KJG

Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Wersja z 19 grudnia 2018

Spis treści

1. Twierdzenia 2
2. Zagadnienia 3
2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone 3
3. Przykłady 4

1. Twierdzenia

2. Zagadnienia

2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone

Twierdzenie 2.1.1 (Peano)**.** Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla $\alpha = \min(a, b/M)$ istnieje rozwiązanie $y(t)$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, spełniające warunek początkowy $y(t_0) = y_0$.

Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf)**.** Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła oraz lipszycowska ze względu na y, to znaczy

$$\exists L\ \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \big\|f(y_1,t) - f(y_2,t)\big\| \le L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Dowód. Jako ćwiczenie. ■

3. Przykłady