Domácí úkol k cvičení číslo 4

22. března 2024

1 Příklady ke složitosti

1.1 Rozhodnětě a zdůvodněte, jestli platí následující tvrzení:

1. Pro funkci $f(n) = n^2 + 7^7 n - 600$ platí:

$$f(n) \in \Omega(n^2), \tag{1}$$
$$f(n) \in \Theta(n^2). \tag{2}$$

2. Pro funkci $g(n) = \log(8n^n) + 15n + 13$ platí:

$$g(n) \in O(n^2), \tag{3}$$
$$g(n) \in \Theta(n \log n). \tag{4}$$

3. Pro funkci $h(n) = 3n^2 + 10^4 n + \pi$ platí:

$$h(n) \in O(n^2), \tag{5}$$
$$h(n) \in \Theta(n^2). \tag{6}$$

Za dostatečné zdůvodnění se považuje výpočet odpovídající limity nebo ukázka toho, že lze nalézt c_1, c_2 a n_0 v definicích Ω, Θ, O, viz přednáška a doporučená literatura. Dostatečné zdůvodnění by mělo obsahovat komentář v přirozeném jazyce, alespoň na úrovni: ,,Tvrzení platí/neplatí protože:. . . “

1.2 Určete a zdůvodněte jaká je složitost daného algoritmu

Algorithm 1: What does this do?

```
//Input: n × (n + 1) matrix A[0 ... n − 1; 0 ... n] of real numbers
for i = 0, ..., n − 2 do
    for j = i + 1, ..., n − 1 do
        for k = i, ..., n do
            A[j, k] = A[j, k] − A[i, k] ∗ A[j, i]/A[i, i]
        end
    end
end
return A
```

Předpokládejme, že cena všech operací násobení, sčítání, odečítání a dělení je stejná, a že je nezávislá na velikosti čísel. Dále se nebudeme trápit dělením nulou. Zápis `for` cyklu v algoritmu je myšlený tak, že se začíná v dolní mezi a jde se do horní meze včetně.

Jak by šlo algoritmus snadno zefektivnit?

1.3 Vyřešte rekurentní rovnici

Najděte funkci T takovou, že $T(0) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (všechna kladná celá čísla) platí

$$T(n) = 2 + T(n-1). \tag{7}$$

2 Úloha k naprogramování

2.1 Maticové funkce

Pomocí dříve implementovaného násobení a sčítání matic implementujte výpočet funkcí exp, sin, cos pro čtvercové matice velikosti $M \times M$. Matice implementujte jako `std::vector<std::vector<double>>`.

Funkce nebudeme počítat přesně, aproximujeme pomocí jejich Taylorových řad, které vyčíslíme do N-tého členu:

$$\exp(A) \cong \sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!} \tag{8}$$

$$\cong 1 + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \cdots + \frac{A^N}{N!} \tag{9}$$

$$\sin(A) \cong \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \tag{10}$$

$$\cong A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \frac{A^7}{7!} + \cdots + (-1)^N \frac{A^{2N+1}}{(2N+1)!} \tag{11}$$

$$\cos(A) \cong \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} \tag{12}$$

$$\cong 1 - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} - \frac{A^6}{6!} + \cdots + (-1)^N \frac{A^{2N}}{(2N)!} \tag{13}$$

Implementujte tyto funkce a určete, jaká je jich složitost v závislosti na N a M.

2.2 Mocnění x^n v $\log(n)$

Rozmyslete a implementujte způsob, jak efektivněji počítat vyšší mocniny, který spočítá n-tou mocninu v řádově $\log(n)$ operacích. *Myšlenka je následující*:

$$x^2 = x * x \tag{14}$$

$$x^3 = x^2 * x \tag{15}$$

$$x^4 = x^2 * x^2 \tag{16}$$

$$x^5 = x^4 * x \tag{17}$$

$$x^6 = x^3 * x^3 \tag{18}$$

$$x^7 = x^6 * x \tag{19}$$

$$x^8 = x^4 * x^4 \tag{20}$$

Tj. pro sudou mocninu znásobím $x^{n/2} * x^{n/2}$, pro lichou mocninu jednou násobím x a přecházím na sudý případ. Na výpočet x^6 pak stačí jen 3 násobení místo 5 při naivním výpočtu jako $x * x * x * x * x * x$.

Napište rekurentní i iterativní implementaci.