① a)

Länge Gummiband	Position Schnecke
1m	$\frac{10}{100}$
2m	$\frac{10}{100} + \frac{10}{200}$
3m	$\frac{10}{100} + \frac{10}{200} + \frac{10}{300}$
n	$\frac{10}{100} + \frac{10}{200} + \frac{10}{300} + \ldots + \frac{10}{n \cdot 100} = \frac{10}{100} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{100}{10}$$

Erinnerung

harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert

b)

gesucht ist nun, kleinstes n so dass

$$\sum^{n} \frac{1}{k} \geq 100$$

$k=1$ $\quad k$

Mit Abschätzungen der harmonischen Reihe wie im Beweis zur Divergenz

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\frac{1}{9}+\ldots$$

erhalten wir $n \geq 2^{100} \approx 1\cdot 10^{30}$

$$\left(\begin{array}{l} 2^{10} = 10^3 \\ 2^{100} = (2^{10})^{10} = (10^3)^{10} = 10^{30} \end{array}\right)$$

c)

Tag	Länge Gummiband	Position Schnecke (relativ)
1	1 m	$\frac{10}{100}$
2	1.1 m	$\frac{10}{100}+\frac{10}{110}$

$3 \qquad (1,1)^2\, m \qquad \frac{10}{100} + \frac{10}{110} + \frac{10}{(1,1)^2 \cdot 100}$

$\vdots$

$n \qquad (1,1)^{n-1}\, m \qquad \frac{10}{100}\left(1 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{(1.1)^2} + \ldots + \frac{1}{(1.1)^{n-1}}\right) = \frac{10}{100} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1.1}\right)^k$

Erinnerung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \begin{cases} \text{konvergiert gegen } \frac{1}{1-q}, & \text{wenn } |q| < 1 \\ \text{divergiert} & |q| > 1 \end{cases}$$

hier:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1.1}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{1.1}} = \frac{1}{1-\frac{10}{11}} = 11 \geq 10, \text{ also erreicht die Schnecke das Ende}}$$

② Reihen I. (Beweisen durch vergleiche mit Reihen die wir kennen)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$ divergiert, weil $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+2}$ für alle $n \geq 4$

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist Minorante) und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

hier auch möglich

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n+n^3}$ konvergiert, weil $\frac{1}{1+n+n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{\cancel{n}}{1+n+n^{\cancel{3}2}} \leq \frac{1}{n^2}$

(durch n im Zähler wird n^3 hier zu n^2)

für alle $n \geq 1$ und $\sum \frac{1}{n^3} + \sum \frac{1}{n^2}$ ist somit eine (konvergente) Majorante.