Seperating Hyperplane theorem

Suppose C and D are "disjoint" convex sets.
Then there exist $a \neq 0$ and b such that

$$a^T x \le b,\ \forall x \in C \qquad a^T x \ge b,\ \forall x \in D$$

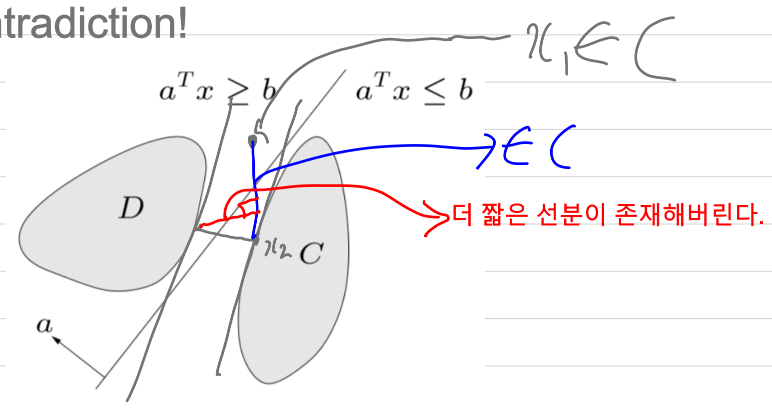
that is, hyperplane $\{x | a^T x = b\}$ separates C and D
두 disjoint convex set 사이로
그 둘을 분리하는 초-평면이 존재한다는 것이다.

간단한 증명?
C, D에서 각각 점을 하나씩 선택하여 선분들을 만들 때, 길이가 최소가 되는 선분을 잡는다.
그리고 그 선분의 양끝점에서 접하는 접평면을 그렸을때, C의 모든 점들은 그 접평면의 뒤에 있다.
D의 모든 점들 또한 마찬가지이다.

우리는 contradiction을 이용하여 이를 증명해보자.
→ C, D에서 각각 점을 하나씩 선택하여 선분들을 만들 때,
길이가 최소가 되는 선분을 잡는다.
그리고 그 선분의 양끝점에서 접하는 접평면을 그렸을때,
그 접평면의 앞에 C에 속하는 점 x_2가 존재한다고 가정한다.

→ 그렇다면 x_2와 그 길이가 최소가 되는 선분의 C에 속하는 끝점(x_1)을 이어본다.
→ 그러면 그 x_2와 x_1의 선분위의 점들도 C에 속해야 한다.
(because the definition of convex set)

→ 그렇다면 처음 가정한 가장 짧은 선분은 가장 짧지 않다.
→ 모순! contradiction!



Supporting Hyperplane theorem

Supporting hyperplane of set C at boundary point x_0 is defined as

$$\{x | a^T x = a^T x_0\}$$

where $a \neq 0$ and $a^T x \le a^T x_0$ for all $x \in C$

즉, Supporting Hyperplane의 한쪽에만 모든 set의 점들이 존재하면
$\{x | a^T x = a^T x_0\}$
$= \{x | a^T (x - x_0) = 0\}$

supporting hyperplane theorem :
convex set C의 모든 boundary points에서
supporting hyperplane을 만들 수 있다.