TD6
Applications injectives, surjectives, bijectives

A. Parcours des notions du cours

Exercice 1
Soit la relation $\mathcal{R} = (E, F, L)$ avec $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$L = \{(a, 2), (c, 1), (d, 1), (b, 3)\}.$$

1. Représenter le diagramme sagittal de cette relation.
2. Est-ce une application ? Si oui est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2
On s'intéresse à plusieurs applications $\mathcal{R} = (E, F, L)$.
Pour chacun des cas, l'application est-elle injective ? Si non, justifier. Est-elle surjective ? Bijective ? Si non, justifier.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{1, 2, 3\}$, $L = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$
2. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$
3. $E = \{1, 2, 4\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $L = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1)\}$
4. $E = \{1, 2, 4\}$, $F = \{1, 2, 3\}$, $L = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1)\}$

B. Applications en maths

Exercice 3 - *sur un ensemble fini :* $\mathbb{Z}_{12}$
On s'intéresse à l'ensemble des heures de la journée :

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \ldots, \overline{11}, \overline{12}\}$$

Comme à 15h dans la journée, on dit aussi qu'il est 3h, dans cet ensemble on a la particularité que $\overline{15} = \overline{3}$. Et de la même manière on a $\overline{20} = \overline{8}$ ou encore $\overline{23} = \overline{11}$. On pourrait aussi dire que $\overline{27} = \overline{3}$ puisque 27=24+3.
Les applications suivantes sont définies de $\mathbb{Z}_{12}$ dans $\mathbb{Z}_{12}$:

$$\begin{aligned} f_1 : \overline{n} &\mapsto \overline{n+5} \\ f_2 : \overline{n} &\mapsto \overline{2n} \end{aligned}$$

Pour chacune de ces applications :

1. Représentez-la sur un diagramme.
2. Est-elle injective ? surjective ? Quand la réponse est non, justifier.

Exercice 4 - *sur un ensemble infini discret :* $\mathbb{N}$
On considère les applications suivantes, de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Quand la réponse est non, justifier.

1. $f : n \mapsto n + 1.$
2. $f : n \mapsto 2n.$
3. $f : n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$
4. $f : n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$
5. $f : n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n-1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$
6. $f : n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$

C. Relations, fonctions, applications en BDD

Exercice 5

Quelques ancien.ne.s étudiant.e.s du DUT Informatique de Lannion sont encore en contact. Ces étudiant.e.s sont donné.e.s dans l'ensemble "Anciens". Iels habitent aujourd'hui dans des villes différentes. Leur ville à chacun.e est donnée dans l'ensemble Habitants.

$$\begin{aligned}
\text{Anciens} &= \{\text{Jérôme, Nominoe, Théo, Maël, Nolwenn, Lucie, Naomi, Némo}\}\\
\text{Villes} &= \{\text{Lannion, Rennes, Brest, Annecy, Nantes}\}\\
\text{Habitants} &= \{(\text{Jérôme, Rennes}), (\text{Nominoe, Rennes}), (\text{Maël, Lannion}),\\
&\quad (\text{Théo, Annecy}), (\text{Nolwenn, Brest}), (\text{Lucie, Lannion}),\\
&\quad (\text{Naomi, Rennes}), (\text{Némo, Lannion})\}
\end{aligned}$$

Ceux qui habitent encore à Lannion souhaitent planifier leurs vacances dans différentes villes pour visiter et voir leurs ami.e.s. Dans l'ensemble Amis il y a les couples d'ami.e.s constitués d'un.e lannionais.e et d'un.e non-lannionais.e.

$$\begin{aligned}
\text{Amis} = \{&(\text{Némo, Jérôme}), (\text{Némo, Théo}), (\text{Némo,Nolwenn}),\\
&(\text{Lucie, Nolwenn}), (\text{Lucie, Naomi}), (\text{Maël, Jérôme})\ \}
\end{aligned}$$

1. On s'intéresse à la relation $\mathcal{R}_1$, de Anciens dans Villes, définie par les couples de Habitants : $\mathcal{R}_1$ =(Anciens, Villes, Habitants).
   (a) Représenter le diagramme sagittal de cette relation.
   (b) $\mathcal{R}_1$ est-elle une fonction ? une application ? Justifier à l'aide du diagramme.
   (c) Si $\mathcal{R}_1$ est une application, dire si elle est injective, surjective et/ou bijective. Justifier à l'aide du diagramme.
2. Soit E_1 l'ensemble des anciens du DUT qui habitent encore à Lannion, et E_2 l'ensemble des anciens qui n'habitent plus à Lannion. On s'intéresse maintenant à la relation d'amitié $\mathcal{R}_2$, de E_1 dans E_2, définie par l'ensemble des couples de Amis : $\mathcal{R}_2 = (E_1, E_2,\text{Amis})$.
   (a) Écrire E_1 et E_2 en extension, puis représenter le diagramme sagittal de cette relation.
   (b) $\mathcal{R}_2$ est-elle une fonction ? une application ? Justifier à l'aide du diagramme.
   (c) Si $\mathcal{R}_2$ est une application, dire si elle est injective, surjective et/ou bijective. Justifier à l'aide du diagramme.

. Questions supplémentaires, pour réviser

3. Ecrire en compréhension les ensembles E_1, E_2, puis l'ensemble E_3 des ami.e.s de Némo.
4. Traduire avec des quantificateurs que tou.te.s les lannionai.se.s ont au moins un.e ami.e. On pourra se servir de E_1.
5. Traduire avec les quantificateurs qu'il y a une ville de l'ensemble Villes dans laquelle aucun.e des étudiant.e.s n'habite.
6. (*Plus difficile*) Némo et Lucie souhaitent partir en vacances ensemble. Pour cela, ils choisissent une ville dans laquelle ils ont chacun au moins un.e ami.e. Définir en compréhension l'ensemble E_4 des destinations possibles.

Approfondissement

Exercice 6 - *sur un ensemble infini continu :* $\mathbb{R}$

On considère les applications suivantes, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour chacune d'elles, rappeler schématiquement la forme de son graphe, et s'en aider pour dire si elle est injective, surjective et/ou bijective. Si non, justifier.

1. $f : x \mapsto 2x + 1$.
2. $f : x \mapsto x^2$.
3. $f : x \mapsto x^3$.
4. $f : x \mapsto e^x$.

Exercice 7 - *Ensemble image et image réciproque*

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$.
Pour $A \subset \mathbb{R}$, on définit l'*ensemble image* de A : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.
Pour $B \subset \mathbb{R}$, l'*image réciproque* de B est : $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in B\}$.

1. Calculer $f(A)$ pour les ensembles A suivants :
   $\{2\};\ \{-1\};\ [1,2];\ [-1,2];\ [2,+\infty[;\ ]-\infty,1[;\ \mathbb{R};\ ]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$
2. Calculer $f^{-1}(B)$ pour les ensembles B suivants :
   $\{2\};\ \{-1\};\ [1,2];\ [-1,2];\ [2,+\infty[;\ ]-\infty,1[;\ \mathbb{R};\ ]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

Exercice 8 - *Ensemble image et image réciproque vs surjectivité*

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Donner une condition sur $f(E)$ pour que f soit surjective.
2. On suppose qu'il existe un ensemble $B \subset F$ tel que $B \neq \emptyset$ et $f^{-1}(B) = \emptyset$. Que peut-on en déduire sur l'application f ?

Exercice 9 - *Dans* $\mathbb{R}^2$

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x,0) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$