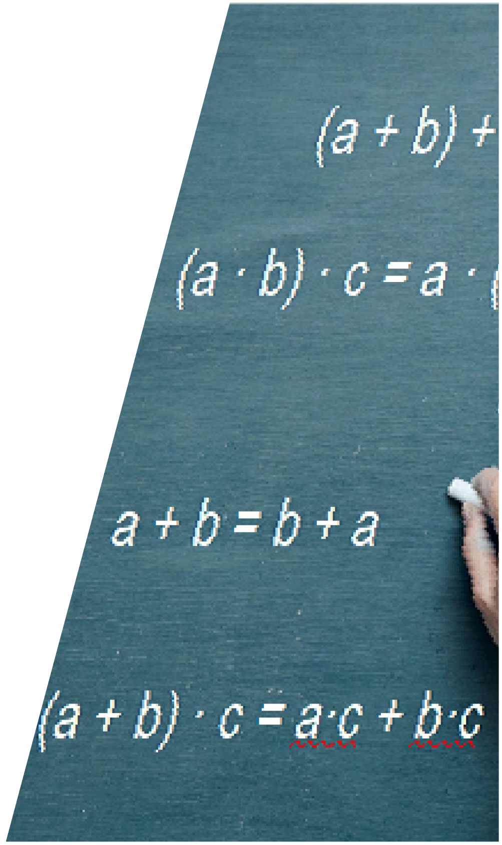
Cours 4

Opérations internes

Ressource R1.06 - Mathématiques Discrètes

Tiphaine Jézéquel, Mickaël Le Palud

2023-2024



Plan du cours

1. Propriétés d'une opération : commutativité, associativité
2. Éléments notables d'une opération : neutre, absorbant
3. Lien entre 2 éléments : éléments symétriques
4. Lien entre 2 opérations : distributivité
5. Tables de Pythagore

Qu'est-ce qu'une opération interne ?

Définition

Une **opération interne** $\star$ (ou **loi de composition interne**) sur un ensemble E est une relation qui, à deux éléments x et $y \in E$, associe un unique élément noté $x \star y$ **appartenant à** E.

Exemples :

- L'addition sur l'ensemble $\mathbb{N}$: à deux entiers a et b (par exemple 2 et 3), l'opération $+$ associe l'entier $a + b$ (5 dans cet exemple).
- ...
- ...
- ...

Pourquoi étudier les opérations internes ?

- **Utilité théorique (en maths surtout) :** si on démontre qu'un théorème est vrai dans le cas de l'opération addition, une autre opération qui aura les mêmes propriétés que l'addition vérifiera aussi ce théorème... pas besoin de le re-démontrer.

  Exemple : $(a \oplus b) \otimes (a \oplus b) = a^2 \oplus 2a \otimes b \oplus b^2$ marche pour toutes les lois $\oplus$ et $\otimes$ qui sont *commutatives* et *distributives*.

  $\hookrightarrow$ vous le verrez dans la 2e ressource de maths avec les opérations sur les **matrices** (addition, multiplication, inversion,...)

- **Utilité en informatique,** pour le codage d'une opération : il faut dire à l'ordinateur les propriétés de l'opération qu'on introduit.

  $\hookrightarrow$ vous le verrez en BDD avec les opérations sur les **bases de données** (union, concaténation...)

1. Propriétés d'une opération : commutativité, associativité

Dans toute la suite on suppose que $\star$ est une opération interne dans un ensemble E.

Définition : commutativité

L'opération $\star$ est **commutative** dans E si :

$$\forall x, y \in E, \quad x \star y = y \star x$$

Exemples :

- L'addition est commutative dans $\mathbb{R}$ mais pas la soustraction.
-

Définition : associativité

L'opération $\star$ est **associative** dans E si :

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

Exemples :

- L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ sont associatives.
-

Exercices :

- L'opération ET sur l'ensemble des propositions est-elle associative ?
- La soustraction sur $\mathbb{Z}$ est-elle associative ?

2. Éléments notables d'une opération : neutre, absorbant

Définition

L'élément e de E est appelé **élément neutre** pour l'opération $\star$ si :

$$\forall x \in E, \quad x \star e = x = e \star x$$

Quand il existe un tel e dans E, on dit que l'opération $\star$ **possède un élément neutre**.

Exemples :

- L'addition dans $\mathbb{R}$ possède un élément neutre : 0.

Exercices :

- La multiplication dans $\mathbb{R}$ a-t-elle un élément neutre, si oui lequel ?
- *Plus difficile.* Même question pour l'opération *ET* sur l'ensemble des propositions.

Définition

L'élément a de E est appelé **élément absorbant** de l'opération $\star$ si :

$$\forall x \in E, \quad x \star a = a = a \star x$$

Quand il existe un tel a dans E, on dit que l'opération $\star$ **possède un élément absorbant** dans E.

Exemples :

- La multiplication dans $\mathbb{R}$ possède un élément absorbant : 0.

Exercices :

- L'addition dans $\mathbb{R}$ a-t-elle un élément absorbant, si oui lequel ?
- *Plus difficile.* Même question pour l'opération *ET* sur l'ensemble des propositions.

3. Lien entre 2 éléments : éléments symétriques

Définition

On suppose que l'opération $\star$ possède un élément neutre e.
On dit que l'élément x de E admet un **symétrique** x' pour l'opération $\star$ si :

$$x \star x' = x' \star x = e$$

Quand un élément x de E admet un symétrique x', on dit que x est un élément **symétrisable**.

Exemples :

- Tout réel possède un symétrique pour l'addition dans $\mathbb{R}$.
  Soit x un réel, le x' de la définition vaut alors $x' =$ ......
  Ce symétrique est appelé ......
- Tout réel non nul est symétrisable pour la multiplication de $\mathbb{R}$.
  Soit x réel non nul, le x' de la définition vaut alors $x' =$ ......
  Ce symétrique est appelé ....

4. Lien entre 2 opérations : distributivité

Définition

On suppose que $\star$ et $\circ$ sont deux opérations internes sur E.
On dit que l'opération $\star$ est **distributive** par rapport à l'opération $\circ$ si :

$$\forall x, y, z \in E, \quad x \star (y \circ z) = (x \star y) \circ (x \star z)$$

Exemple :

- Dans $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$$

5. Tables de Pythagore

(partie qui sera complétée en TD)

Propriétés d'une opération définie par sa table

Soit $\star$ une opération interne sur un ensemble E, dont on connait la table de Pythagore.

- $\star$ est **commutative** si et seulement si sa table de Pythagore et symétrique par rapport à sa diagonale.
- e est un **élément neutre** pour $\star$ si la ligne et la colonne de e reprennent la liste des éléments de E dans l'ordre de la table.
- a est un **élément absorbant** pour $\star$ si la ligne et la colonne de a sont remplies de a.

DS1

Le DS1 sera pendant votre TD situé entre le 3 et le 5/10.

- **Durée** : 30min (40min pour les tiers-temps).
- **Programme** : feuilles TD 1, 2 et 3.
- Sur 20 points, avec :
  - sur 16 points : exercices "types", sosies d'exercices faits en TD en dehors de la partie approfondissement,
  - sur 4 points : exercices "pas types".
- Calculatrices et documents non autorisés.

Rappel : le DS2 aura lieu le **vendredi 10/11 de 15h45 à 17h15 (17h45 pour les tiers-temps)**.
Il portera sur tout ce que vous aurez vu en TD sur l'ensemble des Mathématiques Discrètes.

Ces informations apparaissent dans le cours Moodle, section *Evaluation*.
Il y a des énoncés de DS des années précédentes dans la section *Annales*.

Interro Moodle sur le Cours 4 (et un peu 3)

Test à faire sur Moodle avant lundi 2/10 à 23h59.

Questions du Test sur le Cours 4 (et un peu 3) :

1. *(sur le Cours 3)* Je vous donne 2 ensembles E et F, vous devez dire combien il y a d'éléments dans $E \times F$.

   Par exemple $\{1,2\}x\{b,c\}$ *est l'ensemble* $\{(1,b),(1,c),(2,b),(2,c)\}$, *qui a 4 éléments (ce sont 4 couples).*

2. Je vous donne une opération interne sur un ensemble (une des opérations vues en exemples dans ce cours) : est-elle commutative ? est-elle associative ? (cases à cocher).

3. Je vous donne une opération interne sur un ensemble (une des opérations vues en exemples dans ce cours) : dire si cette opération a un élément neutre, et si oui lequel.

4. Je vous donne une opération interne sur un ensemble (une des opérations vues en exemples dans ce cours) : dire si cette opération a un élément absorbant, et si oui lequel.