KJG

Równania różniczkowe zwyczajne

Opracowanie zagadnień na egzamin

Wersja z 26 grudnia 2018

Spis treści

1. Twierdzenia

1.1. Ciągła zależność od parametru

Twierdzenie 1.1.1 (O ciągłej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y, t, \lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^l \supset U \times B_l(\lambda_0, c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą oraz $c > 0$. Niech $y(t, \lambda_0)$ będzie rozwiązaniem równania $y' = f(y, t, \lambda_0)$ z warunkiem początkowym (y_0, t_0) określonym na *zwartym* przedziale I zawierającym t_0. Wybierzmy $b > 0$ i rozważmy zbiór

$$R_b = \big\{(y, t) : t \in I \text{ oraz } \big\|y - y(t, \lambda_0)\big\| < b\big\}.$$

Załóżmy dalej, że

1. Istnieje $L \geq 0$, że dla wszystkich $(y_1, t), (y_2, t) \in R_b$ jest:

$$\big\|f(y_1, t, \lambda_0) - f(y_2, t, \lambda_0)\big\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

2. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla $(y, t) \in R_b$ zachodzi:

$$\forall \lambda \quad \|\lambda - \lambda_0\| < \delta \implies \big\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\big\| < \varepsilon.$$

Wówczas istnieje stała $c^* > 0$ taka, że

1. Jeśli $\|\lambda - \lambda_0\| < c^*$, to $y(t, \lambda)$ jest określone na I.
2. Jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to $y(t, \lambda_n) \rightrightarrows y(t, \lambda_0)$ na I.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy poniższy lemat.

Lemat 1.1.2. Przy założeniach twierdzenia przypuśćmy, że

1. Na pewnym przedziale $J \subset I$ jeśli $t \in J$, to $\big(y(t, \lambda), t\big) \in R_b$.
2. Dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz $(y, t) \in R_b$ zachodzi $\big\|f(y, t, \lambda) - f(y, t, \lambda_0)\big\| \leq \varepsilon$.

Wtedy dla każdego $t \in J$ jest

$$\big\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\big\| \leq \varepsilon \cdot e^{L|t - t_0|} \cdot |t - t_0|.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\big\|y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\big\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\big(y(u, \lambda), u, \lambda\big) du - \int_{t_0}^{t} \big(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0\big) du\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \Big\|f\big(y(u, \lambda), u, \lambda\big) - \big(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0\big)\Big\| du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \Big\|f\big(y(u, \lambda), u, \lambda\big) - \big(y(u, \lambda), u, \lambda_0\big)\Big\| du\right| \\
&+ \left|\int_{t_0}^{t} \Big\|f\big(y(u, \lambda), u, \lambda_0\big) - \big(y(u, \lambda_0), u, \lambda_0\big)\Big\| du\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \varepsilon \, du\right| + \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot \big\|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\big\| du\right| \\
&\leq \underbrace{\varepsilon \cdot |t - t_0|}_{K} + \left|\int_{t_0}^{t} L \cdot \big\|y(u, \lambda) - y(u, \lambda_0)\big\| du\right|
\end{aligned}$$

Z nierówności Gronwalla ze stałą K wynika teza. □

Wybierzmy $\varepsilon > 0$ taki, że $\varepsilon \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \leq \frac{b}{2}$ oraz oznaczmy $c^* = \min(c, \delta_\varepsilon)$. Weźmy $\lambda > 0$ taką, że $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_\varepsilon$. Niech J będzie maksymalnym podprzedziałem I, na którym zachodzi:

$$\forall t \in J \quad \big(y(t,\lambda), t\big) \in R_b.$$

Wtedy z lematu 1.1.2 dostajemy

$$\forall t \in J \quad \big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| \leq \frac{b}{2}.$$

Przypuśćmy, że jeden z końców J, nazwijmy go α, należy do wnętrza I. Wówczas z twierdzenia 2.1.5, $y(t,\lambda)$ przedłuża się na przedział $\widetilde{J}$ zawierający α we wnętrzu. Co więcej, ponieważ $\big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\|$ jest funkcją ciągłą względem t, to pozostaje mniejsza od t na pewnym otoczeniu α. Zatem J nie był przedziałem maksymalnym, chyba że $J = I$. Pokazaliśmy więc pierwszą część tezy.

Przystąpmy teraz do dowodu części drugiej. Jeśli $\lambda_n \to \lambda_0$, to z założenia drugiego istnieje ciąg $\varepsilon_n \to 0$ taki, że

$$\forall (y,t) \in R_b \; \forall n \quad \big\|f(y,t,\lambda) - f(y,t,\lambda_0)\big\| < \varepsilon_n.$$

Z lematu 1.1.2 dostajemy

$$\forall t \in I \quad \big\|y(t,\lambda) - y(t,\lambda_0)\big\| \leq \varepsilon_n \cdot |I| \cdot e^{L|I|} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \blacksquare$$

1.2. Różniczkowalna zależność od parametru

Twierdzenie 1.2.1 (o różniczkowalnej zależności od parametru). Niech

$$y' = f(y,t,\lambda), \qquad f\colon \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R} \supset U \times (\lambda_0 - c, \lambda_0 + c) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą względem y, t, λ oraz klasy C^1 względem y, λ. Ustalmy warunek początkowy (y_0, t_0) i oznaczmy przez $y(t,\lambda)$ rozwiązanie równania

$$\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial t} = f(y,t,\lambda)$$

z warunkiem początkowym $y(t_0,\lambda) = y_0$, określone na ustalonym i *zwartym* przedziale I. Wówczas na przedziale I istnieje ciągła funkcja

$$z(t,\lambda_0) = \frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

oraz zachodzi równość

$$\frac{\partial z(t,\lambda_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial t \partial \lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial^2 y(t,\lambda)}{\partial \lambda \partial t}\Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

1.3. Rozwiązania przez szeregi potęgowe wokół punktu regularnego

Rozważmy równanie

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \tag{1.3.1}$$

gdzie a_2, a_1, a_0 są analityczne w pewnym punkcie t_0.

Definicja 1.3.1. Powiemy, że t_0 jest *punktem regularnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $a_2(t_0) \neq 0$. W przeciwnym wypadku t_0 nazwiemy *punktem osobliwym.*

W przypadku regularnym równanie (1.3.2) sprowadza się do

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{1.3.2}$$

gdzie p i q są analityczne w punkcie t_0, czyli

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t-t_0)^n, \qquad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t-t_0)^n.$$

Twierdzenie 1.3.2. Każde rozwiązanie równania (1.3.2) jest analityczne w kole, w którym oba szeregi $p(t)$ i $q(t)$ zbiegają. Co więcej, analityczna funkcja

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n$$

jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} c_{k+1}(k+1)p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} \right). \tag{1.3.3}$$

Dowód. Dla ustalenia uwagi niech $t_0 = 0$ oraz $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$. Wtedy

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n, \qquad y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} t^n.$$

Z iloczynu Cauchy'ego[1] dostajemy

$$p(t)y'(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1} p_{n-k},$$

$$q(t)y(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k}.$$

Rozpisując lewą stronę równania (1.3.2), dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \left((n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} \right) = 0.$$

Z analityczności, dla każdego $n \geq 0$ jest

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1)c_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} c_k q_{n-k} = 0,$$

co dowodzi wzoru (1.3.3).

Relacja rekurencyjna (1.3.3) zadaje współczynniki c_n dla $n \geq 2$, jeśli wybrane zostały c_0, c_1. Zauważmy, że $c_0 = y(t_0)$, $c_1 = y'(t_0)$. Zatem dobierając c_0 oraz c_1 możemy otrzymać dowolny warunek początkowy dla y, co pozwala uzyskać każde rozwiązanie wysycone. Pozostaje pokazać, że przy dowolnym wyborze c_0, c_1 relacja (1.3.3) prowadzi do szeregu Taylora funkcji analitycznej w kole $D(t_0, R)$.

Wybierzmy $0 < r < R$. Wtedy funkcje p, q są zbieżne w $\overline{D}(t_0, r)$ oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| r^n < \infty, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |q_n| r^n < \infty.$$

Z powyższego, istnieją stałe L_p, L_q takie, że dla dowolnego $n \geq 0$ jest

$$|p_n| r^n \leq L_p, \qquad |q_n| r^n \leq L_q.$$

[1] $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Niech $0 < \rho < r$ oraz $\gamma_n = |c_n|\rho^n$, $\Gamma_n = \max\{\gamma_j : j = 1, \dots, n\}$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
|\gamma_{n+2}| &\le \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot|c_{k+1}|\cdot|p_{n-k}| + \sum_{k=0}^{n}|c_k|\cdot|q_{n-k}|\right)\\
&\le \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^{n}(n+1)\cdot\frac{\gamma_{k+1}}{\rho^{k+1}}\cdot\frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k}{\rho^k}\cdot\frac{L_q}{r^{n-k}}\right)\\
&\le \frac{\rho^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\left((n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma_{n+1}}{\rho^{k-n}\rho^{n+1}}\cdot\frac{L_p}{r^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma_n}{\rho^{k-n}\rho^{n}}\cdot\frac{L_q}{r^{n-k}}\right)\\
&\le \frac{\rho L_p}{n+2}\Gamma_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+1)(n+2)}\Gamma_n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k}\\
&\le \left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)}\right)\Gamma_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k}\\
&\le \underbrace{\left(\frac{\rho L_p}{n+2} + \frac{\rho^2 L_q}{(n+2)(n+1)}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{r}}\right)}_{(*)}\Gamma_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Wyrażenie $(*)$ zbiega do zera, gdy $n \to \infty$. Zauważmy, że

$$\exists N\ \forall n \ge N \quad \gamma_{n+2} \le \Gamma_{n+1} \implies \Gamma_{n+2} = \Gamma_{n+1}.$$

Oznacza to, że ciąg Γ_n jest stały od pewnego miejsca i ograniczony przez pewne $\overline{\Gamma}$. Wtedy $|c_n|\rho^n \le \overline{\Gamma}$. Zatem jeśli $|t| < \rho$, to z kryterium Cauchy'ego jest

$$\sqrt[n]{|c_n|\cdot|t|^n} = \sqrt[n]{|c_n|\cdot\rho^n}\cdot\sqrt[n]{\frac{|t|^n}{\rho^n}} \le \sqrt[n]{\overline{\Gamma}}\cdot\left|\frac{t}{\rho}\right| < 1.$$

Szereg $\sum c_n t^n$ jest zbieżny w kole o promieniu ρ. Ponieważ ρ może być dowolnie bliskie R, to suma kół wypełnia koło otwarte o promieniu R. ■

1.4. Twierdzenie spektralne dla funkcji analitycznych

Twierdzenie 1.4.1 (Hamilton-Cayley). $\chi_A(A) = 0$.

Twierdzenie 1.4.2 (spektralne dla wielomianów). Dla każdej macierzy A istnieją macierze spektralne $M_{j,l}$ takie, że dla dowolnego wielomianu f zachodzi

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{q_j-1} M_{j,l}\cdot\left.\frac{d^{(l)}f(z)}{dz^l}\right|_{z=\lambda_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{q_j-1} M_{j,l}\cdot f^{(l)}(\lambda_j).$$

1.5. Twierdzenie o asymptotycznym zachowaniu $\left\|\mathbf{e}^{\mathbf{At}}\right\|$

1.6. Twierdzenie o minimach funkcji Lapunowa i stabilności

2. Zagadnienia

2.1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań, rozwiązania wysycone

Twierdzenie 2.1.1 (Peano). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $y(t_0) = y_0$ oraz

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i oznaczmy

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla $\alpha = \min(a, b/M)$ istnieje rozwiązanie $y(t)$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, spełniające warunek początkowy $y(t_0) = y_0$.

Twierdzenie 2.1.2 (Picard-Lindelöf). Niech $y' = f(y,t)$, $y(t_0) = y_0$, gdzie

$$f\colon H = \overline{B}(y_0, b) \times [t_0 - a, t_0 + a] \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła oraz lipszycowska ze względu na y, to znaczy

$$\exists L \ \forall (y_1, t), (y_2, t) \in H \quad \big\|f(y_1, t) - f(y_2, t)\big\| \leq L \cdot \|y_1 - y_2\|.$$

Oznaczmy ponadto

$$M = \sup\big\{\big\|f(y,t)\big\| : (y,t) \in H\big\}.$$

Wówczas dla dowolnego $\alpha < \min(a, b/M, 1/L)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego z warunkiem początkowym $y(t_0) = y_0$ określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

Lemat 2.1.3 (o zgodności rozwiązań). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $(y_0, t_0) \in U$. Jeśli $y_1(t), y_2(t)$ są rozwiązaniami określonymi odpowiednio na I_1, I_2, spełniającymi ten sam warunek początkowy $y_1(t_0) = y_2(t_0) = y_0$, to $y_1 \equiv y_2$ na $I_1 \cap I_2$.

Lemat 2.1.4 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Niech $y(t)$ – rozwiązanie, T – koniec $\operatorname{Dm} y$, granica $\lim_{t\to T} y(t) = y_T$ istnieje oraz $(y_T, T) \in U$. Wówczas y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.5 (o przedłużaniu przez koniec). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y. Przypuśćmy, że rozwiązanie $y(t)$ jest określone na pewnym przedziale, którego końcem jest $T \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy dalej, że istnieje zbiór zwarty $K \subset U$ oraz $\varepsilon > 0$, taki, że

$$\forall t \in \operatorname{Dm} y \cap [T - \varepsilon, T + \varepsilon] \quad \big(y(t), t\big) \in K.$$

Wtedy y rozszerza się na przedział zawierający T we wnętrzu.

Twierdzenie 2.1.6 (o rozwiązaniu wysyconym). Niech $y' = f(y,t)$, gdzie funkcja $f\colon \mathbb{R}^{m+1} \supset U \to \mathbb{R}^m$ jest ciągła i lokalnie lipszycowska względem y oraz $(y_0, t_0) \in U$. Wówczas istnieje rozwiązanie $y_{\max}$ zwane *wysyconym*, określone na przedziale otwartym, spełniające warunek początkowy $y_{\max}(t_0) = y_0$ i takie, że jeśli y jest dowolnym rozwiązaniem spełniającym warunek $y(t_0) = y_0$, to $\operatorname{Dm} y \subset \operatorname{Dm} y_{\max}$ oraz y jest obcięciem $y_{\max}$.

2.2. Metoda Frobeniusa

2.3. Rozwiązania układów liniowych jednorodnych

Definicja 2.3.1. Równaniem liniowym nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t),$$

gdzie $A(t)$ jest macierzą $m \times m$, zaś $B(t)$ wektorem z $\mathbb{R}^m$ o ciągłych współczynnikach, określonym na przedziale otwartym $I \subset \mathbb{R}$.

Definicja 2.3.2. Równanie $y' = A(t)y$ nazywamy *jednorodnym*, zaś równanie $y' = A(t)y + B(t)$ (odpowiadającym) niejednorodnym.

Twierdzenie 2.3.3. Zbiór rozwiązań równania jednorodnego jest podprzestrzenią liniową $C^0(I, \mathbb{R}^m)$, a zbiór rozwiązań równania niejednorodnego jej wartwą.

Niech V oznacza zbiór rozwiązań wysyconych równania $y' = A(t)y$.

Stwierdzenie 2.3.4. Następujące warunki są równoważne dla zbioru $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset V$:

1. Zbiór jest liniowo niezależny.
2. Dla dowolnego $t \in I$ zbiór $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^m$.
3. Istnieje $t \in I$, że zbiór $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ jest liniowo niezależny w $\mathbb{R}^m$.

2.4. Rozwiązywanie równań liniowych niejednorodnych

2.5. Hiperboliczność i stabilność punktów równowagi

2.6. Zagadnienia brzegowe

3. Przykłady

3.1. Rozwiązywanie równań metodą szeregów potęgowych

3.2. Równania na wariację

3.3. Potoki – policzenie i zastosowanie własności w konkretnych sytuacjach

3.4. Wzory Liouville'a i Abela

3.5. Zastosowania twierdzenia spektralnego, macierze spektralne

3.6. Całki pierwsze, funkcje Lapunowa – zastosowanie do badania stabilności