Conservation of Dimension

$$\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

rank(A) is the dimension 'hit' by linear mapping y = Ax
dim(N(A)) is the dimension 'crushed' by linear mapping y = Ax
→ Ax = 0이 되어서 결과에 영향을 미치지 못하는 것이다.

rank of matrix products

$$\text{rank}(BC) \le \min(\text{rank}(B), \text{rank}(C))$$

rank(A)에 대하여 $A = BC(B \in R^{m \times r}, C \in R^{r \times n})$로 쪼갤 수 있는데,
만일 r이 m과 n보다 작으면 rank(A) ≤ r이다.
r이 일종의 정보의 bottleneck 역할을 하는 것이다.

Full Rank

if

$$\text{rank}(A) = \min(m,n)$$

we say A has full rank

for square matrices, full rank means nonsingular (invertible)
→ 역행렬이 존재한다.

for skinny matrices (m ≥n),
full rank means all the columns are independent

for fat matrices (m ≤n),
full rank means all the rows are independent

Determinant

$\det(cA) = c^n \det(A)$
$\det(I) = 0$
$\det(A) = \det(A^T)$

triangular matrix A의 determinant는

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$ 이다.

For square matrices A and B,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

|det(A)| A의 n개의 column들이 형성하는 다면체이다.
A를 rotation을 시켜도 det값은 그대로이다.

Eigenvalues

$$Ax = \lambda v$$

를 만족하는 λ를 eigenvector라고 한다.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

을 이용하면 λ를 구할 수 있다.

if A is real and symmetric,
eigenvectors are orthogonal to each other

$$A = U \Lambda U^T$$

Λ은 λ 를 대각선 성분으로 가지는 diagonal matrix이다.
$U = [u_1 \ \ u_2 \ \ \dots \ \ u_n]$
$||u_i|| = 1$, $u_i^T u_j = 0$ for $i \neq j$
$U^T U = U U^T = I$
$U^T = U^{-1}$
U의 column들은 R 을 span한다.

$$A = U\Lambda U = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$$

U가 $\mathbb{R}^n$을 span하므로,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i u_i$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{x}_i u_i$$

$$x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i x_i^2$$

A is P.D iff A의 모든 eigenvalue가 positive이면
$A^k = U\Lambda U^T U \Lambda U^T \cdots = U \Lambda^k U^T$. So eigenvalues of A^k are λ_i^k's

$$\left\{ x | x^T Q x \le 1 \right\}$$

$$x^T Q x = \sum_i \lambda_i \hat{x}_i^2 = \sum_i \frac{\hat{x}_i^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2}$$

$$\frac{x_1^2}{(1/\sqrt{\lambda_1})^2} + \frac{x_2^2}{(1/\sqrt{\lambda_2})^2} \le 1$$