

Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Kacper Grabczak

Kacper Kurowski

Spis treści

1. Twierdzenia	3
1.1. Ciągła zależność od parametrów	3
1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów	4
1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego	6
1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych	9
1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\ e^{At}\ $	10
1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności	11
2. Zagadnienia	13
2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysyczone (otwarte)	13
2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)	14
2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)	16
2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych	17
2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi	18
2.6. Zagadnienia brzegowe	18
3. Przykłady	19
3.1. Rozwiązywanie równań metodą szeregów potęgowych	19
3.2. Równania na wariację	19
3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach	19
3.4. Wzory Liouville'a i Abela	19
3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne	19
3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności	19

1. Twierdzenia

1.1. Ciągła zależność od parametrów

Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą oraz $c > 0$. Niech $y(t, \lambda_0)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = f(y, t, \lambda_0)$ z warunkiem początkowym (y_0, t_0) określonym na *zwartym* przedziale I zawierającym t_0 . Wybierzmy $b > 0$ i rozważmy zbiór

$$R_b = \{(y, t) : t \in I \text{ oraz } \|y - y(t, \lambda_0)\| < b\}.$$

Założmy dalej, że

- a) istnieje $L \geq 0$, że dla wszystkich $(y_1, t), (y_2, t) \in R_b$ zachodzi

$$\|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

- b) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla $(y, t) \in R_b$ oraz każdej λ jest

$$\|\lambda - \lambda_0\| < \delta \implies \|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała $c^* > 0$ taka, że

1. jeśli $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$, to $y(t, \lambda)$ jest określone na I ,
2. jeśli $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, to $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$ na I .

Dowód. W dowodzie wykorzystamy lemat pomocniczy.

LEMAT 1.1.2. Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że na $J \subset I$ mamy

1. dla wszystkich $t \in J$ jest $(y(t, \lambda), t) \in R_b$,
2. dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $(y, t) \in R_b$ zachodzi $\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon$.

Wtedy dla każdego $t \in J$ prawdziwa jest nierówność

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t - t_0|.$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda), u, \lambda) du - \int_{t_0}^t f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0) du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda) - f(y(u, \lambda), u, \lambda_0)\| du \right| + \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \|f(y(u, \lambda), u, \lambda_0) - f(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \varepsilon du \right| + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right| \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \cdot |t - t_0|}_K + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\| du \right|. \end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą K wynika teza. \square

Wybermy $\varepsilon > 0$ taki, że $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$ oraz oznaczmy $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$. Weźmy $\lambda > 0$ taką, że $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$. Niech J będzie maksymalnym podprzedziałem I , na którym dla każdego $t \in J$ zachodzi:

$$(y(t, \lambda), t) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2, dla wszystkich $t \in J$ jest

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców J , nazwijmy go α , należy do wnętrza I . Wówczas z twierdzenia o przedłużaniu przez koniec, $y(t, \lambda)$ przedłuża się na przedział zawierający α we wnętrzu. Co więcej, ponieważ $\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\|$ jest funkcją ciągłą względem t , to pozostaje mniejsza od b na pewnym otoczeniu α . Zatem J nie był przedziałem maksymalnym, chyba że $J = I$. Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Jeśli $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, to z założenia b) istnieje ciąg $\varepsilon_n \rightarrow 0$ taki, że

$$\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\| < \varepsilon_n$$

dla każdego n oraz wszystkich $(y, t) \in R_b$. Z lematu 1.1.2, dla $t \in I$ jest

$$\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

co dowodzi drugiej części tezy. ■

1.2. Różniczkowalna zależność od parametrów

Twierdzenie 1.2.1 (O różniczkowalnej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \quad f: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą względem y, t, λ oraz klasy C^1 względem y, λ . Ustalmy warunek początkowy (y_0, t_0) i oznaczmy przez $y(t, \lambda)$ rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial t} = f(y, t, \lambda)$$

z warunkiem początkowym $y(t_0, \lambda) = y_0$, określone na ustalonym i *zwartym* przedziale I . Wówczas na przedziale I istnieje ciągła funkcja

$$z(t, \lambda_0) = \left. \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t, \lambda_0)}{\partial t} = \left. \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial t \partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \left. \frac{\partial^2 y(t, \lambda)}{\partial \lambda \partial t} \right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Dowód. Niech $y_\lambda(t) \in R_b$. Oznaczmy

$$w_\lambda(t) := \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0}$$

dla $\lambda \neq \lambda_0$. Wtedy

$$\begin{aligned} \partial_t w_\lambda(t) &= \frac{\partial_t y_\lambda(t) - \partial_t y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{f_\lambda(y_\lambda(t), t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0} = \\ &= \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w_\lambda(t), t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0}. \end{aligned}$$

Rozważmy dalej funkcję

$$F_\lambda(w, t) := \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Zwróćmy uwagę, że w w definicji F jest symbolem argumentu, a nie funkcji.

Pokażemy, że istnieje taka stała $c^* > 0$, że o ile $|\lambda - \lambda_0| \leq c^*$, to dziedzina funkcji F dla każdego λ spełniającego ten warunek jest zbiorem zwartym, a ponadto $w_\lambda(t)$ zawiera się w tej dziedzinie dla każdego $t \in I$.

LEMAT 1.2.2. Przy założeniach takich jak powyżej, istnieją stałe $c_1, k_1 > 0$ takie, że

$$|\lambda - \lambda_0| \leq c_1 \implies \|w_\lambda(t)\| \leq k_1.$$

DOWÓD. Weźmy wprawdzie pewne $c_1: 0 < c_1 < c$. Możemy zawęzić dziedzinę f do $\lambda \in [\lambda_0 - c_1, \lambda_0 + c_1]$. Wtedy f jest funkcją klasy C^1 względem λ zdefiniowaną na zbiorze zwartym (względem λ), a więc jest ona lipszycowska względem λ ze stałą L_λ . Weźmy $\lambda \neq \lambda_0$ z tego zbioru. Możemy zatem wziąć w 1.1.2 $\varepsilon = L_\lambda |\lambda - \lambda_0|$. Zgodnie z tym lematem, zachodzi wtedy:

$$\|w_\lambda(t)\| = \frac{\|y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)\|}{|\lambda - \lambda_0|} \leq L_\lambda \cdot e^{L|t-t_0|} \cdot |t - t_0| =: k_1$$

Dla tak zdefiniowanego k_1 teza lematu jest spełniona. (Uwaga: dla każdego λ bierzemy inny ε , ale wciąż uzyskujemy to samo ograniczenie dla $\|w_\lambda(t)\|$). \square

Weźmy takie c_1 i k_1 . Z kolei jeśli $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{b}{2k_1}$, to dla w takich, że $\|w\| \leq 2k_1$ zachodzi

$$\|y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w - y_{\lambda_0}(t)\| = \|(\lambda - \lambda_0)w\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|w\| \leq \frac{b}{2k_1} \cdot 2k_1 = b.$$

Oznacza to, że dla każdego $t \in J$ (przy takich λ) jest

$$(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) \in R_b.$$

Niech $c^* = \min(c_1, \frac{b}{2K_1})$. Wtedy F jest zdefiniowana na zbiorze

$$\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times ((\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*) \setminus \{\lambda_0\}).$$

Zdefiniujmy F dla $\lambda = \lambda_0$ tak, by była ciągła względem λ w tym punkcie. Wtedy

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F_\lambda(w, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t), t)}{\lambda - \lambda_0} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t) + (\lambda - \lambda_0)w, t) - f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)}{w(\lambda - \lambda_0)} \cdot w + \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t) - f_{\lambda_0}(y_{\lambda_0}(t))}{\lambda - \lambda_0} \\ &= D_y f_{\lambda_0}(y, t)|_{y=y_{\lambda_0}(t)} \cdot w + \partial_\lambda f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)|_{\lambda=\lambda_0}, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

przy czym powyższe pochodne istnieją, gdyż z założenia funkcja f jest klasy C^1 względem zmiennych y oraz λ . Niech

$$F_{\lambda_0}(w, t) := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F_\lambda(w, t).$$

Wtedy F jest zdefiniowana na zbiorze

$$\overline{B}(0, 2K_1) \times I \times (\lambda_0 - c^*, \lambda_0 + c^*),$$

który jest zwarty dla każdego ustalonego λ .

LEMAT 1.2.3. Funkcja F zdefiniowana powyżej spełnia założenia twierdzenia o ciągłej zależności od parametru przy równaniu różniczkowym $\partial_t w = F_\lambda(w, t)$.

DOWÓD. Nadobowiązkowy dowód Czytelnik wykona samodzielnie. \square

Zauważmy, że na mocy powyższego lematu oraz poprzednich rozważań funkcja $F_{\lambda_0}(w, t)$ jest ciągłą funkcją określoną na zbiorze zwartym, więc z Twierdzenia Peano istnieje rozwiązanie w_{λ_0} równania $\partial_t w = F_{\lambda_0}(w, t)$ określone w pewnym przedziale $J \subset I$ (dla ustalenia uwagi, niech J będzie maksymalnym możliwym).

Rozwiązanie to jest jednoznaczne, gdyż dla każdego ciągu $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ zachodzi $w_{\lambda_n}(t) \Rightarrow w_{\lambda_0}(t)$. Gdybyśmy mieli dwa ciągi $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2} \rightarrow \lambda_0$, dla których $w_{\lambda_{n_1}}(t) \rightarrow w_{\lambda_0,1}(t)$ oraz $w_{\lambda_{n_2}}(t) \rightarrow w_{\lambda_0,2}(t)$, to ciąg λ_n z wyrazami na przemian z λ_{n_1} i λ_{n_2} również byłby zbieżny do λ_0 , więc w_{λ_n} także byłby zbieżny do jakiegoś rozwiązania. To zaś z jednoznaczności granicy oznacza, że $w_{\lambda_{n_1}}(t) = w_{\lambda_{n_2}}(t)$ dla każdego t . Stąd:

$$w_{\lambda_0}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\lambda_n}(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} w_\lambda(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{y_\lambda(t) - y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \partial_\lambda y_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Ponadto $J = I$. Przypuśćmy przeciwnie, że tak nie jest i bez straty ogólności założmy, że α jest prawym krańcem J , ale nie I . Skoro F_{λ_0} spełnia założenia 1.1.1, to jest ciągła i lipszycowska względem w_{λ_0} , a więc też jest lokalnie lipszycowska. Skoro $\|w_\lambda(t)\| \leq k_1$, to po przejściu z nierównością do granicy także $\|w_{\lambda_0}(t)\| \leq k_1$. Wreszcie w_{λ_0} jest funkcją ciągłą, więc istnieje pewne otoczenie U_α punktu α , dla którego $t \in U_\alpha \implies \|w_\lambda(t)\| \leq 2k_1$, więc istnieje zbiór zwarty K oraz $\delta > 0$ takie, że

$$\forall t \in Dm w_{\lambda_0} \cap [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \quad (w_{\lambda_0}(t), t) \in K.$$

Zatem z 2.1.5 w_{λ_0} rozszerza się na przedział zawierający α we wnętrzu, co przeczyłoby maksymalności J .

Na mocy powyższych rozważań w_{λ_0} jest szukaną funkcją z z tezy twierdzenia. Równość w twierdzeniu zachodzi, gdyż

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \partial_t y_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda_0} &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\partial_t y_\lambda(t) - \partial_t y_{\lambda_0}(t)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} F_\lambda(w_\lambda(t), t) = \\ &\stackrel{(*)}{=} F_{\lambda_0}(w_{\lambda_0}(t), t) = \partial_t w_{\lambda_0}(t) = \partial_t \partial_\lambda y_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda_0} \end{aligned}$$

gdzie równość $(*)$ zachodzi gdyż $F_\lambda(w, t)$ jest ciągła względem w i λ , ponieważ spełnia założenia 1.1.1, a $w_\lambda(t)$ ciągła względem λ w punkcie λ_0 .

Wreszcie, poprzez podstawienie $w = w_{\lambda_0}(t)$ w (1.2.1) otrzymujemy tzw. równanie na wariację:

$$\partial_t w_{\lambda_0}(t) = D_y f_{\lambda_0}(y, t)|_{y=y_{\lambda_0}(t)} \cdot w_{\lambda_0}(t) + \partial_\lambda f_\lambda(y_{\lambda_0}(t), t)|_{\lambda=\lambda_0},$$

z warunkiem początkowym $w_{\lambda_0}(t_0) = 0$. \blacksquare

1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego

Rozważmy równanie

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad (1.3.1)$$

gdzie a_2, a_1, a_0 są analityczne w pewnym punkcie t_0 .

Definicja 1.3.1. Powiemy, że t_0 jest *punktem regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2(t_0) \neq 0$. W przeciwnym wypadku t_0 nazwiemy *punktem osobliwym*.

W przypadku regularnym równanie (1.3.1) sprowadza się do

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (1.3.2)$$

gdzie p i q są analityczne w punkcie t_0 , czyli

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t-t_0)^n, \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-t_0)^n.$$

Twierdzenie 1.3.2. Każde rozwiązanie równania (1.3.2) jest analityczne w kole, w którym oba szeregi $p(t)$ i $q(t)$ zbiegają. Co więcej, analityczna funkcja

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-t_0)^n$$

jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n c_{k+1}(k+1)p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right). \quad (1.3.3)$$

Dowód. Dla ustalenia uwagi niech $t_0 = 0$ oraz $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Wtedy

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n, \quad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}t^n.$$

Z iloczynu Cauchy'ego¹ dostajemy

$$\begin{aligned} p(t)y'(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k}, \\ q(t)y(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k}. \end{aligned}$$

Rozpisując lewą stronę równania (1.3.2), otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left((n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right) = 0.$$

Z analityczności, dla każdego $n \geq 0$ jest

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^n (k+1)c_{k+1}p_{n-k} + \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} = 0,$$

co dowodzi wzoru (1.3.3).

Wzór rekurencyjny (1.3.3) zadaje współczynniki c_n dla $n \geq 2$, jeśli wybrane zostały c_0, c_1 . Zauważmy, że $c_0 = y(t_0)$, $c_1 = y'(t_0)$. Zatem dobierając c_0 oraz c_1 możemy otrzymać dowolny warunek początkowy dla y , co pozwala uzyskać każde rozwiązanie wysyczone. Pozostaje pokazać, że przy dowolnym wyborze c_0, c_1 wzór (1.3.3) prowadzi do szeregu Taylora funkcji analitycznej w kole $D(t_0, R)$.

Wybermy $0 < r < R$. Wtedy funkcje p, q są zbieżne bezwzględnie w $\overline{D}(t_0, r)$, więc istnieją stałe L_p oraz L_q takie, że dla dowolnego $n \geq 0$ jest

$$|p_n|r^n \leq L_p, \quad |q_n|r^n \leq L_q.$$

¹ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

Niech $0 < \rho < r$ oraz $\gamma_n = |c_n|\rho^n$, $\Gamma_n = \max\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
|\gamma_{n+2}| &\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) \cdot |c_{k+1}| \cdot |p_{n-k}| + \sum_{k=0}^n |c_k| \cdot |q_{n-k}| \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^n (n+1) \cdot \frac{\gamma_{k+1}}{\rho^{k+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\gamma_k}{\rho^k} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_{n+1}}{\rho^{k-n} \rho^{n+1}} \cdot \frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma_n}{\rho^{k-n} \rho^n} \cdot \frac{L_q}{r^{n-k}} \right) \\
&\leq \frac{\rho L_p}{n+2} \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+1)(n+2)} \Gamma_n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right) \Gamma_{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} \\
&\leq \underbrace{\left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)} \right)}_{\alpha_n} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r}} \right) \Gamma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Wyrażenie α_n zbiega do zera, gdy $n \rightarrow \infty$. Istnieje n_0 , że $\alpha_n < 1$ dla $n \geq n_0$. Zatem dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi $\gamma_{n+2} \leq \Gamma_{n+1}$, co jest równoważne temu, że $\Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}$, czyli ciąg Γ_n jest stały od pewnego miejsca i ograniczony przez pewne $\bar{\Gamma}$. Stąd, jeśli $|t| < \rho$, to z kryterium Cauchy'ego jest

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |t|^n} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot \rho^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{|t|^n}{\rho^n}} \leq \sqrt[n]{\bar{\Gamma}} \cdot \left| \frac{t}{\rho} \right| < 1,$$

o ile n jest dostatecznie duże. Wobec tego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ jest zbieżny w kole o promieniu ρ . Ponieważ ρ może być dowolnie bliskie R , to suma kół wypełnia koło otwarte o promieniu R , co kończy dowód. ■

1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

Definicja 1.4.1. *Widmem* macierzy A nazywamy zbiór jej wartości własnych wraz z krotnościami i oznaczamy $\text{sp}(A)$.

Twierdzenie 1.4.2 (Hamilton-Cayley). Dla każdej macierzy A zachodzi $\chi_A(A) = 0$, gdzie χ_A jest wielomianem charakterystycznym macierzy A .

Twierdzenie 1.4.3 (Spektralne dla wielomianów). Niech A będzie macierzą o wartościach własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ z krotnościami q_1, \dots, q_n . Wtedy istnieją macierze $M_{k,l}$ dla $1 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq q_k - 1$, zwane *spektralnymi* takie, że dla każdego wielomianu f stopnia m zachodzi:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k).$$

Dowód. W celu udowodnienia twierdzenia będzie potrzebny lemat pomocniczy.

LEMAT 1.4.4. Macierze $M_{k,l}$ są jednoznacznie wyznaczone przez tęzę twierdzenia spektralnego dla wielomianów postaci $f(z) = z^r$, gdzie $r = 0, \dots, m-1$.

DOWÓD. Otrzymujemy układ równań z niewiadomymi $M_{k,l}$, czyli

$$A^r = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \cdot \lambda_k^{r-l}.$$

Teza lematu oznacza, że układ ten jest oznaczony. Pokażemy liniową niezależność wierszy. Wybierzmy współczynniki c_r dla $r = 0, \dots, m-1$, tak aby kombinacja liniowa wierszy z tymi współczynnikami wynosiła 0, czyli dla każdego $k = 1, \dots, n$ oraz $l = 0, \dots, q_k - 1$ jest

$$\sum_{r=0}^{m-1} c_r \cdot r(r-1) \cdots (r-l+1) \lambda_k^{r-l} = 0.$$

Rozważmy teraz wielomian

$$w(z) = \sum_{r=0}^{m-1} c_r z^r.$$

Otrzymaliśmy, że $w^{(l)}(\lambda_k) = 0$, czyli λ_k jest zerem z krotnością co najmniej q_k , a zatem suma krotności zer wielomianu w jest równa co najmniej $\sum_{k=1}^n q_k = m$, co jest sprzecznością, bo stopień wielomianu był co najwyżej $m-1$. \square

Twierdzenie zostanie udowodnione indukcyjnie ze względu na stopień f .

Przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla wielomianów stopnia mniejszego od $m+r$, gdzie $r \geq 0$. Z lematu 1.4.4 teza zachodzi dla $r = 0$. Zwróćmy uwagę, że obie strony twierdzenia są liniowe względem f . Wystarczy więc pokazać je dla układu rozpinającego przestrzeń wielomianów stopnia mniejszego niż $m+r$. W celu pokazania, że twierdzenie zachodzi również dla wielomianów stopnia $m+r$, wystarczy pokazać dla $f_r(z) = z^r \chi_A(z)$, bo każdy wielomian

$$f(z) = a_{m+r} z^{m+r} + \dots + a_1 z + a_0$$

można zapisać jako

$$f(z) = a_{m+r} f_r(z) + P(z),$$

gdzie P jest wielomianem stopnia mniejszego niż $m+r$. Zauważmy, że

$$L = f_r(A) = A^r \cdot \chi_A(A) \stackrel{1.4.2}{=} 0, \quad P = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_k),$$

a ponadto $f_r(z) = (z - \lambda_k)^{q_k} \cdot Q(z)$. Pochodne rzędu niższego od q_k składają się z sum członów, w których $(z - \lambda_k)$ występuje w dowolnej potęgze, więc zerują się przy podstawieniu $z = \lambda_k$. \blacksquare

Twierdzenie 1.4.5 (Spektralne dla funkcji analitycznych). Niech

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R.$$

Założmy, że $\text{sp}(A) \subset D(0, R)$. Wówczas szereg $f(A)$ zbiega i zachodzi teza twierdzenia spektralnego dla wielomianów:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

Dowód. Oznaczmy

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

Korzystając z twierdzenia spektralnego dla wielomianów, dostajemy

$$\begin{aligned} f(A) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f_N^{(l)}(\lambda_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{(l)}(\lambda_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot f^{(l)}(\lambda_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\|e^{At}\|$

Definicja 1.5.1. Wykładnikiem Lapunowa macierzy A nazywamy liczbę

$$\bar{\lambda} = \max\{\text{Re } \lambda_k : k = 1, \dots, n\}.$$

Definicja 1.5.2. Potęgą Lapunowa macierzy A nazywamy liczbę

$$\bar{l} = \max\{l \geq 0 : \exists k \in \{1, \dots, n\} \quad \text{Re } \lambda_k = \bar{\lambda} \wedge M_{k,l} \neq 0\}.$$

Lemat 1.5.3 (Wzór Leibniza).

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f \cdot D^{n-k} g. \quad (1.5.1)$$

Twierdzenie 1.5.4. Dla każdej macierzy A zachodzą nierówności:

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} < \infty.$$

Dowód. Nierówność środkowa jest oczywista. Zaczniemy wobec tego od prawej.

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} M_{k,l} \cdot t^l e^{\lambda_k t} \right\|}{t^{\bar{l}} \exp(\bar{\lambda}t)} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^l e^{(\text{Re } \lambda_k)t}}{t^{\bar{l}} e^{\bar{\lambda}t}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{q_k-1} \|M_{k,l}\| \cdot \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{l-\bar{l}} e^{(\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda})t} \end{aligned}$$

Zauważmy, że $\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda} \leq 0$, a jeśli $\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda} = 0$ oraz $M_{k,l} \neq 0$, to $l \leq \bar{l}$. Wobec tego, dla każdej kombinacji k i l jest

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{l-\bar{l}} \exp((\text{Re } \lambda_k - \bar{\lambda})t) \leq 1.$$

Bez utraty ogólności możemy przyjąć $\bar{\lambda} = \lambda_1$, $M_{1,\bar{l}} \neq 0$ oraz

$$w(z) = \prod_{k=2}^n (z - \lambda_k)^{q_k} = \frac{\chi_A(z)}{(z - \lambda_1)^{q_1}}.$$

Niech $f(z) = w(z) \cdot e^{zt}$. Wtedy dla $k > 0$ oraz $l < q_k$ jest $f^{(l)}(\lambda_k) = 0$, bo pochodna jest sumą członów ze wzoru (1.5.1), gdzie $(z - \lambda_k)$ występuje w potęgze dodatniej. Niechaj teraz $k = 1$ oraz $\varphi(z) = e^{zt}$, $\psi(z) = w(z)$. Wtedy

$$(\varphi \cdot \psi)^{(l)}(\lambda_1) = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} t^i e^{\lambda_1 t} w^{(l-i)}(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} \cdot p_l(t),$$

gdzie p_l jest wielomianem stopnia co najwyżej l . Wtedy $p_{\bar{l}}$ ma postać

$$t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t) e^{\lambda_1 t},$$

gdzie stopień $\tilde{p}_{\bar{l}}$ jest mniejszy od \bar{l} . Z twierdzenia spektralnego jest

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} e^{\lambda_1 t} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} e^{\lambda_1 t} (t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|e^{\lambda_1 t}\| \cdot \left\| \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} M_{1,l} p_l(t) + M_{1,\bar{l}} (t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)) \right\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot |t^{\bar{l}} w(\lambda_1) + \tilde{p}_{\bar{l}}(t)| - \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,l}\| \cdot \|p_l(t)\|}{t^{\bar{l}}} \\ &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \left| w(\lambda_1) + \frac{\tilde{p}_{\bar{l}}(t)}{t^{\bar{l}}} \right| - \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\bar{l}-1} \|M_{1,l}\| \cdot \left| \frac{p_l(t)}{t^{\bar{l}}} \right| \\ &= \|M_{1,\bar{l}}\| \cdot \underbrace{|w(\lambda_1)|}_{>0}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \geq \frac{1}{\|w(A)\|} \cdot \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w(A)e^{At}\|}{t^{\bar{l}} e^{\lambda_1 t}} \geq \frac{\|M_{1,\bar{l}}\| \cdot |w(\lambda_1)|}{\|w(A)\|} > 0. \quad \blacksquare$$

1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności

Definicja 1.6.1. Niech $y' = f(y)$, $f \in C^1(U)$. Funkcję $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *całką pierwszą*, jeśli dla każdego rozwiązania $y(t)$, złożenie $G(y(t))$ jest stałe.

Lemat 1.6.2. G jest całką pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle \nabla G, f \rangle \equiv 0$.

Definicja 1.6.3. *Funkcję Lapunowa* nazywamy funkcję L taką, że w warunku całki powyżej zastępujemy $L(y(t)) = \text{const}$ przez $L(y(t))$ nierosnące. W terminach potoków ten warunek wyrażony jest przez $t_1 > t_2 \implies L(\varphi^{t_1}(y_0)) \leq L(\varphi^{t_2}(y_0))$.

Twierdzenie 1.6.4. Niech $y' = f(y)$, gdzie $f \in C^1(U)$, zaś L jest funkcją Lapunowa na U , przy czym L ma ściśle minimum globalne w $y_0 \in U$. Wtedy y_0 jest stabilnym (w sensie Lapunowa) położeniem równowagi.

Dowód. Pokażemy, że dla każdego $t \geq 0$ zachodzi $\varphi^t(y_0) = y_0$. Jeśliby tak nie było, to dla pewnego $t > 0$ mielibyśmy $\varphi(t)(y_0) \neq y_0$. Wtedy jednak $L(\varphi^t(y_0)) > L(y_0) = \varphi^{t_0}(y_0)$, co przeczyłoby, że L jest funkcją Lapunowa. Zatem y_0 jest położeniem równowagi.

Pokażemy, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 \|y - y_0\| \leq \delta \wedge \varphi^t(y_0) \text{ istnieje} \implies \|\varphi^t(y_0) - y_0\| \leq \varepsilon.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Bez straty ogólności założmy, że $\overline{B}(y_0, \varepsilon) \subset U$ (jeśliby tak nie było, wystarczy wziąć mniejszy ε) oraz $L(y_0) = 0$. Wtedy zbiór $\{y \in U : \|y - y_0\| = \varepsilon\}$ jest zbiorem zwartym. Wobec tego $\mu := \inf\{L(y) : \|y - y_0\| = \varepsilon\}$ jest przyjmowane w pewnym punkcie y_{\min} oraz $\mu = L(y_{\min}) > L(y_0) = 0$.

Z ciągłości L w 0 istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $\|y - y_0\| \leq \delta$, to $L(y) > \mu$. Gdyby dla pewnego $t > 0$ zachodziło $\|\varphi^t(y) - y_0\| \geq \varepsilon$, to z własności Darboux istnieje $\tau \in [0, t]$ takie, że $\|\varphi^\tau(y) - y_0\| = \varepsilon$. Wtedy jednak $L(\varphi^\tau(y)) \geq \mu > L(y) = L(\varphi^0(y))$, co jest sprzecznością z założeniem, że L to funkcja Lapunowa. Otrzymujemy zatem, że dla każdego $t > 0$ zachodzi $\|\varphi^t(y) - y_0\| < \varepsilon$.

Pozostaje pokazać, że $\varphi^t(y) = y(t)$ jest określone dla każdego $t \geq 0$. Jeśli $\alpha \geq 0$, to $y([0, \alpha]) \subset \overline{B}(y_0, \varepsilon)$. Skoro $\overline{B}(y_0, \varepsilon)$ jest zbiorem zwartym, to $y(t)$ przedłuża się na pewne prawostronne otoczenie α z lematu o przedłużaniu prze koniec. Tym samym prawym końcem dziedziny rozwiązania wysoconego $y(t)$ jest $+\infty$. ■

2. Zagadnienia

2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone (otwarte)

Twierdzenie 2.1.1 (Peano). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja f jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla $\alpha = \min(a, b/M)$ istnieje rozwiązanie $y(t)$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, spełniające warunek początkowy $y(t_0) = y_0$.

Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf). Niech $y' = f(y, t)$, $y(t_0) = y_0$, gdzie

$$f: H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Założmy, że funkcja f jest ciągła oraz Lipszycowska ze względu na y , to znaczy

$$\exists L \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \|f(y_1, t) - f(y_2, t)\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup \{ \|f(y, t)\| : (y, t) \in H \}.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie funkcja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y . Niech $(y_0, t_0) \in U$. Jeśli $y_1(t), y_2(t)$ są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na I_1, I_2 , spełniającymi ten sam warunek początkowy $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, to $y_1 \equiv y_2$ na $I_1 \cap I_2$.

Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie funkcja $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y . Niech $y(t)$ – rozwiązanie, T – koniec Dm y , granica $\lim_{t \rightarrow T} y(t) = y_T$ istnieje oraz $(y_T, T) \in U$. Wówczas y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y . Założmy, że rozwiązanie $y(t)$ jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest $T \in \mathbb{R}$. Założmy dalej, że istnieje zbiór zwarty $K \subset U$ oraz $\varepsilon > 0$, taki, że

$$\forall t \in \text{Dm } y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad (y(t), t) \in K.$$

Wtedy y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym). Niech $y' = f(y, t)$, gdzie funkcja $f: \mathbb{R}^{m+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie Lipszycowska względem y oraz $(y_0, t_0) \in U$. Wówczas istnieje rozwiązanie y_{\max} zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy $y_{\max}(t_0) = y_0$ i takie, że jeśli y jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek $y(t_0) = y_0$, to $\text{Dm } y \subset \text{Dm } y_{\max}$ oraz y jest obcięciem y_{\max} .

2.2. Metoda Frobeniusa (metoda)

Rozważmy regularne¹ równanie różniczkowe postaci

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \quad (2.2.1)$$

Definicja 2.2.1. Punkt t_0 nazwiemy regularnie osobliwym, jeśli funkcja $\frac{a_2(t)}{(t-t_0)^2}$ jest analityczna w t_0 i nie znika w t_0 , a funkcja $\frac{a_1(t)}{t-t_0}$ jest analityczna w t_0 .

W przypadku punktu regularnie osobliwego równanie (2.2.1) sprowadza się do

$$(t-t_0)^2 y'' + (t-t_0)p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2.2.2)$$

Rozwiązań będziemy szukali jedynie poza t_0 , $t > t_0$.

Metoda Frobeniusa. Niech $t_0 = 0$. Szukamy rozwiązań w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

gdzie $c_0 \neq 0$. Różniczkując stronami, dostajemy

$$ty'(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)t^n, \quad t^2 y''(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)t^n.$$

Niech $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ oraz $q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$. Wtedy

$$\begin{aligned} tp(t)y'(t) &= t^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\lambda)t^n \right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k(k+\lambda)p_{n-k} = \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(c_n(n+\lambda)p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(k+\lambda)p_{n-k} \right), \\ q(t)y(t) &= t^\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} = \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(c_n q_0 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k} \right). \end{aligned}$$

Wstawiamy wynik do równania (2.2.2), otrzymując

$$\begin{aligned} t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n ((n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n + (n+\lambda)p_0 c_n + q_0 c_n) + \\ + t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+\lambda)c_k p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k q_{n-k} \right)}_{-X_n(c_0, \dots, c_{n-1})} = 0. \end{aligned}$$

Dla każdej naturalnej liczby $n > 0$ zachodzi:

$$c_n((n+\lambda)(n+\lambda-1) + (n+\lambda)p_0 + q_0) = X_n(c_0, \dots, c_{n-1})$$

oraz $X_0 = 0$ dla $n = 0$. Zdefiniujemy wielomian indeksowy P wzorem

$$P(s) = s(s-1) + p_0 s + q_0.$$

Wtedy otrzymujemy

$$c_n P(n+\lambda) = X_n(c_0, \dots, c_{n-1}).$$

¹ $a_2(t) \neq 0$

Stąd wynika, że $c_0 P(\lambda) = 0$. Założyliśmy, że $c_0 \neq 0$, więc λ musi być pierwiastkiem wielomianu indeksowego. Dla $n = 0$ mamy $X_0 = 0$, więc dla $n > 0$ rekurencja przyjmuje postać

$$c_n = \frac{X_n(c_0, \dots, c_{n-1})}{P(n + \lambda)}.$$

To pozwala wyliczyć współczynniki c_n dla $n > 0$, chyba że $P(n + \lambda) = 0$ dla pewnego n , czyli $n + \lambda$ jest pierwiastkiem wielomianu indeksowego.

Przypadek podstawowy. Wielomian indeksowy ma dwa pierwiastki rzeczywiste λ_1, λ_2 nieróżniące się o liczbę całkowitą. Wówczas otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązania przyjmując $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$.

Przypadek zespolony. Bierzemy jeden z nich, dostając rozwiązanie zespolone

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = e^{t \operatorname{Re} \lambda} (\cos(t \operatorname{Im} \lambda) + i \sin(t \operatorname{Im} \lambda)) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

Rozwiązaniem są $\operatorname{Re} y(t)$ oraz $\operatorname{Im} y(t)$, i są liniowo niezależne.

Przypadek pierwiastków różniących się o liczbę całkowitą. Niech λ oraz $\lambda + r$ będą pierwiastkami, gdzie $r \in \mathbb{Z}$. Jeśli $r = 0$, to mamy pierwiastek podwójny. W przeciwnym przypadku otrzymujemy jedno rozwiązanie postaci

$$y_0(t) = t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \quad (2.2.3)$$

Drugiego rozwiązania szukamy w postaci

$$y(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n + \gamma y_0(t) \ln t,$$

gdzie γ to stała, którą wyznaczymy. Wstawiając do równania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^n (P(n + \lambda) \cdot d_n - X_n(d_0, \dots, d_{n-1})) + \\ + \gamma t^2 (y_0(t) \ln t)'' + \gamma t p(t) (y_0(t) \ln t)' + \gamma q(t) y_0(t) \ln t = 0. \end{aligned}$$

Zajmijmy się składnikami zawierającymi γ . Po zrózniczkowaniu, dostajemy

$$\gamma \ln t (t^2 y_0''(t) + t p(t) y_0'(t) + q(t) y_0(t)) + \gamma (2t y_0'(t) + (p(t) - 1) y_0(t)) = \dots$$

Pierwszy człon się zeruje, bo y_0 jest rozwiązaniem. Wstawiając (2.2.3), mamy

$$\begin{aligned} \dots &= \gamma \left(2t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n + \lambda + r) c_n t^{n+\lambda+r-1} + (p(t) - 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+\lambda+r} \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(n + \lambda + r) c_n t^n + p(t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2(n + \lambda + r) c_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n c_k p_{n-k} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(2(n + \lambda + r) c_n + \sum_{k=0}^n c_k p_{n-k} - c_n \right) \\ &= \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(2(n + \lambda + r) c_n + (p_0 - 1) c_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k} \right) = \dots \end{aligned}$$

Zauważmy, że $P'(n + \lambda + r) = 2(n + \lambda + r) + p_0 - 1$. Stąd

$$\dots = \gamma t^{\lambda+r} \sum_{n=0}^{\infty} t^n (P'(n + \lambda + r)c_n - Y_n(c_0, \dots, c_{n-1})) = \dots$$

gdzie $-Y_n(c_0, \dots, c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_{n-k}$. Przesuwając indeksy, dostajemy

$$\dots = \gamma t^{\lambda} \sum_{n=r}^{\infty} t^n (c_{n-r} P'(n + \lambda) - Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1})).$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+\lambda} (P(n + \lambda)d_n - X_n(d_0, \dots, d_{n-1})) + \\ + \gamma \sum_{n=r}^{\infty} t^{n+\lambda} (P'(n + \lambda)c_{n-r} - Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1})) = 0. \end{aligned}$$

Przyrównujemy do zera współczynniki przy $t^{n+\lambda}$. Jeśli $0 \leq n < r$, to

$$P(n + \lambda)d_n = X_n(d_0, \dots, d_{n-1}).$$

Z kolei jeśli $n \geq r$, to mamy

$$P(n + \lambda)d_n + \gamma P'(n + \lambda)c_{n-r} = X_n(d_0, \dots, d_{n-1}) + \gamma Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1}).$$

PRZYPADEK 1. Niech $r > 0$. Wybieramy dowolne d_0 , byle tylko różne od zera. Dla $n = 1, \dots, r-1$ otrzymujemy d_n z rekurencji. Jeśli $n = r$, to

$$\gamma P'(\lambda + r)c_0 = X_r(d_0, \dots, d_{r-1}).$$

Kładziemy

$$\gamma = \frac{X_r(d_0, \dots, d_{r-1})}{c_0 P'(\lambda + r)}.$$

Powyższe wyrażenie ma sens, bo $\lambda + r$ nie jest pierwiastkiem podwójnym, więc $P'(\lambda + r) \neq 0$. Ponadto nie otrzymaliśmy warunku na d_r , więc d_r może być dowolne (nawet 0). W końcu, jeśli $n > r$, to

$$d_n = \frac{X_n(d_0, \dots, d_{n-1}) + Y_{n-r}(c_0, \dots, c_{n-r-1}) - \gamma P'(n + \lambda)c_{n-r}}{P(\lambda + r)}.$$

PRZYPADEK 2. Niech $r = 0$. Wtedy $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$. Kładziemy dowolne $d_0 \neq 0$ oraz $\gamma \neq 0$. Dla $n > 0$ kolejne współczynniki wyznaczamy tak samo, jak w przypadku poprzednim ($n > r$).

2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych (otwarte)

Definicja 2.3.1. *Równaniem liniowym* nazywamy równanie postaci

$$y' = A(t)y + B(t),$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą $m \times m$, $B(t)$ wektorem z \mathbb{R}^m , a ich współczynniki są funkcjami ciągłymi określonymi na przedziale otwartym $I \subset \mathbb{R}$.

Lemat 2.3.2. Dla dowolnego warunku początkowego (y_0, t_0) , gdzie $y_0 \in \mathbb{R}^m$ oraz $t_0 \in I$, dziedziną rozwiązania wysyconego jest I .

Definicja 2.3.3. Równanie $y' = A(t)y$ nazywamy *jednorodnym*, a równanie $y' = A(t)y + B(t)$ (odpowiadającym) *niejednorodnym*.

Twierdzenie 2.3.4. Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową $C^0(I, \mathbb{R}^m)$, a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej warstwą.

Niech V oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania $y' = A(t)y$.

Stwierdzenie 2.3.5. Niech $\{y_1, \dots, y_n\} \subset V$. Poniższe warunki są równoważne:

1. Zbiór $\{y_1, \dots, y_n\}$ jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego $t \in I$ zbiór $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^m .
3. Istnieje $t \in I$, że zbiór $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^m .

Stwierdzenie 2.3.6. Niech $\{y_1, \dots, y_k\} \subset V$. Wtedy

1. Jeśli $\{y_1, \dots, y_k\}$ jest liniowo niezależny, to $k \leq m$.
2. Jeśli $\{y_1, \dots, y_k\}$ rozpiną V , to $k \geq m$.

Wniosek 2.3.7. $\dim V = m$.

Definicja 2.3.8. *Układem fundamentalnym* nazwiemy dowolną bazę V .

Definicja 2.3.9. *Macierzą rozwiązującą* będziemy nazywali macierz, której kolumny tworzą układ fundamentalny.

Stwierdzenie 2.3.10. $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa dla każdego (równoważnie pewnego) $t \in I$ oraz spełnia

$$\frac{d}{dt}M(t) = A(t) \cdot M(t).$$

Uwaga 2.3.11. Jeśli $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą, a P macierzą o m wierszach i stałych współczynnikach, to

$$\frac{d}{dt}M(t)P = A(t)M(t)P.$$

Jeśli P jest nieosobliwa, to $M(t)P$ jest macierzą rozwiązującą.

$$\frac{d}{dt}M(t)P = \frac{dM(t)}{dt}P = A(t)M(t)P = A(t)(M(t)P).$$

Jeśli $C \in \mathbb{R}^m$, to $C \cdot M(t)$ jest rozwiązaniem ogólnym.

Jeśli $M(t)$ jest macierzą rozwiązującą, zaś $t_0 \in I$, to

$$M(t, t_0) = M(t) \cdot [M(t_0)]^{-1}$$

jest macierzą rozwiązującą oraz $M(t_0, t_0) = E$. Ponadto $M(t_0, t_0)y_0$ jest rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$.

2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych

Rozpatrzmy równanie

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Możemy je zapisać jako

$$\begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Wielomian odpowiadający temu równaniu ma postać

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Rozwiązań równania różniczkowego będziemy szukali w zależności od pierwiastków wielomianu. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą owymi pierwiastkami.

1. Jeśli λ_i jest rzeczywistym pierwiastkiem jednokrotnym, to $e^{\lambda_i x}$ jest rozwiązaniem,
2. Jeśli λ_i jest rzeczywistym pierwiastkiem p -krotnym, to $x^i e^{\lambda_i x}$, są rozwiązaniami dla $i = 0, \dots, p-1$,
3. Jeśli λ_i jest zespolonym pierwiastkiem jednokrotnym, to rozwiązaniami są $e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$ oraz $e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$,
4. Jeśli λ_i jest zespolonym pierwiastkiem p -krotnym, to rozwiązaniami są $x^i e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \cos(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$ oraz $x^i e^{\operatorname{Re}(\lambda_i)x} \sin(\operatorname{Im}(\lambda_i)x)$ dla $i = 0, \dots, p-1$.

Rozwiązaniami ogólnymi będą kombinacje liniowe powyższych.

Rozważmy teraz odpowiadające równanie niejednorodne

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x).$$

Rozwiązanie będzie zależało od postaci części niejednorodnej.

1. Jeśli niejednorodność jest postaci $f(x) = Q_n(x)e^{\lambda x}$, gdzie Q_n jest wielomianem stopnia n , to rozwiązanie szczególne ma postać

$$y_s(x) = x^p P_n e^{\lambda x},$$

przy czym P_n jest wielomianem stopnia co najwyżej n , a p jest krotnością λ jako pierwiastka wielomianu.

2. Jeśli niejednorodność ma postać

$$f(x) = e^{\alpha x} (Q_n(x) \cos(\beta x) + P_m(x) \sin(\beta x)),$$

to rozwiązanie szczególne jest postaci

$$y_s(x) = x^p e^{\alpha x} (P_N \cos(\beta x) + Q_N \sin(\beta x)),$$

gdzie $N = \max(\deg Q_n, \deg P_m)$, a p jest krotnością $\lambda = \alpha + \beta i$ jako pierwiastka wielomianu.

3. W przeciwnym przypadku stosujemy metodę uzmienniania stałej. Wtedy

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$y_s = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n.$$

Twierdzenie 2.4.1 (Zasada Duhamela). Jeśli $y' = A(t)y + B(t)$, to rozwiązania są dane wzorem

$$y_0(t) = \int_{t_0}^t M(t, u) B(u) du,$$

gdzie $M(t, u)$ jest macierzą rozwiązującą równania $y' = A(t)y$ taką, że $M(t, t) = E$.

2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi

2.6. Zagadnienia brzegowe

3. Przykłady

3.1. Rozwiązanie równań metodą szeregów potęgowych

3.2. Równania na wariację

3.3. Potoki - policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach

3.4. Wzory Liouville'a i Abela

3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne

3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa - zastosowanie do badania stabilności