8강

Range examples

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- For any v ∈ R^2, we have

  $$Av = (v_1 + 2v_2, 2v_1 + 4v2_) = c(1,2)$$

  for some constant c Thus, R(A) = {c(1,2) | c ∈ R} and is a subspace with dimension of 1

  → v에 뭘 넣던지 간에 c(1, 2)라는 결과가 나오는 것이다. 이는 원점을 지나는 직선이다.

  → 그 dim은 1이된다. 즉, dim=2인 v가 R(A_1)를 거치면 dim=1이 되는 것이다.

  → 왜냐하면 a_1, a_2이 linearly independent하지 않기 때문이다.

  이것은 차원이 줄어드는 example이다.

  $$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- it turns out that whole R^2 can be mapped onto with Ax for x ∈ R^2
- Thus R(A_2) = R^2 and has dimension 2

  → 왜냐하면 a_1, a_2이 linearly independent하기 때문이다.

  → 이것은 차원이 유지되는 example이다.

→ 차원이 더 작아지기는 하지만 더 커지지는 못한다.

Case R(A) = R^m

- if statement R(A) = R^m is equivalent to the following:
  - columns of A spans R^m

by definition.

pf)

if A has right inverse, that is, there exists B such that

$$AB = I$$
$$with\ B = A^T(AA^T)^{-1}$$

$$AB = I$$
$$A[b_1\ b_2\ ...\ b_m] = I$$
$$Ab_i = e_i\ for\ i = 1, ...m$$

$$Let\ c \in R^m$$
$$c = A(c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_mb_m)$$

임의의 c_1, c_2, ... c_m을 집어 넣으면 c를 만들 수 있는 것이다.

- A^T * c = 0 implies that c = 0

  pf)

  → c는 m차원 벡터이다.

$$\exists_{x_1} Ax_1 = e_1$$
$$\exists_{x_2} Ax_2 = e_2$$
$$...$$
$$\exists_{x_m} Ax_m = e_m$$

$$A^Tc = 0$$
$$c^TA = 0^T$$
$$c^TAx_1 = 0$$
$$c^T(Ax_1) = 0$$
$$c^T(e_1) = 0$$
$$c_1 = 0$$
$$...$$
$$c^T(Ax_m) = 0$$
$$c^T(e_m) = 0$$
$$c_m = 0$$
$$\therefore c = 0$$

  A^T * c → linear combination of rows of A.

- the rows of A are independent

  A^T * c = 0 implies that c = 0이려면 the rows of A are independen하다.

- $$det(AA^T) \neq 0$$

  pf)

  Assume det(AA^T) = 0

  →

$$\exists_{c\neq0} AA^T c = 0$$

$$\begin{gathered} c^T AA^T c = 0 \\ (A^T c)^T A^T c = 0 \\ ||A^T c||_2^2 = 0 \\ A^T c = 0 \end{gathered}$$

  A^T * c = 0 implies that c = 0,

  → Contradiction!!

$$\begin{gathered} AA^T = B \\ x \to Bx \end{gathered}$$

  이는 복원이 가능하다는 말이다.

$$\begin{gathered} y = Bx \\ x = B^{-1} y \end{gathered}$$

- A has right inverse, that is, there exists B such that

$$\begin{gathered} AB = I \\ with\ B = A^T (AA^T)^{-1} \end{gathered}$$

  pf)

$$
\begin{gathered}
Let\ B = A^T(AA^T)^{-1} \\
AB = AA^T(A^T)^{-1} \\
= (AA^T)(AA^T)^{-1} \\
= I
\end{gathered}
$$

→ row들이 independent하려면 m ≤ n 이여야 한다.

→ 위 모든 특성들은 다 동치이다.

Nullspace

→ range에 반대되는 개념

- Nullspace of a matrix A ∈ R^{m×n}, denoted by N(A) is defined as

$$N(A) = \{x \in R^n \mid Ax = 0\}$$

  - N(A) is set of vectors that is mapped to 0, under linear transformation A

    0벡터를 만들 수 있는 모든 집합이 Nullspace이다.

    x → A → 0

  - vectors in N(A) are orthogonal to the rows of A

    Null space에 들어 있는 모든 벡터들은 A의 row에 대해 수직이다.

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \dots \\ a_m^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \\ \dots \\ a_m^T x \end{bmatrix} = 0$$

- N(A) gives the ambiguity of system A
  - for any v ∈ N(A), we have A(x +v) = Ax

    → x가 무엇이었는지는 알아채기가 힘들다.

  - conversely, if we have Ax = Ay then y = x +v for some v ∈ N(A)
- N(A) is a subspace

$0 \in N(A)$

Interpretation of Nullspace

- Suppose A is a system measures (sensor) input signal x and outputs y, so that y = Ax

  → A라는 시스템이 있고, x라는 현상에 대한 정보를 취합(sense)한다.

  → 그 정보는 y=Ax이다.

- suppose $z \in N(A)$
  - z is undetectable from sensor A

    → z는 A로는 발견되지 않는다.

  - That is, a signal x and a mixture x +z looks same at the output of sensor A

    A라는 시스템에서 x와 x + z는 같은 것으로 보일 수 밖에 없다.

    output만으로는 알 수가 없다.

$$Ax = A(x + z)$$

- N(A) characterizes ambiguity
  - the 'smaller' N(A), the less ambiguity

    → N(A)가 작을 수록 모호성이 줄어드는 것이다.

- suppose A such that there is no ambiguity for y = Ax, that is, by looking at y = Ax we can uniquely find x!

  → 가장 작은 Nullspace가 무엇인가?

  - In that case N(A) = {0}

    → N(A)에 0벡터 하나 밖에 없는 경우.

    → 원점하나만 포함하는 경우

  - equivalent to state that the mapping A is unique

→ Ax = A(x+z)가 가능하게 만드는 z는 0벡터 밖에 없다는 의미이다.

→ 그렇기에 각각의 output이 unique하다는 의미이다.

Nullspace examples

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- let v = (2,−1), then for any c we have A(cv) = 0.
- it turns out that N(A_1) = {cv | c ∈R}
- N(A_1) is 1-dimensional subspace

  → 원점을 지나고 (2,−1)에 평행한 직선

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- it turns out that N(A_2) = {0}; that is, there is no v != 0 such that A_2 * v = 0

  → x를 (0, 0)을 넣을 수 밖에 없다. 왜냐하면 두 column이 linearly independent하기 때문이다.

- for y = A_2 * x, if we know y, x can be uniquely determined → in this case (A_2)^{−1}y

  → y를 알면 unique하게 x가 결정된다는 의미이다.

  → 그렇다면 이 경우에는 nxn 행렬이고, N(A_2) = {0}이기에→ A_2에게는 역행렬이 존재한다.

Case N(A) = {0}

m ≥ n이여야 한다.

그래야 column들이 independent하다.

- 0 is the only element of the nullspace of A: called zero nullspace or one-to-one

  하나에 대해서 하나로 결정됨

  pf) Let

$$\exists_{x\neq 0} Ax = 0, BA = I$$

$$\begin{gathered} BA = I \\ BAx = Ix \\ B0 = x \\ x = 0 \end{gathered}$$

  → contradiction!

- x can be uniquely determined by Ax = 0

  (for linear transformation y = Ax, there is unique x for each output y)

  unique하게 결정된다.

- columns of A are independent (they form basis for a span)

  위의 이야기와 동치이다.

- A has a left inverse, that is, there exists B such that BA = I

$$B = (A^T A)^{-1} A^T$$

- det(A^T * A) != 0

  pf) Let det(A^T * A) = 0

$$\begin{gathered} A^T Ax = 0 \ (x \neq 0) \\ x^T A^T Ax = 0 \\ (Ax)^T (Ax) = 0 \\ ||Ax||_2^2 = 0 \\ Ax = 0 \end{gathered}$$

  → contradiction!