# 10강

## Determinant

- |det(A)| represents the volume of parallelogram formed by columns of A

  det의 절대값은 A의 n개의 column들이 형성하는 parallelogram이다.

  → parallelogram은 그 다면체의  부피이다.

- can be shown using
  - volume of B where columns b_1, ..., b_  n are orthogonal, is |det(B)|
  - Gram-Schmidt orthogonalization combined with multilinear property of det

    rotation을 한다고 했을 때, B` = RB라고 할때, det(B`) = det(B)이다. (det(R)=1)

    a_1, a_2, a_3를 생각해보자. 이들은 orthogonal하지 않다. 이들이 만드는 다면체의 부피는 얼마나 될까?

     이 경우에는 Gram-Schmidt orthogonalization을 한다.

    일단 a_1을 기준으로 a_2를 a_1에 평행한 성분과 수직인 성분으로 분리한다.

    a_3도 a_1와 a_2`으로 구성되는 부분과, a_1와 a_2`에 대해 수직인 성분으로 분리한다.

    그렇게 되면 3개의 수직인 벡터가 남는다.

    그러면

$$det([a_1\ a_2\ a_3]) = det([a_1\ a_1^{//} + a_1^{\perp}\ a_3])$$

$$= det([a_1\ a_1^{//}\ a_3]) + det([a_1\ a_1^{\perp}\ a_3])$$

$$= 0 + det([a_1\ a_1^{\perp}\ a_{1,2}^{//}]) + det([a_1\ a_1^{\perp}\ a_{1,2}^{\perp}])$$

$$= det([a_1\ a_1^{\perp}\ a_{1,2}^{\perp}])$$

    수직인 애들만 남았을 때는 그 volume이 그 det의 절댓값이 된다.

- very useful geometric fact
- Suppose I have set S with volume vol(S). Consider linear transformation

  $$T = \{Ax | x \in S\}$$

  Then vol(T) = |det(A)| vol(S)

# Eigenvalues

- Definition:

  consider square matrix A and if we have for some scalar λ and n-dim vector v != 0 such that

  $$Av = \lambda v$$

  we call λ eigenvalue and v eigenvector of A.

- Eigenvalues can be found by considering A's characteristic equation

  $$det(A - \lambda I) = 0$$

- This is polynomial equation of order n: n roots exist; they can be real or complex
- roots λ_1, ..., λ_n are eigenvalues of A
- If entries of A are real, the complex eigenvalues come in pairs with conjugate
- Suppose A is real and symmetric,
- eigenvalues are real
- eigenvectors are orthogonal to each other
- A can be decomposed as

  $$A = U \Lambda U^T$$

where Λ is diagonal matrix with λ_i at its i-th diagonal, the columns of U are orthonormal; that is, if

$$U = [u_1 u_2 ... u_n]$$

then ||u_k|| = 1 and u^T_i u_j = 0 for i != j Also U^T*U = UU^T = I, that is U^T = U^{−1}

- obviously columns of U span R^n
- called spectral decomposition or eigenvalue decomposition of A
- for real symmetric A and its spectral decomposition UΛU^T we have

$$A = U\Lambda U^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$$

that is, sum of rank-1 matrices

- Now, since u_i are basis, for any x ∈ R^n we can write

  $$x = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i u_i$$

  Thus

  $$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{x}_i u_i$$

- λ_i as gains to the direction u_i
- A is positive definite iff all of its eigenvalues are positive
  - consider

    $$x^T Ax = \sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i x_i^2$$

- A is positive semi-definite iff all of its eigenvalues are non-negative
- A is invertible iff its eigenvalues are nonzero
- $$A^k = U\Lambda U^T U\Lambda U^T \cdots = U\Lambda^k U^T$$

So eigenvalues of A^k are λ^k_i ’s

- Consider ellisoid defined as

$$\{x|x^TQx \le 1\}$$

for some positive definite Q

Q = I이면 ball이 된다.

Q가 특정 방향으로 ball을 늘인다고 생각하면 된다.

타원의 장축과 단축의 길이를 Q의 Eigenvalues가 결정한다.

- The eigenvectors of Q comprise the principal axes of the ellipsoid

$$x^TQx = \sum_i \lambda_i \hat{x}_i^2 = \sum_i \frac{\hat{x}_i^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}})^2}$$

\hat x는 Q의 벡터에 맞춰놓은 그 좌표라고 생각하면 된다.

- In 2-D this is like

$$\frac{x_1^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}})^2} + \frac{x_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}})^2} \le 1$$

→ 이것은 사실 타원의 방정식을 의미한다.

$$\frac{x_1^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}})^2} + \frac{x_2^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}})^2} \le 1$$
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \le 1$$

→ a, b가 각각 장축, 단축의 길이가 된다.

→ λ_1^{-1/2},  λ_2^{-1/2}이 각각 장축, 단축의 길이가 된다.

- if Q ≥ 0, x^T Q x can be used as norm (induced norm): 2-norm is special case of Q = I

  Q = I이면 ball이 된다.

→ Q=I이면 x^T Q x이 2-norm이 될 수 있다.