 to n do begin
TextColor(duu[i]);
WriteLn('*');
end;
end;
ch_kr;
{Фиксация лучшего результата}
if ira=1 then optim_class;
if (ira>1) and (k>optk) then optim_class;
for ic:=1 to nk do begin

```



```

for j:=1 to m do begin
  z[ic,j]:=0;
end;end;
end;
{Выдача данных оптимальной классификации}
TextColor(14);
GoToXY(20,21);
WriteLn('Оптимум критерия качества K= ',optk:6:5);
Delay(1300);
TextColor(15);
GoToXY(20,22);
WriteLn('Оптимальное число классов N= ',nkopt);Delay(1300);
GoToXY(20,23);
WriteLn('Оптимальный цикл = ',iraopt);Delay(1300);
{Принадлежность объектов к классам}
for i:=1 to n do begin
  GoToXY(60,3+i);
  TextColor(optduu[i]);
  WriteLn('*');
end;
Delay(2500);
end.

```

12.3 Пример реализации алгоритма

Некая организация, обладающая ограниченными финансовыми возможностями, решила закупить несколько представительских автомобилей. Отечественный и зарубежный авторынки представлены широким набором транспортных средств с различными характеристиками. На первом этапе анализа предстоит оценить имеющееся многообразие легковых автомобилей по совокупности присущих им параметров. В исследуемое множество экспертами включено 17 автомобилей, каждый из которых представлен шестью основными показателями.

В примере использован критерий качества классификации в форме

$$K = \left(\sum \omega_i^2 (\varphi_{i \max} / \varphi_i - 1)^2 \right)^{0,5};$$

а частными взяты рассмотренные выше критерии:

$$K_1 \rightarrow \min, K_2 \rightarrow \max, N \rightarrow \min.$$

Определение ограниченного многообразия осуществлено на основе приведенного выше алгоритма с использованием программы автоматической классификации объектов.

Программа обеспечивает ввод и корректировку данных (рис. 12.1–12.3).

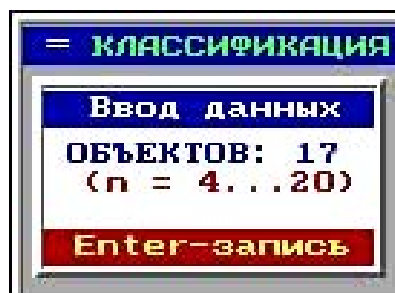


Рис. 12.1 Число объектов классификации

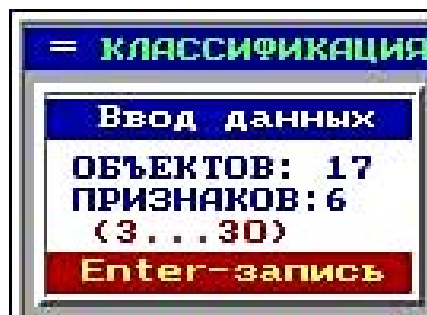


Рис. 12.2 Число исследуемых признаков объектов

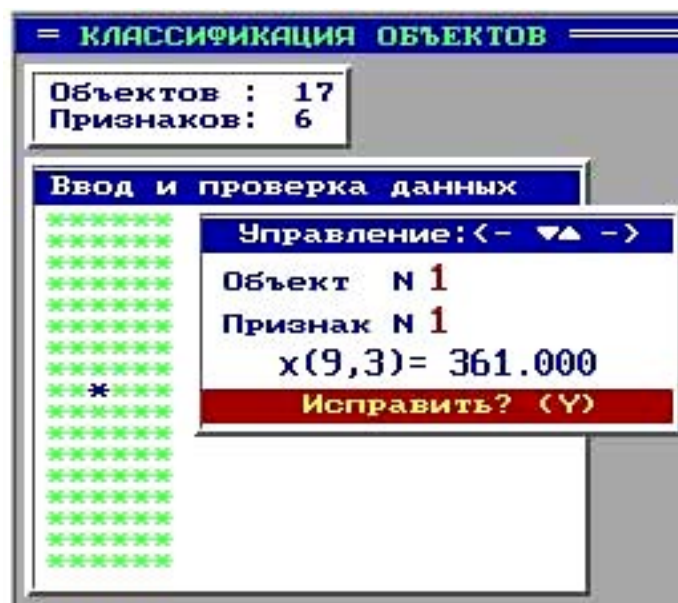


Рис. 12.3 Значения признаков объектов

Программа обеспечивает визуализацию представления исходного множества по совокупности определяющих параметров в трех проекциях, соответствующих декартовой системе координат.

При этом имеется возможность реализации классификации в двух режимах:

- задание числа классов и их центров непосредственно пользователем с помощью клавиш управления исходя из расположения образцов в их исходном множестве;
- автоматическая классификация с заданием числа и центров классов программой.

В первом варианте отмеченные центры классов отображаются на экране красным цветом как в списке объектов, так и в области их представления. При этом после классификации объектов по данным пользователя программа самостоятельно реализует автоматическую классификацию. Если ее результат совпадает с ранее полученным, то дается подтверждение об оптимальности задания исходных данных. В противном случае указываются данные автоматической классификации.

Задание условий классификации по первому варианту показано на рис. 12.4.

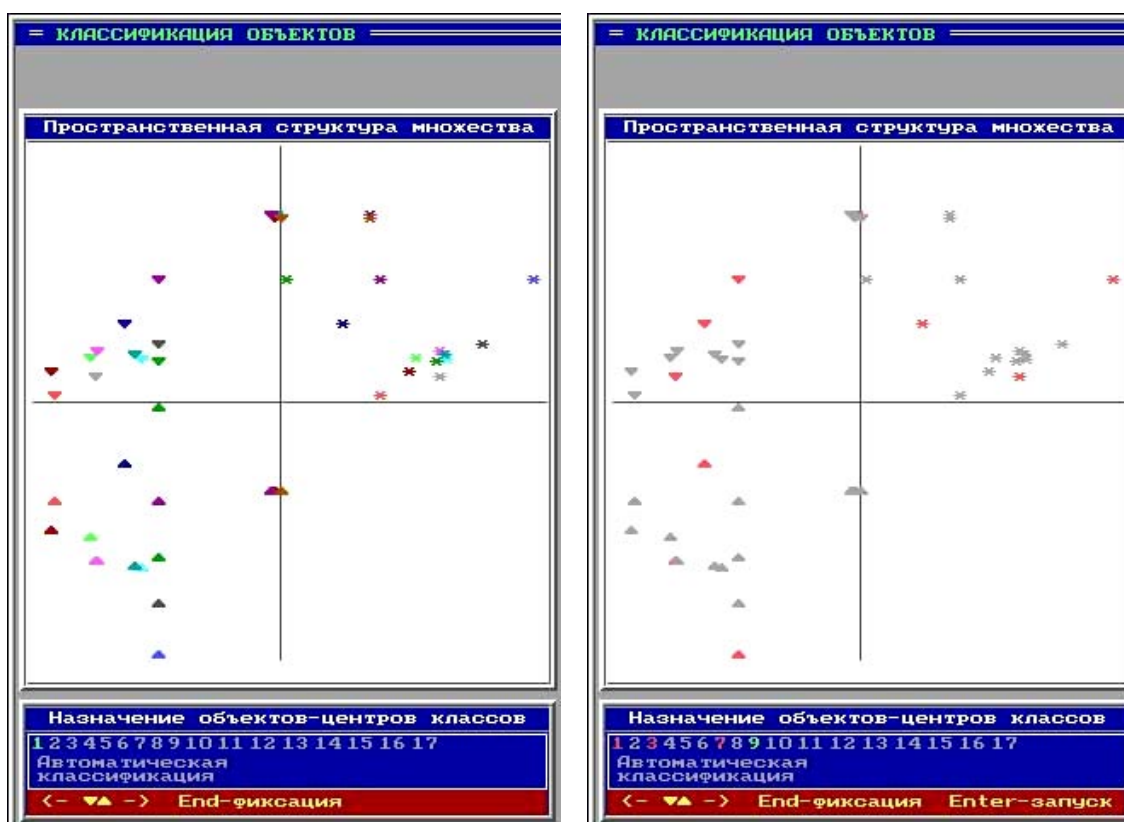


Рис. 12.4 Пользовательский вариант задания центров классов

Задание второго варианта показано на рис. 12.5

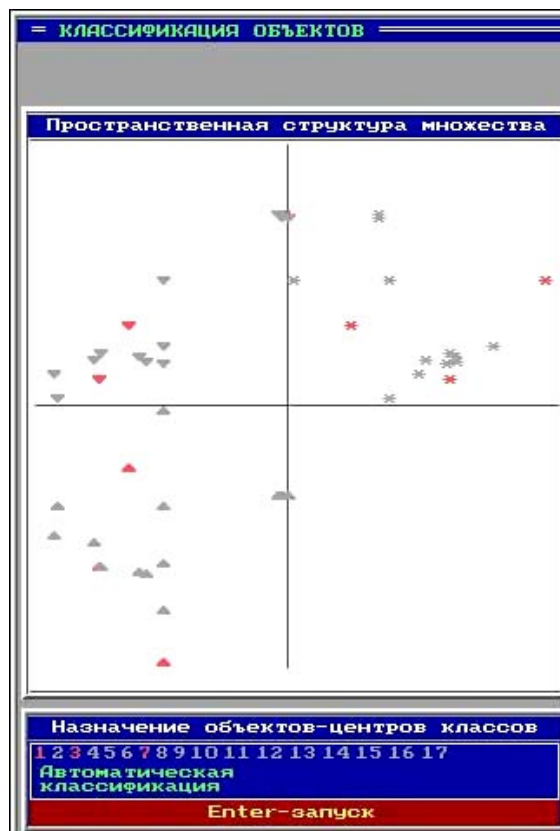


Рис. 12.5 Автоматическое задание центров классов

Текущие результаты разнесения объектов по классам с обозначением лучших вариантов отражаются на экране. Это показано на рис. 12.6.

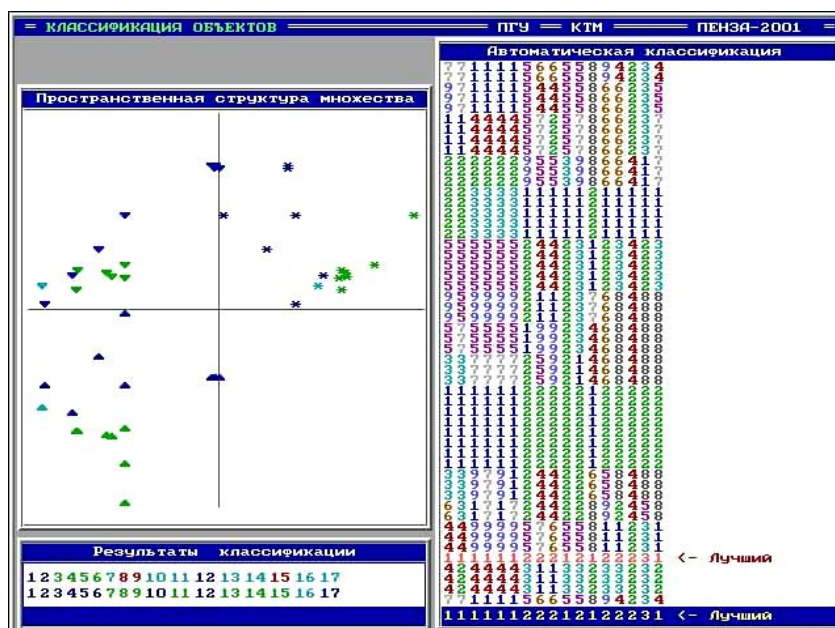


Рис. 12.6 Результат оптимизации

Программа обеспечивает просмотр значений свойств, соответствующих центрам полученных классов объектов (рис. 12.7).

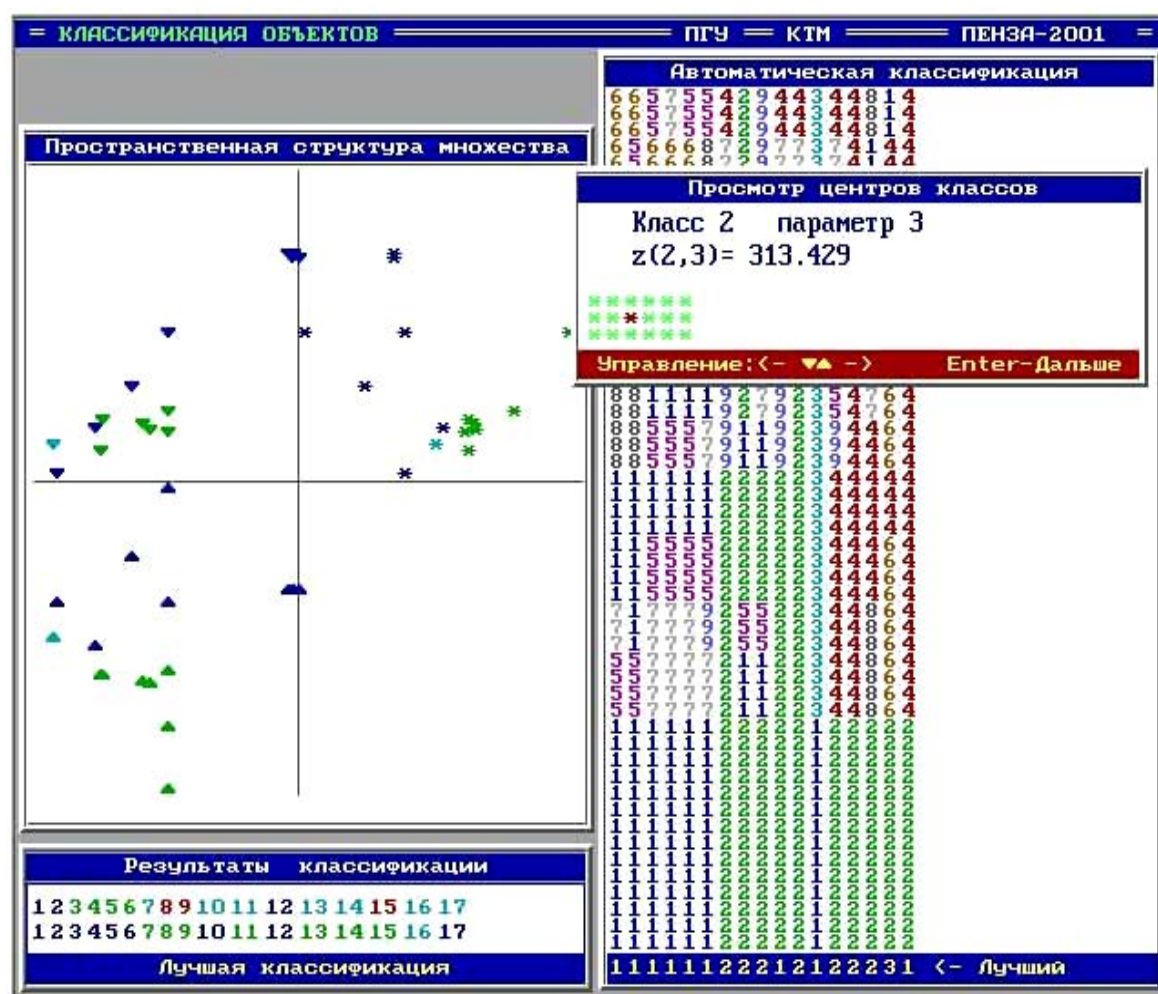


Рис. 12.7 Результат классификации

Проведено 1000 циклов решения, в каждом из которых осуществлены четыре локализации центров классов. Число классов в циклах варьировалось случайным образом в интервале 2–5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тн, Дж. Принципы распознавания образов / Дж. Тн, Р. Гонсалес. – М. : Мир, 1978. – 320 с.
2. Горелик, А. Л. Методы распознавания / А. Л. Горелик, В. А. Скрипкин. – М. : Высшая школа, 1989. – 232 с.
3. Парницкий, Г. Основы статистической информатики / Г. Парницкий. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
4. Растрин, Л. А. Методы коллективного распознавания / Л. А. Растрин, Р. Х. Эренштейн. – М. : Энергоиздат, 1981. – 80 с.

5. Розин, Б. Б. Конструирование экономико-статистических моделей с заданными свойствами / Б. Б. Розин, М. А. Ягольницер. – Новосибирск : Наука, 1981. – 176 с.

6. Загоруйко, Н. Г. Методы распознавания и их применение / Н. Г. Загоруйко. – М. : Советское радио, 1972. – 208 с.

7. Лбов, Г. С. Методы обработки разнотипных экспериментальных данных / Г. С. Лбов. – Новосибирск : Наука, 1981. – 160 с.

Раздел V

ТРАНСФОРМИРУЮЩИЕ МОДЕЛИ

Тема 13

ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОЦЕССА ТРАНСФОРМАЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Символьные и численные преобразования. Ограничивающие факторы. Ошибки численного преобразования моделей. Практические рекомендации по организации вычислений.

13.1 Общие положения

Широкое распространение математических моделей обусловлено их относительной материальной и временной экономичностью, полной безопасностью использования, высоким уровнем развития теоретических и практических вопросов математики и вычислительной техники. При этом обеспечивается возможность оперативного создания интегрированных моделей больших размерностей и их использования в широких диапазонах варьирования определяющих параметров и характеристик процессов.

При формировании описаний исследуемых процессов используют **описательные модели**, обеспечивающие фиксацию соотношений параметров и характеристик системы в знаках математики (математические записи основных законов сохранения, уравнений движения системы и т.д.). Такие модели позволяют проводить анализ объектов как на качественном, так и на количественном уровне при условии достаточной простоты исследуемых процессов. При этом используют в основном символьные преобразования (символьные интегрирование и дифференцирование; обращение, транспонирование и вычисление определителя матрицы; разложение выражений на множители; решение уравнений, логические преобразования и т.д.). Примерами символьных преобразований являются записи типа

$$\int_a^b x^2 dx \rightarrow (b^3 - a^3)/3;$$

$$(x^2 - 3x - 4) / (x - 4) + 2x - 5 \rightarrow 3x - 4;$$

$$a \vee b \rightarrow a + b - ab.$$

Результатом символьных преобразований исходного выражения является другое выражение, а не число. Следует отметить, что возникающие при этом ограничения программных сред обусловлены тем, что неизвестно, как человеческий мозг обрабатывает символьную информацию. В результате никто не знает по-настоящему, как обучить этому компьютер. Например, при работе символьного процессора *MathCAD* обнаруживается, что многие вычисления могут быть выполнены только численно, а еще больше вычислений дают такие длинные ответы, что лучше их выполнить численно. Маловероятно, что произвольную достаточно сложную функцию удастся выразить через набор элементарных. Много обманчиво просто смотрящихся функций, сконструированных из элементарных частей, подобно степеням и корням, показательным функциям, логарифмам и тригонометрическим функциям, не имеют определенного интеграла, выражаемого через элементарные функции и т.д. Поэтому в практических задачах возможность получения решений на основе символьных преобразований имеется только в простейших случаях.

Основная масса решаемых задач требует для своей реализации использования вычислительной техники и специальных вычислительных средств, процедур (ВТ и ВС). Для «стыковки» свойств описательных моделей с возможностями ВТ и ВС используют *трансформирующие модели*. При этом процесс решения сводится к их *численной реализации*. Даже в тех случаях, когда среда моделирования обеспечивает проведение символьных преобразований, следует помнить, что это не более чем видимость, способ представления результатов в форме, удобной для восприятия. Происходящие при этом процессы реализуются ВТ совершенно на ином уровне – уровне трансформирующих моделей как предметного содержания исследуемого процесса, так и машинных процедур его анализа. Данное положение обусловлено тем, что ЭВМ выполняет только элементарные арифметические действия. Поэтому при использовании ВТ любые подлежащие вычислению выражения должны быть доведены до совокупности простейших арифметических операций.

13.2 Ограничения трансформации описательных моделей

Степень преобразования исходной описательной модели до состояния, обеспечивающего проведение ее численной реализации, определяет глубину трансформации. При этом основными факторами такого преобразования следует считать:

- ограничения форм общения пользователя с ЭВМ;
- ограничения языков программирования;
- ограничения технических возможностей ЭВМ;
- ограничения, связанные с процедурными моделями трансформации;
- другие ограничения.

Ограничения форм общения пользователя с ЭВМ

Данный тип ограничений связан с «интерфейсными» возможностями ЭВМ.

Самый низкий уровень общения наблюдается при вводе данных с перфоленты (перфокарт): модель доводится до состояния, когда она представляется в виде совокупности символов двоичного кода на механическом носителе.

Самый высокий уровень общения характеризуется тем, что машина обладает «слухом» и/или «зрением». Дальнейшая обработка модели проводится ей самостоятельно.

Между указанными крайними границами существуют различные варианты, обусловленные техническими возможностями машины по опознаванию вводимой информации.

Ограничения языков программирования

Данный тип связан с множеством принимаемых при разработке языка программирования ограничений, обусловленных его морфологией и синтаксисом. Их наличие требует представления информации в строго определенном виде независимо от числа вариантов записей выражений на том или ином языке программирования. Например, выражение $y = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ может быть записано для большинства языков высокого уровня в нескольких формах:

$$Y: = X**4 + 2 * X** 3 + 3*X**2 + 4*x + 5;$$

$$Y: = (((X + 2)* X + 3)*X + 4)*X + 5.$$

Обе записи являются допустимыми, существенно отличаясь от исходной. При этом целесообразность одной из них нельзя определить ни на основе технических возможностей самой ЭВМ, ни на

основе используемого языка программирования. Если считать, что $X ** 4$ интерпретируется как $X \cdot X \cdot X \cdot X$, а не как $\exp(4 \ln x)$, то для определения Y по первой записи потребуется девять умножений, тогда как по второй всего три.

Ограничения технических возможностей ЭВМ

Любые вычисления возможны лишь при наличии определенных возможностей ЭВМ, таких как общий объем памяти и объем оперативной памяти, быстродействие, графическое разрешение монитора и т.п. Перечисленные показатели определяют практические возможности вычислительного комплекса использовать специализированные пакеты и отдельные программные продукты.

Ограничения, связанные с процедурными моделями трансформации

Процесс замены описательной модели является не однозначным, а многовариантным (один из таких случаев рассмотрен выше). Данный тип ограничений обусловлен возможностями процедурных моделей, используемых для формирования результатов вычислений. К ним относятся устойчивость метода, ошибки промежуточных вычислений и возможность их автоматического контроля и учета, объем необходимых вычислений. Поэтому выбор типа процедурной модели предполагает хорошее знание предметной области исследования, существа конкретной решаемой задачи, накладываемых ситуацией ограничений, требуемой и целесообразной точности расчетов, потенциальных возможностей процедурных моделей и продуктивности их сочетания на разных этапах вычислений. В определенной степени этот процесс связан с интуицией и опытом пользователя.

В реальных задачах присутствует в различных сочетаниях практически весь спектр перечисленных ограничений.

13.3 Ошибки численного моделирования

Ранее отмечалось, что построение моделей подчинено определенным правилам, имеющим большую специфику и широкие вариации в рамках различных предметных областей. Однако независимо от этого наблюдается высокая стабильность типичных ошибок в построении моделей, таких как:

- включение в модель несущественных для решаемой задачи переменных;

- отсутствие в модели требуемых существенных переменных;
- недостаточная точность предсказания параметров и характеристик процессов;
- недостаточная чувствительность модели к изменению переменных из-за неправильного определения функциональной зависимости критерия качества процесса от его переменных.

Наряду с указанным при проведении вычислений всегда присутствует возможность совершения трех групп ошибок:

1. Ошибки исходной информации. Данные ошибки возникают в результате неточности измерений, грубых просмотров или невозможности представить необходимую величину конечной дробью.

Любое измерение не может быть выполнено абсолютно точно. Причинами этого являются предельные физические возможности приборов. Например, нельзя считать точно измеренным напряжение цепи, равное 6,4837569 В. Можно уверенно сказать, что несколько последних цифр являются недостоверными. С другой стороны, если число значащих цифр результата измерений мало, то можно говорить, что полученный результат является ошибочным. Например, временной интервал равен 4,2 с. В этом случае указанный результат может быть только случайной величиной. В подобных ситуациях следует указывать границы, в рамках которых должна находиться измеренная величина.

Независимо от количества значащих цифр в записи величины могут быть грубые ошибки, возникающие от опечаток, ошибочного отсчета показаний приборов, некорректной постановки задачи или неполного понимания физических законов.

Многие числа нельзя представить ограниченным числом значащих цифр (число π , дробь $1/3$ и т.п.). Имеются ситуации, когда конечная в одной системе счисления дробь становится бесконечной в другой системе счисления. Например дробь $1/10$, имея конечное представление 0,1 в десятичной системе, становится бесконечной в двоичной системе: 0,000110011001100... Последнее приводит к тому, что десятикратное сложение числа 0,1 в двоичной системе не даст результата, равного единице.

Ошибки исходной информации определяют точность вычислений независимо от их метода. Ошибки ограничения и округления определяются численными методами, которые были использованы при вычислении, а также длиной представления чисел в ЭВМ.

2. Ошибки ограничения. Этот вид ошибок связан с учетом при вычислениях ограниченного числа значащих цифр. *Следует понимать, что простое увеличение разрядности машины (числа зна-*

чащих цифр) не является вариантом решения данной проблемы. В литературе приводится множество иллюстрирующих это положение примеров.

Пример 1. Считается, что формула разложения синуса угла в ряд Тейлора годится для любого конечного угла, а ошибка при ограничении ряда конечным числом членов не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда:

$$\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$$

Однако для больших углов этот ряд совершенно бесполезен. Так, для угла 1470° при вычислении с восемью значащими цифрами (теоретическая ошибка меньше 10^{-8}) выдаваемый машиной результат равен 24,25401855. Он содержит большое число десятичных знаков и лишен всякого смысла. Даже если производить вычисления с 16 значащими цифрами, вместо синуса 2550° машина выдаст число 29,5.

Пример 2. В данном примере источник ошибок заложен в физической природе модели. Рассматривается система уравнений:

$$5x - 331y = 3,5;$$

$$6x - 397y = 5,2.$$

«Точное» решение системы ($x = 331,7$, $y = 5,000$) может быть найдено вручную с любым нужным числом значащих цифр. Оценка числа достоверных значащих цифр дает следующие результаты. Если константу в правой части второго уравнения изменить на 2 % (с 5,2 до 5,1), то решение системы изменяется на 10 % ($x = 298,6$, $y = 4,5$). Еще более поразительный результат получается при подстановке в уравнения значений $x = 358,173$ и $y = 5,4$. При округлении вычисленные значения левых частей дадут те же самые правые части, что и в исходной системе уравнений. В этом случае можно считать, что величины x и y имеют не более одной достоверной значащей цифры.

В данном примере неточность результата не зависит от числа значащих цифр, все вычисления были проведены точно. Причина неточностей – малая величина определителя системы уравнений. Геометрически это означает, что две линии, представленные указанными уравнениями, почти параллельны.

3. Ошибка округления. Этот тип ошибок можно рассмотреть на следующем примере. Следует сложить два точных числа на машине с пятью значащими цифрами: 9,2654 и 7,1625. Сумма 16,4279

содержит шесть значащих цифр и не помещается в разрядной сетке машины. Поэтому результат сложения будет округлен до 16,428.

Следует отметить, что рассмотренные ошибки вычислений распространяются по всему пути использования получаемых результатов. Поэтому следует использовать определенные правила организации вычислений, обеспечивающие меньшее накопление ошибок вычислений:

1. Если необходимо произвести сложение-вычитание длинной, равной последовательности чисел, работайте сначала с наименьшими числами.

2. Если возможно, избегайте вычитания двух почти равных чисел. Формулы, содержащие такое вычитание, часто можно преобразовать так, чтобы избежать подобной операции.

3. Выражение вида $a(b - c)$ можно написать в виде $ab - ac$, а выражение $(b - c) / a$ в виде $b / a - c / a$. Если числа в разности почти равны между собой, произведите вычитание до умножения или деления. При этом задача не будет осложнена дополнительными ошибками округления.

4. В любом случае сводите к минимуму число необходимых арифметических операций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петренко, А. И. Основы автоматизации проектирования / А. И. Петренко. – Киев : Техника, 1982. – 295 с.
2. Джонсон, К. Численные методы в химии / К. Джонсон. – М. : Мир, 1983. – 504 с.
3. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
4. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
5. Крылов, А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем / А. Н. Крылов. – Л. : Изд-во АН СССР, 1932. – 49 с.
6. Крылов, А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах / А. Н. Крылов. – Л. : Изд-во АН СССР, 1932. – 472 с.
7. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / под ред. Д. Холла и Д. Уатта. – М. : Мир, 1979. – 310 с.
8. Понтрягин, Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1988. – 208 с.
8. Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Высшая школа, 1983. – 128 с.

9. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М. : Наука, 1987. – 160 с.

10. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ. – М. : Высшая школа, 1990. – 174 с.

11. MathCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows. – М. : Филинь, 1997. – 712 с.

Тема 14

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методы решения. Одношаговые методы. Многошаговые методы решения. Жесткие задачи. Причины неустойчивости решения. Пример жесткой задачи.

14.1 Основные положения

Дифференциальными называются такие уравнения (ДУ), в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных и наряду с ними в уравнения входят не только сами функции, но и их производные.

Различают обыкновенные ДУ и ДУ в частных производных.

В **обыкновенных ДУ** производные берутся только по одной переменной.

В **ДУ в частных производных** имеются производные по нескольким переменным.

Большая часть законов физики формулируется в виде ДУ. В сущности, любые задачи моделирования и проектирования, связанные с изучением потоков энергии, движения тел, сводятся к системам ДУ. Поэтому инженеру часто приходится встречаться с необходимостью построения и реализации математических моделей, содержащих ДУ.

Обыкновенное ДУ можно представить в общем виде:

$$F(t, y, y') = 0$$

или в разрешенном относительно производной виде:

$$y' = f(t, y), \quad (14.1)$$

где t – независимая переменная (во многих задачах это время течения процесса, в общем случае x); y – неизвестная функция независимой переменной; $y' = dy / dt$ – производная функции y ; F – заданная функция трех переменных; f – заданная функция двух независимых переменных.

Для решения ДУ необходимо знать значение зависимой переменной и/или ее функции для некоторого значения независимой переменной. Если эти дополнительные условия задаются при одном значении независимой переменной, то такая задача называется начальной задачей, задачей с начальными условиями, задачей Коши. Если же условия задаются при двух или более значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. В задаче Коши дополнительные условия называются начальными, в краевой задаче – граничными.

Решение ДУ в современной практике осуществляется многочисленными численными методами. Продуктивность использования того или иного метода определяется совокупностью различных факторов, однако в любом случае их применение целесообразно лишь том случае, когда решение ДУ существует и оно единственно. Условия существования и единственности задаются следующими теоремами:

1. Теорема существования. *Если в уравнении (14.1) функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области плоскости (t, y) , то для любой точки (x_0, y_0) этой области существует решение $y(t)$ начальной задачи (задачи Коши):*

$$y' = f(t, y), y(x_0) = y_0,$$

определенное на некотором интервале, содержащем точку x_0 .

2. Теорема существования и единственности. *Если в уравнении (14.1) функция f определена и непрерывна в некоторой ограниченной области плоскости (t, y) и в этой области удовлетворяет условию Липшица по переменной y , т.е.*

$$[f(t, y_2) - f(t, y_1)] < L [y_2 - y_1],$$

где L – положительная постоянная, то для точки (x_0, y_0) рассматриваемой области существует единственное решение $y(t)$ начальной задачи (задачи Коши), определенное на некотором интервале, содержащем точку x_0 .

3. Теорема продолжения. *При выполнении теоремы существования или теоремы существования и единственности всякое решение уравнения (14.1) с начальными данными (x_0, y_0) из рассматриваемой области плоскости (t, y) может быть продолжено сколь угодно близко к границе области. При этом продолжение во втором случае будет обязательно единственным, а в первом случае – не обязательно.*

Условие Липшица аналогично требованию

$$\partial f / \partial y \neq \infty.$$

Точка, в которой это условие не выполняется, называется особой точкой, а соответствующие ей решения – особыми решениями уравнения (1).

Для отыскания особых решений уравнения (14.1) следует:

1) найти множество точек, где частная производная $\partial f / \partial y$ обращается в бесконечность;

2) если это множество точек образует одну или несколько кривых, проверить, являются ли они решением уравнения (14.1);

3) если это интегральные кривые (решения уравнения), проверить, нарушаются ли в каждой их точке свойства единственности.

Особыми, как правило, являются точки, соответствующие $y = 0$. В них дальнейшее решение исходного уравнения может раздваиваться.

При решении практических задач проверка условий существования и единственности решения проводится не только на основе рассмотренных теорем математики (такую проверку не всегда представляется возможным провести из-за сложности исходной модели и дополнительных условий моделирования), но и исходя из усмотрения физической природы исследуемого процесса.

Одной из распространенных постановок задач численного анализа является задача Коши. Она формулируется следующим образом:

Дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и начальные условия $y(x_0) = y_0$. Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую как указанному уравнению, так и начальным условиям.

Обычно численное решение этой задачи получают, вычисляя сначала значения производной, а затем давая малые приращения аргумента (например, времени t) и переходя к новой точке $x_1 = x + h$ (h – шаг изменения аргумента). Положение новой точки определяют по наклону кривой, вычисленному с помощью ДУ. Таким образом, *график численного решения представляет собой последовательность коротких прямолинейных отрезков, которыми аппроксимируется истинная кривая $y = f(x)$.*

В практических приложениях используют одношаговые и многошаговые методы решения подобных задач.

14.2 Одношаговые численные методы

Одношаговые численные методы для нахождения следующей точки решения используют информацию лишь об одном предыду-

щем шаге. Они предназначены для решения ДУ первого порядка (порядок ДУ определяется порядком искомой производной).

К одношаговым относят **группу методов Рунге–Кутты** (аппроксимация решения по аргументу x в них описана ниже):

1. *Метод первого порядка (метод Эйлера):*

$$dy / dx = F(x, y) \approx \Delta y / \Delta x = (y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i),$$

где y_{i+1} – решение уравнения в точке x_{i+1} . Полагая, что $h = x_{i+1} - x_i$, имеем

$$(y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i) = (y_{i+1} - y_i) / h = F(x_i, y_i)$$

или

$$y_{i+1} \approx y_i + hF(x_i, y_i).$$

Используя знание начальных значений (x_0, y_0) , можно определить следующее приближение, продолжая эту цепочку до окончания процесса решения.

2. *Метод второго порядка:*

$$y_{i+1} \approx y_i + hF(x_i + h/2, y'_i),$$

$$y'_i = y_i + h/2F(x_i, y_i).$$

3. *Метод третьего порядка:*

$$y_{i+1} \approx y_i + h/6(k_1 + 4k_2 + k_3),$$

$$k_1 = hF(x_i, y_i),$$

$$k_2 = hF(x_i + h/2, y_i + k_1/2),$$

$$k_3 = hF(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1).$$

4. *Метод четвертого порядка:*

$$y_{i+1} \approx y_i + h/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = hF(x_i, y_i),$$

$$k_2 = hF(x_i + h/2, y_i + k_1/2),$$

$$k_3 = hF(x_i + h/2, y_i + k_2/2),$$

$$k_4 = hF(x_i + h, y_i + k_3).$$

В основе всех одношаговых методов лежит разложение функции в ряд Тейлора, в котором сохраняются члены, содержащие шаг h аргумента x в степени до k включительно. Целое число k называется порядком метода. Погрешность на шаге расчета имеет порядок $k + 1$.

Методы второго, третьего и четвертого порядка требуют на каждом шаге изменения аргумента соответственно двух, трех и четырех вычислений функции.

Характеристика методов Рунге–Кутта

Методы Рунге–Кутта можно охарактеризовать следующим образом:

1. Методы используют для своей реализации информацию только о текущей точке и не используют информацию о предыдущих точках расчетов. Это свойство обеспечивает их применение для начала решения уравнений.

2. По той же причине приходится многократно вычислять функцию $f(x, y)$ и затрачивать на это много машинного времени.

3. Используя информацию только об очередной точке решения, эти методы позволяют легко менять величину шага вычислений h . Приближенная рекомендация основана на правиле Коллатца: *если отношение $(k_2 - k_3) / (k_1 - k_2)$ становится большим нескольких сотых, то шаг интегрирования необходимо уменьшить.*

4. Недостатком методов является отсутствие возможности явной оценки ошибки ограничения.

5. Результаты решения во многом зависят от величины шага интегрирования h . Его выбор осуществляют сравнением результатов, полученных при вычислении функции для последующей точки с шагом h и двумя шагами $h / 2$. Если при этом разница в результатах превышает заданную точность вычисления (заданную, например, в процентах), то шаг, как правило, уменьшают в два раза.

Наиболее распространенным в инженерных расчетах является метод Рунге–Кутта четвертого порядка. Вариант его программной реализации для системы n решаемых совместно ДУ приведен ниже.

Идентификация величин

fst – процедура расчета правых частей ДУ;

nn, nd – начальный и конечный номера ДУ в системе, решаемых совместно;

y[i], yy[i] – y_{j+1} и y_j соответственно для i -го уравнения;

j – индекс итерации;

rk[i] – приращение i -го уравнения

der[i] – правая часть i -го уравнения;

h – шаг интегрирования.


```
Procedure rk4;  
begin  
fst;  
for i:=nn to nd do  
begin  
 $y[i]:=yy[i]+h*der[i]/2;$   
 $rk[i]:=der[i];$   
end;  
fst;  
for i:=nn to nd do  
begin.  
 $y[i]:=yy[i]+h*der[i]/2;$   
 $rk[i]:=rk[i]+2*der[i];$   
end;  
fst;  
for i:=nn to nd do  
begin  
 $y[i]:=yy[i]+h*der[i];$   
 $rk[i]:=rk[i]+2*der[i];$   
end;  
fst;  
for i:=nn to nd do  
begin  
 $rk[i]:=(rk[i]+der[i])*h;$   
 $y[i]:=yy[i]+rk[i]/6$   
end;  
end.
```

14.3 Многошаговые численные методы

В ходе решения задачи появляется дополнительная информация о рассчитанных точках траектории движения системы, которая не используется в одношаговых методах. Применение же многошаговых методов основано на использовании информации о предыдущих вычислениях. Для этого используют две формулы: прогноза и коррекции. Поэтому такие методы известны под названием методов прогноза и коррекции.

В отличие от одношаговых данные методы не обладают свойством «самостартования». Поэтому при их использовании начальные точки расчета определяются одношаговыми методами.

Обычно при выводе формул прогноза и коррекции решение уравнения рассматривают как процесс приближенного интегрирования, а сами формулы получают с помощью **конечно-разностных методов**:

1. *Метод Милна*. В этом методе на этапе прогноза используется формула Милна:

$$y_{n+1} = y_{n-3} + 4h / 3(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}),$$

а на этапе прогноза – формула Симпсона:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h / 3(y'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}).$$

Метод имеет четвертый порядок точности, однако применяется реже других, т.к. используемым формулам присуща неустойчивость: погрешность распространения может расти экспоненциально.

2. *Метод Адамса–Башифорта*. Метод имеет четвертый порядок точности. В отличие от предыдущего ошибка, внесенная на каком-либо шаге при использовании данного метода, не имеет тенденции к экспоненциальному росту.

Формула прогноза получена интегрированием обратной интерполяционной формулы Ньютона:

$$y_{n+1} = y_n + h(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}) / 24,$$

формула коррекции:

$$y_{n+1} = y_n + h(9y'_{n+1} - 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) / 24.$$

3. *Метод Хэмминга*. Формула прогноза имеет вид:

$$y^{(0)}_{n+1} = y_{n-3} + 4h / 3(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2});$$

уточнения прогноза:

$$y^{(0)y}_{n+1} = y^{(0)}_{n+1} + 112 / 121(y_n - y^{(0)}_n),$$

$$[y^{(0)y}_{n+1}]' = f(x_{n+1}, y^{(0)y}_{n+1});$$

коррекции:

$$y^{(j+1)}_{n+1} = (9y_n - y_{n-2}) / 8 + 3h([y^{(j+1)}_{n+1}]' + 2y'_n - y'_{n-1}) / 8.$$

Метод Хэмминга является устойчивым методом четвертого порядка точности, позволяет оценивать и устранять погрешности, вносимые на стадиях прогноза и коррекции. Благодаря простоте и

устойчивости этот метод является одним из наиболее распространенных методов прогноза и коррекции.

Наряду с методами четвертого порядка точности используют и другие методы прогноза и коррекции. Приводимый ниже метод дает примерно такую же точность, что и метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

Уравнение прогноза имеет вид:

$$p_2 = y_0 + 2hy'_1,$$

$$y'_1 = F(x_1, y_1);$$

коррекции:

$$c_2 = y_1 + h(p'_2 + y'_1) / 2,$$

$$p'_2 = F(x_2, y_2).$$

В качестве решения $y_2 = y(x_0 + 2h)$ берется

$$y_2 = c_2 + E_c,$$

где $E_c = (p_2 - c_2) / 5$ – ошибка коррекции.

Вариант программы последнего метода приведен ниже. Обозначения переменных в программе соответствуют используемым в тексте.

```
Procedure procors;  
begin  
fst;  
for i:=nn to nd do  
begin  
ps2[i]:=der[i];  
p2[i]:=yy[i]+2*h*ps2[i];  
end;  
fst;  
for i:=nn to nd do  
begin  
yy[i]:=y[i];  
c2:=y[i]+h/2*(der[i]+ps2[i]);  
ec1:=(p2[i]-c2)/5;  
y[i]:=c2+ec1;  
end;  
end.
```

Последний метод является относительно устойчивым (относительная погрешность вычисления не увеличивается).

Характеристика методов прогноза и коррекции

Методы прогноза и коррекции можно охарактеризовать следующим образом:

1. Так как методы используют информацию о ранее вычисленных точках, то с их помощью нельзя начать решение уравнения. Однако по этой же причине они более экономичны.
2. При любом изменении величины шага приходится возвращаться к методам Рунге–Кутты.
3. В качестве побочного продукта получается хорошая оценка ошибки вычисления.

Сочетание методов

Возможности рассмотренных методов являются взаимодополняющими друг друга, что делает целесообразным их совместное применение:

1. Начать решение с помощью метода Рунге–Кутты и найти вторую точку расчета (первая задается начальными условиями).
2. Для вычисления следующих точек использовать метод прогноза и коррекции (например, последний из рассмотренных).
3. Если для вычисления очередного значения искомой переменной требуется более двух итераций или если ошибка ограничения слишком велика, следует уменьшить величину шага. Если эта ошибка слишком мала, то величину шага можно увеличить.
4. Для изменения шага интегрирования последнее еще достаточно точно вычисленное значение искомой переменной следует принять в качестве исходного. Решение следует продолжить методом Рунге–Кутты с этой исходной точки.

14.4 Практическая реализация численных методов

Практическое использование численных методов можно рассмотреть на примере исследования динамики функционирования гидравлического амортизатора, конструктивная схема которого показана на рис. 14.1.

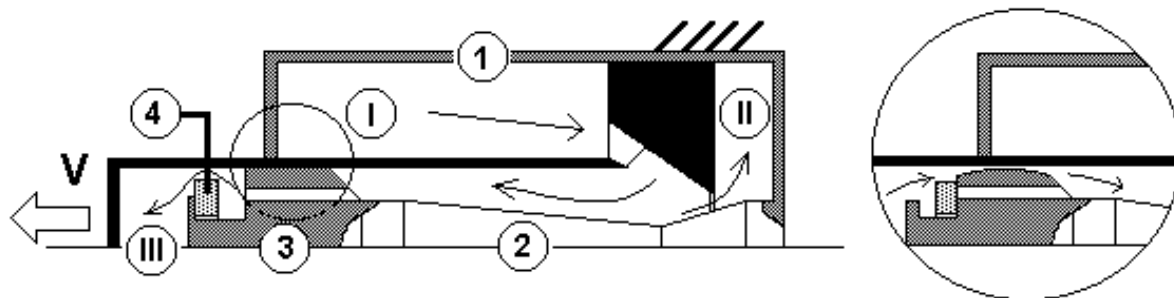


Рис. 14.1 Схема функционирования устройства

Устройство содержит цилиндр 1 с профилированным штоком 2 и тормозом 3, в полости цилиндра концентрично размещен шток с поршнем. Тормоз имеет клапан 4. При перемещении частей, показанном на рисунке, жидкость из полости I выдавливается через каналы в поршне в полости II и III. При прохождении ее в полость III клапан перемещается влево. Тормозящее усилие, препятствующее движению штока с поршнем, создается в первой полости, а его величина регулируется за счет изменения зазора истечения жидкости во вторую полость. В первой полости давление повышенное, в третьей – достаточное для заполнения ее жидкостью, во второй полости создается разрежение.

При обратном перемещении поршня клапан закрывается, жидкость пробрызгивается из третьей полости в первую по канавкам переменной глубины, выполненным на внутренней поверхности штока. В третьей полости создается повышенное давление, препятствующее движению поршня. Регулирование тормозящего усилия обеспечивается изменяющейся по длине штока глубиной канавок. В некоторый момент времени во второй полости «выбирается» вакуум, давление в ней резко повышается. Этим создается дополнительное тормозящее движение поршня усилие.

Нормальное функционирование устройства при обратном движении во многом определяется величиной начального зазора между внутренней поверхностью штока и наружной поверхностью тормоза 3, а также износом этой поверхности. При повышенном износе тормозящее усилие в третьей полости является недостаточным, в то время как тормозящее усилие, возникающее во второй полости, становится недопустимо большим.

Исследование характера функционирования устройства основано на численном решении задачи движения составных частей амортизатора. Составление математической модели процесса не вызывает затруднений. Для ее реализации на первом шаге используется метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности, последующие расчеты

осуществляются методом прогноза и коррекции, программа реализации которого приведена выше. Практические исследования конструкции позволяют констатировать факт высокой устойчивости используемых методов. Результаты решения показаны на рис. 14.2.

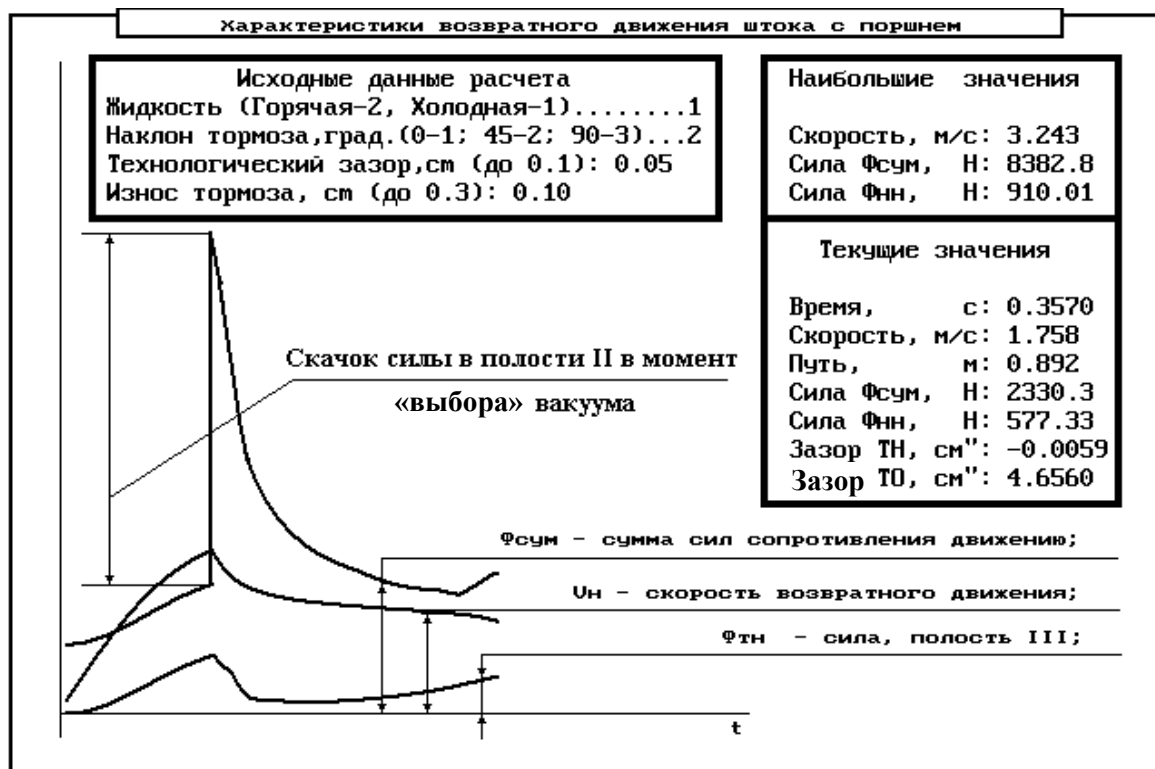


Рис. 14.2 Результаты расчетов характеристик движения

14.5 Жесткие задачи

Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) не решаются ни одним из рассмотренных ранее методов. Это обусловлено структурой решения ОДУ, имеющего вид

$$\sum_{i=1}^n C_i e^{-\lambda_i t}.$$

Постоянная времени ДУ первого порядка – это промежуток времени, по истечении которого величина нестационарной составляющей решения убывает в e^{-1} раз. В общем случае ДУ n -го порядка имеет n постоянных времени, также как и система первого порядка, содержащая n уравнений. Если любые две из них существенно отличаются по величине или если одна из них достаточно мала по сравнению со временем, для которого ищется решение, то задача называется «жесткой» и ее невозможно решить обычными методами.

В таких случаях шаг интегрирования должен быть достаточно мал, чтобы можно было учитывать изменения наиболее быстро меняющихся членов уравнения после того, когда их вклад в решение станет практически незаметным. Если не удастся сохранить достаточно малую величину шага, то решение становится неустойчивым.

Подобные задачи характерны для проблем управления, расчета электрических цепей и сетей, химических реакций и т.п.

Пример. Исследуется система ОДУ:

$$U' = 998U + 1998V,$$

$$V' = -999U - 1999V.$$

Для начальных условий $U(0) = V(0) = 1$ решение имеет вид:

$$U = 4e^{-t} - 3e^{-1000t},$$

$$V = -2e^{-t} + 3e^{-1000t}.$$

После небольшого промежутка времени решение становится близким к функциям:

$$U = 4e^{-t},$$

$$V = -2e^{-t}.$$

Если для решения системы используется метод Эйлера (Рунге–Кутта первого порядка), то дискретное решение имеет следующий вид:

$$U_{k+1} = U_k + h(998U_k + 1998V_k),$$

$$V_{k+1} = V_k + h(-999U_k - 1999V_k),$$

где $U(0) = V(0) = 1$.

При шаге интегрирования $h = 0,01$ значения функций во второй точке расчета таковы:

$$U_1 = 1 + 0,01(998 + 1998) = 30,95,$$

$$V_1 = 1 + 0,01(-999 - 1999) = -28,98.$$

Последующие точки приводят к катастрофическим результатам. Поэтому для решения подобных задач используются специальные методы, среди которых наиболее известными являются следующие:

1. Гира.
2. Брайтона (ФДН – формулы дифференцирования назад).

3. Скила – композиционный неявный многошаговый метод.
4. Адамса–Мултона.
5. Энрайта – композиционный неявный метод.
6. Блочные (или циклические) методы.

Указанные методы требуют для своей реализации введения переменного шага интегрирования и многократных повторных вычислений, что затрудняет их использование в обычной практике частного пользователя.

Простейшим для решения подобных задач является одношаговый метод трапеций, задаваемый следующей зависимостью:

$$X_{k+1} = X_k + h / 2 (X'_{k+1} + X'_k) = X_k + h / 2 \{f(X_{k+1}, t_{k+1}) + (f(X_k, t_k))\}.$$

Для повышения точности вычислений рекомендуется использовать этот метод совместно со схемой экстраполяции:

$$X'_{k+1} = X_{2k+2}(h / 2) + [X_{2k+2}(h / 2) - X_{k+1}(h)] / 3,$$

где $X_{k+1}(h)$ и $X_{2k+2}(h / 2)$ – решения, полученные по предыдущей формуле для каждой точки изменения аргумента (времени) t_{k+1} .

Реализация рассмотренной выше системы с помощью метода трапеций и сравнение полученных значений с данными аналитических расчетов приведены в табл. 14.1. Там же приведены результаты решения задачи методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности и методом прогноза и коррекции. Сравнение проведено также с данными, полученными на основании аналитического решения системы. Как следует из результатов, достаточно простой метод трапеций не имеет перед двумя другими каких-либо преимуществ. Все методы дают значительную погрешность вычисления.

Применение для решения «жестких» задач обычных методов с малой величиной шага интегрирования имеет два недостатка:

1) если шаг интегрирования существенно меньше исследуемого диапазона изменения аргумента (времени), то общее время решения резко возрастает;

2) накапливающиеся в процессе длительных вычислений погрешности округления и усечения могут привести к получению бессмысленного результата.

В подобных случаях следует перейти к более сильным методам или блокам методов численного решения задач, используя процедуры многократного решения систем с переменной величиной шага интегрирования. При этом предпочтительными являются методы, входящие в специализированные пакеты прикладных программ и среды типа *MathCAD* и т.п.

Таблица 14.1

Погрешности вычисления функций в 19 первых точках расчетов

Метод Рунге–Кутта		Метод прогноза и коррекции		Метод трапеций	
$\Delta U, \%$	$\Delta V, \%$	$\Delta U, \%$	$\Delta V, \%$	$\Delta U, \%$	$\Delta V, \%$
-28,5	28,5	-28,5	28,5	0,0	0,0
-20,1	36,1	-20,9	37,6	-1,1	4,1
-15,1	51,1	-16,2	54,7	-3,5	18,5
-11,9	94,7	-13,1	104,4	-4,9	58,1
-9,6	1625,6	-10,9	1843,6	-5,4	1381,3
-7,9	-96,4	-9,2	-112,4	-5,5	-103,1
-6,6	-44,4	-8,0	-53,2	-5,3	-56,5
-5,6	-27,8	-6,9	-34,2	-5,0	-40,5
-4,8	-19,7	-6,1	-24,8	-4,5	-32,0
-4,2	-14,9	-5,4	-19,2	-4,0	-26,3
-3,6	-11,7	-4,8	-15,5	-3,4	-22,2
-3,2	-9,5	-4,3	-12,9	-2,9	-19,0
-2,8	-7,8	-3,8	-10,9	-2,3	-16,3
-2,4	-6,6	-3,5	-9,3	-1,7	-14,1
-2,2	-5,6	-3,1	-8,1	-1,2	-12,2
-1,9	-4,8	-2,8	-7,1	-0,6	-10,5
-1,7	-4,1	-2,6	-6,2	-0,1	-8,9
-1,5	-3,6	-2,3	-5,5	0,3	-7,6
-1,3	-3,1	-2,1	-4,9	0,8	-6,4

14.6 Краевые задачи

Краевыми называются задачи, в которых заданы по крайней мере два известных условия (для двух значений аргумента). Как правило, это граничные условия, задаваемые на концах исследуемой траектории вычислений. Например, если производится исследование поведения консольно закрепленной балки (рис. 14.3), то известными являются условия, задаваемые на ее концах (0 и 1).

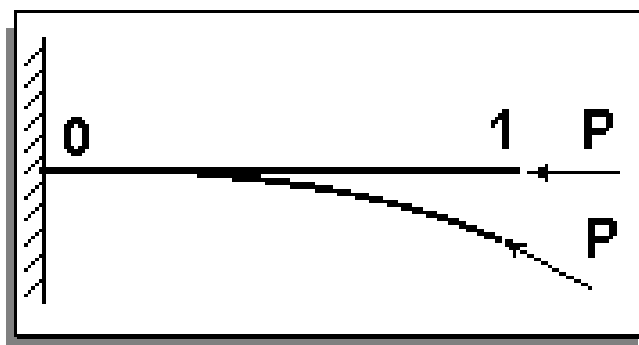


Рис. 14.3 Консольная балка

Условно выделяют три класса методов решения краевых задач: 1) методы пристрелки; 2) конечно-разностные методы (КРМ); 3) вариационные методы. Наиболее распространенными являются КРМ. Их достоинство заключается в том, что они позволяют свести решение краевой задачи к решению системы алгебраических уравнений. При этом процедура решения сводится к замене производной соответствующей конечно-разностной аппроксимацией.

Решение краевой задачи $y'' = f(x, y, y')$ при $y(a) = A$ и $y(b) = B$ на интервале изменения аргумента $[a, b]$ можно разделить на n равных частей:

$$x_i = x_0 + ih, i = 1, \dots, n,$$

$$x_0 = a, x_n = b, h = (b-a) / n.$$

В точках x_i получают решения y_i . Зная координаты узловых точек и используя КР-выражения для производной, можно представить ДУ в виде КР-уравнения. Примеры такой замены:

$$y'(x_i) = (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2 / h,$$

$$y'(x_i) = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / h^2.$$

Если записать разностное уравнение для каждой узловой точки при двух краевых условиях, то задача сводится к системе $n - 1$ алгебраических уравнений с $n - 1$ неизвестными.

Для построения разностных уравнений используют от двух до пяти точек. Кроме того, в зависимости от заданных условий, исходной информации и удобства вычислений могут использоваться правые, левые и центральные разности. Применяя правые разности, используют информацию о точках, расположенных справа от исходной. Соответственно, применяют и остальные схемы аппроксимации. Пример КР-аппроксимации производных до второго порядка по трем точкам приведен в табл. 14.2.

Таблица 14.2

Аппроксимация производных конечными разностями

Производная	Левая	Центральная	Правая
y'_0	$(3y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}) / 2 / h + (h^2 y''' / 3)$	$(y_1 - y_{-1}) / 2 / h - (y''' h^2 / 6)$	$(-y_2 + 4y_1 - 3y_0) / 2 / h + (y''' h^2 / 3)$
y''_0	$(y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}) + (h y''' / 3)$	$(y_1 - 2y_0 + y_{-1}) / h^2 - (y^{IV} h^2 / 12)$	$(y_2 - 2y_1 + y_0) / h^2 - (h y''')$

Пример. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$Y'' = 2x + 3y$$

в условиях

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

и шаге расчета $h = 0,2$.

В разностной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / 0,04 = 2x_i + 3y_i.$$

Пользуясь этой формулой и граничными условиями, можно составить четыре линейных уравнения с четырьмя неизвестными (всего следует составить шесть уравнений, но так как значения искомой функции для граничных точек заданы, то остается определить только четыре неизвестных в промежуточных точках):

$$-2,12y_1 + y_2 = 0,016,$$

$$y_3 - 2,12y_2 + y_1 = 0,032,$$

$$y_4 - 2,12y_3 + y_2 = -0,064,$$

$$-2,12y_4 + y_3 = -0,936.$$

Результаты решения приведены в табл. 14.3. Там же для сравнения даны результаты точного решения исходного уравнения, определяемого зависимостью

$$Y(x) = (5sh\sqrt{3x}) / (3sh\sqrt{3}) - 2 / 3.$$

Таблица 14.3

Результаты решений

x	y	
	численное	точное
0,0	0,0	0,0
0,2	0,0827	0,0818
0,4	0,1912	0,1897
0,6	0,3548	0,3529
0,8	0,6088	0,6073
1,0	1,0000	1,0000

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петренко, А. И. Основы автоматизации проектирования / А. И. Петренко. – Киев : Техника, 1982. – 295 с.
2. Джонсон, К. Численные методы в химии / К. Джонсон. – М. : Мир, 1983. – 504 с.

3. Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
4. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
5. Понтрягин, Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1988. – 208 с.
6. Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. Л. Краснов. – М. : Высшая школа, 1983. – 128 с.
7. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М. : Наука, 1987. – 160 с.

Раздел VI

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Тема 15

СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Обзор компьютерных систем моделирования. Стратегии компьютерного моделирования. Визуализация процесса моделирования.

15.1 Обзор компьютерных систем моделирования

Постоянное усложнение технических объектов и повышение требований к эффективности их функционирования приводит к необходимости совершенствования технологий их построения и анализа. Поэтому не может вызывать удивление факт использования в этих целях компьютерной техники: ее применение и есть непосредственное использование материализованных системных инструментов в практической деятельности.

На современном этапе в компьютерной индустрии исследования систем можно выделить следующие направления:

1. Универсальные языки программирования и разработанные на их основе системы визуального программирования (*Delphi*, *Visual C* и т.д.).

2. Универсальные системы математического проектирования и моделирования (*Eureka*, *Mercury*, *Excel*, *Mathematica*, *Maple*, *Axum*, *MathCAD*, *MATLAB* и др.).

3. Универсальные специализированные системы, ориентированные на решение проблем определенных классов технических систем и технологических ситуаций (*AutoCAD*, *PCAD*, *Micro-CAP*, *P-SPICE*, *Electronics Workbench* и мн. др.).

Имеющееся программное обеспечение обладает различными возможностями, а общее число программ вряд ли можно подсчитать, т.к. процесс разработки не имеет временных границ. Основное направление развития программного обеспечения рассматриваемого назначения – разработка эффективных систем, объединяющих гибкость универсальных языков программирования и невероятную привлекательность сред визуального конструирования.

Независимо от типа и возможностей стандартных средств **исследование систем организуется по определенной стратегии, включающей, как правило, следующие этапы:**

1. *Описание исследуемой системы возможностями разговорного языка.* Это обеспечивает усвоение содержания предполагаемой задачи, уяснение значимости свойств системы, возможных и целесообразных интервалов их изменения, подлежащей определению информации и способов ее представления.

2. *Формирование модели исследуемой системы* – формализация задачи в рамках языка описания, используемого в дальнейших изысканиях. Это может быть язык графики, математики, форм представления знаний (продукционные модели, фреймы, семантические сети и т.д.), схем (отражение структуры системы) и т.д. Такая модель также включает критерии эффективности функционирования системы. При этом осуществляется уточнение исходной задачи, преобразование ее к виду, доступному для последующего использования.

3. *Выбор метода исследования системы и преобразование* ранее полученной модели к виду, который требуется для использования выбранного метода исследования. Подобные преобразования характерны для математических моделей систем и используемых для их исследования численных методов.

4. *Формирование модели системы в рамках используемой среды программирования.* Формирование может осуществляться непосредственно (например, составление описания системы и условий ее функционирования на универсальных языках программирования) и опосредованно (характерно для сред визуального программирования).

5. *Анализ результатов и их интерпретация, валидация и верификация модели (на всех рассмотренных уровнях), принятие решения об окончании исследования системы или об организации дальнейших исследований.*

Вопросы исследования систем на основе универсальных языков программирования достаточно подробно описаны в курсе информатики. Поэтому далее они не рассматриваются. В приведенном материале конспективно обсуждаются системы второго направления – системы математического моделирования.

15.2 Технология визуального конструирования

Основой современных программных продуктов, предназначенных для проектирования и исследования технических систем,

является объектно-ориентированное программирование. Его суть применительно к проблематике системного моделирования определяется следующими моментами:

1. Каждый объект (независимо от его физической природы и возможного применения) характеризуется набором свойств. Перечень рассматриваемых свойств определяется существом исследуемой проблемы. Это дает возможность представить объект в виде замкнутого блока (компонента) с перечнем свойств и сформировать библиотеку компонентов в соответствии с принципами классификации. В основном используют признак назначения объекта (источник сигнала, преобразователь, регистратор и т.д.). Включение компонента в модель заключается в его выделении в библиотеке и буксировке на рабочее поле, сцену. Примеры для системы *Electronics Workbench* и пакета *Simulink* системы *MATLAB* показаны на рис. 15.1–15.2.

Набор необходимых для построения системы компонентов реализует закон полноты технических систем (ИЭ–П–У–И).

Соединение элементов схемы реализует закон энергетической проводимости системы.

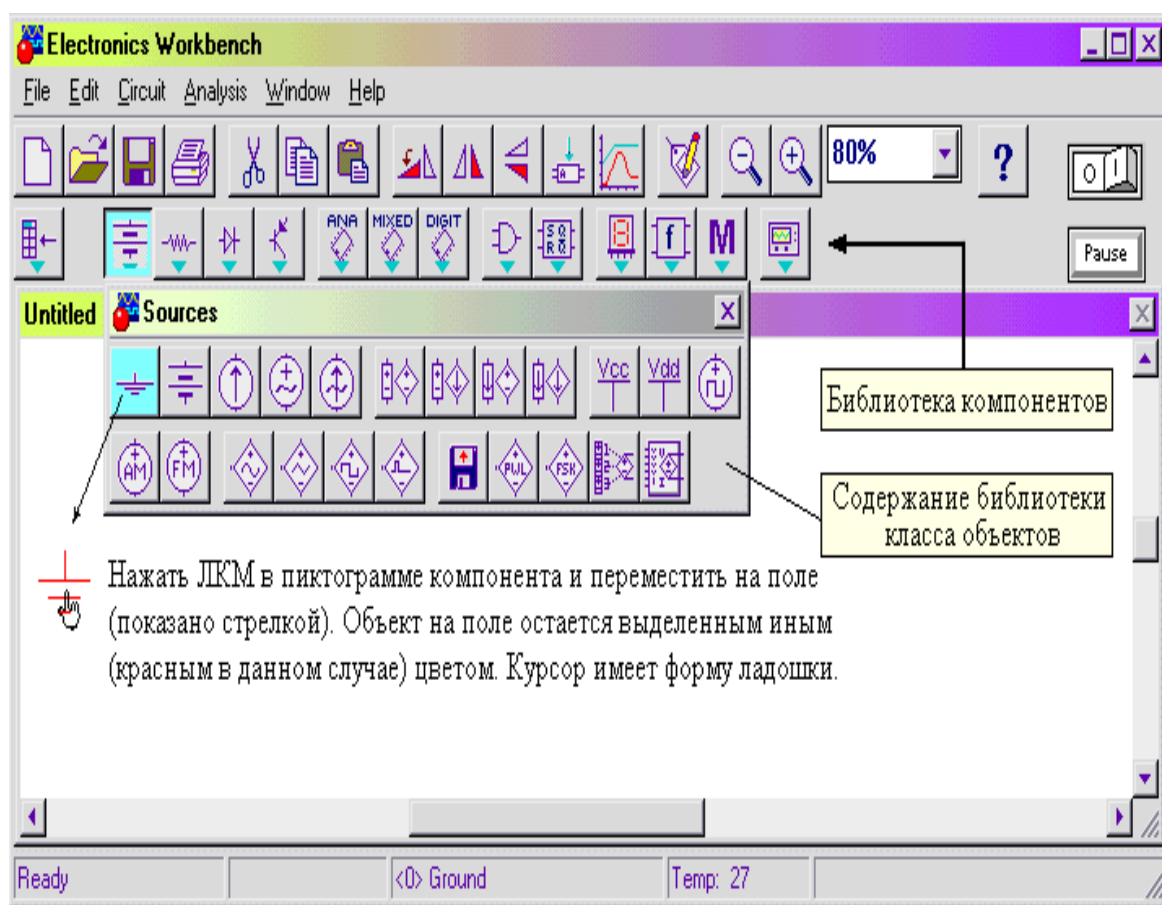


Рис. 15.1 Выделение и буксировка компонента с системе *Electronics Workbench*

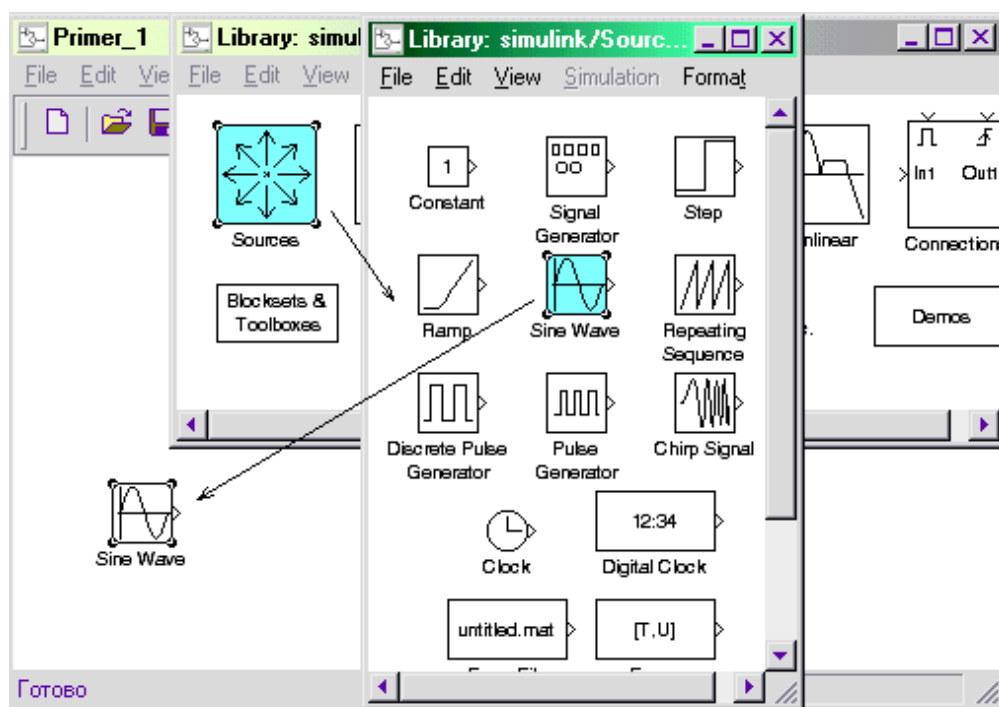


Рис. 15.2 Пример выделения компонента в библиотеке пакета *Simulink*

Двойной щелчок левой кнопкой мыши (ЛКМ) на выделенном объекте инициирует появление окна для установки значений его свойств (рис. 15.3–15.4). В ряде программных сред для установки свойств объектов их предварительно следует выделить, затем щелкнуть правой кнопкой мыши (ПКМ). При этом появляется контекстное меню с указанием всех объектов, доступных для установки и редактирования их свойств. Пример установки свойств в таких системах показан на рис. 15.3.

Установка свойств соответствует реализации закона совместимости элементов технических систем.

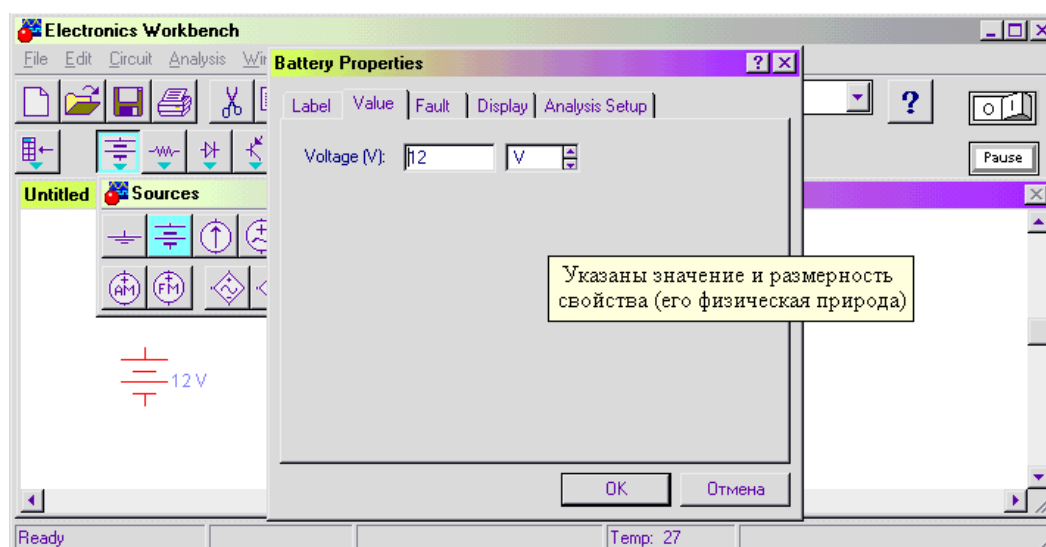


Рис. 15.3 Панель установки свойств объекта (батареи питания)

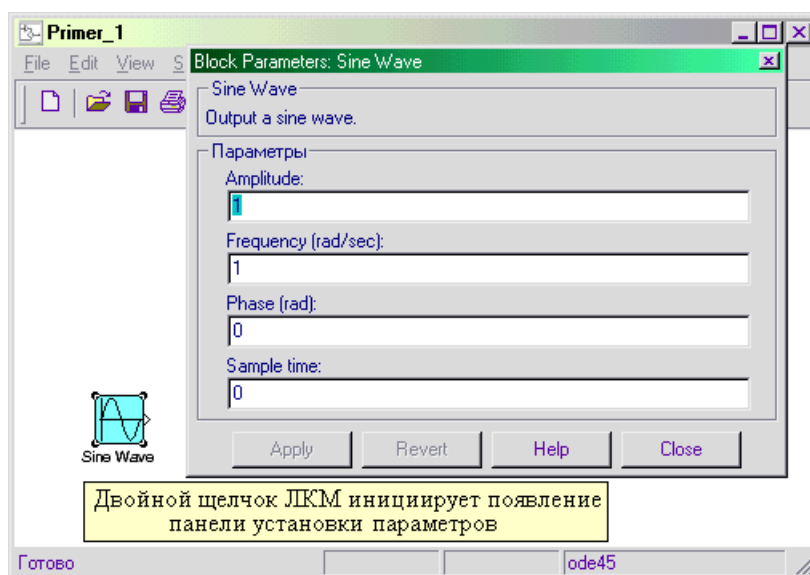


Рис. 15.4 Панель установки параметров блока *Simulink*

Аналогичным образом проводится настройка свойств выводимых результатов моделирования (на рис. 15.5 для системы *MathCAD* показано контекстное меню и настройки для 2D-графиков).

Примеры запуска схем моделей и регистрации результатов их функционирования показаны на рис. 15.6–15.7. Следует отметить, что установка значений свойств компонентов регистрирующих устройств может проводиться как на специальной панели, так и «непосредственно» на компоненте (рис. 15.6).

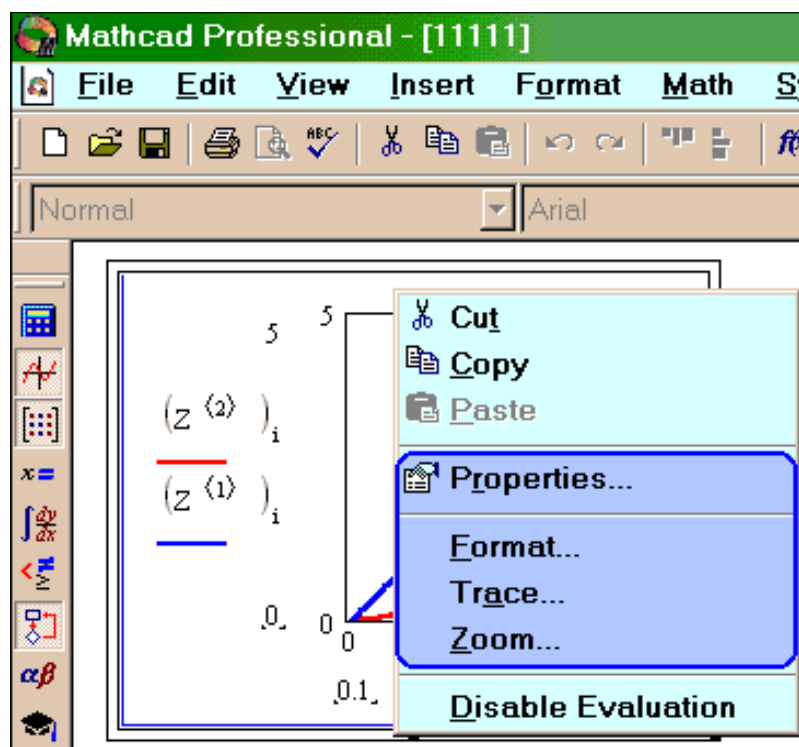


Рис. 15.5 Контекстное меню и область установки свойств рисунка

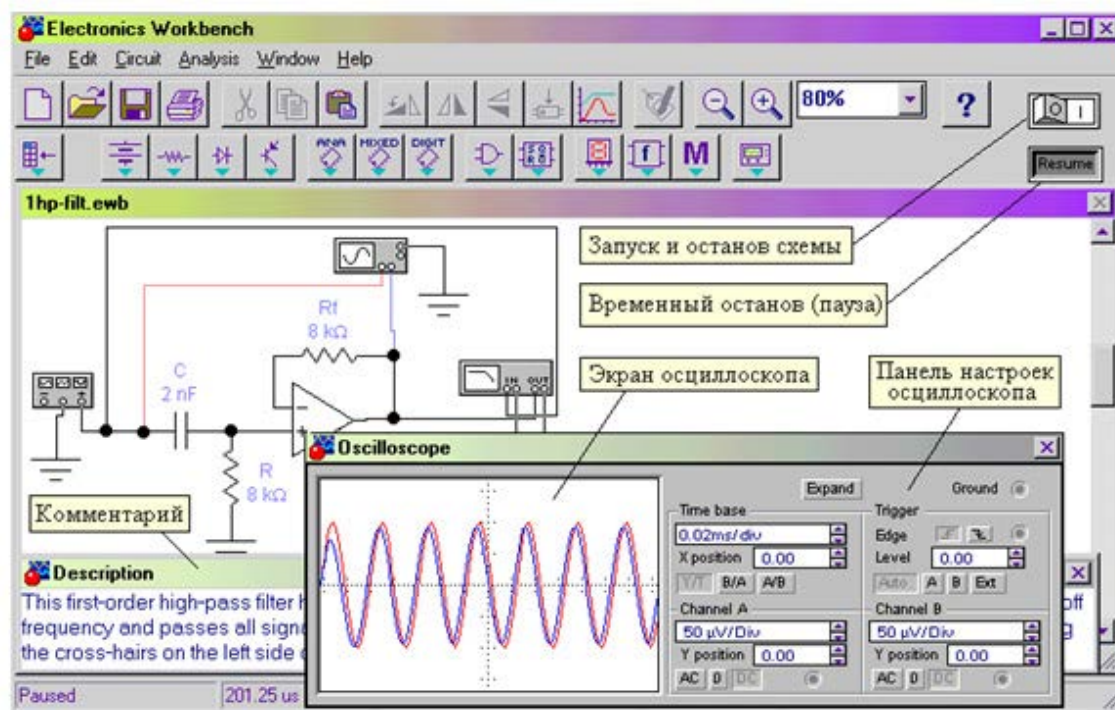


Рис. 15.6 Запуск схемы и регистрация данных

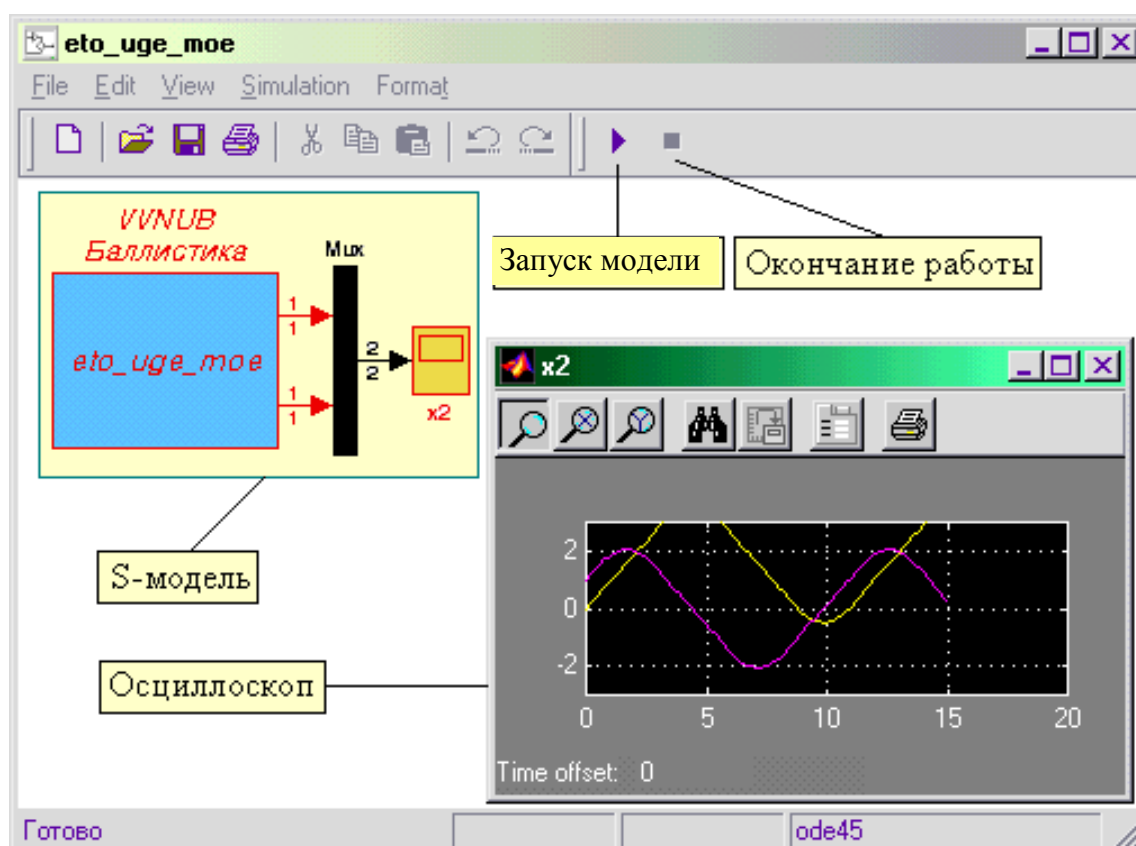


Рис. 15.7 Управление запуском и остановом работы

2. Свойства объектов обеспечивают реализацию ими определенных функций, которые можно представить соответствующей математической моделью. Для библиотечных компонентов такие ма-

тематические модели стандартизированы. При построении схемы устройства остающиеся «за кадром» математические модели элементов формируют математическую модель всего устройства, дополняемую также автоматически необходимыми моделями связей.

3. Каждая математическая модель реализуется на основе соответствующих методов. Их выбор зависит от задачи моделирования (например, для электронных систем возможны: а) исследование режимов по постоянному току (*DC-Analysis*); б) исследование частотных характеристик или режимов по переменному току (*AC-Analysis*); в) исследование переходных процессов (*Transient Analysis*)) и требований точности моделирования.

При этом сами методы могут задаваться однозначно или назначаться пользователем из имеющегося набора.

На рис. 15.7 цель исследования определена «нажатием» кнопки *DC* на панели настроек осциллоскопа (*DC-Analysis*). На схеме, приведенной ниже (рис. 15.8), цель исследования определяется типом использованных компонентов.

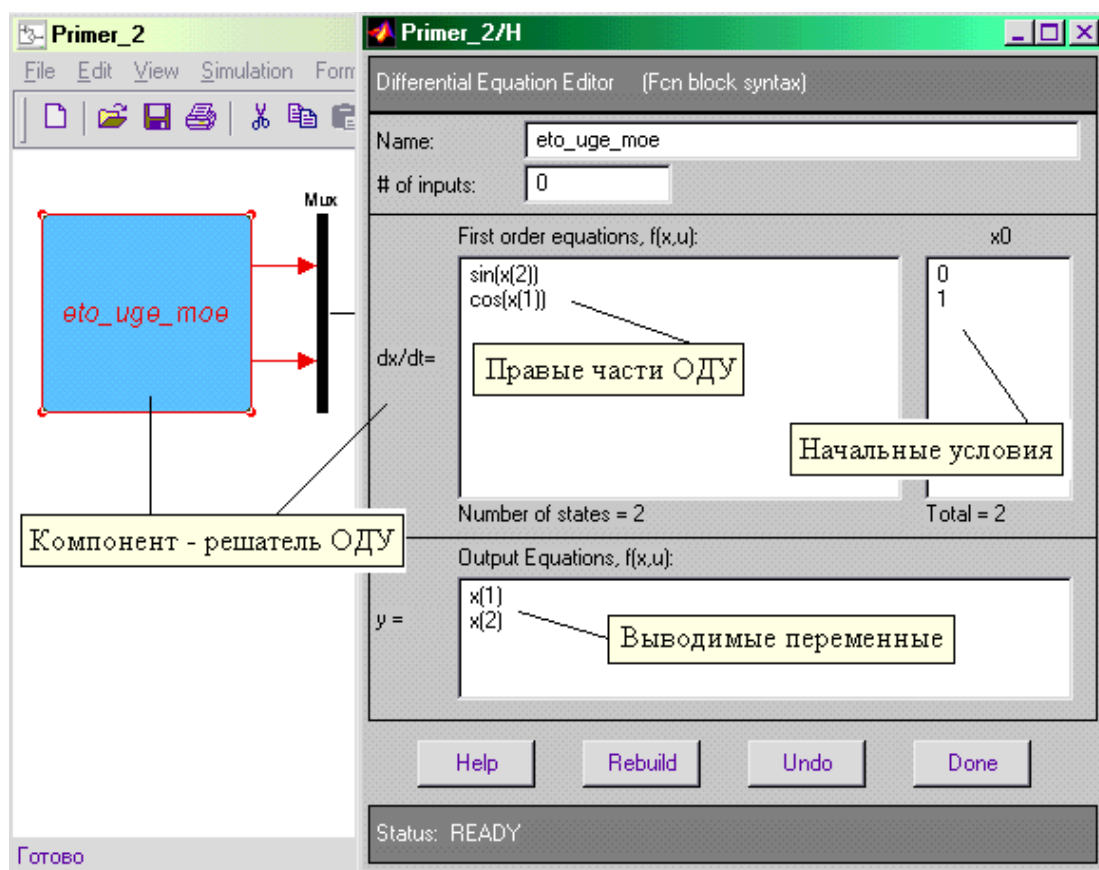


Рис. 15.8 Реализация цели моделирования выбором типа компонента

Пример выбора методов численной реализации математической модели системы показан на рис. 15.9.

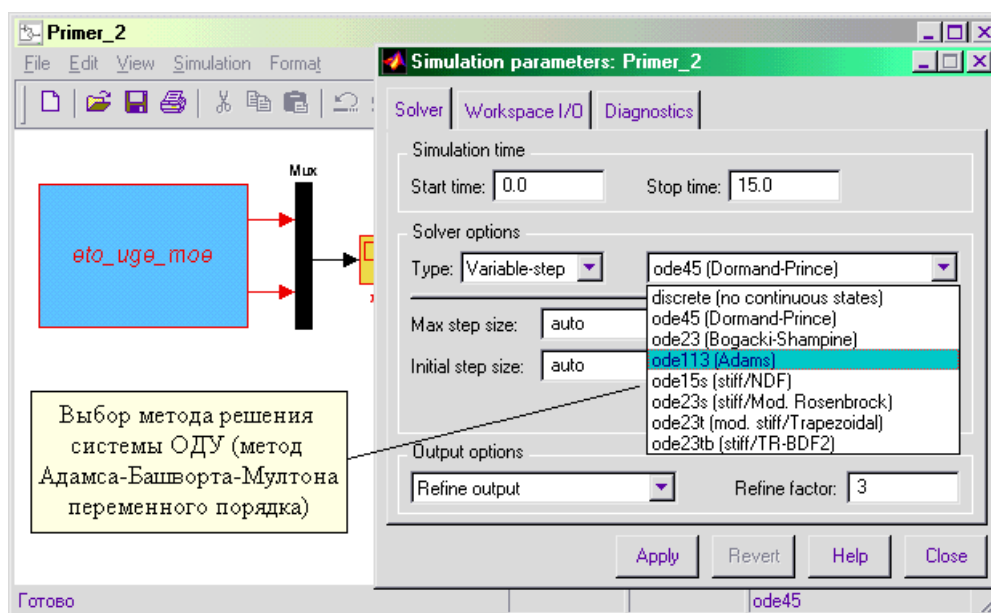


Рис. 15.9 Выбор численного метода решения системы ОДУ

4. Запуск модели определяет начало подготовленного предыдущими построениями события. Для технических систем важным моментом является способ регистрации происходящего события и представления результатов моделирования как совокупности элементарных событий. По форме представления результаты могут оформляться в графическом (экраны приборов: осциллоскоп, графопостроитель и т.д.) (рис. 15.10) и численном видах (таблицы).

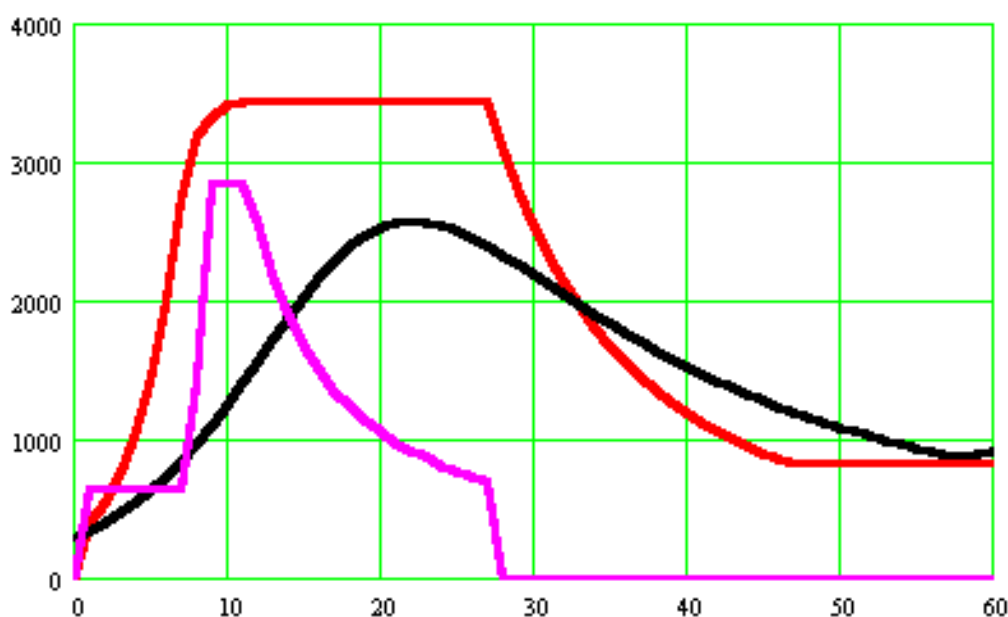


Рис. 15.10 Представление информации в графическом виде

При этом таблицы могут выводиться на экране монитора, храниться в специальной области системы, записываться в файл. Сле-

дует отметить высокую совместимость систем математического моделирования по передаче результатов моделирования.

Некоторые примеры представления результатов приведены ранее, а также показаны на рис. 15.11–15.12.

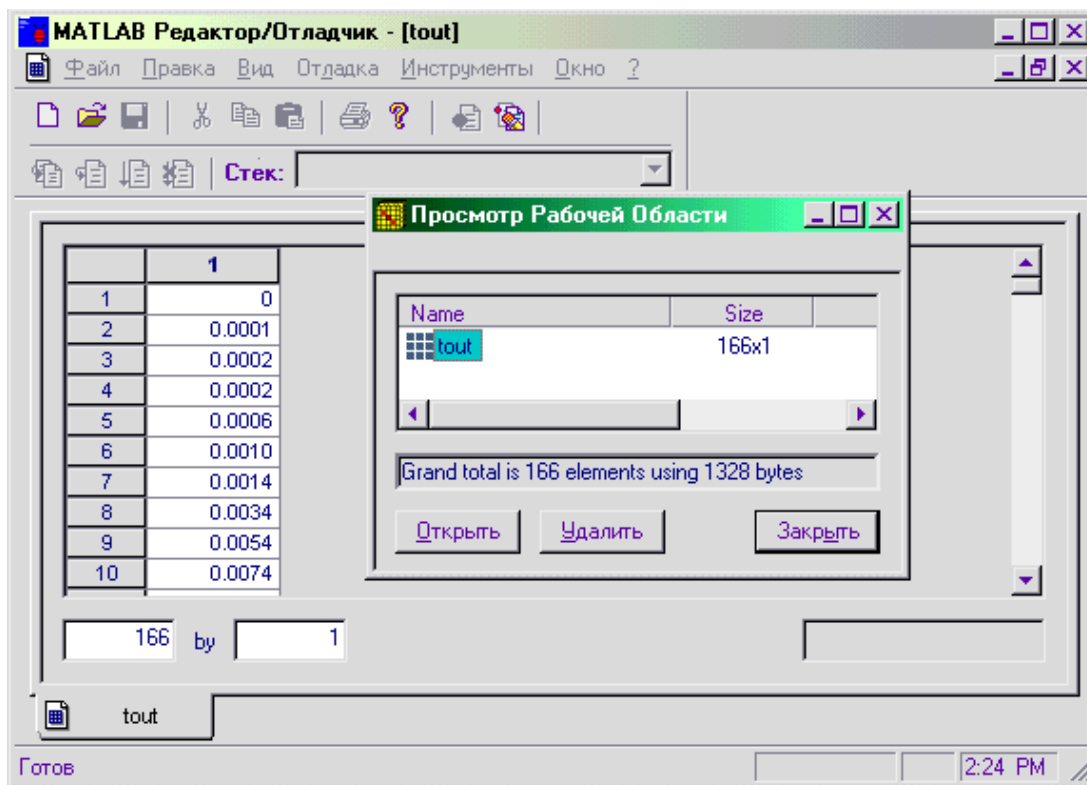


Рис. 15.11 Хранение данных в рабочей области системы *MATLAB*

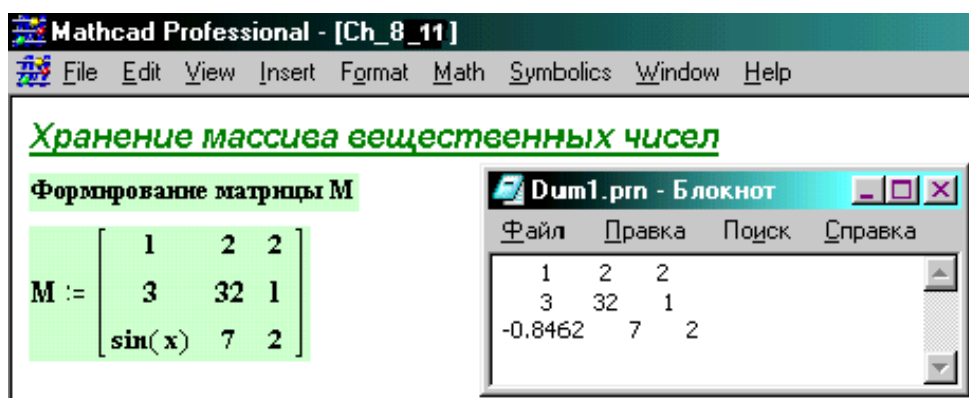


Рис. 15.12 Хранение информации в файле

Следует подчеркнуть три момента:

- различный уровень специализации существующих систем визуального моделирования;
- различную степень открытости систем;
- различный уровень формализации структур исследуемых моделей.

15.3 Характеристика систем моделирования

В качестве инструментов компьютерного исследования технических систем используется широкий спектр программных сред. Для электрических и электронных систем «простейшей» является среда визуального конструирования *Electronics Workbench*. Для исследования систем на основе математических моделей широкое применение находят *MathCAD* и *MATLAB*.

Electronics Workbench является закрытой специализированной системой моделирования электрических и электронных систем. Закрытость определяется невозможностью самостоятельной разработки пользователем дополнительных компонентов и добавления их в библиотеку. Такие доработки проводятся фирмой-разработчиком и вносятся в последующие версии системы. Пользователь имеет возможность формировать личную библиотеку конкретных устройств после их предварительной отладки.

Система использует компоненты с «идеальной» формализацией как структуры компонентов, так и технологии построения схем. Пользователь должен знать только предметное содержание моделируемой проблемы и свойства используемых объектов. В плане практической работы с этой средой достаточны самые общие представления о современных офисных пакетах и умение пользоваться справочной системой. Такие свойства системы *Electronics Workbench* обусловлены ее узкоспециальной направленностью и стандартизацией пользовательского интерфейса.

В методическом плане данная система является также «идеальной»:

- не дополняет и не подменяет знания предметной области;
- технология ее использования проста и не заслоняет собой решаемую исследователем проблему;
- позволяет наработать простейшие навыки построения схем моделируемых систем и установки значений свойств их объектов, обеспечивая тем самым переносимость опыта в рамки других систем компьютерного моделирования.

Некоторые примеры практического использования *Electronics Workbench* показаны на рис. 15.1, 15.3, 15.6.

MathCAD не является системой визуального моделирования в сформулированном выше понимании. Вместе с тем эта система является, безусловно, визуальной: отображение информации на экране полностью соответствует общепринятому формированию записей на листе бумаги. Пример записи информации в рабочем поле системы показан на рис. 15.13.

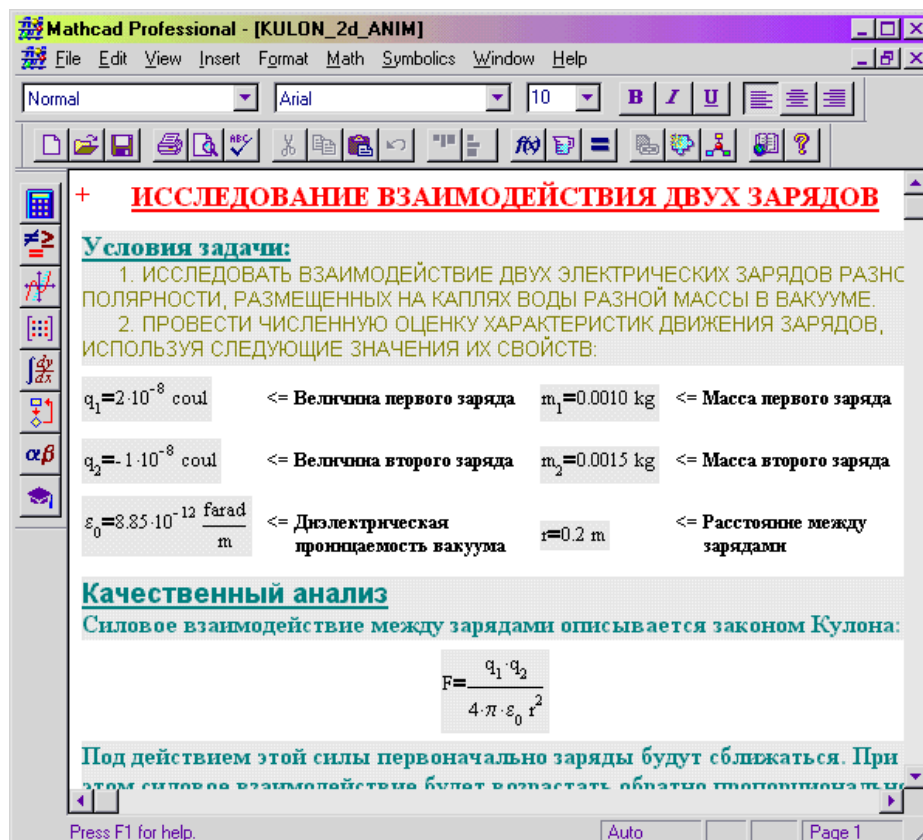


Рис. 15.13 Примеры записи информации в рабочем поле системы *MathCAD*

Среди математических пакетов *MathCAD* является единственным, обладающим такими возможностями. Кроме того, в состав пакета *MathCAD* входит системный интегратор *MathConnex*, компонентная технология моделирования в котором является «визуальной». Только компонентами здесь являются блоки, присущие как непосредственно среде *MathConnex*, так и разрабатываемые в других системах математического моделирования (*MathCAD*, *Excel*, *Axum*, *MATLAB*). Некоторое представление о виде модели исследуемой системы дает пример, показанный на рис. 15.14.

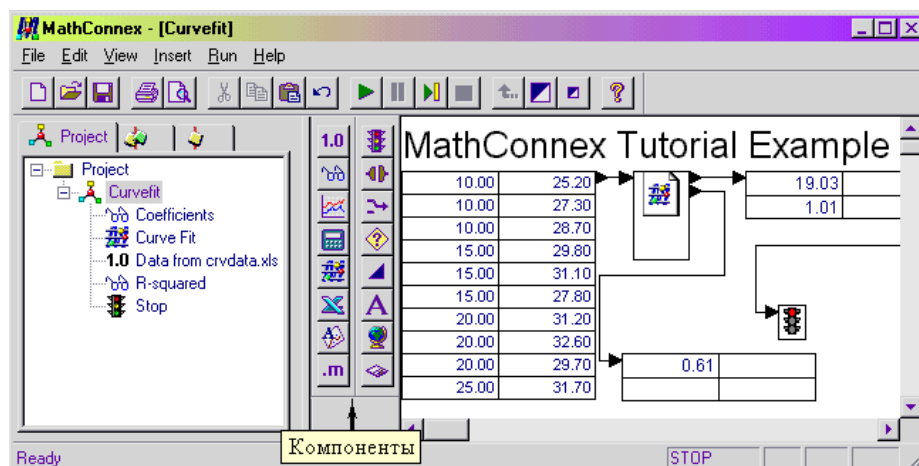


Рис. 15.14 Пример представления модели в системе *MathConnex*

Система *MATLAB* (матричная лаборатория) представляет собой пакет, интегрирующий ядро и несколько десятков программных продуктов, каждый из которых может использоваться как самостоятельная система. Практически нет областей математических исследований, которые не обеспечиваются соответствующими компонентами данной системы. Технология работы в этой системе практически идентична рассмотренной для *Electronics Workbench*.

В практике моделирования процессов, характерных для авто-тракторной техники, находят применение пакеты инженерного анализа, возможности которых превосходят ранее рассмотренные как по набору инструментария, так и по уровню интеграции разнотипных моделей на основе изначально единой базы данных об объектах исследования.

В любом случае использование автоматизированного варианта анализа оправдано только при ясном понимании всего процесса функционирования исследуемой системы и требуемых объема, точности и формы представления конечных результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карлащук, В. И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение / В. И. Карлащук. – М. : Солон-Р, 2000. – 506 с.
2. Кирьянов, Д. В. Самоучитель MathCAD 12 / Д. В. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 576 с.
3. Дьяконов, В. П. MATLAB 5.0/5.3. Система символьной математики / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. – М. : Нолидж, 1999. – 640 с.
4. Гулятьев, А. К. MATLAB 5.2. Имитационное моделирование в среде Windows : практическое пособие / А. К. Гулятьев. – СПб. : КОРОНА принт, 1999. – 288 с.
5. Дебни, Дж. Simulink 4. Секреты мастерства / Дж. Дебни, Т. Харман. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 403 с.

Тема 16

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС EULER

Назначение и общая характеристика комплекса. Информационное обеспечение комплекса. Режимы работы, элементы интерфейса комплекса. Технология моделирования, визуализация процесса моделирования.

16.1 Назначение и общая характеристика комплекса

Программный комплекс *EULER* предназначен для математического моделирования динамики многокомпонентных механических систем (ММС) в трехмерном пространстве. По сути, данная система занимает промежуточное место между выделенными ранее вторым и третьим направлениями. Ведущиеся в настоящее время работы по интегрированию этой системы с одной из САПР в дальнейшем дадут возможность комплексного исследования как имеющихся, так и вновь разрабатываемых технических систем в едином интерфейсном пространстве.

При моделировании механических систем в *EULER* нет необходимости выводить уравнения движения или оперировать абстрактными математическими понятиями. Процесс описания модели механической системы максимально приближен к традиционному конструированию. Фактически пользователь просто рисует на экране компьютера механическую систему и выделяет звенья (твердые тела и связанные с ними геометрические объекты). После этого он указывает шарниры, силовые элементы и при необходимости создает объекты контроля и управления механической системой. *EULER* в соответствии с описанием модели автоматически сформирует точные в рамках классической механики уравнения движения. Если в процессе движения механической системы меняется ее структура, например разрушаются или заклиниваются какие-то шарниры, то соответствующие уравнения будут автоматически изменены. Такая модификация уравнений происходит достаточно быстро и не вызывает заметных задержек в процессе расчета.

При проведении исследований с помощью *EULER* пользователь может наблюдать движение механической системы в нескольких видах. Он может также получать данные об ускорениях, скоростях, расстояниях, углах и силах, возникающих в механической системе в процессе движения. Программный комплекс позволяет выводить эти характеристики в виде графиков, таблиц или числовых значений. Силы, действующие в механической системе, могут отображаться в виде векторов. Эти векторы могут включаться в графическое представление механизма, т.е. выводиться вместе с изображением внешнего вида ММС.

Области применения *EULER* ничем не ограничены. Например, в автомобиле- и тракторостроении это могут быть:

- исследование динамики движения различных типов автомобилей: легковых, грузовых, с прицепами, со всеми поворотными колесами, с любыми типами подвесок и приводов и т.д. – для оценки характеристик устойчивости и управляемости и определения силовых нагрузок в узлах и агрегатах;

- автономные исследования кинематики и динамики различных узлов и агрегатов автомобиля: механизмов подвески, рулевого управления, открывания капота и т.д.

В примере, показанном на рис. 16.1, в процессе моделирования определяются характеристики динамического воздействия в зоне нахождения водителя и нагрузки, возникающие в узлах конструкции автомобиля.

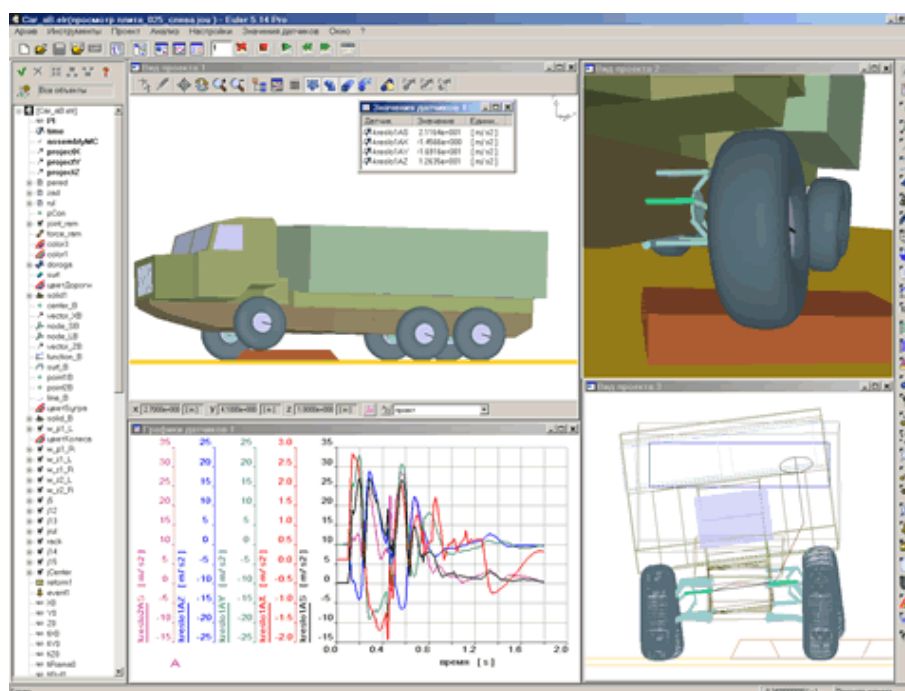


Рис. 16.1 Моделирование критических режимов эксплуатации автомобиля

При моделировании динамического поведения автомобилей с различными типами подвесок (рис. 16.2) проводится исследование динамических характеристик плавности хода. Рассматриваются традиционная зависимая рессорная и независимая рычажная подвески колес, различное число осей автомобиля. Моделируется прямолинейное пространственное движение автомобиля по дороге с неровностями. Задаются как одинаковые, так и различные неровности под правыми и левыми колесами. Варьируются давление воздуха в шинах и скорость движения. В процессе моделирования определяются динамические воздействия в зоне нахождения водителя.

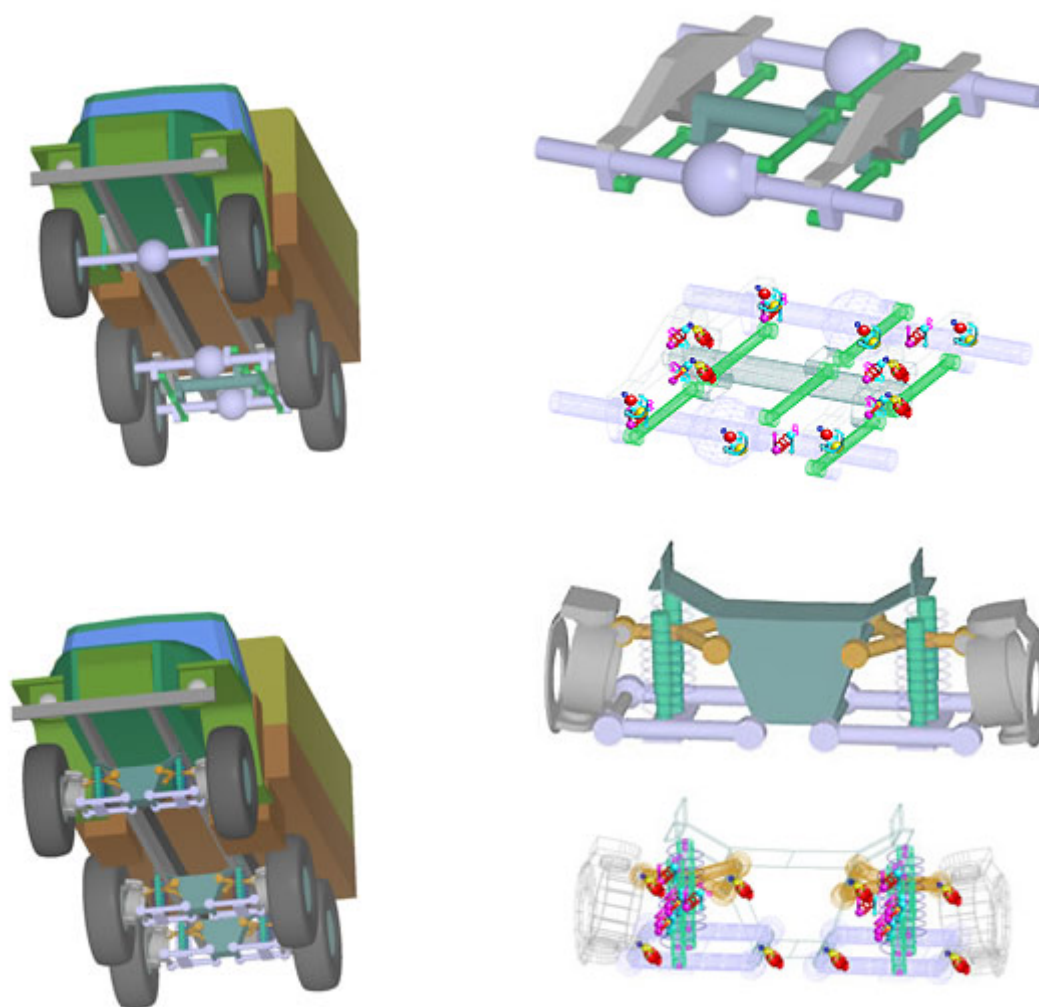


Рис. 16.2 Моделирование динамики автомобилей с различными типами подвесок

Программный комплекс *EULER* предназначен для инженеров-механиков, занимающихся проектированием, анализом или испытаниями механических систем в самых различных областях. Знание программирования и специальная математическая подготовка для работы с *EULER* не требуются.

16.2 Информационное обеспечение комплекса

Программный комплекс имеет развитое информационное обеспечение, позволяющее в короткое время освоить практические приемы работы с ним. Он включает учебник, выполненный в виде справочной системы; большое число примеров с предоставлением всех исходных файлов для воспроизведения полного цикла моделирования; обучающий курс, демонстрирующий практически все аспекты работы со средой моделирования.

Примеры доступного пользователю информационного обеспечения приведены на рис. 16.3–16.6.

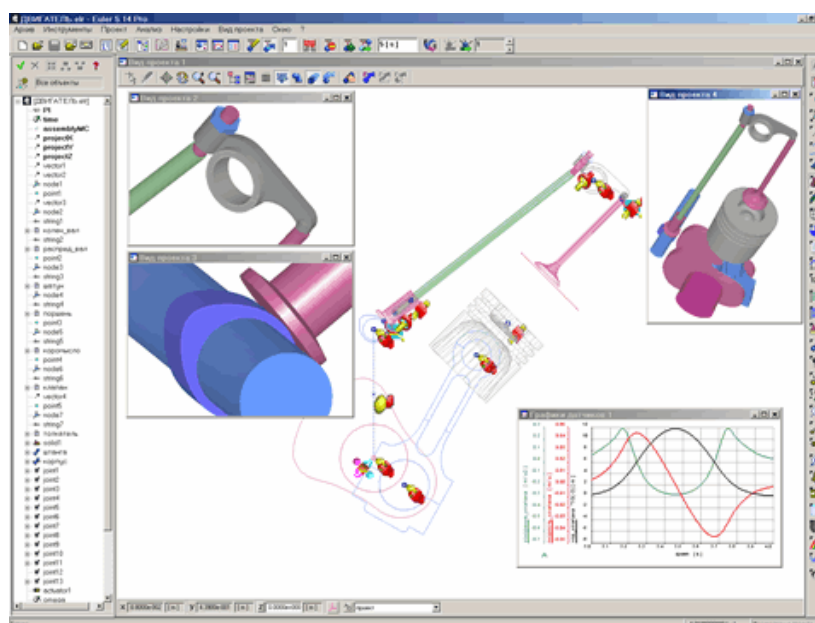


Рис. 16.3 Пример анализа газораспределительного механизма ДВС

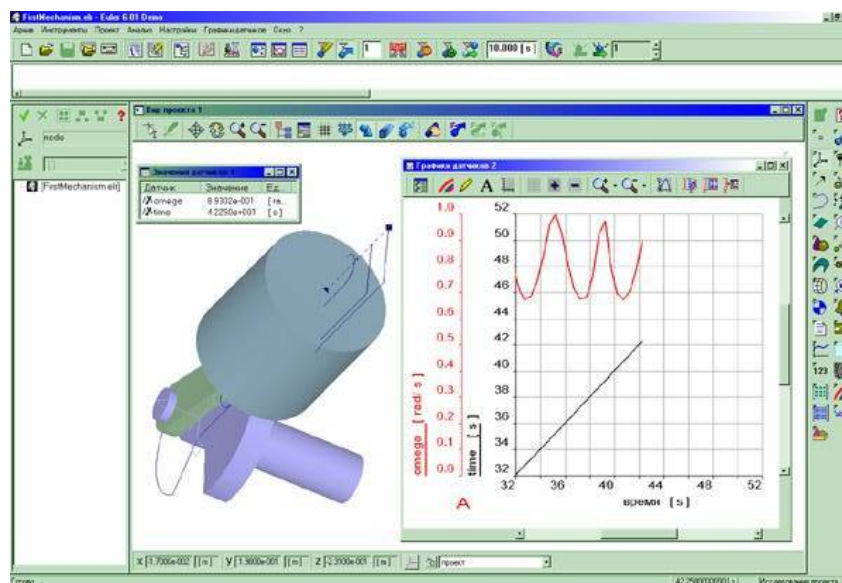


Рис. 16.4 Пример анализа поршневой группы ДВС

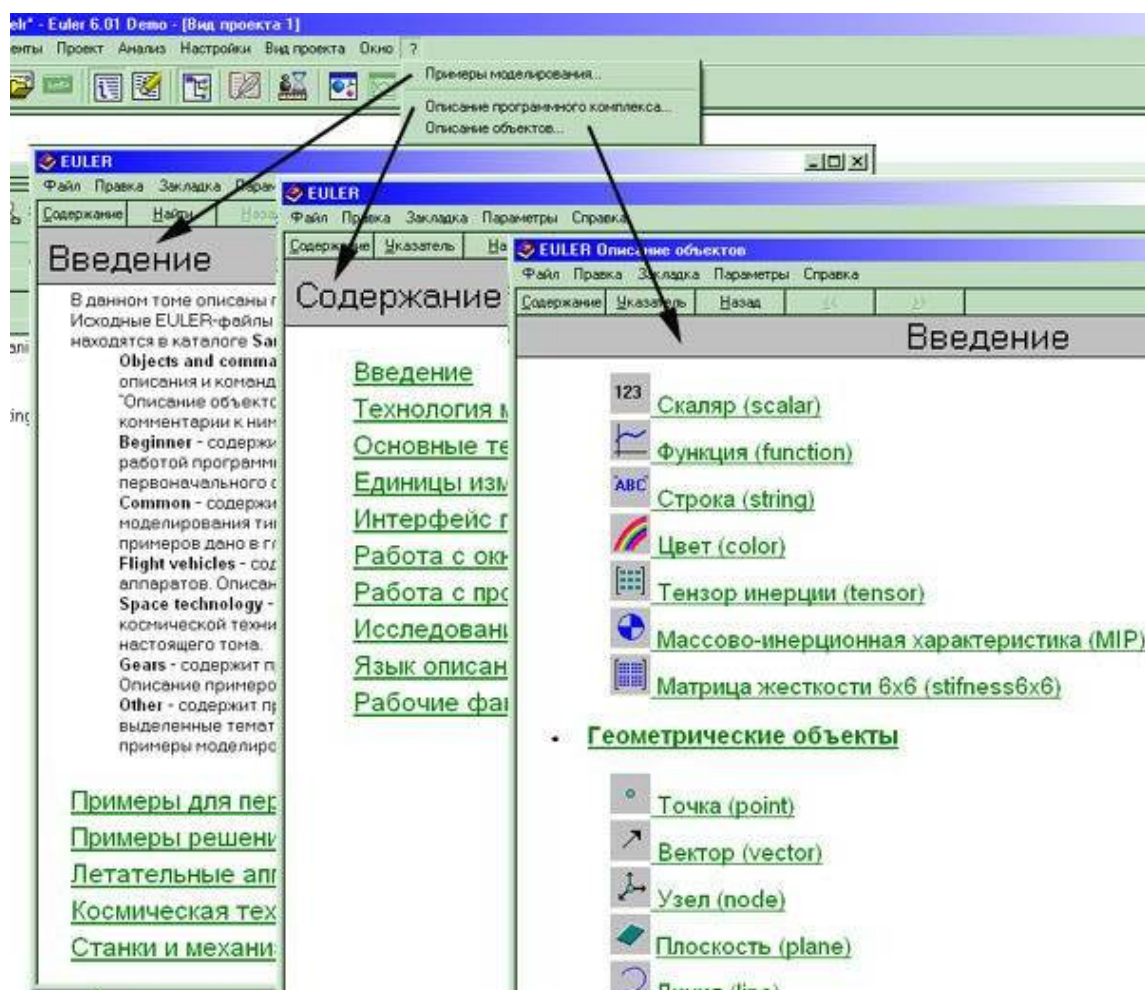


Рис. 16.5 Справочная система программного комплекса

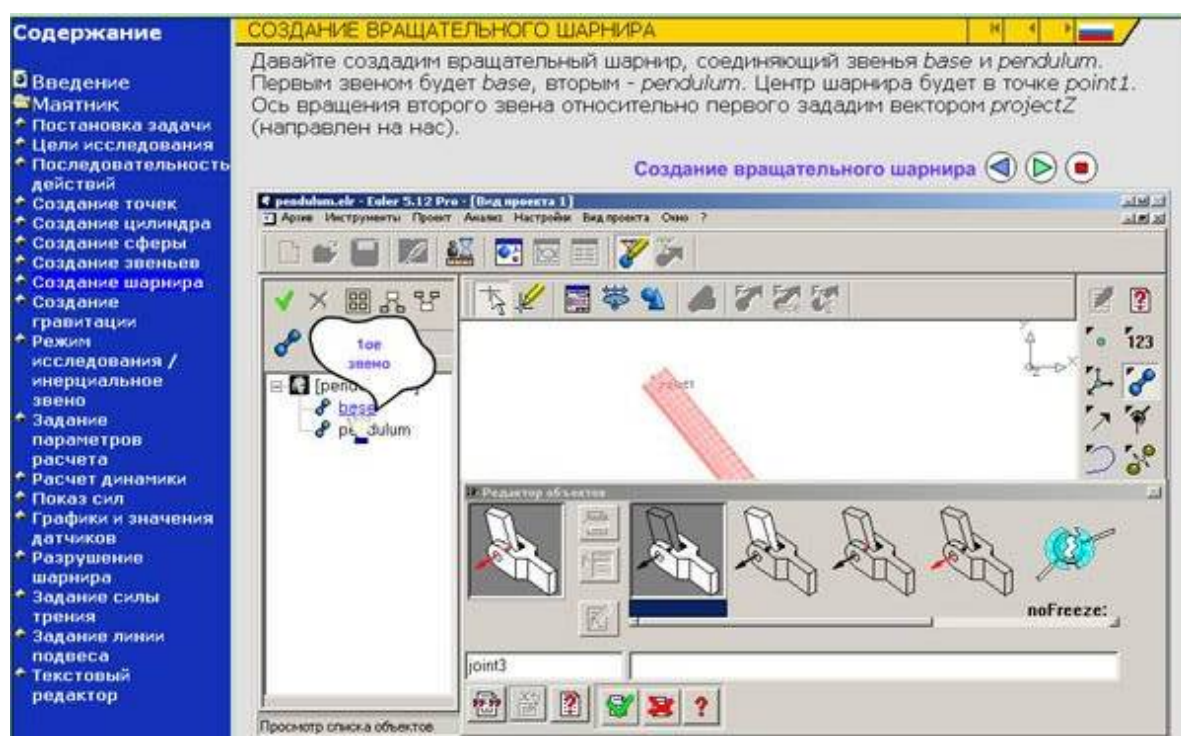


Рис. 16.6 Фрагмент обучающего курса комплекса EULER

16.3 Режимы работы, элементы интерфейса комплекса

Программный комплекс обеспечивает работу в трех режимах: режиме редактирования (визуального построения модели и задания свойств ее элементов), режиме анализа модели (исследования динамического поведения многокомпонентной механической системы) и режиме просмотра журнала проекта. При необходимости внесение корректив в модель может осуществляться в режиме анализа системы. При этом уравнения математической модели корректируются программным комплексом автоматически, не требуя вмешательства пользователя.

Журнал движения представляет собой специальный файл для записи результатов численного интегрирования траектории движения исследуемой ММС. Каждому журналу при создании присваивается имя (с расширением *.jou). Имя журнала не зависит от имени проекта исследуемой ММС. Журнал размещается в том же каталоге, что и исследуемый проект.

Новый журнал движения можно создать только для проекта, открытого в программном комплексе в режиме исследования. Помимо журнала, в том же каталоге автоматически создается файл с тем же именем, но с расширением *.sen. В этом файле сохраняются показания всех датчиков системы. Если показания датчиков не представляют интереса для пользователя, то после окончания записи журнала этот файл может быть удален.

При открытии уже существующего журнала движения считается проект, по которому был создан журнал. Если в данный момент открыт другой проект, то он закрывается. Проект, послуживший основой для создания журнала, необходим для воспроизведения геометрии объектов исследуемой ММС. Этот проект переводится в режим исследования. Из журнала движения считывается информация о динамике движения системы. После этого пользователь может просматривать журнал. В демонстрационной версии работа с журналом не предусмотрена.

Интерфейс программного комплекса ориентирован на стандарт *Windows*, общие моменты интерфейса показаны на рис. 16.1–16.6.

Для работы над проектом в *EULER* могут использоваться следующие типы основных окон (рис. 16.7):

1. *Панель объектов* – используется для указания типа объекта механической системы при создании и выборе объектов (справа в общем окне).

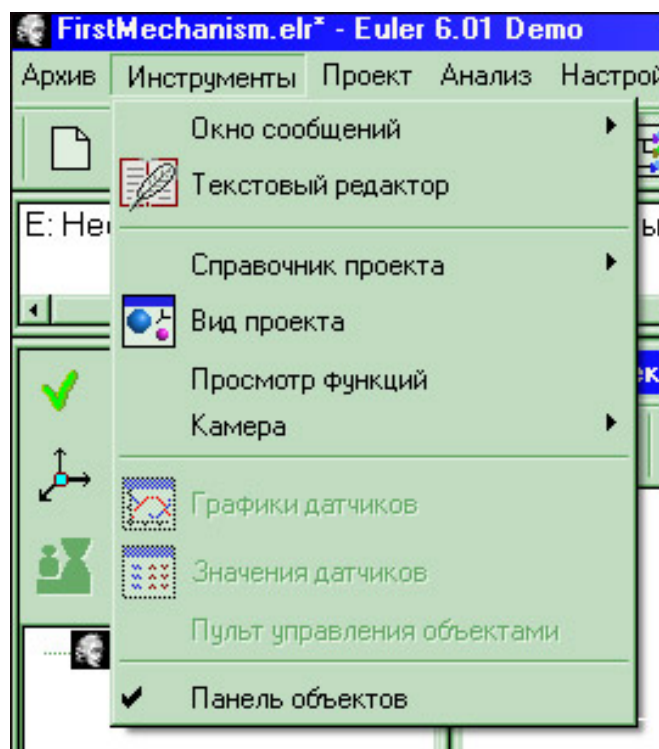


Рис. 16.7 Типы окон системы

2. *Справочник проекта* – применяется для просмотра, выбора, редактирования, удаления и других операций с объектами механической системы (слева в общем окне).

3. *Вид проекта* – служит для отображения внешнего вида механической системы (на стандартной панели).

4. *Камера* – применяется для отображения внешнего вида механической системы при наблюдении из заданной точки.

5. *Редактор объектов* – используется для создания и редактирования объектов механической системы. Окно открывается только в режиме редактирования проекта при создании нового объекта и при вызове команды «Редактирование объекта» в меню объекта.

6. *Просмотр функций* – служит для отображения объектов типа «функция» в виде графиков.

7. *Текстовый редактор* – используется для работы с текстовым файлом описания механической системы. Окно может быть открыто только в режиме редактирования проекта.

8. *График датчиков* – применяется для отображения характеристик движения механической системы (значений объектов типа «датчик») в виде графиков и таблиц. Окно может быть открыто только в режиме исследования проекта.

9. *Значения датчиков* – служит для отображения характеристик движения механической системы (значений объектов типа

«датчик») в виде числовых значений. Окно может быть открыто только в режиме исследования проекта.

10. *Окно сообщений* – используется для просмотра сообщений, выдаваемых программным комплексом (под стандартной панелью). Сообщения могут иметь тип: информация, предупреждение или ошибка.

Объектное меню дополняет приведенные в *Справочнике проекта* сведения об объекте и служит для изменения свойств объекта и получения о нем справочной информации. Для доступа к объектному меню выделяют объект или в окне *Справочника*, или в окне *Вид проекта*, после чего используют ПКМ (рис. 16.8).

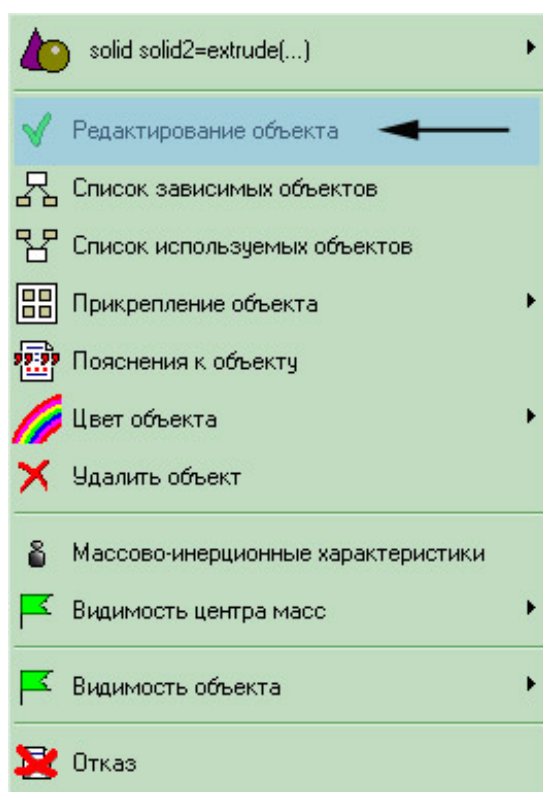


Рис. 16.8 Объектное меню

Объектное меню формируется программным комплексом в зависимости от типа объекта, параметров его создания, текущего режима и ряда других факторов. Поэтому у разных объектов список пунктов меню будет отличаться. Даже у одного и того же объекта в различные моменты времени состав меню может меняться.

Следует отметить, что практически во всех современных САПР окно *Справочника* именуется либо *Менеджером проекта*, либо *Инспектором свойств*. В этом случае необходимость использования дополнительного окна типа *Объектное меню* просто отсутствует.

16.4 Технология моделирования

Схематично процесс моделирования в *EULER* можно разделить на следующие этапы:

- анализ исходной системы;
- формирование исходных данных и концепции модели;
- формирование геометрической модели;
- формирование динамической модели;
- автоматическое формирование математической модели;
- исследование системы.

Этап 1. Анализ исходной системы

Объектом анализа, выполняемого с помощью *EULER*, служит техническая или иная структура, которую можно представить в виде ММС. Такая многокомпонентная механическая система должна существовать в виде, обеспечивающем предметное указание ее элементов, связей между ними, а также конкретных значений свойств элементов и связей.

Этап 2. Формирование исходных данных и концепции модели

Данный этап процесса предшествует непосредственной работе с программным комплексом *EULER* (наличие этого этапа – обычное явление). Однако исследователь, создающий концепцию идеализированной модели, должен представлять себе возможности программного комплекса. От опыта исследователя и понимания степени влияния различных факторов на поведение исходной механической системы зависит правильный выбор между точностью создаваемой модели и сложностью ее описания.

Прежде всего пользователь должен решить, из каких звеньев будет состоять модель исходной механической системы и какими шарнирами эти звенья соединяются. Звенья – это тела, из которых образуется механическая система. Шарнир, или кинематический узел, представляет собой подвижное соединение нескольких звеньев.

В представленной версии *EULER* звенья могут быть только жесткими телами. Если при исследовании необходимо учесть возможность деформации некоторой целостной конструкции, например крыла самолета или рамы автомобиля, то эту конструкцию следует разделить на звенья. Звенья в общем случае могут связываться шарнирами и силовыми элементами.

Необходимо также разнести массы исходной системы по звеньям ее модели. Здесь следует учитывать, что максимально детальное разнесение масс (в предельном случае, когда каждое звено имеет ненулевое значение массы) повышает точность моделирования. Однако при этом происходит усложнение модели и увеличивается время расчетов.

Типы шарниров в модели должны быть выбраны так, чтобы они обеспечивали все необходимые движения тел в исходной системе. В то же время следует избегать добавления ненужных для проводимого исследования шарниров и максимально сокращать количество звеньев. Программный комплекс *EULER* поддерживает широкую номенклатуру возможных типов шарниров. Их рациональный выбор облегчает решение данной задачи. Выполнение этих требований позволяет сократить общее время расчетов.

Далее для формирования идеализированной модели необходимо выделить все активные силы, влияющие на движение исходной системы. К ним относятся силы упругости пружин, демпфирующие силы амортизаторов, движущие силы и силы сопротивления движению, силы воздействия на звенья внешней среды. Все активные силы должны быть описаны в модели в виде силовых элементов. И для них необходимо подготовить соответствующие исходные данные.

При моделировании некоторых механических систем иногда требуется организовать управление ими в процессе движения. *Для моделирования каналов управления в EULER должны быть созданы датчики, приводы и программные движения. Датчики* применяются для формирования и преобразования сигналов управления. *Приводы* создают управляющие силовые воздействия в модели механической системы. *Программные движения* используются для описания движения модели системы. Они, к примеру, могут определять изменение одного датчика в зависимости от другого в соответствии с заданной функцией – программой движения.

Этап 3. Формирование геометрической модели

Геометрическая модель является основой построения динамической модели MMC, обеспечивает визуализацию механической системы. По ней в *EULER* рассчитываются массово-инерционные характеристики частей системы. Геометрические объекты используются для всех объектов динамической модели системы (элементов и связей). Для создания геометрической модели применяются следующие типы объектов: точка (*point*), вектор (*vector*), узел (*node*), плоскость (*plane*),

линия (*line*), поверхность (*surface*), тело (*solid*). Изображение частей (звеньев) механической системы в виде набора точек, линий или тел не является обязательным. Однако это очень удобно для формирования модели, особенно при проведении исследований, поскольку позволяет наблюдать процесс движения системы на экране.

Этап 4. Формирование динамической модели

Описание динамической модели производится в понятных инженерных терминах. Для этого используются следующие типы объектов: звено (*body*), шарнир (*joint*), силовой элемент (*force*), привод (*actuator*), датчик (*sensor*), программное движение (*motion*), изменение механизма (*reform*), событие (*event*), условие состояния механизма (*condition*), гравитационное притяжение (*gravity*) и др. Разделение этапов 3 и 4 является условным, создание геометрических объектов может чередоваться с генерацией объектов динамического представления ММС.

Этап 5. Автоматическое формирование математической модели

Формирование математической модели выполняется в *EULER* автоматически, без непосредственного участия пользователя.

Первоначально на этом этапе проводится топологический анализ структуры модели механической системы. В процессе его выполнения выявляются замкнутые кинематические цепи и формируются рабочие кинематические цепи. Затем на их основе генерируются системы уравнений. Определение кинематических цепей производится по результатам оптимизации расчетной схемы модели, что позволяет существенно уменьшить объем вычислений.

Далее генерируются системы уравнений, описывающих движение исследуемой системы. К этим уравнениям относятся:

- уравнения движения звеньев;
- уравнения кинематических связей системы (для замкнутых кинематических цепей);
- уравнения голономных и неголономных связей в шарнирах;
- уравнения программных движений (каналов управления).

Математическая модель представляет собой систему алгебраических и дифференциальных уравнений. Она формируется в нелинейной постановке с учетом больших перемещений звеньев. Для всех характеристик, описывающих поведение, управление и силовые воздействия в математической модели, учитывается их нелинейная природа.

Этап 6. Исследование системы

Под исследованием ММС понимается проведение расчетов, необходимых пользователю (рис.16.9). Во время исследований пользователь может наблюдать поведение механической системы в специальных интерфейсных окнах. В этих окнах выводится каркасное или реальное (с отсечением невидимых линий и полутоновой раскраской поверхностей) графическое представление системы. Одновременно с графическим представлением в окнах можно выводить графики и цифровые значения различных параметров движения механической системы. Для сохранения результатов исследования используются специальные файлы программного комплекса *EULER*, а также файлы различных форматов операционной системы *Windows*. Кроме того, изображения внешнего вида ММС и графики можно печатать на принтере.

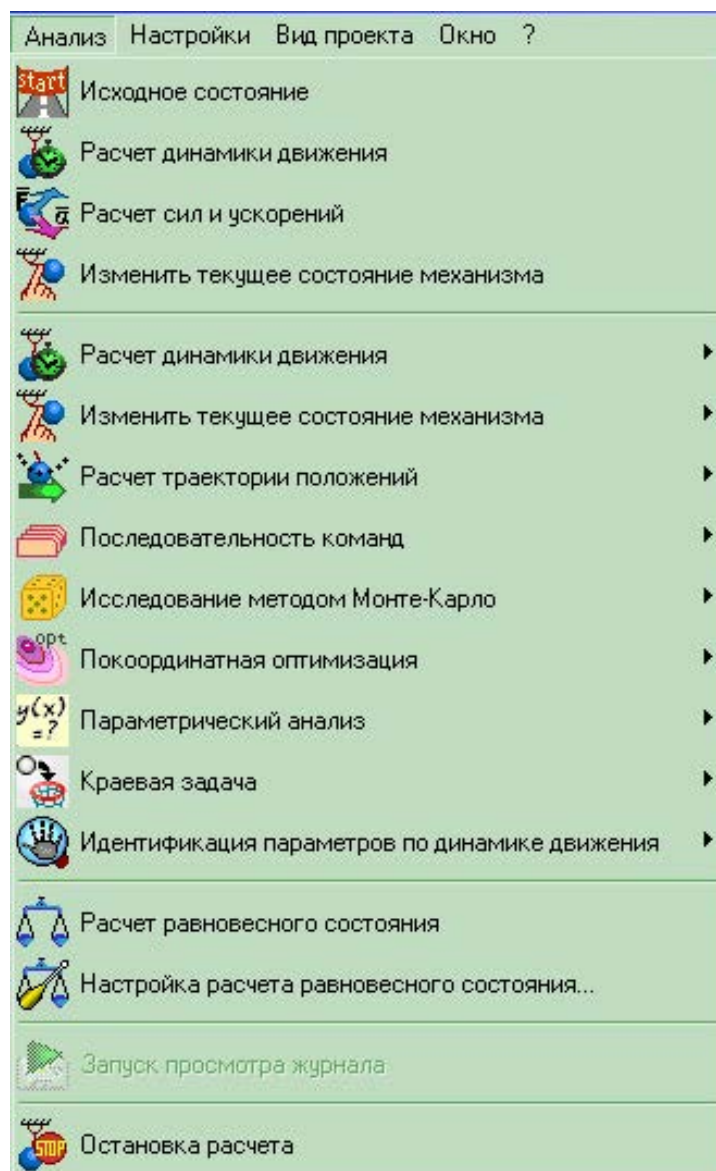


Рис. 16.9 Панель задач анализа систем

При исследованиях сложных механических систем следует производить проверку точности сформированной модели. Особенно это относится к тем типам систем, которые ранее пользователю моделировать не приходилось. Наиболее достоверную оценку точности модели можно получить при сравнении поведения реальной системы с результатами математического моделирования. Неудовлетворительная точность модели означает, что при составлении идеализированной модели пользователь пренебрег факторами, важными для описания поведения исходной системы, или слишком упростил модель. В этом случае необходимо модернизировать идеализированную модель. Важным достоинством программного комплекса *EULER*, проявляющимся в этой ситуации, является возможность расширять исследуемую модель. Благодаря этому исследователь может оперативно дополнять существующую модель с учетом новых факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочная система программного комплекса *EULER*.
2. Обучающий курс программного комплекса *EULER*.

Тема 17

SolidWorks & Cosmos

Обзор компьютерных систем моделирования. Стратегии компьютерного моделирования. Визуализация процесса моделирования.

17.1 Система твердотельного моделирования *SolidWorks*

SolidWorks – это система гибридного параметрического моделирования (САПР), которая предназначена для проектирования деталей и сборок в трехмерном пространстве с возможностью проведения различных видов экспресс-анализа, а также оформления конструкторской документации в соответствии с требованиями ЕСКД. Пример функционирования системы представлен на рис. 17.1.

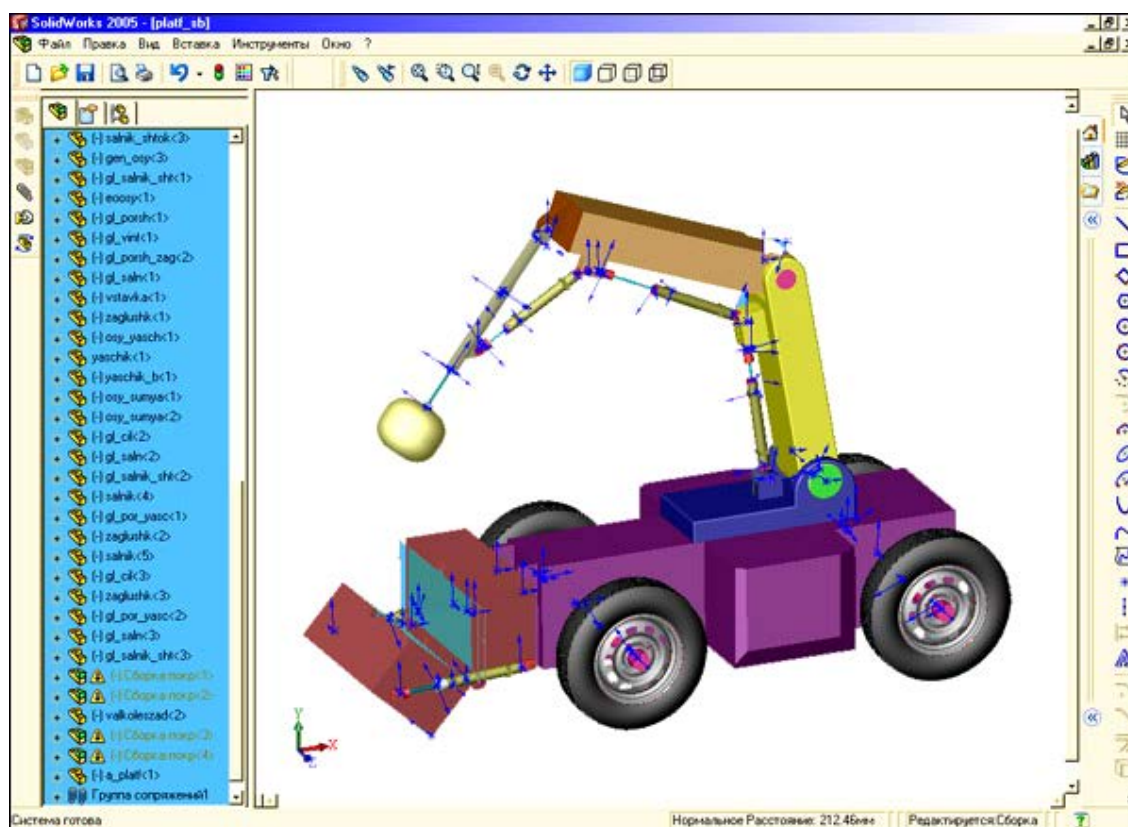


Рис. 17.1 Сборка мобильного робота в *SolidWorks*

Отличительными особенностями базового модуля *SolidWorks* с точки зрения моделирования являются:

- твердотельное и поверхностное параметрическое моделирование;
- полная ассоциативность между деталями, сборками и чертежами;
- богатый интерфейс импорта/экспорта геометрии;
- экспресс-анализ прочности деталей и кинематики механизмов;
- специальные средства по работе с большими сборками;
- простота в освоении и высокая функциональность;
- гибкость и масштабируемость;
- 100 % соблюдение требований ЕСКД при оформлении чертежей;
- русскоязычный интерфейс и документация.

В базовую конфигурацию *SolidWorks* входит модуль экспресс-анализа прочности деталей конструкции – *COSMOSXpress*. *COSMOSXpress* является «облегченной» версией *COSMOSWorks* – пакета комплексного инженерного анализа систем. *COSMOSXpress* позволяет проектировщику определить, где расположены концентраторы напряжений, оценить «перетяжеленные» элементы конструкции, из которых может быть удален избыточный материал с целью снижения массы и, соответственно, стоимости будущего изделия. Пример функционирования модуля *COSMOSXpress* приведен на рис. 17.2–17.3.

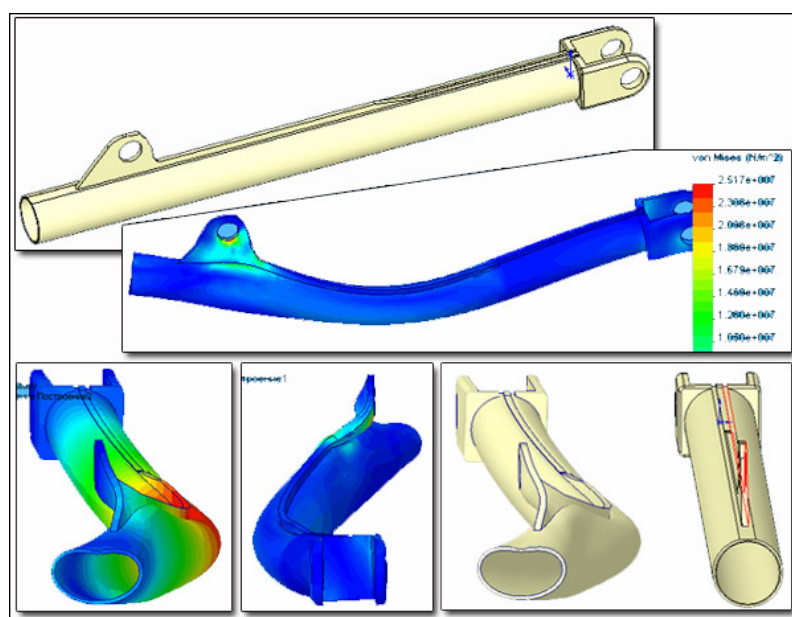


Рис. 17.2 Моделирование цилиндра манипулятора в *COSMOSXpress*

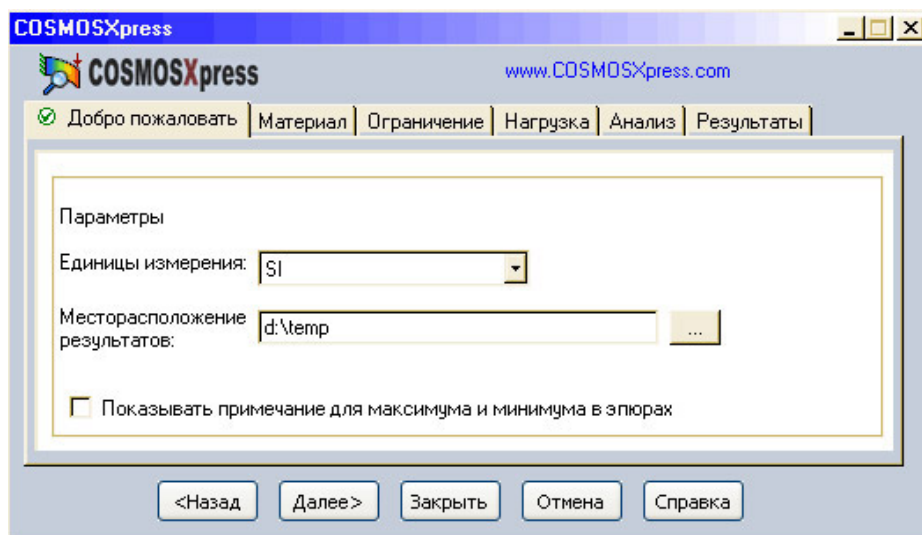


Рис. 17.3 Мастер конечно-элементного анализа в *COSMOSXpress*

COSMOSXpress выполнен в виде программы-помощника, подсказывающей пользователю последовательность действий, необходимых для подготовки расчетной модели и проведения анализа.

Базовые возможности *SolidWorks* позволяют провести качественный анализ работы механизмов. Наряду со стандартными условиями сопряжения в *SolidWorks* обеспечиваются и специальные – сопряжения типа «кулачок», «редуктор» (рис. 17.4–17.6). Кроме того, может быть указано минимальное и максимальное расстояние между объектами конструкции.

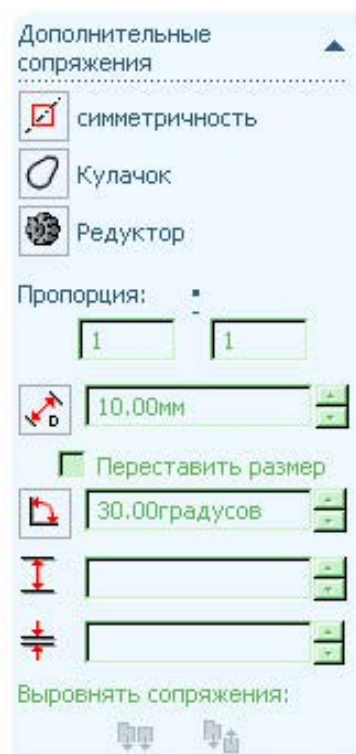


Рис. 17.4 Иллюстрация симметрии объектов

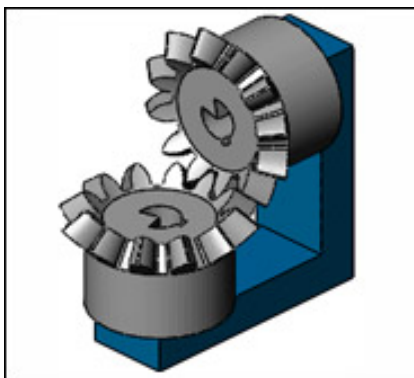


Рис. 17.5 Иллюстрация сопряжения типа «редуктор»

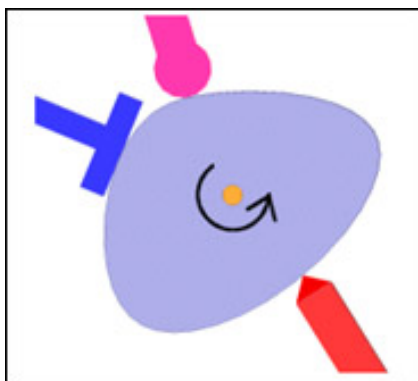


Рис. 17.6 Иллюстрация сопряжения типа «кулачок»

Сопряжения редуктора вызывают вращение двух компонентов относительно друг друга вокруг выбранной оси.

Допустимые выбираемые элементы для сопряжений редуктора включают цилиндрические и конические грани, оси и линейные кромки. Можно определить сопряжение любых двух компонентов, для которых требуется выполнить вращение друг относительно друга. Не обязательно выполнять сопряжение двух зубчатых колес.

Аналогично другим типам сопряжений сопряжения редуктора не предотвращают интерференцию или конфликты между компонентами. Для предотвращения интерференции используют специальные инструменты определения конфликтов или проверки интерференции компонентов.

Сопряжение толкателя клапана – это тип сопряжения касательности или совпадения. С его помощью можно сопрягать цилиндр, плоскость или указывать ряд таких касательных вытянутых поверхностей, какие могут быть на кулачке. Можно сделать профиль кулачка из линий, дуг и сплайнов, пока они являются касательными и составляют замкнутый контур. На рис. 17.6 показаны три толкателя, которые остаются в контакте с кулачком при его вращении.

В качественном анализе конструкций можно определить конфликты с другими компонентами при перемещении или вращении компонента. Программа может определить конфликты со всей сборкой или с выбранной группой компонентов. Можно найти конфликты или для выбранного компонента, или для всех компонентов, которые перемещаются в результате сопряжений с выбранными компонентами.

Физическая динамика – это параметр в меню «Определение конфликтов», который позволяет увидеть реалистичное движение компонентов сборки (рис. 17.7).

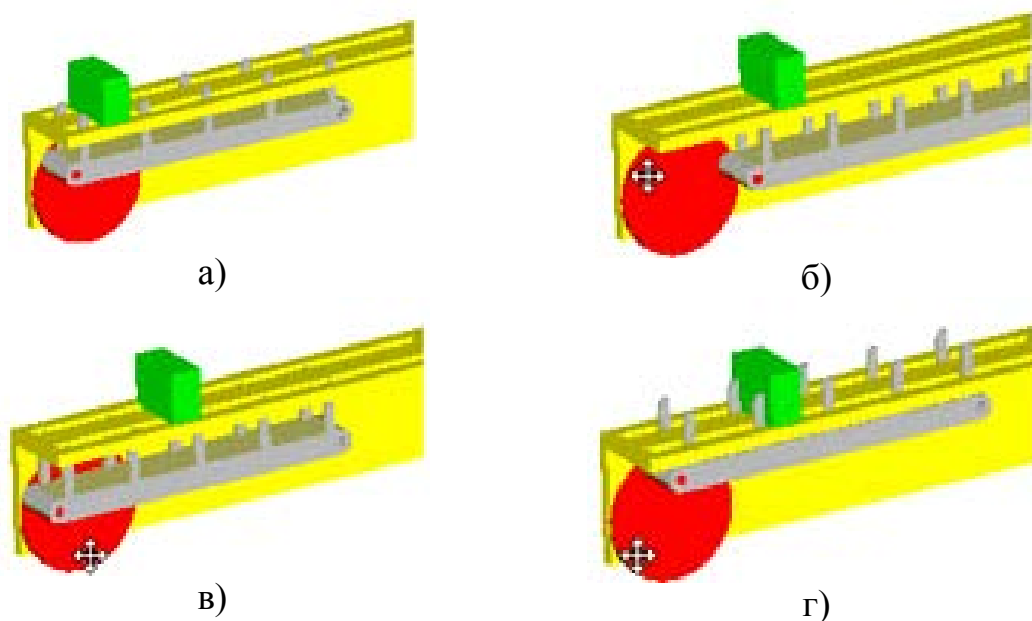


Рис. 17.7 Реализация движения конвейера

Если физическая динамика включена, во время перетаскивания компонент сообщает некоторое усилие всем смежным компонентам. Следствием этого является перемещение или вращение затрагиваемых компонентов в пределах допустимых степеней свободы. В результате взаимодействия перетаскиваемый компонент начинает вращаться в пределах допустимых степеней свободы или скользить по неподвижному компоненту или по компоненту с частично ограниченным набором степеней свободы, позволяя продолжить перетаскивание.

Физическая динамика распространяется на всю сборку.

Для моделирования простых силовых нагрузений базовый блок располагает инструментами физического моделирования, к которым относится линейный двигатель, двигатель вращения, пружина и сила тяжести (гравитация) (рис. 17.8). Физическое моделирова-

ние объединяет элементы моделирования с инструментами *SolidWorks*, например сопряжениями и физической динамикой, для перемещения компонентов по сборке. Результаты физического моделирования можно наблюдать на экране монитора или сохранить в видеоформате.

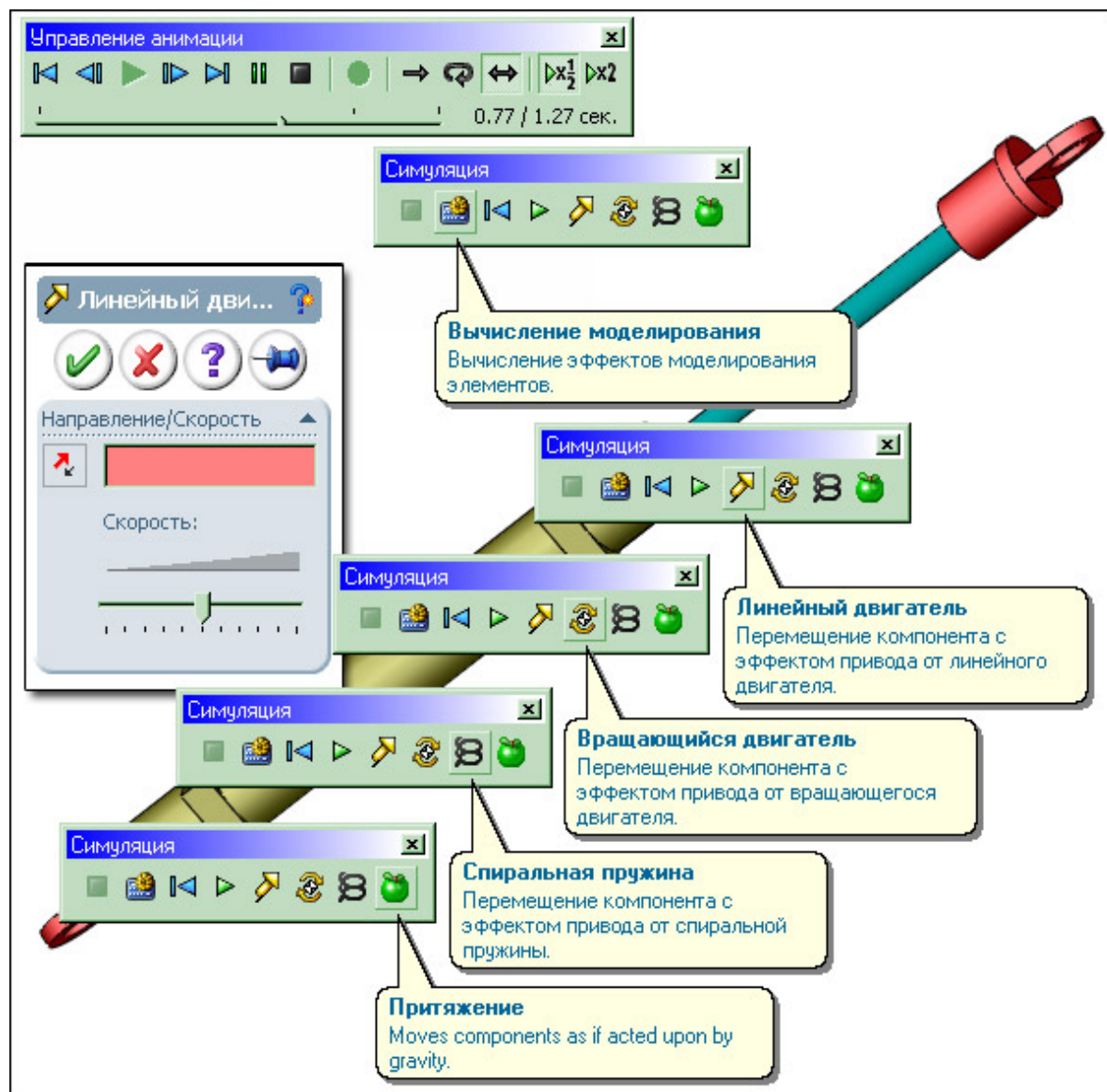


Рис. 17.8 Инструменты симуляции движения – физической динамики

Записанное моделирование будет действующим, пока сборка не будет изменена. Если удалить, погасить, переместить, заменить, зафиксировать, освободить или изменить компонент, включенный в записанное моделирование, оно перестанет быть действующим. Физическое моделирование использует параметр «Чувствительность» физической динамики, чтобы проверить наличие конфликтов.

При всей кажущейся простоте инструментов они являются достаточно мощным средством анализа конструкций технических си-

стем, т.к. используют реальные сведения о массово-габаритных и физических свойствах элементов конструкции, а также ограничения степеней свободы в сочленениях элементов.

Более детальное моделирование систем проводят с применением модулей инженерного анализа, входящих в программный комплекс *COSMOSWorks*.

17.2 Комплекс инженерного моделирования *COSMOS. COSMOSWorks*

COSMOSWorks – мощный и простой в использовании программный комплекс для проведения инженерных расчетов, полностью интегрированный в среду *SolidWorks* (табл. 17.1).

Таблица 17.1

Модули *COSMOSWorks*

<i>COSMOSWorks Professional</i>	<i>COSMOSWorks Advanced Professional</i>
Линейная статика, расчет напряжений и деформаций Частотный анализ Анализ устойчивости Расчет сборок с учетом контакта Тепловой анализ	Нелинейные задачи Анализ долговечности
<i>COSMOSMotion</i>	<i>COSMOSFloWorks</i>
Кинематический и динамический анализ механизмов	Вычислительная аэрогидродинамика
Дополнительные возможности	
Трансляторы в CAE-системы, пополняемая библиотека материалов	

COSMOSWorks имеет широкий спектр специализированных решателей, позволяющих провести анализ большинства встречающихся задач для деталей и сборок:

- линейный статический анализ;
- определение собственных форм и частот;
- расчет критических сил и форм потери устойчивости;
- тепловой анализ;
- совместный термостатический анализ;
- расчет сборок с использованием контактных элементов;
- нелинейные расчеты;

- оптимизация конструкции;
- расчет электромагнитных задач;
- определение долговечности конструкции;
- расчет течения жидкостей и газов.

Инструменты автоматического анализа

Используя проверенную технику генерации конечно-элементной сетки, *COSMOSWorks* позволяет быстро и качественно проводить анализ конструкций любой сложности, включая сборки, изделия из листового металла и т.д.

Анализ сборок

COSMOSWorks обеспечивает автоматическую генерацию сетки с объединением различных компонентов в одну модель, анализ сборок с учетом разъединения и трения, анализ сборок с учетом больших нелинейных деформаций при контакте поверхностей и трении, анализ интерференции компонентов.

Пользователь может использовать библиотеку материалов *SolidWorks* и собственные материалы *COSMOSWorks*. Если в сборке указаны физико-механические характеристики, то они автоматически добавляются в расчетную модель. При необходимости можно добавлять свои или редактировать существующие материалы. В библиотеке *COSMOSWorks* можно задать материалы с изотропными, анизотропными, гиперупругими, нелинейными упругими свойствами. Для решения задач в пластической зоне имеются соответствующие модели материалов. Пользователь может обратиться к *Web*-ресурсу *MatWeb*, содержащему характеристики более 50 тысяч различных материалов.

Нагрузки и граничные условия

Нагрузки и граничные условия могут быть приложены в глобальной или локальной системе координат (рис. 17.9). *COSMOSWorks* поддерживает ортогональную, цилиндрическую и сферическую системы координат. Нагрузки и граничные условия включают:

- принудительные перемещения узлов;
- постоянные и переменные силы и моменты;
- постоянное и переменное давление;
- подшипниковые нагрузки;
- удаленные нагрузки и закрепления;

- абсолютно жесткое соединение компонентов в сборке;
- ускорения и гравитацию;
- тепловые нагрузки;
- температуру;
- тепловые потоки;
- конвекцию;
- радиацию;
- источники тепла, в том числе и объемные;
- граничные условия в местах контакта.

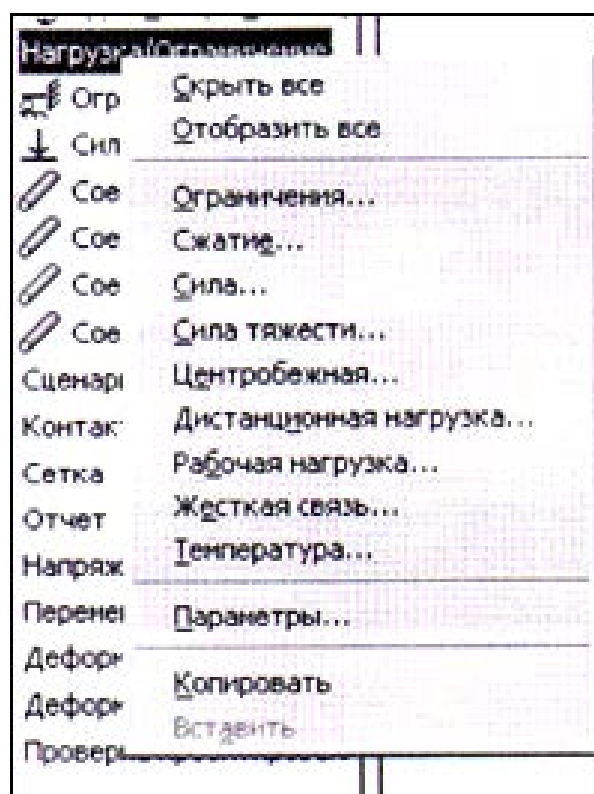


Рис. 17.9 Указание граничных условий и нагрузок

Стандартные действия по ограничению степеней свободы объединены в группы, описанные общетехническими терминами. Интеллектуальная система селектирования объектов автоматически предлагает пользователю наиболее рациональное граничное условие. В *COSMOSWorks* можно определить различные виды нагружения, начиная от стандартных для всех систем силы, моментов, распределенных нагрузок (как постоянных, так и переменных), заканчивая специальными. Ко второй группе можно отнести контактную нагрузку в паре «вал–отверстие»; учет осей, шпилек, болтов без их наличия в расчетной модели. При этом для болтового соединения можно учитывать усилие затяжки, что дает более точный результат.

Результаты и визуализация

Для визуализации результатов *COSMOSWorks* поддерживает трехмерную графику, основанную на *OpenGL* (рис. 17.10). Постпроцессор позволяет просматривать следующие данные, полученные при расчете конструкции:

- напряжения, относительные и абсолютные деформации, деформированное состояние, энергию деформации, силы реакции;
- собственные формы и частоты колебаний;
- температуру, градиенты температуры, тепловые потоки;
- динамическое отображение сечений и вывод изоповерхностей;
- коэффициент безопасности (его позволяет определять мастер проверки);
- историю оптимизации конструкции;
- графическое отображение изменения параметров при *P*-методе.

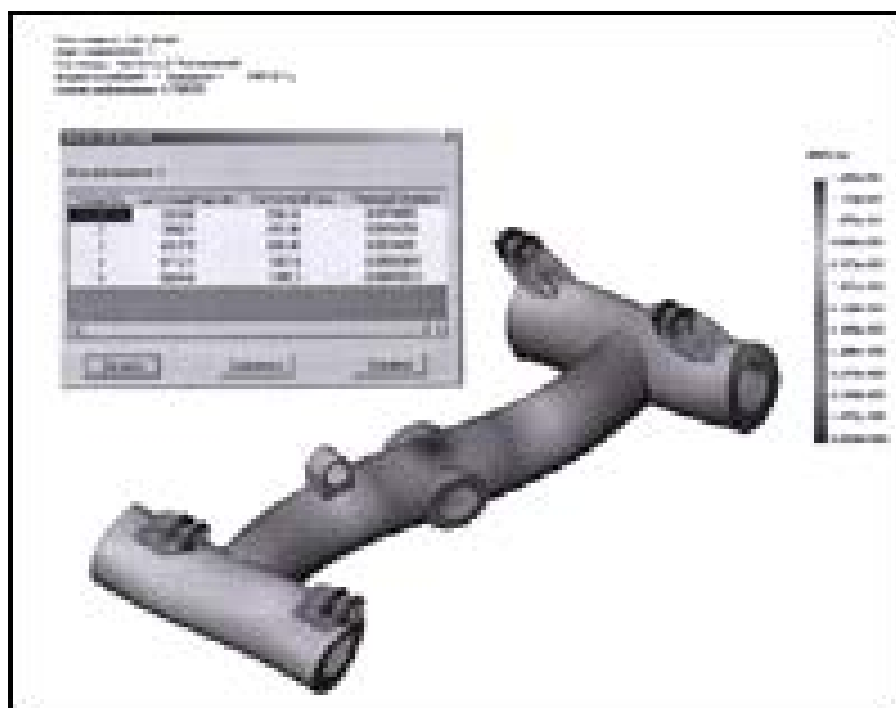


Рис. 17.10 Визуализация собственных частот конструкции

COSMOSWorks поддерживает форматы: *HTML* (для генерации отчетов), *avi*, *vrml*, *xgl*, *bitmaps*, *jpeg*.

В *COSMOSWorks 2005* появилось еще два новых решателя. Один из них рассчитывает долговечность, определяет повреждаемость конструкции и т.д. Другой позволяет решить задачу падения объекта на абсолютно жесткую поверхность. При этом пользовате-

лю достаточно выбрать высоту и скорость/ускорение падения. В результате расчета определяется напряженно-деформированное состояние конструкции как в момент удара, так и после него.

Данные, определенные в *COSMOSWorks*, не являются «закрытыми». Конечно-элементную сетку, нагрузки, граничные условия и так далее можно передать в наиболее распространенные CAE-системы: *Nastran* (*.dat), *ANSYS* (*.ans), *IDEAS* (*.unv) и др.

17.3 COSMOSMotion

Модуль *COSMOSMotion* предназначен для кинематического и динамического расчета системы. Так же, как и *COSMOSWorks*, полностью интегрированный в *SolidWorks*, он наилучшим образом подходит для решения проектировочных задач. Пример функционирования модуля *COSMOSWorks* приведен на рис. 17.11.

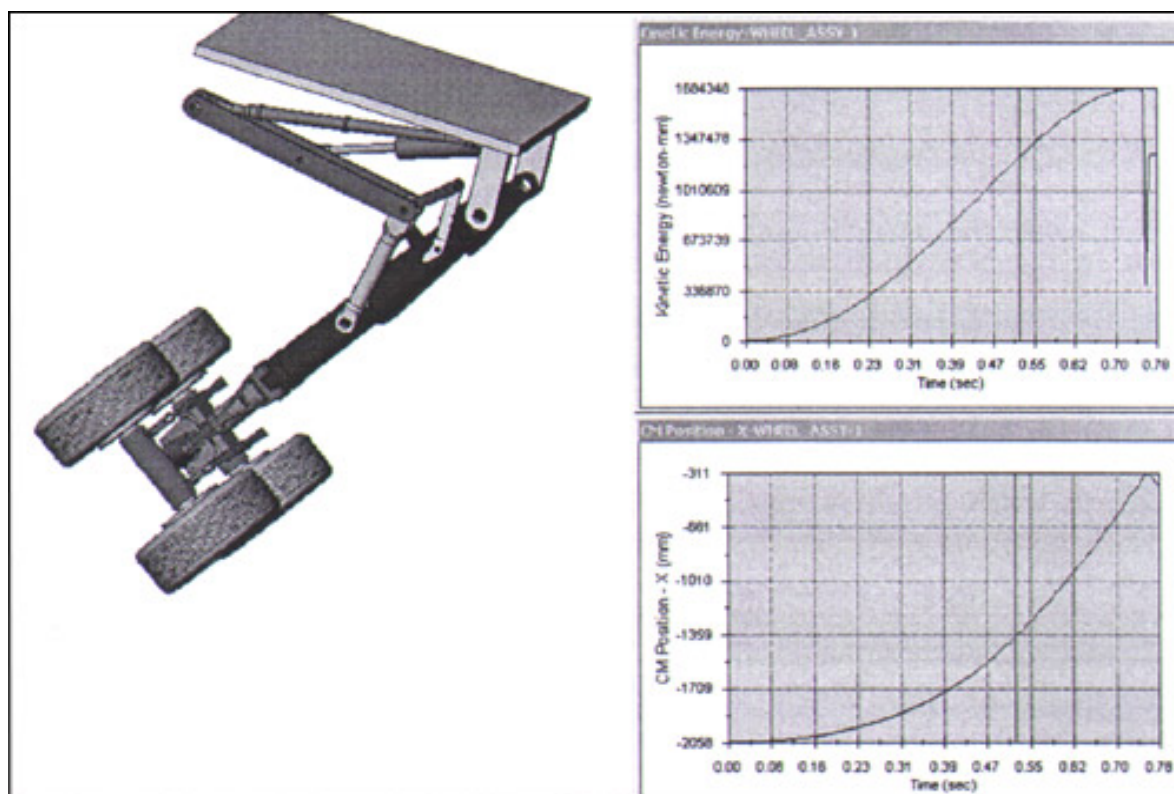


Рис. 17.11 Пример кинематического анализа

COSMOSMotion работает со сборками *SolidWorks*. При подключении этого модуля можно в автоматическом режиме распознать компоненты сборки и сопряжения. При этом *COSMOSMotion*, основываясь на данных анализа, создает звенья и шарниры механизма. Модуль самостоятельно определяет, какие звенья будут не-

подвижны, а какие имеют степени свободы. Несмотря на такой подход, пользователь в любой момент может добавить любой шарнир или отредактировать существующий (например, добавить трение). Контакт может определяться следующими способами: перемещением точки по заданной кривой, движением одной кривой по другой, контактом с учетом реальных поверхностей.

Результаты (скорости, ускорения, положения центров масс звеньев и другие характеристики) определяются с помощью графиков или в табличном виде. При этом перемещение по оси абсцисс (оси времени) динамически сопровождается изменением положения механизма.

Данные из *COSMOSMotion* можно передать в *COSMOSWorks* для проведения прочностных расчетов.

17.4 COSMOSFloWorks

COSMOSFloWorks предназначен для моделирования течений жидкостей и газов при решении различных задач (рис. 17.12). Полностью интегрированный в систему *SolidWorks*, *COSMOSFloWorks* позволяет проводить расчеты любой сложности без какой-либо дополнительной передачи данных между системами. Современные технологии позволяют минимизировать время задания исходных данных, проведения расчетов и анализа результатов и делают аэрогидродинамическое моделирование доступным инженерами.

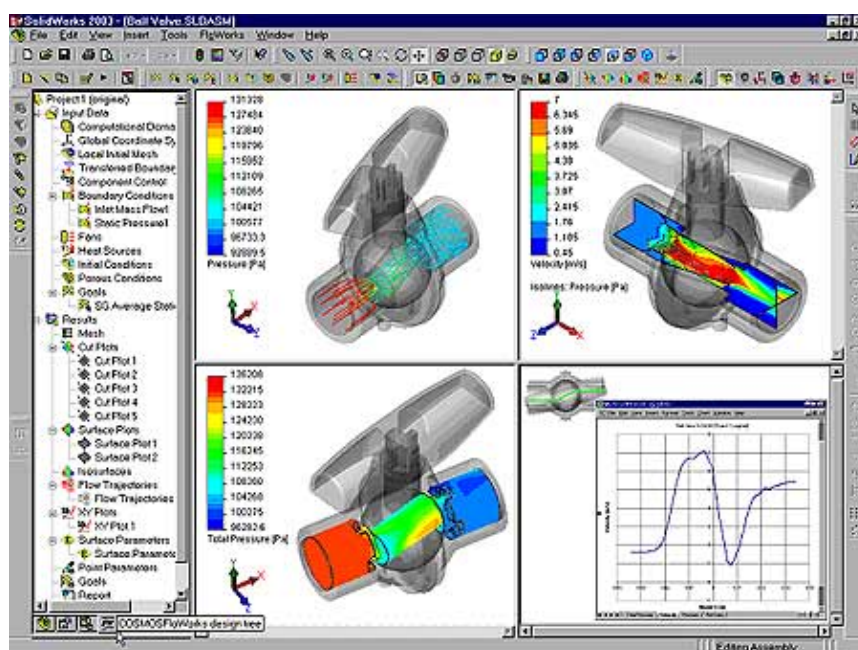


Рис. 17.12 Пример расчетов в среде *COSMOSFloWorks*

Применительно к автомобильной промышленности областями применения *COSMOSFloWorks* могут быть:

- обтекание автомобилей;
- расчет течения в салоне и подкапотном пространстве;
- проектирование радиаторов;
- течения в клапанах, форсунках и т.д.;
- определение параметров гидро- и пневмосистем.

Результаты расчетов выводятся в окне *SolidWorks* на любой плоскости или поверхности в виде цветовых эпюр, векторов и изолиний, с помощью изоповерхностей. Имеется возможность создания трехмерных траекторий течений. При необходимости результаты расчетов можно анимировать.

Перечень всех возможностей рассматриваемого программного комплекса далеко выходит за рамки принятого формата данной работы. На сегодняшний день комплекс *SolidWorks-COSMOS* является единственным интегрированным в один программный интерфейс и полностью русифицированным. Владение подобным инструментом проектного анализа – тот уровень, который обеспечивает современному инженеру-автомобилестроителю реализацию всего спектра его профессиональных обязанностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мюррей, Д. *SolidWorks* / Д. Мюррей – М. : ЛОРИ, 2001. – 458 с.
2. Абашеев, О. Комплексный инженерный анализ с использованием семейства программных продуктов COSMOS / О. Абашеев [Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.solidworks.ru
3. Справочная система *SolidWorks*.
4. Девятов, С. Программы семейства COSMOS – универсальный инструмент конечно-элементного анализа / С. Девятов // Электронный журнал *CADmaster*. – № 1 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.cadmaster.ru
5. Девятов, С. Программы семейства COSMOS – универсальный инструмент конечно-элементного анализа (серия вторая) / С. Девятов // Электронный журнал *CADmaster*. – № 2 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.cadmaster.ru
6. Алямовский, А. А. *SolidWorks/COSMOSWorks* / А. А. Алямовский. – М. : ДМК Пресс, 2004. – 432 с.