

# Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Kacper Grabczak

Kacper Kurowski



# Spis treści

<b>1. Twierdzenia</b>	3
1.1. Ciągła zależność od parametrów	3
1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów	4
1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego	6
1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych	9
1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\ e^{At}\ $	10
1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności	11
<b>2. Zagadnienia</b>	13
2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysyczone (otwarte)	13
2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)	14
2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)	16
2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych	17
2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi	18
2.6. Zagadnienia brzegowe	18
<b>3. Przykłady</b>	19
3.1. Rozwiązywanie równań metodą szeregów potęgowych	19
3.2. Równania na wariację	19
3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach	19
3.4. Wzory Liouville'a i Abela	19
3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne	19
3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności	19

# 1. Twierdzenia

## 1.1. Ciągła zależność od parametrów

**Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru).** Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą oraz  $c > 0$ . Niech  $y(t, \lambda_0)$  będzie rozwiązaniem równania  $y' = f(y, t, \lambda_0)$  z warunkiem początkowym  $(y_0, t_0)$  określonym na *zwartym* przedziale  $I$  zawierającym  $t_0$ . Wybierzmy  $b > 0$  i rozważmy zbiór

$$R_b = \{(y, t) : t \in I \text{ oraz } \|y - y(t, \lambda_0)\| < b\}.$$

Założmy dalej, że

- a) istnieje  $L \geq 0$ , że dla wszystkich  $(y_1, t), (y_2, t) \in R_b$  zachodzi

$$\|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

- b) dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$ , że dla  $(y, t) \in R_b$  oraz każdej  $\lambda$  jest

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \implies \|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała  $c^* > 0$  taka, że

1. jeśli  $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$ , to  $y(t, \lambda)$  jest określone na  $I$ ,
2. jeśli  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , to  $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$  na  $I$ .

**Dowód.** W dowodzie wykorzystamy lemat pomocniczy.

**LEMAT 1.1.2.** Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że na  $J \subset I$  mamy

1. dla wszystkich  $t \in J$  jest  $(y(t, \lambda), t) \in R_b$ ,
2. dla każdego  $\varepsilon > 0$  oraz  $(y, t) \in R_b$  zachodzi  $\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon$ .

Wtedy dla każdego  $t \in J$  prawdziwa jest nierówność

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t - t_0|.$$

**Dowód.**

$$\begin{aligned} \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda), u, \lambda) du - \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda), u, \lambda_0)\| du \right| + \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda_0) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \varepsilon du \right| + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \cdot |t - t_0|}_K + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right|. \end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą  $K$  wynika teza. □

Wybermy  $\varepsilon > 0$  taki, że  $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$  oraz oznaczmy  $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$ . Weźmy  $\lambda > 0$  taką, że  $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$ . Niech  $J$  będzie maksymalnym podprzedziałem  $I$ , na którym dla każdego  $t \in J$  zachodzi:

$$(y(t, \lambda), t) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2, dla wszystkich  $t \in J$  jest

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców  $J$ , nazwijmy go  $\alpha$ , należy do wnętrza  $I$ . Wówczas z twierdzenia o przedłużaniu przez koniec,  $y(t, \lambda)$  przedłuża się na przedział zawierający  $\alpha$  we wnętrzu. Co więcej, ponieważ  $\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\|$  jest funkcją ciągłą względem  $t$ , to pozostaje mniejsza od  $b$  na pewnym otoczeniu  $\alpha$ . Zatem  $J$  nie był przedziałem maksymalnym, chyba że  $J = I$ . Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Jeśli  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , to z założenia b) istnieje ciąg  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  taki, że

$$\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon_n$$

dla każdego  $n$  oraz wszystkich  $(y, t) \in R_b$ . Z lematu 1.1.2, dla  $t \in I$  jest

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

co dowodzi drugiej części tezy. ■

## 1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów

**Twierdzenie 1.2.1 (O różniczkowalnej zależności od parametru).** Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą względem  $y, t, \lambda$  oraz klasy  $C^1$  względem  $y, \lambda$ . Ustalmy warunek początkowy  $(y_0, t_0)$  i oznaczmy przez  $y(t, \lambda)$  rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial t} = f(y, t, \lambda)$$

z warunkiem początkowym  $y(t_0, \lambda) = y_0$ , określone na ustalonym i *zwartym* przedziale  $I$ . Wówczas na przedziale  $I$  istnieje ciągła funkcja

$$z(t, \lambda_0) = \left. \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t, \lambda_0)}{\partial t} = \left. \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \left. \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial \lambda \partial t} \right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

**Dowód.** Niech  $y_\lambda(t) \in R_b$ . Oznaczmy

$$w_\lambda(t) := \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0}$$

dla  $\lambda \neq \lambda_0$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \partial_t w_\lambda(t) &= \frac{\partial_t y_\lambda(t) - \partial_t y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{f_\lambda(y_\lambda(t), t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0} = \\ &= \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w_\lambda(t), t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0}. \end{aligned}$$

Rozważmy dalej funkcję

$$F_\lambda(w, t) := \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Zwróćmy uwagę, że  $w$  w definicji  $F$  jest symbolem argumentu, a nie funkcji.

Pokażemy, że istnieje taka stała  $c^* > 0$ , że o ile  $|\lambda - \lambda_0| \leq c^*$ , to dziedzina funkcji  $F$  dla każdego  $\lambda$  spełniającego ten warunek jest zbiorem zwartym, a ponadto  $w_\lambda(t)$  zawiera się w tej dziedzinie dla każdego  $t \in I$ .

LEMAT 1.2.2. Przy założeniach takich jak powyżej, istnieją stałe  $c_1, k_1 > 0$  takie, że

$$|\lambda - \lambda_0| \leq c_1 \implies \|w_\lambda(t)\| \leq k_1.$$

DOWÓD. Weźmy wprawdzie pewne  $c_1: 0 < c_1 < c$ . Możemy zawęzić dziedzinę  $f$  do  $\lambda \in [\lambda_0 - c_1, \lambda_0 + c_1]$ . Wtedy  $f$  jest funkcją klasy  $C^1$  względem  $\lambda$  zdefiniowaną na zbiorze zwartym (względem  $\lambda$ ), a więc jest ona lipszycowska względem  $\lambda$  ze stałą  $L_\lambda$ . Weźmy  $\lambda \neq \lambda_0$  z tego zbioru. Możemy zatem wziąć w 1.1.2  $\varepsilon = L_\lambda |\lambda - \lambda_0|$ . Zgodnie z tym lematem, zachodzi wtedy:

$$\|w_\lambda(t)\| = \frac{\|y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)\|}{|\lambda - \lambda_0|} \leq L_\lambda \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t - t_0| =: k_1$$

Dla tak zdefiniowanego  $k_1$  teza lematu jest spełniona. (Uwaga: dla każdego  $\lambda$  bierzemy inny  $\varepsilon$ , ale wciąż uzyskujemy to samo ograniczenie dla  $\|w_\lambda(t)\|$ ).  $\square$

Weźmy takie  $c_1$  i  $k_1$ . Z kolei jeśli  $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{b}{2k_1}$ , to dla  $w$  takich, że  $\|w\| \leq 2k_1$  zachodzi

$$\|y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w - y_{\lambda_0}(t)\| = \|(\lambda - \lambda_0)w\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|w\| \leq \frac{b}{2k_1} \cdot 2k_1 = b.$$

Oznacza to, że dla każdego  $t \in J$  (przy takich  $\lambda$ ) jest

$$(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) \in R_b.$$

Niech  $c^* = \min(c_1, \frac{b}{2K_1})$ . Wtedy  $F$  jest zdefiniowana na zbiorze

$$\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times ((\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*) \setminus \{\lambda_0\}).$$

Zdefiniujmy  $F$  dla  $\lambda = \lambda_0$  tak, by była ciągła względem  $\lambda$  w tym punkcie. Wtedy

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F_\lambda(w, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)}{w(\lambda - \lambda_0)} \cdot w + \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t))}{\lambda - \lambda_0} \\ &= D_y f_{\lambda_0}(y, t)|_{y=y_{\lambda_0}(t)} \cdot w + \partial_\lambda f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)|_{\lambda=\lambda_0}, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

przy czym powyższe pochodne istnieją, gdyż z założenia funkcja  $f$  jest klasy  $C^1$  względem zmiennych  $y$  oraz  $\lambda$ . Niech

$$F_{\lambda_0}(w, t) := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F_\lambda(w, t).$$

Wtedy  $F$  jest zdefiniowana na zbiorze

$$\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times (\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*),$$

który jest zwarty dla każdego ustalonego  $\lambda$ .

LEMAT 1.2.3. Funkcja  $F$  zdefiniowana powyżej spełnia założenia twierdzenia o ciągłej zależności od parametru przy równaniu różniczkowym  $\partial_t w = F_\lambda(w, t)$ .

DOWÓD. Nadobowiązkowy dowód Czytelnik wykona samodzielnie.  $\square$

Zauważmy, że na mocy powyższego lematu oraz poprzednich rozważań funkcja  $F_{\lambda_0}(w, t)$  jest ciągłą funkcją określoną na zbiorze zwartym, więc z Twierdzenia Peano istnieje rozwiązanie  $w_{\lambda_0}$  równania  $\partial_t w = F_{\lambda_0}(w, t)$  określone w pewnym przedziale  $J \subset I$  (dla ustalenia uwagi, niech  $J$  będzie maksymalnym możliwym).

Rozwiązanie to jest jednoznaczne, gdyż dla każdego ciągu  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  zachodzi  $w_{\lambda_n}(t) \Rightarrow w_{\lambda_0}(t)$ . Gdybyśmy mieli dwa ciągi  $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2} \rightarrow \lambda_0$ , dla których  $w_{\lambda_{n_1}}(t) \rightarrow w_{\lambda_0,1}(t)$  oraz  $w_{\lambda_{n_2}}(t) \rightarrow w_{\lambda_0,2}(t)$ , to ciąg  $\lambda_n$  z wyrazami na przemian z  $\lambda_{n_1}$  i  $\lambda_{n_2}$  również byłby zbieżny do  $\lambda_0$ , więc  $w_{\lambda_n}$  także byłby zbieżny do jakiegoś rozwiązania. To zaś z jednoznaczności granicy oznacza, że  $w_{\lambda_{n_1}}(t) = w_{\lambda_{n_2}}(t)$  dla każdego  $t$ . Stąd:

$$w_{\lambda_0}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_n}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} w_\lambda(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \partial_\lambda y_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Ponadto  $J = I$ . Przypuśćmy przeciwnie, że tak nie jest i bez straty ogólności założymy, że  $\alpha$  jest prawym krańcem  $J$ , ale nie  $I$ . Skoro  $F_{\lambda_0}$  spełnia założenia 1.1.1, to jest ciągła i lipszycowska względem  $w_{\lambda_0}$ , a więc też jest lokalnie lipszycowska. Skoro  $\|w_\lambda(t)\| \leq k_1$ , to po przejściu z nierównością do granicy także  $\|w_{\lambda_0}(t)\| \leq k_1$ . Wreszcie  $w_{\lambda_0}$  jest funkcją ciągłą, więc istnieje pewne otoczenie  $U_\alpha$  punktu  $\alpha$ , dla którego  $t \in U_\alpha \implies \|w_\lambda(t)\| \leq 2k_1$ , więc istnieje zbiór zwarty  $K$  oraz  $\delta > 0$  takie, że

$$\forall t \in Dm w_{\lambda_0} \cap [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \quad (w_{\lambda_0}(t), t) \in K.$$

Zatem z 2.1.5  $w_{\lambda_0}$  rozszerza się na przedział zawierający  $\alpha$  we wnętrzu, co przeczyłoby maksymalności  $J$ .

Na mocy powyższych rozważań  $w_{\lambda_0}$  jest szukaną funkcją  $z$  z tezy twierdzenia. Równość w twierdzeniu zachodzi, gdyż

$$F_{\lambda_0}(w, t) = \partial_t w_{\lambda_0}(t) = \partial_t \partial_\lambda y_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda_0} \stackrel{(*)}{=} \partial_\lambda \partial_t y_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda_0} = \partial_\lambda f_\lambda(y_\lambda, t)|_{\lambda=\lambda_0},$$

gdzie równość  $(*)$  zachodzi na mocy Twierdzenia Schwarz'a, gdyż  $F_{\lambda_0}(w, t)$  jest ciągła (spełnia 1.1.1) i  $f$  jest  $C^1$  względem  $y$  i  $\lambda$  z założenia. Czyli istotnie  $\partial_t w_{\lambda_0}(t) = \partial_\lambda \partial_t y_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda_0}$ .

Wreszcie, poprzez podstawienie  $w = w_{\lambda_0}(t)$  w (1.2.1) otrzymujemy tzw. równanie na wariację:

$$\partial_t w_{\lambda_0}(t) = D_y f_{\lambda_0}(y, t)|_{y=y_{\lambda_0}(t)} \cdot w_{\lambda_0}(t) + \partial_\lambda f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Czyli twierdzenie jest w pełni udowodnione.  $\blacksquare$

### 1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego

Rozważmy równanie

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad (1.3.1)$$

gdzie  $a_2, a_1, a_0$  są analityczne w pewnym punkcie  $t_0$ .

**Definicja 1.3.1.** Powiemy, że  $t_0$  jest *punktem regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_2(t_0) \neq 0$ . W przeciwnym wypadku  $t_0$  nazwiemy *punktem osobliwym*.

W przypadku regularnym równanie (1.3.1) sprowadza się do

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (1.3.2)$$

gdzie  $p$  i  $q$  są analityczne w punkcie  $t_0$ , czyli

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t-t_0)^n, \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-t_0)^n.$$

**Twierdzenie 1.3.2.** Każde rozwiązanie równania (1.3.2) jest analityczne w kole, w którym oba szeregi  $p(t)$  i  $q(t)$  zbiegają. Co więcej, analityczna funkcja

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$$

jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right). \quad (1.3.3)$$

**Dowód.** Dla ustalenia uwagi niech  $t_0 = 0$  oraz  $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ . Wtedy

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n, \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}t^n.$$

Z iloczynu Cauchy'ego<sup>1</sup> dostajemy

$$\begin{aligned} p(t)y'(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k}, \\ q(t)y(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k}. \end{aligned}$$

Rozpisując lewą stronę równania (1.3.2), otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( (n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right) = 0.$$

Z analityczności, dla każdego  $n \geq 0$  jest

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} = 0,$$

co dowodzi wzoru (1.3.3).

Wzór rekurencyjny (1.3.3) zadaje współczynniki  $c_n$  dla  $n \geq 2$ , jeśli wybrane zostały  $c_0, c_1$ . Zauważmy, że  $c_0 = y(t_0)$ ,  $c_1 = y'(t_0)$ . Zatem dobierając  $c_0$  oraz  $c_1$  możemy otrzymać dowolny warunek początkowy dla  $y$ , co pozwala uzyskać każde rozwiązanie wysyczone. Pozostaje pokazać, że przy dowolnym wyborze  $c_0, c_1$  wzór (1.3.3) prowadzi do szeregu Taylora funkcji analitycznej w kole  $D(t_0, R)$ .

Wybermy  $0 < r < R$ . Wtedy funkcje  $p, q$  są zbieżne bezwzględnie w  $\overline{D}(t_0, r)$ , więc istnieją stałe  $L_p$  oraz  $L_q$  takie, że dla dowolnego  $n \geq 0$  jest

$$|p_n|r^n \leq L_p, \quad |q_n|r^n \leq L_q.$$

<sup>1</sup>  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$



Niech  $0 < \rho < r$  oraz  $\gamma_n = |c_n|\rho^n$ ,  $\Gamma_n = \max\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$ . Wtedy

$$\begin{aligned}
|\gamma_{n+2}| &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot |c_{k+1}| \cdot |p_{n-k}| + \sum_{k=0}^n |c_k| \cdot |q_{n-k}| \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{k=0}^n (n+1) \cdot \frac{\gamma_{k+1}}{\rho^{k+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{\rho^k} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left( (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_{n+1}}{\rho^{k-n}\rho^{n+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_n}{\rho^{k-n}\rho^n} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho L_p}{n+2} \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+1)(n+2)} \Gamma_n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \left( \frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right) \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \underbrace{\left( \frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right)}_{\alpha_n} \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r}} \right) \Gamma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Wyrażenie  $\alpha_n$  zbiega do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Istnieje  $n_0$ , że  $\alpha_n < 1$  dla  $n \geq n_0$ . Zatem dla każdego  $n \geq n_0$  zachodzi  $\gamma_{n+2} \leq \Gamma_{n+1}$ , co jest równoważne temu, że  $\Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}$ , czyli ciąg  $\Gamma_n$  jest stały od pewnego miejsca i ograniczony przez pewne  $\bar{\Gamma}$ . Stąd, jeśli  $|t| < \rho$ , to z kryterium Cauchy'ego jest

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |t|^n} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot \rho^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{|t|^n}{\rho^n}} \leq \sqrt[n]{\bar{\Gamma}} \cdot \left| \frac{t}{\rho} \right| < 1,$$

o ile  $n$  jest dostatecznie duże. Wobec tego szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$  jest zbieżny w kole o promieniu  $\rho$ . Ponieważ  $\rho$  może być dowolnie bliskie  $R$ , to suma kół wypełnia koło otwarte o promieniu  $R$ , co kończy dowód. ■

### 1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

**Definicja 1.4.1.** *Widmem* macierzy  $A$  nazywamy zbiór jej wartości własnych wraz z krotnościami i oznaczamy  $\text{sp}(A)$ .

**Twierdzenie 1.4.2 (Hamilton-Cayley).** Dla każdej macierzy  $A$  zachodzi  $\chi_A(A) = 0$ , gdzie  $\chi_A$  jest wielomianem charakterystycznym macierzy  $A$ .

**Twierdzenie 1.4.3 (Spektralne dla wielomianów).** Niech  $A$  będzie macierzą o wartościach własnych  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  z krotnościami  $q_1, \dots, q_n$ . Wtedy istnieją macierze  $M_{k,l}$  dla  $1 \leq k \leq n$ ,  $0 \leq l \leq q_k - 1$ , zwane *spektralnymi* takie, że dla każdego wielomianu  $f$  stopnia  $m$  zachodzi:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k).$$

**Dowód.** W celu udowodnienia twierdzenia będzie potrzebny lemat pomocniczy.

**LEMAT 1.4.4.** Macierze  $M_{k,l}$  są jednoznacznie wyznaczone przez tęzę twierdzenia spektralnego dla wielomianów postaci  $f(z) = z^r$ , gdzie  $r = 0, \dots, m-1$ .

**DOWÓD.** Otrzymujemy układ równań z niewiadomymi  $M_{k,l}$ , czyli

$$A^r = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \cdot \lambda_k^{r-l}.$$

Teza lematu oznacza, że układ ten jest oznaczony. Pokażemy liniową niezależność wierszy. Wybierzmy współczynniki  $c_r$  dla  $r = 0, \dots, m-1$ , tak aby kombinacja liniowa wierszy z tymi współczynnikami wynosiła 0, czyli dla każdego  $k = 1, \dots, n$  oraz  $l = 0, \dots, q_k - 1$  jest

$$\sum_{r=0}^{m-1} c_r \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \lambda_k^{r-l} = 0.$$

Rozważmy teraz wielomian

$$w(z) = \sum_{r=0}^{m-1} c_r z^r.$$

Otrzymaliśmy, że  $w^{(l)}(\lambda_k) = 0$ , czyli  $\lambda_k$  jest zerem z krotnością co najmniej  $q_k$ , a zatem suma krotności zer wielomianu  $w$  jest równa co najmniej  $\sum_{k=1}^n q_k = m$ , co jest sprzecznością, bo stopień wielomianu był co najwyżej  $m-1$ .  $\square$

Twierdzenie zostanie udowodnione indukcyjnie ze względu na stopień  $f$ .

Przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla wielomianów stopnia mniejszego od  $m+r$ , gdzie  $r \geq 0$ . Z lematu 1.4.4 teza zachodzi dla  $r = 0$ . Zwróćmy uwagę, że obie strony twierdzenia są liniowe względem  $f$ . Wystarczy więc pokazać je dla układu rozpinającego przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego niż  $m+r$ . W celu pokazania, że twierdzenie zachodzi również dla wielomianów stopnia  $m+r$ , wystarczy pokazać dla  $f_r(z) = z^r \chi_A(z)$ , bo każdy wielomian

$$f(z) = a_{m+r} z^{m+r} + \dots + a_1 z + a_0$$

można zapisać jako

$$f(z) = a_{m+r} f_r(z) + P(z),$$

gdzie  $P$  jest wielomianem stopnia mniejszego niż  $m+r$ . Zauważmy, że

$$L = f_r(A) = A^r \cdot \chi_A(A) \stackrel{1.4.2}{=} 0, \quad P = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k),$$

a ponadto  $f_r(z) = (z - \lambda_k)^{q_k} \cdot Q(z)$ . Pochodne rzędu niższego od  $q_k$  składają się z sum członów, w których  $(z - \lambda_k)$  występuje w dowolnej potęgze, więc zerują się przy podstawieniu  $z = \lambda_k$ .  $\blacksquare$

**Twierdzenie 1.4.5 (Spektralne dla funkcji analitycznych).** Niech

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R.$$

Założmy, że  $\text{sp}(A) \subset D(0, R)$ . Wówczas szereg  $f(A)$  zbiega i zachodzi teza twierdzenia spektralnego dla wielomianów:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

**Dowód.** Oznaczmy

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

Korzystając z twierdzenia spektralnego dla wielomianów, dostajemy

$$\begin{aligned} f(A) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f_N^{(l)}(\lambda_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{(l)}(\lambda_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\|e^{At}\|$

**Definicja 1.5.1.** Wykładnikiem Lapunowa macierzy  $A$  nazywamy liczbę

$$\bar{\lambda} = \max\{\text{Re } \lambda_k : k = 1, \dots, n\}.$$

**Definicja 1.5.2.** Potęgą Lapunowa macierzy  $A$  nazywamy liczbę

$$\bar{l} = \max\{l \geq 0 : \exists k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{Re } \lambda_k = \bar{\lambda} \wedge M_{k,l} \neq 0\}.$$

**Lemat 1.5.3 (Wzór Leibniza).**

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f \cdot D^{n-k} g. \quad (1.5.1)$$

**Twierdzenie 1.5.4.** Dla każdej macierzy  $A$  zachodzą nierówności:

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} < \infty.$$

**Dowód.** Nierówność środkowa jest oczywista. Zaczniemy wobec tego od prawej.

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot t^l e^{\lambda_k t} \right\|}{t^{\bar{l}} \exp(\bar{\lambda}t)} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^l e^{(\text{Re } \lambda_k)t}}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{l-\bar{l}} e^{(\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda})t} \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda} \leq 0$ , a jeśli  $\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda} = 0$  oraz  $M_{k,l} \neq 0$ , to  $l \leq \bar{l}$ . Wobec tego, dla każdej kombinacji  $k$  i  $l$  jest

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{l-\bar{l}} \exp((\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda})t) \leq 1.$$

Bez utraty ogólności możemy przyjąć  $\bar{\lambda} = \lambda_1$ ,  $M_{1,\bar{l}} \neq 0$  oraz

$$w(z) = \prod_{k=2}^n (z - \lambda_k)^{q_k} = \frac{\chi_A(z)}{(z - \lambda_1)^{q_1}}.$$

Niech  $f(z) = w(z) \cdot e^{zt}$ . Wtedy dla  $k > 0$  oraz  $l < q_k$  jest  $f^{(l)}(\lambda_k) = 0$ , bo pochodna jest sumą członów ze wzoru (1.5.1), gdzie  $(z - \lambda_k)$  występuje w potęgze dodatniej. Niechaj teraz  $k = 1$  oraz  $\varphi(z) = e^{zt}$ ,  $\psi(z) = w(z)$ . Wtedy

$$(\varphi \cdot \psi)^{(l)}(\lambda_1) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} t^i e^{\lambda_1 t} w^{(l-i)}(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} \cdot p_l(t),$$

gdzie  $p_l$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $l$ . Wtedy  $p_{\bar{l}}$  ma postać

$$t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t) e^{\lambda_1 t},$$

gdzie stopień  $\tilde{p}_{\bar{l}}$  jest mniejszy od  $\bar{l}$ . Z twierdzenia spektralnego jest

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} e^{\lambda_1 t} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} e^{\lambda_1 t} (t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{\lambda_1 t}\| \cdot \left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} (t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot |t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)| - \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,l}\| \cdot \|p_l(t)\|}{t^{\bar{l}}} \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \left| w(\lambda_1) + \frac{\tilde{p}_{\bar{l}}(t)}{t^{\bar{l}}} \right| - \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,l}\| \cdot \left| \frac{p_l(t)}{t^{\bar{l}}} \right| \\ &= \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \underbrace{|w(\lambda_1)|}_{>0}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \geq \frac{1}{\|w(A)\|} \cdot \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \geq \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot |w(\lambda_1)|}{\|w(A)\|} > 0. \quad \blacksquare$$

## 1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności

**Definicja 1.6.1.** Niech  $y' = f(y)$ ,  $f \in C^1(U)$ . Funkcję  $G: U \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy *całką pierwszą*, jeśli dla każdego rozwiązania  $y(t)$ , złożenie  $G(y(t))$  jest stałe.

**Lemat 1.6.2.**  $G$  jest całką pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle \nabla G, f \rangle \equiv 0$ .

**Definicja 1.6.3.** *Funkcję Lapunowa* nazywamy funkcję  $L$  taką, że w warunku całki powyżej zastępujemy  $L(y(t)) = \text{const}$  przez  $L(y(t))$  nierosnące. W terminach potoków ten warunek wyrażony jest przez  $t_1 > t_2 \implies L(\varphi^{t_1}(y_0)) \leq L(\varphi^{t_2}(y_0))$ .

**Twierdzenie 1.6.4.** Niech  $y' = f(y)$ , gdzie  $f \in C^1(U)$ , zaś  $L$  jest funkcją Lapunowa na  $U$ , przy czym  $L$  ma ściśle minimum globalne w  $y_0 \in U$ . Wtedy  $y_0$  jest stabilnym (w sensie Lapunowa) położeniem równowagi.

**Dowód.** Pokażemy, że dla każdego  $t \geq 0$  zachodzi  $\varphi^t(y_0) = y_0$ . Jeśliby tak nie było, to dla pewnego  $t > 0$  mielibyśmy  $\varphi(t)(y_0) \neq y_0$ . Wtedy jednak  $L(\varphi^t(y_0)) > L(y_0) = \varphi^{t_0}(y_0)$ , co przeczyłoby, że  $L$  jest funkcją Lapunowa. Zatem  $y_0$  jest położeniem równowagi.

Pokażemy, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 \|y - y_0\| \leq \delta \wedge \varphi^t(y_0) \text{ istnieje} \implies \|\varphi^t(y_0) - y_0\| \leq \varepsilon.$$

Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Bez straty ogólności założmy, że  $\overline{B}(y_0, \varepsilon) \subset U$  (jeśliby tak nie było, wystarczy wziąć mniejszy  $\varepsilon$ ) oraz  $L(y_0) = 0$ . Wtedy zbiór  $\{y \in U : \|y - y_0\| = \varepsilon\}$  jest zbiorem zwartym. Wobec tego  $\mu := \inf\{L(y) : \|y - y_0\| = \varepsilon\}$  jest przyjmowane w pewnym punkcie  $y_{\min}$  oraz  $\mu = L(y_{\min}) > L(y_0) = 0$ .

Z ciągłości  $L$  w 0 istnieje  $\delta > 0$  taka, że jeśli  $\|y - y_0\| \leq \delta$ , to  $L(y) > \mu$ . Gdyby dla pewnego  $t > 0$  zachodziło  $\|y - y_0\| \geq \varepsilon$ , to z własności Darboux istnieje  $\tau : 0 \leq \tau \leq t$  takie, że  $\|\varphi^\tau(y) - y_0\| = \varepsilon$ . Wtedy jednak  $L(\varphi^\tau(y)) \leq \mu > L(y) = L(\varphi^0(y))$ , co jest sprzecznością z założeniem, że  $L$  to funkcja Lapunowa. Otrzymujemy zatem, że dla każdego  $t > 0$  zachodzi  $\|y - y_0\| < \varepsilon$ .

Pozostaje pokazać, że  $\varphi^t(y) = y(t)$  jest określone dla każdego  $t \geq 0$ . Jeśli  $\alpha \geq 0$ , to  $y([0, \alpha]) \subset \overline{B}(y_0, \varepsilon)$ . Skoro  $\overline{B}(y_0, \varepsilon)$  jest zbiorem zwartym, to  $y(t)$  przedłuża się na pewne prawostronne otoczenie  $\alpha$  z lematu o przedłużaniu prze koniec. Tym samym prawym końcem dziedziny rozwiązania wysoconego  $y(t)$  jest  $+\infty$ . ■

## 2. Zagadnienia

### 2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone (otwarte)

**Twierdzenie 2.1.1 (Peano).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie  $y(t_0) = y_0$  oraz

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja  $f$  jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla  $\alpha = \min(a, b/M)$  istnieje rozwiązanie  $y(t)$  określone na przedziale  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , spełniające warunek początkowy  $y(t_0) = y_0$ .

**Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf).** Niech  $y' = f(y, t)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , gdzie

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja  $f$  jest ciągła oraz Lipszycowska ze względu na  $y$ , to znaczy

$$\exists L \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \|f(y_1, t) - f(y_2, t)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla dowolnego  $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$  istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym  $y(t_0) = y_0$  określone na przedziale  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

**Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Niech  $(y_0, t_0) \in U$ . Jeśli  $y_1(t), y_2(t)$  są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na  $I_1, I_2$ , spełniającymi ten sam warunek początkowy  $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$ , to  $y_1 \equiv y_2$  na  $I_1 \cap I_2$ .

**Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Niech  $y(t)$  – rozwiązanie,  $T$  – koniec Dm  $y$ , granica  $\lim_{t \rightarrow T} y(t) = y_T$  istnieje oraz  $(y_T, T) \in U$ . Wówczas  $y$  rozszerza się na przedział zawierający  $T$  we wnętrzu.

**Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Założmy, że rozwiązanie  $y(t)$  jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest  $T \in \mathbb{R}$ . Założmy dalej, że istnieje zbiór zwarty  $K \subset U$  oraz  $\varepsilon > 0$ , taki, że

$$\forall t \in \text{Dm } y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad (y(t), t) \in K.$$

Wtedy  $y$  rozszerza się na przedział zawierający  $T$  we wnętrzu.

**Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$  oraz  $(y_0, t_0) \in U$ . Wówczas istnieje rozwiązanie  $y_{\max}$  zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy  $y_{\max}(t_0) = y_0$  i takie, że jeśli  $y$  jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek  $y(t_0) = y_0$ , to  $\text{Dm } y \subset \text{Dm } y_{\max}$  oraz  $y$  jest obcięciem  $y_{\max}$ .

## 2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)

Rozważmy regularne<sup>1</sup> równanie różniczkowe postaci

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (2.2.1)$$

**Definicja 2.2.1.** Punkt  $t_0$  nazwiemy regularnie osobliwym, jeśli funkcja  $\frac{a_2(t)}{(t-t_0)^2}$  jest analityczna w  $t_0$  i nie znika w  $t_0$ , a funkcja  $\frac{a_1(t)}{t-t_0}$  jest analityczna w  $t_0$ .

W przypadku punktu regularnie osobliwego równanie (2.2.1) sprowadza się do

$$(t-t_0)^2 y'' + (t-t_0)p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.2.2)$$

Rozwiązań będziemy szukali jedynie poza  $t_0$ ,  $t > t_0$ .

**Metoda Frobeniusa.** Niech  $t_0 = 0$ . Szukamy rozwiązań w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

gdzie  $c_0 \neq 0$ . Różniczkując stronami, dostajemy

$$ty'(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)t^n, \quad t^2 y''(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)t^n.$$

Niech  $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$  oraz  $q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$ . Wtedy

$$\begin{aligned} tp(t)y'(t) &= t^\lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)t^n \right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k(k+\lambda)p_{n-k} = \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( c_n(n+\lambda)p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(k+\lambda)p_{n-k} \right), \\ q(t)y(t) &= t^\lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} = \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( c_n q_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k} \right). \end{aligned}$$

Wstawiamy wynik do równania (2.2.2), otrzymując

$$\begin{aligned} t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n ((n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n + (n+\lambda)p_0 c_n + q_0 c_n) + \\ + t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n-1} (k+\lambda)c_k p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k} \right)}_{-X_n(c_0, \dots, c_{n-1})} = 0. \end{aligned}$$

Dla każdej naturalnej liczby  $n > 0$  zachodzi:

$$c_n((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)p_0 + q_0) = X_n(c_0, \dots, c_{n-1})$$

oraz  $X_0 = 0$  dla  $n = 0$ . Zdefiniujmy wielomian indeksowy  $P$  wzorem

$$P(s) = s(s-1) + p_0 s + q_0.$$

Wtedy otrzymujemy

$$c_n P(n+\lambda) = X_n(c_0, \dots, c_{n-1}).$$

<sup>1</sup>  $a_2(t) \neq 0$

Stąd wynika, że  $c_0 P(\lambda) = 0$ . Założyliśmy, że  $c_0 \neq 0$ , więc  $\lambda$  musi być pierwiastkiem wielomianu indeksowego. Dla  $n = 0$  mamy  $X_0 = 0$ , więc dla  $n > 0$  rekurencja przyjmuje postać

$$c_n = \frac{X_n(c_0, \dots, c_{n-1})}{P(n + \lambda)}.$$

To pozwala wyliczyć współczynniki  $c_n$  dla  $n > 0$ , chyba że  $P(n + \lambda) = 0$  dla pewnego  $n$ , czyli  $n + \lambda$  jest pierwiastkiem wielomianu indeksowego.

**Przypadek podstawowy.** Wielomian indeksowy ma dwa pierwiastki rzeczywiste  $\lambda_1, \lambda_2$  nieróżniące się o liczbę całkowitą. Wówczas otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązania przyjmując  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ .

**Przypadek zespolony.** Bierzemy jeden z nich, dostając rozwiązanie zespolone

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = e^{t \operatorname{Re} \lambda} (\cos(t \operatorname{Im} \lambda) + i \sin(t \operatorname{Im} \lambda)) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Rozwiązaniami są  $\operatorname{Re} y(t)$  oraz  $\operatorname{Im} y(t)$ , i są liniowo niezależne.

**Przypadek pierwiastków różniących się o liczbę całkowitą.** Niech  $\lambda$  oraz  $\lambda + r$  będą pierwiastkami, gdzie  $r \in \mathbb{Z}$ . Jeśli  $r = 0$ , to mamy pierwiastek podwójny. W przeciwnym przypadku otrzymujemy jedno rozwiązanie postaci

$$y_0(t) = t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \quad (2.2.3)$$

Drugiego rozwiązania szukamy w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + \gamma y_0(t) \ln t,$$

gdzie  $\gamma$  to stała, którą wyznaczymy. Wstawiając do równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n (P(n + \lambda) \cdot d_n - X_n(d_0, \dots, d_{n-1})) + \\ + \gamma t^2 (y_0(t) \ln t)'' + \gamma t p(t) (y_0(t) \ln t)' + \gamma q(t) y_0(t) \ln t = 0. \end{aligned}$$

Zajmijmy się składnikami zawierającymi  $\gamma$ . Po zróżniczkowaniu, dostajemy

$$\gamma \ln t (t^2 y_0''(t) + t p(t) y_0'(t) + q(t) y_0(t)) + \gamma (2t y_0'(t) + (p(t) - 1) y_0(t)) = \dots$$

Pierwszy człon się zeruje, bo  $y_0$  jest rozwiązaniem. Wstawiając (2.2.3), mamy

$$\begin{aligned} \dots &= \gamma \left( 2t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda + r) c_n t^{n+\lambda+r-1} + (p(t) - 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\lambda+r} \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} 2(n + \lambda + r) c_n t^n + p(t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} 2(n + \lambda + r) c_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k p_{n-k} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( 2(n + \lambda + r) c_n + \sum_{k=0}^n c_k p_{n-k} - c_n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( 2(n + \lambda + r) c_n + (p_0 - 1) c_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k} \right) = \dots \end{aligned}$$



Zauważmy, że  $P'(n + \lambda + r) = 2(n + \lambda + r) + p_0 - 1$ . Stąd

$$\dots = \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n (P'(n + \lambda + r)c_n - Y_n(c_0, \dots, c_{n-1})) = \dots$$

gdzie  $-Y_n(c_0, \dots, c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k}$ . Przesuwając indeksy, dostajemy

$$\dots = \gamma t^{\lambda} \sum_{n=r}^{\infty} t^n (c_{n-r} P'(n + \lambda) - Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1})).$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+\lambda} (P(n + \lambda)d_n - X_n(d_0, \dots, d_{n-1})) + \\ + \gamma \sum_{n=r}^{\infty} t^{n+\lambda} (P'(n + \lambda)c_{n-r} - Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1})) = 0. \end{aligned}$$

Przyrównujemy do zera współczynniki przy  $t^{n+\lambda}$ . Jeśli  $0 \leq n < r$ , to

$$P(n + \lambda)d_n = X_n(d_0, \dots, d_{n-1}).$$

Z kolei jeśli  $n \geq r$ , to mamy

$$P(n + \lambda)d_n + \gamma P'(n + \lambda)c_{n-r} = X_n(d_0, \dots, d_{n-1}) + \gamma Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1}).$$

**PRZYPADEK 1.** Niech  $r > 0$ . Wybieramy dowolne  $d_0$ , byle tylko różne od zera. Dla  $n = 1, \dots, r-1$  otrzymujemy  $d_n$  z rekurencji. Jeśli  $n = r$ , to

$$\gamma P'(\lambda + r)c_0 = X_r(d_0, \dots, d_{r-1}).$$

Kładziemy

$$\gamma = \frac{X_r(d_0, \dots, d_{r-1})}{c_0 P'(\lambda + r)}.$$

Powyższe wyrażenie ma sens, bo  $\lambda + r$  nie jest pierwiastkiem podwójnym, więc  $P'(\lambda + r) \neq 0$ . Ponadto nie otrzymaliśmy warunku na  $d_r$ , więc  $d_r$  może być dowolne (nawet 0). W końcu, jeśli  $n > r$ , to

$$d_n = \frac{X_n(d_0, \dots, d_{n-1}) + Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1}) - \gamma P'(n + \lambda)c_{n-r}}{P(\lambda + r)}.$$

**PRZYPADEK 2.** Niech  $r = 0$ . Wtedy  $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$ . Kładziemy dowolne  $d_0 \neq 0$  oraz  $\gamma \neq 0$ . Dla  $n > 0$  kolejne współczynniki wyznaczamy tak samo, jak w przypadku poprzednim ( $n > r$ ).

### 2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)

**Definicja 2.3.1.** *Równaniem liniowym* nazywamy równanie postaci

$$y' = A(t)y + B(t),$$

gdzie  $A(t)$  jest macierzą  $m \times m$ ,  $B(t)$  wektorem z  $\mathbb{R}^m$ , a ich współczynniki są funkcjami ciągłymi określonymi na przedziale otwartym  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Lemat 2.3.2.** Dla dowolnego warunku początkowego  $(y_0, t_0)$ , gdzie  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  oraz  $t_0 \in I$ , dziedziną rozwiązania wysyconego jest  $I$ .

**Definicja 2.3.3.** Równanie  $y' = A(t)y$  nazywamy *jednorodnym*, a równanie  $y' = A(t)y + B(t)$  (odpowiadającym) *niejednorodnym*.

**Twierdzenie 2.3.4.** Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową  $C^0(I, \mathbb{R}^m)$ , a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej warstwą.

Niech  $V$  oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania  $y' = A(t)y$ .

**Stwierdzenie 2.3.5.** Niech  $\{y_1, \dots, y_n\} \subset V$ . Poniższe warunki są równoważne:

1. Zbiór  $\{y_1, \dots, y_n\}$  jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego  $t \in I$  zbiór  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  jest liniowo niezależny w  $\mathbb{R}^m$ .
3. Istnieje  $t \in I$ , że zbiór  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  jest liniowo niezależny w  $\mathbb{R}^m$ .

**Stwierdzenie 2.3.6.** Niech  $\{y_1, \dots, y_k\} \subset V$ . Wtedy

1. Jeśli  $\{y_1, \dots, y_k\}$  jest liniowo niezależny, to  $k \leq m$ .
2. Jeśli  $\{y_1, \dots, y_k\}$  rozpiną  $V$ , to  $k \geq m$ .

**Wniosek 2.3.7.**  $\dim V = m$ .

**Definicja 2.3.8.** *Układem fundamentalnym* nazwiemy dowolną bazę  $V$ .

**Definicja 2.3.9.** *Macierzą rozwiązującą* będziemy nazywali macierz, której kolumny tworzą układ fundamentalny.

**Stwierdzenie 2.3.10.**  $M(t)$  jest macierzą rozwiązującą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa dla każdego (równoważnie pewnego)  $t \in I$  oraz spełnia

$$\frac{d}{dt}M(t) = A(t) \cdot M(t).$$

**Uwaga 2.3.11.** Jeśli  $M(t)$  jest macierzą rozwiązującą, a  $P$  macierzą o  $m$  wierszach i stałych współczynnikach, to

$$\frac{d}{dt}M(t)P = A(t)M(t)P.$$

Jeśli  $P$  jest nieosobliwa, to  $M(t)P$  jest macierzą rozwiązującą.

$$\frac{d}{dt}M(t)P = \frac{dM(t)}{dt}P = A(t)M(t)P = A(t)(M(t)P).$$

Jeśli  $C \in \mathbb{R}^m$ , to  $C \cdot M(t)$  jest rozwiązaniem ogólnym.

Jeśli  $M(t)$  jest macierzą rozwiązującą, zaś  $t_0 \in I$ , to

$$M(t, t_0) = M(t) \cdot [M(t_0)]^{-1}$$

jest macierzą rozwiązującą oraz  $M(t_0, t_0) = E$ . Ponadto  $M(t_0, t_0)y_0$  jest rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym  $y(t_0) = y_0$ .

## 2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych

Rozpatrzmy równanie

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Możemy je zapisać jako

$$\begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Wielomian odpowiadający temu równaniu ma postać

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Rozwiązań równania różniczkowego będziemy szukali w zależności od pierwiastków wielomianu. Niech  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  będą owymi pierwiastkami.

1. Jeśli  $\lambda_i$  jest rzeczywistym pierwiastkiem jednokrotnym, to  $e^{\lambda_i x}$  jest rozwiązaniem,
2. Jeśli  $\lambda_i$  jest rzeczywistym pierwiastkiem  $p$ -krotnym, to  $x^i e^{\lambda_i x}$ , są rozwiązaniami dla  $i = 0, \dots, p-1$ ,
3. Jeśli  $\lambda_i$  jest zespolonym pierwiastkiem jednokrotnym, to rozwiązaniami są  $e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$  oraz  $e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$ ,
4. Jeśli  $\lambda_i$  jest zespolonym pierwiastkiem  $p$ -krotnym, to rozwiązaniami są  $x^i e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$  oraz  $x^i e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$  dla  $i = 0, \dots, p-1$ .

Rozwiązaniami ogólnymi będą kombinacje liniowe powyższych.

Rozważmy teraz odpowiadające równanie niejednorodne

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x).$$

Rozwiązanie będzie zależało od postaci części niejednorodnej.

1. Jeśli niejednorodność jest postaci  $f(x) = Q_n(x)e^{\lambda x}$ , gdzie  $Q_n$  jest wielomianem stopnia  $n$ , to rozwiązanie szczególne ma postać

$$y_s(x) = x^p P_n e^{\lambda x},$$

przy czym  $P_n$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n$ , a  $p$  jest krotnością  $\lambda$  jako pierwiastka wielomianu.

2. Jeśli niejednorodność ma postać

$$f(x) = e^{\alpha x} (Q_n(x) \cos(\beta x) + P_m(x) \sin(\beta x)),$$

to rozwiązanie szczególne jest postaci

$$y_s(x) = x^p e^{\alpha x} (P_N \cos(\beta x) + Q_N \sin(\beta x)),$$

gdzie  $N = \max(\deg Q_n, \deg P_m)$ , a  $p$  jest krotnością  $\lambda = \alpha + \beta i$  jako pierwiastka wielomianu.

3. W przeciwnym przypadku stosujemy metodę uzmienniania stałej. Wtedy

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$y_s = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

**Twierdzenie 2.4.1 (Zasada Duhamela).** Jeśli  $y' = A(t)y + B(t)$ , to rozwiązania są dane wzorem

$$y_0(t) = \int_{t_0}^t M(t, u) B(u) du,$$

gdzie  $M(t, u)$  jest macierzą rozwiązującą równania  $y' = A(t)y$  taką, że  $M(t, t) = E$ .

## 2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi

## 2.6. Zagadnienia brzegowe

### 3. Przykłady

3.1. Rozwiązanie równań metodą szeregów potęgowych

3.2. Równania na wariację

3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach

3.4. Wzory Liouville'a i Abela

3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne

3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności