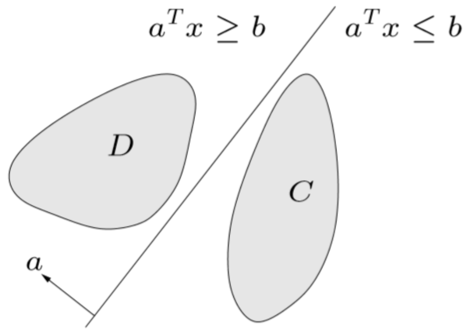
# 6강

## Seperating Hyperplane theorem

Suppose C and D are **disjoint** convex sets. Then there exist a != 0 and b such that

$$a^T x \le b, \forall x \in C \quad a^T x \ge b, \forall x \in D$$

that is, hyperplane {x|a^T * x = b} separates C and D




두 **disjoint** convex set 사이로 그 둘을 구분하는 초-평면이 존재한다는 것이다.

disjoint하고 볼록한 집합 두개에 대해서 그것을 분리하는 초-평면이 존재한다는 것이다.

간단한 증명?

C, D에서 각각 점을 하나씩 선택하여 선분들을 만들 때, 길이가 최소가 되는 선분을 잡는다.

그리고 그 선분의 양끝점에서 접하는 접평면을 그렸을때, C의 모든 점들은 그 접평면의 뒤에 있다.

D의 모든 점들 또한 마찬가지이다.

우리는 contradiction을 이용하여 이를 증명해보자.

→ C, D에서 각각 점을 하나씩 선택하여 선분들을 만들 때, 길이가 최소가 되는 선분을 잡는다.

그리고 그 선분의 양끝점에서 접하는 접평면을 그렸을때, 그 접평면의 앞에 C에 속하는 점 x_2가 존재한다고 가정한다.

→ 그렇다면 x_2와 그 길이가 최소가 되는 선분의 C에 속하는 끝점(x_1)을 이어본다.

→ 그러면 그 x_2와 x_1의 선분위의 점들도 C에 속해야 한다.

(because the definition of convex set)

→ 그렇다면 처음 가정한 가장 짧은 선분은 가장 짧지 않다.

→ 모순! contradiction!

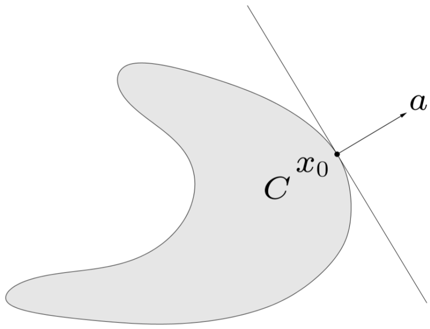
# Supporting Hyperplane theorem

- Supporting hyperplane of set C at boundary point x_0 is defined as

$$\{x|a^Tx = a^Tx_0\}$$
$$where\ a \neq 0\ and\ a^Tx \leq a^Tx_0\ for\ all\ x \in C$$

즉, Supporting Hyperplane의 한쪽에만 모든 set의 점들이 존재하면

$$\{x|a^Tx = a^Tx_0\}$$
$$= \{x|a^T(x - x_0) = 0\}$$




- supporting hyperplane theorem:

  for every boundary point of convex set C, there exists supporting hyperplane.

  → convex set이면 무조건 가장자리 중 어디를 잡아도 supporting hyperplane이 존재한다.

# Convexity-preserving operations on convex sets

How to show whether a set is convex? Firstly we can use the definition

$$x_1, x_2 \in C, 0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow \theta x_1 + (1{-}\theta)x_2 \in C$$

Second, consider whether the set of question results from convexity preserving operations such as

1. **Intersection**: If C1,C2 is convex, then C1 ∩ C2 is also convex ⇐ try to show this!

   → 아주 중요하다!

   → Polyhedra은 교집합들을 이용한 것이다. 그렇기에 Polyhedra도 convex set이다.

2. **Scaling**: If C is convex, aC ≡ {ax|x ∈ C} is also convex.

   → 확장시키고 멀리 보내는 것이다.

3. **Translation**: If C is convex, a + C ≡ {a + x|x ∈ C} is also convex.

   → a는 벡터이다. a만큼 그 set을 옮기는 것이다.

4. **Minkowski addition**: defined by the operator ⊕ such that A ⊕ B ≡ {x + y|x ∈ A, y ∈ B}.

   If C1 and C2 are convex, C1 ⊕ C2 is also convex.

   → A라는 점들 하나하나에 대해서 B의 모양을 일일이 뒤집어 씌운다고 생각하라.

convex set인지 아닌지를 증명하려면,

1. definition을 만족하는지를 보거나
2. 위 operation을 이용하여 만들어진 결과가 convex set인지 아닌지를 판단한다.
3. 아니면 convex function을 활용해봐라

# Affine sets, convex cone, convex sets and subspaces

Consider a set A and n points x_1, x_2, ... ,x_n ∈ A.

A is __________ if \sigma i=1 θ_i * x_i ∈ A where θi, i = 1,…,n are any numbers which satisfy _____.

| Aa __________ | __________ |
| --- | --- |
| Subspace | if θ_i ∈ R |
| Affine | if θ_i ∈ R, \Sigma θ_i = 1 |
| Convex cone | if θ_i ∈ R, θ_i ≥ 0 |
| Convex | if θ_i ∈ R, \Sigma θ_i = 1, θ_i ≥ 0 |

만약 subspace A라는 set이 있다고 했을 때, A는 convex set인가?

subspace → convex (True)

(Convex가 되는 조건이 Subspace가 되는 조건을 포함한다. 즉, 더 까다롭다.)

Subspace → Affine (True)

Affine → Convex (True)

Convex → Affine (False)

Affine → Convex cone (False)

Convex cone → Affine (False)

모든 Convex sets를 모으면 모든 Affine sets를 모은 것이다.