

## freexyn 编程实例视频教程系列 11

### matlab 解方程

#### 11.0 概述

##### 1.基本内容

##### 1.1 运用 matlab 解方程（组）以及不等式

##### 1.2 通过编程实例体会运用 matlab 解方程的思路

作者：freexyn

##### 2.实例演示

##### 2.1 解方程 $a*x^2 + b*x + c = 0$

##### 2.2 解方程组 $x^2 + y^2 = 5, x + y = 3$

##### 2.3 求方程 $\sin(x)=1$ 的通解，并求在区间 $[0,2*\pi]$ 上的解

##### 2.4 当 $a<0$ 时，求解一元二次不等式 $3*x^2-4*a*x+a^2 < 0$

#### 11.1 解方程

##### 1.解方程

##### 1.1 $x+1=0$

##### 1.2 $\exp(x+2) = 10$

##### 1.3 $a*x^2 + b*x + c = 0$

##### 1.4 $a*x^2 + b*x + c = 0$ 求解参数 $a$

##### 1.5 $\sin(x) = 1$

##### 2.认识函数

solve

### 3.说明

方程式的等号用==表示

字符向量的输入方式不再建议使用

改用首先声明字符变量，再创建方程的方式进行输入

### 4.符号数学工具箱（Symbolic Math Toolbox）

符号数学工具箱引入了一种特殊的数据类型：符号对象（类型）

matlab 使用符号解析式进行处理，而不是数值上的计算

符号计算是精确的，不容易出现舍入误差

可以创建符号数值和变量、符号表达式、符号函数和符号矩阵

可以进行符号变量的代入和计算

## 11.2 方程的通解

### 1.求解方程 $\cos(x) = -1$ 的带参数的通解（完整解、周期解）

作者：freexyn

### 2.认识命令

求解带参数解 solve - 'ReturnConditions'

### 3.说明

如果解包含参数，并且设置了 ReturnConditions 为 true

solve 函数返回带参数的解和该解成立所满足的条件

否则，solve 函数要么返回有自行选择的参数值给出的具体解

要么返回不给定特定值的参数化的解（很少）

可以使用结构数组形式获取求解结果

### 11.3 特定区间的解

1.求方程  $\cos(x) = -1$  在区间  $[0, 2\pi]$  上的解

作者: freexyn

2.思路

先计算方程带参数的通解，然后计算满足区间  $[0, 2\pi]$  的参数值  
最后把参数值回代通解，获得该区间上的解

3.说明

使用 solve 并设置了 ReturnConditions 为 true 返回的解中

solve 输入变量名与输出变量名 parameters 和 conditions 不能相同

解中的参数除了有 solve 函数自行引入的之外

还可以是输入方程中的参数

如果参数不出现在任何条件中，意味着该参数可取任何复数值

solve 函数引入的参数不会出现在 matlab 工作空间中

可以使用包含它们的输出变量访问或使用它们

### 11.4 解方程组

1.解方程组

1.1  $x^2 + y^2 = 5, x + y = 3$

1.2  $x+1=0, x+2=0$

1.3 把 1.1 的解代入  $(x-y)*\exp(x^2+y)$  求值

## 2.说明

多个输出变量尽量不要指定为输入方程的变量名

如果指定了，不能保证求出解的顺序是指定的输出变量的顺序

例如， $[y,x] = \text{solve}(\text{eqns})$ ，可能会把  $x$  的解赋值给  $y$

因为默认的，`solve` 按字母顺序求解变量

如果方程的解不存在，`solve` 返回空解

用结构数组返回运算结果方便代入

## 11.5 实数解或常用解

### 1.求实数解或常用解

1.1 求方程  $x^3=1$  分别在复数域和实数域的解

1.2 求方程  $\sin(x)+\cos(x)=1$  的通解和常用解

作者：freexyn

### 2.认识命令

实数解 `solve - 'Real'`

常用解 `solve - 'PrincipalValue'`

## 11.6 使用简化或忽略假设

### 1. 使用简化或忽略假设求解

1.1 求解方程  $\exp(\log(x)*\log(x))=2$

1.2 求  $x^2+x-2=0$  分别在  $x>0$  假设下和忽略该假设的解

### 2.认识命令

简化 solve - 'IgnoreAnalyticConstraints'

忽略假设 solve - 'IgnoreProperties'

### 3.说明

设置属性‘IgnoreAnalyticConstraints’为 true，则使用简化规则

简化规则包括但不限于以下情况

$$\log(a)+\log(b)=\log(ab)$$

$$\log(a^b)=b\log(a)$$

$$\log(\exp(x))=x$$

$$\sin(\sin(x))=x$$

应用简化规则并非在数学意义上是严格正确的

## 11.7 高阶多项式方程

### 1.求高阶多项式方程

$$x^3 + x^2 + 1 = 0$$

作者：freexyn

### 2.认识命令

高阶多项式方程显示解 solve - 'MaxDegree'

### 3.说明

求解高阶多项式方程，结果很难用显式的解析式表达

因此符号解中可能会包含 root 字符

MaxDegree 只接受小于 5 的正整数

因为通常情况下，高于 4 阶的多项式没有显式表达式的解

## 11.8 数值解法

### 1.数值解法求解方程

$\sin(x) = \exp(x)$  靠近坐标原点最近的解

### 2.认识函数

数值解法 `vpasolve`

方程的左边 lhs

方程的右边 rhs

### 3.说明

如果 `solve` 不能找到解（解析解）

并且设置了 `ReturnConditions` 为 `true`，返回空解并给出警告

否则，`solve` 函数在内部会调用 `vpasolve` 尝试寻找数值解

数值解法 `vpasolve` 求取的是数值解

若有限位数的数值解不足以表达精确解，那么该解为近似数值解

对于非多项式方程或方程组

数值解法只返回找到的第一个解（如果解存在）

求解时可以结合图像预判解的范围

## 11.9 多项式方程数值解

1.求解方程  $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$  的数值解、实数解和复数解

### 2.说明

对于多项式方程或方程组

数值解法 `vpasolve` 返回所有解

如果方程没有解，vpasolve 返回一个空对象

vpasolve 忽略对变量设置的假设

替代的，通过指定求解范围来将返回的结果限制在特定范围内

如果求解范围是[a,b]是复数，则在复平面中的矩形区域中求解

此处 a 指定矩形区域的左下角，并 b 指定该区域的右上角

## 11.10 选择求解器

1. 分别使用 solve 和 vpasolve 求解方程

1.1  $x^2 - 2 = 0$

1.2  $e^{x^2} - e^2 = 0$

1.3  $bx^2 - a = 0$

2. 说明

解方程可以计算符号解或数值解

例如， $x - \sqrt{2} = 0$  的符号解是  $\sqrt{2}$ ，数值解是 1.414

符号解是精确的，而数值解是精确符号解的近似值

一般的，首先尝试符号求解器，如果不能求解再使用数值求解器

如果可能，首先使用符号方法 solve 求解方程

然后使用 vpa 数值方法近似得到所得符号结果

这样可以获得符号求解器找到的所有解的数值近似值

但该方法比直接使用数值解法消耗更多的时间和降低性能

两者的优缺点见下表

用 solve 以符号方式解方程	用 vpasolve 以数值方式解方程
返回精确解，使用 vpa 可以近似	返回近似解，精度控制使用 digits

用 solve 以符号方式解方程	用 vpasolve 以数值方式解方程
返回解的一般形式	对于多项式方程，返回所有数值解 对于非多项式方程，仅返回第一个数值解
解析解提供丰富的科研性	数值解提供更少的可研究性

## 11.11 解不等式

### 1.解一元一次不等式

$$2*x+1<0$$

### 2.说明

解不等式 solve

解不等式，其实就是求满足不等式的全部解

## 11.12 带参数的不等式

### 1.求解带参数的一元二次不等式

当  $a<0$  时，求解  $3x^2-4ax+a^2<0$

答案： $a<x<a/3$

### 2.说明

假设与求解不等式的结合应用

注意根的取舍

## 11.13 高次不等式

### 1.解不等式

$$(x+4)(x+5)^2(2-x)^3<0$$

答案： $\{x \mid x>2 \text{ 或 } x<-4 \text{ 且 } x \neq -5\}$



作者: freexyn

## 2.说明

注意体会求解的隐含条件, 以及在 matlab 的处理

### 11.14 实例 解方程

从这节开始讲一些具体的应用实例

#### 1.解方程 (组)

1.1 解方程  $(x+3)^2 = (1-2x)^2$

1.2 解分式方程  $\frac{2x}{3-x} = 1 - \frac{2}{x-3}$

1.3 解方程组 
$$\begin{cases} x(y+1) + y(1-x) = 2 \\ x(x+1) - y - x^2 = 0 \end{cases}$$

答案: 1.1  $x=-2/3$  或  $4$ ; 1.2  $5/3$ ; 1.3  $x=1, y=1$

### 11.15 实例 解不等式

#### 1.解不等式

1.1  $\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1}$

1.2  $\frac{2x^2+3x-7}{x^2-x-2} \geq 1$

1.3  $\frac{x^2+x}{2x+1} \leq 1$

答案:

1.1  $\{x|(-1,0) \text{ 或 } (1,+\infty)\}$

1.2  $\{x|x \leq -5 \text{ 或 } -1 < x \leq 1 \text{ 或 } x > 2\}$

1.3  $\{x|x \leq (1 - \sqrt{5})/2 \text{ 或 } -1/2 < x \leq (1 + \sqrt{5})/2\}$

## 11.16 实例 计算三角函数

1.1 已知  $\tan(x)=2$ , 计算  $y_1 = \frac{3\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x}$

1.2 已知  $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}, 0 \leq x < \pi$ , 求  $\tan(x)$

答案: 1.1  $y_1 = 7/3$ ; 1.2  $-4/3$

## 11.17 非线性函数求根 fzero

### 1.实例

(1)  $x^3 - x - 1 = 0$  在  $x_0 = 1.5$  附近的解 (解: 1.324)

(2)  $x - \cos(x) = 0$  在区间  $(0, \pi/2)$  的解 (解: 0.739)

### 2.认识函数

fzero

### 3.说明

Root of nonlinear function

非线性函数的根

## 11.18 非线性方程组求解 fsolve

### 1.实例

(1) 解方程组

$$\begin{cases} 2*x - y - \exp(-x) = 0 \\ -x + y - \exp(-y) = 0 \end{cases}$$

## (2) 解矩阵方程

$$X^2 + 3X = [-4 \ 24; -12 \ 2]$$

### 2.认识函数

fsolve

### 3.说明

#### 3.1 问题定义

非线性方程组求解

关键词：x 是向量或矩阵/多值函数

#### 3.2 算法

trust-region dogleg method

Levenberg-Marquardt

#### 3.3 注意

待求解的函数必须是连续的；

如果有多个解，fsolve 只能给出一个解；

本系列教程结束

欢迎交流和留言

作者/旺旺/微信公众号/UP: freexyn

邮箱: freexyn@163.com (建议、提问、合作、供稿等, 请发邮件)

[点击官方小店](#) >> [试看全部课程](#) <<

**End**