

KJG

Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Spis treści

1. Twierdzenia	2
1.1. Ciągła zależność od parametru	2
1.2. Różniczkowalna zależność od parametru	3
1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego	3
1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych	5
1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\ e^{At}\ $	5
1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności	5
2. Zagadnienia	6
2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysyczone	6
2.2. Metoda Frobeniusa	7
2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych	7
2.4. Rozwiązanie równań liniowych niejednorodnych	7
2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi	7
2.6. Zagadnienia brzegowe	7
3. Przykłady	8
3.1. Rozwiązanie równań metodą szeregów potęgowych	8
3.2. Równania na wariację	8
3.3. Potoki – policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach	8
3.4. Wzory Liouville’a i Abela	8
3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne	8
3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa – zastosowanie do badania stabilności	8

1. Twierdzenia

1.1. Ciągła zależność od parametru

Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą oraz $c > 0$. Niech $y(t, \lambda_0)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = f(y, t, \lambda_0)$ z warunkiem początkowym (y_0, t_0) określonym na *zwartym* przedziale I zawierającym t_0 . Wybierzmy $b > 0$ i rozważmy zbiór

$$R_b = \{(y, t) : t \in I \text{ oraz } \|y - y(t, \lambda_0)\| < b\}.$$

Założmy dalej, że

1. istnieje $L \geq 0$, że dla wszystkich $(y_1, t), (y_2, t) \in R_b$ jest:

$$\|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

2. dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla $(y, t) \in R_b$ zachodzi:

$$\forall \lambda \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta \implies \|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała $c^* > 0$ taka, że

1. jeśli $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$, to $y(t, \lambda)$ jest określone na I ,
2. jeśli $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, to $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$ na I .

Dowód. W dowodzie wykorzystamy poniższy lemat.

Lemat 1.1.2. Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że

1. na pewnym przedziale $J \subset I$ jeśli $t \in J$, to $(y(t, \lambda), t) \in R_b$,
2. dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $(y, t) \in R_b$ zachodzi: $\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon$.

Wtedy dla każdego $t \in J$ jest:

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t - t_0|.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda), u, \lambda) du - \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda_0) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \varepsilon du \right| + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \cdot |t - t_0|}_K + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right|. \end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą K wynika teza. □

Wybierzmy $\varepsilon > 0$ taki, że $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$ oraz oznaczmy $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$. Weźmy $\lambda > 0$ taką, że $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_\varepsilon$. Niech J będzie maksymalnym podprzedziałem I , na którym zachodzi:

$$\forall t \in J \quad (y(t, \lambda), t) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2 dostajemy:

$$\forall t \in J \quad \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców J , nazwijmy go α , należy do wnętrza I . Wówczas z twierdzenia 2.1.5, $y(t, \lambda)$ przedłuża się na przedział J zawierający α we wnętrzu. Co więcej, ponieważ $\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\|$ jest funkcją ciągłą względem t , to pozostaje mniejsza od b na pewnym otoczeniu α . Zatem J nie był przedziałem maksymalnym, chyba że $J = I$. Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Jeśli $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, to z założenia drugiego istnieje ciąg $\varepsilon_n \rightarrow 0$ taki, że

$$\forall (y, t) \in R_b \quad \forall n \quad \|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon_n.$$

Z lematu 1.1.2 dostajemy:

$$\forall t \in I \quad \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

co dowodzi drugiej części tezy. ■

1.2. Różniczkowalna zależność od parametru

Twierdzenie 1.2.1 (O różniczkowalnej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą względem y, t, λ oraz klasy C^1 względem y, λ . Ustalmy warunek początkowy (y_0, t_0) i oznaczmy przez $y(t, \lambda)$ rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial t} = f(y, t, \lambda)$$

z warunkiem początkowym $y(t_0, \lambda) = y_0$, określone na ustalonym i *zwartym* przedziale I . Wówczas na przedziale I istnieje ciągła funkcja

$$z(t, \lambda_0) = \left. \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t, \lambda_0)}{\partial t} = \left. \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \left. \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial \lambda \partial t} \right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego

Rozważmy równanie

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \tag{1.3.1}$$

gdzie a_2, a_1, a_0 są analityczne w pewnym punkcie t_0 .

Definicja 1.3.1. Powiemy, że t_0 jest *punktem regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2(t_0) \neq 0$. W przeciwnym wypadku t_0 nazwiemy *punktem osobliwym*.

W przypadku regularnym równanie (1.3.2) sprowadza się do

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (1.3.2)$$

gdzie p i q są analityczne w punkcie t_0 , czyli

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t-t_0)^n, \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-t_0)^n.$$

Twierdzenie 1.3.2. Każde rozwiązanie równania (1.3.2) jest analityczne w kole, w którym oba szeregi $p(t)$ i $q(t)$ zbiegają. Co więcej, analityczna funkcja

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$$

jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right). \quad (1.3.3)$$

Dowód. Dla ustalenia uwagi niech $t_0 = 0$ oraz $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Wtedy

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n, \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}t^n.$$

Z iloczynu Cauchy'ego¹ dostajemy

$$\begin{aligned} p(t)y'(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k}, \\ q(t)y(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k}. \end{aligned}$$

Rozpisując lewą stronę równania (1.3.2), otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left((n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right) = 0.$$

Z analityczności, dla każdego $n \geq 0$ jest

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} = 0,$$

co dowodzi wzoru (1.3.3).

Wzór rekurencyjny (1.3.3) zadaje współczynniki c_n dla $n \geq 2$, jeśli wybrane zostały c_0, c_1 . Zauważmy, że $c_0 = y(t_0)$, $c_1 = y'(t_0)$. Zatem dobierając c_0 oraz c_1 możemy otrzymać dowolny warunek początkowy dla y , co pozwala uzyskać każde rozwiązanie wysycone. Pozostaje pokazać, że przy dowolnym wyborze c_0, c_1 wzór (1.3.3) prowadzi do szeregu Taylora funkcji analitycznej w kole $D(t_0, R)$.

Wybermy $0 < r < R$. Wtedy funkcje p, q są zbieżne w $\overline{D}(t_0, r)$ oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| r^n < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |q_n| r^n < \infty.$$

Wobec tego istnieją stałe L_p, L_q takie, że dla dowolnego $n \geq 0$ jest

$$|p_n| r^n \leq L_p, \quad |q_n| r^n \leq L_q.$$

¹ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Niech $0 < \rho < r$ oraz $\gamma_n = |c_n|\rho^n$, $\Gamma_n = \max\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 |\gamma_{n+2}| &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) \cdot |c_{k+1}| \cdot |p_{n-k}| + \sum_{k=0}^n |c_k| \cdot |q_{n-k}| \right) \\
 &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n (n+1) \cdot \frac{\gamma_{k+1}}{\rho^{k+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{\rho^k} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
 &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_{n+1}}{\rho^{k-n} \rho^{n+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_n}{\rho^{k-n} \rho^n} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
 &\leq \frac{\rho L_p}{n+2} \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n-k} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+1)(n+2)} \Gamma_n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n-k} \\
 &\leq \left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right) \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n-k} \\
 &\leq \underbrace{\left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right)}_{(*)} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r}} \right) \Gamma_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie (*) zbiega do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Zauważmy, że

$$\exists N \forall n \geq N \quad \gamma_{n+2} \leq \Gamma_{n+1} \implies \Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}.$$

Oznacza to, że ciąg Γ_n jest stały od pewnego miejsca i ograniczony przez pewne $\bar{\Gamma}$. Wtedy $|c_n|\rho^n \leq \bar{\Gamma}$. Zatem jeśli $|t| < \rho$, to z kryterium Cauchy'ego jest

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |t|^n} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot \rho^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{|t|^n}{\rho^n}} \leq \sqrt[n]{\bar{\Gamma}} \cdot \left| \frac{t}{\rho} \right| < 1.$$

Szereg $\sum c_n t^n$ jest zbieżny w kole o promieniu ρ . Ponieważ ρ może być dowolnie bliskie R , to suma kół wypełnia koło otwarte o promieniu R . ■

1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

Twierdzenie 1.4.1 (Hamilton-Cayley). $\chi_A(A) = 0$.

Twierdzenie 1.4.2 (spektralne dla wielomianów). Dla każdej macierzy A istnieją macierze spektralne $M_{j,l}$ takie, że dla dowolnego wielomianu f zachodzi

$$f(A) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{q_j-1} M_{j,l} \cdot \frac{d^{(l)} f(z)}{dz^l} \Big|_{z=\lambda_j} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{q_j-1} M_{j,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\|e^{At}\|$

1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności

2. Zagadnienia

2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone

Twierdzenie 2.1.1 (Peano). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja f jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla $\alpha = \min(a, b/M)$ istnieje rozwiązanie $y(t)$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, spełniające warunek początkowy $y(t_0) = y_0$.

Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf). Niech $y' = f(y, t)$, $y(t_0) = y_0$, gdzie

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja f jest ciągła oraz Lipszycowska ze względu na y , to znaczy

$$\exists L \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \|f(y_1, t) - f(y_2, t)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y . Niech $(y_0, t_0) \in U$. Jeśli $y_1(t), y_2(t)$ są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na I_1, I_2 , spełniającymi ten sam warunek początkowy $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, to $y_1 \equiv y_2$ na $I_1 \cap I_2$.

Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie funkcja $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y . Niech $y(t)$ – rozwiązanie, T – koniec Dm y , granica $\lim_{t \rightarrow T} y(t) = y_T$ istnieje oraz $(y_T, T) \in U$. Wówczas y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y . Przypuśćmy, że rozwiązanie $y(t)$ jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest $T \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy dalej, że istnieje zbiór zwarty $K \subset U$ oraz $\varepsilon > 0$, taki, że

$$\forall t \in \text{Dm } y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad (y(t), t) \in K.$$

Wtedy y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie funkcja $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y oraz $(y_0, t_0) \in U$. Wówczas istnieje rozwiązanie y_{\max} zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy $y_{\max}(t_0) = y_0$ i takie, że jeśli y jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek $y(t_0) = y_0$, to $\text{Dm } y \subset \text{Dm } y_{\max}$ oraz y jest obcięciem y_{\max} .

2.2. Metoda Frobeniusa

2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych

Definicja 2.3.1. Równaniem liniowym nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t),$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą $m \times m$, zaś $B(t)$ wektorem z \mathbb{R}^m o ciągłych współczynnikach, określonym na przedziale otwartym $I \subset \mathbb{R}$.

Definicja 2.3.2. Równanie $y' = A(t)y$ nazywamy *jednorodnym*, zaś równanie $y' = A(t)y + B(t)$ (odpowiadającym) *niejednorodnym*.

Twierdzenie 2.3.3. Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową $C^0(I, \mathbb{R}^m)$, a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej wartwą.

Niech V oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania $y' = A(t)y$.

Stwierdzenie 2.3.4. Następujące warunki są równoważne dla zbioru $\{y_1, \dots, y_n\} \subset V$:

1. Zbiór jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego $t \in I$ zbiór $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^m .
3. Istnieje $t \in I$, że zbiór $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^m .

2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych

2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi

2.6. Zagadnienia brzegowe

3. Przykłady

3.1. Rozwiązanie równań metodą szeregów potęgowych

3.2. Równania na wariację

3.3. Potoki – policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach

3.4. Wzory Liouville'a i Abela

3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne

3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa – zastosowanie do badania stabilności