Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Kacper Grabczak
Kacper Kurowski

Wersja z 27 stycznia 2019

Spis treści

1. Twierdzenia

1.1. Ciągła zależność od parametrów

Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru). Niech
$$y' = f(y,t,\lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^l \supset U\times B_l(\lambda_0,c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$
gdzie f jest funkcją ciągłą oraz $c>0$. Niech $y(t,\lambda_0)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = f(y,t,\lambda_0)$ z warunkiem początkowym (y_0,t_0) określonym na *zwartym* przedziale I zawierającym t_0. Wybierzmy $b>0$ i rozważmy zbiór
$$R_b = \big\{(y,t) : t\in I \text{ oraz } \big\|y - y(t,\lambda_0)\big\| < b\big\}.$$
Załóżmy dalej, że

a) istnieje $L\geq 0$, że dla wszystkich $(y_1,t),(y_2,t)\in R_b$ zachodzi
$$\big\|f(y_1,t,\lambda_0) - f(y_2,t,\lambda_0)\big\| \leq L\cdot\|y_1-y_2\|,$$

b) dla dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$, że dla $(y,t)\in R_b$ oraz każdej λ jest
$$\|\lambda-\lambda_0\|<\delta \implies \big\|f(y,t,\lambda) - f(y,t,\lambda_0)\big\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała $c^*>0$ taka, że

1. jeśli $\|\lambda-\lambda_0\|<c^*$, to $y(t,\lambda)$ jest określone na I,
2. jeśli $\lambda_n\to\lambda_0$, to $y(t,\lambda_n)\rightrightarrows y(t,\lambda_0)$ na I.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy lemat pomocniczy.

Lemat 1.1.2. Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że na $J\subset I$ mamy

1. dla wszystkich $t\in J$ jest $\big(y(t,\lambda),t\big)\in R_b$,
2. dla każdego $\varepsilon>0$ oraz $(y,t)\in R_b$ zachodzi $\big\|f(y,t,\lambda)-f(y,t,\lambda_0)\big\|\leq\varepsilon$.

Wtedy dla każdego $t\in J$ prawdziwa jest nierówność
$$\big\|y(t,\lambda)-y(t,\lambda_0)\big\| \leq \varepsilon\cdot e^{L|t-t_0|}\cdot|t-t_0|.$$

Dowód.
$$\begin{aligned}
\big\|y(t,\lambda)-y(t,\lambda_0)\big\| &= \left\|\int_{t_0}^t f\big(y(u,\lambda),u,\lambda\big)du - \int_{t_0}^t f\big(y(u,\lambda_0),u,\lambda_0\big)du\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t \Big\|f\big(y(u,\lambda),u,\lambda\big) - f\big(y(u,\lambda_0),u,\lambda_0\big)\Big\|du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t \Big\|f\big(y(u,\lambda),u,\lambda\big) - f\big(y(u,\lambda),u,\lambda_0\big)\Big\|du\right| + \\
&\qquad + \left|\int_{t_0}^t \Big\|f\big(y(u,\lambda),u,\lambda_0\big) - f\big(y(u,\lambda_0),u,\lambda_0\big)\Big\|du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t \varepsilon\,du\right| + \left|\int_{t_0}^t L\cdot\big\|y(u,\lambda)-y(u,\lambda_0)\big\|du\right| \\
&\leq \underbrace{\varepsilon\cdot|t-t_0|}_{K} + \left|\int_{t_0}^t L\cdot\big\|y(u,\lambda)-y(u,\lambda_0)\big\|du\right|.
\end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą K wynika teza. $\square$

Wybierzmy $\varepsilon > 0$ taki, że $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$ oraz oznaczmy $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$. Weźmy $\lambda > 0$ taką, że $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$. Niech J będzie maksymalnym podprzedziałem I, na którym dla każdego $t \in J$ zachodzi:

$$\big(y(t,\lambda), t\big) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2, dla wszystkich $t \in J$ jest

$$\big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców J, nazwijmy go α, należy do wnętrza I. Wówczas z twierdzenia o przedłużaniu przez koniec, $y(t,\lambda)$ przedłuża się na przedział zawierający α we wnętrzu. Co więcej, ponieważ $\big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\|$ jest funkcją ciągłą względem t, to pozostaje mniejsza od b na pewnym otoczeniu α. Zatem J nie był przedziałem maksymalnym, chyba że $J = I$. Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to z założenia b) istnieje ciąg $\varepsilon_n \to 0$ taki, że

$$\big\|f(y,t,\lambda) - f(y,t,\lambda_0)\big\| < \varepsilon_n$$

dla każdego n oraz wszystkich $(y,t) \in R_b$. Z lematu 1.1.2, dla $t \in I$ jest

$$\big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

co dowodzi drugiej części tezy. ■

1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów

Twierdzenie 1.2.1 (O różniczkowalnej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y,t,\lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą względem y, t, λ oraz klasy C^1 względem y, λ. Ustalmy warunek początkowy (y_0, t_0) i oznaczmy przez $y(t,\lambda)$ rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial t} = f(y,t,\lambda)$$

z warunkiem początkowym $y(t_0,\lambda) = y_0$, określone na ustalonym i *zwartym* przedziale I. Wówczas na przedziale I istnieje ciągła funkcja

$$z(t,\lambda_0) = \frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t,\lambda_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial t \partial \lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial \lambda \partial t}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Dowód. Niech $y_\lambda(t) \in R_b$. Oznaczmy

$$w_\lambda(t) := \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0}$$

dla $\lambda \neq \lambda_0$. Wtedy

$$\partial_t\, w_\lambda(t) = \frac{\partial_t\, y_\lambda(t) - \partial_t\, y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{f_\lambda\big(y_\lambda(t), t\big) - f_{\lambda_0}\big(y_{\lambda_0}(t), t\big)}{\lambda - \lambda_0} =$$
$$= \frac{f_\lambda\big(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0) w_\lambda(t), t\big) - f_{\lambda_0}\big(y_{\lambda_0}(t), t\big)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Rozważmy dalej funkcję

$$F_\lambda(w,t) := \frac{f_\lambda\big(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda-\lambda_0)w, t\big) - f_{\lambda_0}\big(y_{\lambda_0}(t), t\big)}{\lambda-\lambda_0}.$$

Zwróćmy uwagę, że w w definicji F jest symbolem argumentu, a nie funkcji.

Pokażemy, że istnieje taka stała $c^* > 0$, że o ile $|\lambda-\lambda_0| \le c^*$, to dziedzina funkcji F dla każdego λ spełniającego ten warunek jest zbiorem zwartym, a ponadto $w_\lambda(t)$ zawiera się w tej dziedzinie dla każdego $t \in I$.

Lemat 1.2.2. Przy założeniach takich jak powyżej, istnieją stałe $c_1, k_1 > 0$ takie, że

$$|\lambda-\lambda_0| \le c_1 \implies \big\|w_\lambda(t)\big\| \le k_1.$$

Dowód. Weźmy wpierw pewne $c_1 \colon 0 < c_1 < c$. Możemy zawęzić dziedzinę f do $\lambda \in [\lambda_0 - c_1, \lambda + c_1]$. Wtedy f jest funkcją klasy C^1 względem λ zdefiniowaną na zbiorze zwartym (względem λ), a więc jest ona lipszycowska względem λ ze stałą L_λ. Weźmy $\lambda \ne \lambda_0$ z tego zbioru. Możemy zatem wziąć w 1.1.2 $\varepsilon = L_\lambda|\lambda-\lambda_0|$. Zgodnie z tym lematem, zachodzi wtedy:

$$\|w_\lambda(t)\| = \frac{\big\|y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)\big\|}{|\lambda-\lambda_0|} \le L_\lambda \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t-t_0| =: k_1$$

Dla tak zdefiniowanego k_1 teza lematu jest spełniona. (Uwaga: dla każdego λ bierzemy inny ε, ale wciąż uzyskujemy to samo ograniczenie dla $\|w_\lambda(t)\|$). □

Weźmy takie c_1 i k_1. Z kolei jeśli $|\lambda-\lambda_0| \le \frac{b}{2k_1}$, to dla w takich, że $\|w\| \le 2k_1$ zachodzi

$$\big\|y_{\lambda_0}(t) + (\lambda-\lambda_0)w - y_{\lambda_0}(t)\big\| = \big\|(\lambda-\lambda_0)w\big\| = |\lambda-\lambda_0|\cdot\|w\| \le \frac{b}{2k_1}\cdot 2k_1 = b.$$

Oznacza to, że dla każdego $t \in J$ (przy takich λ) jest

$$\big(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda-\lambda_0)w, t\big) \in R_b.$$

Niech $c^* = \min\big(c_1, \frac{b}{2K_1}\big)$. Wtedy F jest zdefiniowana na zbiorze

$$\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times \big((\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*) \setminus \{\lambda_0\}\big).$$

Zdefiniujmy F dla $\lambda = \lambda_0$ tak, by była ciągła względem λ w tym punkcie. Wtedy

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to\lambda_0} F_\lambda(w,t) &= \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f_\lambda\big(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda-\lambda_0)w, t\big) - f_{\lambda_0}\big(y_{\lambda_0}(t), t\big)}{\lambda-\lambda_0} \\
&= \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f_\lambda\big(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda-\lambda_0)w, t\big) - f_\lambda\big(y_{\lambda_0}(t), t\big)}{w(\lambda-\lambda_0)} \cdot w + \\
&\quad + \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f_\lambda\big(y_{\lambda_0}(t), t\big) - f_{\lambda_0}\big(y_{\lambda_0}(t)\big)}{\lambda-\lambda_0} \\
&= D_y\, f_{\lambda_0}(y,t)\big|_{y=y_{\lambda_0}(t)} \cdot w + \partial_\lambda\, f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)\big|_{\lambda=\lambda_0}, \qquad (1.2.1)
\end{aligned}$$

przy czym powyższe pochodne istnieją, gdyż z założenia funkcja f jest klasy C^1 względem zmiennych y oraz λ. Niech

$$F_{\lambda_0}(w,t) := \lim_{\lambda\to\lambda_0} F_\lambda(w,t).$$

Wtedy F jest zdefiniowana na zbiorze

$$\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times (\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*),$$

który jest zwarty dla każdego ustalonego λ.

LEMAT 1.2.3. Funkcja F zdefiniowana powyżej spełnia założenia twierdzenia o ciągłej zależności od parametru przy równaniu różniczkowym $\partial_t w = F_\lambda(w,t)$.

DOWÓD. Nadobowiązkowy dowód Czytelnik wykona samodzielnie. $\square$

Zauważmy, że na mocy powyższego lematu oraz poprzednich rozważań funkcja $F_{\lambda_0}(w,t)$ jest ciągłą funkcją określoną na zbiorze zwartym, więc z Twierdzenia Peano istnieje rozwiązanie w_{λ_0} równania $\partial_t w = F_{\lambda_0}(w,t)$ określone w pewnym przedziale $J \subset I$ (dla ustalenia uwagi, niech J będzie maksymalnym możliwym).

Rozwiązanie to jest jednoznaczne, gdyż dla każdego ciągu $\lambda_n \to \lambda_0$ zachodzi $w_{\lambda_n}(t) \rightrightarrows w_{\lambda_0}(t)$. Gdybyśmy mieli dwa ciągi $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2} \to \lambda_0$, dla których $w_{\lambda_{n_1}}(t) \to w_{\lambda_0,1}(t)$ oraz $w_{\lambda_{n_2}}(t) \to w_{\lambda_0,2}(t)$, to ciąg λ_n z wyrazami na przemian z λ_{n_1} i λ_{n_2} również byłby zbieżny do λ_0, więc w_{λ_n} także byłby zbieżny do jakiegoś rozwiązania. To zaś z jednoznaczności granicy oznacza, że $w_{\lambda_{n_1}}(t) = w_{\lambda_{n_2}}(t)$ dla każdego t. Stąd:

$$w_{\lambda_0}(t) = \lim_{n\to\infty} w_{\lambda_n}(t) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} w_\lambda(t) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \partial_\lambda y_\lambda(t)\big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Ponadto $J = I$. Przypuśćmy przeciwnie, że tak nie jest i bez straty ogólności załóżmy, że α jest prawym krańcem J, ale nie I. Skoro F_{λ_0} spełnia założenia 1.1.1, to jest ciągła i lipszycowska względem w_{λ_0}, a więc też jest lokalnie lipszycowska. Skoro $\|w_\lambda(t)\| \le k_1$, to po przejściu z nierównością do granicy także $\|w_{\lambda_0}(t)\| \le k_1$. Wreszcie w_{λ_0} jest funkcją ciągłą, więc istnieje pewne otoczenie U_α punktu α, dla którego $t \in U_\alpha \implies \|w_\lambda(t)\| \le 2k_1$, więc istnieje zbiór zwarty K oraz $\delta > 0$ takie, że

$$\forall t \in Dmw_{\lambda_0} \cap [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \quad \big(w_{\lambda_0}(t), t\big) \in K.$$

Zatem z 2.1.5 w_{λ_0} rozszerza się na przedział zawierajacy α we wnętrzu, co przeczyłoby maksymalności J.

Na mocy powyższych rozważań w_{λ_0} jest szukaną funkcją z z tezy twierdzenia. Równość w twierdzeniu zachodzi, gdyż

$$F_{\lambda_0}(w,t) = \partial_t w_{\lambda_0}(t) = \partial_t \partial_\lambda y_\lambda(t)\Big|_{\lambda=\lambda_0} \overset{(\star)}{=} \partial_\lambda \partial_t y_\lambda(t)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \partial_\lambda f_\lambda(y_\lambda, t)\Big|_{\lambda=\lambda_0},$$

gdzie równość $(\star)$ zachodzi na mocy Twierdzenia Schwarza, gdyż $F_{\lambda_0}(w,t)$ jest ciągła (spełnia 1.1.1) i f jest C^1 względem y i λ z założenia. Czyli istotnie $\partial_t w_{\lambda_0}(t) = \partial_\lambda \partial_t y_\lambda(t)\big|_{\lambda=\lambda_0}$.

Wreszcie, poprzez podstawienie $w = w_{\lambda_0}(t)$ w (1.2.1) otrzymujemy tzw. równanie na wariację:

$$\partial_t w_{\lambda_0}(t) = D_y f_{\lambda_0}(y,t)\big|_{y=y_{\lambda_0}(t)} \cdot w_{\lambda_0}(t) + \partial_\lambda f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)\big|_{\lambda=\lambda_0},$$

z warunkiem początkowym $w_{\lambda_0}(t_0) = 0$. $\blacksquare$

1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego

Rozważmy równanie

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \tag{1.3.1}$$

gdzie a_2, a_1, a_0 są analityczne w pewnym punkcie t_0.

Definicja 1.3.1. Powiemy, że t_0 jest *punktem regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2(t_0) \neq 0$. W przeciwnym wypadku t_0 nazwiemy *punktem osobliwym*.

W przypadku regularnym równanie (1.3.1) sprowadza się do

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{1.3.2}$$

gdzie p i q są analityczne w punkcie t_0, czyli

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t - t_0)^n, \qquad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t - t_0)^n.$$

Twierdzenie 1.3.2. Każde rozwiązanie równania (1.3.2) jest analityczne w kole, w którym oba szeregi $p(t)$ i $q(t)$ zbiegają. Co więcej, analityczna funkcja

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$$

jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} c_{k+1}(k+1)p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} \right). \tag{1.3.3}$$

Dowód. Dla ustalenia uwagi niech $t_0 = 0$ oraz $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Wtedy

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n, \qquad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} t^n.$$

Z iloczynu Cauchy'ego[1] dostajemy

$$\begin{aligned} p(t)y'(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1} p_{n-k}, \\ q(t)y(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k}. \end{aligned}$$

Rozpisując lewą stronę równania (1.3.2), otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left((n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} \right) = 0.$$

Z analityczności, dla każdego $n \geq 0$ jest

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} = 0,$$

co dowodzi wzoru (1.3.3).

Wzór rekurencyjny (1.3.3) zadaje współczynniki c_n dla $n \geq 2$, jeśli wybrane zostały c_0, c_1. Zauważmy, że $c_0 = y(t_0)$, $c_1 = y'(t_0)$. Zatem dobierając c_0 oraz c_1 możemy otrzymać dowolny warunek początkowy dla y, co pozwala uzyskać każde rozwiązanie wysycone. Pozostaje pokazać, że przy dowolnym wyborze c_0, c_1 wzór (1.3.3) prowadzi do szeregu Taylora funkcji analitycznej w kole $D(t_0, R)$.

Wybierzmy $0 < r < R$. Wtedy funkcje p, q są zbieżne bezwzględnie w $\overline{D}(t_0, r)$, więc istnieją stałe L_p oraz L_q takie, że dla dowolnego $n \geq 0$ jest

$$|p_n| r^n \leq L_p, \qquad |q_n| r^n \leq L_q.$$

[1] $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Niech $0 < \rho < r$ oraz $\gamma_n = |c_n|\rho^n$, $\Gamma_n = \max\{\gamma_j : j = 1, \ldots, n\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
|\gamma_{n+2}| &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot |c_{k+1}| \cdot |p_{n-k}| + \sum_{k=0}^{n} |c_k| \cdot |q_{n-k}| \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} (n+1) \cdot \frac{\gamma_{k+1}}{\rho^{k+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{\rho^k} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma_{n+1}}{\rho^{k-n}\rho^{n+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma_n}{\rho^{k-n}\rho^{n}} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho L_p}{n+2} \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+1)(n+2)} \Gamma_n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right) \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \underbrace{\left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r}} \right)}_{\alpha_n} \Gamma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Wyrażenie α_n zbiega do zera, gdy $n \to \infty$. Istnieje n_0, że $\alpha_n < 1$ dla $n \geq n_0$. Zatem dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi $\gamma_{n+2} \leq \Gamma_{n+1}$, co jest równoważne temu, że $\Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}$, czyli ciąg Γ_n jest stały od pewnego miejsca i ograniczony przez pewne $\overline{\Gamma}$. Stąd, jeśli $|t| < \rho$, to z kryterium Cauchy'ego jest

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |t|^n} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot \rho^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{|t|^n}{\rho^n}} \leq \sqrt[n]{\overline{\Gamma}} \cdot \left| \frac{t}{\rho} \right| < 1,$$

o ile n jest dostatecznie duże. Wobec tego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ jest zbieżny w kole o promieniu ρ. Ponieważ ρ może być dowolnie bliskie R, to suma kół wypełnia koło otwarte o promieniu R, co kończy dowód. ■

1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

Definicja 1.4.1. *Widmem* macierzy A nazywamy zbiór jej wartości własnych wraz z krotnościami i oznaczamy $\mathrm{sp}(A)$.

Twierdzenie 1.4.2 (Hamilton-Cayley). Dla każdej macierzy A zachodzi $\chi_A(A) = 0$, gdzie χ_A jest wielomianem charakterystycznym macierzy A.

Twierdzenie 1.4.3 (Spektralne dla wielomianów). Niech A będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ z krotnościami $q_1, \ldots, q_n$. Wtedy istnieją macierze $M_{k,l}$ dla $1 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq q_k - 1$, zwane *spektralnymi* takie, że dla każdego wielomianu f stopnia m zachodzi:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k).$$

Dowód. W celu udowodnienia twierdzenia będzie potrzebny lemat pomocniczy.

LEMAT 1.4.4. Macierze $M_{k,l}$ są jednoznacznie wyznaczone przez tezę twierdzenia spektralnego dla wielomianów postaci $f(z) = z^r$, gdzie $r = 0, \ldots, m-1$.

DOWÓD. Otrzymujemy układ równań z niewiadomymi $M_{k,l}$, czyli

$$A^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot r(r-1)\cdots(r-l+1) \cdot \lambda_k^{r-l}.$$

Teza lematu oznacza, że układ ten jest oznaczony. Pokażemy liniową niezależność wierszy. Wybierzmy współczynniki c_r dla $r = 0, \ldots, m-1$, tak aby kombinacja liniowa wierszy z tymi współczynnikami wynosiła 0, czyli dla każdych $k = 1, \ldots, n$ oraz $l = 0, \ldots, q_k - 1$ jest

$$\sum_{r=0}^{m-1} c_r \cdot r(r-1)\cdots(r-l+1)\lambda_k^{r-l} = 0.$$

Rozważmy teraz wielomian

$$w(z) = \sum_{r=0}^{m-1} c_r z^r.$$

Otrzymaliśmy, że $w^{(l)}(\lambda_k) = 0$, czyli λ_k jest zerem z krotnością co najmniej q_k, a zatem suma krotności zer wielomianu w jest równa co najmniej $\sum_{k=1}^{n} q_k = m$, co jest sprzecznością, bo stopień wielomianu był co najwyżej $m-1$. □

Twierdzenie zostanie udowodnione indukcyjnie ze względu na stopień f.

Przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla wielomianów stopnia mniejszego od $m + r$, gdzie $r \geq 0$. Z lematu 1.4.4 teza zachodzi dla $r = 0$. Zwróćmy uwagę, że obie strony twierdzenia są liniowe względem f. Wystarczy więc pokazać je dla układu rozpinającego przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego niż $m+r$. W celu pokazania, że twierdzenie zachodzi również dla wielomianów stopnia $m + r$, wystarczy pokazać dla $f_r(z) = z^r \chi_A(z)$, bo każdy wielomian

$$f(z) = a_{m+r} z^{m+r} + \ldots + a_1 z + a_0$$

można zapisać jako

$$f(z) = a_{m+r} f_r(z) + P(z),$$

gdzie P jest wielomianem stopnia mniejszego niż $m + r$. Zauważmy, że

$$L = f_r(A) = A^r \cdot \chi_A(A) \overset{1.4.2}{=} 0, \qquad P = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k),$$

a ponadto $f_r(z) = (z - \lambda_k)^{q_k} \cdot Q(z)$. Pochodne rzędu niższego od q_k składają się z sum członów, w których $(z - \lambda_k)$ występuje w dowolnej potędze, więc zerują się przy podstawieniu $z = \lambda_k$. ■

Twierdzenie 1.4.5 (Spektralne dla funkcji analitycznych). Niech

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R.$$

Załóżmy, że $\mathrm{sp}(A) \subset D(0, R)$. Wówczas szereg $f(A)$ zbiega i zachodzi teza twierdzenia spektralnego dla wielomianów:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k - 1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

Dowód. Oznaczmy

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

Korzystając z twierdzenia spektralnego dla wielomianów, dostajemy

$$f(A) = \lim_{N\to\infty} f_N(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f_N^{(l)}(\lambda_j) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot \lim_{N\to\infty} f_N^{(l)}(\lambda_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j). \qquad \blacksquare$$

1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\|e^{At}\|$

Definicja 1.5.1. *Wykładnikiem Lapunowa* macierzy A nazywamy liczbę

$$\overline{\lambda} = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda_k : k = 1, \ldots, n\}.$$

Definicja 1.5.2. *Potęgą Lapunowa* macierzy A nazywamy liczbę

$$\overline{l} = \max\big\{l \geq 0 : \exists k \in \{1, \ldots, n\} \quad \mathrm{Re}\,\lambda_k = \overline{\lambda} \ \wedge\ M_{k,l} \neq 0\big\}.$$

Lemat 1.5.3 (Wzór Leibniza).

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f \cdot D^{n-k} g. \tag{1.5.1}$$

Twierdzenie 1.5.4. Dla każdej macierzy A zachodzą nierówności:

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\overline{l}} e^{\overline{\lambda} t}} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\overline{l}} e^{\overline{\lambda} t}} < \infty.$$

Dowód. Nierówność środkowa jest oczywista. Zaczniemy wobec tego od prawej.

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\overline{l}} e^{\overline{\lambda} t}} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot t^l e^{\lambda_k t} \right\|}{t^{\overline{l}} \exp(\overline{\lambda} t)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t\to\infty} \frac{t^l e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_k)t}}{t^{\overline{l}} e^{\overline{\lambda} t}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t\to\infty} t^{l-\overline{l}} e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_k - \overline{\lambda})t}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\mathrm{Re}\,\lambda_k - \overline{\lambda} \leq 0$, a jeśli $\mathrm{Re}\,\lambda_k - \overline{\lambda} = 0$ oraz $M_{k,l} \neq 0$, to $l \leq \overline{l}$. Wobec tego, dla każdej kombinacji k i l jest

$$\limsup_{t\to\infty} t^{l-\overline{l}} \exp\big((\mathrm{Re}\,\lambda_k - \overline{\lambda})t\big) \leq 1.$$

Bez utraty ogólności możemy przyjąć $\overline{\lambda} = \lambda_1$, $M_{1,\bar{l}} \neq 0$ oraz

$$w(z) = \prod_{k=2}^{n} (z-\lambda_k)^{q_k} = \frac{\chi_A(z)}{(z-\lambda_1)^{q_1}}.$$

Niech $f(z) = w(z) \cdot e^{zt}$. Wtedy dla $k > 0$ oraz $l < q_k$ jest $f^{(l)}(\lambda_k) = 0$, bo pochodna jest sumą członów ze wzoru (1.5.1), gdzie $(z-\lambda_k)$ występuje w potędze dodatniej. Niechaj teraz $k = 1$ oraz $\varphi(z) = e^{zt}$, $\psi(z) = w(z)$. Wtedy

$$(\varphi \cdot \psi)^{(l)}(\lambda_1) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} t^i e^{\lambda_1 t} w^{(l-i)}(\lambda_i) = e^{\lambda_1 t} \cdot p_l(t),$$

gdzie p_l jest wielomianem stopnia co najwyżej l. Wtedy $p_{\bar{l}}$ ma postać

$$t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t} w(\lambda_1) + \widetilde{p_{\bar{l}}}(t) e^{\lambda_1 t},$$

gdzie stopień $\widetilde{p_{\bar{l}}}$ jest mniejszy od $\bar{l}$. Z twierdzenia spektralnego jest

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} \frac{\left\|w(A)e^{At}\right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} &= \liminf_{t\to\infty} \frac{\left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} e^{\lambda_1 t} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} e^{\lambda_1 t} \big(t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \widetilde{p_{\bar{l}}}(t)\big) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\
&= \liminf_{t\to\infty} \frac{\left\|e^{\lambda_1 t}\right\| \cdot \left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} \big(t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \widetilde{p_{\bar{l}}}(t)\big) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\
&\geq \liminf_{t\to\infty} \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \left|t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \widetilde{p_{\bar{l}}}(t)\right| - \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \|p_l(t)\|}{t^{\bar{l}}} \\
&\geq \liminf_{t\to\infty} \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \left| w(\lambda_1) + \frac{\widetilde{p_{\bar{l}}}(t)}{t^{\bar{l}}} \right| - \limsup_{t\to\infty} \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,l}\| \cdot \left| \frac{p_l(t)}{t^{\bar{l}}} \right| \\
&= \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \underbrace{\left|w(\lambda_1)\right|}_{>0}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\left\|w(A)e^{At}\right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \geq \frac{1}{\left\|w(A)\right\|} \cdot \liminf_{t\to\infty} \frac{\left\|w(A)e^{At}\right\|}{t^{\bar{l}} e^{\overline{\lambda} t}} \geq \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \left|w(\lambda_1)\right|}{\left\|w(A)\right\|} > 0. \quad \blacksquare$$

1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności

Definicja 1.6.1. Niech $y' = f(y)$, $f \in C^1(U)$. Funkcję $G\colon U \to \mathbb{R}$ nazywamy *całką pierwszą*, jeśli dla każdego rozwiązania $y(t)$, złożenie $G\big(y(t)\big)$ jest stałe.

Lemat 1.6.2. G jest całką pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle \nabla G, f \rangle \equiv 0$.

Definicja 1.6.3. *Funkcją Lapunowa* nazywamy funkcję L taką, że w warunku całki powyżej zastępujemy $L(y(t)) = const$ przez $L(y(t))$ nierosnące. W terminach potoków ten warunek wyrażony jest przez $t_1 > t_2 \implies L(\varphi^{t_1}(y_0)) \leq L(\varphi^{t_2}(y_0))$.

Twierdzenie 1.6.4. Niech $y' = f(y)$, gdzie $f \in C^1(U)$, zaś L jest funkcją Lapunowa na U, przy czym L ma ścisłe minimum globalne w $y_0 \in U$. Wtedy y_0 jest stabilnym (w sensie Lapunowa) położeniem równowagi.

Dowód. Pokażemy, że dla każdego $t \geq 0$ zachodzi $\varphi^t(y_0) = y_0$. Jeśliby tak nie było, to dla pewnego $t > 0$ mielibyśmy $\varphi(t)(y_0) \neq y_0$. Wtedy jednak $L(\varphi^t(y_0)) > L(y_0) = \varphi^{t_0}(y_0)$, co przeczyłoby, że L jest funkcją Lapunowa. Zatem y_0 jest położeniem równowagi.

Pokażemy, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{t\geq 0} \, \|y - y_0\| \leq \delta \wedge \varphi^t(y_0) \, istnieje \implies \|\varphi^t(y_0) - y_0\| \leq \varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Bez straty ogólności załóżmy, że $\overline{B}(y_0, \varepsilon) \subset U$ (jeśliby tak nie było, wystarczy wziąć mniejszy ε) oraz $L(y_0) = 0$. Wtedy zbiór $\{y \in U : \|y - y_0\| = \varepsilon\}$ jest zbiorem zwartym. Wobec tego $\mu \coloneqq \inf\{L(y) : \|y - y_0\| = \varepsilon\}$ jest przyjmowane w pewnym punkcie $y_{\min}$ oraz $\mu = L(y_{\min}) > L(y_0) = 0$.

Z ciągłości L w 0 istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $\|y - y_0\| \leq \delta$, to $L(y) > \mu$. Gdyby dla pewnego $t > 0$ zachodziło $\|y - y_0\| \geq \varepsilon$, to z własności Darboux istnieje $\tau \colon 0 \leq \tau \leq t$ takie, że $\|\varphi^\tau(y) - y_0\| = \varepsilon$. Wtedy jednak $L(\varphi^\tau(y)) \leq \mu > L(y) = L(\varphi^0(y))$, co jest sprzecznością z założeniem, ze L to funkcja Lapunowa. Otrzymujemy zatem, że dla każdego $t > 0$ zachodzi $\|y - y_0\| < \varepsilon$.

Pozostaje pokażać, że $\varphi^t(y) = y(t)$ jest określone dla każdego $t \geq 0$. Jeśli $\alpha \geq 0$, to $y([0, \alpha]) \subset \overline{B}(y_0, \varepsilon)$. Skoro $\overline{B}(y_0, \varepsilon)$ jest zbiorem zwartym, to $y(t)$ przedłuża się na pewne prawostronne otoczenie α z lematu o przedłużaniu prze koniec. Tym samym prawym końcem dziedziny rozwiązania wysoconego $y(t)$ jest $+\infty$. ∎

2. Zagadnienia

2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone (otwarte)

Twierdzenie 2.1.1 (Peano). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla $\alpha = \min(a, b/M)$ istnieje rozwiązanie $y(t)$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, spełniające warunek początkowy $y(t_0) = y_0$.

Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf). Niech $y' = f(y,t)$, $y(t_0) = y_0$, gdzie

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła oraz lipszycowska ze względu na y, to znaczy

$$\exists L\ \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \big\|f(y_1, t) - f(y_2, t)\big\| \le L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $(y_0, t_0) \in U$. Jeśli $y_1(t), y_2(t)$ są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na I_1, I_2, spełniającymi ten sam warunek początkowy $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, to $y_1 \equiv y_2$ na $I_1 \cap I_2$.

Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $y(t)$ – rozwiązanie, T – koniec $\operatorname{Dm} y$, granica $\lim_{t\to T} y(t) = y_T$ istnieje oraz $(y_T, T) \in U$. Wówczas y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Załóżmy, że rozwiązanie $y(t)$ jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest $T \in \mathbb{R}$. Załóżmy dalej, że istnieje zbiór zwarty $K \subset U$ oraz $\varepsilon > 0$, taki, że

$$\forall t \in \operatorname{Dm} y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad \big(y(t), t\big) \in K.$$

Wtedy y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y oraz $(y_0, t_0) \in U$. Wówczas istnieje rozwiązanie $y_{\max}$ zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy $y_{\max}(t_0) = y_0$ i takie, że jeśli y jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek $y(t_0) = y_0$, to $\operatorname{Dm} y \subset \operatorname{Dm} y_{\max}$ oraz y jest obcięciem $y_{\max}$.

2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)

Rozważmy regularne[1] równanie różniczkowe postaci

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{2.2.1}$$

Definicja 2.2.1. Punkt t_0 nazwiemy regularnie osobliwym, jeśli funkcja $\frac{a_2(t)}{(t-t_0)^2}$ jest analityczna w t_0 i nie znika w t_0, a funkcja $\frac{a_1(t)}{t-t_0}$ jest analityczna w t_0.

W przypadku punktu regularnie osobliwego równanie (2.2.1) sprowadza się do

$$(t-t_0)^2y'' + (t-t_0)p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2.2.2}$$

Rozwiązań będziemy szukali jedynie poza t_0, $t > t_0$.

Metoda Frobeniusa. Niech $t_0 = 0$. Szukamy rozwiązań w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

gdzie $c_0 \neq 0$. Różniczkując stronami, dostajemy

$$ty'(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)t^n, \qquad t^2y''(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)t^n.$$

Niech $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ oraz $q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$. Wtedy

$$\begin{aligned}
tp(t)y'(t) &= t^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)t^n\right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k(k+\lambda)p_{n-k} = \\
&= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(c_n(n+\lambda)p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(k+\lambda)p_{n-k}\right), \\
q(t)y(t) &= t^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} = \\
&= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(c_n q_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k}\right).
\end{aligned}$$

Wstawiamy wynik do równania (2.2.2), otrzymując

$$\begin{aligned}
&t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \big((n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n + (n+\lambda)p_0c_n + q_0c_n\big) + \\
&\qquad + t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+\lambda)c_kp_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_kq_{n-k}\right)}_{-X_n(c_0,\ldots,c_{n-1})} = 0.
\end{aligned}$$

Dla każdej naturalnej liczby $n > 0$ zachodzi:

$$c_n\big((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)p_0 + q_0\big) = X_n(c_0, \ldots, c_{n-1})$$

oraz $X_0 = 0$ dla $n = 0$. Zdefiniujmy *wielomian indeksowy* P wzorem

$$P(s) = s(s-1) + p_0s + q_0.$$

Wtedy otrzymujemy

$$c_nP(n+\lambda) = X_n(c_0, \ldots, c_{n-1}).$$

[1] $a_2(t) \neq 0$

Stąd wynika, że $c_0 P(\lambda) = 0$. Założyliśmy, że $c_0 \neq 0$, więc λ *musi być pierwiastkiem wielomianu indeksowego*. Dla $n = 0$ mamy $X_0 = 0$, więc dla $n > 0$ rekurencja przyjmuje postać

$$c_n = \frac{X_n(c_0, \ldots, c_{n-1})}{P(n+\lambda)}.$$

To pozwala wyliczyć współczynniki c_n dla $n > 0$, chyba że $P(n+\lambda) = 0$ dla pewnego n, czyli $n + \lambda$ jest pierwiastkiem wielomianu indeksowego.

Przypadek podstawowy. Wielomian indeksowy ma dwa pierwiastki rzeczywiste λ_1, λ_2 nieróżniące się o liczbę całkowitą. Wówczas otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązanie przyjmując $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$.

Przypadek zespolony. Bierzemy jeden z nich, dostając rozwiązanie zespolone

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = e^{t \operatorname{Re} \lambda} \big(\cos(t \operatorname{Im} \lambda) + i \sin(t \operatorname{Im} \lambda)\big) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Rozwiązaniami są $\operatorname{Re} y(t)$ oraz $\operatorname{Im} y(t)$, i są liniowo niezależne.

Przypadek pierwiastków różniących się o liczbę całkowitą. Niech λ oraz $\lambda + r$ będą pierwiastkami, gdzie $r \in \mathbb{Z}$. Jeśli $r = 0$, to mamy pierwiastek podwójny. W przeciwnym przypadku otrzymujemy jedno rozwiązanie postaci

$$y_0(t) = t^{\lambda + r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \tag{2.2.3}$$

Drugiego rozwiązania szukamy w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + \gamma y_0(t) \ln t,$$

gdzie γ to stała, którą wyznaczymy. Wstawiając do równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} &t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \big(P(n+\lambda) \cdot d_n - X_n(d_0, \ldots, d_{n-1})\big) + \\ &\qquad + \gamma t^2 \big(y_0(t) \ln t\big)'' + \gamma t p(t) \big(y_0(t) \ln t\big)' + \gamma q(t) y_0(t) \ln t = 0. \end{aligned}$$

Zajmijmy się składnikami zawierającymi γ. Po zróżniczkowaniu, dostajemy

$$\gamma \ln t \big(t^2 y_0''(t) + t p(t) y_0'(t) + q(t) y_0(t)\big) + \gamma \big(2t y_0'(t) + \big(p(t) - 1\big) y_0(t)\big) = \ldots$$

Pierwszy człon się zeruje, bo y_0 jest rozwiązaniem. Wstawiając (2.2.3), mamy

$$\begin{aligned} \ldots &= \gamma \left(2t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda + r) c_n t^{n+\lambda+r-1} + \big(p(t) - 1\big) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\lambda+r} \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\lambda+r) c_n t^n + p(t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\lambda+r) c_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k p_{n-k} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(2(n+\lambda+r) c_n + \sum_{k=0}^{n} c_k p_{n-k} - c_n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(2(n+\lambda+r) c_n + (p_0 - 1) c_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k} \right) = \ldots \end{aligned}$$

Zauważmy, że $P'(n+\lambda+r) = 2(n+\lambda+r)+p_0-1$. Stąd

$$\ldots = \gamma t^{\lambda+r}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\big(P'(n+\lambda+r)c_n - Y_n(c_0,\ldots,c_{n-1})\big) = \ldots$$

gdzie $-Y_n(c_0,\ldots,c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k}$. Przesuwając indeksy, dostajemy

$$\ldots = \gamma t^{\lambda}\sum_{n=r}^{\infty} t^n\big(c_{n-r}P'(n+\lambda) - Y_{n-r}(c_0,\ldots,c_{n-r-1})\big).$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+\lambda}\big(P(n+\lambda)d_n - X_n(d_0,\ldots,d_{n-1})\big) + \\ + \gamma\sum_{n=r}^{\infty} t^{n+\lambda}\big(P'(n+\lambda)c_{n-r} - Y_{n-r}(c_0,\ldots,c_{n-r-1})\big) = 0.$$

Przyrównujemy do zera współczynniki przy $t^{n+\lambda}$. Jeśli $0 \le n < r$, to

$$P(n+\lambda)d_n = X_n(d_0,\ldots,d_{n-1}).$$

Z kolei jeśli $n \ge r$, to mamy

$$P(n+\lambda)d_n + \gamma P'(n+\lambda)c_{n-r} = X_n(d_0,\ldots,d_{n-1}) + \gamma Y_{n-r}(c_0,\ldots,c_{n-r-1}).$$

Przypadek 1. Niech $r > 0$. Wybieramy dowolne d_0, byle tylko różne od zera. Dla $n = 1,\ldots,r-1$ otrzymujemy d_n z rekurencji. Jeśli $n = r$, to

$$\gamma P'(\lambda+r)c_0 = X_r(d_0,\ldots,d_{r-1}).$$

Kładziemy

$$\gamma = \frac{X_r(d_0,\ldots,d_{r-1})}{c_0P'(\lambda+r)}.$$

Powyższe wyrażenie ma sens, bo $\lambda+r$ nie jest pierwiastkiem podwójnym, więc $P'(\lambda+r) \neq 0$. Ponadto nie otrzymaliśmy warunku na d_r, więc d_r może być dowolne (nawet 0). W końcu, jeśli $n > r$, to

$$d_n = \frac{X_n(d_0,\ldots,d_{n-1}) + Y_{n-r}(c_0,\ldots,c_{n-r-1}) - \gamma P'(n+\lambda)c_{n-r}}{P(\lambda+r)}.$$

Przypadek 2. Niech $r = 0$. Wtedy $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$. Kładziemy dowolne $d_0 \neq 0$ oraz $\gamma \neq 0$. Dla $n > 0$ kolejne współczynniki wyznaczamy tak samo, jak w przypadku poprzednim ($n > r$).

2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)

Definicja 2.3.1. *Równaniem liniowym* nazywamy równanie postaci

$$y' = A(t)y + B(t),$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą $m \times m$, $B(t)$ wektorem z $\mathbb{R}^m$, a ich współczynniki są funkcjami ciągłymi określonymi na przedziale otwartym $I \subset \mathbb{R}$.

Lemat 2.3.2. Dla dowolnego warunku początkowego (y_0, t_0), gdzie $y_0 \in \mathbb{R}^m$ oraz $t_0 \in I$, dziedziną rozwiązania wysyconego jest I.

Definicja 2.3.3. Równanie $y' = A(t)y$ nazywamy *jednorodnym*, a równanie $y' = A(t)y + B(t)$ (odpowiadającym) *niejednorodnym*.

Twierdzenie 2.3.4. Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową $C^0(I, \mathbb{R}^m)$, a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej warstwą.

Niech V oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania $y' = A(t)y$.

Stwierdzenie 2.3.5. Niech $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset V$. Poniższe warunki są równoważne:

1. Zbiór $\{y_1, \ldots, y_n\}$ jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego $t \in I$ zbiór $\big\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\big\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^m$.
3. Istnieje $t \in I$, że zbiór $\big\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\big\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^m$.

Stwierdzenie 2.3.6. Niech $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset V$. Wtedy

1. Jeśli $\{y_1, \ldots, y_k\}$ jest liniowo niezależny, to $k \leq m$.
2. Jeśli $\{y_1, \ldots, y_k\}$ rozpina V, to $k \geq m$.

Wniosek 2.3.7. $\dim V = m$.

Definicja 2.3.8. *Układem fundamentalnym* nazwiemy dowolną bazę V.

Definicja 2.3.9. *Macierzą rozwiązującą* będziemy nazywali macierz, której kolumny tworzą układ fundamentalny.

Stwierdzenie 2.3.10. $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa dla każdego (równoważnie pewnego) $t \in I$ oraz spełnia

$$\frac{d}{dt}M(t) = A(t) \cdot M(t).$$

Uwaga 2.3.11. Jeśli $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą, a P macierzą o m wierszach i stałych współczynnikach, to

$$\frac{d}{dt}M(t)P = A(t)M(t)P.$$

Jeśli P jest nieosobliwa, to $M(t)P$ jest macierzą rozwiązującą.

$$\frac{d}{dt}M(t)P = \frac{dM(t)}{dt}P = A(t)M(t)P = A(t)\big(M(t)P\big).$$

Jeśli $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^m$, to $\mathcal{C} \cdot M(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym.

Jeśli $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą, zaś $t_0 \in I$, to

$$M(t, t_0) = M(t) \cdot \big[M(t_0)\big]^{-1}$$

jest macierzą rozwiązującą oraz $M(t_0, t_0) = E$. Ponadto $M(t_0, t_0)y_0$ jest rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$.

2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych

Rozpatrzmy równanie

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Możemy je zapisać jako

$$\begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Wielomian odpowiadający temu równaniu ma postać

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Rozwiązań równania różniczkowego będziemy szukali w zależności od pierwiastków wielomianu. Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą owymi pierwiastkami.

1. Jeśli λ_i jest rzeczywistym pierwiastkiem jednokrotnym, to $e^{\lambda_i x}$ jest rozwiązaniem,
2. Jeśli λ_i jest rzeczywistym pierwiastkiem p-krotnym, to $x^i e^{\lambda_i x}$, są rozwiązaniami dla $i = 0, \ldots, p-1$,
3. Jeśli λ_i jest zespolonym pierwiastkiem jednokrotnym, to rozwiązaniami są $e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)x}\cos\big(\mathrm{Im}(\lambda_i)x\big)$ oraz $e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)x}\sin\big(\mathrm{Im}(\lambda_i)x\big)$,
4. Jeśli λ_i jest zespolonym pierwiastkiem p-krotnym, to rozwiązaniami są $x_i e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)x}\cos\big(\mathrm{Im}(\lambda_i)x\big)$ oraz $x^i e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)x}\sin\big(\mathrm{Im}(\lambda_i)x\big)$ dla $i = 0, \ldots, p-1$.

Rozwiązaniami ogólnymi będą kombinacje liniowe powyższych.

Rozważmy teraz odpowiadające równanie niejednorodne

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Rozwiązanie będzie zależało od postaci części niejednorodnej.

1. Jeśli niejednorodność jest postaci $f(x) = Q_n(x)e^{\lambda x}$, gdzie Q_n jest wielomianem stopnia n, to rozwiązanie szczególne ma postać

   $$y_s(x) = x^p P_n e^{\lambda x},$$

   przy czym P_n jest wielomianem stopnia co najwyżej n, a p jest krotnością λ jako pierwiastka wielomianu.
2. Jeśli niejednorodność ma postać

   $$f(x) = e^{\alpha x}\big(Q_n(x)\cos(\beta x) + P_m(x)\sin(\beta x)\big),$$

   to rozwiązanie szczególne jest postaci

   $$y_s(x) = x^p e^{\alpha x}\big(P_N\cos(\beta x) + Q_N\sin(\beta x)\big),$$

   gdzie $N = \max(\deg Q_n, \deg P_m)$, a p jest krotnością $\lambda = \alpha + \beta i$ jako pierwiastka wielomianu.
3. W przeciwnym przypadku stosujemy metodę uzmienniania stałej. Wtedy

   $$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

   Wówczas

   $$y_s = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n.$$

Twierdzenie 2.4.1 (Zasada Duhamela). Jeśli $y' = A(t)y + B(t)$, to rozwiązania są dane wzorem

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} M(t,u)B(u)du,$$

gdzie $M(t,u)$ jest macierzą rozwiązującą równania $y' = A(t)y$ taką, że $M(t,t) = E$.

2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi

2.6. Zagadnienia brzegowe

3. Przykłady

3.1. Rozwiązywanie równań metodą szeregów potęgowych

3.2. Równania na wariację

3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach

3.4. Wzory Liouville'a i Abela

3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne

3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności