3강

Convex Sets

볼록집합! 특정한 성질을 가지는 집합!

Motivation

- Why study convex sets?
- Definition of convex optimization:

To minimize a convex function of a variable subject to the variable in convex sets.

min x^2 -2x+3

s.t. 0≤x≤2 ==

$$x \in [0, 2]$$

convex function과 convex sets을 알아야 한다.

- So convex set is closely related to constraints of CO → constraint와 관련이 있다.
- We will study convex sets and then convex functions
- It turns out that convex function and convex sets are closely related → 서로 상호 정의가 가능하다.

Notation

- R: set of real numbers. - scalar
- R^n: set of n-dimensional real vectors

$$x \in R : x\, is\, scalar$$
$$x \in R^n : x\, is\, column\, vector\, with$$
$$x \in \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

- But we simply write x = (x_1, ..., x_n) for convenience

  : still x is column vector → 단순 편의성을 위해 이렇게 쓴다.

- we use capital letter to denote matrices → 벡터는 소문자, 메트릭스는 대문자

$$X \in R^{m \times n}$$

→ X는 실수 행렬이고, mxn 행렬이고, m rows와 n cols를 가진다.

- X ∈ S^n, X is n × n symmetric matrix → 대각선을 중심으로 뒤집어도 일치하는 행렬임 (당연히 square matrix임)

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a square matrix A is said to be invertible if there exists matrix B such that AB = BA = I,

  and denote B = A^(-1)

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

→ 이건 좀 중요하다.

pf)

$$ABB^{-1}A^{-1} = I$$

- We have

$$Ax = b$$

where A ∈ R^m×n, x ∈ R^n and b ∈ R^m. Always check if dimensions make sense!

→ dimensions이 맞는지 확인해라

mxn * nx1 = mx1

- T denotes transpose operation
- If x,c ∈ R^n
  - c^T * x is scalar → 1×1 (inner product)
  - c * x^T ∈ R^(n×n) is a rank-1 matrix (outer product)
- If X is symmetric, X = X^T
- if A=mxn, then A^T=nxm

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$$

pf)

$$AA^{-1} = I$$
$$(A^{-1})^T A^T = I$$
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

- Let Q ∈ S^n, x ∈ R^n, then (x^T)Qx is called quadratic form → 이차다항식 형태

  → (x^T)Qx의 결과는 scalar가 나온다.

  → n=1이라도 성립한다. 그렇다면 그 결과는 ax^2이 된다.

  - what if Q is not symmetric?

    $$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

    이여도 만들어지는 것은 가능하다.

    대칭이 아닌 \{bar}Q가 주어져도 (Q + Q^T)/2을 새로운 Q로 지정할 수 있다.

Lines

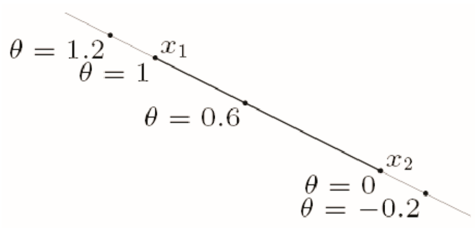
- Line: the set of points connecting two points, say x1 and x2,

$$\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \mid \theta \in R\}$$

모든 가능한 theta를 움직이면서 그려지는 점인 것이다.

- consider x2 + θ(x1 – x2):

  →x_2 is reference point, and consider all vectors from x_2 and parallel to (*x_1* – *x_*2)



Affine Sets

Set A is affine

if for any x1,x2 ∈ A, A contains the line connecting x1 and x2,

i.e., θ * x_1 + (1 – θ) * x_2 ∈ A for all θ ∈ R.

→ A안에 있는 두개의 점이 있으면 line을 그릴 수 있는데, 그 직선 위에 있는 점들의 집합도 A안에 들어간다. → Hyper plane의 개념

→ 평면, 직선도 Affine Sets이다.

→ 유한한 평면은 Affine Sets이 아니다.

(직선 위의 모든 점들이 Affine Sets에 들어가야 하는데, 그게 아닌 경우가 존재한다.)

- Solution set of linear equations, S = {x|Ax = b}. → 여러개의 초평면들의 교집합이 된다.

  → 만일 x_1, x_2 ∈ A이라면, Ax_1 = b, Ax_2 = b,

  θAx_1 = θb, (1-θ)Ax_2 =(1-θ) b

  θAx_1 + (1-θ)Ax_2 = b

  A(θx_1 +(1-θ)x_2) = b

  θx_1 +(1-θ)x_2 ∈ A → Affine Set이다.

- 1,2,3,...n 차원이 다 Affine Set이다.
- Is ‘half-plane’ an affine set?

  → ‘half-plane’? 반평면? 절반의 평면만을 가져가는 것이다.

  → Affine Set이 아니다.