

1 Die reellen Zahlen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Ansatz: nicht explizite Konstruktion von \mathbb{R} ,
sondern Sammlung charakteristischer
Eigenschaften von \mathbb{R}

Erinnerung: \mathbb{R} ist ein Körper

Def. 1.1: [Anordnungsaxiome]

Ein Körper K heißt angeordnet,
wenn es eine Teilmenge $P \subseteq K$,
den sog. Positivbereich, mit den
folgenden Eigenschaften gibt:

A1) $P, -P$ und $\{0\}$ sind paarweise disjunkt
(wobei $-P = \{x \in K : -x \in P\}$)

A2) $P \cup -P \cup \{0\} = K$

A3) $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P, x \cdot y \in P$

Die Elemente aus P heißen positiv.

Die Elemente aus $-P$ heißen negativ.

Def. 1.2.: [Ordnungsrelationen]

In einem angeordneten Körper K , mit Positivbereich, definieren wir für alle $x, y \in K$:

- $x < y$ gdw $y - x \in P$
- $x \leq y$ gdw $x < y$ oder $x = y$
- $x > y$ gdw $x - y \in P$
- $x \geq y$ gdw $x > y$ oder $x = y$

Bem.: $x > 0$ gdw $x \in P$

Satz 1.3.: [Eigenschaften]

Sei K ein angeordneter Körper und $x, y, z, w \in K$. Dann gilt

- a) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
- b) $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)
- c) $x \leq y$ oder $y \leq x$ (Linearität)
- d) $x \leq y, z \leq w \Rightarrow x+z \leq y+w$ (Verträglichkeit mit „+“)
- e) $x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz$ (Verträglichkeit mit „·“)
 $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$
- f) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ (Übergang
 $x > y \Rightarrow -x < -y$ zum \dots)
 $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$

Bew.: (teilweise)

ad a) Angenommen, es wäre $x \neq y$.

Aus $x \leq y$ folgt $y - x \in P$ und aus $y \leq x$ folgt $x - y \in P$ und somit $y - x = -(x - y) \in P$ was ein Widerspruch zu 11) (Disjunktheit) ist.

Die Annahme ist also falsch und wir haben $x = y$ gezeigt.

ad b) Wenn $x = y$ oder $y = z$, dann ist die Folgerung sofort klar.

Für $x \neq y$ und $y \neq z$ gilt $y - x \in P$
und $z - y \in P$,

aber insbesondere $(z - y) + (y - x) = z - x \in P$ und damit $z > x$.

Bew.: • Eigenschaften a) - c) zeigen, dass „ \leq “ eine lineare Ordnungsrelation bildet.

• Eigenschaft e) führt oft zu hässlichen Fallunterscheidungen.

• Sei $x \neq 0$. Dann gilt für $\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ x > 0 \end{array} \}$ u.g. e): $\frac{x^2}{x^2} > 0$. Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.

• Aus $1 > 0$ folgt $-1 < 0$ und somit kann \mathbb{C} kein angeordneter Körper sein. (denn es wäre auch $i^2 = -1 > 0$ s.o.)

Aus $0 < 1$ folgt (in jedem angeordneten Körper K)

$$0 < 1 < 1+1 < 1+1+1 < \dots < 1+\dots+1 \quad |n\text{-mal}|$$

womit all diese Zahlen verschieden sind. Es gilt also
 $\mathbb{N} \subseteq K$

und wegen der Körperaxiome auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \subseteq K$.

Insbesondere ist \mathbb{Q} selbst ein angeordneter Körper, und zwar der kleinste der es gibt. Der Positivbereich ist $\mathbb{Q}_{>0} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Zwischenstand: \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind angeordnete Körper.

Was ist jetzt der Unterschied? Vollständigkeit!

Def. 1.4.: Sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$.

Ein Element $x \in M$ heißt $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ von M , wenn gilt $\begin{cases} y \leq x \\ y \geq x \end{cases}$ für alle $y \in M$.

Bem.: • Wenn ein Minimum/Maximum existiert, so ist es eindeutig.
• Wir schreiben $\max(M)$ bzw. $\min(M)$

Bsp.: Sei $K = \mathbb{Q}$

i) $M_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 2\}$ hat kein Minimum, aber $\max(M_1) = 2$.

ii) $M_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$ hat kein Maximum, weil es für jedes $x \in M_2$ ein $y \in M_2$ gibt mit $x < y < 2$, z.B.
 $y =$

iii) $M_3 = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$ hat kein Maximum, weil für jedes $x \in M_3$ gilt $x^2 = 2$ oder $x^2 < 2$. Aber $x^2 = 2$ hat keine Lsg. in \mathbb{Q} und für $x^2 < 2$ bilden wir (wie aber) ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ und $x^2 < 2$

iv) $M_4 = \mathbb{Z}$ hat kein Maximum, weil wir für jedes $z \in M_4$ ist $z+1 > z$ und $z+1 \in M_4$

Def. 1.5.: Sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$.

Die Menge M heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $x \in K$ (!) gibt mit $y \leq x$ für alle $y \in M$. Das Element x heißt dann eine obere Schranke von M .

Ein Element $s \in K$ heißt kleinste obere Schranke (Supremum, kurz $\sup(M)$), wenn für jede andere obere Schranke x von M gilt:

$$s \leq x.$$

Analog definieren wir: nach unten beschränkt

untere Schranke

größte untere Schranke

(Infimum | kurz: $\inf(M)$)

Die Menge M heißt beschränkt, wenn sie nach unten und oben beschränkt ist

Bsp: (Fortgesetzt)

- M_1 hat als obere Schranken $2, 3, 4, 10^{100}, \dots$
und $\sup(M_1) = 2$. M_1 hat keine untere Schranke.
- M_2 hat als obere Schranken $24, 30, 40, 10^{100}, \dots$
und $\sup(M_2) = 2$ (obwohl kein Max. existiert)
- M_3 hat als obere Schranken $1.5, 4, 10^{100}, \dots$
aber es gibt keine kleinste obere Schranke. Wir können uns mit rationalen Zahlen beliebig von oben an $\sqrt{2}$ annähern, aber keine davon ist die kleinste rationale Zahl oberhalb von $\sqrt{2}$.
- M_4 später...

Bem:

- Wenn M ein Maximum hat, dann ist es auch das Supremum. Allerdings gibt es Mengen ohne Maximum aber mit Supremum.
- In rationalen Zahlen gibt es Mengen mit oberen Schranken, aber ohne Supremum.
Das sind die „Lücken“, die die reellen Zahlen schließen.

Def. 1.6.:

Ein angeordneter Körper K heißt vollständig,

wenn jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum in \mathbb{U} besitzt.

Bem.: \mathbb{Q} ist nicht vollständig. (Bsp. M₃)

Satz 1.7: (ohne Beweis)

Es gibt genau einen vollständigen, angeordneten Körper. Dieser ist \mathbb{R} .

Bsp.: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, denn $\sqrt{2} = \sup \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$.

Satz 1.8: Für $x, y \in \mathbb{R}$

a) zu $0 < x \leq y$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$
(archimedisches Axiom)

b) zu $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$

c) zu $x \in \mathbb{R}$ existiert $m = \max \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$
(Gaußklammer $[]$, „Floor“ $\lfloor \rfloor$)

Lemma: i) \mathbb{Z} hat keine obere Schranke in \mathbb{R} .
ii) \mathbb{Z} hat keine untere Schranke in \mathbb{R} .

Bew.: zu i) Angenommen, $s \in \mathbb{R}$ sei das Supremum von \mathbb{Z} . Dann wäre $s-1$ keine obere Schranke von \mathbb{Z} . Es gäbe also ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > s-1$. Allerdings wäre dann $n+1 > s$ und s doch

keine obere Schranke von \mathbb{Z} . \square

zu ii) analog

Bew.: (von Satz 1.8)

ad a) wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x}$.

Ein solches existiert stets ag. Lem. i).

ad b) wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$.

ad c) Sei $M = \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$

Dann gilt:

- M ist nicht leer. (Lem. ii)

- Für jedes $z \in M$:

Entweder ist z schon Maximum von M oder
 $z+1$ ist auch in M .

Angenommen, M hätte kein Maximum, dann wäre
nach dem Prinzip der vollständigen Induktion
 $\mathbb{Z} \subseteq M$.

Dann wäre M aber nicht beschränkt (Lem. i)
im Widerspruch zu Beschränkung durch x .

\square

Def. 1.9: (Betragsfunktion)

Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$- \quad ^{\wedge} \quad ^{\wedge} \quad \dots \quad > \quad \dots$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{sonst.} \end{cases}$$

der Betrag von x .

Satz 1.10: (Eigenschaften)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|x| \geq 0$ sowie $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 (positiv Semidefinit)

b) $|xy| = |x| \cdot |y|$

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Δ -Ungleichung)

d) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

e) $\underbrace{| |x| - |y| |}_1 \leq \underbrace{|x-y|}_{\neq}$

Bew.: a) - c) (Ü)

d) Wende b) auf $\frac{x}{y} \cdot y$ an.

e) Aus c) folgt $|x+y| - |y| \leq |x|$

Setze $x = x-y$ und erhalte

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

Vertausche von x und y führt zu

$$|y| - |x| \leq |x-y|$$

Zusammen $||x| - |y|| \leq |x-y|$

□