Aufgabenblatt 1

Statistik – Sommersemester 2024 – Prof. Dr. Sandra Eisenreich

Aufgabe 1. *

Sie würfeln zweimal hintereinander mit einem normalen Würfel.

(a) Wie sieht der Wahrscheinlichkeitsraum Ω aus, der dieses Experiment beschreibt?

(b) Beschreiben Sie das Ereignis $A =$ "das Ergebnis des ersten Wurfs ist eine 1".

(c) Wir betrachten zusätzlich die Ereignisse

$$B = \{(1,3),(2,4),(3,3),(1,6),(5,4)\}, \quad C = \{(i,j) \in \Omega | i \neq j\}$$

Geben Sie folgende Ereignisse als Menge an: $A \cap B$, $B \setminus C$, $\overline{A}$

(d) Beschreiben Sie C in Worten!

(e) Was ist die Wahrscheinlichkeit der Ereignissee $D = \{(1,1)\}$ und $E = \{(2,2),(1,2)\}$?

(f) Es seien Ω ein Grundraum und $A_1,\ldots,A_n$ Ereignisse. Beschreiben Sie folgendes Ereignis mengentheoretisch: Genau eines der Ereignisse $A_1,\ldots,A_n$ tritt ein.

Aufgabe 2.

Eine 1 Euro Münze wird dreimal geworfen. Es sei A das Ereignis, dass mindestens zweimal hintereinander *Zahl* erscheint, und B das Ereignis, dass alle Würfe das gleiche Ergebnis liefern. Bestimmen Sie

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A \setminus B$

(d) $\overline{A \cup B} = (A \cup B)^c$

Aufgabe 3.

Bei einer Qualitätskontrolle können Werkstücke zwei Arten von Fehlern aufweisen, den Fehler A und den Fehler B. Aus Erfahrung sei bekannt, dass ein zufällig herausgegriffenes Werkstück mit Wahrscheinlichkeit 0.05 den Fehler A hat, mit W.keit 0.01 beide Fehler aufweist und mit W.keit 0.02 nur den Fehler B hat.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist das Werkstück den Fehler B auf? 0,03

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Werkstück fehlerhaft bzw. fehlerfrei? 0,07 oder 0,08

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt das Werkstück genau einen der beiden Fehler? 0,06 oder 0,07

Aufgabe 4.

(a) In einem Hörsaal gibt es 100 Plätze, 80 Studenten besuchen die Vorlesung. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Studenten, sich auf die 100 Plätze zu verteilen, wenn wir berücksichtigen, wer wo sitzt?

(b) In einem Hörsaal gibt es 100 Plätze, 80 Studenten besuchen die Vorlesung. Wir betrachten als Ergebnis, welche Plätze unbesetzt bleiben (wobei die Reihenfolge natürlich egal ist). Wie viele unterschiedliche Ergebnisse gibt es?

(c) Eine Schar von 20 ununterscheidbaren Vögeln lässt sich auf vier Ästen eines Baums vor Ihrem Fenster nieder. Auf jedem Ast wäre Platz für alle 20. Wie viele möglichen Anordnungen gibt es?

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür im Lotto drei Richtige (unabhängig von der Reihenfolge) zu erhalten.

Aufgabe 5.

Die folgende Aufgabe stammt aus dem Schulbuch Mathematik 13.1 Leistungskurs Hessen des Cornelsen Verlag, Berlin, 2007, S. 65:

Eine Urne enthält 1 rote, 4 schwarze und 5 weiße Kugeln. Oliver zieht 3 Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen mit verbundenen Augen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A = "Die erste gezogene Kugel ist weiß." $\qquad C = A \cap B$

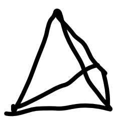
B = "Die Kugeln haben 3 verschiedene Farben." $\qquad D = (A \cup B)^c$

Geben Sie einen geeigneten Grundraum und die Ereignisse A und B als Teilmengen desselben an.

Aufgabe 6.

16 Personen besteigen einen Zug mit vier Wagen. Jede Person wählt zufällig und unabhängig von den anderen Personen einen Wagen aus den vieren unter Laplace-Annahme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jeweils vier Personen in jeden Wagen steigen? Geben Sie einen geeigneten Grundraum für das gesuchte Ereignis an.

Aufgabe 7.



Die vier Seiten eines Tetraeders seien wie folgt gefärbt: Fläche 1 grün, Fläche 2 weiß, Fläche 3 rot, Fläche. 4 grün-weiß-rot gestreift. Man prüfe, ob die Ereignisse "Die unten liegende Fläche enthält die Farbe x" für $x =$ grün, weiß, rot, unabhängig sind.

Aufgabe 8. ***

Sei $\Omega = \mathbb{N}$, und sei $\mathscr{A}$ die Familie derjenigen Teilmengen A von $\mathbb{N}$, so dass entweder A oder $\overline{A}$ nur endlich viele Elemente hat. Ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra?

(1)

a) $\Omega = \{ (1;1); \ldots\ldots; (1;6)$

$\vdots \qquad \vdots$

$(6;1); \ldots\ldots; (6;6) \}$

$\Omega = \{ (1;2;3;4;5;6)^2 \}$

b) $P(A) = \frac{1}{6}$

c) $B \cap A = \{ (1;3); (1;6) \}$

$B \setminus C = \{ (1;3); (2;4); (1;6); (5;4)$

$\overline{A} = \{ (2;x); (3;x); (4;x); (5;x); (6;x)$
$| x \in [1;2;\ldots;6] \}$

d) C ist die Menge aller Tupel $(x;y)$ aus Ω, wobei $x \neq y$ ist.

e) $P(D) = \frac{1}{36}$

$P(E) = \frac{2}{36}$

f) $P(A_i) = \frac{1}{n}$, wobei n die Anzahl aller möglichen ~~E~~ Ergebnisse ist!

2 a) $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$

b) $P(A \cup B) = \frac{1}{8}$

c) $P(A \setminus B) = \frac{2}{8}$

d) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{2}$

4 a) $= 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 21 \;\big|\; n \cdot n-1 \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

b) $= \binom{100}{20} \;\big|\; \binom{n}{k}$

c) $= 80^{20} \;\big|\; n^k$

d) $= 0{,}0008$

(5) a)

$$A = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

b) $B = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}$$

c) $C = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

d) $D = 1-(A+B-C)$

$$= 1-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{11}{18}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{18}$$

$$\Omega = \{(r;s;w);(s;r;w);(w;s;r);\dots\}$$

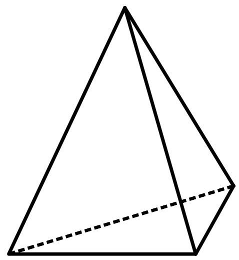
$$\Rightarrow 36$$

(6) $\Omega = 4^{16}$

$$P(E) = \frac{1}{4}^{16} \cdot \frac{16!}{16^4}$$

$= 0{,}07433$

⑦



A_x = Farbe x landet unten $\mid x \in \{r; g; w\}$

$P(A_x) = \frac{1}{2}$

$P(A_r \cap A_g \cap A_w) = \frac{1}{4}$

$P(A_r) \cdot P(A_g) \cdot P(A_w) = \frac{1}{8}$

$\hookrightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} \Rightarrow$ nicht unabhängig