기말고사 답안

2018320161 송대선

2020년 12월 09일

1)

$S_0 = 29, T = 6/12, t_1 = 2/12, t_2 = 5/12, r = 0.12, K = 40, D_1 = 0.5, D_2 = 0.5, c = 3$
$D = D_1 e^{-rt_1} + D_2 e^{-rt_2} = 0.9657$
$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$
$p = c + D + Ke^{-rT} - S_0$
$p = 12.6363$

2)

행사가격이 50인 콜옵션($c = 5$)을 매수하고,
행사가격이 50인 풋옵션($p = 3$)을 매수함으로써 스트레들를 구성한다.
이에 대한 이익패턴은 다음과 같다.

조건	손익
$S_T < K_1$	$K_1 - S_T - c - p$
$K_1 < S_T < K_2$	-c-p
$K_2 \leq S_T$	$S_T - K_2 - c - p$

where

$$K_1 = 50, K_2 = 50, c = 5, p = 3$$

이를 대입하면, 다음과 같다.

조건	손익
$S_T < 50$	$-S_T + 42$
$50 < S_T \leq 50$	-8
$50 \leq S_T$	$S_T - 58$

3)

행사가격이 40인 풋옵션($p_1 = 3$)을 1개 매수하고,
행사가격이 45인 풋옵션($c_2 = 5$)을 2개 매도하고,
행사가격이 50인 풋옵션($c_3 = 8$)을 1개 매수함으로 나비형 스프레드를 구성한다.

이 경우, ($2K_2 = K_1 + K_3$)도 만족함으로,
이에 대한 이익패턴은 다음과 같다.

조건	손익
$S_T \leq K_1$	$2p_2 - p_1 - p_3$
$K_1 < S_T \leq K_2$	$S_T - K_1 + 2p_2 - p_1 - p_3$
$K_2 < S_T \leq K_3$	$K_3 - S_T + 2p_2 - p_1 - p_3$
$K_3 < S_T$	$2p_2 - p_1 - p_3$

조건	손익
$S_T \leq K_1$	-1
$K_1 < S_T \leq K_2$	$-41 + S_T$
$K_2 < S_T \leq K_3$	$49 - S_T$
$K_3 < S_T$	-1

5)

$S_0 = 1000, K = 1070, \sigma = 0.2, r = 0.05, \Delta t = 3/12, T = 24/12, q = 0.02$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, u = 1.1052$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = 0.9048$$

$$S_{uu} = S_0 * u * u, S_{uu} = 1221.4028$$
$$S_{ud} = S_0 * u * d, S_{ud} = 1000.0$$
$$S_{dd} = S_0 * d * d, S_{dd} = 818.7308$$

$$f_{uu} = max(S_{uu} - K, 0), f_{uu} = 151.4028$$
$$f_{ud} = max(S_{ud} - K, 0), f_{ud} = 0$$
$$f_{dd} = max(S_{dd} - K, 0), f_{dd} = 0$$

$$p = \frac{e^{(r-q)*\Delta t} - d}{u - d}$$
$$p = \frac{e^{(0.05-0.02)*3/12} - 0.9048}{1.1052 - 0.9048}$$
$$p \approx 0.5126$$

$$f = e^{-(r-q)T}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd})$$

$$f = e^{-(0.05-0.02)*24/12}(0.5126^2 151.4028 + 2*0.5126(1-0.5126)0 + (1-0.5126)^2 0)$$
$$f \approx 37.4655$$

따라서 유로피언 콜 옵션의 가격은 약 $37.4655이다.

6)

$S_0 = 50, K = 60, \sigma = 0.3, r = 0.1, \Delta t = 3/12, T = 6/12, q = 0.02$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, u = 1.1618$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = 0.8607$$

$$S_u = S_0 * u, S_u = 58.0917$$
$$S_d = S_0 * d, S_d = 43.0354$$

$$S_{uu} = S_0 * u * u, S_{uu} = 67.4929$$
$$S_{ud} = S_0 * u * d, S_{ud} = 50.0$$
$$S_{dd} = S_0 * d * d, S_{dd} = 37.0409$$

$$f_{uu} = max(K - S_{uu}, 0), f_{uu} = 0$$
$$f_{ud} = max(K - S_{ud}, 0), f_{ud} = 10.0$$
$$f_{dd} = max(K - S_{dd}, 0), f_{dd} = 22.9591$$

$$p = \frac{e^{(r-q)*\Delta t} - d}{u - d}$$
$$p = \frac{e^{(0.1-0.02)*3/12} - 0.8607}{1.1618 - 0.8607}$$
$$p \approx 0.5297$$

$$f_u = max(e^{-(r-q)\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}), K - S_u)$$
$$f_u = max(4.5873, 1.9083)$$
$$f_u = 4.6103$$

$$f_d = max(e^{-(r-q)\Delta t}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}), K - S_d)$$
$$f_d = max(15.6978, 16.9646)$$
$$f_d = 16.9646$$

$$f = max(e^{-(r-q)\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d), K - S_0)$$
$$f = max(10.1638, 10)$$
$$f = 10.2147$$

따라서 아메리칸 풋 옵션의 가격은 약 $10.2147이다.

9-a)

$S_0 = 49, K = 50, T = 0.3846, r = 0.05, \sigma = 0.2$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.0542$$
$$\Delta = N[d_1] = N[0.0542] = 0.5216$$

9-b)

$S_0 = 49, K = 50, T = 0.3846, t = 0, r = 0.05, \sigma = 0.2$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.0542$$
$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx -0.0699$$
$$\theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N[d_2] - \frac{\sigma S_0}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

where N[d2] = 0.4721

$$\theta = -4.3053$$

9-c)

$S_0 = 49, K = 50, T = 0.3846, t = 0, r = 0.05, \sigma = 0.2$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.0542$$
$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{1}{\sigma S_0\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$\Gamma = 0.0655$$

9-d)

$S_0 = 49, K = 50, T = 0.3846, t = 0, r = 0.05, \sigma = 0.2$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.0542$$

$$V = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} = S_0 \sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$
$$V = 12.1052$$

9-e)

$S_0 = 49, K = 50, T = 0.3846, r = 0.05, \sigma = 0.2$

$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx -0.0699$$

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} = KTe^{-rT}N[d_2]$$

where N[d2] = 0.4721

$$\rho = 8.9056$$

5)

$S_0 = K, T = 0.5, r = 0.1, \sigma = 0.25$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.3712$$

$$\Delta = N[d_1] = N[0.3712] = 0.6448$$

13)

$S_0 = 50, S_u = 55, S_d = 45, T = 6/12, r = 0.1, K = 50$

$$f_u = max(S_u - K, 0), f_u = 5$$
$$f_d = max(S_d - K, 0), f_d = 0$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

$$\Delta = \frac{5-0}{55-45}$$
$$\Delta = 0.5$$

$$f = S_0\Delta - (S_u * \Delta - f_u)e^{-rT}$$
$$f = 50 * 0.5 - (55 * 0.5 - 5)e^{-0.1*6/12}$$
$$f \approx 3.5973$$

따라서 유로피언 콜 옵션의 가격은 약 $3.5973이다.
18.3)

$S_0 = K, T = 0.5, r = 0.1, \sigma = 0.25$

$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0.3712$$
$$\Delta = N[d_1] = N[0.3712] = 0.6448$$

17-a)

$\Delta = 0.3, \Gamma = 1.0$

$$\Delta_{portfolio} = \sum_{i=0}^{n} w_i\Delta_i = -750.0$$
$$\Gamma_{portfolio} = \sum_{i=0}^{n} w_i\Gamma_i = -5700.0$$

$$n_\Gamma \times \Gamma = -\Gamma_{portfolio}$$
$$n_\Gamma = -\Gamma_{portfolio}/\Gamma = 5700.0$$

5700.0개의 옵션을 매수한다.

$$\Delta^*_{portfolio} = \Delta_{portfolio} + n_\Gamma\Delta$$
$$\Delta^*_{portfolio} = 960.0$$

960.0주 만큼의 기초자산을 매도한다.
따라서, 5700.0개의 옵션을 매수 + 960.0주 만큼의 기초자산을 매도한다.
17-b)

$\Delta = 0.3, V = 1.2$

$$\Delta_{portfolio} = \sum_{i=0}^{n} w_i\Delta_i = -750.0$$

$$V_{portfolio} = \sum_{i=0}^{n} w_i V_i = -3900.0$$

$$n_V \times V = -V_{portfolio}$$
$$n_V = -V_{portfolio}/V = 3250.0$$

3250.0개의 옵션을 매수한다.

$$\Delta^*_{portfolio} = \Delta_{portfolio} + n_V \Delta$$
$$\Delta^*_{portfolio} = 225.0$$

225.0주 만큼의 기초자산을 매도한다.
따라서, 3250.0개의 옵션을 매수 + 225.0주 만큼의 기초자산을 매도한다.

17-c)

$\Delta_{option1} = 0.63, \Gamma_{option1} = 1.0, V_{option1} = 1.2, \Delta_{option2} = 0.1, \Gamma_{option2} = 0.2, V_{option2} = 0.6$

$$\Delta_{portfolio} = \sum_{i=0}^{n} w_i \Delta_i = -750.0$$
$$\Gamma_{portfolio} = \sum_{i=0}^{n} w_i \Gamma_i = -5700.0$$
$$V_{portfolio} = \sum_{i=0}^{n} w_i V_i = -3900.0$$

$$\Gamma_{option1} w_{option1} + \Gamma_{option2} w_{option2} = -\Gamma_{portfolio}$$
$$V_{option1} w_{option1} + V_{option2} w_{option2} = -V_{portfolio}$$

$$1.0 w_{option1} + 0.2 w_{option2} = 5700.0$$
$$1.2 w_{option1} + 0.6 w_{option2} = 3900.0$$
$$w_{option1} = 7333.333333333334, w_{option2} = -8166.666666666667$$

7333.333333333334개의 옵션1을 매수한다.8166.666666666667개의 옵션2을 매도한다.

$$\Delta^*_{portfolio} = \Delta_{portfolio} + w_{option1}\Delta_{option1} + w_{option2}\Delta_{option2}$$
$$\Delta^*_{portfolio} = 3053.333333333333$$

3053.333333333333주 만큼의 기초자산을 매도한다.
따라서, 7333.333333333334개의 옵션1을 매수 + 8166.666666666667개의 옵션2을 매도 + 3053.333333333333주 만큼의 기초자산을 매도한다.

19)

$S_0 = 100, u = 1.1, d = 0.9, N = 2, \Delta t = 6/12, T = 12/12, r = 0.08, K = 100$

$$S_{uu} = S_0 * u * u, S_{uu} = 121.0$$
$$S_{ud} = S_0 * u * d, S_{ud} = 99.0$$
$$S_{dd} = S_0 * d * d, S_{dd} = 81.0$$

$$f_{uu} = max(S_{uu} - K, 0), f_{uu} = 21.0$$
$$f_{ud} = max(S_{ud} - K, 0), f_{ud} = 0$$
$$f_{dd} = max(S_{dd} - K, 0), f_{dd} = 0$$

$$p = \frac{e^{r*\Delta t} - d}{u - d}$$
$$p = \frac{e^{0.08*6/12} - 0.9}{1.1 - 0.9}$$
$$p \approx 0.7041$$

$$f = e^{-rT}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd})$$
$$f = e^{-0.08*12/12}(0.7041^2 21.0 + 2 * 0.7041(1 - 0.7041)0 + (1 - 0.7041)^2 0)$$
$$f \approx 9.6105$$

따라서 유로피언 콜 옵션의 가격은 약 \$9.6105이다.