Satz 8.1: [Nullstellensatz]

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Wenn $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gibt es ein $x^* \in [a,b]$ mit $f(x^*) = 0$.

Bew.: [Bisektionsverfahren]

Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.
Wir konstruieren eine Folge $[a_n, b_n]$ von Intervallen mit den Eigenschaften

i) $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$

ii) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$

iii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$

...

Start: $a_0 = a$, $b_0 = b$

Sei $c = \frac{a_n + b_n}{2}$

falls $f(c) < 0$:

setze $a_{n+1} = c$ und $b_{n+1} = b$

sonst:

setze $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c$

Wg (ii) ist a_n monoton wachsend und beschränkt

Wg (ii) ist b_n monoton fallend und beschränkt

Somit sind beide Folgen konvergent.

Wg (iii) ist $\lim a_n = \lim b_n = x^*$.

Weil f stetig ist gilt $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(x^*)$
Letztlich ist $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$ für alle n (i)

und damit ist
$$\left.\begin{aligned} f(x^*) &= \lim f(a_n) \leq 0 \\ f(x^*) &= \lim f(b_n) \geq 0 \end{aligned}\right\} f(x^*) = 0$$

$\square$

Satz 8.2:

Jedes reelle Polynom mit ungeradem Grad hat mind. eine Nullstelle.

Satz 8.3: [Zwischenwertsatz]

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. $f(a) = A$ und $f(b) = B$ mit $A \leq B$.

Dann gibt es zu jeden $y^* \in [A,B]$ ein $x^* \in [a,b]$

mit $f(x^*) = y^*$.

Bem.:
- Es gilt sogar noch stärker, dass die Bildung von f. ein abgeschlossenes Intervall ist. Insbesondere hat f ein Minimum und ein Maximum.

- Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv auf einem belibigen Intervall I (offen, abgeschossen, halboffen, inkl. $\pm\infty$)
Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{+} stetig.

Satz 8.4:
Die Wendefunktion $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ist bijektiv & stetig

Bew.: $\sqrt[n]{}$ ist die Umkehrfunktion der stetigen Funktion

$$\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^n .$$

Satz & Def. 8.5:

Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist stetig.

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und heißt natürlicher Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \ln(x)$$

Es gilt:

i) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

ii) $\ln(a^p) = p \cdot \ln(a)$ für alle $p \in \mathbb{Q}$

Satz & Def 8.6:

Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Dann heißt die Funktion

$$a^{(\cdot)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \;,\; x \mapsto e^{x \cdot \ln a} = a^x$$

Exponentialfunktion zur Basis a. Sie ist bijektiv und stetig. Es gilt:

i) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

Die Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \;,\; x \mapsto \log_a x$$

heißt Logarithmus zur Basis a. Und es gilt

ii) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

iii) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$.

Bem.: $\cdot \log_e = \ln$ und manchmal $\log_2 = \mathrm{ld}$

Bew.: a^x ist die Hintereinanderausführung der beiden bijektiven und stetigen Funktionen

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot \ln a \text{ und } \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto e^x$$

$\square$

Satz 8.7: (Eindeutigkeit der Exponentialfunktion)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x) = a^x$ mit $a = f(1)$.

Trigonomische Funktionen

Erinnerung

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$$

- Es gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < 0$ (Restfehler in Exp-Fkt.)
- Nullstellensatz => mind. 1 NSt in $[0,2]$
- Reihenentwicklung => cos streng monoton fallend in $[0,2]$

Def. 8.8:

Das doppelte der ersten positiven Nullstelle des Cosinus heißt $\pi = 3{,}141592654\ldots$

Folgerung:

- $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$

  wegen Reihenentwicklung: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

- $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2} = i$

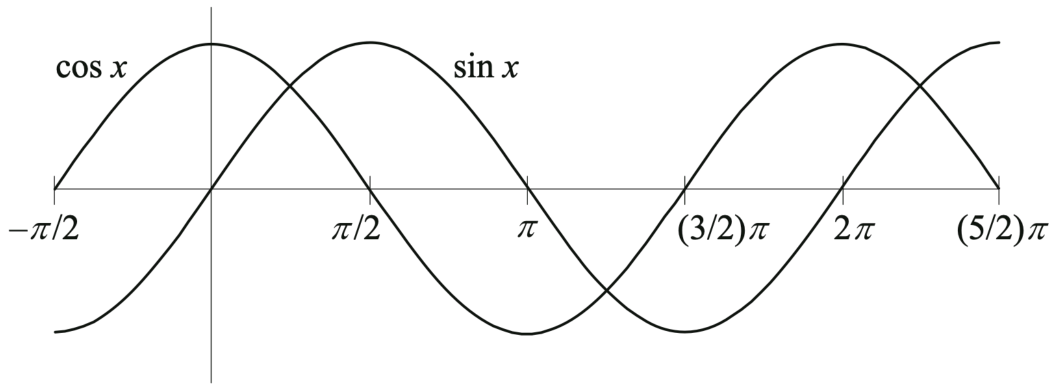
  $$e^{i\pi} = e^{i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = i^2 = -1$$

  $\Rightarrow \cos(\pi) = -1$ und $\sin(\pi) = 0$

- allg. $e^{2\pi i} = 1 \quad \left(e^{2\pi i} - 1 = 0\right)$

$\Rightarrow e^{ix}$, $\cos x$ und $\sin x$

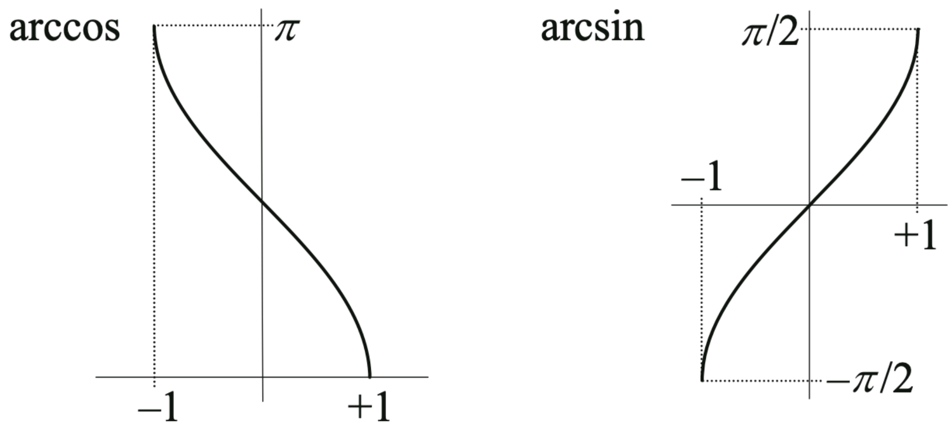
sind periodisch mit Periodenlänge 2π.



Satz & Def. 8.9:

$\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ und $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ sind bijektiv und stetig. Die stetigen Umkehrfunktionen heißen:

Arcuscosinus, $\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$
und Arcussinus, $\arcsin: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



Bem.: Zur Vollständigkeit seien noch definiert

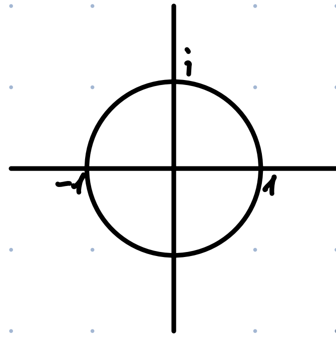
$$\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{\frac{\pi}{2}+k\pi} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$\cot : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

Bogenmaß und Polarkoordinaten

Beobachte die Bewegung von $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ auf dem Einheitskreis, wenn φ von 0 bis 2π läuft.

φ	$e^{i\varphi}$	Winkel α
0	1	$0°$
$\frac{\pi}{2}$	i	$90°$
π	-1	$180°$
2π	1	$360°$
Bogenmaß		Gradmaß



$$\boxed{\frac{\varphi}{\pi} = \frac{\alpha}{180°}}$$

geg.: $\alpha = 60°$

$$\frac{\varphi}{\pi} = \frac{60°}{180°}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Satz & Def 8.10:

Jede komplexe Zahl $z = x + iy \neq 0$ hat eine eindeutige Darstellung $z = r \cdot e^{i\varphi}$, wobei $r = \|z\| \in \mathbb{R}^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$, so dass $e^{i\varphi} = \frac{z}{r}$.

Es heißen (r, φ) die Polarkoordinaten von (x,y).

Bem.: · Multiplikation komplexer Zahlen ist einfach in Polarkoordinaten

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$