3 Folgen

Def 3.1:

Sei M Menge. Eine Folge (in M) ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \Rightarrow M$

$$n \mapsto a_n = \varphi(n).$$

Bem.:
- Notation $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq 1}$ oder a_n
- alternative Indexmengen: $\mathbb{N}_0$ oder $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$
- hier meist $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$.

Bsp:

(i) $a_n = a \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

(ii) Für $i \in \mathbb{C}$ ist $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $i, -1, -i, 1, i, \dots$

(iii) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ (harmonische Folge)

(iv) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

(v) $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \dots$

(vi) $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $a \in \mathbb{C}$

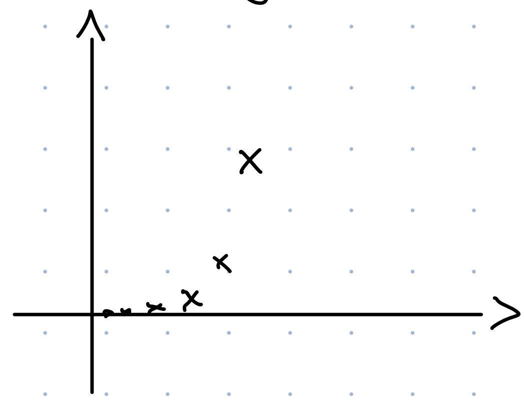
(vi) $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $a \in \mathbb{C}$

(vii) Für $b, c, d \in \mathbb{R}$ definieren wir rekursiv

$$a_0 = b$$

$$a_n = a_{n-1} + c \cdot n + d \text{ für } n \geq 1$$

(viii) $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}^2$



Def. 3.2: [Konvergenz]

Sei (X, d) metr. Raum. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, kurz: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$,

wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : a_n \in U_\varepsilon(a).$$

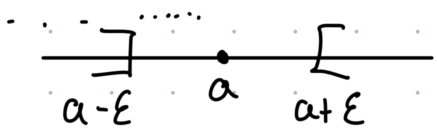
Die Folge divergiert, wenn sie nicht konvergiert.

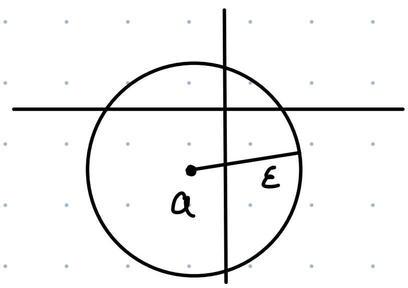
Bem.:

- (*) bedeutet, dass in jeder noch so kleinen Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ab einem gewissen Index n_0 alle weiteren Folgeglieder liegen.

- In $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist $U_\varepsilon(a) = \{x : |x-a| < \varepsilon\}$ und wir können in (*) schreiben

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$



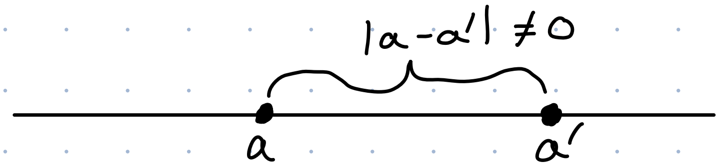


Satz 3.3:

Wenn eine Folge (a_n) konvergiert dann ist der Grenzwert eindeutig.

Bew.:

Angenommen es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$



Wähle $0 < \varepsilon < \dfrac{d(a,a')}{2}$, dann

- gibt es ein n_0, so dass für alle $n > n_0$ gilt
$$a_n \in U_\varepsilon(a)$$
- aber es gibt auch n_0', so dass für alle $n > n_0'$ gilt
$$a_n \in U_\varepsilon(a')$$

Somit gilt für $n > \max(n_0, n_0')$:
$$a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a)$$
Allerdings ist $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$ $\square$

Da $\mathbb{R}$ angeordnet ist, können wir divergente Zahlenfolgen noch ausdifferenzieren.

Def. 3.4:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}$. Wir sagen

- „a_n geht gegen ∞", kurz $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$,
  wenn gilt
  $$\forall M > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : a_n > M.$$
- „a_n geht gegen $-\infty$", kurz $\lim a_n = -\infty$,
  wenn gilt
  $$\forall m < 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : a_n < m$$

Bem.: Eine Folge mit $\lim a_n = \infty$ ist divergent !

- „a_n ist (nach unten/oben) beschränkt", wenn es die entsprechende (Werte-) Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist.

- „a_n ist monoton wachsend bzw. fallend", wenn gilt:
  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$

Satz 3.5:
Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Bew.: (in $\mathbb{R}$)
Sei $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Setze $\varepsilon = 1$. Dann sind ab einem

Index n_0 alle Folgeglieder in $U_1(a)$.
Die Wertemenge ist aber enthalten in

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\} \cup U_1(a)$$

und somit beschränkt.

Bsp.: (fortgesetzt)

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

(ii) $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent (und beschränkt)
Bew.: In jeder Umgebung von i liegen

unendlich viele Folgeglieder. Wenn $\varepsilon < 1$, dann liegen aber auch unendlich viele Folgeglieder außerhalb.

(iii) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null. Solche Folgen heißen Nullfolgen.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Satz 3.8 ein n_0 mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Dann gilt für

$$n \geq n_0 : \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad \square$$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Bew.: Es gilt $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann wähle (wie oben) n_0 so dass $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ und dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - 1| = \ldots = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \square$$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \stackrel{?}{=} 0$

Für $n > 3$ gilt $2^n \geq n^2$. Also

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

und wg. (iii) folgt also Nullfolge.

(iv) Verhalten von a^n (?
hängt vom Betrag von a ab. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |a|<1 \\ 1 & \text{für } a=1 \\ \text{divergent} & \text{für } |a|\geq 1 \text{ und } a\neq 1 \end{cases}$$

Hier nur der Fall $|a|<1$:

$$\Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} = 1+x \text{ für ein } x>0$$

Erinnerung: Bernulli $(1+x)^n \geq 1+nx$

Damit rechnen wir:

$$|a^n| = |a|^n = \frac{1}{|1+x|^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

für $1+nx > \frac{1}{\varepsilon}$, d.h. $n > \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)$.

(vii) Laufzeit Selection Sort ist monoton wachsend und nicht nach oben Beschränkt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

(viii) Bei $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ konvergieren beide Komponenten gegen 0. $\lim_{n\to\infty} a_n = (0,0)$.

Allg.: Eine Folge von n-Tupeln in $\mathbb{R}^n$ konvergiert

genau dann, wenn jede Komponente konvergiert.
(Das ist falsch im $\mathbb{R}^\infty$.)

Satz 3.6: [Vergleichskriterium]

Seien a_n, b_n, c_n reelle Folgen und sei $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle n.
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. Für genügend große n gilt

$$c - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < c + \varepsilon$$

und somit ist $c_n \in U_\varepsilon(c)$. $\square$

Bem.:
- In Bsp. (iv) und (v) oben haben wir jeweils zwischen der Konstanten Folge 0 und der Folge $\frac{1}{n}$ eingeklemmt.
- „Für genügend große n" ist kurz für „Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$".

Satz 3.7: [ohne Beweis]

Sei a_n, b_n reelle Folgen mit
$$a_n \leq b_n \text{ für alle } n. \quad (*)$$

Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann auch $a \leq b$.

Bem.: • Wenn in Satz 3.7 „$<$" anstatt „$\leq$" in $(*)$, dann trotzdem nur „$\leq$" für die Grenzwerte.
(siehe Bsp. (i) & (v))

• Sätze 3.6 & 3.7 sind auch richtig mit „für genügend große n" anstatt „für alle n".

Satz 3.8: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien a_n, b_n reelle (oder komplexe) Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

a) $(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

b) $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

c) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) konvergiert $(\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$

d) Wenn $b \neq 0$, dann gibt es n_0 mit $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$.
Und es ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

e) $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

f) Für jede komplexe Zahlenfolge $z_n = x_n + i y_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

g.d.w. $\lim_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re}(z)$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im}(z)$.

Bew.: nur a) Technik: Wenn etwas für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dann auch für alle $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ oder alle $\varepsilon^2 > 0, \ldots$

Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt es n_0, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_0$.

Es folgt

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0. \quad \square$$

Δ-Ungleichung

Bsp.:

(i) Sei $a_n = \frac{14}{n} = 14 \cdot \frac{1}{n}$.

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{14}{n} = 14 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 14 \cdot 0 = 0$

(ii) Bsp. (iv) von oben nochmal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim 1}{\lim 1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 0$$

(iii) Allgemein für Quotienten von Polynomen

$$\frac{6n^4 + 3n^2 + 2}{7n^4 + 12n^3 + n} = \frac{6 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{7 + \frac{12}{n} + \frac{1}{n^3}}$$

monotone Folgen

Satz 3.12:
Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Bew: Sei a_n monoton wachsend und $a = \sup\{a_n\}$.

Z: In jeder Umgebung von a liegen fast alle a_n.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$a_n \leq a < a + \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

und $a - \varepsilon < a_{n_0}$ für ein n_0, weil sonst wäre a nicht obere Schranke

Wegen der Monotonie gilt dann aber

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \text{ für alle } n \geq n_0 \quad (**)$$

$$\left\{ (a_n) \text{ ist monoton } \begin{Bmatrix} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}, \text{ wenn } \begin{Bmatrix} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} \geq a_n \end{Bmatrix} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Zusammen zeigen $(*)$ und $(**)$, dass $a_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \geq n_0$
Analog, wenn a_n monoton fallend mit $a = \inf\{a_n\}$. $\square$

Bsp:
- $a_n = n$ monoton, aber unbeschränkt
- $a_n = \frac{1}{n}$ monoton fallend und beschränkt ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

- $a_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n}$ ist die Folge

$$a_1 = 1.1$$
$$a_2 = 1.11$$
$$a_3 = 1.111$$
$$\vdots$$

und ist monoton wachsend und beschränkt (2) mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{10}{9}$

- $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

ist monoton wachsend. Beschränkt?

Trick: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k\cdot(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Also ist

$$a_n \leq 1 + \underbrace{\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right)}_{k=2} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right)}_{k=3} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right)}_{k=4} + \cdots$$
$$+ \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right)}_{k=n-1} + \underbrace{\left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right)}_{k=n}$$
$$= 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Grenzwert? $\frac{\pi^2}{6}$!

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\ldots}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \frac{1}{n}$$

Es gilt aber für $n = 2^{n'}$

$a_n > 1 + \frac{n'}{2}$ und somit unbeschränkt.