KJG

Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Wersja z 22 stycznia 2019

Spis treści

1. Twierdzenia

1.1. Ciągła zależność od parametrów

Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y,t,\lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą oraz $c > 0$. Niech $y(t,\lambda_0)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = f(y,t,\lambda_0)$ z warunkiem początkowym (y_0,t_0) określonym na *zwartym* przedziale I zawierającym t_0. Wybierzmy $b > 0$ i rozważmy zbiór

$$R_b = \big\{(y,t) : t \in I \text{ oraz } \big\|y - y(t,\lambda_0)\big\| < b\big\}.$$

Załóżmy dalej, że

a) istnieje $L \geq 0$, że dla wszystkich $(y_1,t),(y_2,t) \in R_b$ zachodzi

$$\big\|f(y_1,t,\lambda_0) - f(y_2,t,\lambda_0)\big\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

b) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla $(y,t) \in R_b$ oraz każdej λ jest

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \implies \big\|f(y,t,\lambda) - f(y,t,\lambda_0)\big\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała $c^* > 0$ taka, że

1. jeśli $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$, to $y(t,\lambda)$ jest określone na I,
2. jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to $y(t,\lambda_n) \rightrightarrows y(t,\lambda_0)$ na I.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy lemat pomocniczy.

Lemat 1.1.2. Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że na $J \subset I$ mamy

1. dla wszystkich $t \in J$ jest $\big(y(t,\lambda),t\big) \in R_b$,
2. dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $(y,t) \in R_b$ zachodzi $\big\|f(y,t,\lambda) - f(y,t,\lambda_0)\big\| \leq \varepsilon$.

Wtedy dla każdego $t \in J$ prawdziwa jest nierówność:

$$\big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t - t_0|.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| &= \left\|\int_{t_0}^t f\big(y(u,\lambda),u,\lambda\big)du - \int_{t_0}^t f\big(y(u,\lambda_0),u,\lambda_0\big)du\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t \Big\|f\big(y(u,\lambda),u,\lambda\big) - f\big(y(u,\lambda_0),u,\lambda_0\big)\Big\|du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t \Big\|f\big(y(u,\lambda),u,\lambda\big) - f\big(y(u,\lambda),u,\lambda_0\big)\Big\|du\right| \\
&\qquad + \left|\int_{t_0}^t \Big\|f\big(y(u,\lambda),u,\lambda_0\big) - f\big(y(u,\lambda_0),u,\lambda_0\big)\Big\|du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^t \varepsilon\, du\right| + \left|\int_{t_0}^t L \cdot \big\|y(u,\lambda) - y(u,\lambda_0)\big\|du\right| \\
&\leq \underbrace{\varepsilon \cdot |t - t_0|}_{K} + \left|\int_{t_0}^t L \cdot \big\|y(u,\lambda) - y(u,\lambda_0)\big\|du\right|.
\end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą K wynika teza. $\square$

Wybierzmy $\varepsilon > 0$ taki, że $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$ oraz oznaczmy $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$. Weźmy $\lambda > 0$ taką, że $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_\varepsilon$. Niech J będzie maksymalnym podprzedziałem I, na którym dla każdego $t \in J$ zachodzi:

$$\big(y(t, \lambda), t\big) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2, dla wszystkich $t \in J$ jest:

$$\big\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\big\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców J, nazwijmy go α, należy do wnętrza I. Wówczas z twierdzenia **??**, $y(t, \lambda)$ przedłuża się na przedział $\widetilde{J}$ zawierający α we wnętrzu. Co więcej, ponieważ $\big\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\big\|$ jest funkcją ciągłą względem t, to pozostaje mniejsza od b na pewnym otoczeniu α. Zatem J nie był przedziałem maksymalnym, chyba że $J = I$. Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to z założenia b) istnieje ciąg $\varepsilon_n \to 0$ taki, że

$$\big\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\big\| < \varepsilon_n.$$

dla każdego n oraz wszystkich $(y, t) \in R_b$. Z lematu 1.1.2, dla $t \in I$ jest

$$\big\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\big\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

co dowodzi drugiej części tezy. ■

1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów

mwrep

[utf8]inputenc

[T1]fontenc

[T1, nomathsymbols]polski

lmodern

amsmath, amsthm, amssymb, amsfonts

mathtools Re ReImImDmDmspsp

thmtools [spaceabove = acebelow = headfont = **, notefont = , notebraces = (), bodyfont =** ,]normal

[spaceabove = acebelow = headfont = , NOTEFONT = , NOTEBRACES = (), BODYFONT = ,]nested

[style = normal, name = Twierdzenie, parent = section]theorem [style = normal, name = Stwierdzenie, sibling = theorem]statement [style = normal, name = Lemat, sibling = theorem]lemma [style = normal, name = Definicja, sibling = theorem]definition [style = normal, name = Wniosek, sibling = theorem]conclusion [style = normal, name = Uwaga, sibling = theorem]remark [style = normal, name = Przykład, sibling = theorem]example [style = normal, name = Dowód, numbered = no, qed = ■]proof

[style = nested, name = Lemat, sibling = theorem]nestedlemma [style = nested, name = Dowód, numbered = no, qed = □]nestedproof

parskip

enumitem

Twierdzenie 1.2.1 (O różniczkowalnej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y,t,\lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą względem y, t, λ oraz klasy C^1 względem y, λ. Ustalmy warunek początkowy (y_0, t_0) i oznaczmy przez $y(t,\lambda)$ rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial t} = f(y,t,\lambda)$$

z warunkiem początkowym $y(t_0,\lambda) = y_0$, określone na ustalonym i *zwartym* przedziale I. Wówczas na przedziale I istnieje ciągła funkcja

$$z(t,\lambda_0) = \frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t,\lambda_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial t \partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial \lambda \partial t}\Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Niech $y_\lambda(t) \in R_b$. Niech $w_\lambda(t) \coloneqq \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0}$ dla $\lambda \neq \lambda_0$. Wtedy:

$$\begin{aligned}\partial_t\, w_\lambda(t) &= \frac{\partial_t\, y_\lambda(t) - \partial_t\, y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{f_\lambda(y_\lambda(t),t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t),t)}{\lambda - \lambda_0} = \\ &= \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0) w_\lambda(t), t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t),t)}{\lambda - \lambda_0}.\end{aligned}$$

Rozważmy dalej funkcję

$$F_\lambda(w,t) \coloneqq \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t),t)}{\lambda - \lambda_0}.$$

(Zwróćmy uwagę na to, że w definicji F w jest symbolem argumentu, a nie funkcji.)

Pokażemy, że istnieje taka $c* > 0$, że o ile $|\lambda - \lambda_0| \leq c*$, to dziedzina F dla każdego λ spełniającego ten warunek jest zbiorem zwartym, a także, że $w_\lambda(t)$ zawiera się w tej dziedzinie dla każdego $t \in I$.

Z lematu udowodnionego w Twierdzeniu o ciągłej zależności od parametru wiemy, że istnieją takie stałe $c_1, K_1 > 0$ takie, że o ile $|\lambda - \lambda_0| < c_1$, to $\|w_\lambda(t)\| \leq K_1$. Z kolei, jeśli $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{b}{2K_1}$, to dla $w : \|w\| \leq 2K_1$ zachodzi:

$$\|y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w - y_{\lambda_0}(t)\| = \|(\lambda - \lambda_0)w\| = |\lambda - \lambda_0|\|w\| \leq \frac{b}{2K_1} 2K_1 = b,$$

co oznacza, że $(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) \in R_b$ dla każdego $t \in I$. Oznaczmy $c^* = min(c_1, \frac{b}{2K_1})$. Dzięki temu F jest prawidłowo zdefiniowana na zbiorze

$$\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times ((\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*) \setminus \{\lambda_0\}).$$

Dodefiniujemy F dla $\lambda = \lambda_0$ tak, by była ona ciągła względem λ w tym punkcie. Zachodzi:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda(w,t) &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t),t)}{\lambda - \lambda_0} = \\ &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_\lambda(y_{\lambda_0}(t),t)}{w(\lambda - \lambda_0)} \cdot w + \\ &+ \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t),t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \\ &= \partial_y\, f_{\lambda_0}(y,t)\Big|_{y=y_{\lambda_0}(t)} \cdot w + \partial_\lambda\, f_\lambda(y_{\lambda_0}(t),t)\Big|_{\lambda=\lambda_0},\end{aligned}$$

przy czym powyższe pochodne istnieją, gdyż z założenia f jest C^1 względem y i λ. Niech $F_{\lambda_0}(w,t) \coloneqq \lim_{\lambda \to \lambda_0} F_\lambda(w,t)$. Wtedy F jest zdefiniowana na zbiorze $\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times (\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*)$, który jest zwarty dla każdego ustalonego λ.

Lemat 1.2.2. Funkcja F zdefiniowana powyżej spełnia założenia Twierdzenia o ciągłej zależności od parametru przy równaniu różniczkowym $\partial_t w = F_\lambda(w,t)$. (Jest on przyjmowany bez dowodu)

Z powyższego oraz na mocy Twierdzenia Picarda dla każdego $\lambda \in (\lambda_0 - c*, \lambda_0 + c*)$ istnieje rozwiązanie powyższego równania różniczkowego a także istnieje jednoznaczne rozwiązanie dla $\lambda = \lambda_0$ określone w pewnym $J \subset I$ (BSO niech J będzie maksymalny możliwy). Co więcej, z Twierdzenia o ciągłej zależności mamy, ze dla każdego ciągu $\lambda_n \to \lambda_0$ zachodzi $w_{\lambda_n}(t) \rightrightarrows w_{\lambda_0}(t)$. Stąd:

$$w_{\lambda_0}(t) = \lim_{n\to\infty} w_{\lambda_n}(t) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} w_\lambda(t) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \partial_\lambda\, y_\lambda(t)\Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Zatem w_{λ_0} jest szukaną funkcją z z tezy twierdzenia.

Równość w twierdzeniu zachodzi, gdyz:

$$\begin{aligned}
\partial_t\, w_{\lambda_0}(t) &= \partial_t \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \partial_t \lim_{n\to\infty} \frac{y_{\lambda_n}(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda_n - \lambda_0} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\partial_t\, y_{\lambda_n}(t) - \partial_t\, y_{\lambda_0}(t)}{\lambda_n - \lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\partial_t\, y_{\lambda_n}(t) - \partial_t\, y_{\lambda_0}(t)}{\lambda_n - \lambda_0} = \\
&= \partial_\lambda\, \partial_t\, y_\lambda(t)\Big|_{\lambda=\lambda_0}.
\end{aligned}$$

Czyli istotnie $\partial_t\, w_{\lambda_0}(t) = \partial_\lambda\, \partial_t\, y_\lambda(t)\Big|_{\lambda=\lambda_0}$.