1. Solve the following Problem using simplex Algorithm

maximize $6x_1 + 4x_2 + 3x_3$

subject to

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 12$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 10$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Slack form

$$z = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$x_4 = 12 - 4x_1 - 5x_2 - 3x_3$$
$$x_5 = 10 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$
$$x_6 = 8 - 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

non-basic variable 중 x_1의 coefficient가 가장 크다.
따라서 x_1을 선택한다.

x_4은 x_1가 $\frac{12}{4} = 3$을 초과하면 음수가 되고
x_5은 x_1이 $\frac{10}{3} = 3.33...$을 초과하면 음수가 되고
x_6은 x_1이 $\frac{8}{4} = 2$을 초과하면 음수가 된다.

x_6이 가장 strict하기에 x_6을 선택한다.

$$x_6 = 8 - 4x_1 - 2x_2 - x_3$$
$$4x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 - x_6$$
$$\therefore x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_6$$

$$Z = 6\left(2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_6\right) + 4x_2 + 3x_3$$
$$\therefore Z = 12 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_6$$

$$x_4 = 12 - 4\left(2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_6\right) - 5x_2 - 3x_3$$
$$x_4 = 12 - 8 + 2x_2 + x_3 + x_6 - 5x_2 - 3x_3$$
$$\therefore x_4 = 4 - 3x_2 - 2x_3 + x_6$$

$$x_5 = 10 - 3\left(2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_6\right) - 4x_2 - 2x_3$$
$$x_5 = 4 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_6 - 4x_2 - 2x_3$$
$$\therefore x_5 = 4 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_6$$

$$Z = 12 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_6$$
$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_6$$
$$x_4 = 4 - 3x_2 - 2x_3 + x_6$$
$$x_5 = 4 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_6$$

non-basic variable 중 x_3의 coefficient가 가장 크다.
따라서 x_3을 선택한다.

x_1은 x_3이 $2/\frac{1}{4}=8$을 초과하면 음수가 되고
x_4는 x_3이 $4/2=2$을 초과하면 음수가 되고
x_5는 x_3이 $4/\frac{5}{4}=\frac{16}{5}=3+\frac{1}{5}$을 초과하면 음수가 된다.

x_4이 가장 strict하기에 x_4을 선택한다

$$Z = 12 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_6$$
$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_6$$
$$x_4 = 4 - 3x_2 - 2x_3 + x_6$$
$$x_5 = 4 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_6$$

$$\therefore x_3 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$

$$Z = 12 + x_2 + \frac{3}{2}\left(2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6\right) - \frac{3}{2}x_6$$
$$Z = 12 + x_2 + 3 - \frac{9}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_6 - \frac{3}{2}x_6$$
$$\therefore Z = 15 - \frac{5}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}\left(2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6\right) - \frac{1}{4}x_6$$
$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{1}{8}x_6 - \frac{1}{4}x_6$$
$$\therefore x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{3}{8}x_6$$

$$x_5 = 4 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{4}\left(2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6\right) + \frac{3}{4}x_6$$
$$x_5 = 4 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{5}{2} + \frac{15}{8}x_2 + \frac{5}{8}x_4 - \frac{5}{8}x_6 + \frac{3}{4}x_6$$
$$\therefore x_5 = \frac{3}{2} - \frac{5}{8}x_2 + \frac{5}{8}x_4 - \frac{1}{8}x_6$$

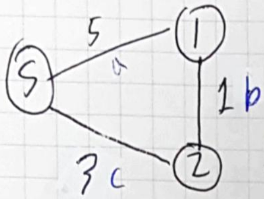
$$Z = 15 - \frac{5}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6$$
$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_4 - \frac{3}{8}x_6$$
$$x_3 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6$$
$$x_5 = \frac{3}{2} - \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{8}x_4 - \frac{1}{8}x_6$$

maximum is 15 Where $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (\frac{3}{2}, 0, 2, 0, \frac{3}{2}, 0)$

2. Explain how the single source Shortest Paths Problem can be cast as a Linear Programming Problem

Solution)

예를 들어서 설명하자.



와 같은 그래프가 있을 때,

S에서 node 1, 2로 가는 cost를 각각 x_1, x_2라고 하자.
그렇다면, 우리의 목표는 minimize x_1+x_2 이다.
node 1을 살펴보면, node 1과 연결된 edge a, b가 있다.

a: $S \xrightarrow{5} 1 \Rightarrow x_1 \ge 5$

b: $1 \xrightarrow{1} 2 \Rightarrow x_1 \ge 1+x_2$

node 2를 살펴보면, node 2와 연결된 edge b, c가 있다.

b: $2 \xrightarrow{1} 1 \Rightarrow x_2 \ge 1+x_1$

c: $2 \xrightarrow{3} S \Rightarrow x_2 \ge 3$.

따라서 LP로 cast하면,

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && x_1+x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 \ge 5 \\ &&& x_1 \ge 1+x_2 \\ &&& x_2 \ge 1+x_1 \\ &&& x_2 \ge 3 \end{aligned} \quad \equiv \quad \begin{aligned} &\text{maximize} && x_1+x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 \le 5 \\ &&& x_1 \le 1+x_2 \\ &&& x_1 \le 1+x_1 \\ &&& x_2 \le 3 \\ &&& x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Complex algorithm을 이용해 풀면,

$$z = x_1 + x_2$$
$$x_3 = 5 - x_1$$
$$x_4 = 1 - x_1 + x_2$$
$$x_5 = 1 - x_2 + x_1$$
$$x_6 = 3 - x_2$$

x_1을 선택하였을때, x_4이 $1/1$으로 가장 strict 하기에 x_4을 선택한다.

$$x_4 = 1 - x_1 + x_2$$
$$\therefore x_1 = 1 - x_4 + x_2$$
$$z = (1 - x_4 + x_2) + x_2$$
$$\therefore z = 1 + 2x_2 - x_4$$
$$x_5 = 1 - x_2 + 1 - x_4 + x_2$$
$$\therefore x_5 = 2 - x_4$$

$$x_3 = 5 - (1 - x_4 + x_2)$$
$$\therefore x_3 = 4 + x_4 - x_2$$

$$\therefore \quad z = 1 + 2x_2 - x_4$$
$$x_1 = 1 - x_4 + x_2$$
$$x_3 = 4 - x_2 + x_4$$
$$x_5 = 2 - x_4$$
$$x_6 = 3 - x_2$$

No.　　Date

x_2를 선택하였을 때,

x_6이 $\frac{3}{1}=3$으로 가장 strict하기에 x_6을 선택한다.

$$x_6 = 3 - x_2$$
$$\therefore x_2 = 3 - x_6$$

$$z = 1 + 2(3 - x_6) - x_4$$
$$z = 7 - x_4 - 2x_6$$

$$x_1 = 1 - x_4 + (3 - x_6)$$
$$\therefore x_1 = 4 - x_4 - x_6$$

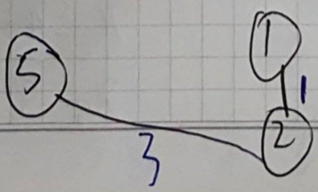
$$x_3 = 4 - (3 - x_6) + x_4$$
$$\therefore x_3 = 1 + x_4 + x_6$$

$$x_5 = 2 - x_4$$

$$z = 7 - x_4 - 2x_6$$
$$x_1 = 4 - x_4 - x_6$$
$$x_2 = 3 - x_6$$
$$x_3 = 1 + x_4 + x_6$$
$$x_5 = 2 - x_4$$

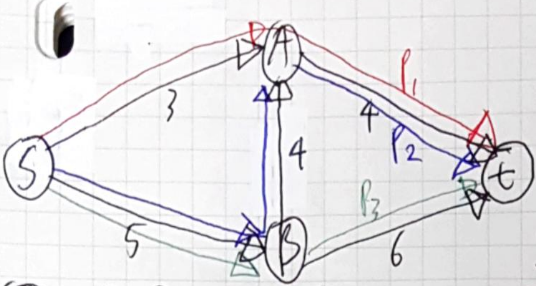
$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, 3, 1, 0, 2, 0)$$

non-basic variables가 x_4, x_6 인데, 이 말은 여기에 대응하는 edge인 b, c가 선택되었다는 뜻이다.
그럴 때 $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ 으로 최단이 된다는 결론이 나온다.

$\therefore$ 

3. Explain how the maximum flow problem can be cast as a linear programming problem

예시를 들어서 설명하자.



와 같은 그래프가 있다.

S → t 로가는 Path는 P_1, P_2, P_3 세가지 Path가 있다.

P_1에 대해서 가장 capicity가 적은 edge의 capicity는 3이다.

$\therefore P_1 \le 3$

P_2에 대해서 가장 capicity가 적은 edge의 capicity는 4이다.

$P_2 \le 4$

P_3에 대해서 가장 capicity가 적은 edge의 capicity는 5이다.

$P_3 \le 5$

P_1와 P_2의 겹치는 edge의 capicity는 4이다.

$P_1 + P_2 \le 4$

P_2와 P_3이 겹치는 edge의 capicity는 5이다.

$P_2 + P_3 \le 5$

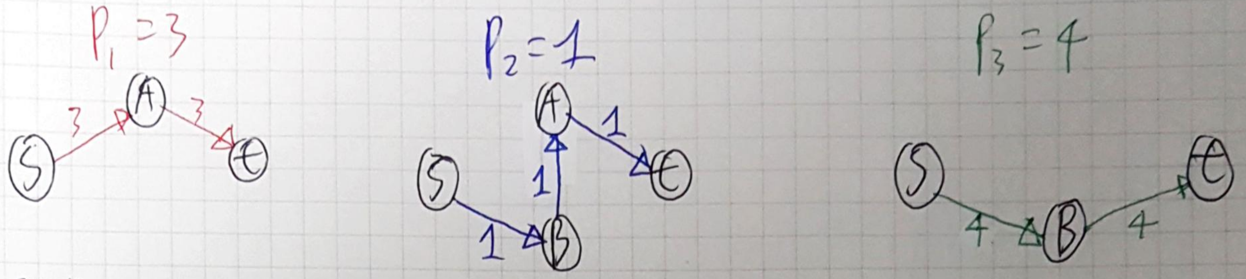
maximize $P_1 + P_2 + P_3$

subject to
$P_1 \le 3$
$P_2 \le 4$
$P_3 \le 5$
$P_1 + P_2 \le 4$
$P_2 + P_3 \le 5$

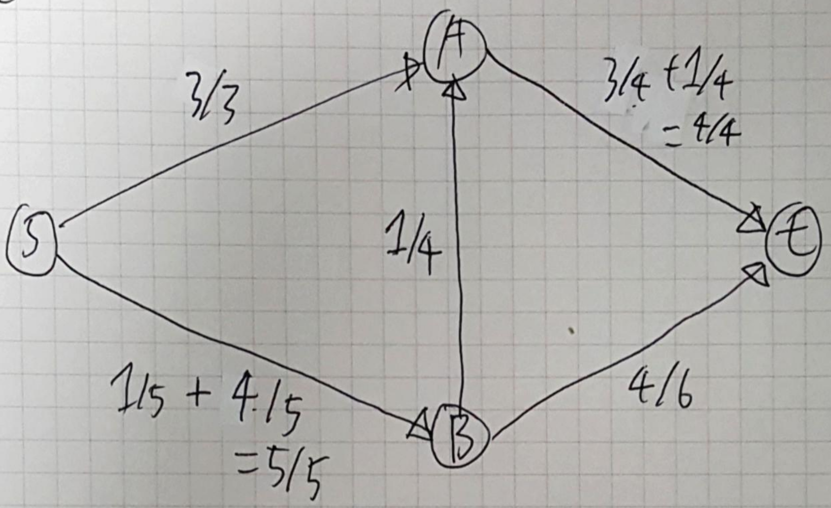
$\Longrightarrow$

$z = P_1 + P_2 + P_3$
$x_1 = 3 - P_1$
$x_2 = 4 - P_2$
$x_3 = 5 - P_3$
$x_4 = 4 - P_1 - P_2$
$x_5 = 5 - P_2 - P_3$

풀고나면, $z = 8$, $P_1 = 3$, $P_2 = 1$, $P_3 = 4$ 이다.



다 합치면



Ⓢ에서 나오는 flow, Ⓣ으로 들어가는 flow가 8로 동일하다.