

Domácí úkol k cvičení číslo 3

14. března 2025

1 Rozhodněte a zdůvodněte, jestli platí následující tvrzení:

1. Pro funkci $f(n) = 8n^2 + 7n + 6$ platí:

$$f(n) \in \Omega(n^2), \quad (1)$$

$$f(n) \in \Theta(n^2). \quad (2)$$

2. Pro funkci $g(n) = 4n \log(8n) + n + 10$ platí:

$$g(n) \in O(n^2), \quad (3)$$

$$g(n) \in \Theta(n \log n). \quad (4)$$

3. Pro funkci $h(n) = 3n^2 + 10^4n + \pi$ platí:

$$h(n) \in O(n^3), \quad (5)$$

$$h(n) \in \Theta(n^3). \quad (6)$$

Za dostatečné zdůvodnění se považuje výpočet odpovídající limity nebo ukázka toho, že lze nalézt c_1, c_2 a n_0 v definicích Ω, Θ, O , viz přednáška a doporučená literatura. Dostatečné zdůvodnění by mělo obsahovat komentář v přirozeném jazyce, alespoň na úrovni: „Tvrzení platí/neplatí protože...“

2 Určete, která z následujících funkcí roste rychleji:

Doporučeno je postupovat výpočtem limit, případné invenci a alternativním postupům se ovšem meze nekladou, dokud jsou správné. Opět je očekáváno zdůvodnění typu: „Funkce f roste rychleji, protože...“

1. n^2 nebo n^3
2. \sqrt{n} nebo $\log_2(n)$
3. n^2 nebo 2^n
4. n^4 nebo $3n^3 + 3^3n^2 + 3^{3^3}n + 3^{3^{3^3}}$

3 Určete a zdůvodněte jaká je složitost daného algoritmu

Určete počet operací násobení, dělení, sčítání a odečítání nutných pro běh algoritmu, nebo alespoň udělejte a odůvodněte jejich řádový odhad. Předpokládejme, že cena všech operací násobení, sčítání, odečítání a dělení je stejná, a že je nezávislá na velikosti čísel. Dále se nebudeme trápit dělením nulou.

Zápis **for** cyklu v algoritmu je myšlený tak, že se začíná v dolní mezi a jde se do horní meze včetně. Obvyklé je chápat vstup algoritmu jako matici s n řádky a $n + 1$ sloupci.

Algorithm 1: What does this do?

```
//Input:  $n \times (n + 1)$  matrix  $A[0 \dots n - 1; 0 \dots n]$  of real numbers
for  $i = 0, \dots, n - 2$  do
    for  $j = i + 1, \dots, n - 1$  do
        for  $k = i, \dots, n$  do
             $A[j, k] = A[j, k] - A[i, k] * A[j, i] / A[i, i]$ 
        end
    end
end
return  $A$ 
```

Jak by šlo algoritmus snadno zefektivnit?

4 Vyřešte rekurentní rovnici

Najděte funkci T takovou, že $T(0) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (všechna kladná celá čísla) platí

$$T(n) = 2 + T(n - 1). \quad (7)$$