

KJG

# **Równania różniczkowe zwyczajne**

Opracowanie zagadnień na egzamin

# Spis treści

<b>1. Twierdzenia</b>	2
1.1. Ciągła zależność od parametru	2
1.2. Różniczkowalna zależność od parametru	2
1.3. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych	2
<b>2. Zagadnienia</b>	3
2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone	3
2.2. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych	4
<b>3. Przykłady</b>	5

# 1. Twierdzenia

## 1.1. Ciągła zależność od parametru

**Twierdzenie 1.1.1 (o ciągłej zależności od parametru).** Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą oraz  $c > 0$ . Niech  $y(t, \lambda_0)$  będzie rozwiązaniem równania  $y' = f(y, t, \lambda_0)$  z warunkiem początkowym  $(y_0, t_0)$  określonym na *zwartym* przedziale  $I$  zawierającym  $t_0$ . Wybierzmy  $b > 0$  i rozważmy zbiór

$$R_b = \left\{ (y, t) : t \in I, \|y - y(t, \lambda_0)\| < b \right\}.$$

Założmy dalej, że

1.  $\exists L \geq 0 \forall (y_1, t), (y_2, t) \in R_b \quad \|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|,$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (y, t) \in R_b \forall \lambda: \|\lambda - \lambda_0\| < \delta \quad \|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon.$

Wówczas istnieje stała  $c^* > 0$  taka, że

1. jeśli  $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$ , to  $y(t, \lambda)$  jest określone na  $I$
2. jeśli  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , to  $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$  na  $I$ .

## 1.2. Różniczkowalna zależność od parametru

**Twierdzenie 1.2.1 (o różniczkowalnej zależności od parametru).** Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą względem  $y, t, \lambda$  oraz klasy  $C^1$  względem  $y, \lambda$ . Ustalmy warunek początkowy  $(y_0, t_0)$  i oznaczmy przez  $y(t, \lambda)$  rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial t} = f(y, t, \lambda)$$

z warunkiem początkowym  $y(t_0, \lambda) = y_0$ , określone na ustalonym i *zwartym* przedziale  $I$ . Wówczas na przedziale  $I$  istnieje ciągła funkcja

$$z(t, \lambda_0) = \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t, \lambda_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial \lambda \partial t} \Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

## 1.3. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

**Twierdzenie 1.3.1 (Hamilton-Cayley).**  $\chi_A(A) = 0$ .

**Twierdzenie 1.3.2 (spektralne dla wielomianów).** Dla każdej macierzy  $A$  istnieją macierze spektralne  $M_{j,l}$  takie, że dla dowolnego wielomianu  $f$  zachodzi

$$f(A) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{q_j-1} M_{j,l} \cdot \frac{d^{(l)} f(z)}{dz^l} \Big|_{z=\lambda_j} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{q_j-1} M_{j,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

## 2. Zagadnienia

### 2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone

**Twierdzenie 2.1.1 (Peano).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie  $y(t_0) = y_0$  oraz

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja  $f$  jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla  $\alpha = \min(a, b/M)$  istnieje rozwiązanie  $y(t)$  określone na przedziale  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , spełniające warunek początkowy  $y(t_0) = y_0$ .

**Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf).** Niech  $y' = f(y, t)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , gdzie

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja  $f$  jest ciągła oraz Lipszycowska ze względu na  $y$ , to znaczy

$$\exists L \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \|f(y_1, t) - f(y_2, t)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla dowolnego  $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$  istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym  $y(t_0) = y_0$  określone na przedziale  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

**Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Niech  $(y_0, t_0) \in U$ . Jeśli  $y_1(t), y_2(t)$  są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na  $I_1, I_2$ , spełniającymi ten sam warunek początkowy  $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$ , to  $y_1 \equiv y_2$  na  $I_1 \cap I_2$ .

**Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Niech  $y(t)$  – rozwiązanie,  $T$  – koniec  $\text{Dm } y$ , granica  $\lim_{t \rightarrow T} y(t) = y_T$  istnieje oraz  $(y_T, T) \in U$ . Wówczas  $y$  rozszerza się na przedział zawierający  $T$  we wnętrzu.

**Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Przypuśćmy, że rozwiązanie  $y(t)$  jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest  $T \in \mathbb{R}$ . Przypuśćmy dalej, że istnieje zbiór zwarty  $K \subset U$  oraz  $\varepsilon > 0$ , taki, że

$$\forall t \in \text{Dm } y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad (y(t), t) \in K.$$

Wtedy  $y$  rozszerza się na przedział zawierający  $T$  we wnętrzu.

**Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$  oraz  $(y_0, t_0) \in U$ . Wówczas istnieje rozwiązanie  $y_{\max}$  zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy  $y_{\max}(t_0) = y_0$  i takie, że jeśli  $y$  jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek  $y(t_0) = y_0$ , to  $\text{Dm } y \subset \text{Dm } y_{\max}$  oraz  $y$  jest obcięciem  $y_{\max}$ .

## 2.2. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych

**Definicja 2.2.1.** Równaniem liniowym nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t),$$

gdzie  $A(t)$  jest macierzą  $m \times m$ , zaś  $B(t)$  wektorem z  $\mathbb{R}^m$  o ciągłych współczynnikach, określonym na przedziale otwartym  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Definicja 2.2.2.** Równanie  $y' = A(t)y$  nazywamy *jednorodnym*, zaś równanie  $y' = A(t)y + B(t)$  (odpowiadającym) *niejednorodnym*.

**Twierdzenie 2.2.3.** Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową  $C^0(I, \mathbb{R}^m)$ , a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej wartwą.

Niech  $V$  oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania  $y' = A(t)y$ .

**Stwierdzenie 2.2.4.** Następujące warunki są równoważne dla zbioru  $\{y_1, \dots, y_n\} \subset V$ :

1. Zbiór jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego  $t \in I$  zbiór  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  jest liniowo niezależny w  $\mathbb{R}^m$ .
3. Istnieje  $t \in I$ , że zbiór  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  jest liniowo niezależny w  $\mathbb{R}^m$ .

### 3. Przykłady