파생금융상품론 11주차 강의

2018320161 송대선

November 28, 2020

1 Stock Price Assumption

매우 짧은 기간 Δt에 대해서

$$\frac{\Delta S}{S} = N(\mu \Delta t^2, \sigma^2 \Delta t)$$

를 따른다.
이 식은 오직 짧은 기간에 대해서만 계산이 가능하다
log를 사용하는 식은 긴 기간에 대해서도 비교적 정확하게 계산이 가능하다는 장점이 있다.
예를 들어서 주가가 100 →130→100으로 변화한다고 가정하면 그 수익률은 0이 되지 않는다.
+30, -30이 아니라, 재투자라는 개념때문에 -30이 약 -27이 된다.
반면 로그를 사용하면 각각 $log\frac{130}{100}, log\frac{100}{130}$이 된다.
따라서 이 두개를 더하면 0이 된다.
log는 길게 계산해도 정확하게 계산이 된다.

2 The Lognormal Property

주가 대수 정규 분포 속성
μ : 수익률, σ : 주가의 기대수익율의 변동성

$$lnS_T - lnS_0 \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$$

$$lnS_T \sim N((lnS_0 + \mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$$

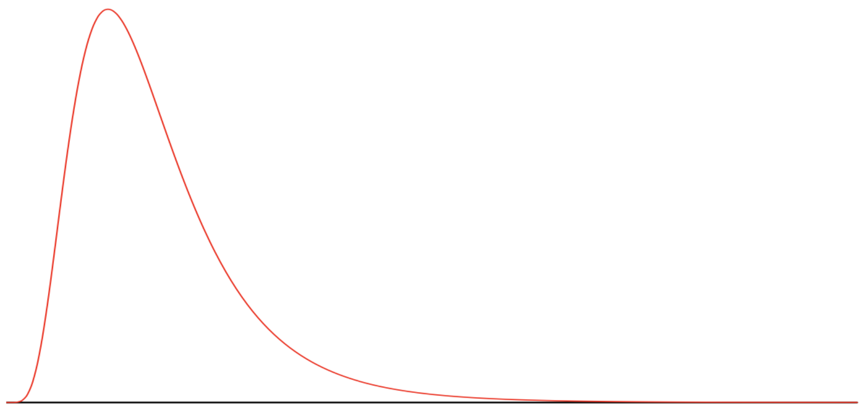
ex)
$S_0 = 40$, $\mu = 0.16$, $\sigma = 0.2$, T = 0.5
$lnS_T \sim N(3.579, 0.62)$
정규분포 신뢰구간 (95%)

$$3.579 - 1.96\sqrt{0.62} lnS_T \leq 3.579 + 1.96\sqrt{0.62}$$

$$32.55 \leq S_T \leq 56.56$$

T시간 뒤의 주가가 32.55에서 56.56사이에 있을 확률이 95%이다.
라는 의미로 해석 가능

3 The Lognormal Distribution



$$E(S_T) = S_0\, e^{\mu T}$$

$$\mathrm{var}(S_T) = S_0^{\,2} e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1)$$

이 분포의 평균은 연속복리를 적용한 공식과 동일하다.
ex)
$S_0 = 20$, $\mu = 0.2$, $\sigma = 0.4$, T = 1
$E[S_T] = 24.33$, $Var[S_T] = 103.54$, $\sqrt{Var[S_T]} = 10.18$

4 Continuously Compounded Return

수익률 분포
x : 현재부터 T 시점까지 실현하는 연간 연속 복리 수익률

$$S_T = S_0 e^{xT}$$
$$\frac{S_T}{S_0} = e^{xT}$$

$$xT = ln(\frac{S_T}{S_0})$$

$$x = \frac{1}{T} ln(\frac{S_T}{S_0})$$

그런데,

$$ln(\frac{S_T}{S_0}) \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$$

$$x = \frac{1}{T} ln(\frac{S_T}{S_0}) \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2}), \frac{\sigma^2}{T})$$

ex)
$\mu = 0.17$, $\sigma = 0.2$, T = 3
$x \sim N(0.15, 0.1155^2)$
95% 신뢰구간
$\rightarrow -0.076 \leq x \leq 0.376$
앞으로 3년간 실현가능한 연간 수익률이 -0.076에서 0.376안에 머무를 확률이 95% 라는 것이다.

5 The Expected Return

The expected value of the stock price is $E[S_T] = S_0 e^{\mu T}$
The expected return of the stock is $\mu - \sigma^2/2$ not μ
because $ln[E[S_T/S_0]] \neg E[ln(S_T/S_0)]$

$$\begin{aligned} &ln[E[S_T/S_0]] \\ &= ln[E[S_T]/S_0] \\ &= ln[e^{\mu T}] \\ &= \mu T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E[ln[S_T/S_0]] \\ &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T \because ln(\frac{S_T}{S_0}) \sim N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T) \end{aligned}$$

짧은 Δt에 대해서는 μ가 정확히 계산이 되지만,
긴 기간에 대해서는 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$으로 계산을 해야 한다.

6 Volatility

Volatility은 기초자산의 불확실성을 나타내는 지표이다 (표준편차)
만기(잔존기간)을 계산하는 방법들이 있다.
거래일 기준 : 연 252일 (공휴일 X) $\rightarrow$잔존일/252
달력일 기준 : 연 365일 $\rightarrow$잔존일/365

ex)
$S_0 = 50, Volatility = 25\%$
거래일 기준 하루 변화량 : 25% x 50 / 252
달력일 기준 하루 변화량 : 25% x 50 / 365

1. τ년간 S_i라는 주가들을 구한다.($\tau = 1/52$)
2. $$u_i = ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$$
3. $$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}(u_i - u_i)^2}$$
4. $$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

7 Black Scholes-Merton

블랙 숄츠 모튼 모형 편미분 방정식
가정 1. μ는 일정하다.
가정 2. 증권의 공매도 가능 및 공매도증권의 대금을 전액 사용가능
가정 3. 거래비용과 세금은 없다. 모든 증권은 분할거래가 가능하다.
가정 4. 배당이 없다, (배당을 고려한 방법있음)
가정 5. 무위험 차익거래 기회가 존재 X
가정 6. 증권의 거래가 연속적으로 이루어진다.
가정 7. 무위험 이자율 r과 변동성 σ는 일정하다

Π : 파생상품 1개 매도 + 기초자산 $\frac{\partial f}{\partial S}(\Delta)$만큼 매수

$$-f + \frac{\partial f}{\partial S}S$$

δt시간 동안 포트폴리오 변화 ΔT

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S$$

$$\Delta\Pi = r\pi\Delta t$$

블랙 숄츠 머튼 편미분 방정식

$$rf = \frac{\partial f}{\partial S}rS + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}r^2 S^2$$

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$
$$p = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2)$$
$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$N(d_2)$는 콜옵션이 행사될 확률이다.

$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

ex)
$S_0 = 42$, K=40, r = 0.1, $\sigma = 0.2$, T = 0.5
d_1=0.7693, d_2=0.6278, c = 4.76, p=0.81
배당이 있는 경우:
$\mathrm{S}_0 = 40, K = 40, r = 0.09$,$\sigma = 0.3$, T = 0.5
2/12, 5/12 각각 0.5씩 배당을 받는다.

$$D = 0.5e^{-.009*2/12} + 0.5e^{-0.09*5/12}$$
$$D = 0.9742$$

$$S_0^* = S_0 - D = 39.0258$$
$$c = S_0^* N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) = 3.67$$
$$p = -S_0^* N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2)$$

배당율(q)이 있는 경우

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$
$$p = -S_0 e^{-qT} N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2)$$
$$d_1 = \frac{ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{ln(S_0/K) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$