(1) $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2 - 8 \cdot \ln(x)$

$f'(x) = 2x - 8 \cdot \frac{1}{x} = 2x - \frac{8}{x}$

$f''(x): \quad \left(\frac{8}{x}\right)' \Rightarrow \left(8x^{-1}\right)'$ $\quad \Big| \; \left(x^{-1}\right)' \Rightarrow -n \cdot x^{n-1}$

$\Rightarrow 8 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1}$

$= -8x^{-2} \Rightarrow -\frac{8}{x^2}$

$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2}$

f NEW
f' NEW
f'' NEW

Extrema:

$f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 2x - \frac{8}{x} = 0 \quad | \cdot x$$

$$2x^2 - 8 = 0 \quad | +8$$

$$2x^2 = 8 \quad | :2$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$$

$$x = \sqrt{4}$$

$$f''(\sqrt{4}) = 2 + \frac{8}{\sqrt{4}^2} = 2 + \frac{8}{4} = 4$$

$4 > 0 \rightarrow f''(\sqrt{4}) = \text{konvex}$

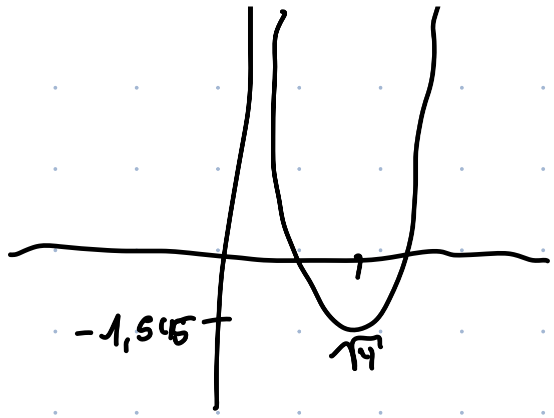
$\hookrightarrow \sqrt{4} = \text{lokales Minimum}$

$$f(\sqrt{4}) = 4 - 8 \cdot \ln(\sqrt{4}) \approx -1{,}545$$

f hat genau zwei Nullstellen, da f eine nach oben geöffnete Parabel mit einem lokalen Min an $\sqrt{4}$, das unterhalb der x-Achse bei $-1{,}545$ liegt. Somit schneidet die Parabel die x-Achse an genau zwei Stellen.

$$f(x) = 0$$

$$\rightarrow \quad x^2 - 8 \cdot \ln(x) = 0$$



Newton-Verfahren:

$$x_0 = 2{,}5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}5 - \frac{2{,}5^2 - 8 \cdot \ln(2{,}5)}{2 \cdot 2{,}5 - \frac{8}{2{,}5}} = 3{,}1$$

$$= 3{,}1 - \frac{3{,}1^2 - 8 \cdot \ln(3{,}1)}{2 \cdot 3{,}1 - \frac{8}{3{,}1}} = 2{,}95$$

$$= 2{,}95 - \frac{2{,}95^2 - 8 \cdot \ln(2{,}95)}{2 \cdot 2{,}95 - \frac{8}{2{,}95}} = 2{,}9348 \approx \underline{\underline{2{,}94}}$$

Nst bei 2,94

② $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \right)$

a) $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Konvergenzintervall $= [0]$

Konvergiert nur in $x_0 = 0$

b) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' \longrightarrow (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \rightarrow$ Potenzregel

$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \Rightarrow -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1)$

$= \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad \Big| \cdot x$$

(mit x multiplizieren um x^{n-1} in die x^n Form zu bringen)

$$x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\hookrightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

c) $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

Zweite Ableitung von $\frac{1}{1-x}$:

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow f'((1-x)^{-2}) \cdot g'(1-x)$$

$$\Rightarrow \; -2\cdot(1-x)^{-3}\cdot(-1)$$

$$\Rightarrow \; \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\left(n x^{n-1}\right)' = n\cdot(n-1)\,x^{n-2}$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(n-1)\,x^{n-2} \qquad \Big|\cdot x^2$$

$$\frac{2x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(n-1)\,x^{n}$$

Wir wollen die Form n^2x^n erhalten, aber $n\cdot(n-1)$ enspricht nicht ganz n^2.
Wir müssen n^2 zerlegen:

$$n^2 = n\cdot(n-1)+n$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n-1)\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

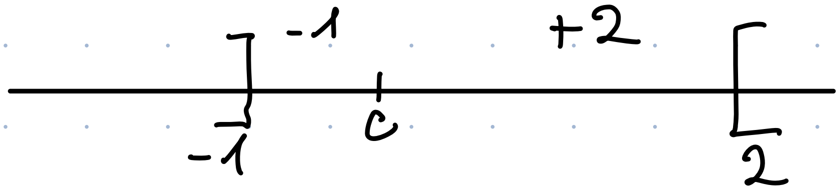
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

③

a) Falsch, manch potenzreihen konvergieren nur in 0.

b) Falsch, da bei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ bei x nichts abgezogen wird, somit ist $x_0 = 0$ und der Konvergenzradius mus in beide richtungen gleich sei was hier nicht der Fall ist.

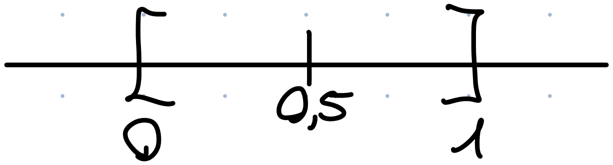
Das Konvergenzintervall würde wie folgt aussehen:



↯

c) Falsch, es kommt immer auf das Konvergenzintervall an. Wenn $-x_0$ innerhalb des Intervalles liegt dann Konvergiert $S(x)$ au für $x = -x_0$. Falls nicht, dann konvergiert es auch nicht, also ist diese Aussage Falsch.

Bsp. $x_0 = 0{,}5$; $R = 0{,}5$



$-x_0 = -0{,}5$

↳ liegt nicht im Intervall daher auch keine Konvergenz

d)

5. $f(x) = x + (\ln x)^2$

$$f'(x) = 1 + 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2\ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

↳ Quotientenregel

$$f''(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} + 2\ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

↳ Produktregel

$$f'''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (2 - 2\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-2 - 2 \cdot (2 - 2\ln x)}{x^3}$$

$$= \frac{-6 + 4\ln x}{x^3}$$