Praktikum II Sommer 2024

Mathematik II

1. **Rand, Abschluss und Inneres**

   Gegeben sei die Menge

$$M = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \cup]1, 2] \cup (\mathbb{Q} \cap [2, 3]) \subseteq \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ als metrischen Raum mit der Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Rand, Abschluss und Inneres von M.

   (b) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ als metrischen Raum mit der *diskreten* Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \neq y, \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases} \tag{2}$$

   für $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie Rand, Abschluss und Inneres von M.

2. **Metriken aus Normen**

   Betrachten Sie die folgenden Metriken auf $\mathbb{R}^2$:

$$d_0(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \tag{3}$$

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + |x_2 - y_2|}, \tag{4}$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \tag{5}$$

   wobei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Stellen Sie jeweils die 1-Umgebung $U_1(0)$ des Koordinaten-Ursprungs $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ bzgl. dieser Metriken graphisch dar!.

   Hinweis: Die SageMath-Funktion `implicit_plot(f(x,y), (a,b), (c,d))` zeigt alle Punkte im Rechteck $[a, b] \times [c, d]$, die die Gleichung $f(x, y) = 0$ erfüllen.

3. **Metrik-Check**

   Untersuchen Sie die folgende Abbildungen bzgl. der für eine Metrik geforderten Eigenschaften

$$d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 2^{|x-y|} - 1. \tag{6}$$

4. **Pariser Eisenbahnmetrik**

   Sei P ein fester Punkt in $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die folgende Funktion

$$d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \begin{cases} \|X - P\|_2 + \|Y - P\|_2, & \text{falls } X \neq Y, \\ 0, & \text{falls } X = Y, \end{cases} \tag{7}$$

   wobei

$$\|A - B\|_2 = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \tag{8}$$

   den euklidischen Abstand zwischen den Punkten $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ bezeichnet.

   Hinweis: Mit anderen Worten, der Abstand zwischen zwei verschiedenen Punkten X und Y ist der Abstand zwischen X und P plus dem Abstand zwischen P und Y.

(a) Prüfen Sie die Eigenschaften einer Metrik für d nach.

(b) Sei $a_n = (1/n, 2^{-n}) \in \mathbb{R}^2$ eine Folge von Punkten in $\mathbb{R}^2$. Für welche Wahl von P konvergiert a_n im metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d)$.

5. **Grenzwerte**

Entscheiden Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie ggf. den entsprechenden Wert.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1000\cdot n^{10}+2^n+1}{n^{11}-2^n-1}$

(b) $\lim_{n\to\infty} 3 + \frac{n^2-1}{n^2+1} + \frac{(-1)^n\cdot n-1}{n+1}$

(c) $\lim_{n\to infty} \frac{n!}{n^n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1000^n}$

6. **Grenzwerte rekursiver Folgen**

(a) Sei x_n rekursiv definiert durch $x_1 = 1$ und $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ für $n \geq 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert. (Sie dürfen annehmen, dass der Grenzwert existiert.)

(b) Sie x_n rekursiv definiert durch $x_1 = 3$ und

$$x_n = \frac{1}{3} \cdot \left(2x_{n-1} + \frac{5}{x_{n-1}^2}\right) \tag{9}$$

für $n \geq 1$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass x_n monoton fallend ist. Bestimmen Sie den Grenzwert. (Wieso existiert dieser?)

1

a) $M =]0;3] \Rightarrow 0 < x \leq 3$

$\partial M = \{0;3\} \Rightarrow x = 0 \;\&\; x = 3$

$\mathring{M} =]0;3[\Rightarrow 0 < x < 3$

$\overline{M} = [0;3]$

b)

$\mathring{M} = M$

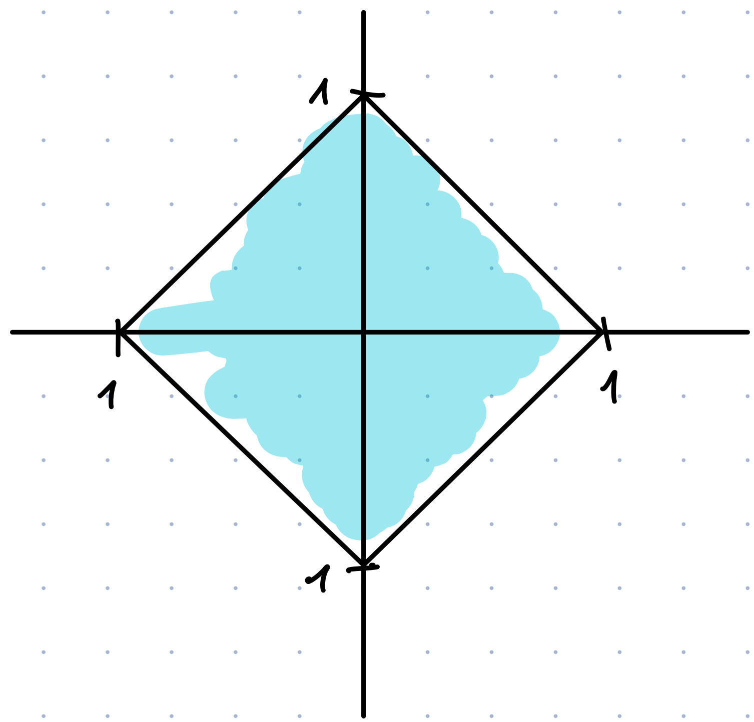
$\overline{M} = M$

$\partial M = \emptyset$

② $d_0(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$U_1((0,0)) = \{(y_1, y_2) \mid |y_1| + |y_2| < 1\}$

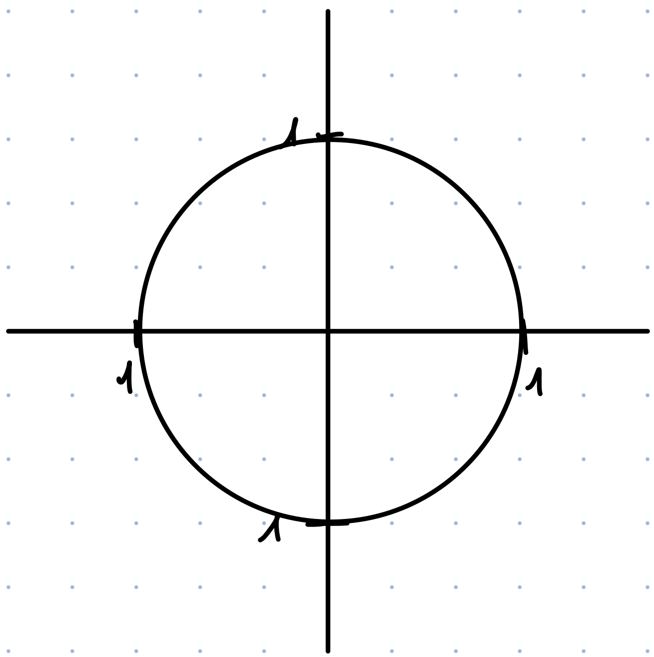
suche zuerst den Rand, also die Punkte (y_1, y_2) mit $|y_1| + |y_2| = 1$



$$d_1(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2}$$

$$U_1((0,0)) = \{(y_1,y_2) \mid d((0,0),(y_1,y_2)) < 1\}$$

$$= \{(y_1,y_2) \mid \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < 1\}$$



3

$d(x,y) := 2^{|x-y|} - 1$

(M1) (Pos. difinit) ✓ $d(1,1): 2^{|1-1|} - 1 = 0$

$d(2,3): 2^{|2-3|} - 1 = 1$

(M2) (Symetrie) ✓ $d(2,3): 2^{|2-3|} - 1 = 1$

$d(2,3): 2^{|3-2|} - 1 = 1$

(M3) (Δ-Ungleichung) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$d(-1,1) \leq d(-1,0) + d(0,1)$

$3 \leq 2$ ↯

Falsch, keine Metrik

(4) $d(X,Y) \begin{cases} \sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2} + \sqrt{(y_1-p_1)^2+(y_2-p_2)^2}, & \text{falls } X \neq Y \\ 0, & \text{falls } X = Y \end{cases}$

a)

M1 ✓ $d(3,5) = \sqrt{(3-p)^2+(-3-(-p))^2} + \sqrt{(5-p)^2+(-5-(-p))^2}$

$= (|3-p_1| + |-3-p_2|) + (|5-p_1| + |-5-p_2|) \geqq 0$

$d(3,3) = 0$

M2 ✓, weil Summe aus zwei beträgen immer gleich und die Rechnung ist auf beiden seiten gleich
– Trivial

M3 Trivial, da $d(x,y)$ immer positiv ist und die

Summe aus $d(x,z)$ und $d(z,y)$ somit

größer ist bzw. gleich. $\square$

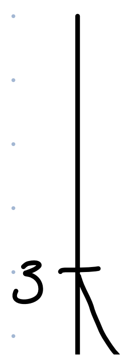
b) $P = (0,0)$

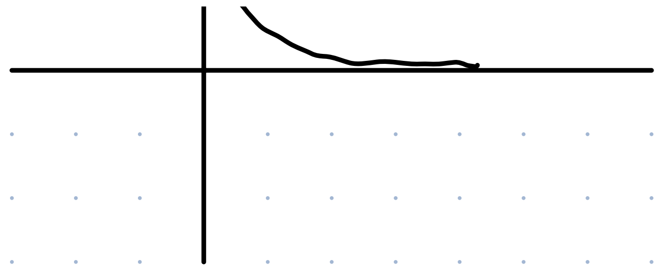
$d\left(\frac{1}{n}, 2^{-n}\right)_{n \in \mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| + \left|-\frac{1}{n} + 0\right| + \left|2^{-n} - 0\right| + \left|-2^{-n} + 0\right|$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right| + \left|2^{-n}\right| + \left|-2^{-n}\right|$

$\Rightarrow \frac{2}{n} + 2 \cdot 2^{-n}$





⑤

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1000n^{10}+2^n+1}{n^{11}-2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{\frac{1000n^{10}}{2^n}}_{\to 0}+1+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}}{\underbrace{\frac{n^{11}}{2^n}}_{\to 0}-1-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}} = -1$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n-1}{n+1}$$ existiert nicht

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$ ist unendlich oft in jeder Umgebung von 1 sowie in der Umgebung von -1

c) Wir schreiben

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots}_{\leq 1} \cdot n \to 0} = 0$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1000^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000 \cdot 1001 \cdot \ldots \cdot n}{\underbrace{1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot \ldots \cdot 1000}_{K \neq 0} \cdot \underbrace{1000 \cdot 1000 \cdot \ldots}_{\geq 1} \cdot 1000} \to \infty$$

Bem: „$0 - \infty$"

$$\frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to \infty$$

$$\frac{1}{n} \cdot n = \frac{n}{n} \to 1$$

$$\frac{1}{n} \cdot n^2 = \frac{n^2}{n} = n \to \infty$$

(6) a) x_n ist rekursiv

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \quad \text{für } n \geq 1$$

Sei $\tilde{x}$ Fixpunkt. Dann gilt

$$\tilde{x} = \sqrt{1 + \tilde{x}}$$

$$\tilde{x}^2 = 1 + \tilde{x}$$

$$\tilde{x}^2 - \tilde{x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}$$

Wegen Startwert $x_1 = 1$ und x_n stehts positiv ist, Kommt nur der positive Fixpunkt in Frage und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{5}}}{2}$$

b) $x_1 = 5$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(5 + \frac{5}{5}\right) = 3$$

Induktionsanfang = $x_2 < x$

Induktionsschritt: Angenommen $x_{n+1} < x_n$ d.h. $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) < x_n$

Z: $x_{n+2} < x_{n+1}$, d.h. $\frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{5}{x_{n+1}}\right) < x_{n+1}$

Wir rechnen hierzu:

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{5}{x_{n+1}}\right)$$

$$= x_{n+1}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2x_{n+1}^2}\right)}_{\text{fertig, wenn } \leq 1}$$

Berechne $\frac{1}{2} + \frac{5}{2x_{n+1}^2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)\right)^2}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{10}{\underbrace{\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)^2}_{\geq 2\cdot\sqrt{5}}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{2\sqrt{5}}$$

Wissen: x_n ist monoton fallend, weil x_n nach unten beschränkt ist (z.B. durch 0), daraus folgt zusammen, dass x_n konvergiert.

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$$

$$2x = x + \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow x_n \text{ konvergiert gegen } +\sqrt{5}\text{, weil positiv}$$