Mineur d'une matrice

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ étant donnée, on appelle **mineur** d'indice i,j de A la matrice $A_{i,j}$ obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j de A.
Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 1 : Écrire une fonction `mineur` qui prend en paramètres d'entrée une matrice A, les indices i et j puis retourne le mineur $A_{i,j}$.

Déterminant d'une matrice carrée

On a vu dans le cours que l'on pouvait définir le déterminant d'une matrice carrée de dimension 2 par la formule :

$$\det M = ad - bc \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Question 2 : Écrire une fonction `det2` qui prend en paramètres d'entrée une matrice A de dimension 2 et retourne la valeur de son déterminant calculé à l'aide de la formule précédente.

On se propose maintenant de généraliser le calcul du déterminant aux **matrices carrées** de dimensions plus grandes. Pour ce faire on va utiliser deux propriétés (admises) du déterminant :

– Si $\tilde{A}$ est une matrice obtenue à partir de A par combinaisons linéaires des lignes et des colonnes de A, alors $\det \tilde{A} = \det A$.
  Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  les combinaisons $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_2$ et $\mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_3$ donnent

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

  et

$$\det A = \det \tilde{A}.$$

– Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\det A = a_{1,1} \times det A_{1,1}$$

où $A_{1,1}$ est le mineur d'indice 1,1 de A :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}.$$

Par exemple

$$\det(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \times \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On est donc en mesure de calculer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \times \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \times (-4 - 3) = -7.$$

Question 3 : Écrire une fonction `colonne` qui prend en paramètres d'entrée une matrice carrée A et retourne la matrice $\tilde{A}$ obtenue à partir de A par combinaisons linéaires de ses lignes et dont les termes de la première colonne sont nuls à l'exception du premier terme $a_{1,1}$ (le cas où il serait nul n'est pas à prendre en compte).
Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

la fonction retourne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

après avoir effectué les combinaisons linéaires : $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_2$ et $\mathcal{L}_3 - 3\mathcal{L}_1 = \tilde{\mathcal{L}}_3$

Question 4 : Écrire une fonction `determinant` qui prend en paramètres d'entrée une matrice carrée A de dimension supérieure ou égale à 2 et retourne la valeur de son déterminant, calculé de manière récursive à l'aide des propriétés précédentes en utilisant les fonctions `colonne`, `det2` et `mineur`