Mathematik II

1. **Bisektionsverfahren**
   Verwenden Sie das Bisektionsverfahren, um alle reelle Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 5x + 1$ mit einer Genauigkeit von 2 hinter dem Komma zu berechnen.

2. **Newton-Iteration**
   Für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir die folgende rekursiv definierte Folge:

   - $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.
   - x_{k+1} ist der Schnittpunkt der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x_n, f(x_n))$.

   (a) Geben Sie eine Formel für x_{n+1} in Abhängigkeit von x_n, $f(x_n)$ und $f'(x_n)$ an.

   (b) Betrachten Sie erneut die Funktion $f(x) = x^3 + -5x + 1$ aus Aufgabe 1 und berechnen Sie jeweils 10 Folgeglieder für die Startwerte $x_0 = -3$, $x_0 = 0$ und $x_0 = +3$. Was stellen Sie fest? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 1.

3. **Differentiation I**
   Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktion (wo definiert).

   (a) $a(x) = x^2 \cdot \cos(\ln(x^2))$

   (b) $b(x) = e^{\sqrt{x}}$

   (c) $c(x) = 2^{2^x}$

   (d) $d(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

   (e) $e(x) = x^{m/n}$

4. **Differentiation II**

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tan\colon \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ die Menge $]-\pi/2, \pi/2[$ bijektiv auf $]-\infty, \infty[$ abbildet. Zeigen Sie dann, dass

   $$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{1}$$

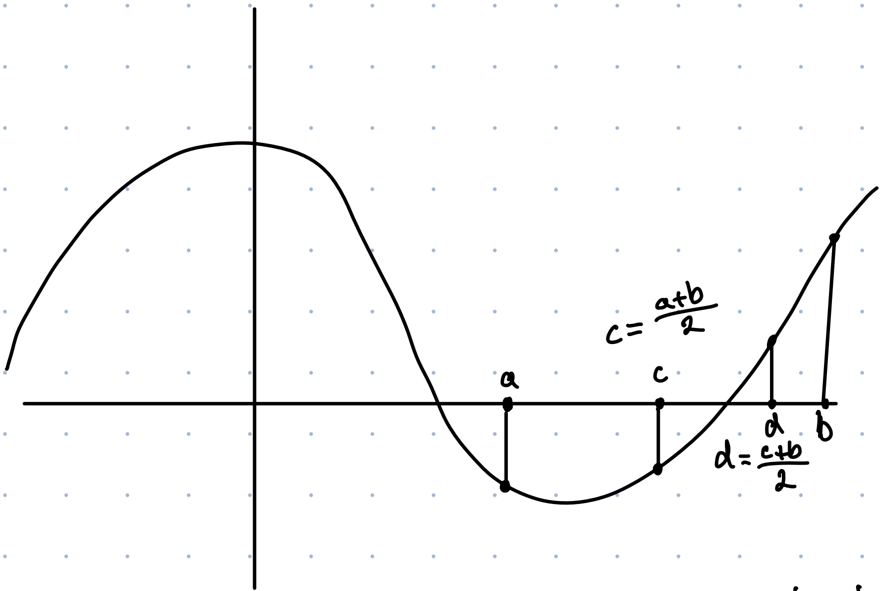
   und somit $\tan x$ auf $]-\pi/2, \pi/2[$ streng monoton wachsend ist. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan x$.

   (b) Bestimmen Sie die Ableitung von arcsin und arccos.

Bisektion

f stetige Funktion

$f(a), f(b)$ verschiedenes Vorzeichen (einfacher Test: $f(a) \cdot f(b) < 0$)



schreibe Funktion:

$[a, b]$ $\qquad f(c) \cdot f(b) < 0$ $\qquad$ bis (f, a, b, n)

$[c, b]$

$[c, d]$

$\vdots$

③.

a) $a'(x) = f' \cdot g + f \cdot g'$

$f = x^2 \;/ g = \cos(\ln(x^2))$

$\Rightarrow f' \cdot g = 2x \cdot \cos(\ln(x^2))$

g' : [Kettenregel]

$\Rightarrow -\sin(\ln(x^2)) \cdot \frac{2}{x}$

Ableitung von cos

Ableitung von $\ln(x^2)$

$f' \cdot g + f \cdot g' \Rightarrow 2x \cdot \cos(\ln(x^2)) + x^2 \cdot \left(-\sin(\ln(x^2)) \cdot \frac{2}{x}\right)$

$\Rightarrow 2x \cdot \cos(\ln(x^2)) + (-\sin(\ln(x^2)) \cdot 2x)$

$\Rightarrow 2x \cdot \cos(\ln(x^2)) - 2x \cdot \sin(\ln(x^2))$

$\Rightarrow 2x \cdot (\cos(\ln(x^2)) - \sin(\ln(x^2)))$

b)

$b(x) = e^{\sqrt{x}}$

$b'(x) =$ [Kettenregel]

$u = \sqrt{x}$

$(e^u)' = e^u = e^{\sqrt{x}}$

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ -> ableitung von $\sqrt{x}$

Kettenregel $= e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = (e^{\sqrt{x}})'$

c)

$c(x) = 2^{2^x}$

$f(u) = 2^u$ für $u = 2^x$ (oder auch $2^{g(x)}$)

$g(x) = 2^x$

$g(x)' = 2^x \cdot \ln(2)$

↳ da die allgemeine Regel für $a^x = a^x \cdot \ln(a)$

$f(u)' = 2^u \cdot \ln(2)$

$= 2^{2^x} \cdot \ln(2)$

Kettenregel:

$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\Rightarrow (2^{2^x} \cdot \ln(2)) \cdot (2^x \cdot \ln(2))$

$$\Rightarrow \quad 2^{2^x} \cdot 2^x \cdot (\ln(2))^2$$

d)

$$d(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

↳ Quotientenregel

$$↳ (f/g)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ableitungen der Funktionen:

$$f'(x) = 2$$

Ableitung der äußeren Funktion

Ableitung der Inneren Funktion $1+x^2$

$$g'(x) = \left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)' = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2x$$

$$= (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$$

-> Kettenregel => äußere mal innere Ableitung

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{2\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - \underbrace{2x \cdot \frac{2x}{3}}_{=\frac{4x^2}{3}}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2} \Rightarrow (1+x^2)^{\frac{2}{3}}$$

$\hookrightarrow$ Vereinfachen:

$$\Rightarrow \frac{2(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{4x^2}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$\Rightarrow$?

e)

$$e(x) = x^{m/n}$$

$$e'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$