1 Die reellen Zahlen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Ansatz: nicht explizite Konstruktion von $\mathbb{R}$,
sondern sammlung charakteristischer Eigenschaften von $\mathbb{R}$

Erinnerung: $\mathbb{R}$ ist ein Körper

Def. 1.1: [Anordnungsaxiome]

Ein Körper K heißt angeordnet, wenn es eine Teilmenge $P \subseteq K$, den sog. Positivbereich, mit den folgenden Eigenschaften gibt:

A1) P, $-P$ und $\{0\}$ sind paarweise disjunkt (wobei $-P = \{x \in K : -x \in P\}$)

A2) $P \cup -P \cup \{0\} = K$

A3) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P, \; x \cdot y \in P$

Die Elemente aus P heißen positiv.

Die Elemente aus $-P$ heißen negativ.

Def. 1.2.: [Ordnungsrelationen]

In einem angeordneten Körper K, mit Positivbereich, definieren wir für alle $x, y \in K$:

- $x < y$ gdw $y - x \in P$
- $x \leq y$ gdw $x < y$ oder $x = y$
- $x > y$ gdw $x - y \in P$
- $x \geq y$ gdw $x > y$ oder $x = y$

Bem.: $x > 0$ gdw $x \in P$

Satz 1.3: [Eigenschaften]

Sei K ein angeordneter Körper und $x, y, z, w \in K$. Dann gilt

a) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)

b) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

c) $x \leq y$ oder $y \leq x$ (Linearität)

d) $x \leq y,\ z \leq w \Rightarrow x + z \leq y + w$ (Verträglichkeit mit „+")

e) $x < y,\ z > 0 \Rightarrow xz < yz$ (Verträglichkeit mit „·")

$x < y,\ z < 0 \Rightarrow xz > yz$ ⚠

f) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$

$x > y \Rightarrow -x < -y$

$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

(Übergang zum ....)

Bew.: (Teilweise)

ad a) Angenommen, es wäre $x \neq y$.

Aus $x \preceq y$ folgt $\boxed{y - x \in P}$ und aus $y \preceq x$ Folgt $\boxed{x - y \in P}$ und somit $\boxed{y - x = -(x-y) \in P}$ was ein Wiederspruch zu A1) (Disjunktheit) ist.

Die Annahme ist also falsch und wir haben $x = y$ gezeigt.

ad b) Wenn $x = y$ oder $y = z$, dann ist die Folgerung sofort klar.

Für $x \neq y$ und $y \neq z$ gilt $y - x \in P$
und $z - y \in P$,

aber insbesondere $(z-y) + (y-x) = z - x \in P$ und damit $z > x$.

Bew.:
- Eigenschaften a) - c) zeigen, dass „ $\leq$ " eine Lineare Ordnungsrelation bildet.
- Eigenschaft e) führt oft zu hässlichen Fallunterscheidungen.
- Sei $x \neq 0$. Dann gilt für $\left\{ \begin{matrix} x < 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\}$ wg. e): $\begin{matrix} x^2 > 0 \\ x^2 > 0. \end{matrix}$
  Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.
- Aus $1 > 0$ folgt $-1 < 0$ und somit kann $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper sein. (denn es wäre auch $i^2 = -1 > 0$ s.o.)

Aus $0<1$ folgt (in jedem angeordneten Körper K)

$$0<1<1+1<1+1+1<\ldots<\underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{-mal}}$$

womit all diese Zahlen verschieden sind. Es gilt also

$$\mathbb{N} \subseteq K$$

und wegen der Körperaxiome auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \subseteq K$.
Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ selbst ein angeordneter Körper, und zwar der kleinste den es gibt. Der Positivbereich ist $\mathbb{Q}_{>0} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Zwischenstand: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind angeordnete Körper.
Wo ist jetzt der Unterschied? Vollständigkeit!

Def. 1.4.: Sei K ein angeordneter K und $M \subseteq K$.
Ein Element $x \in M$ heißt $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von M,
wenn gilt $\left\{\begin{matrix} y \leq x \\ y \geq x \end{matrix}\right\}$ für alle $y \in M$.

Bem.:
- Wenn ein Minimum/Maximum existiert, so ist es eindeutig.
- Wir schreiben $\max(M)$ bzw. $\min(M)$

Bsp.: Sei $K = \mathbb{Q}$

i) $M_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 2\}$ hat kein Minimum,
aber $\max(M_1) = 2$.

ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$ hat kein Maximum, weil es für jedes $x \in M_2$ ein $y \in M_2$ gibt mit $x<y<2$, zB.
$y =$

iii) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\}$ hat kein Maximum, weil für jedes $x \in M_3$ gilt $x^2 = 2$ oder $x^2 < 2$. Aber $x^2 = 2$ hat keine Lsg. in $\mathbb{Q}$ und für $x^2 < 2$ bilden wir (wie oben) ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ und $x^2 < 2$

iv) $M_4 = \mathbb{Z}$ hat kein Maximum, weil wir für jedes $z \in M_4$ ist $z + 1 > z$ und $z + 1 \in M_4$

Def. 1.5.: Sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$.

Die Menge M heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $x \in K$ (!) gibt mit $y \leq x$ für alle $y \in M$. Das Element x heißt dann eine obere Schranke von M.

Ein Element $s \in K$ heißt kleinste obere Schranke (Supremum, kurz $\sup(M)$), wenn für jede andere obere Schranke x von M gilt:

$$s \leq x.$$

Analog definieren wir: nach unten beschränkt
unterere Schranke
größte untere Schranke
(Infimum | kurz: $\inf(M)$)

Die Menge M heißt beschränkt, wenn sie nach unten und oben beschränkt ist

Bsp: (Fortgesetzt)

- M_1 hat als obere Schranken $2, 3, 4, 10^{100}, \dots$ und $\sup(M_1) = 2$. M_1 hat keine untere Schranke.
- M_2 hat als obere Schranken $24, 30, 40, 10^{100}, \dots$ und $\sup(M_2) = 2$ (obwohl kein Max. existiert)
- M_3 hat als obere Schranken $1.5, 4, 10^{100}, \dots$ aber es gibt keine kleinste obere Schranke. Wir können uns mit rationalen Zahlen beliebig von oben an $\sqrt{2}$ annähern, aber keine davon ist die kleinste rationale Zahl oberhalb von $\sqrt{2}$.
- M_4 später ...

Bem:
- Wenn M ein Maximum hat, dann ist es auch das Supremum. Allerdings gibt es Mengen ohne Maximum aber mit Supremum.
- In rationalen Zahlen gibt es Mengen mit oberen Schranken, aber ohne Supremum.
  Das sind die „Lücken", die die reellen Zahlen schließen.

Def. 1.6.:

Ein angeordneter Körper K heißt vollständig, wenn jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum in $\mathcal{U}$ besitzt.

Bem.: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig. (Bsp. M_3)

Satz 1.7: (ohne Beweis)

Es gibt genau einen vollständigen, angeordneter Körper. Dieser ist $\mathbb{R}$.

Bsp.: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, denn $\sqrt{2} = \sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$.

Satz 1.8: Für $x, y \in \mathbb{R}$

a) zu $0 < x < y$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$

(archimedisches Axiom)

b) zu $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$

c) zu $x \in \mathbb{R}$ existiert $m = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$

(Gaußklammer $[\ ]$, „Floor" $\lfloor\ \rfloor$)

Lemma: i) $\mathbb{Z}$ hat keine obere Schranke in $\mathbb{R}$.

ii) $\mathbb{Z}$ hat keine untere Schranke in $\mathbb{R}$.

Bew.: zu i) Angenommen, $s \in \mathbb{R}$ sei das Supremum von $\mathbb{Z}$. Dann wäre $z-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{Z}$. Es gäbe also ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > s-1$. Allerdings wäre dann $n+1 > s$ und s doch keine obere Schranke von $\mathbb{Z}$. $\square$

zu ii) analog

Bew.: (von Satz 1.8)

ad a) wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x}$.

Ein solches existiert stets ag. Lem. i).

ad b) wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$.

ad c) Sei $M = \{ z \in \mathbb{Z} : z \leq x \}$

Dann gilt:

- M ist nicht leer. (Lem. ii)
- Für jedes $z \in M$:

  Entweder ist z schon Maximum von M oder $z+1$ ist auch in M.

Angenommen, M hätte kein Maximum, dann wäre nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $\mathbb{Z} \subseteq M$.

Dann wäre M aber nicht beschränkt (Lem. i) im Wiederspruch zu Beschränkung durch x. $\square$

Def. 1.9: (Betragsfuktion)

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{sonst.} \end{cases}$$

der Betrag von x.

Satz 1.10: (Eigenschaften)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|x| \geq 0$ sowie $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(positiv Semidefinit)

b) $|xy| = |x| \cdot |y|$

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Δ-Ungleichung)

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

e) $\underbrace{\big||\overset{4}{x}| - |\overset{-3}{y}|\big|}_{1} \leq \underbrace{|\overset{4}{x} - \overset{-(-3)}{y}|}_{7}$

Bew.: a) – c) Ü

d) Wende b) auf $\frac{x}{y} \cdot y$ an.

e) Aus c) folgt $|x+y| - |y| \leq |x|$

Setze $x = x - y$ und erhalte

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Vertausche von x und y führt zu

$$|y| - |x| \leq |x - y|$$

Zusammen $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ $\square$