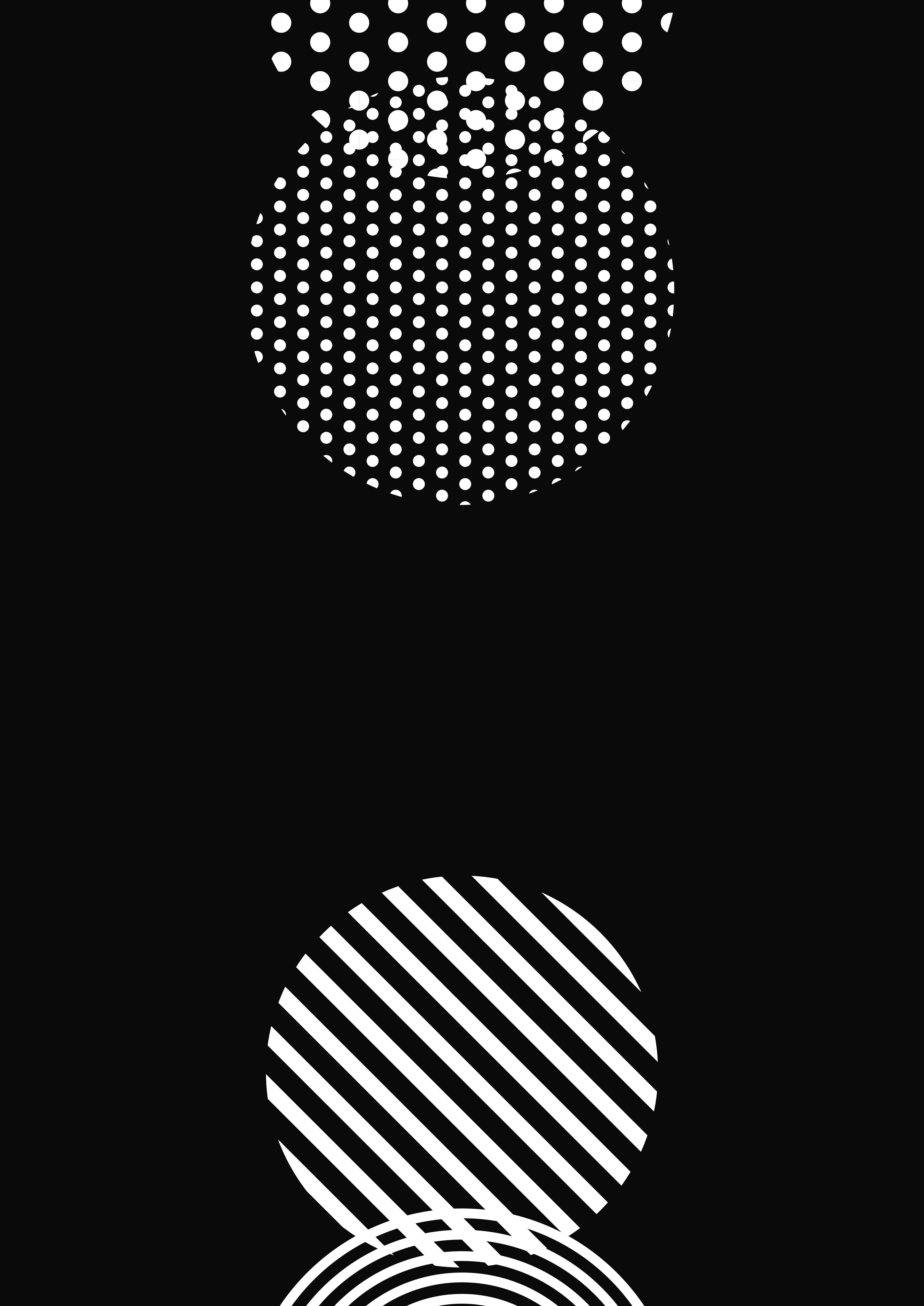


<Convex sets>

Notation

$X \in S^n$, X is nxn symetric matrix

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

pf) $ABB^{-1}A^{-1} = I$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

pf) $AA^{-1} = I$

$(A^{-1})^T A^T = I$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Let $Q \in S^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, then x^TQx is called quadratic form

What is Q is not symmetric?

-> 대칭이 아니어도 만들어지는 것은 가능하다

Q가 주어져도 $\frac{(Q+Q^T)}{2}$ 를 새로운 Q로 정할 수 있다.

Lines :

$$\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

모든 가능한 θ를 움직이면서 그려지는 점인 것이다.

Affine sets :

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in A \quad \text{for all} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

$$x_1, x_2 \in A$$

평면, 직선도 Affine set이다.

유한한 평면은 Affine set이 아니다.

Line segments of connecting two points x_1, x_2,

$$\{\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \mid \theta \in [0,1]\}$$

Convex sets

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \quad \text{for all} \quad \theta \in [0,1]$$

$$x_1, x_2 \in C$$

Linear and convex combination

$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n$

for some $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$

-> Linear combination

$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n$

for some $\theta \geq 0$, $i=1,\dots,n$ and $\sum_i \theta_i = 1$

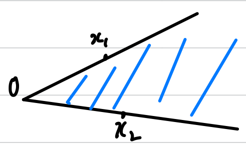
-> convex combination

Convex hull

conv(S)로 표기하며, S=conv(S)이면 S는 convex set이다.

convex cone

$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$ for some θ_1, $\theta_2 \geq 0$

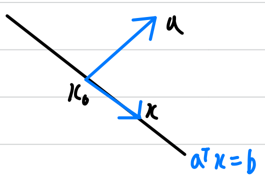


Convex cone은 convex set이다.

Convex cone must include the origin

Hyperplanes

$\{x \mid a^Tx = b\}$, $a \neq 0$

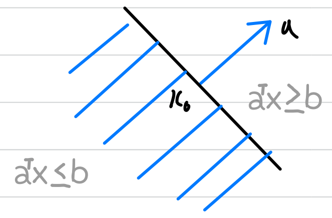


$a(x-x_0)=0$, $b=a^Tx_0$

Hyperplane은 affine하며 convex하다.

Halfspaces

Halfspace set of points $\{x \mid a^Tx \leq b\}$, $a \neq 0$



$a^Tx \leq b$

$a^Tx \leq a^Tx_0$

$a^T(x-x_0) \leq 0$

a와 $(x-x_0)$가 이루는 각은 둔각이다

Halfspaces는 convex하지만, affine하지는 않다.

선분은 포함되지만, 직선은 포함되지 못한다.

Norms

Norms는 벡터를 non-negative real number로 바꾸는 함수이다.

$\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ iff x is z zero vector

$\|tx\| = |t| * \|x\|$ for $t \in \mathbb{R}$

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (triangular inequality)

Norm은 벡터의 사이즈, 혹은 원점으로부터의 거리라고 생각할 수 있다.

P-norm

$\|x\|_p = \left(\sum_i |x|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ For $p \geq 1$

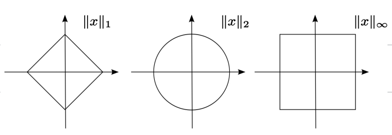
Euclidean distance = 2-norm

Useful norms

$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$

$\|x\|_\infty = \max_i[|x_i|]$



$\|x\|_1$: 각각의 절대값을 다 더함

$\|x\|_2$: 벡터의 길이를 정의

$\|x\|_\infty$: infinite norm

각각의 절대값 중에서 가장 큰 값을 return 하는 함수

p가 아주 커지면 결국에는 벡터의 가장 큰 element의 무한제곱이 나온다

그거러면 거기에 1/p를 씌우니까 벡터의 가장 큰 element가 나온다.

원래 max함수는 미분이 불가능한 함수인데,

그 대신에 p의 값을 크게 해서 max에 approximation할 수 있다.

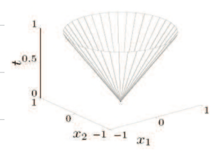
Norm balls and Norm cones

(Euclidean) ball is $B(x_0, r) = \{x \mid \|x-x_0\|_2 \leq r\}$

p-norm ball is $B_p(x_0, r) = \{x \mid \|x-x_0\|_p \leq r\}$

$B_1(O, r) \subset B_2(O, r) \subset B_\infty(O, r)$

Norm cone : $\{(x, t) \mid \|x\| \leq t\}$



x=(x , x)

세로축이 t이고, 그 단면을 자른다고 생각하자

t는 0이상인 scalar이다.

만일 x가 n차원이면, norm cone(x, t)는 n+1차원이다.

norm ball과 norm cone은 convex하다