KJG

Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Wersja z 20 grudnia 2018

Spis treści

1. Twierdzenia

1.1. Ciągła zależność od parametru

Twierdzenie 1.1.1 (o ciągłej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą oraz $c > 0$. Niech $y(t, \lambda_0)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = f(y, t, \lambda_0)$ z warunkiem początkowym (y_0, t_0) określonym na *zwartym* przedziale I zawierającym t_0. Wybierzmy $b > 0$ i rozważmy zbiór

$$R_b = \Big\{(y, t) : t \in I, \big\|y - y(t, \lambda_0)\big\| < b\Big\}.$$

Załóżmy dalej, że
1. $\exists L \geq 0\ \forall (y_1, t), (y_2, t) \in R_b \quad \big\|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\big\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|$,
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (y, t) \in R_b\ \forall \lambda\colon \|\lambda - \lambda_0\| < \delta \quad \big\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\big\| < \varepsilon$.

Wówczas istnieje stała $c^* > 0$ taka, że jeśli $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$, to $y(t, \lambda)$ jest określone na I zaś jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$ na I.

1.2. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

Twierdzenie 1.2.1 (Hamilton-Cayley). $\chi_A(A) = 0$.

Twierdzenie 1.2.2 (spektralne dla wielomianów). Dla każdej macierzy A istnieją macierze spektralne $M_{j,l}$ takie, że dla dowolnego wielomianu f zachodzi

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_j - 1} M_{j,l} \cdot \frac{d^{(l)} f(z)}{dz^l}\bigg|_{z=\lambda_j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_j - 1} M_{j,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

2. Zagadnienia

2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone

Twierdzenie 2.1.1 (Peano). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup\left\{ \left\| f(y,t) \right\| : (y,t) \in H \right\}.$$

Wówczas dla $\alpha = \min(a, b/M)$ istnieje rozwiązanie $y(t)$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, spełniające warunek początkowy $y(t_0) = y_0$.

Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf). Niech $y' = f(y,t)$, $y(t_0) = y_0$, gdzie

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła oraz lipszycowska ze względu na y, to znaczy

$$\exists L\ \forall (y_1,t),(y_2,t) \in H \quad \left\| f(y_1,t) - f(y_2,t) \right\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup\Big\{ \left\| f(y,t) \right\| : (y,t) \in H \Big\}.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $(y_0, t_0) \in U$. Jeśli $y_1(t), y_2(t)$ są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na I_1, I_2, spełniającymi ten sam warunek początkowy $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, to $y_1 \equiv y_2$ na $I_1 \cap I_2$.

Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $y(t)$ – rozwiązanie, T – koniec $\operatorname{Dm} y$, granica $\lim_{t\to T} y(t) = y_T$ istnieje oraz $(y_T, T) \in U$. Wówczas y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Przypuśćmy, że rozwiązanie $y(t)$ jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest $T \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy dalej, że istnieje zbiór zwarty $K \subset U$ oraz $\varepsilon > 0$, taki, że

$$\forall t \in \operatorname{Dm} y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad \big(y(t), t\big) \in K.$$

Wtedy y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y oraz $(y_0, t_0) \in U$. Wówczas istnieje rozwiązanie $y_{\max}$ zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy $y_{\max}(t_0) = y_0$ i takie, że jeśli y jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek $y(t_0) = y_0$, to $\operatorname{Dm} y \subset \operatorname{Dm} y_{\max}$ oraz y jest obcięciem $y_{\max}$.

3. Przykłady