파생금융상품론 10주차 강의

2018320161 송대선

2020년 11월 05일

1 Stochastic Processes

기초자산변수 S_0가 t시간 뒤 S_t로 변한다.
→S_t가 stochastic proccess를 따르며 확률적으로 변한다고 가정하는 것이다.

가정들이 필요하다
1. 주가는 불확실하다.
2. 주가는 연속적으로 변화한다.
3. 주가는 (0, ∞)를 갖는 로그정규분포를 따른다.
4. 주가수익률은 $(-\infty, \infty)$를 갖는 정규분호를 따른다.
5. 주가 모형은 마코브 과정을 따른다.

2 마코브 과정

1. 변수의 움직임에 있어 과거로부터 현재로 이어지는 움직임은 변수의 현재가치에 영향을 주지 않음 (memoryless property)
2. 기대수익률(평균)과 수익율(분산)의 불확실성은 보유기간이 증가할수록 증가하는 경향이 있다.

통계학적 관점에서 미래특정시점에 가격확률분포가 과어의 확률분포와 독립적이라는 과정
재무학적 관점에서 약형 효율적 시장 가설을 따른다는 과정
→ 기술적 분석으로 초과수익을 얻을 수 없다.

ex) 변수의 1년간 변화 ∼ N(0,1)
변수의 2년간 변화 = 변수의 1년간 변화 + 변수의 1년간 변화
변수의 2년간 변화 ∼ N(0, 2)
변수의 0.5년간 변화 ∼ N(0, 1/2)

분산은 단순합산, 표준편차는 제곱근 합산
따라서, 불확실성(변동성)은 시간의 제곱근에 비례한다.

3 위너과정

이는 평균=0, 분산=1인 마코브과정이다.
브라운과정과 같은 노이즈같은 것이 있다.

Z : 위너과정을 따른다.

속성1. 짧은 Δt기간 동안 변수변화 :

$$\Delta Z = \epsilon\sqrt{\Delta t}, \epsilon \sim N(0,1)$$
$$= \epsilon\sqrt{\Delta t} \sim \sqrt{\Delta t} * N(0,1) \sim N(0,\Delta t)$$
$$E[\Delta Z] = 0, Var[\Delta Z] = \Delta t$$

속성2. 서로 다른 Δt기간 동안 ΔZ의 값은 독립적(마코브 과정)

T기간 동안 Z변수 증가 Z(T)-Z(0)

$$N = T/\Delta t, Z(T) - Z(0) = \Sigma_{i=1}^{N}\epsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

$\epsilon_i \sim N(0,1)$:상호독립적

$$E[Z(T) - Z(0)] = 0, Var[Z(T) - Z(0)] = T = N * \Delta t$$

4 일반화된 위너과정

변수 x에 대해,

$$dx = x_{t+dt} - x_t$$
$$= a * dt + b * dz$$
$$= a * dt + b * \epsilon\sqrt{dt}$$
$$= a(x,t) * dt + b(x,t) * \epsilon\sqrt{dt}$$

$= a(x,t) * dt + b(x,t) * \epsilon\sqrt{dt}$: 이 과정을 이토과정이라고 한다.
(평균율이 a이고, 분산이 b^2이다.)

$a * dt$은 주가의 trend를, $b * \epsilon\sqrt{dt}$은 불확실성을 의미한다.

proof)

$$E[dx] = E[a * dt + b * dz]$$
$$= a * E[dt] + b * E[dz]$$

$$= a * dt$$

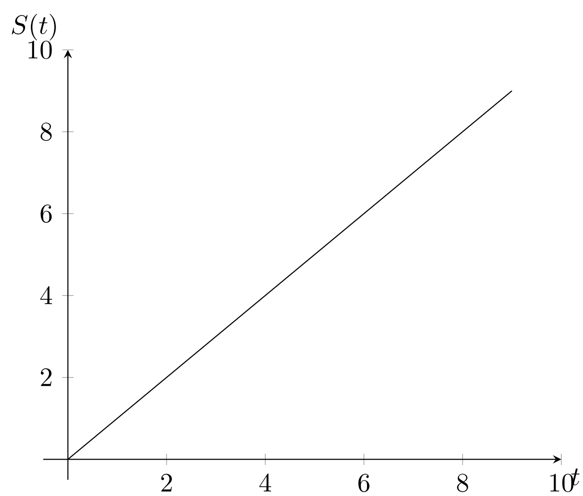
$$Var[dx] = Var[a * dt + b * dz]$$
$$= Var[b * dz]$$
$$= b^2$$

5 이토과정

$$dx = a(x, t) * dt + b(x, t) * \epsilon\sqrt{dt}$$
$$ds = a(s, t) * dt + b(s, t) * \epsilon\sqrt{dt}$$

1. a(s, t)=1, b(s,t)=0

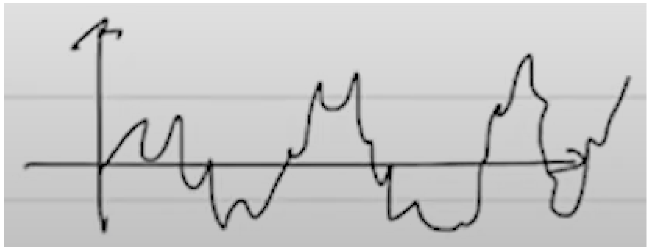
$$ds = dt \rightarrow \frac{ds}{dt} = 1 \rightarrow S(t) = t + S(0)$$
$$if\ S(0) = 0, then\ S(t) = t$$

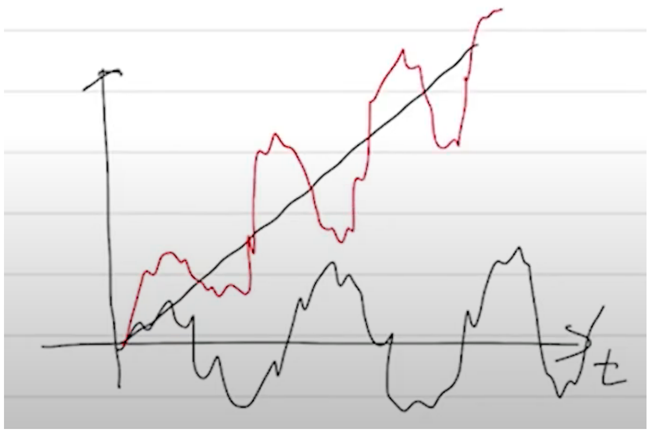


2. a(s, t)=0, b(s,t)=1

$$ds = dz$$

이 두가지 그래프를 합치면 다음과 같다.





6 GBM(기하학적 브라운 운동: Geometric Brownion Motion)

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

1. $\sigma = 0$ (μ를 기대수익률로 가정해도 된다.)

$$dS = \mu S dt$$

$$\frac{1}{S} ds = \mu dt$$

$$\int_0^T \frac{1}{S} ds = \int_0^T \mu dt$$

$$ln(S)]_0^T = \mu t]_0^T$$

$$ln(S(T)) - ln(S(0)) = \mu T$$

$$ln(\frac{S(T)}{S(0)}) = \mu T$$

$$S(T) = S(0) e^{\mu T}$$

$$ln(S)]_0^T = \mu t]_0^T$$

$$ln(S(T)) - ln(S(0)) = \mu T$$

$$ln(\frac{S(T)}{S(0)}) = \mu T$$

$$S(T) = S(0)e^{\mu T}$$

S(0)에서 S(T)로 가는 곳에 어느 정도의 수익이 있고,
그 중간에 변동성이 있다는 것이다

연속적인 모양이 아닌, 이산적인 모양은 부정확하기에 사용하지 않는다.

2. $\sigma \neq 0$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$\frac{dS}{S} ds = \mu dt + \sigma d$$

$$\frac{dS}{S} ds = \mu dt + \sigma d$$

$$\frac{dS}{S} ds \backsim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$$

$$ds = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$\frac{1}{S} ds = \mu dt + \sigma dz$$

$$d(ln(S)) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz \ by \ Ito`s \ lemma$$

$$ln(S_t) - ln(S_0) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$$

$$ln(\frac{S_t}{S_0}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$$

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}}, \epsilon \sim N(0,1)$$

7 Ito's Lemma

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b * dz$$

proof)

$$dx = a * dt + b * dz, f(x,t)$$

$$df = (\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dxdt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2)...$$

$$df = (\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dxdt)$$

$$df = (\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(a * dt + b * dz)dt)$$
$$df = (\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(a * (dt)^2 + b * dzdt))$$
$$df = (\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(a * (dt)^2 + b * \epsilon(dt)^2))$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(a * dt + b * dz) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a^2(dt)^2 + 2ab(dt)(dz) + b^2(dz)^2)$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(a * dt + b * dz) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2(dt)$$
$$df = (\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial f}{\partial x}b * dz$$
$$\therefore dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b * dz$$

위에서 하던 것을 다시 써보자

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b * dz$$
$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

다음과 같이 가정한다.

$$G = ln(S), x = S, a = \mu S, b = \sigma S$$

그리하면 다음이 성립한다.

$$d(ln(S)) = (\frac{\partial ln(S)}{\partial S}(\mu S) + \frac{\partial ln(S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ln(S)}{\partial S^2}(\sigma S)^2)dt + \frac{\partial ln(S)}{\partial S}\sigma S dz$$
$$d(ln(S)) = (\frac{1}{S}(\mu S) + 0 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{S^2})(\sigma S)^2)dt + \frac{1}{S}\sigma S dz$$
$$\therefore d(ln(S)) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz$$

이를 통하여 다음을 유도할 수 있는 것이다.

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}}, \epsilon \sim N(0, 1)$$

통합된 과정으로 다시 설명하면 다음과 같다.

$$ds = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$\frac{1}{S}ds = \mu dt + \sigma dz$$

$$d(ln(S)) = (\frac{\partial ln(S)}{\partial S}(\mu S) + \frac{\partial ln(S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ln(S)}{\partial S^2}(\sigma S)^2)dt + \frac{\partial ln(S)}{\partial S}\sigma S dz$$

$$d(ln(S)) = (\frac{1}{S}(\mu S) + 0 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{S^2})(\sigma S)^2)dt + \frac{1}{S}\sigma S dz$$

$$d(ln(S)) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dz$$

$$ln(S_t) - ln(S_0) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$$

$$ln(\frac{S_t}{S_0}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$$

$$\therefore S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}}, \epsilon \sim N(0,1)$$

$$\therefore \frac{ln(S)}{S} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$$

8 블랙 솔츠머튼 모형

$(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$

$$dG = D(ln(S)) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$$

$$\int_0^T d(ln(S)) = \int_0^T (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\epsilon\sqrt{t}$$

$$[ln(S)]_0^T = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma Z_T$$

$$ln(\frac{S_T}{S_0}) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma Z_T$$

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma Z_T}$$

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\epsilon\sqrt{T}}, \epsilon \sim N(0,1)$$

을 블랙솔츠머튼 모형이라고 한다.

9 테일러급수

테일러 급수는 임의의 함수 G(x)를 다항식으로 근사하는 방법이다. 다시 말하면, G(x)를 x=a에서 G(x)와 동일한 미분계수를 갖는 근사다항식으로 표현하는 것이다.

$$G(x) = \Sigma_{i=0}^{\infty} \frac{G^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$\Delta G = G(x) - G(a), \Delta x = x - a$라고 가정하면,

$$\Delta G = \Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{G^{(i)}(a)}{i!}(\Delta x)^i$$

와 같이 표현가능하다.

10 수업을 마치며

세부적인 수식이 엄밀한 증명은 잘 모르더라도 각 프로세스들의 성질과 가정이 무엇인지는 반드시 알아야한다.