13주차 파생금융상품론 강의

2018320161 송대선

December 25, 2020

1 The Greek Letters

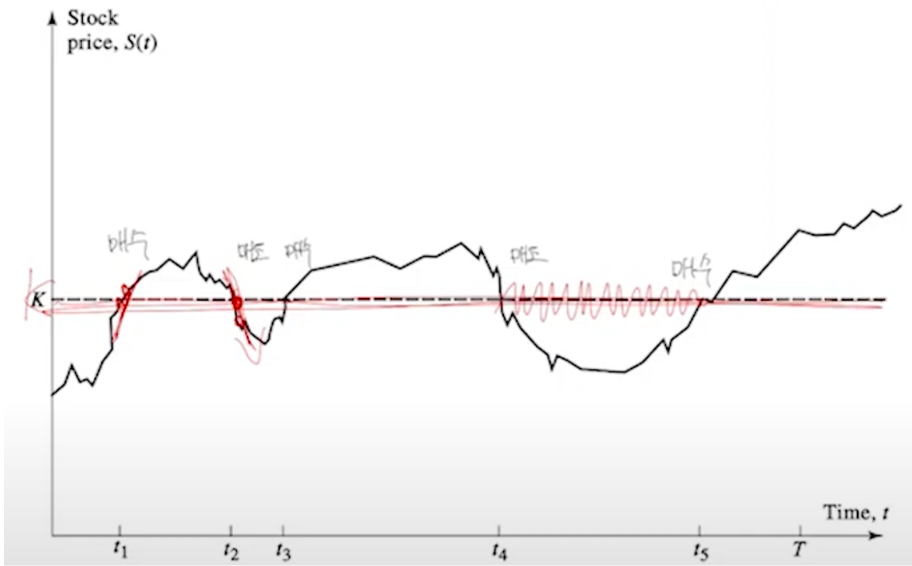
Greek : 민감도를 의미한다.
변동이 일어나도, 그 변동을 0으로 만드는 헷징을 하여
수익을 일정하게 유지하는 것이다.

example)
$S_0 = 49, K = 50, r = 0.05, \sigma = 0.2, T = 20\ weeks, \mu = 0.13$이고
은행이 \$300,000에 100,000개의 주식구매하는 유로피언 콜옵션을 팔았다면
then BSM value is \$240000, 따라서 만기까지 \$60000을 벌어들인다.

헷징에 대한 방법으로 2가지가 있다.
Naked position : 아무것도 하지 않음
Covered position : 기초자산을 구매하는 것
이렇게 하면 손해보는 것을 제한할 수 있다.
대신 이익을 보는 것도 제한할 수 있다.

2 Stop-Loss strategy

$S_t \leq K$이면 매수
$S_t \geq K$이면 매도
단점 :
1. 매수, 매도를 하는 시점이 delay되며 정확한 헷징이 불가능해진다.
2. K를 기준으로 S_t가 자주 왔다 갔다하면 거래수수료가 많이 발생한다.



3 Delta

Δ는 기초자산 가격 변화에 대한 option가격의 변화율이다.
즉, 옵션가격은 기초자산 가격 변화의 Δ만큼 변한다는 것이다.

ex) 기초자산이 $1가 오르면, 콜옵션가격은 $\$1 * \Delta$만큼이 오르고(매도시 손실),
기초자산이 $1가 내리면, 콜옵션가격은 $\$1 * \Delta$만큼이 내린다.(매도시 이익)

기초자산의 Δ는 1이다.

4 Delta Hedging

델타헷징의 문제점
1. 기초자산 가격이 변하면 Δ도 같이 변함(지점마다 기울기는 변함)
2. 기초자산 가격이 크게 변하면 Δ 헷지 정확도 하락(감마리스크)

보안책
기초자산이 변할 때마다 Δ조정 (동적헷징)
감마 헷징 + 델타 헷징

5 Greek(민감도)

블랙-숄츠 PDE

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$
$$p = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2)$$
$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$에 대해서 각각
S, S^2, σ, r, t로 5개로 미분한다.

$$\frac{dc}{dS} = \Delta, \frac{d^2c}{dS^2} = \Gamma, \frac{dc}{d\sigma} = \nu, \frac{dc}{dr} = \rho, \frac{dc}{dt} = \theta$$

$N[d_1]$의 미분

$$N[d_1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \rightarrow \frac{\partial N[d_1]}{\partial d_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

d_1의 미분

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{1}{2\sigma\sqrt{T-t}} \{ \frac{ln(\frac{S}{X})}{T-t} - r - \frac{\sigma^2}{2} \}$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{T-t}}$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t} - \frac{d_1}{\sigma}$$

$N[d_1]$과 $N[d_2]$의 S에 대한 미분

$$\frac{\partial N[d_1]}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$
$$\frac{\partial N[d_2]}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S}$$

$X = K$이다. K를 여기서는 X라고 표현하는 것이다.

6 옵션 델타($\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$, $\Delta = \frac{\partial p}{\partial S}$)

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N[d_1]$$
$$\Delta = \frac{\partial p}{\partial S} = N[d_1] - 1$$

7 옵션 쎄타($\theta = \frac{\partial c}{\partial t}, \theta = \frac{\partial p}{\partial t}$)

$$\theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -Xre^{-r(T-t)}N[d_2] - \frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$
$$\theta = \frac{\partial p}{\partial t} = Xre^{-r(T-t)}N[-d_2] - \frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

8 옵션 감마($\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}, \Gamma = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2}$)

$$\Delta \approx \Theta \Delta t + \frac{1}{2}\Gamma \Delta S^2$$
$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

9 델타, 세타, 감마 관계(BSM)

$$r\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$
$$r\Pi = \Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \S^2 \Gamma$$

if $\Delta = 0$,
then $r\Pi = \Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma$

if $\Gamma > 0, |\Gamma|$: 큰값
then $\theta < 0$
if $\Gamma < 0, |\Gamma|$: 큰값
then $\theta > 0$
Γ와 θ는 서로 대용품으로 사용 가능하다.
둘중 하나를 구할 수 없으면 다른 것을 구해 사용하면 된다.

10 옵션 베가($V = \frac{\partial c}{\partial \sigma}, V = \frac{\partial p}{\partial \sigma}$)

$$V = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial \sigma} S\sqrt{\frac{T-t}{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

11 옵션 로($\rho = \frac{\partial c}{\partial r}, \rho = \frac{\partial p}{\partial r}$)

$$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} = TXe^{-rT}N[d_2]$$

$$\rho = \frac{\partial p}{\partial r} = -TXe^{-rT}N[d_2]$$