Praktikum III Sommer 2024

Mathematik II

1. **Schnecke auf dem Gummiband**

   Eine Schnecke befindet sich auf einem waagrechten Gummiband der Länge $1m$. Wir nehmen an, dass sich die Schneck zu Beginn am linken Endpunkt des Bandes befindet und jeden Tag $10cm$ auf dem Band (in Richtung des rechten Endes) zurücklegt. Nach jedem Tag wird das Band gleichmäßig um einen Meter gedehnt.

   (a) Erreicht die Schnecke jemals das Ende des Bandes, und, falls ja, wie lange bräuchte Sie dafür?

   (b) Wie lautet, die Antwort, wenn die Schnecke jeden Tag nur $1cm$ zurücklegt?

   (c) Wie lautet die Antwort, wenn man das Gummiband nach jedem Tag um 10% verlängert?

   Hinweis: Versuchen Sie, die Aufgabe zunächste einmal nur experimentell mit dem Computer zu lösen. Wenn Sie das Problem mathematisch angehen, dann sollten Sie einen Zusammenhang mit der (divergenten) harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ herstellen können.

2. **Reihen I**

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. (Dazu muss der Grenzwert nicht bestimmt werden!)

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n+n^3}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

   (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+20\sqrt{n}+1}{n^3-1}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{\sin(n)}{n^2}}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

3. **Leibniz-Kriterium**

   (a) Zeigen Sie das *Leibniz-Kriterium*: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierede Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge der "geraden" Partialsummen monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Zeigen Sie, dass die Folge der "ungeraden" Partialsummen monoton steigend und nach oben beschränkt ist. Zeigen Sie, dass beide Teilfolgen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.

   (b) Konvergiert die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot (1 - 2^{-\frac{1}{n^2}})? \tag{1}$$

   (c) Konvergiert die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{p_n}, \tag{2}$$

   wobei p_n die n-te Primzahl bezeichnet?

(d) (Experimentell) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \tag{3}$$

auf Konvergenz, indem Sie ein SageMath-Programm schreiben und einzelne Partialsummen berechnen. Was ist der maximale Wert, den Sie erreichen und wieviele Summand sind dafür nötig?

Weiterführend: 6. Beweis in Kapitel 1 "Sechs Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen" in Martin Aigner & Günter M. Ziegler (2014), Das BUCH der Beweise, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin.

4. **Absolute Konvergenz**

(a) Erinnern Sie sich an den Beweis, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergiert und modifizieren Sie die Argumentation um zu entscheiden, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n} \tag{4}$$

konvergiert.

(b) Im Gegensatz dazu konvergiert die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \tag{5}$$

mit Grenzwert $\ln 2 \approx 0.693$. Nennen Sie ein Argument für die Konvergenz (1 Wort) und entscheiden Sie, ob die alternierende harmonische Reihe absolut konvergent ist (1 Wort)?

(c) Wir betrachten nun die folgende Reihe, die nur durch Umstellung der Summanden aus (5) hervorgeht:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots . \tag{6}$$

Schreiben Sie ein SageMath-Programm, dass die einzelnen Partialsummen bestimmt und beweisen Sie, dass die Reihe konvergiert. Vergleichen Sie den Grenzwert mit dem Grenzwert von (5).

(d) Können Sie durch Umstellen der Summanden aus (5) auch einen anderen Grenzwert als in (b) oder (c) erreichen. Können Sie so umstellen, dass die Reihe divergiert?

5. **Konvertierung von Darstellungen**

(a) Wandeln Sie den Bruch $\frac{42}{39}$ (ohne Hilfe des Taschenrechners) in einen periodischen Dezimalbruch um.

(b) Wandeln Sie den Binärbruch $(1.00\overline{110})_2$ in einen Bruch der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ um.

(c) Wandeln Sie den Bruch $\frac{3}{7}$ in einen (periodischen) Binärbruch um.

Version: 2024-05-04 08:48:48+02:00

1 a)

2

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} = 0$ konv.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n+n^3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{n^3}+\frac{n}{n^3}}{\frac{1}{n^3}+\frac{n}{n^3}+1} = \lim_{n\to\infty} = 0$ konv.

c) $\sum^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} \Rightarrow \binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi \cdot n}} \to$ konv

$n=1$

d) $$\frac{n+20\sqrt{n}+1}{n^3-1}$$

$$\hookrightarrow \frac{\frac{n}{n^3}+\frac{20\cdot\sqrt{n}}{n^3}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}} = 0$$

f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \text{konvergent}$$

$$n! = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot \ldots \cdot 1$$

$$n^n = n \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot \ldots \cdot n_n$$

$$n^n > n!$$

③ Leibniz-Kriterium

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1-2^{-\frac{1}{n^2}}\right)$

$a_n = 1-2^{-\frac{1}{n^2}}$ -> monotone Nullfolge?

monoton fallend

z.z. $a_{n+1} < a_n$:

$1-2^{-\frac{1}{(n+1)^2}} \leq 1-2^{-\frac{1}{n^2}}$

$2^{-\frac{1}{(n+1)^2}} > -2^{-\frac{1}{n^2}}$

$1 - $ —"— $< 1 -$ —"—

Nullfolge

2.2. $\lim_{n \to \infty} 1 - 2^{-\frac{1}{n^2}} = 0$

↳ $2^{-\frac{1}{n^2}}$ nähert sich mit $\lim_{n \to \infty}$ immer mehr der 1 an

↳ somit nähert sich $1 - 2^{-\frac{1}{n^2}}$ mit $\lim_{n \to \infty}$ immer mehr der 0 an

=> Durch die Tatsache das $1 - 2^{-\frac{1}{n^2}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1 - 2^{-\frac{1}{n^2}})$

c)

monoton fallend :

$\frac{1}{p_n}$, p_n = n-te Primzahl , $a_n = \frac{1}{p_n}$

z.z. $a_{n+1} < a_n$

$\frac{1}{p_{n+1}} < \frac{1}{p_n}$, da die n+1-te Primzahl großer ist als die n-te Primzahl

Nullfolge

zz. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{p_n}$, nähert sich immer mehr der null an, da p immer größer wird.

⟶ daher wissen wir, dass die alternierende Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{p_n}$ konvergiert.

4

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n}$