freexyn 编程实例视频教程系列 15 matlab 与线性代数

15.0 概述

1.主要内容

1.1 运用 matlab 计算线性代数问题

1.2 通过实例体会运用 matlab 处理线性代数问题的思路

作者：freexyn

2.实例演示

求线性方程组的通解

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

15.1 矩阵基础

1.矩阵基础知识回顾

1.1 创建矩阵

1.2 矩阵的索引和连接

1.3 矩阵的修改和重塑

1.4 矩阵的基本运算

2.说明

矩阵是一个二维的数字阵列

连接后的矩阵要仍然保持矩形结构才能实现连接

矩阵的索引方式有下标索引、线性索引和逻辑索引

必要时，对超出矩阵范围的索引赋值需要预分配内存

3.矩阵运算符

运算符	功能	描述	函数
+	加法	A+B	plus
-	减法	A-B	minus
*	矩阵乘法	A*B	mtimes
\	矩阵左除	x = A\B 是等式 $Ax = B$ 的解	mldivide
/	矩阵右除	x = B/A 是等式 $xA = B$ 的解	mrdivide
^	矩阵的幂	如果 B 是一个标量，A^B 是 A 的 B 次幂；对于其他值 B，计算涉及特征值和特征向量	mpower
'	复共轭转置	A'是 A 的转置。对于复矩阵，是复共轭转置	ctranspose

15.2 克罗内克张量乘积

1.计算两个矩阵的克罗内克张量乘积

A=[5　　5　　　B=[5　　0

　　5　　5]　　　　0　　5]

作者：freexyn

2.认识函数

kron

3.说明

第一个矩阵的每个元素分别乘以第二个矩阵，并按对应位置放置

15.3 Hermitian 矩阵

1. 埃尔米特（Hermitian）矩阵及其性质

A=[1　　1+i

1-i 1]

作者：freexyn

2.说明

2.1 概念

n 阶复方阵 A 的对称单元互为共轭，即 A 的共轭转置矩阵等于它本身，则 A 是埃尔米特矩阵(Hermitian Matrix)

2.2 性质

如果 A 是 Hermite 矩阵，对于正整数 k，A^k 也是 Hermite 矩阵

如果 A 是 Hermite 矩阵，且 A 可逆，A^(-1)也是 Hermite 矩阵

后面会经常用到 Hermitian 转置

15.4 正定矩阵

1.正定矩阵的性质及其判定

A=[10 12 10

12 2 15

10 15 4]

B=[1 1 1

1 2 3

1 3 6]

2.认识函数

求特征值 eig

求行列式 det

帕斯卡矩阵 pascal

3.概念

设 A 是 n 阶(实)对称方阵,如果对任意非零向量 z,都有 z(T)Az > 0，其中 z(T)表示 z 的转置，就称 A 正定矩阵

4.判定方法

4.1 计算对称方阵 A 的所有特征值

若 A 的特征值均为正数，则 A 是正定的

4.2 计算对称方阵 A 的各阶主子式

若 A 的各阶主子式均大于零，则 A 是正定的

15.5 矩阵的秩

1.计算矩阵的秩

A= [1 0 1 0

2 0 2 0]

作者：freexyn

2.认识函数

秩 rank

结构秩 sprank

3.说明

rank 函数提供满矩阵的线性无关行或列数的估计值

使用 sprank 计算稀疏矩阵的结构秩

4.算法

有多种计算矩阵的秩的方法

matlab 软件使用基于奇异值分解（SVD）的方法

SVD 算法最耗时，但也最可靠

15.6 化简行阶梯形

1.化简成行阶梯形矩阵

A=[1 1   B=[1 1

2 2]   2 3]

2.认识函数

rref

3.说明

rref 函数使用 Gauss-Jordan 消元法和部分主元消元法生成简化的行阶梯形矩阵

15.7 零空间

1.求矩阵 A 的零空间

a=[1 2; 3 4]

b=[1 2; 2 4]

c=[1 2 3 4 5]

作者：freexyn

2.认识函数

null

3.概念

零空间

零空间是在线性映射（即矩阵）的使用情况中出现的，A 的零空间可以简单理解成 Ax=0 的解空间，即{x| Ax=0}

4.说明

该函数通过奇异值分解获得的 A 的零空间的正交基（X'*X=E）

也可以简化行阶梯形矩阵获得的零空间的有理基

用于求解齐次线性方程 AX=0 的解空间

对于 rank(A)<n，解空间的非零分量有 n-rank(A)

对于满秩矩阵 A，没有非零解，解空间为空

在数值运算中首选标准正交基，在教学中首选有理基

5.补充基础知识

齐次线性方程组

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则方程组(1)可写为矩阵方程

$$AX = 0 \tag{2}$$

称方程(2)的解 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为方程组(1)的解向量.

5.1 解的性质

若 ξ_1,ξ_2 为方程组(2)的解，则 $\xi_1+\xi_2$ 也是该方程组的解

若 ξ_1 为方程组(2)的解，k 为实数，则 $k\xi_1$ 也是(2)的解

齐次线性方程组若有非零解，则它就有无穷多个解

线性方程组 $AX=0$ 的全体解向量所构成的集合对于加法和数乘是封闭的

5.2 解空间及其维数

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的全体解构成的集合 V 是一个向量空间，称其为该方程组的解空间

当系数矩阵的秩 $r(A)=r$ 时，解空间 V 的维数为 $n-r$

当 $r(A)=n$ 时，方程组 $AX=0$ 只有零解，此时解空间 V 只含有一个零向量，解空间 V 的维数为 0

当 $r(A)=r<n$ 时，方程组 $AX=0$ 必含有 $n-r$ 个向量的基础解系

5.3 基础解系

如果齐次线性方程组 $AX=0$ 的有限个解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 满足

a. $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关

b. $AX=0$ 的任意一个解均可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表示

则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系

方程组 $AX=0$ 的一个基础解系即为其解空间的一个基

方程组 $AX=0$ 基础解系不是唯一的，其解空间也不是唯一的

5.4 通解

若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系

则 $AX=0$ 的通解可表示为， $X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 为任意常数

解空间 V 可表示为 $V=\{x\mid x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r},k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in R\}.$

对齐次线性方程组 $AX=0$，若 $r(A)=r<n$，则该方程组的基础解系一定存在，且每个基础解系中所含解向量的个数均等于 $n-r$，其中 n 是方程组所含未知量的个数

15.8 列空间

1. 计算矩阵的用标准正交基表示的列空间

随机实例

2.认识函数

orth

3.概念

列空间

若 A 为 m*n 的矩阵，A 的列空间 C(A)是 A 中各列的所有线性组合的集合，也即，A 的列向量构成的空间，它是 R^m 的子空间

4.说明

求解列空间一般先要求出它的极大线性无关组，找出最简单的一组基，然后写成线性组合的形式，这个过程可以通过行初等变换得到

将列空间与线性方程组 Ax=b 联系起来，首先 Ax=b 不是对所有

b 均有解，除非 n 个向量的组合能够覆盖整个 m 维空间

那么什么样的 b 会使得该方程有解呢？如果线性方程 A*x = b 有解，那么还可以将 b 写作 A 中各列的线性组合形式，也就是说，只有当任意向量 b 均包含在 A 列空间内时，这个方程才有解，即，当且仅当 b 属于 A 的列空间 C(A)时 Ax=b 有解，特别的，当 b 为零向量时该方程组有解

5.补充基础知识

非齐次线性方程组

设有非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5}$$

它也可写作矩阵方程

$$AX = b \tag{6}$$

5.1 解的性质

设 η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解，则 $\eta_1 - \eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解

设 η 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解，ξ 为对应的齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解，则 $\xi + \eta$ 非齐次线性方程组 $AX = b$ 的解

设 η^* 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的一个解，ξ 是对应齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解，则 $x = \xi + \eta^*$ 是非齐次线性方程组 $AX = b$ 的通解

5.2 有解的等价命题

设有非齐次线性方程组 $AX = b$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是系数矩阵 A 的列向

量组，则下列四个命题等价

a.非齐次线性方程组 $AX=b$ 有解

b.向量 b 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

c.向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$ 等价

d. $r(A)=r(A\ \ b)$

15.9 矩阵的范数

1.计算向量和矩阵的 1-范数、2-范数和∞-范数

a=[1 2 3]

b=[1 2

3 4]

2.认识函数

范数 norm

2-范数估值 normest

3.概念

范数是具有“长度”概念的函数

3.1 向量的范数

1-范数，向量所有元素的绝对值之和

2-范数，计算方式跟欧式距离的方式一致

∞-范数，所有向量元素中的最大值

−∞-范数，所有向量元素中的最小值

p-范数，所有向量元素绝对值的 p 次方和的 1/p 次幂

3.2 矩阵的范数

1-范数，又名列和范数，矩阵列向量中绝对值之和的最大值

2-范数，又名谱范数，计算方法为 A'A 矩阵的最大特征值开平方

∞-范数，又名行和范数，矩阵行向量中绝对值之和的最大值

F-范数，Frobenius 范数，矩阵元素的绝对值的平方和再开方

4.说明

normest 主要用于稀疏矩阵，尽管也可能适用于大型满矩阵

15.10 矩阵的逆

1.计算方阵的逆

随机实例

2.认识函数

inv

3.概念

3.1 矩阵的逆

如果 A 为方阵并且是非奇异的，则方程 AX =E 和 XA =E 具有相同的解 X，其中 E 是 n×n 的单位矩阵，则矩阵 A 可逆，方程的解称为 A 的逆矩阵

3.2 算法

对输入矩阵进行 LU 分解

如果输入矩阵是 Hermitian 矩阵，则执行 LDL 分解

4.说明

X^(-1)等效于 inv(X)

x = A\b 的计算方式与 x = inv(A)*b 不同，求解线性方程组时建议使用前者

15.11 条件数

1. 与逆有关的条件数

A=[1 2 3

5 8 100

8 3 4]

B=[1 0 0

0 1 0

0 0 1]

作者：freexyn

2.认识函数

与逆有关的条件数 cond

1-范数条件数估计 condest

3.说明

矩阵的条件数表征矩阵求逆结果和线性方程的解的精度

条件数的值接近 1 是良态矩阵，否则认为是病态矩阵

cond 的算法（p = 2 时）使用奇异值分解 svd

若输入矩阵是稀疏矩阵，cond 将忽略任何输入值并调用 condest

condest 函数主要应用于稀疏矩阵

15.12 Hilbert 矩阵

1.认识希尔伯特（Hilbert）矩阵

A=[1　1/2　1/3

　1/2　1/3　1/4

　1/3　1/4　1/5]

2.认识函数

Hilbert 矩阵 hilb

逆矩阵 invhilb

3.说明

Hilbert 矩阵的元素由 H(i,j) = 1/(i + j-1) 构成

Hilbert 矩阵是病态矩阵的典型示例

Hilbert 矩阵是条件设置错误的典型对称正定矩阵

15.13 条件数倒数

1.条件数倒数及其应用

比较 Ax=b 和 Ax=b+0.01，在不同系阵 A 的情况下，解对于线性方程组扰动的敏感性（A 分别取希尔伯特矩阵和一个随机矩阵）

作者：freexyn

2.认识函数

rcond

3.说明

rcond(A)以 1-范数形式返回 A 的可逆条件估计

用于衡量给定矩阵 A 与奇异矩阵集的接近程度

如果 A 的条件设置良好，rcond(A) 接近 1

如果 A 接近奇异且条件设置错误，rcond(A) 接近 0

与条件数 cond 相比，rcond 作为估计矩阵条件的方法更有效，但不太稳定

条件数的应用之一是，衡量线性方程组对扰动的敏感性

15.14 行列式

1.计算方阵的行列式的值

a=[1 2;3 4]

b=rand(3)

2.认识函数

det

3.说明

det 使用 LU 分解计算行列式，这很容易出现浮点舍入误差

所以，行列式计算有时在数值上是不稳定的

15.15 奇异矩阵

1.奇异矩阵及其判断

a=[1 2;2 4]

b=[0.001 0 0

0 0.001 0

0　　0　　0.001]

2.说明

若 n 阶方阵 A 的行列式不为零，即|A|≠0，则称 A 为非奇异矩阵

否则称 A 为奇异矩阵

n 阶方阵 A 是非奇异矩阵的充要条件是

A 是可逆矩阵，也即 A 的行列式不为零

奇异矩阵是降秩矩阵，没有逆矩阵

3.说明

避免使用 det 判断某矩阵是否为奇异矩阵

而改用 cond 或 rcond

行列式的值通常与矩阵的条件数不相关

即，矩阵的行列式可以任意大或任意小，而不更改条件数

15.16 伪逆

1.计算矩阵的伪逆

A=[1 2;3 4]

B=[1 2;3 6]

C=[10 1 9; 4 5 6]

2.认识函数

pinv

3.说明

伪逆（Moore-Penrose 伪逆）

如果 A 非方阵，或者是方阵且奇异，则 inv(A) 不存在

Moore-Penrose 伪逆是一种矩阵，可在不存在逆矩阵的情况下作为逆矩阵的部分替代

pinv(A) 拥有 inv(A) 的部分（但非全部）属性

伪逆常被用于求解无解或有许多解的线性方程组

pinv 通过奇异值分解 svd(A)来计算 A 的伪逆

对于矩形矩阵求取的伪逆，方程 AX =E 和 XA =E 中至少有一个方程无解

15.17 最小范数解

1.线性方程基于最小范数值的最小二乘解

随机实例

作者：freexyn

2.认识函数

lsqminnorm

3.说明

lsqminnorm 计算线性方程组 Ax = b 的最小范数最小二乘解

lsqminnorm 使用完全正交分解 (COD) 来计算

4. 最小范数解

最小范数最小二乘解（最小范数解）

Ax=b 的解可以看做以 min norm(A*x-b)为目标函数的最优解

用最小二乘方法求解该优化问题，得出的最小二乘解不是唯一的

其中，使得 norm(x)最小化的解即为最小范数（最小二乘）解

伪逆可以用来计算线性方程组 Ax = b 的最小范数解

使用 pinv(A)*b 方式的计算大多都可以替换为 lsqminnorm(A,b)

lsqminnorm 通常比 pinv 更有效，而且还支持稀疏矩阵

15.18 求解线性方程组

1. 求解线性方程组 AX = B

随机实例

2.认识函数

linsolve

3.说明

若 A 为方阵，linsolve 使用 LU 分解与部分主元消元法求解

若 A 不为方阵，linsolve 使用 QR 分解与列主元消元法求解

若 A 是方阵且是奇异，或不是方阵且秩亏，则返回一条警告

可以通过指定的系数矩阵 A 的属性以便选择最适合的求解器

例如，若 A 为下三角矩阵，可以设置 opts.LT = true 以使 linsolve 使用为下三角矩阵设计的求解器

15.19 矩阵的除法

1.认识和使用矩阵的除法

随机实例

作者：freexyn

2.认识运算符

左除\（mldivide）

右除/（mrdivide）

3.说明

矩阵的除法主要用于求解线性方程组

左除，x = A\B 表示矩阵方程 Ax = B 的解

右除，x = B/A 表示矩阵方程 xA = B 的解

x = A\B 的维度兼容性条件要求两个矩阵 A 和 B 的行数相同

x = A\B 的解 x 列数与 B 的列数相同，其行数和 A 的列数相同

如果 A 接近奇异值，matlab 将会显示警告信息，仍然会执行计算，但计算结果未必是合理的

4.算法

mldivide 首先把输入矩阵分为满矩阵和稀疏矩阵

4.1 针对满矩阵的算法

4.2 针对稀疏矩阵的算法

15.20 非奇异系阵线性方程组

接下来的几节讲一些具体线性方程组的求解实例

1.求解非奇异系数矩阵的线性方程组

-x1-2x2+3x3=4

-4x1+2x2+3x3=9

3x1-x2=1

（公式编辑器格式）

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

2.说明

对于齐次 Ax=0 或非齐次 Ax=b 线性方程组

根据系数矩阵 A 的不同分多种情况情况进行求解

首先，判断矩阵是不是方阵，即行数和列数相等的矩阵

若行数和列数相等，A 即为 n 阶方阵，判断是否为奇异矩阵

若 A 为非奇异矩阵，则 Ax=0 有且只有唯一零解，Ax=b 有唯一解，也即精确解

若 A 为奇异矩阵，则 Ax=0 有无穷解，Ax=b 有无穷解或者无解

若行数和列数不相等，A 即为 m×n 阶矩阵

若 m＜n，为欠定方程组，使用最多 m 个非零分量求基本解

基本解是按照最小二乘法原理计算的一组准确解

若 m＞n，为超定方程组，改求最小二乘解，近似解

对于以上大多数情况，使用\运算符都可以自动判断系数矩阵 A 的情况，采用合适的算法求解，若不能求解还需其他计算方法辅助

15.21 奇异系阵线性方程组

1.求解奇异系数矩阵的线性方程组

x1-x2=-1

-3x1-3x3=-12

-x1+4x2+3x3=16

（公式编辑器格式）

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ -3x_1 - 3x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

2.说明

如果 A\b 接近奇异，反斜杠运算符 A 将会发出警告

如果反斜杠运算符检测到完全奇异性，则会提示出现错误情况

这时可以使用 P = pinv(A)*b

pinv 和 lsqminnorm 都可以计算最小范数的最小二乘解

对于完整奇异矩阵，也可以使用函数 linsolve 计算最小二乘解

15.22 欠定方程组

1.求解欠定方程组

3x1+x2+3x3=14

x1-x2+x3=2

（公式编辑器格式）

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

2. 说明

若系阵 A 为 m×n 阶矩阵，且 m < n，则 Ax=b 为欠定方程组

使用 x = A\b 方式计算的解为基本解，只有 rank(A)个非零分量

使用 x = pinv(A)*b 计算的是最小范数解，即使得 norm(x)最小化

反斜杠运算符的计算速度快，但计算的解未必是最小范数解

15.23 超定方程组

1.求解超定方程组

3x1-x2=1

-2x1-3x2 =-8

4x1-2x2=0

（公式编辑器格式）

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 = -8 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

作者：freexyn

2.说明

在一些测试数据进行拟合处理的问题中会遇到这种方程组

比如已知问题与两个变量[x1 x2]有关，上面是实验数据，求参数

注意与多项式曲线拟合的区别

15.24 线性方程组的通解

1.求线性方程组的通解

3x1+x2+3x3=14

x1-x2+x3=2

（公式编辑器格式）

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

2. 说明

前面的求解实例都是求一个解

这个解可能是准确解（当有唯一解）

可能是一个特解（当有无穷多个解）

或者是最小二乘近似解（当无解）

对于系矩 A 是 m×n 阶且 m < n 的欠定线性方程组

当有无穷多个解时，可以求出通解

matlab 求线性方程组 Ax = b 通解的步骤

2.1 求对应的齐次方程 Ax = 0 的解

使用 null (A)命令进行计算，求解出 Ax = 0 解空间的基矢量

那么齐次方程组的通解就是基矢量的线性组合

2.2 求非齐次方程组 Ax = b 的解

一般使用 x=A\b，这是非齐次方程组 Ax = b 的一个特解

2.3 写出 Ax=b 的通解形式

通解即为，齐次解空间基矢量线性组合与非齐次特解的和

如果必要，通解可以用符号表达式的形式写出

15.25 符号运算

1.使用符号运算求矩阵的行列式、逆、零空间和列空间等

随机实例

2.认识函数

列空间 colspace

3.说明

注意区分使用符号运算和浮点型运算在舍入精度方面的差异

浮点型运算默认使用 16 位精度表示，有舍入误差

符号运算使用完整精度表达，没有舍入误差

15.26 符号运算解线性方程组

1.符号运算方式求解线性方程组

1.1 先使用符号运算的方式求解

1.2 再转化成矩阵方程形式 Ax=b，使用线性代数方法求解

-x1-2x2+3x3=4

-4x1+2x2+3x3=9

3x1-x2=1

（公式编辑器格式）

$$\begin{cases} -x_1-2x_2+3x_3=4 \\ -4x_1+2x_2+3x_3=9 \\ 3x_1-x_2=1 \end{cases}$$

2.认识函数

求解 solve

转换 equationsToMatrix

3.说明

符号运算的结果没有舍入误差，是具有完全精度的解

符号求解结果仍然是符号类型

15.27 符号运算求通解

1.使用符号运算方式求线性方程组的解和通解

3x1+x2+3x3=14

x1-x2+x3=2

（公式编辑器格式）

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

15.28 特征值（分解）

从这节开始讲矩阵的分解及其应用

1.矩阵的特征值和特征向量计算，以及特征值分解

A=[15 1 20

2 5 8

9 13 19]

B=[1 1 1

0 1 1

0 0 2]

2.认识函数

eig、eigs

3.说明

特征（值）分解（Eigendecomposition），又称谱分解

是将矩阵分解为由其特征值和特征向量表示的矩阵之积的方法

方阵 A 的特征值和特征向量分别为标量 λ 和非零矢量 υ

满足这样的条件，Aυ = λυ

特征值按对角线排列构成特征值矩阵 Λ，对应的，特征向量按列排列构成特征向量矩阵 V，满足公式，AV = VΛ

若特征矩阵 V 是可逆的，于是得到特征值分解，A = VΛV^(-1)

如果存在一个可逆矩阵 P，使得 P^(-1)AP=Λ，Λ 是对角矩阵

则矩阵 A 被称为可对角化的

只有可对角化的矩阵才能进行特征值分解

eig 函数可以计算实数对称稀疏矩阵的特征值

要计算大型稀疏矩阵的特征值或特征向量或计算非实数对称稀疏矩阵的特征值，优先使用 eigs 函数

15.29 特征多项式

1.矩阵的特征多项式、特征方程及其解集与特征值的关系

B=[1 1 1

0 1 1

0 0 2]

作者：freexyn

2.认识函数

矩阵特征多项式 poly

多项式求根 roots

3.说明

n*n 方阵 A 的特征多项式为 p(λ)=det(A-λE)，其中 E 是单位矩阵

令 det(A-λE)=0 即为特征方程

若特征多项式是关于未知数 λ 的 n 次多项式

由代数基本定理知，特征方程有 n 个解

解组成的解集也就是特征值的集合，也称为“谱”（Spectrum）

性质，若存在可逆方阵 C 使得 B=C^(-1)AC，则 pA(λ)=pB(λ)

15.30 Schur 分解

1. Schur（舒尔）分解

```
B=[1   1   1
   0   1   1
   0   0   2]
```

2.认识函数

schur

3.说明

Schur（舒尔）分解形式，A = USU′

其中，U 是酉矩阵，S 是对角线上为 1×1 或 2×2 块的上三角矩阵

特征值是通过 S 的对角元素或对角块元素显示的

U 的列向量具有比特征向量更好的数值属性

matlab 高级的矩阵运算不是进行特征值分解，而使用 Schur 分解

4.酉矩阵

n 阶复方阵 U 的 n 个列向量是 U 空间的一个标准正交基

则称 U 是酉矩阵(Unitary Matrix)

对于酉矩阵 U，有 U'*U = E，其中 E 是单位矩阵

15.31 奇异值（分解）

1.矩阵的奇异值分解

随机实例

作者：freexyn

2.认识函数

svd、svds

3.说明

与非奇异方阵的特征值分解类似，矩形矩阵可以进行奇异值分解

m×n 阶矩形矩阵 A 的奇异值是标量 σ，对应的奇异向量是一对向量 u 和 v，满足这样的条件，Av=σu，A(H)u=σv

其中 A(H)是 A 的 Hermitian 转置

奇异矢量 u 和 v 通常缩放至范数为 1

奇异值 σ 始终为非负实数，即使 A 为复数也是如此

把奇异值组成对角矩阵 Σ，对应的奇异向量组成矩阵 U 和 V

那么，满足表达式，AV=UΣ，A(H)U=VΣ

第一个表达式的右侧都乘以 V(H)，就得出了奇异值分解形式

A=UΣV(H)，也写作 A=UΣV*

其中 U 是 m×m 阶酉矩阵，Σ 是半正定 m×n 阶对角矩阵，V*是 V 的共轭转置（Hermitian 转置），V 是 n×n 阶酉矩阵

奇异值分解，适用于 m*n 且 m~=n 的矩阵

svd 默认以降序顺序返回矩阵 A 的所有奇异值和对应的向量

svds 主要适用于计算大型稀疏矩阵的部分奇异值和对应的向量

4.应用

在信号处理、统计学等领域有重要应用

奇异值分解则是谱分析理论在任意矩阵上的推广

15.32 特征值分解和奇异值分解比较

1.比较特征值分解和奇异值分解

随机实例

2.说明

特征值分解一般定义是适用于方阵的分解

奇异值分解则是分解方法在任意矩阵上的推广

矩形矩阵也可以添加全 0 行构成方阵，进行特征值分解

大多数联立线性方程组都属于奇异值分解所描述的这一类

如果 A 是方形的对称正定矩阵，这两种分解相同

当 A 偏离对称性和正定性时，这两种分解之间的差异就会增加

实数矩阵的奇异值分解始终为实数，但非对称的实数矩阵的特征值分解可能为复数

15.33 奇异值分解的应用

1.使用奇异值分解计算矩阵的秩、零空间和列空间

随机实例

作者：freexyn

2.说明

根据 A =U*S*V'，得出 AV=US，可以看做矩阵方程 Ax=b

讨论 Ax=b 的齐次方程和非齐次方程解得情况可以得出

V 中对应于 S 中 0 奇异值分量的列向量就是 A 的零空间

U 中对应于 S 中非 0 奇异值分量的列分量就是 A 的列空间

15.34 Cholesky 分解

1.正定矩阵的 cholesky 分解

A=[1 1 2

1 3 4

2 4 8]

2.认识函数

chol

3.说明

乔列斯基分解将正定矩阵表示为三角矩阵及其转置的积

分解形式为，A = R’*R，其中 R 是上三角矩阵

采用此类分解的矩阵必须是正定矩阵

乔列斯基分解不仅适用于实数矩阵，也适用于复数矩阵

若是复数矩阵满足 A′ = A，并且是 Hermitian 正定矩阵

运用乔列斯基分解可以快速的求解线性方程组 Ax = b，首先把方

程组替换为 $R'Rx = b$，反斜杠运算符能识别三角形方程组，所以再通过 x = R\(R'\b) 进行求解

15.35 LU 分解

1.矩阵的 LU 分解

随机实例

2.认识函数

lu

3.说明

LU 分解将矩阵分解为单位下三角矩阵和上三角矩阵的乘积

分解形式为，A = LU，其中，A 是 m×n 阶

L 是 m 阶单位下三角矩阵（或置换），U 是 m×n 上三角形矩阵

LU 分解在本质上是高斯消元法的一种表达形式

LU 分解主要应用在解线性方程、求逆矩阵或计算行列式等方面

运用 LU 分解通过计算 x = U\(L\b)可以快速求解线性方程 Ax=b

行列式是通过 LU 分解进行计算的，det(A) = det(L)*det(U)

逆矩阵是通过 LU 分解进行计算的，inv(A) = inv(U)*inv(L)

15.36 QR 分解

1.矩阵的 QR 分解，即正交三角分解

随机实例

2.认识函数

qr

3.说明

QR 分解将 m×n 阶矩阵 A 分解成酉矩阵和上三角形矩阵的乘积

分解形式为，A = Q*R 或 AP = QR（涉及列置换时）

Q 是 m 阶酉矩阵，R 是 m×n 上三角形矩阵，P 为置换矢量

与 LU 分解相比，QR 分解不需要进行任何消元或置换

QR 分解可将超定线性方程组转换为等效的三角形方程组

QR 分解是求一般矩阵全部特征值的最有效并广泛应用的方法

15.37 矩阵分解

1.求解线性方程组的矩阵分解

随机实例

作者：freexyn

2.认识函数

decomposition

3.说明

在 R2017b 中推出

decomposition 创建矩阵分解（LU、LDL、Cholesky、QR 等）

分解后的对象具有可重用性，非常适合计算需要重复解的问题

因为系数矩阵的分解不需要多次执行

求解线性方程组（Ax = b 或 xA = b）时，进行 dA = decomposition(A) 分解后，计算 dA\b 会返回与 A\b 相同的结果，但前者运算速度通常

要快得多

可重用的 decomposition 对象 dA 可以与许多同样适用于原始系数矩阵 A 的运算符结合使用，包括

复共轭转置 dA'

取反号 -dA

乘除标量 c*dA 或 dA/c

使用 x = dA\b 求解线性方程组 Ax = b

使用 x = b/dA 求解线性方程组 xA = b

4.多线程计算

matlab 软件支持代数和单元数值函数的多线程计算

这些函数自动在多个线程上执行

要使函数或表达式执行多线程计算，必须满足以下条件

4.1 该函数执行的操作可以轻松划分为并发执行的部分

这些部分必须能够在进程之间几乎没有交流的情况下执行

4.2 数据大小足够大

以便多线程计算优于划分数据和管理单独执行线程所需的时间

例如，大多数函数只有在数组包含几千个或更多元素时才会加速

4.3 运算不受内存限制，处理时间不占用存储器访问时间

一般来说，复杂的功能比单纯的功能更快

4.4 例如

矩阵乘法(X*Y)和矩阵乘方(X^p)运算符在大型双精度数组（大约 10,000 个元素）上显示出明显的速度增加

矩阵分析功能 det,rcond 和 expm 也显示在大型的双精度数组(约 10,000 个元素或更多）运算速度显著增加

如果启用多线程，inv、lscov、linsolve 和 mldivide 将会对大型双精度数组（约 10,000 个元素或更多）大幅增加速度

对分解使用多线程计算，对于大型双精度数组（约 10,000 个元素），lu 和 qr 会大幅增加速度

15.38 参数矩阵行列式和求逆

1.求以下参数矩阵的行列式和逆矩阵

1.1 计算行列式

|0　0　a　0

0　b　0　0

0　0　0　c

d　0　0　0|

1.2 计算矩阵的 n 次方

[1　0

a　1]

1.3 计算矩阵的逆

[a　b

c　d]，且 ad≠bc

1.4 计算矩阵的逆

[cos(theta)　-sin(theta)

sin(theta)   cos(theta)]

（公式编辑器格式）

1.1 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^n$

1.3 $ad \neq bc, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$

1.4 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$

答案:

1.1 abcd

1.2 [1 0;n*a 1]

1.3 1/(a*d - b*c)*[d -b;-c a]

1.4 [cos(theta), sin(theta);-sin(theta), cos(theta)]

15.39 参数矩阵求参数

1.求解以下参数问题

1.1 设 0 是方阵 A=[1 0 1 的一个特征值，则 a=?

0 2 0

1 0 a]

1.2 设 A=[1　1　　0　　是正定矩阵，则 k 应满足的条件？

1　k　　0

0　0　k^2-2]

（公式编辑器格式）

1.1 设 0 是方阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ 的一个特征值，则 a=？

1.2 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2-2 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵，则 k 应满足的条件？

作者：freexyn

答案：

1.1　1

1.2　k>sqrt(2)

15.40 求解线性方程组

1.求解以下线性方程组

1.1 设矩阵 X 满足方程 X=AX+B，求 X

其中 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

1.2 求齐次线性方程组的基础解系及通解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

答案：

1.1　X=[9 -3;8 -2;7 -3]

1.2　k[9;-4;1]，k∈R

本系列教程结束

欢迎交流和留言

作者/旺旺/微信公众号/UP：freexyn

邮箱：freexyn@163.com（建议、提问、合作、供稿等，请发邮件）

End