

KJG

# Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin



# Spis treści

<b>1. Twierdzenia</b>	3
1.1. Ciągła zależność od parametrów	3
1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów	4
1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego	4
1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych	6
1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\ \exp(At)\ $	8
1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności	9
<b>2. Zagadnienia</b>	10
2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysyczone (otwarte)	10
2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)	11
2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)	13
2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych	14
2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi	14
2.6. Zagadnienia brzegowe	14
<b>3. Przykłady</b>	15
3.1. Rozwiązywanie równań metodą szeregów potęgowych	15
3.2. Równania na wariację	15
3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach	15
3.4. Wzory Liouville'a i Abela	15
3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne	15
3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności	15

# 1. Twierdzenia

## 1.1. Ciągła zależność od parametrów

**Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru).** Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą oraz  $c > 0$ . Niech  $y(t, \lambda_0)$  będzie rozwiązaniem równania  $y' = f(y, t, \lambda_0)$  z warunkiem początkowym  $(y_0, t_0)$  określonym na *zwartym* przedziale  $I$  zawierającym  $t_0$ . Wybierzmy  $b > 0$  i rozważmy zbiór

$$R_b = \{(y, t) : t \in I \text{ oraz } \|y - y(t, \lambda_0)\| < b\}.$$

Założmy dalej, że

- a) istnieje  $L \geq 0$ , że dla wszystkich  $(y_1, t), (y_2, t) \in R_b$  zachodzi

$$\|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

- b) dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$ , że dla  $(y, t) \in R_b$  oraz każdej  $\lambda$  jest

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \implies \|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała  $c^* > 0$  taka, że

1. jeśli  $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$ , to  $y(t, \lambda)$  jest określone na  $I$ ,
2. jeśli  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , to  $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$  na  $I$ .

**Dowód.** W dowodzie wykorzystamy lemat pomocniczy.

**LEMAT 1.1.2.** Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że na  $J \subset I$  mamy

1. dla wszystkich  $t \in J$  jest  $(y(t, \lambda), t) \in R_b$ ,
2. dla każdego  $\varepsilon > 0$  oraz  $(y, t) \in R_b$  zachodzi  $\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon$ .

Wtedy dla każdego  $t \in J$  prawdziwa jest nierówność:

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t - t_0|.$$

**Dowód.**

$$\begin{aligned} \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda), u, \lambda) du - \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda_0) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \varepsilon du \right| + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \cdot |t - t_0|}_K + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right|. \end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą  $K$  wynika teza.  $\square$

Wybierzmy  $\varepsilon > 0$  taki, że  $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$  oraz oznaczmy  $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$ . Weźmy  $\lambda > 0$  taką, że  $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_\varepsilon$ . Niech  $J$  będzie maksymalnym podprzedziałem  $I$ , na którym dla każdego  $t \in J$  zachodzi:

$$(y(t, \lambda), t) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2, dla wszystkich  $t \in J$  jest:

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców  $J$ , nazwijmy go  $\alpha$ , należy do wnętrza  $I$ . Wówczas z twierdzenia 2.1.5,  $y(t, \lambda)$  przedłuża się na przedział  $J$  zawierający  $\alpha$  we wnętrzu. Co więcej, ponieważ  $\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\|$  jest funkcją ciągłą względem  $t$ , to pozostaje mniejsza od  $b$  na pewnym otoczeniu  $\alpha$ . Zatem  $J$  nie był przedziałem maksymalnym, chyba że  $J = I$ . Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Jeśli  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , to z założenia b) istnieje ciąg  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  taki, że

$$\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon_n.$$

dla każdego  $n$  oraz wszystkich  $(y, t) \in R_b$ . Z lematu 1.1.2, dla  $t \in I$  jest

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

co dowodzi drugiej części tezy. ■

## 1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów

**Twierdzenie 1.2.1 (O różniczkowalnej zależności od parametru).** Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie  $f$  jest funkcją ciągłą względem  $y, t, \lambda$  oraz klasy  $C^1$  względem  $y, \lambda$ . Ustalmy warunek początkowy  $(y_0, t_0)$  i oznaczmy przez  $y(t, \lambda)$  rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial t} = f(y, t, \lambda)$$

z warunkiem początkowym  $y(t_0, \lambda) = y_0$ , określone na ustalonym i *zwartym* przedziale  $I$ . Wówczas na przedziale  $I$  istnieje ciągła funkcja

$$z(t, \lambda_0) = \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t, \lambda_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial \lambda \partial t} \Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

**Dowód.** Łatwy dowód czytelnik sporządzi samodzielnie jako ćwiczenie. ■

## 1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego

Rozważmy równanie

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \tag{1.3.1}$$

gdzie  $a_2, a_1, a_0$  są analityczne w pewnym punkcie  $t_0$ .

**Definicja 1.3.1.** Powiemy, że  $t_0$  jest *punktem regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_2(t_0) \neq 0$ . W przeciwnym wypadku  $t_0$  nazwiemy *punktem osobliwym*.

W przypadku regularnym równanie (1.3.1) sprowadza się do

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (1.3.2)$$

gdzie  $p$  i  $q$  są analityczne w punkcie  $t_0$ , czyli

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t-t_0)^n, \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-t_0)^n.$$

**Twierdzenie 1.3.2.** Każde rozwiązanie równania (1.3.2) jest analityczne w kole, w którym oba szeregi  $p(t)$  i  $q(t)$  zbiegają. Co więcej, analityczna funkcja

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$$

jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right). \quad (1.3.3)$$

**Dowód.** Dla ustalenia uwagi niech  $t_0 = 0$  oraz  $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ . Wtedy

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n, \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}t^n.$$

Z iloczynu Cauchy'ego<sup>1</sup> dostajemy

$$\begin{aligned} p(t)y'(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k}, \\ q(t)y(t) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k}. \end{aligned}$$

Rozpisując lewą stronę równania (1.3.2), otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( (n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right) = 0.$$

Z analityczności, dla każdego  $n \geq 0$  jest

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} = 0,$$

co dowodzi wzoru (1.3.3).

Wzór rekurencyjny (1.3.3) zadaje współczynniki  $c_n$  dla  $n \geq 2$ , jeśli wybrane zostały  $c_0, c_1$ . Zauważmy, że  $c_0 = y(t_0)$ ,  $c_1 = y'(t_0)$ . Zatem dobierając  $c_0$  oraz  $c_1$  możemy otrzymać dowolny warunek początkowy dla  $y$ , co pozwala uzyskać każde rozwiązanie wysycone. Pozostaje pokazać, że przy dowolnym wyborze  $c_0, c_1$  wzór (1.3.3) prowadzi do szeregu Taylora funkcji analitycznej w kole  $D(t_0, R)$ .

Wybermy  $0 < r < R$ . Wtedy funkcje  $p, q$  są zbieżne bezwzględnie w  $\overline{D}(t_0, r)$ , więc istnieją stałe  $L_p$  oraz  $L_q$  takie, że dla dowolnego  $n \geq 0$  jest

$$|p_n|r^n \leq L_p, \quad |q_n|r^n \leq L_q.$$

<sup>1</sup>  $\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Niech  $0 < \rho < r$  oraz  $\gamma_n = |c_n|\rho^n$ ,  $\Gamma_n = \max\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$ . Wtedy

$$\begin{aligned}
|\gamma_{n+2}| &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot |c_{k+1}| \cdot |p_{n-k}| + \sum_{k=0}^n |c_k| \cdot |q_{n-k}| \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left( \sum_{k=0}^n (n+1) \cdot \frac{\gamma_{k+1}}{\rho^{k+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{\rho^k} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left( (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_{n+1}}{\rho^{k-n} \rho^{n+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_n}{\rho^{k-n} \rho^n} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho L_p}{n+2} \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\rho}{r} \right)^{n-k} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+1)(n+2)} \Gamma_n \sum_{k=0}^n \left( \frac{\rho}{r} \right)^{n-k} \\
&\leq \left( \frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right) \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\rho}{r} \right)^{n-k} \\
&\leq \underbrace{\left( \frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right)}_{\alpha_n} \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r}} \right) \Gamma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Wyrażenie  $\alpha_n$  zbiega do zera, gdy  $n \rightarrow \infty$ . Istnieje  $n_0$ , że  $\alpha_n < 1$  dla  $n \geq n_0$ . Zatem dla każdego  $n \geq n_0$  zachodzi  $\gamma_{n+2} \leq \Gamma_{n+1}$ , co jest równoważne temu, że  $\Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}$ , czyli ciąg  $\Gamma_n$  jest stały od pewnego miejsca i ograniczony przez pewne  $\bar{\Gamma}$ . Stąd, jeśli  $|t| < \rho$ , to z kryterium Cauchy'ego jest

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |t|^n} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot \rho^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{|t|^n}{\rho^n}} \leq \sqrt[n]{\bar{\Gamma}} \cdot \left| \frac{t}{\rho} \right| < 1,$$

o ile  $n$  jest dostatecznie duże. Wobec tego szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$  jest zbieżny w kole o promieniu  $\rho$ . Ponieważ  $\rho$  może być dowolnie bliskie  $R$ , to suma kół wypełnia koło otwarte o promieniu  $R$ , co kończy dowód. ■

#### 1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

**Definicja 1.4.1.** *Widmem* macierzy  $A$  nazywamy zbiór jej wartości własnych wraz z krotnościami i oznaczamy  $\text{sp}(A)$ .

**Twierdzenie 1.4.2 (Hamilton-Cayley).** Dla każdej macierzy  $A$  zachodzi  $\chi_A(A) = 0$ , gdzie  $\chi_A$  jest wielomianem charakterystycznym macierzy  $A$ .

**Twierdzenie 1.4.3 (Spektralne dla wielomianów).** Niech  $A$  będzie macierzą o wartościach własnych  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  z krotnościami  $q_1, \dots, q_n$ . Wtedy istnieją macierze  $M_{k,l}$  dla  $1 \leq k \leq n$ ,  $0 \leq l \leq q_k - 1$ , zwane *spektralnymi* takie, że dla każdego wielomianu  $f$  zachodzi:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k).$$

**Dowód.** W celu udowodnienia twierdzenia będzie potrzebny lemat pomocniczy.

**LEMAT 1.4.4.** Macierze  $M_{k,l}$  są jednoznacznie wyznaczone przez tęzę twierdzenia spektralnego dla wielomianów postaci  $f(z) = z^r$ , gdzie  $r = 0, \dots, m-1$ , a  $m$  jest stopniem wielomianu  $f$ .

**DOWÓD.** Otrzymujemy układ równań z niewiadomymi  $M_{k,l}$ , czyli

$$A^r = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \cdot \lambda_k^{r-l}.$$

Teza lematu oznacza, że układ ten jest oznaczony. Pokażemy liniową niezależność wierszy. Wybierzmy współczynniki  $c_r$  dla  $r = 0, \dots, m-1$ , tak aby kombinacja liniowa wierszy z tymi współczynnikami wynosiła 0, czyli dla każdego  $k = 1, \dots, n$  oraz  $l = 0, \dots, q_k - 1$  jest

$$\sum_{r=0}^{m-1} c_r \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \lambda_k^{r-l} = 0.$$

Rozważmy teraz wielomian

$$w(z) = \sum_{r=0}^{m-1} c_r z^r.$$

Otrzymaliśmy, że  $w^{(l)}(\lambda_k) = 0$ , czyli  $\lambda_k$  jest zerem z krotnością co najmniej  $q_k$ , a zatem suma krotności zer wielomianu  $w$  jest równa co najmniej  $\sum_{k=1}^n q_k = m$ , co jest sprzecznością, bo stopień wielomianu był co najwyżej  $m-1$ .  $\square$

Twierdzenie zostanie udowodnione indukcyjnie ze względu na stopień  $f$ .

Przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla wielomianów stopnia mniejszego od  $m+r$ , gdzie  $r \geq 0$ . Z lematu 1.4.4 teza zachodzi dla  $r = 0$ . Zwróćmy uwagę, że obie strony twierdzenia są liniowe względem  $f$ . Wystarczy więc pokazać je dla układu rozpinającego przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego niż  $m+r$ . W celu pokazania, że twierdzenie zachodzi również dla wielomianów stopnia  $m+r$ , wystarczy pokazać dla  $f_r(z) = z^r \chi_A(z)$ , bo każdy wielomian

$$f(z) = a_{m+r} z^{m+r} + \dots + a_1 z + a_0$$

można zapisać jako

$$f(z) = a_{m+r} f_r(z) + P(z),$$

gdzie  $P$  jest wielomianem stopnia mniejszego niż  $m+r$ . Zauważmy, że

$$L = f_r(A) = A^r \cdot \chi_A(A) \stackrel{1.4.2}{=} 0, \quad P = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k),$$

a ponadto  $f_r(z) = (z - \lambda_k)^{q_k} \cdot Q(z)$ . Pochodne rzędu niższego od  $q_k$  składają się z sum członów, w których  $(z - \lambda_k)$  występuje w dowolnej potęgde, więc zerują się przy podstawieniu  $z = \lambda_k$ .  $\blacksquare$

**Twierdzenie 1.4.5 (Spektralne dla funkcji analitycznych).** Niech

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R.$$

Załóżmy, że  $\text{sp}(A) \subset D(0, R)$ . Wówczas szereg  $f(A)$  zbiega i zachodzi teza twierdzenia spektralnego dla wielomianów:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

**Dowód.** Oznaczmy

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

Korzystając z twierdzenia spektralnego dla wielomianów, dostajemy

$$\begin{aligned} f(A) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f_N^{(l)}(\lambda_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{(l)}(\lambda_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j). \end{aligned} \quad \blacksquare$$



### 1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\|\exp(At)\|$

**Definicja 1.5.1.** *Wykładnikiem Lapunowa* macierzy  $A$  nazywamy liczbę

$$\bar{\lambda} = \max\{\operatorname{Re} \lambda_k : k = 1, \dots, n\}.$$

**Definicja 1.5.2.** *Potęgą Lapunowa* macierzy  $A$  nazywamy liczbę

$$\bar{l} = \max\{l \geq 0 : \exists k \in \{1, \dots, n\} \quad \operatorname{Re} \lambda_k = \bar{\lambda} \wedge M_{k,l} \neq 0\}.$$

**Lemat 1.5.3 (Wzór Leibniza).**

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f \cdot D^{n-k} g. \quad (1.5.1)$$

**Twierdzenie 1.5.4.** Dla każdej macierzy  $A$  zachodzą nierówności:

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} < \infty.$$

**Dowód.** Nierówność środkowa jest oczywista. Zaczniemy wobec tego od prawej.

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot t^l e^{\lambda_k t} \right\|}{t^{\bar{l}} \exp(\bar{\lambda}t)} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^l e^{(\operatorname{Re} \lambda_k)t}}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{l-\bar{l}} e^{(\operatorname{Re} \lambda_k - \bar{\lambda})t} \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $\operatorname{Re} \lambda_k - \bar{\lambda} \leq 0$ , a jeśli  $\operatorname{Re} \lambda_k - \bar{\lambda} = 0$  oraz  $M_{k,l} \neq 0$ , to  $l \leq \bar{l}$ . Wobec tego, dla każdej kombinacji  $k$  i  $l$  jest

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{l-\bar{l}} \exp((\operatorname{Re} \lambda_k - \bar{\lambda})t) \leq 1.$$

Bez utraty ogólności możemy przyjąć  $\bar{\lambda} = \lambda_1$ ,  $M_{1,\bar{l}} \neq 0$  oraz

$$w(z) = \prod_{k=2}^n (z - \lambda_k)^{q_k} = \frac{\chi_A(z)}{(z - \lambda_1)^{q_1}}.$$

Niech  $f(z) = w(z) \cdot e^{z t}$ . Wtedy dla  $k > 0$  oraz  $l < q_k$  jest  $f^{(l)}(\lambda_k) = 0$ , bo pochodna jest sumą członów ze wzoru (1.5.1), gdzie  $(z - \lambda_k)$  występuje w potęgce dodatniej. Niechaj teraz  $k = 1$  oraz  $\varphi(z) = e^{z t}$ ,  $\psi(z) = w(z)$ . Wtedy

$$(\varphi \cdot \psi)^{(l)}(\lambda_1) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} t^i e^{\lambda_1 t} w^{(l-i)}(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} \cdot p_l(t),$$

gdzie  $p_l$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $l$ . Wtedy  $p_{\bar{l}}$  ma postać

$$t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t) e^{\lambda_1 t},$$

gdzie stopień  $\tilde{p}_{\bar{l}}$  jest mniejszy od  $\bar{l}$ . Z twierdzenia spektralnego jest

$$\begin{aligned}
\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}}e^{\lambda_1 t}} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} e^{\lambda_1 t} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} e^{\lambda_1 t} (t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\
&= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{\lambda_1 t}\| \cdot \left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} (t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\
&\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot |t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)| - \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,l}\| \cdot \|p_l(t)\|}{t^{\bar{l}}} \\
&\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \left| w(\lambda_1) + \frac{\tilde{p}_{\bar{l}}(t)}{t^{\bar{l}}} \right| - \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,l}\| \cdot \left| \frac{p_l(t)}{t^{\bar{l}}} \right| \\
&= \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \underbrace{|w(\lambda_1)|}_{>0}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}}e^{\lambda_1 t}} \geq \frac{1}{\|w(A)\|} \cdot \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}}e^{\lambda_1 t}} \geq \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot |w(\lambda_1)|}{\|w(A)\|} > 0. \quad \blacksquare$$

### 1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności

## 2. Zagadnienia

### 2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone (otwarte)

**Twierdzenie 2.1.1 (Peano).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie  $y(t_0) = y_0$  oraz

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja  $f$  jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla  $\alpha = \min(a, b/M)$  istnieje rozwiązanie  $y(t)$  określone na przedziale  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , spełniające warunek początkowy  $y(t_0) = y_0$ .

**Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf).** Niech  $y' = f(y, t)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , gdzie

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja  $f$  jest ciągła oraz Lipszycowska ze względu na  $y$ , to znaczy

$$\exists L \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \|f(y_1, t) - f(y_2, t)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla dowolnego  $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$  istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym  $y(t_0) = y_0$  określone na przedziale  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

**Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Niech  $(y_0, t_0) \in U$ . Jeśli  $y_1(t), y_2(t)$  są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na  $I_1, I_2$ , spełniającymi ten sam warunek początkowy  $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$ , to  $y_1 \equiv y_2$  na  $I_1 \cap I_2$ .

**Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Niech  $y(t)$  – rozwiązanie,  $T$  – koniec Dm  $y$ , granica  $\lim_{t \rightarrow T} y(t) = y_T$  istnieje oraz  $(y_T, T) \in U$ . Wówczas  $y$  rozszerza się na przedział zawierający  $T$  we wnętrzu.

**Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$ . Założmy, że rozwiązanie  $y(t)$  jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest  $T \in \mathbb{R}$ . Założmy dalej, że istnieje zbiór zwarty  $K \subset U$  oraz  $\varepsilon > 0$ , taki, że

$$\forall t \in \text{Dm } y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad (y(t), t) \in K.$$

Wtedy  $y$  rozszerza się na przedział zawierający  $T$  we wnętrzu.

**Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym).** Niech  $y' = f(y, t)$ , gdzie funkcja  $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem  $y$  oraz  $(y_0, t_0) \in U$ . Wówczas istnieje rozwiązanie  $y_{\max}$  zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy  $y_{\max}(t_0) = y_0$  i takie, że jeśli  $y$  jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek  $y(t_0) = y_0$ , to  $\text{Dm } y \subset \text{Dm } y_{\max}$  oraz  $y$  jest obcięciem  $y_{\max}$ .

## 2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)

Rozważmy regularne<sup>1</sup> równanie różniczkowe postaci

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (2.2.1)$$

**Definicja 2.2.1.** Punkt  $t_0$  nazwiemy regularnie osobliwym, jeśli funkcja  $\frac{a_2(t)}{(t-t_0)^2}$  jest analityczna w  $t_0$  i nie znika w  $t_0$ , a funkcja  $\frac{a_1(t)}{t-t_0}$  jest analityczna w  $t_0$ .

W przypadku punktu regularnie osobliwego równanie (2.2.1) sprowadza się do

$$(t-t_0)^2 y'' + (t-t_0)p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.2.2)$$

Rozwiązań będziemy szukali jedynie poza  $t_0$ ,  $t > t_0$ .

**Metoda Frobeniusa.** Niech  $t_0 = 0$ . Szukamy rozwiązań w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad c_0 \neq 0.$$

Różniczkując stronami, dostajemy

$$\begin{aligned} ty'(t) &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda) t^n, \\ t^2 y''(t) &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) t^n. \end{aligned}$$

Niech  $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$  oraz  $q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$ . Wtedy

$$\begin{aligned} tp(t)y'(t) &= t^\lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\lambda) t^n \right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k (k+\lambda) p_{n-k} \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( c_n (n+\lambda) p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (k+\lambda) p_{n-k} \right), \\ q(t)y(t) &= t^\lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( c_n q_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k} \right). \end{aligned}$$

Wstawiamy wynik do równania (2.2.2), otrzymując

$$\begin{aligned} t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n ((n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n + (n+\lambda)p_0 c_n + q_0 c_n) + \\ + t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n-1} (k+\lambda) c_k p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k} \right)}_{-X_n(c_0, \dots, c_{n-1}, \lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Dla każdej naturalnej liczby  $n > 0$  zachodzi:

$$c_n ((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)p_0 + q_0) = X_n(c_0, \dots, c_{n-1}, \lambda)$$

oraz  $X_0 = 0$  dla  $n = 0$ . Zdefiniujmy wielomian indeksowy  $P$  wzorem

$$P(s) = s(s-1) + p_0 s + q_0.$$

<sup>1</sup>  $a_2(t) \neq 0$

Wtedy otrzymujemy

$$c_n P(n + \lambda) = X_n(c_0, \dots, c_{n-1}, \lambda) \implies c_0 P(\lambda) = 0.$$

Założyliśmy, że  $c_0 \neq 0$ , więc  $\lambda$  musi być pierwiastkiem wielomianu indeksowego. Dla  $n = 0$  mamy  $X_0 = 0$ , więc dla  $n > 0$  rekurencja przyjmuje postać

$$c_n = \frac{X_n(c_0, \dots, c_{n-1}, \lambda)}{P(n + \lambda)}.$$

To pozwala wyliczyć współczynniki  $c_n$  dla  $n > 0$ , chyba że  $P(n + \lambda) = 0$  dla pewnego  $n$ , czyli  $n + \lambda$  jest pierwiastkiem wielomianu indeksowego.

**Przypadek podstawowy.** Wielomian indeksowy ma dwa pierwiastki rzeczywiste nieróżniące się o liczbę całkowitą. Wówczas otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązania przyjmując  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ .

**Przypadek zespolony.** Bierzemy jeden z nich, dostając rozwiązanie zespolone

$$\tilde{y}(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Rozwiązaniem są  $\operatorname{Re} \tilde{y}(t)$ ,  $\operatorname{Im} \tilde{y}(t)$ , i są liniowo niezależne.

**Przypadek pierwiastków postaci  $\lambda, \lambda + r$ , gdzie  $\lambda \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}$ .** W tym przypadku otrzymujemy jedno rozwiązanie postaci

$$y_0(t) = t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \quad (2.2.3)$$

Drugiego rozwiązania szukamy w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + \gamma y_0(t) \ln t,$$

gdzie  $\gamma$  to stała, którą wyznaczymy. Wstawiając do równania, otrzymujemy:

$$t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n (P(n + \lambda) \cdot d_n - X_n(d_0, \dots, d_{n-1}, \lambda)) + \Gamma(t) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \gamma (t^2 (y_0(t) \ln t)'' + t p(t) (y_0(t) \ln t)' + q(t) y_0(t) \ln t) \\ &= \gamma \ln t (t^2 y_0''(t) + t p(t) y_0'(t) + q(t) y_0(t)) + \gamma (2t y_0'(t) + (p(t) - 1) y_0(t)) \end{aligned}$$

Pierwszy człon się zeruje, bo  $y_0$  jest rozwiązaniem. Wstawiając (2.2.3), mamy

$$\begin{aligned} &= \gamma \left( 2t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + r) c_n t^{n+\lambda+r-1} + (p(t) - 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda+n+r} \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} 2(\lambda + r + n) c_n t^n + p(t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} 2(\lambda + r + n) c_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k p_{n-k} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( 2(\lambda + r + n) c_n + \sum_{k=0}^n c_k p_{n-k} - c_n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left( 2(\lambda + r + n) c_n + (p_0 - 1) c_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k} \right) \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $P'(\lambda + n + r) = 2s + p_0 - 1$ . Stąd

$$= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n (P'(\lambda + r + n)c_n + Y_n(c_0, \dots, c_{n-1}))$$

gdzie  $Y_n(c_0, \dots, c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k}$ . Przesuwając indeksy, dostajemy

$$= \gamma t^{\lambda} \sum_{n=r}^{\infty} t^n (Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1}) + c_{n-r} P'(\lambda + n)).$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^{\lambda+n} P(n + \lambda) d_n - X_n(d_0, \dots, d_{n-1}) + \\ + \gamma \sum_{n=r}^{\infty} t^{\lambda+n} P'(n + \lambda) c_{n-r} + Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r}) = 0. \end{aligned}$$

Przyrównujemy do zera współczynniki przy  $t^{\lambda+n}$ . Jeśli  $0 \leq n < r$ , to

$$P(n + \lambda) d_n = X_n(d_0, \dots, d_{n-1}).$$

Z kolei jeśli  $n \geq r$ , to mamy

$$P(n + \lambda) d_n + \gamma P'(\lambda + n) c_{n-r} = X_n(d_0, \dots, d_{n-1}) + Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r}).$$

### 2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)

**Definicja 2.3.1.** *Równaniem liniowym* nazywamy równanie postaci

$$y' = A(t)y + B(t),$$

gdzie  $A(t)$  jest macierzą  $m \times m$ ,  $B(t)$  wektorem z  $\mathbb{R}^m$ , a ich współczynniki są funkcjami ciągłymi określonymi na przedziale otwartym  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Lemat 2.3.2.** Dla dowolnego warunku początkowego  $(y_0, t_0)$ , gdzie  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  oraz  $t_0 \in I$ , dziedziną rozwiązania wysyconego jest  $I$ .

**Definicja 2.3.3.** Równanie  $y' = A(t)y$  nazywamy *jednorodnym*, a równanie  $y' = A(t)y + B(t)$  (odpowiadającym) *niejednorodnym*.

**Twierdzenie 2.3.4.** Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową  $C^0(I, \mathbb{R}^m)$ , a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej warstwą.

Niech  $V$  oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania  $y' = A(t)y$ .

**Stwierdzenie 2.3.5.** Niech  $\{y_1, \dots, y_n\} \subset V$ . Poniższe warunki są równoważne:

1. Zbiór  $\{y_1, \dots, y_n\}$  jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego  $t \in I$  zbiór  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  jest liniowo niezależny w  $\mathbb{R}^m$ .
3. Istnieje  $t \in I$ , że zbiór  $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$  jest liniowo niezależny w  $\mathbb{R}^m$ .

**Stwierdzenie 2.3.6.** Niech  $\{y_1, \dots, y_k\} \subset V$ . Wtedy

1. Jeśli  $\{y_1, \dots, y_k\}$  jest liniowo niezależny, to  $k \leq m$ .
2. Jeśli  $\{y_1, \dots, y_k\}$  rozpina  $V$ , to  $k \geq m$ .

**Wniosek 2.3.7.**  $\dim V = m$ .

**Definicja 2.3.8.** *Układem fundamentalnym* nazwiemy dowolną bazę  $V$ .

**Definicja 2.3.9.** *Macierzą rozwiązującą* będziemy nazywali macierz, której kolumny tworzą układ fundamentalny.

**Stwierdzenie 2.3.10.**  $M(t)$  jest macierzą rozwiązującą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa dla każdego (równoważnie pewnego)  $t \in I$  oraz spełnia

$$\frac{d}{dt}M(t) = A(t) \cdot M(t).$$

**Uwaga 2.3.11.** Jeśli  $M(t)$  jest macierzą rozwiązującą, a  $P$  macierzą o  $m$  wierszach i stałych współczynnikach, to

$$\frac{d}{dt}M(t)P = A(t)M(t)P.$$

Jeśli  $P$  jest nieosobliwa, to  $M(t)P$  jest macierzą rozwiązującą.

$$\frac{d}{dt}M(t)P = \frac{dM(t)}{dt}P = A(t)M(t)P = A(t)(M(t)P).$$

Jeśli  $C \in \mathbb{R}^m$ , to  $C \cdot M(t)$  jest rozwiązaniem ogólnym.

Jeśli  $M(t)$  jest macierzą rozwiązującą, zaś  $t_0 \in I$ , to

$$M(t, t_0) = M(t) \cdot [M(t_0)]^{-1}$$

jest macierzą rozwiązującą oraz  $M(t_0, t_0) = E$ . Ponadto  $M(t_0, t_0)y_0$  jest rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym  $y(t_0) = y_0$ .

## 2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych

## 2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi

## 2.6. Zagadnienia brzegowe

### 3. Przykłady

3.1. Rozwiązanie równań metodą szeregów potęgowych

3.2. Równania na wariację

3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach

3.4. Wzory Liouville'a i Abela

3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne

3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności