dim({0}) = 0

V1={av|a∈R} for some v ∈ R^n
V1은 v에 평행하여 원점을 지나는 vector space이다.
dim(V1) = 1

Range

Range of a matrix A ∈ R^{m+n}, denoted by R(A) is defined as

$$\mathcal{R}(A) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$$

R(A)는 span(a1, a2, ..., an)과 같은 의미이다.

Ax − y = 0
→ y가 range 안에 있어야 solution이 존재한다는 의미이다.

Range: interpretation

let v ∈ R(A) and w ∉ R(A)

R(A)은 취할 수 있는 output들이다.

R(A) is subspace

Number of base variables of A = dim(R(A))

m ≥ n이 가정되어 있다.

Nullspace

Nullspace of a matrix A ∈ R^{mxn},denoted by N(A) is defined as

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

N(A)는 A를 통과하여 0이 되는 x들을 모아 놓은 것이다
Null space에 들어 있는 모든 벡터들은 A의 row에 대해 수직이다.

N(A) gives the ambiguity of system A
for any v ∈ N(A), we have A(x +v) = Ax
→ x가 무엇이었는지는 알아채기가 힘들다.

conversely, if we have Ax = Ay then y = x +v for some v ∈ N(A)

Nullspace: Interpretation

if z ∈N(A), then
z is undetectable from sensor A
→ z는 A로는 발견되지 않는다
→ Ax = A(x + z)
→ A라는 시스템에서 x와 x + z는 같은 것으로 보일 수 밖에 없다.
→ N(A)가 작을수록 모호성이 줄어드는 것이다.

N(A) = {0}인 경우, 가장 작은 모호성을 가진다.

Rank

rank(A) = dim(R(A))

rank(A) = number of independent rows/columns
→ rank(A) = rank(A^T)

Rank은 A의 자유도를 말해준다.
Rank가 클수록 output 정보가 더 잘 보존된다.

rank(A) ≤ min(m, n)