## Applications des dérivées aux calculs de limites

**Exemple 1.** Le calcul de la limite en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$ fait apparaître le quotien $\dfrac{0}{0}$, c'est donc une **forme indéterminée**.
Pour **lever** cette indétermination, nous allons utiliser les notions vues précédemment sur le calcul des dérivées. En effet :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin)'(0) = \cos(0) = 1$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

**Exercice 1.** Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$,
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$,
4. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^{x^2}$,
5. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^{\sqrt{x}}$,
6. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$,
7. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$.

## Applications des dérivées aux calculs des variations d'une fonction

On rappelle le théorème fondamental suivant :
**Théorème 1.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.*

$\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$, *entraîne $f$ est croissante sur $I$.*
$\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$, *entraîne $f$ est décroissante sur $I$.*
$\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, *entraîne $f$ est strictement croissante sur $I$.*
$\forall x \in I$, $f'(x) < 0$, *entraîne $f$ est strictement décroissante sur $I$.*

**Exercice 2.** Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
Puis, après avoir calculé sa dérivée, dresser son tableau de variations et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
Enfin tracer l'allure de sa courbe représentative $\Gamma_f$ dans un repère bien choisi.

1. $f_1(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$,
2. $f_2(x) = x - \ln x$,
3. $f_3(x) = (x - 1)e^{-\frac{1}{x}}$,
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x - 3}{e^x - 1}$.