Praktikum 1 Sommer 2024

Mathematik II

1. **$\sqrt{2}$ ist irrational**
   Begründen Sie, warum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   Hinweis: Nehmen Sie an, es gilt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist.

2. **(ir)rationale Zahlen**
   Gegeben seien rationale Zahlen p, q und irrationale Zahlen r, s. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
   (a) $x = p + q$ ist eine rationale Zahl.
   (b) $y = r + s$ ist eine irrationale Zahl.
   (c) $z = p + r$ ist eine irrationale Zahl.

3. **Mengen malen**
   Bestimmen Sie in den folgenden Fällen jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die den Ungleichungen genügen, und skizzieren Sie diese Mengen auf der Zahlengeraden:

   (a) $\frac{x-1}{x+1} < 1$, (d) $|1 - x| \leq 1 + 2x$, (g) $\frac{x|x|}{2} = 8$,
   (b) $x^2 + x + 1 \geq 0$, (e) $15x^2 \leq 7x + 2$, (h) $x|x| = \frac{1}{2}x^3$,
   (c) $x^3 - x^2 < 2x - 2$, (f) $|x + 1| + |5x - 2| = 6$, (i) $|x - 4| > x^2$.

4. **dreiecks-artige Ungleichungen**
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!
   (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x - y| \leq |x| - |y|$.
   (b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $|x - y| = ||x| - |y||$.
   (c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

5. **inf, min, max, sup**
   Untersuchen Sie die Mengen
   (a) $M = \{x \in \mathbb{R} \colon x = n/(n + 1), n \in \mathbb{N}\}$,
   (b) $M = \{x \in \mathbb{R} \colon x = 1/(n + 1) + (1 + (-1)^n)/2n, n \in \mathbb{N}\}$,
   (c) $M = \{n^2/2^n \colon n \in \mathbb{N}\}$
   auf Beschränktheit und bestimmen Sie ggf. Infimum, Supremum, Minimum und Maximum.

①

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \Big| \cdot n$$

$$\sqrt{2} \cdot n = m \quad \Big| \,^2$$

$$2 \cdot n^2 = m^2 \quad \Big\| \begin{array}{l} 2 = \text{teiler von } m \\ m = 2m' \end{array}$$

$$\Rightarrow 2n^2 = (2m')^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = 4m'^2 \quad \Big| : 2$$

$$\Rightarrow n^2 = 2m'^2 \quad \Big\| \begin{array}{l} 2 = \text{teiler von } n \\ n = 2n' \end{array}$$

$$\Rightarrow 2n'^2 = 2m'^2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2m'}{2n'} \Rightarrow \text{nicht vollständig gekürzt}$$

② a) $x = p + q = \text{rational}$

$$x = \frac{\cancel{x}}{2} + \frac{\cancel{x}}{2} = 2\frac{x}{2}$$

b) $y = r + s$ = irrational

$y = e - e = 0$ = rational

c) $z = p + r$ = irrational

$z = p + r \quad | -p$

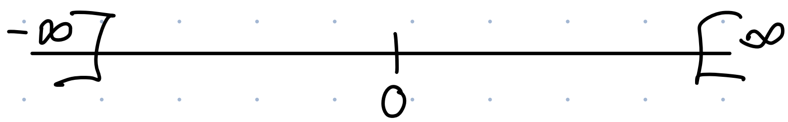
$z - p = r \quad (r = \text{irrational})$

3 a)

$\frac{x-1}{x+1} < 1 \quad | \cdot x+1$

$x - 1 < x + 1$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$



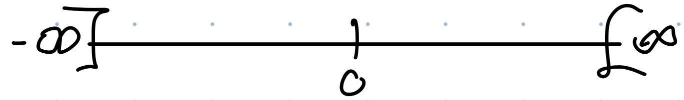
b) $x^2 + x + 1 \geq 0$

$-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}$ ↯

$x_{1,2} = \frac{\qquad}{2 \cdot 1}$

keine Nullstelle

↳ $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

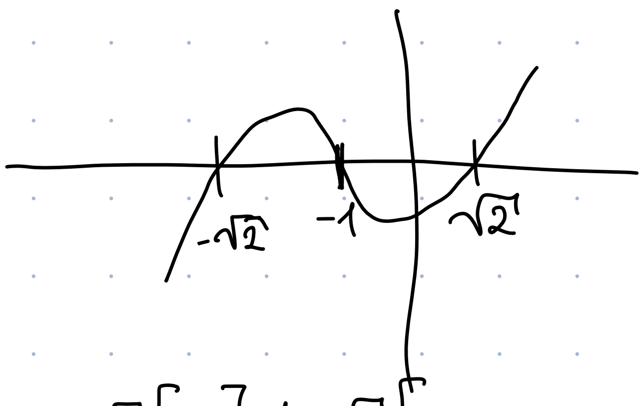


c) $x^3 - x^2 < 2x - 2 \quad | +2 \quad | -2x$

$x^3 - x^2 - 2x + 2 < 0$

$(x-1)(x^2-2)$

$(x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$



$\mathbb{L} =]-\infty; -\sqrt{2}[\; ; \;]-1; \sqrt{2}[$

(4)

a) Falsch, da $|x-y|$ immer ≥ 0 und $|x|-|y|$ nur ≥ 0 ist, wenn $y \leq x$ ist.

b) Falsch, es trifft nur für alle $x,y \geq 0$ zu, da für alle $x,y<0$ innerhalb der äußeren Betragsstriche auf beiden Seiten unterschiedliche Zahlen rauskommen.

c) Richtig!

(5)

a) $\min(M) = 0{,}5 = \frac{1}{1+1}$

$\inf(M) = 0{,}5$

$\sup(M) = 1$

nach unten beschränkt

1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ & $\frac{m}{n}$ ist vollst. gekürzt

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \Big| \cdot n$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot n = m \quad \Big|\ ^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = m^2 \quad \Big| \quad m = (2m')^2 \text{, da 2 teiler von } m$$

$$\Rightarrow 2n^2 = (2m')^2$$

$$\Rightarrow 2n^2 = 4m'^2 \quad \Big| : 2$$

$$\Rightarrow n^2 = 2m'^2 \quad \Big| \quad n^2 = 2n'^2 \text{ da 2 teiler von } n$$

$$\Rightarrow 2n'^2 = 2m'^2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2m'}{2n'}$$

② $p, q \in \mathbb{Q} \mid r, s \in \mathbb{R}$

a) $x = p + q \Rightarrow x = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = 2\frac{y}{2}$ = rational

b) $y = r + s \Rightarrow$ irrational

c) $z = p + r \Rightarrow z = x + y \quad | -x$

$\Rightarrow z - x = y \Rightarrow y$ ist irrational

③

a) $\frac{x-1}{x+1} < 1 \quad | \cdot (x+1)$

$x - 1 < 1 \cdot (x+1)$

$x - 1 < x + 1$

$M = \mathbb{R}$

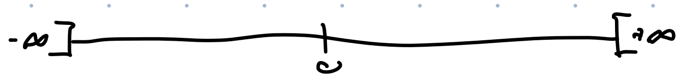
b) $x^2 + x + 1 \geq 0 \quad | -1$

$x^2 + x \geq -1 \quad | -x$

$x^2 \geq -1 - x$

$(x^2 \geq x$ immer$)$

$M = \mathbb{R}$



c) $x^3 - x^2 < 2x - 2$

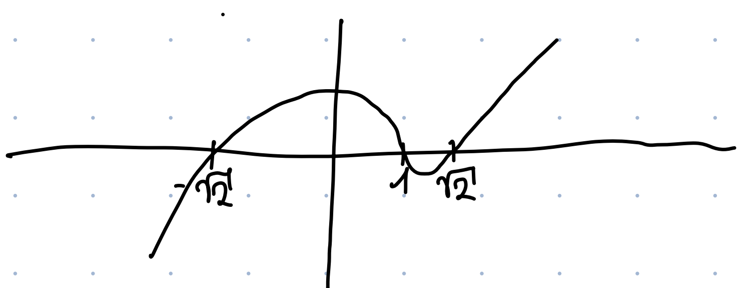
$x^3 - x^2 - 2x - 2 < 0$

$(x + a) \cdot (x^2 + b)$ $\qquad a \cdot b = -2 = -1 \cdot 2$

$\qquad a + b = -2 = -1 \cdot 2$

$\Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + 2)$

$\Rightarrow (x - 1) \cdot (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$



$M =]-\infty, -\sqrt{2}[\ ,]1, \sqrt{2}[$

d) $|1-x| \leq 1+2x$

Fall 1: $|1-x| \geq 0$

dann wird $|1-x| = 1-x$

nach x auflösen:

$$
\begin{aligned}
1-x &\leq 1+2x && \mid -1 \\
-x &\leq 2x && \mid +x \\
0 &\leq 3x && \mid :3 \\
0 &\leq x
\end{aligned}
$$

also ist $x \geq 0$, da wir angenommen haben dass
$1-x \geq 0$ vereinfacht sich dies zu $x \leq 1$
Daher ist die Lösung:

$$0 \leq x \leq 1$$

Fall 2: $1-x < 0$

In diesem Fall ist $|1-x| = -(1-x) = x-1$

$$
\begin{aligned}
x-1 &\leq 1+2x \quad && \big| -x \\
-1 &\leq 1+x && \big| -1 \\
-2 &\leq x
\end{aligned}
$$

also ist $x \geq -2$, da wir annahmen $1-x<0$ vereinfacht sich dies zu $x>1$ daher ist die Lösung

$$x > 1$$

Kombination der Lösungen:

Lösung Fall 1 $= \; 0 \leq x \leq 1$
Lösung Fall 2 $= \; x > 1$

Kombiniert:

$$x \geq 0$$

$M = [0, \infty[$