① $f(x) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^5 + 2x^3 + 5x^2 - 3x \; ; \; x \in [-\frac{3}{2}, 2]$

a) $f'(x) = 3x^5 + 7{,}5x^4 + 6x^2 + 10x - 3$

$f''(x) = 15x^4 + 30x^3 + 12x + 10$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

$\downarrow$

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{86{,}25}{205{,}1875} = 1{,}08$$

$$x_2 = 1{,}08 - \frac{29{,}41}{81{,}16} = 0{,}72$$

c) $x_{n+1} = x_n + \alpha d_n$

$$x_1 = 1{,}5 - 0{,}5 \cdot \frac{86{,}25}{205{,}1875}$$

$$= 1{,}5 - 0{,}21 = 1{,}29$$

$$x_2 = 1{,}29 - 0{,}5 \cdot \frac{51{,}37}{131{,}42} = 1{,}09$$

d) Der Damping-Faktor verkleinert die Schritte und reguliert sie sozusagen. Dadurch wird zwar der Solution-Process langsamer aber er balanciert damit auch die Geschwindigkeit und Stabilität. Der Algorithmus wird robuster.

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{3}{2}x_2 - 3\right)^2 + (2x_1 - 2)^2 + x_1 x_2$

$x_1 x_2 \in [-4, 4]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(2x_1 - 2) \cdot 2 + x_2 = 4(2x_1 - 2) + x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2\left(\frac{3}{2}x_2 - 3\right) \cdot 1{,}5 + x_1 = 3\left(\frac{3}{2}x_2 - 3\right) + x_1$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(4(2x_1 - 2) + x_2 \, , \; 3\left(\frac{3}{2}x_2 - 3\right) + x_1\right)$$

$\nabla^2 f$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 4 \cdot 2 = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_2} = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 4{,}5 \end{pmatrix}$$

1. Iteration

$$d_0 = -\left(\nabla^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})\right)^{-1} \cdot \nabla f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$$

$$H^{-1} = \frac{1}{\det(H)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(H) = ad - bc$$

$$= 8 \cdot 4{,}5 - 1 \cdot 1 = 35$$

$$d_0 = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -44 \\ -31 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} -167 \\ -204 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}77 \\ 5{,}83 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4{,}77 \\ 5{,}83 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0{,}77 \\ 1{,}83 \end{matrix}$$

2. Iteration