Matrices et transformations du plan

On se place dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

- Une **translation** de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui, à tout point $M = (x,y)$ du plan, associe le point $M' = (x',y')$ tel que $\vec{MM'} = \vec{u}$ se définit matriciellement comme la somme des matrices colonnes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- On peut aussi définir des transformations géométriques planes à l'aide de **matrices de transformation** $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui, à tout point $M = (x,y)$ du plan associent le point $M' = (x',y')$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Ainsi :
  - La symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses s'obtient en posant $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
  - La symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées en posant $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
  - La rotation de centre O d'angle θ en posant $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;
  - L'homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}$ en posant $T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Remarque : La translation est la seule transformation usuelle s'exprimant sous forme additive. Les autres s'expriment sous forme multiplicative.

Exemples : Pour une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la matrice T est $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice associée à la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Questions préliminaires

Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $A = (2, 4)$ et $B = (5, 3)$.

1. Calculer les coordonnées de l'image A' de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Calculer les coordonnées de l'image B' de B par la translation de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dragon de Heighway

On construit une suite de points de la façon suivante :

- Le premier point est $O = (0{,}0)$.
- À partir de ce point O, chaque point est obtenu à partir de son prédécesseur en appliquant une transformation f_1 ou f_2. Les transformations f_i sont associées à une relation matricielle de la forme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_i \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{u}_i$$

- Pour chaque nouveau point, on choisit au hasard et de façon équiprobable l'une des deux transformations f_1 ou f_2 suivantes :
  Pour $f_1 \; : \; T_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; pour $f_2 \; : \; T_2 = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Écrire une fonction Python `transformation1(p)` qui prend en paramètre d'entrée un point p de coordonnées x, y et retourne les coordonnées $x1$, $y1$ de son image par f_1.
2. Écrire une fonction Python `transformation2(p)` qui prend en paramètre d'entrée un point p de coordonnées x, y et retourne les coordonnées $x2$, $y2$ de son image par f_2.
3. Compléter le script `TP8.py` à l'aide de vos fonctions `transformation1(p)` et `transformation2(p)` puis l'exécuter afin d'obtenir le dragon de Heighway.

Fougère de Barnsley

Le mathématicien anglais Michael Barnsley a décrit comment, à partir d'un point, créer des figures en forme de fougères à l'aide des transformations suivantes :

- Le premier point est $O = (0{,}0)$.
- À partir de ce point O, chaque point est obtenu à partir de son prédécesseur en appliquant une transformation f_1 avec une probabilité de 0,01 ; f_2 avec une probabilité de 0,85 ; f_3 avec une probabilité de 0,07 ; ou f_4 avec une probabilité de 0,07.
- Les transformations f_i sont associées à une relation matricielle de la forme
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_i \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{u}_i$$
Pour f_1 : $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}16 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; pour f_2 : $T_2 = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}04 \\ -0{,}04 & 0{,}85 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$;
pour f_3 : $T_3 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}26 \\ 0{,}23 & 0{,}22 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$; pour f_4 : $T_4 = \begin{pmatrix} -0{,}15 & 0{,}28 \\ 0{,}26 & 0{,}24 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}$

1. Modifier le programme de la partie précédente pour tracer la fougère de Barnsley.
2. Modifier le nombre de points tracés pour constater les effets sur la fougère.
3. Chacune des quatre transformations est responsable de la création d'une partie de la fougère, saurez-vous retrouver laquelle ?

Fractale en forme d'arbre

On reprend le principe d'un grand nombre de répétitions d'une famille de trois transformations géométriques, cette fois-ci équiprobables.

- On pose $c = 0{,}255$, $r = 0{,}75$, $q = 0{,}625$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{8}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{5}$.
- Pour f_1 : $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Pour f_2 : $T_2 = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 \\ r\sin\theta_1 & r\cos\theta 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}5r\cos\theta_1 \\ c - 0{,}5r\sin\theta_1 \end{pmatrix}$
- Pour f_3 : $T_3 = \begin{pmatrix} q\cos\theta_2 & -r\sin\theta_2 \\ q\sin\theta_2 & r\cos\theta_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}5q\cos\theta_2 \\ 0{,}6c - 0{,}5q\sin\theta_2 \end{pmatrix}$.

1. Modifier le programme de la partie précédente pour tracer la nouvelle fractale.
2. Modifier le nombre de points tracés et constater les effets su l'arbre.