4강

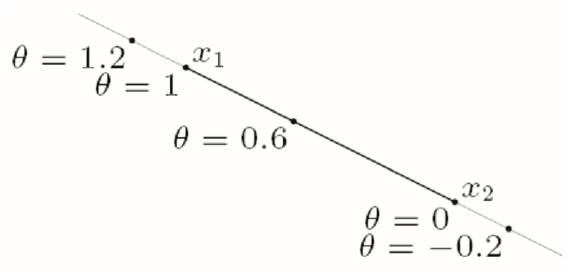
convex set

line segment(선분)

$$\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2 | \theta \in [0,1]\}$$

θ와 1-θ은 scalar, x_1, x_2은 벡터이다.

위 수식은 일반적으로 선형결합, Linear combination이라고 한다.



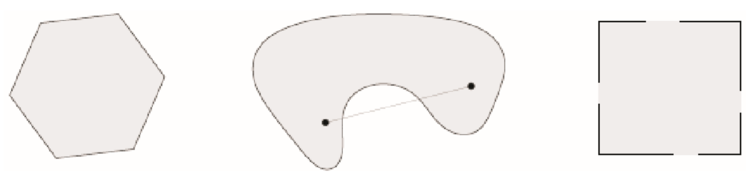
convex set

Set C is convex if for any x1,x2 ∈ C, C contains the line segment connecting x1 and x2,

i.e., θ x1 + (1 – θ) x2 ∈ C for all θ ∈ [0,1].

→ 두 점을 잡아 그어서 생기는 선분 위의 모든 점이 그 집합 안에 속해야 한다.

Example



(A) convex set (B) not convex set (C) not convex set

모양이 안에서 밖을 보았을 때 경계선이 밖으로 볼록하면 convex set일 확률이 높다.

- Discrete set: consider set {x_1, x_2, ..., x_m} where x_i ∈ R^n
  - if there is only one point in the set (singleton), it is convex set
    (점이 하나만 있으면 convex set 이다.)
  - Otherwise (2 or more points – countably many) it is not a convex set
    (점이 두개 이상 있으면 convex set 이다.)
- {0, 1} is not convex set but [0, 1] and (0, 1) are convex sets
  {0, 1}은 집합 기호임. 0, 1이 들어있는 집합에 불과, convex set이 아니다.
  [0, 1] and (0, 1)은 닫힌 구간, 열린 구간이기에 convex set 이다.

Linear and Convex combinations

- A Linear Combination x of n points, say x_1, ..., x_n is given by,

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + ... + \theta_n x_n$$

for some θ_i ∈ R, i = 1...n.

선형결합의 definition

- A Convex combination x of n points, say x1,...,xn is given by,

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + ... + \theta_n x_n \\ for some\ \theta_i \geq 0,\ i = 1...n, and \sum \theta_i = 1.$$

Convex combinations의 definition

Convex hull

- For a set S, **convex hull** of S is a set denoted by conv(S)
  containing all possible convex combination of points in S.
  집합 S로 가능한 convex set을 만드는 것이다.
  ex) S={x_1, x_2}, conv(S) = {θ x1 + (1 – θ) x2 ∈ C for all θ ∈ [0,1].}

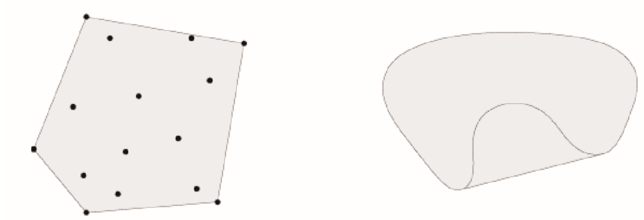
ex) S={x_1, x_2, x_3}, conv(S) = {θ_1*x_1 + θ_2*x_2 + θ_3*x_3 ∈ C for all θ_i ∈ [0,1], sum θ_i = 1.}

- Geometrically, conv(S) is the smallest convex set that contains S.

  (가장 타이트한 set)

- If S itself is a convex set, S =conv(S)

  S =conv(S)의 여부를 통해 S가 convex set인지 아닌지를 판단가능

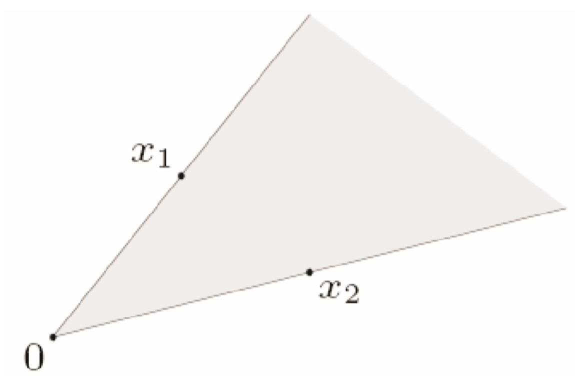


Convex cone

- conic combination

  A conic combination x of two points x_1 and x_2 is such that

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$
$$for\ some\ \theta_1, \theta_2 \geq 0.$$



- A convex cone

- A convex cone is a set containing all possible conic combination of any two points from the set.

  두 점에 대하여 모든 conic combination들의 집합이 convex cone이다.

  convex cone은 convex set일 수 밖에 없다. (볼록하기도하고, 수학적으로도 그러하다.)

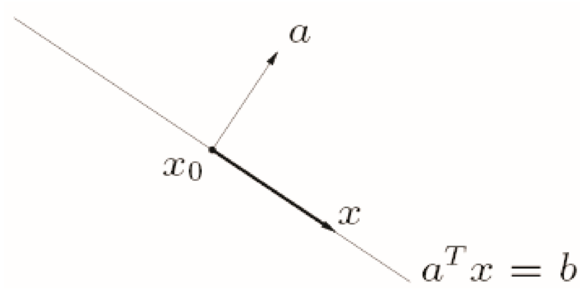
  → 둘 계수가 양수인 것들을 다 집어 넣으면 합쳐서 1이되는 계수도 포함된 것이 아닌가?

- Convex cone must include the origin

Hyperplanes

Hyperplane set of points

$$\{x|a^Tx = b\},\ a \neq 0$$



초평면?

a는 벡터, b는 scalar이다.

- a is called a normal vector.

  a는 수직인 벡터이다.

- For a fixed point x_0 in the set, we have

$$a^T(x - x_0) = 0$$
$$where\ setting\ b := a^Tx_0$$

  gives the hyperplane equation.

$$a^T x - a^T x_0 = 0$$
$$a^T x_0 = b$$
$$\therefore a^T x = b$$

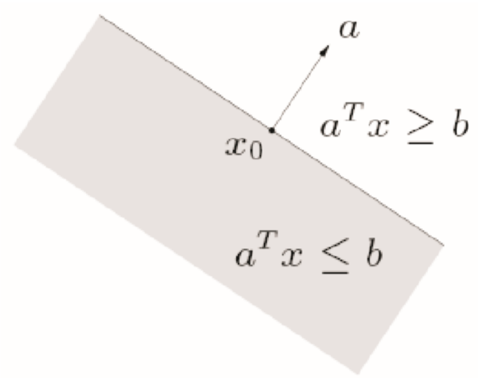
- Hyperplanes are affine and convex.

  → affine이면 convex이다.

Halfspaces

Halfspace set of points

$$\{x | a^T x \leq b\}, a \neq 0$$



경계선이 a^T * x = b가 된다.

벡터 a와 x의 각이 둔각이다. →

$$a^T (x - x_0) \leq 0$$

이면 Halfspaces이다.

저 까만 공간 위의 부분은 a와 예각을 이룬다.

- a and x − x_0 has acute angle(예각)? obtuse angle(둔각)? a^T(x − x_0) ≥ 0 or a^T(x − x_0) ≤ 0
- Halfspaces are convex but not affine

  선분을 그어보면 affine set이지만, 직선을 그으면 set을 넘어가 버린다.

Norms (in vector space)

- A Norm is a function denoted by $||\cdot||$

  that maps a vector to a nonnegative real number with following properties:

  (Norms는 벡터에 대하여 다음 조건을 만족하는 음이 아닌 실수를 return하는 함수이다.)

$$||\cdot|| : R^n \to R_+$$

  - || x || ≥ 0
  - || x || = 0 iff x is a zero vector (x의 모든 element가 다 0일 때, 아니면 무조건 0이 아닌 양수.)
  - || tx || = | t | || x || for t ∈ R
  - || x + y || ≤ || x || + || y || (triangular inequality) - 중요

- You can think of norm as its size or distance from the origin
- p-norm: for p ≥ 1,

$$||x||_p = (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

→ 각각의 element의 P제곱을 하여 다 더한 뒤 1/p제곱을 해준다.

- Euclidean distance is 2-norm (이때까지 사용한 벡터의 길이에 대한 개념이 이것이다.)