2 Topologie

Schlüsselidiee: „Nähe"

Def. 2.1:

Sei X eine Menge. Eine Abb. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik** (Abstandsfunktion) und (X, d) **metrischer Raum**, wenn gilt

(M1) $d(x,y) \geq 0$ sowie $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(pos. difinit)

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (symmetrisch)

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Δ-Ungleichung)

Bsp.: • Betragsfunktion in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Für $x, y \in \mathbb{C}$ sei

$$d(x,y) = |x-y|$$

Dann sind (M1) und (M2) direkt klar.

Und (M3) folgt aus

$$d(x,y) = |x-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$

Das ist die **Standardmetrik** von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

• In der linearen Algebra haben Sie für einen Vektor

$x \in \mathbb{R}^n$ eine (euklidische) Norm definiert

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Diese hat die gleichen Eigenschaften wie der Betrag und somit ist $d(x,y) = ||x-y||$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

- Sei $X = \{0,1\}^n$. Für zwei Codewörter
  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ und $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$
  ist der Hamming-Abstand $d = (b,c)$ die Anzahl der unterschiedlichen von b und c.

Def. 2.2:

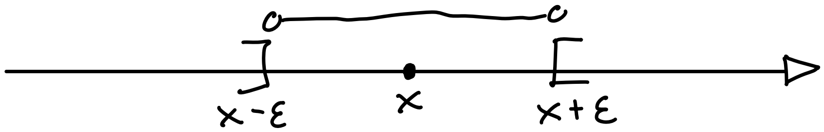
Sei (X,d) ein metrischer Raum und $\varepsilon > 0$ reell. Dann heißt für $x \in X$ die M

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

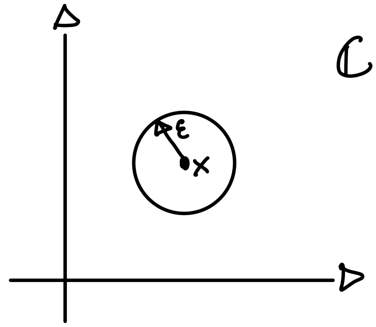
die ε-Umgebung von X.

Bsp.: (Fortgesetzt)

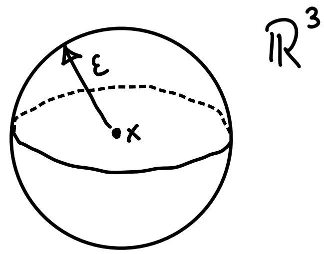
- In $\mathbb{R}$ ist $U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon\}$
  $= \{y : x-\varepsilon < y < x+\varepsilon\}$
  $=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$



- In $\mathbb{C}$ ist $U_\varepsilon(x)$ das Kreisinnere (ohne Rand) des Kreises um x mit Radius ε



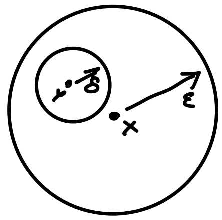
- In $\mathbb{R}^n$ ist $U_\varepsilon(x)$ das Innere einer n-dim. Kugel um x mit Radius ε.



- In der Hamming-Metrik schreiben wir $\varepsilon = k$ und dann sind in $U_k(x)$ alle Codewörter, die sich vom x in weniger als k Bit unterscheiden.

→ Anwendung: Wenn zulässige Codewörter einen Abstand von mind. $2k+1$ haben, dann kann man so Fehler korrigieren.

Bem.: • Der Rand der Kugel, d.h. alle y mit $d(x,y) = \varepsilon$, gehört **nicht** zur Umgebung.
Wenn aber $y \in U_\varepsilon(x)$, dann gibt es immer einen Radius $\delta > 0$, so dass sogar $U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$.



Def. 2.3:
Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subseteq X$.
Es heißt M

- **offen**, wenn für alle $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ exestiert mit
$$U_\varepsilon(x) \subseteq M.$$
- **abgeschlossen**, wenn das Komplement $X \setminus M$ offen ist.

Es heißt $x \in X$

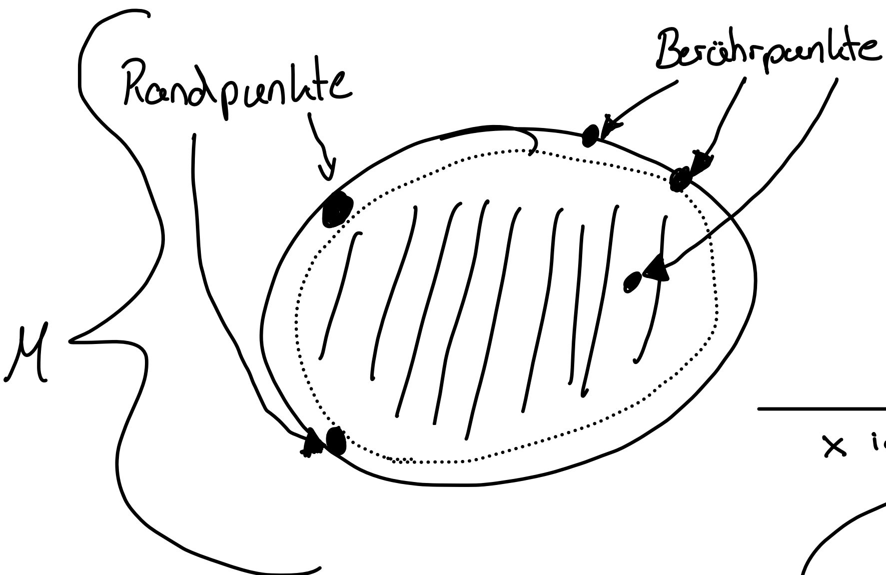
- ein **Berührungspunkt** von M, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt
$U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$

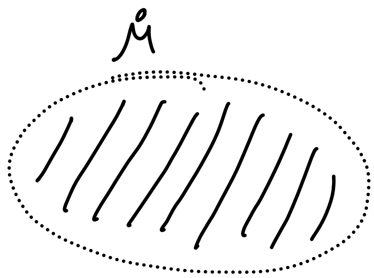
- ein **Randpunkt** von M, wenn x Berührungspunkt von M und $X \setminus M$ ist.

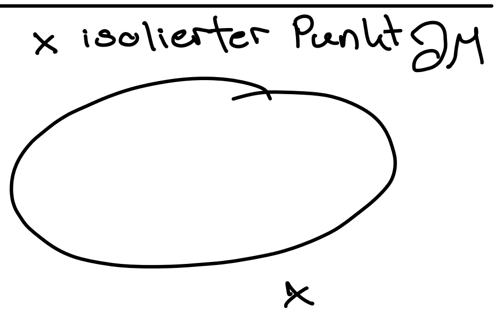
Der **Abschluß $\overline{M}$** von M besteht aus allen Berührungspunkten von M.

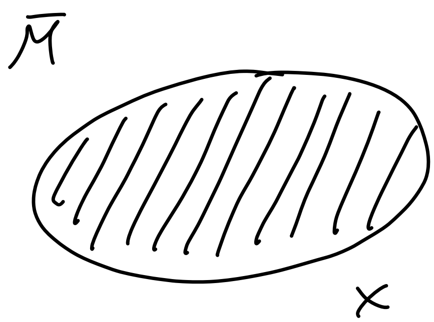
Der **Rand ∂M** von M besteht aus allen Randpunkten von M.

Das **Innere $\mathring{M}$** von M ist die Menge aller inneren Punkte von M









Bem:
- X und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.
- Für jedes $M \subseteq X$ ist $\mathring{M}$ offen und $\overline{M}$ abgeschlossen.
- $[a,b]$ ist abgeschlossen und $]a,b[$ ist offen.
  Der Rand ist jeweils $\{a,b\}$,
  der Abschluß ist $[a,b]$,
  und das Innere ist $]a,b[$.

Satz. 2.4: 08.04.24

Sei (X,d) ein metr. Raum. Eine Teilmenge $M \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn alle Berührpunkte von M schon zu M gehören. (d.h. $\overline{M} = M$)

Bew.: „$\Rightarrow$" Wenn M abgeschlossen ist, dann ist $A = X \setminus M$ offen. Sei $x \in X$ ein Berührpunkt von M.

z.z.: $x \in M$. Angenommen es sei $x \notin M$, dann ist $x \in A$. Da A offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq A$.

?

Dann ist $U_\varepsilon(x) \cap M = \emptyset$ im Wiedersp. dazu dass x ein Berührpunkt von M ist. ↯

Also $x \in M$ und somit $\overline{M} = M$.

„$\Leftarrow$" Wenn $M = \overline{M}$, dann enthält M alle seiner Berührpunkte.

z.z.: M ist abgeschlossen bzw. $A = X \setminus M$ ist offen.

Angenommen A ist nicht offen, dann exestiert $x^* \in A$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x^*) \not\subseteq A$

$\rightarrow U_\varepsilon(x^*) \cap M \neq \emptyset$

$\Rightarrow x^*$ ist Berührungspunkt von M im Wiederspruch zu $M = \overline{M}$ ↯

Also ist M abgeschlossen. $\square$

Satz 2.5: (ohne Beweis)

Sei (X, d) ein metrischer Raum

i) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

ii) der Schnitt endlich (!) vieler offener Mengen ist offen.

Bem:
- analog für beliebige Schnitte und endlicher Vereinigungen von abg. Mengen
- Schnitte unendlich vieler offener Mengen können nicht-offen sein, z.B.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right[= [a, b]$$

Satz 2.6:

Es ist $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, jede reelle Zahl ist ein Berührpunkt von $\mathbb{Q}$.

(ugs.: „$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.")