

# Numerikus módszerek 2B.

2. előadás: Csebisev polinomok

Dr. Bozsik József

ELTE IK

2023. szeptember 21.

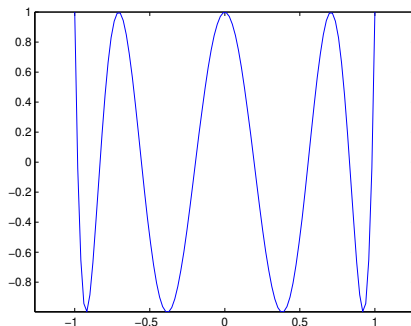
- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 Inverz interpoláció

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 Inverz interpoláció

## Definíció: Csebisev-polinom

A  $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$ ,  $x \in [-1; 1]$  függvényt  $n$ -edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

A 8-adfokú Csebisev-polinom:



## 1. Tétel: Rekurzió

$$\begin{aligned}T_0(x) &:= 1, \quad T_1(x) := x, \\T_{n+1}(x) &:= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

**Biz.:** Vezessük be az  $\alpha = \arccos(x)$  jelölést ( $x = \cos(\alpha)$ ):

$$\begin{aligned}2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) &= 2 \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) = \\&= 2 \cos(\alpha) \cos(n\alpha) - [\cos(n\alpha) \cos(\alpha) + \sin(n\alpha) \sin(\alpha)] = \\&= \cos(n\alpha) \cos(\alpha) - \sin(n\alpha) \sin(\alpha) = \cos((n+1)\alpha) = T_{n+1}(x).\end{aligned}$$

## Következmény:

$T_n \in P_n$  és főegyütthatója:  $2^{n-1}$  ( $n \geq 1$ )-re.

**Definíció:**

$$\tilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom.  $\tilde{T}_n \in P_n^{(1)}$ , ahol  $P_n^{(1)}$ : az 1 főegyütthatós  $n$ -edfokú polinomok halmaza.

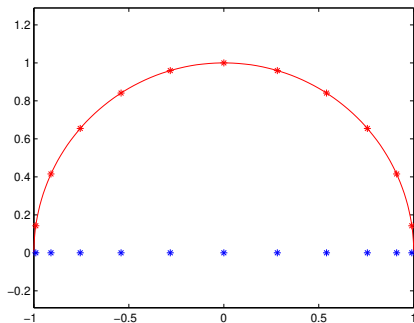
**2. Tétel:**

- $T_n$ -nek  $n$  db különböző valós gyöke van  $[-1; 1]$ -en.
- A gyökök a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.
- Ha  $n$  páros, akkor  $T_n$  páros függvény,  
ha  $n$  páratlan, akkor  $T_n$  páratlan függvény.

**Biz.:**  $\cos(n \arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow n \arccos(x_k) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom gyökei (kékkel):



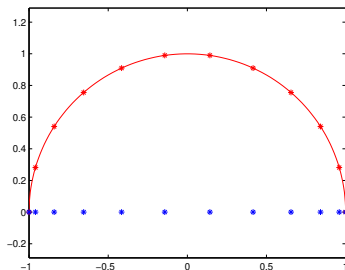
### 3. Tétel:

$T_n$ -nek  $n + 1$  db szélsőérték helye van  $[-1; 1]$ -en.

**Biz.:**  $\cos(n \arccos(x)) = (-1)^k \Leftrightarrow n \arccos(\xi_k) = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), (k = 0, 1, \dots, n)$$

A 11-edfokú Csebisev-polinom szélsőérték helyei (kékkel):





#### 4. Tétel: Csebisev-tétel

A  $(T_n, n \in \mathbb{N})$  rendszer extrémális tulajdonsága:

$$\min_{\tilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\tilde{Q}\|_{\infty} = \|\tilde{T}_n\|_{\infty} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol  $\|\tilde{Q}\|_{\infty} := \max_{x \in [-1;1]} |\tilde{Q}(x)|$ .

**Alkalmazás:** Az interpolációs hibaformulában az  $\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$  függvény 1 főegyütthatós  $n + 1$ -edfokú polinom, alkalmazhatjuk rá a Csebisev-tételt. Ha a  $[-1; 1]$ -en vett interpoláció során az alappontok az  $n + 1$ -edfokú Csebisev-polinom gyökei, vagyis  $\omega_n(x) \equiv \tilde{T}_{n+1}(x)$ , akkor a hiba a  $[-1; 1]$  intervallumon minimális lesz.

**5. Tétel:** Az interpoláció hibája  $[-1; 1]$ -en

A  $[-1; 1]$ -en vett interpoláció és  $f \in C^{(n+1)}[-1; 1]$  függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_{\infty} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_{\infty} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

**Biz.:** Lásd a Csebisev-tételt és a következményét.

**Megj.:** Ha az interpolációs alappontokat választhatjuk, akkor azok a Csebisev-polinom gyökei legyenek.

**6. Tétel:** Az interpoláció hibája  $[a; b]$ -n

Az  $[a; b]$ -n vett interpoláció és  $f \in C^{(n+1)}[a; b]$  függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az  $[a; b]$ -be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\begin{aligned}\|f - L_n\|_\infty &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|\tilde{T}_{n+1}\|_\infty = \\ &= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

**Biz.:** Lásd a Csebisev-tételt és a  $\varphi : [-1; 1] \rightarrow [a; b]$  lineáris transzformációt:

$$\varphi(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad x \in [-1; 1].$$

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 Inverz interpoláció

# Az interpolációs polinomok konvergenciája

Az  $(x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontsorozat esetén jelöljük  $(L_n)$ -nel az alappontokhoz tartozó interpolációs polinom sorozatot.

$$(x_0^{(0)}) \rightarrow L_0$$

$$(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) \rightarrow L_1$$

$$(x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \rightarrow L_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \rightarrow L_n$$

## Kérdések:

- ❶  $(L_n)$  egyenletesen konvergál-e  $f$ -hez, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0 \quad ?$$

- ❷ Milyen  $f$ -re?  
❸ Milyen alappontrendszer esetén?

## Tétel:

- 1 Tegyük fel, hogy  $f \in C^\infty[a; b]$  és
- 2  $\exists M > 0 : \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n \ (\forall n \in \mathbb{N})$ .

Ekkor  $\forall (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

**Biz.:** A hibaformulából levezethető.

## **Tétel:** Marcinkiewicz

$\forall f \in C[a; b]$  esetén  $\exists (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} = 0.$$

## **Tétel:** Faber

$\forall (x_k^{(n)} : k = 0, 1, \dots, n)$  alappontrendszer sorozat esetén  
 $\exists f \in C[a; b]$ , hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n\|_{\infty} \neq 0.$$

- 1 Csebisev-polinomok
- 2 Az interpolációs polinomok konvergencia kérdései
- 3 Inverz interpoláció**



Az interpoláció alkalmazása  $f(x) = 0$  típusú egyenletek megoldására, az  $x^*$  gyök közelítésére.

- 1 Az  $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$  alappontokra és  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  függvényértékekre felírjuk az  $L_n(x)$  interpolációs polinomot.

$$L_n(x^*) = 0 \text{ megoldjuk} \quad \rightarrow \quad x_{k+1} := x^*$$

Ezt alkalmaztuk a szelő-módszer és a Newton-módszer esetén is.  $n > 2$ -re problémás a gyökkeresés, nem általánosítható.

- 2 Tegyük fel, hogy  $f$  invertálható  $[a; b]$ -n, ekkor az  $f$  függvény helyett az inverzét közelítjük.

$$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = f^{-1}(0) \text{ helyettesítés}$$

Az  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  alappontokra és  $x_0, \dots, x_n \in [a; b]$  függvényértékekre felírjuk az  $Q_n(y)$  interpolációs polinomot.

$$Q_n(y) \approx f^{-1}(y), \quad \rightarrow \quad x_{k+1} := Q_n(0)$$