Aufgabenblatt 4

Statistik – Sommersemester 2024 – Prof. Dr. Sandra Eisenreich

Aufgabe 1. *

An einem Samstag wollen Sie ausschlafen, und stellen keinen Wecker. Sie werden auch glücklicherweise nicht von äußeren Einflüssen aufgeweckt. Die Zufallsvariable X beschreibe die Stellung des Minutenzeigers der Uhr, und wir nehmen an, dass Sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu jeder Stellung des Minutenzeigers aufwachen könnten. Beschreiben Sie den Wertebereich, die Wahrscheinlichkeitsdichte und und die Verteilungsfunktion von X. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie zwischen halb und viertel vor aufwachen?

Aufgabe 2.

Ein Fußgänger braucht 15 Sekunden um eine Straße zu überqueren. Der mittlere Abstand zwischen 2 Fahrzeugen beträgt 6 Sekunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand zwischen 2 Fahrzeugen zum Überqueren der Straße ausreicht? (Hinweis: Der Abstand zwischen zwei Fahrzeugen ist exponentialverteilt.).

Aufgabe 3.

Ein Integer in C oder Java hat 32 Bit. Wir erzeugen nun zufällig einen Integer, wobei 0 und 1 an jeder Stelle gleichwahrscheinlich seien. X_i sei die Zufallsvariable, die den Wert des i-ten Bits des Integers angibt.

(a) Berechnen Sie zunächst Erwartungswert und Varianz von X_i.

(b) Nun sei $X = X_1 + \ldots + X_{32}$ die Anzahl der 1er in einem zufällig erzeugten Integer. Was ist die Verteilung von X näherungsweise?

Aufgabe 4.

Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her. Kein Produktionsvorgang ist so vollkommen, dass alle Platten gleich ausfallen. So lässt sich die Plattendicke X [mm] als Zufallsvariable auffassen. X sei normalverteilt und habe den Mittelwert $\mu = 10mm$ und die Standardabweichung $\sigma = 0.02mm$.Wieviel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn Nicht-Ausschuss-Platten

- mindestens 9.97 mm sein sollen?
- höchstens 10.05 mm stark sein sollen?

Wie muß man die Toleranzgrenzen $10 - c$ und $10 + c$ wählen, damit man nicht mehr als 5% Ausschuß erhält? Hinweis: Verwenden Sie, dass die Normalverteilung symmetrisch ist und bestimmen Sie c so dass $P(X < 10 - c) = 0.025$.

HOCHSCHULE LANDSHUT

Aufgabe 5.

Eine Grippeepidemie wird nach Einschätzung der Statistiker bei 8 % der Bevölkerung eine ärztliche Behandlung notwendig werden lassen. Ein Großhandel möchte für die Apotheken einer Kreisstadt mit 20.000 Einwohnern Behandlungsmaterialien im voraus bestellen.

- Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung der Anzahl der Patienten?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden maximal 1.700 Patienten anfallen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 1.500 Patienten anfallen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Patienten um weniger als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab.

Aufgabe 6.

Und nochmal eine Aufgabe mit Nieselregen: Es fallen auf einen Gitterrost auf dem Boden 100.000 Wassertropfen. Der Gitterrost hat 100 Löcher. Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass die Anzahlen der Tropfen, die auf verschiedene Löcher des Gitters fallen, voneinander unabhängig sind. Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit an, dass in ein solches Loch zwischen 950 und 1050 Tropfen fallen und berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 7.

(a) Es sei X die Zufallsvariable “Abweichung der Länge eines Bauteils vom Soll-Maß”. Angenommen, die Maschine, welche das Bauteil herstellt, ist richtig eingestellt. Geringe Abweichungen sind wahrscheinlicher als größere. Was könnte die Wahrscheinlichkeitsdichte von X sein? Welche unbekannte Größe ist noch Teil dieser Verteilung? Wie könnte man prüfen, ob die Maschine richtig eingestellt ist?

(b) Ein Chemiker will wissen, wie viele Sekunden es dauert, bis ein Molekül eines radioaktiven Materials zerfällt, wenn im Schnitt 1 Moleküle alle 2 Sekunden zerfällt. Wie sieht die zugrundeliegende Verteilung aus, das heißt was sind Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion? Was sind die Formeln für Erwartungswert und Varianz?

(c) Angenommen, X,Y und Z sind die Zufallsvariablen “Abweichung eines Bauteils in x-/ y-, bzw. z- Richtung”. Wir nehmen weiterhin an, dass X,Y,Z standardnormalverteilt sind und aufgrund des speziellen Fertigungs- und Messprozesses unabhängig voneinander. Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $M = X^2 + Y^2 + Z^2$, welche die quadratische Abweichung angibt? Was sind Erwartungswert und Varianz?

(d) Seien X,Y,Z wieder die Zufallsvariablen “Abweichung eines Bauteils in x-/ y-, bzw. z- Richtung”. Dieses Mal nehmen wir jedoch an, dass diese nicht unabhängig von einander sind, sondern (X,Y,Z) eine gemeinsame Verteilung besitzen. Wie könnte diese definiert sein, wenn wir wieder davon ausgehen, dass die Maschine richtig eingestellt ist, und die Kovarianzmatrix von (X,Y,Z) unter dieser Wahrscheinlichkeit die folgende Matrix ist:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8. ***

Wir ziehen n-mal mit zurücklegen aus einer Urne mit roten, weißen und grünen Kugeln mit Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote zu ziehen, ist p_1, eine weiße p_2, und eine grüne p_3. Dann ist der Zufallsvektor $(X_1, X_2, X_3) =$(“Anzahl von gezogenen roten Kugeln”, “Anzahl von gezogenen weißen Kugeln”, “Anzahl von gezogenen grünen Kugeln”) multinomialverteilt, also $(X_1, X_2, X_3) \sim Mult(n; p_1, p_2, p_3)$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix von (X_1, X_2, X_3).
Hinweis: Verwenden Sie, dass X_i binomialverteilt sind. Für die Berechnung von $Cov(X_i, X_j)$ berechnen Sie zunächst $Var(X_i + X_j)$. Hierbei dürfen Sie verwenden, dass falls $X_i \sim b_{n,p_i}$ und $X_j \sim b_{n,p_j}$, dass dann $X_i + X_j \sim b_{n,p_i+p_j}$. Dann bentzen Sie $Var(X_i + X_j) = Var(X_i) + Var(X_j) - 2Cov(X_i, X_j)$.

② X = Zeit zw. 2 Autos

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$$

$$P(X>15) = 1-P(X<15) = 1-\left(1-e^{-\lambda x}\right)$$

$$= 1-\left(1-e^{-\frac{1}{6}\cdot 15}\right)$$

$$= 1-1+e^{-\frac{15}{6}} = 0{,}082$$

$$= 8{,}2\,\%$$

(3) a) $P(X_i = k) = \begin{cases} 0{,}5 & k=0 \\ 0{,}5 & k=1 \end{cases}$ $\quad n=1,\ p=0{,}5$

$E(X_i) = \underset{n\ \cdot\ p}{1 \cdot 0{,}5} = 0{,}5$ / $Var(X_i) = n \cdot p \cdot (1-p)$

$= 1 \cdot 0{,}5 \cdot (1-0{,}5) = 0{,}25$

b) X ist "eigentlich" $b_{32;0{,}5}$ -verteilt

Als Summe von über 30 gleichverteilten und unabh. Zufallsvariablen ist X nach dem zentralen Grenzwertsatz annähernd normalverteilt

$X \sim N(\overset{\mu}{32 \cdot 0{,}5}, \overset{\sigma}{32 \cdot 0{,}25}) = N(16, 8)$

$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$

$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$ falls X_1, X_2 unabhängig

④ a) $X =$ "Plattendicke" $\sim N(10, 0{,}02^2)$

$P(X \leq 9{,}97) =$

Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2}(x-10)^2\right)}$

Verteilungsfunktion: $P(X \leq 9{,}97) = \int_{-\infty}^{9{,}97} f(x)\,dx$

$= \Phi\left(\frac{9{,}97-10}{0{,}02}\right)$

$= \Phi(-1{,}5)$

$= 1 - \Phi(1{,}5)$

$= 0{,}0688.$

b) $P(X > 10{,}05) = 1 - P(X \leq 10{,}05) = 1 - \phi\left(\frac{10{,}05 - 10}{0{,}02}\right)$

$= 1 - \phi(2{,}5)$

$= 1 - 0{,}9938$

$= 0{,}0062$

c) $P(X \leq 10 - c) = 2{,}5\,\% = 0{,}025$

$\qquad \parallel$

$\phi\left(\frac{10 - c - 10}{0{,}02}\right) = \phi\left(\frac{c}{0{,}02}\right)$

$= 1 - \phi\left(\frac{c}{0{,}02}\right) \Leftrightarrow \phi\left(\frac{c}{0{,}02}\right) = 0{,}975 \overset{\text{Tabelle}}{\Longrightarrow} \frac{c}{0{,}02} = 1{,}96 \;\; | \cdot 0{,}02$

$= c = 0{,}0392$

5 Bernoulli. Exp. mit $n = 20.000$ $p = 0{,}08$

$X =$ "Anzahl der Patienten" $\sim b_{20.000;0{,}08}$

a)

$E(X) = n \cdot p = 20.000 \cdot 0{,}08 = 1.600$

$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 20.000 \cdot 0{,}08 \cdot (1-0{,}08) = 1.472$

$\Rightarrow \sigma = \sqrt{1472} = 38.72$

Standardabweichung

b) $P(X \leq 1.700)$

Ann. mit Normalverteilung: $n \cdot p = 1.600 > 5$ $n \cdot (1-p) > 5$ ✓.

$P(X \leq 1700) = 1 - P(X < 1.500) = 0{,}9955$

c) $P(X \geq 1500) = 1 - P(X < 1.500) = 0{,}9955$

d) 0,682

$P(1.600 - 38{,}37 \leq X \leq 1600 + 38{,}37)$

$= P(X \leq 1.600 + 38.37) - P(X < 1.600 - 38.37)$

$= \phi\left(\frac{38.37 + 0{,}5}{38.37}\right) - \phi\left(\frac{-38{,}37 - 0{,}5}{38{,}37}\right) = 2\phi(\approx 1) - 1 = 0{,}682$

6 Bernoulli: $n = 100.000$ $p = 0{,}01$

X = "Anzahl Tropfen in einem Loch" $\sim b_{100.000,\, \frac{1}{100}}$

Poisson-Näherung? $n \cdot p \nleq 10$ Nein!

Näherung durch Normalverteilung: $n \cdot p > 5$ ✓ $n \cdot (1-p) > 5$ ✓

$P(950 \leq X \leq 1050)$

$$= P(X \leq 1050) - P(X < 950) = \phi\left(\frac{1050 - 1000 + 0,5}{31,46}\right) - \phi\left(\frac{950 - 1000 - 0,5}{31,46}\right)$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{50,5}{31,46}\right) - \phi\left(\frac{-50,5}{31,46}\right)$$

$$= \phi(1,605) - 1 + (1,605) = 2 \cdot \phi(1,605) - 1$$

$$= 0,892$$

7

a) $N(0, \sigma^2)$ Mittelwert einer Stichprobe berechnen.
$\sigma = 2$

b) Exponentialverteilung $E(X) = 2 = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$