Mathematik II

1. **$\sqrt{2}$ ist irrational**
   Begründen Sie, warum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   Hinweis: Nehmen Sie an, es gilt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist.

2. **(ir)rationale Zahlen**
   Gegeben seien rationale Zahlen p, q und irrationale Zahlen r, s. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   (a) $x = p + q$ ist eine rationale Zahl.
   (b) $y = r + s$ ist eine irrationale Zahl.
   (c) $z = p + r$ ist eine irrationale Zahl.

3. **Mengen malen**
   Bestimmen Sie in den folgenden Fällen jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die den Ungleichungen genügen, und skizzieren Sie diese Mengen auf der Zahlengeraden:

   (a) $\frac{x-1}{x+1} < 1$,
   (b) $x^2 + x + 1 \geq 0$,
   (c) $x^3 - x^2 < 2x - 2$,
   (d) $|1 - x| \leq 1 + 2x$,
   (e) $15x^2 \leq 7x + 2$,
   (f) $|x + 1| + |5x - 2| = 6$,
   (g) $\frac{x|x|}{2} = 8$,
   (h) $x|x| = \frac{1}{2}x^3$,
   (i) $|x - 4| > x^2$.

4. **dreiecks-artige Ungleichungen**
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!
   (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x - y| \leq |x| - |y|$.
   (b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $|x - y| = ||x| - |y||$.
   (c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

5. **inf, min, max, sup**
   Untersuchen Sie die Mengen
   (a) $M = \{x \in \mathbb{R} \colon x = n/(n+1), n \in \mathbb{N}\}$,
   (b) $M = \{x \in \mathbb{R} \colon x = 1/(n+1) + (1 + (-1)^n)/2n, n \in \mathbb{N}\}$,
   (c) $M = \{n^2/2^n \colon n \in \mathbb{N}\}$

   auf Beschränktheit und bestimmen Sie ggf. Infimum, Supremum, Minimum und Maximum.

①

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \Big| \cdot n$$

$$\sqrt{2} \cdot n = m \quad \Big|\ ^2$$

$$2 \cdot n^2 = m^2 \quad \Big\| \begin{array}{l} 2 = \text{teiler von } m \\ m = 2m' \end{array}$$

$$\Rightarrow 2n^2 = (2m')^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = 4m'^2 \quad \Big| : 2$$

$$\Rightarrow n^2 = 2m'^2 \quad \Big\| \begin{array}{l} 2 = \text{teiler von } n \\ n = 2n' \end{array}$$

$$\Rightarrow 2n'^2 = 2m'^2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2m'}{2n'}$$ $\Rightarrow$ nicht vollständig gekürzt

② a) $x = p + q$ = rational

$$x = \frac{\cancel{x}}{2} + \frac{\cancel{x}}{2} = 2\frac{x}{2}$$

b) $y = r + s$ = irrational

$y = e - e = 0$ = rational

c) $z = p + r$ = irrational

$z = p + r \quad \Big| -p$

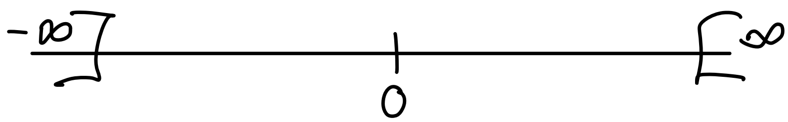
$z - p = r$ (r = irrational)

3 a)

$$\frac{x-1}{x+1} < 1 \quad \Big| \cdot x+1$$

$$x - 1 < x + 1$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$



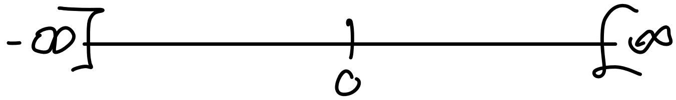
b) $x^2 + x + 1 \geq 0$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{}$$ ↯

$$x_{1,2} = \frac{\quad}{2 \cdot 1}$$

keine Nullstelle

$\hookrightarrow \quad \mathbb{L} = \mathbb{R}$

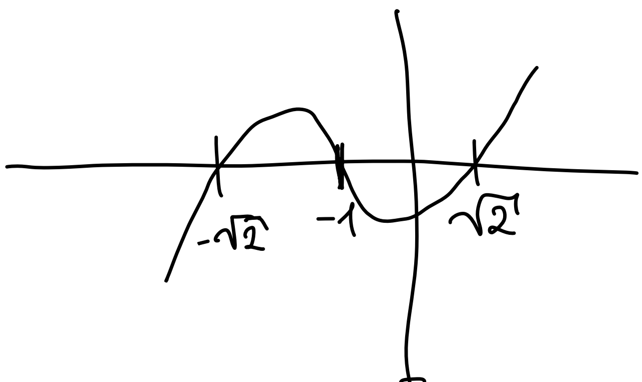


c) $x^3 - x^2 < 2x - 2 \quad | +2 \quad | -2x$

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 < 0$$

$$(x-1)(x^2-2)$$

$$(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$



$$\mathbb{L} = \left]-\infty ; -\sqrt{2}\right[\; ; \; \left]-1 ; \sqrt{2}\right[$$

(4)

a) Falsch, da $|x-y|$ immer ≥ 0 und $|x|-|y|$ nur ≥ 0 ist, wenn $y \leq x$ ist.

b) Falsch, es trifft nur für alle $x,y \geq 0$ zu, da für alle $x,y < 0$ innerhalb der äußeren Betragsstriche auf beiden Seiten unterschiedliche Zahlen rauskommen.

c) Richtig!

(5)

a) $\min(M) = 0{,}5 = \frac{1}{1+1}$

$\inf(M) = 0{,}5$

$\sup(M) = 1$

nach unten beschränkt