freexyn 编程实例视频教程系列 13
matlab 与微积分

13.0 概述

1.主要内容

1.1 运用 matlab 计算极限、导数（微分）、积分和级数等

1.2 通过实例体会运用 matlab 处理微积分问题的思路

作者：freexyn

2.实例演示

2.1 计算 f = 2*x+y 在 x 和 y 的积分区间都是[0 1]上的多重定积分

2.2 计算 f=exp(x)分别在 0 和 1 处的 3 阶和 5 阶近似泰勒展开式

2.3 计算∫(xy,L)ds，曲线 L：x^2+y^2=a^2 在第二象限的部分

13.1 求极限

1.求极限

1.1 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$

1.2 计算 $\lim\limits_{\delta x\to0}\frac{\sin(x+\delta x)-\sin x}{\delta x}$

1.3 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

1.4 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{|x|}$ 和 $\lim\limits_{x\to0-}\frac{x}{|x|}$、 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{x}{|x|}$

2.认识函数

limit

3.说明

广义的极限是指，无限靠近而永远不能到达

极限是一种变化状态的描述，变量永远趋近的值叫做极限值

极限思想是微积分的基本思想，是数学分析中的一个重要概念

若函数在某点的左右极限不相等，matlab 返回 NaN

13.2 导数和微分

1.求导

1.1 求 f = x^3 的导数

1.2 对常数求导，比较符号对象和浮点数的差异

1.3 浮点数的差分运算

作者：freexyn

2.认识函数

diff

3.说明

使用符号运算，可以求解导数、偏导数、高阶导数和混合导数等

使用浮点数运算时，diff 的功能是差分和近似导数

13.3 偏导和高阶混合导数

1.求表达式 f = x^3*y + x*y^3

1.1 对 x 和 y 分别求偏导数

1.2 对 y 的三阶导数

1.3 先对 y 再对 x 的二阶混合导数

作者：freexyn（自由未知数）

2.说明

若表达式有多个变量，且未指定求导变量，则

matlab 使用 symvar 函数选择靠字母 x 最近的变量作为求导变量

对多变量的表达式或函数求导时

使用嵌套形式 diff(diff(f))和 diff(f,n)可能会返回不同的结果

为提高性能，diff 函数假设所有混合导数是没有求导顺序差异的

这种假设对大多数的工程和科学问题都是适用的

13.4 雅克比矩阵

1.计算以下两个表达式分别对 x1 和 x2 的偏导数

f1=sin(x1*x2)和 f2=cos(x1*x2)

2.认识函数

jacobian

3.说明

雅可比（Jacobian）矩阵

雅可比矩阵是函数的一阶偏导数以一定方式排列成的矩阵

形式如下

JF(x1,x2,...,xn)=

∂(y1,y2,...,ym)/∂(x1,x2,...,xn)=

[∂y1/∂x1 ... ∂y1/∂xn

....

∂ym/∂x1 ... ∂ym/∂xn]

其行列式称为雅可比行列式

若求解一组表达式对一组变量分别求偏导数的问题

不妨使用 Jacobian 矩阵可以实现这样的功能

13.5 计算导数的值

1. 计算 f = x^3 在 x=2 和 x=pi 处的导数值

作者：freexyn

2.说明

符号运算的结果是精确的解析值，有些时候不会化简成具体值

这种情况下可以使用 vpa 获取数值近似值

13.6 不定积分

1.计算不定积分

1.1 计算 $\int 2x dx$

1.2 计算 $\int 5 dx$

1.3 计算 $\int \sin(\cos x) dx$ 和 $\int e^{-2x^2} dx$

1.4 计算 $\int (2x+2ny) dx$ 、 $\int (2x+2ny) dy$ 和 $\int (2x+2ny) dn$

1.5 计算 $\iint (2x+2ny) dxdy$

2.认识函数

int

3.说明

使用符号运算可以求解定积分和不定积分

与求导相比，积分运算更复杂，会遇到一些困难

%积分在封闭区间可能不存在

%积分可能返回未知的函数

%积分可能存在，但是软件不能成功找到

%软件在性能更优的计算机上能积分，但在当前计算机上超出运行内存或需要更多的运算时间

若 int 不能求解出封闭的积分结果，则返回不可解的形式

13.7 定积分

1.计算定积分

1.1 计算 $\int_0^1 2x dx$

1.2 计算 $\int_0^1 \sin(\cos x) dx$

1.3 计算 $\int_0^1 e^{-2x^2} dx$

1.4 计算 $\iint_D (2x+y) dxdy$

作者：freexyn

2.说明

对于定积分，int 函数把积分变量取值范围限定在积分区间内

而且，如果积分限[a,b]不是数值，则默认 a<=b

有些函数求解不定积分没有显式解，试求定积分也没有显示解

如果必要，可以计算近似值

13.8 带参数的定积分

1.计算带参数的定积分

1.1 计算当 a>0 时，$\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-ax^2} dx$

1.2 计算当 a=1+i 时，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + x^2} dx$

2.说明

若没有给出假设，所有变量的取值范围都是在复数域上

可以使用假设以获取正确的结果，也可以进行化简

13.9 积分属性的应用

1.求解一些特殊情况的积分

1.1 计算 $\int \arcsin(\sin(x)) dx$（应用简化规则）

1.2 计算 $\int \frac{1}{x^n} dx$（忽略特殊点）

1.3 计算 $\int_1^4 \frac{1}{x-2} dx$（柯西主值积分）

2.说明

2.1 简化规则

设置属性‘IgnoreAnalyticConstraints’为 true，则 int 应用简化规则

简化规则包括但不限于以下情况

ln(a)+ln(b)=ln(ab)

ln(a^b)=bln(a)

ln(exp(x))=x

arcsin(sin(x))=x

应用简化规则并非在数学意义上是严格正确的

2.2 忽略特殊点

一些函数积分后是分段函数，分段函数仅在某一点函数形式不同

这时，可以忽略该特殊点以便获得统一的积分结果

2.3 柯西主值积分

定积分的积分区间都是有限的，被积函数都是有界的

反常积分又叫广义积分，是对普通定积分的推广

指含有无穷上限/下限，或者被积函数含有瑕点的积分

前者称为无穷限广义积分

后者称为瑕积分（又称无界函数的反常积分）

设 c 是区间[a b]内的唯一瑕点，若

∫(f(x),a,b)dx=lim(∫(f(x),a,c-μ)dx + ∫(f(x),c+μ,b)dx,μ,0)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\right)$$

存在或有限，则称为柯西主值积分，积分值也称柯西主值

13.10 数值积分

1.计算可变精度的数值积分

1.1 计算 $\int_0^1 \sin(\sin x)dx$ 的可变精度和双精度积分值

1.2 计算 $\int_0^1 \sin(\sin x)dx$ 的 15 位精度的积分近似值

1.3 计算 $\iint_D (x^2+y)dxdy$ 的可变精度的多重积分值

2.认识函数

数值积分 vpaintegral、integral、integral2

3.说明

对于定积分，可以使用数值解法计算近似解

使用 vpaintegral 函数时确保输入是可积的

如果输入不是可积的，该函数输出的结果是不可预测的

digits 控制的精度不会影响 vpaintegral

要提高精度，使用属性参数 RelTol 和 AbsTol 控制

提高精度的同时会增加运行速度和时间的成本

vpaintegral 使用可变精度算术，而 integral 使用双精度算术

在一些情况下，使用容差默认值，integral 进行运算可能由于精度不足导致溢出，使得求解无效，vpaintegral 可能能够处理这些问题

13.11 级数

1.求级数的和

1.1 计算幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数

1.2 计算不确定项级数 $\sum_{x=0}^{5}f(x)$ 的值

1.3 假设-1< x < 1，计算 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 的和函数

作者：freexyn

2.回顾函数

symsum

3.说明

级数是将数列的项依次用加号连接起来的函数

典型的级数有正项级数、交错级数、幂级数、傅里叶级数等

符号数学工具箱提供两种求和的函数

sum 计算矩阵或向量元素的和，是按某一维度求和

symsum 计算符号级数的和，是按某一索引求和

对于确定的级数求和，symsum 比 sum 求解速度快

对于不确定的级数求和，只能使用 symsum 求和

本节与系列 12：基础数学中数列求和部分内容大致相同

13.12 泰勒展开式

1.计算泰勒展开式

1.1 计算 f=exp(x)分别在 0 和 1 处的 3 阶和 5 阶近似泰勒展开式

1.2 常用函数的麦克劳林展开式

1.3 计算多变量函数 f=exp(x+y)的麦克劳林展开式

2.认识函数

taylor

3.说明

泰勒级数

若 f(x)在点 x=x0 具有任意阶导数，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 f(x)在点 x0 处的泰勒级数

麦克劳林级数

在泰勒级数中，取 x0=0，得到幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

称为麦克劳林级数

4.说明

常用函数的麦克劳林级数

指数函数

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

自然对数

$$\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad \forall x\in(-1,1]$$

几何级数

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad |x|<1$$

正弦函数

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad \forall x$$

余弦函数

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \forall x$$

13.13 泰勒展开式的应用

1.泰勒展开式的应用

1.1 作图查看 f=sin(x)/x+exp(x)+(x+2)^3 泰勒展开式的近似程度

1.2 使用泰勒展开方法计算 f=sin(sin(x))的不定积分近似解

作者：freexyn

2.说明

泰勒级数在近似计算中有重要作用

13.14 实例 常用微积分

从这节开始讲一些具体的应用实例

1.计算常用典型函数的导数、不定积分和定积分

1.1 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, $\int x^n dx = \begin{cases} \ln x & n=-1 \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} & n \neq -1 \end{cases}$

1.2 $\frac{d}{dt}\cos(at+b) = -a\sin(at+b)$, $\int \cos(at+b)dt = \frac{\sin(at+b)}{a}$

1.3 $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$, $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$

1.4 $\frac{d}{dx}n^x = n^x \ln n$, $\int n^x dx = \frac{n^x}{\ln n}$

1.5 $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+x^2}) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$

1.6 $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$, $\int e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}erf(x)$

1.7 $\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it}$, $\int e^{it}dt = \sin t - i\cos t$

1.8 $\int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$

1.9 $\int_1^5 \frac{1}{x} dx = \ln 5$

1.10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$

1.11 $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx = -\frac{4}{9}$

1.12 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2.认识函数

误差函数 erf

3.说明

1 误差函数

误差函数，也称之为高斯误差函数

erf(x)=(2/pi^(1/2))*∫(exp(-eta^2),0,x)d(eta)

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta$$

且有 erf(∞)=1 和 erf(-x)=-erf(x)

2 误差函数的导数

(erf(x))’=(2/pi^(1/2))*exp(-x^2)

(erf(x))’’=(-4/pi^(1/2))*x*exp(-x^2)

$$\frac{d}{dx} erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} erf(x) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}$$

3 误差函数的级数展开式

erf(x)=(2/pi^(1/2))*Σ((-1)^n*x^(2n+1)/((2n+1)n!),0,∞)

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

在概率论、统计学以及偏微分方程和半导体物理中都有广泛应用

13.15 实例 分段函数连续性

1.求分段函数的积分 F(x)，并讨论 F(x)的连续性

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & 0\le x<1\\ 5-2x & 1\le x\le 2\end{cases}\qquad F(x)=\int_0^x f(t)dt,0\le x\le 2$$

2.说明

微积分的常用实例之一是查找函数的渐近线极值点和拐点

在系列 12：基础数学有这个应用实例讲解

13.16 实例 曲线积分

1.计算第一类曲线积分

1.1 计算 $\int_L xyds$， 曲线 L： $x^2+y^2=a^2$ 在第二象限的部分

1.2 计算 $\int_L xyzds$，曲线 L：$x=a\cos t,y=a\sin t,z=kt,0\le t\le 2\pi$

2.说明

对弧长的曲线积分 ，也称第一类曲线积分

物理意义来源于对给定密度函数的空间曲线，计算该曲线的质量

13.17 实例 积分函数的最值

1.求带参数的积分函数的最大值

积分函数 $F(a)=\int_{-a}^{a}\cos(a^2x)\cos(\frac{x}{a^2})dx$

假设 a≥0，计算在 a=？的时候 F(a)有最大值，并求出该最大值；

本系列教程结束

欢迎交流和留言

作者/旺旺/微信公众号/UP：freexyn

邮箱：freexyn@163.com（建议、提问、合作、供稿等，请发邮件）

End