KJG

Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Wersja z 5 stycznia 2019

Spis treści

1. Twierdzenia

1.1. Ciągła zależność od parametrów

Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą oraz $c > 0$. Niech $y(t, \lambda_0)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = f(y, t, \lambda_0)$ z warunkiem początkowym (y_0, t_0) określonym na *zwartym* przedziale I zawierającym t_0. Wybierzmy $b > 0$ i rozważmy zbiór

$$R_b = \big\{(y, t) : t \in I \text{ oraz } \big\|y - y(t, \lambda_0)\big\| < b\big\}.$$

Załóżmy dalej, że

a) istnieje $L \geq 0$, że dla wszystkich $(y_1, t), (y_2, t) \in R_b$ zachodzi:

$$\big\|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\big\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

b) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla $(y, t) \in R_b$ oraz każdej λ jest:

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \implies \big\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\big\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała $c^* > 0$ taka, że

1. jeśli $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$, to $y(t, \lambda)$ jest określone na I,
2. jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$ na I.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy lemat pomocniczy.

Lemat 1.1.2. Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że na $J \subset I$ mamy

1. dla wszystkich $t \in J$ jest $\big(y(t, \lambda), t\big) \in R_b$,
2. dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $(y, t) \in R_b$ zachodzi $\big\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\big\| \leq \varepsilon$.

Wtedy dla każdego $t \in J$ prawdziwa jest nierówność:

$$\big\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\big\| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t - t_0|} \cdot |t - t_0|.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\big\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\big\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\big(y(u, \lambda), u, \lambda\big) du - \int_{t_0}^{t} f\big(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0\big) du\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \Big\|f\big(y(u, \lambda), u, \lambda\big) - f\big(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0\big)\Big\| du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \Big\|f\big(y(u, \lambda), u, \lambda\big) - f\big(y(u, \lambda), u, \lambda_0\big)\Big\| du\right| \\
&\quad + \left|\int_{t_0}^{t} \Big\|f\big(y(u, \lambda), u, \lambda_0\big) - f\big(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0\big)\Big\| du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \varepsilon\, du\right| + \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot \big\|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\big\| du\right| \\
&\leq \underbrace{\varepsilon \cdot |t - t_0|}_{K} + \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot \big\|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\big\| du\right|.
\end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą K wynika teza. ◻

Wybierzmy $\varepsilon > 0$ taki, że $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$ oraz oznaczmy $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$. Weźmy $\lambda > 0$ taką, że $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_\varepsilon$. Niech J będzie maksymalnym podprzedziałem I, na którym zachodzi:

$$\forall t \in J \quad \big(y(t,\lambda), t\big) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2 dostajemy:

$$\forall t \in J \quad \big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców J, nazwijmy go α, należy do wnętrza I. Wówczas z twierdzenia 2.1.5, $y(t,\lambda)$ przedłuża się na przedział $\widetilde{J}$ zawierający α we wnętrzu. Co więcej, ponieważ $\big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\|$ jest funkcją ciągłą względem t, to pozostaje mniejsza od b na pewnym otoczeniu α. Zatem J nie był przedziałem maksymalnym, chyba że $J = I$. Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to z założenia b) istnieje ciąg $\varepsilon_n \to 0$ taki, że

$$\forall (y,t) \in R_b \ \forall n \quad \big\|f(y,t,\lambda) - f(y,t,\lambda_0)\big\| < \varepsilon_n.$$

Z lematu 1.1.2 dostajemy:

$$\forall t \in I \quad \big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

co dowodzi drugiej części tezy. ∎

1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów

Twierdzenie 1.2.1 (O różniczkowalnej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y,t,\lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą względem y, t, λ oraz klasy C^1 względem y, λ. Ustalmy warunek początkowy (y_0, t_0) i oznaczmy przez $y(t,\lambda)$ rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial t} = f(y,t,\lambda)$$

z warunkiem początkowym $y(t_0,\lambda) = y_0$, określone na ustalonym i *zwartym* przedziale I. Wówczas na przedziale I istnieje ciągła funkcja

$$z(t,\lambda_0) = \frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t,\lambda_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial t \partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial \lambda \partial t}\Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Dowód. Łatwy dowód czytelnik sporządzi samodzielnie jako ćwiczenie. ∎

1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego

Rozważmy równanie

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \tag{1.3.1}$$

gdzie a_2, a_1, a_0 są analityczne w pewnym punkcie t_0.

Definicja 1.3.1. Powiemy, że t_0 jest *punktem regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2(t_0) \neq 0$. W przeciwnym wypadku t_0 nazwiemy *punktem osobliwym.*

W przypadku regularnym równanie (1.3.1) sprowadza się do

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{1.3.2}$$

gdzie p i q są analityczne w punkcie t_0, czyli

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t - t_0)^n, \qquad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t - t_0)^n.$$

Twierdzenie 1.3.2. Każde rozwiązanie równania (1.3.2) jest analityczne w kole, w którym oba szeregi $p(t)$ i $q(t)$ zbiegają. Co więcej, analityczna funkcja

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$$

jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} c_{k+1}(k+1)p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} \right). \tag{1.3.3}$$

Dowód. Dla ustalenia uwagi niech $t_0 = 0$ oraz $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Wtedy

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n, \qquad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} t^n.$$

Z iloczynu Cauchy'ego[1] dostajemy

$$p(t)y'(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1}p_{n-k},$$

$$q(t)y(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k}.$$

Rozpisując lewą stronę równania (1.3.2), otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left((n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} \right) = 0.$$

Z analityczności, dla każdego $n \geq 0$ jest

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} = 0,$$

co dowodzi wzoru (1.3.3).

Wzór rekurencyjny (1.3.3) zadaje współczynniki c_n dla $n \geq 2$, jeśli wybrane zostały c_0, c_1. Zauważmy, że $c_0 = y(t_0)$, $c_1 = y'(t_0)$. Zatem dobierając c_0 oraz c_1 możemy otrzymać dowolny warunek początkowy dla y, co pozwala uzyskać każde rozwiązanie wysycone. Pozostaje pokazać, że przy dowolnym wyborze c_0, c_1 wzór (1.3.3) prowadzi do szeregu Taylora funkcji analitycznej w kole $D(t_0, R)$.

Wybierzmy $0 < r < R$. Wtedy funkcje p, q są zbieżne w $\overline{D}(t_0, r)$ oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| r^n < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |q_n| r^n < \infty.$$

[1] $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Wobec tego istnieją stałe L_p, L_q takie, że dla dowolnego $n \geq 0$ jest

$$|p_n|r^n \leq L_p, \qquad |q_n|r^n \leq L_q.$$

Niech $0 < \rho < r$ oraz $\gamma_n = |c_n|\rho^n$, $\Gamma_n = \max\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
|\gamma_{n+2}| &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot|c_{k+1}|\cdot|p_{n-k}| + \sum_{k=0}^{n}|c_k|\cdot|q_{n-k}|\right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n}(n+1)\cdot\frac{\gamma_{k+1}}{\rho^{k+1}}\cdot\frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k}{\rho^k}\cdot\frac{L_q}{r^{n-k}}\right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma_{n+1}}{\rho^{k-n}\rho^{n+1}}\cdot\frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma_n}{\rho^{k-n}\rho^n}\cdot\frac{L_q}{r^{n-k}}\right) \\
&\leq \frac{\rho L_p}{n+2}\Gamma_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+1)(n+2)}\Gamma_n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)}\right)\Gamma_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \underbrace{\left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{r}}\right)}_{\alpha_n}\Gamma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Wyrażenie α_n zbiega do zera, gdy $n \to \infty$. Istnieje n_0, że $\alpha_n < 1$ dla $n \geq n_0$. Zatem dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi $\gamma_{n+2} \leq \Gamma_{n+1}$, co jest równoważne temu, że $\Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}$, czyli ciąg Γ_n jest stały od pewnego miejsca i ograniczony przez pewne $\overline{\Gamma}$. Stąd, jeśli $|t| < \rho$, to z kryterium Cauchy'ego jest

$$\sqrt[n]{|c_n|\cdot|t|^n} = \sqrt[n]{|c_n|\cdot\rho^n}\cdot\sqrt[n]{\frac{|t|^n}{\rho^n}} \leq \sqrt[n]{\overline{\Gamma}}\cdot\left|\frac{t}{\rho}\right| < 1,$$

o ile n jest dostatecznie duże. Wobec tego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ jest zbieżny w kole o promieniu ρ. Ponieważ ρ może być dowolnie bliskie R, to suma kół wypełnia koło otwarte o promieniu R, co kończy dowód. ■

1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

Definicja 1.4.1. *Widmem* macierzy A nazywamy zbiór jej wartości własnych wraz z krotnościami i oznaczamy $\mathrm{sp}(A)$.

Twierdzenie 1.4.2 (Hamilton-Cayley). Dla każdej macierzy A zachodzi $\chi_A(A) = 0$, gdzie χ_A jest wielomianem charakterystycznym macierzy A.

Twierdzenie 1.4.3 (Spektralne dla wielomianów). Niech A będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ z krotnościami $q_1, \dots, q_n$. Wtedy istnieją macierze $M_{k,l}$ dla $1 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq q_k - 1$, zwane *spektralnymi* takie, że dla każdego wielomianu f zachodzi:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l}\cdot f^{(l)}(\lambda_k).$$

Dowód. W celu udowodnienia twierdzenia będzie potrzebny lemat pomocniczy.

LEMAT 1.4.4. Macierze $M_{k,l}$ są jednoznacznie wyznaczone przez tezę twierdzenia spektralnego dla $f(z) = z^r$, $r = 0, \dots, n-1$.

Dowód. Otrzymujemy układ równań z niewiadomymi $M_{k,l}$, czyli

$$A^r = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \cdot \lambda_k^{r-l} c_r = 0.$$

Teza lematu oznacza, że układ ten jest oznaczony. Pokażemy liniową niezależność wierszy. Wybierzmy współczynniki c_r dla $r = 1, \dots, n-1$, tak aby kombinacja liniowa wierszy z tymi współczynnikami wynosiła 0, czyli dla każdych $k = 1, \dots, n$ oraz $l = 0, \dots, q_k - 1$ jest

$$\sum_{r=0}^{n-1} c_r \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \lambda_k^{r-l} = 0.$$

Rozważmy wielomian $w(z) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r z^r$. Otrzymaliśmy, że $w^{(l)}(\lambda_k) = 0$, czyli λ_k jest zerem z krotnością co najmniej q_k, a zatem suma krotności zer wielomianu w jest równa co najmniej $\sum_{k=1}^{n} q_k = n$, co jest sprzecznością, bo stopień wielomianu był co najwyżej $n-1$. □

Twierdzenie zostanie udowodnione indukcyjnie ze względu na stopień f.

Przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla wielomianów stopnia mniejszego od $n + r$, gdzie $r \geq 0$. Z lematu 1.4.4 teza zachodzi dla $r = 0$. Zwróćmy uwagę, że obie strony twierdzenia są liniowe względem f. Wystarczy więc pokazać je dla układu rozpinającego przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego niż $n+r$. W celu pokazania, że twierdzenia zachodzi również dla wielomianów stopnia $n+r$, wystarczy pokazać dla $f_r(z) = z^r \chi_A(z)$, bo każdy wielomian

$$f(z) = a_{n+r} z^{n+r} + \ldots + a_1 z + a_0$$

można zapisać jako

$$f(z) = f_r(z) + P(z),$$

gdzie P jest wielomianem stopnia mniejszego niż $n+r$. Zauważmy, że

$$L = f_r(A) = A^r \cdot \chi_A(A) \overset{1.4.2}{=} 0, \qquad P = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k),$$

a ponadto $f_r(z) = (z - \lambda_k)^{q_k} \cdot Q(z)$. Pochodne rzędu niższego od q_k składają się z sum członów, w których $(z - \lambda_k)$ występuje w dowolnej potędze, więc zerują się przy podstawieniu $z = \lambda_k$. ■

Twierdzenie 1.4.5 (Spektralne dla funkcji analitycznych). Niech

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R.$$

Załóżmy, że $\mathrm{sp}(A) \subset D(0, R)$. Wówczas szereg $f(A)$ zbiega i zachodzi teza twierdzenia spektralnego dla wielomianów:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

Dowód. Oznaczmy

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

Korzystając z twierdzenia spektralnego dla wielomianów, dostajemy

$$f(A) = \lim_{N\to\infty} f_N(A) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f_N^{(l)}(\lambda_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot \lim_{N\to\infty} f_N^{(l)}(\lambda_j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j). \quad ■$$

1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\|e^{At}\|$

Definicja 1.5.1. *Wykładnikiem Lapunowa* macierzy A nazywamy liczbę

$$\overline{\lambda} = \max\{\operatorname{Re}\lambda_k : k = 1, \ldots, n\}.$$

Definicja 1.5.2. *Potęgą Lapunowa* macierzy A nazywamy liczbę

$$\bar{l} = \max\big\{l \geq 0 : \exists k \in \{1, \ldots, n\} \quad \operatorname{Re}\lambda_k = \overline{\lambda} \ \wedge \ M_{k,l} \neq 0\big\}.$$

Twierdzenie 1.5.3. Dla każdej macierzy A zachodzą nierówności:

$$0 < \liminf_{t\to\infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\overline{\lambda} t}} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\overline{\lambda} t}} < \infty.$$

Dowód. Łatwe. ■

1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności

2. Zagadnienia

2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone (otwarte)

Twierdzenie 2.1.1 (Peano). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla $\alpha = \min(a, b/M)$ istnieje rozwiązanie $y(t)$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, spełniające warunek początkowy $y(t_0) = y_0$.

Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf). Niech $y' = f(y,t)$, $y(t_0) = y_0$, gdzie

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła oraz lipszycowska ze względu na y, to znaczy

$$\exists L\ \forall (y_1,t), (y_2,t) \in H \quad \big\|f(y_1,t) - f(y_2,t)\big\| \le L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $(y_0, t_0) \in U$. Jeśli $y_1(t), y_2(t)$ są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na I_1, I_2, spełniającymi ten sam warunek początkowy $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, to $y_1 \equiv y_2$ na $I_1 \cap I_2$.

Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $y(t)$ – rozwiązanie, T – koniec $\operatorname{Dm} y$, granica $\lim_{t\to T} y(t) = y_T$ istnieje oraz $(y_T, T) \in U$. Wówczas y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Załóżmy, że rozwiązanie $y(t)$ jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest $T \in \mathbb{R}$. Załóżmy dalej, że istnieje zbiór zwarty $K \subset U$ oraz $\varepsilon > 0$, taki, że

$$\forall t \in \operatorname{Dm} y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad \big(y(t), t\big) \in K.$$

Wtedy y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y oraz $(y_0, t_0) \in U$. Wówczas istnieje rozwiązanie $y_{\max}$ zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy $y_{\max}(t_0) = y_0$ i takie, że jeśli y jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek $y(t_0) = y_0$, to $\operatorname{Dm} y \subset \operatorname{Dm} y_{\max}$ oraz y jest obcięciem $y_{\max}$.

2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)

Rozważmy regularne[1] równanie różniczkowe postaci

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{2.2.1}$$

Definicja 2.2.1. Punkt t_0 nazwiemy regularnie osobliwym, jeśli funkcja $\frac{a_2(t)}{(t-t_0)^2}$ jest analityczna w t_0 i nie znika w t_0, a funkcja $\frac{a_1(t)}{t-t_0}$ jest analityczna w t_0.

W przypadku punktu regularnie osobliwego równanie (2.2.1) sprowadza się do

$$(t-t_0)^2 y'' + (t-t_0)p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2.2.2}$$

Rozwiązań będziemy szukali jedynie poza t_0, $t > t_0$.

Metoda Frobeniusa. Niech $t_0 = 0$. Szukamy rozwiązań w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad c_0 \neq 0.$$

Różniczkując stronami, dostajemy

$$\begin{aligned} ty'(t) &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda) t^n, \\ t^2 y''(t) &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) t^n. \end{aligned}$$

Niech $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ oraz $q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$. Wtedy

$$\begin{aligned} tp(t)y'(t) &= t^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda) t^n\right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k (k+\lambda) p_{n-k} \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(c_n (n+\lambda) p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (k+\lambda) p_{n-k}\right), \\ q(t)y(t) &= t^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(c_n q_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k}\right). \end{aligned}$$

Wstawiamy wynik do równania (2.2.2), otrzymując

$$\begin{aligned} & t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \big((n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n + (n+\lambda)p_0 c_n + q_0 c_n\big) + \\ & \qquad + t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+\lambda) c_k p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k}\right)}_{-X_n(c_0,\ldots,c_{n-1},\lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Dla każdej naturalnej liczby $n > 0$ zachodzi:

$$c_n\big((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)p_0 + q_0\big) = X_n(c_0, \ldots, c_{n-1}, \lambda)$$

oraz $X_0 = 0$ dla $n = 0$. Zdefiniujmy wielomian indeksowy P wzorem

$$P(s) = s(s-1) + p_0 s + q_0.$$

[1] $a_2(t) \neq 0$

Wtedy otrzymujemy

$$c_n P(n+\lambda) = X_n(c_0, \ldots, c_{n-1}, \lambda) \implies c_0 P(\lambda) = 0.$$

Założyliśmy, że $c_0 \neq 0$, więc λ *musi być pierwiastkiem wielomianu indeksowego.* Dla $n = 0$ mamy $X_0 = 0$, więc dla $n > 0$ rekurencja przyjmuje postać

$$c_n = \frac{X_n(c_0, \ldots, c_{n-1}, \lambda)}{P(n+\lambda)}.$$

To pozwala wyliczyć współczynniki c_n dla $n > 0$, chyba że $P(n+\lambda) = 0$ dla pewnego n, czyli $n + \lambda$ jest pierwiastkiem wielomianu indeksowego.

Przypadek podstawowy. Wielomian indeksowy ma dwa pierwiastki rzeczywiste nieróżniące się o liczbę całkowitą. Wówczas otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązanie przyjmując $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$.

Przypadek zespolony. Bierzemy jeden z nich, dostając rozwiązanie zespolone

$$\widetilde{y}(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Rozwiązaniami są $\operatorname{Re} \widetilde{y}(t)$, $\operatorname{Im} \widetilde{y}(t)$, i są liniowo niezależne.

Przypadek pierwiastków postaci λ, $\lambda + r$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$. W tym przypadku otrzymujemy jedno rozwiązanie postaci

$$y_0(t) = t^{\lambda + r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \tag{2.2.3}$$

Drugiego rozwiązania szukamy w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + \gamma y_0(t) \ln t,$$

gdzie γ to stała, którą wyznaczymy. Wstawiając do równania, otrzymujemy:

$$t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \big(P(n+\lambda) \cdot d_n - X_n(d_0, \ldots, d_{n-1}, \lambda)\big) + \Gamma(t) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) &= \gamma\big(t^2 \big(y_0(t) \ln t\big)'' + tp(t)\big(y_0(t) \ln t\big)'' + q(t) y_0(t) \ln t\big) \\
&= \gamma \ln t \big(t^2 y_0''(t) + tp(t) y_0'(t) + q(t) y_0(t)\big) + \gamma\big(2t y_0'(t) + \big(p(t) - 1\big) y_0(t)\big)
\end{aligned}$$

Pierwszy człon się zeruje, bo y_0 jest rozwiązaniem. Wstawiając (2.2.3), mamy

$$\begin{aligned}
&= \gamma\left(2t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + r) c_n t^{n+\lambda+r-1} + \big(p(t) - 1\big) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda+n+r}\right) \\
&= \gamma t^{\lambda+r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(\lambda + r + n) c_n t^n + p(t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) \\
&= \gamma t^{\lambda+r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(\lambda + r + n) c_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k p_{n-k} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) \\
&= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(2(\lambda + r + n) c_n + \sum_{k=0}^{n} c_k p_{n-k} - c_n\right) \\
&= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(2(\lambda + r + n) c_n + (p_0 - 1) c_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k}\right)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $P'(\lambda+n+r) = 2s + p_0 - 1$. Stąd

$$= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \big(P'(\lambda+r+n)c_n + Y_n(c_0,\dots,c_{n-1})\big)$$

gdzie $Y_n(c_0,\dots,c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k}$. Przesuwając indeksy, dostajemy

$$= \gamma t^{\lambda} \sum_{n=r}^{\infty} t^n \big(Y_{n-r}(c_0,\dots,c_{n-r-1}) + c_{n-r}P'(\lambda+n)\big).$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{\lambda+n} P(n+\lambda)d_n - X_n(d_0,\dots,d_{n-1}) + \\ + \gamma \sum_{n=r}^{\infty} t^{\lambda+n} P'(n+\lambda)c_{n-r} + Y_{n-r}(c_0,\dots,c_{n-r}) = 0.$$

Przyrównujmy do zera współczynniki przy $t^{\lambda+n}$. Jeśli $0 \le n < r$, to

$$P(n+\lambda)d_n = X_n(d_0,\dots,d_{n-1}).$$

Z kolei jeśli $n \ge r$, to mamy

$$P(n+\lambda)d_n + \gamma P'(\lambda+n)c_{n-r} = X_n(d_0,\dots,d_{n-1}) + Y_{n-r}(c_0,\dots,c_{n-r}).$$

2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)

Definicja 2.3.1. *Równaniem liniowym* nazywamy równanie postaci

$$y' = A(t)y + B(t),$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą $m \times m$, $B(t)$ wektorem z $\mathbb{R}^m$, a ich współczynniki są funkcjami ciągłymi określonymi na przedziale otwartym $I \subset \mathbb{R}$.

Lemat 2.3.2. Dla dowolnego warunku początkowego (y_0, t_0), gdzie $y_0 \in \mathbb{R}^m$ oraz $t_0 \in I$, dziedziną rozwiązania wysyconego jest I.

Definicja 2.3.3. Równanie $y' = A(t)y$ nazywamy *jednorodnym*, a równanie $y' = A(t)y + B(t)$ (odpowiadającym) *niejednorodnym*.

Twierdzenie 2.3.4. Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową $C^0(I, \mathbb{R}^m)$, a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej warstwą.

Niech V oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania $y' = A(t)y$.

Stwierdzenie 2.3.5. Niech $\{y_1,\dots,y_n\} \subset V$. Poniższe warunki są równoważne:

1. Zbiór $\{y_1,\dots,y_n\}$ jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego $t \in I$ zbiór $\big\{y_1(t),\dots,y_n(t)\big\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^m$.
3. Istnieje $t \in I$, że zbiór $\big\{y_1(t),\dots,y_n(t)\big\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^m$.

Stwierdzenie 2.3.6. Niech $\{y_1,\dots,y_k\} \subset V$. Wtedy

1. Jeśli $\{y_1,\dots,y_k\}$ jest liniowo niezależny, to $k \le m$.
2. Jeśli $\{y_1,\dots,y_k\}$ rozpina V, to $k \ge m$.

Wniosek 2.3.7. $\dim V = m$.

Definicja 2.3.8. *Układem fundamentalnym* nazwiemy dowolną bazę V.

Definicja 2.3.9. *Macierzą rozwiązującą* będziemy nazywali macierz, której kolumny tworzą układ fundamentalny.

Stwierdzenie 2.3.10. $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa dla każdego (równoważnie pewnego) $t \in I$ oraz spełnia

$$\frac{d}{dt}M(t) = A(t) \cdot M(t).$$

Uwaga 2.3.11. Jeśli $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą, a P macierzą o m wierszach i stałych współczynnikach, to

$$\frac{d}{dt}M(t)P = A(t)M(t)P.$$

Jeśli P jest nieosobliwa, to $M(t)P$ jest macierzą rozwiązującą.

$$\frac{d}{dt}M(t)P = \frac{dM(t)}{dt}P = A(t)M(t)P = A(t)\big(M(t)P\big).$$

Jeśli $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^m$, to $\mathcal{C} \cdot M(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym.

Jeśli $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą, zaś $t_0 \in I$, to

$$M(t, t_0) = M(t) \cdot \big[M(t_0)\big]^{-1}$$

jest macierzą rozwiązującą oraz $M(t_0, t_0) = E$. Ponadto $M(t_0, t_0)y_0$ jest rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$.

2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych

2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi

2.6. Zagadnienia brzegowe

3. Przykłady

3.1. Rozwiązywanie równań metodą szeregów potęgowych

3.2. Równania na wariację

3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach

3.4. Wzory Liouville'a i Abela

3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne

3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności