Exercices d'entraînement

Exercice 1.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, A^4.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Correction :

On a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A^4 = I_2$, alors on a $A \times A^3 = I_2$ et donc $A^{-1} = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

Soit a et b deux réels et $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

1. Quelle relation existe-t-il entre a et b quand A n'est pas inversible?
2. Déterminer a et b tels que A soit inversible et $A = A^{-1}$.

Correction :

1. A est non inversible si, et seulement si, $\det(A) = 0$.
   Or, $\det(A) = 2a - b$.
   Donc A n'est pas inversible lorsque $2a - b = 0$, c'est-à-dire $b = 2a$.
2. Si $A^{-1} = A$, alors $A \times A^{-1} = I_2$ donne $A^2 = I_2$.
   Or, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b & a + 2 \\ ab + 2b & b + 4 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $\begin{cases} a + 2 & = 0 \\ b + 4 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = -2 \\ b & = -3 \end{cases}$ et on a bien $a^2 + b = 1$ et $ab + 2b = 0$ (et $b \neq 2a$).
   Sous ces conditions, on a $A^2 = I_2$ et A inversible.

Exercice 3.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Correction :

On a, d'une part, $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et, d'autre part :

$$2I_3 - A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A^2 = 2I_3 - A$, d'où $2I_3 = A^2 + A$ et ainsi $I_3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A = A\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3\right)$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Exercice</u> 4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$A^2 = \alpha A + \beta I_3.$$

2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3. Déterminer la matrice A^{-1}.

Correction :

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ donc $A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$ et donc $A^2 = 9A - 18I_3$.
2. De ce qui précède on déduit $9A - A^2 = 18I_3$ puis $A \times \dfrac{(9I_3 - A)}{18} = I_3$.
   A est donc inversible et son inverse est $A^{-1} = \dfrac{(9I_3 - A)}{18}$.
3. Finalement, après calculs, on trouve $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

<u>Exercice</u> 5.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

Correction :

1. Un calcul explicite donne $(A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$..
2. De $(A - I_3)^3 = 0_3$ on déduit $A^3 - 3A^2 - 3A - I_3 = 0_3$.
   Donc $A(A^2 - 3A - 3I_3) = I_3$ et A est inversible, d'inverse $A^{-1} = A^2 - 3A - 3I_3$.