

Inequality signs for vectors and matrices

For vectors  $x$  and  $y$ ,  $x \leq y$  denotes the componentwise inequality.  
→ componentwise inequality은 각각 같은 차원에 있는 element끼리 비교해서 한쪽 벡터의 모든 element가 작으면 부등호 기호를 사용하는 것이다.

With some abuse of notation,  
we will write  $x \geq 0$  for componentwise nonnegative vector  
 $x$ 가 벡터인데, 0보다 크다고하면,  $x$ 의 모든 element가 0보다 크다는 것이다.  
→ 사실 엄밀히 말하면 0벡터보다 크다는 것을 말하는 것이다.

Can we define signs for matrices?  
행렬에 대해서 어떤 sign을 줄 수 있는가?  
→ 따로 정의를 하는 개념이 있다.

Positive definite matrices  
→ 행렬의 음수, 양수에 준하는 개념이다.

A symmetric matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is positive (semi-)definite if for any  $x \in \mathbb{R}^n$  with  $x \neq 0$ , we have that  $x^T A x > 0$  ( $x^T A x \geq 0$ ).

$n=1$ 이면,  $A$ 는  $a$ 라는 scalar이다.  
즉, 이는 scalar를 포함한 정의인 것이다.

$n=2$ 이면 이차식이 나온다.  
→ 이 이차식이 항상 양수인지 아닌지에 대한 정의이다.

$A$ 가 PSD/PD이다 →  $x^T A x > 0$  /  $x^T A x \geq 0$   
 $A > 0$  /  $A \geq 0$  →  $A$ 의 모든 원소가 0보다 크다 / 0보다 크거나 같다.

This is a way to define “sign” of a matrix by considering the quadratic form  
→ 아래로 볼록해야 한다는 성질에 관한 것이다.  
→  $A$ 가 PD냐 아니냐로 결정된다.

- some definition
- $S$  : set of symmetric  $n \times n$  matrices
  - $S_{\geq 0}$  : set of symmetric positive semidefinite  $n \times n$  matrices (PSD)
  - $S_{> 0}$  : set of symmetric positive definite  $n \times n$  matrices (PD)

PSD/PD matrices can be characterized by the sign of their eigenvalues  
실수인 symmetric matrix는 실수인 eigenvalues를 가진다.

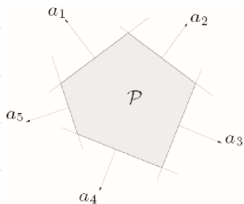
$A \in S_{> 0}$  if  $\lambda_i > 0$   
 $A \in S_{\geq 0}$  if  $\lambda_i \geq 0$

Polyhedra  
A polyhedron is defined as

$$\{x \mid Ax \leq b, Cx = d\}$$

for some  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{k \times n}, d \in \mathbb{R}^k$

polyhedron은 m개의 halfspaces과 n개의 hyperplanes의 교집합을 의미한다.



이것은 항상 밖으로 볼록한 convex set이 될 수 밖에 없다.