Domácí úkol k cvičení číslo 4

18. března 2025

1 Rozhodnětě a <u>zdůvodněte</u>, jestli platí následující tvrzení:

A) Pro funkci $f(n) = 3n^3 + 7n + 6$ platí:

$$f(n) \in \Omega(n^3), \tag{1}$$
$$f(n) \in \Theta(n^3). \tag{2}$$

B) Pro funkci $g(n) = 4n\log(n+2) + n + \sqrt{n} + 10$ platí:

$$g(n) \in O(n^2), \tag{3}$$
$$g(n) \in \Theta(n \log n). \tag{4}$$

C) Pro funkci $h(n) = 3n^3 + 10^4 n + 2^{10}$ platí:

$$h(n) \in O(n^3), \tag{5}$$
$$h(n) \in \Theta(n^2). \tag{6}$$

Za dostatečné zdůvodnění se považuje výpočet odpovídající limity nebo ukázka toho, že lze nalézt c_1, c_2 a n_0 v definicích Ω, Θ, O, viz přednáška a doporučená literatura. Dostatečné zdůvodnění by mělo obsahovat komentář v přirozeném jazyce, alespoň na úrovni: ,,Tvrzení platí/neplatí protože:... “

2 Určete, která z následujících funkcí roste rychleji:

Doporučeno je postupovat výpočtem limit, případné invenci a alternativním postupům se ovšem meze nekladou, dokud jsou správné. Opět je očekáváno zdůvodnění typu: ,,Funkce f roste rychleji, protože:... “

A) n^5 nebo n^7

B) $\sqrt[4]{n}$ nebo $\log_2(n)$

C) n^{11} nebo 11^n

D) n^5 nebo $5n^4 + 5^5 n^2 + 5^{5^5} n + 5^{5^{5^5}}$

E) $n!$ nebo n^n

3 Určete a zdůvodněte jaká je složitost daného algoritmu

Určete počet operací násobení, dělení, sčítaní a odečítání nutných pro běh algoritmu, nebo alespoň udělejte a odůvodněte jejich řádový odhad. Předpokládejme, že cena všech operací násobení, sčítání, odečítání a dělení je stejná, a že je nezávislá na velikosti čísel. Dále se nebudeme trápit dělením nulou.

Zápis `for` cyklu v algoritmu je myšlený tak, že se začíná v dolní mezi a jde se do horní meze včetně. Obvyklé je chápat vstup algoritmu jako matici s n řádky a $n+1$ sloupci.

Algorithm 1: What does this do?

```
//Input: n × (n + 1) matrix A[0 ... n − 1; 0 ... n] of real numbers
for i = 0, ..., n − 2 do
    for j = i + 1, ..., n − 1 do
        for k = i, ..., n do
            A[j, k] = A[j, k] − A[i, k] ∗ A[j, i]/A[i, i]
        end
    end
end
return A
```

Jak by šlo algoritmus snadno zefektivnit?

4 Vyřešte rekurentní rovnici

Najděte funkci T takovou, že $T(0) = \pi$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (všechna kladná celá čísla) platí

$$T(n) = 5 + T(n-1). \tag{7}$$