Somme et produit par un scalaire

Définition 1. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times p$.

- La **somme des matrices** A **et** B, notée $A + B$, est la matrice $C = c_{i,j}$ de taille $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a : $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.
- Le **produit de la matrice** A **par un réel** λ, est la matrice $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a : $m_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$.

Exemple 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ deux matrices de taille 2×3. Calculer les matrices suivantes :

1. $A + B$,
2. $2A$,
3. $3B$,
4. $2A - 3B$.

Les opérations d'ajout et de multiplication par un scalaire se font avec les opérateurs `+` et `*`.

```
In : A = np.array([[1,2], [3,4]])
In : B = np.eye(2)
In : A + 3*B
Out :
array([[ 4., 2.],
[ 3., 7.]])
```

Exercice 1. Vérifier les calculs précédents à l'aide de Python.

Propriété 1. *Soient A,B,C trois matrices de même taille et α et β deux réels.*

- $A + B = B + A$ *(commutativité de la somme des matrices)*
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativité de la somme des matrices)*
- $1 \times A = A \times 1 = A$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$

Définition 2. On appelle opposée de A la matrice $M = (-1)A$, notée $-A$, telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a : $m_{i,j} = -a_{i,j}$.
De plus, on note $A - B$ la matrice $A + (-B)$.

Remarque 1. L'égalité $M + A = B$ équivaut à l'égalité $M = B - A$.

Produit d'un vecteur-ligne par un vecteur colonne

Définition 3. Soit $L = (l_1, \dots l_p)$ un vecteur-ligne de dimensions $1 \times p$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ un vecteur colonne de dimensions $p \times 1$.
Le produit $L \times C$ (ou LC) est égal au réel :

$$\sum_{i=1}^{p} l_i c_i = l_1 c_1 + l_2 c_2 + \dots + l_p c_p.$$

Exemple 2.

1. $(1\ -3\ \ 2) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -6$
2. Que vaut $(4\ 2\ 1) \times \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$?

Remarque 2. Pour que le produit $L \times C$ soit défini, L doit avoir autant de **colonnes** de C a de **lignes**.

Exercice 2.

1. Écrire une fonction `produitscalaire` qui prend en paramètres d'entrée un vecteur ligne A et un vecteur colonne B, de tailles $1 \times l$ et $l \times 1$, et retourne leur produit scalaire.
2. Vérifier les calculs précédents avec votre fonction.

Produit de matrices

Définition 4. Si A une matrice de dimension $n \times m$ et B une matrice de dimensions $m \times p$, le **produit des matrices** A **et** B, noté $A \times B$ ou (AB), est la matrice $C = (c_{i,j})$ de dimension $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq q$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} c_{k,j}$. Autrement dit, l'élément $c_{i,j}$ est le produit de la i-ème ligne de A par la j-ième colonne de B.

Exemple 3. Pour calculer le produit de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$:

1. On vérifie si le produit peut se calculer, donc si la deuxième matrice a autant de lignes que la première a de colonnes.
2. Chaque coefficient de la matrice est la somme des produits des coefficients de la ligne par ceux de la colonne correspondante.
   On peut donc placer les matrices ainsi :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ M = C \times D = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -19 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a :

$$m_{1,1} = 2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times (-2) = 16 \quad (1)$$
$$m_{2,2} = 2 \times 0 + 3 \times (-1) + (-1) \times (-3) = 0 \quad (2)$$
$$m_{2,1} = 1 \times 1 + (-5) \times 4 + 0 \times (-2) = -19 \quad (3)$$
$$m_{2,2} = 1 \times 0 + (-5) \times (-1) + 0 \times (-3) = 5 \quad (4)$$

Exercice 3. Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.
1. Écrire une fonction `produitmatrice` qui prend en entrée deux matrices A et B, de tailles $m \times p$ et $k \times n$, et retourne leur produit matriciel s'il existe ou un message d'erreur dans le cas contraire.
2. Vérifier les calculs précédents avec votre fonction.

Exercice 5. Soient A,B,C,$D \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 26 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & -11 \\ 10 & -5 & 26 & -6 \\ -12 & -23 & 0 & 38 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A+B)^2$
2. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$
3. Qu'en déduisez vous?
4. De même calculer $(C+D)^2$,$C^2 + 2CD + D^2$, quelle est votre conclusion cette fois?

Remarque 3. Lorsque les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont définis, on a en général $A \times B \neq B \times A$.
Le produit matriciel **n'est pas commutatif**.

Propriété 2. *Soient A, B et C trois matrices et λ un nombre réel. Sous réserve que les expressions soient bien définies, on a :*
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ *et* $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
- $(\lambda A) \times B = \lambda A \times B$ *et* $A \times (\lambda B) = \lambda A \times B$
- $I_n \times A = A \times I_n = A$

Remarque 4. La multiplication est :
- **associative**,
- **distributive** par rapport à l'addition.

Exercices d'entraînement

Pour certains de ces exercices vous pouvez vous aider, au besoin, de vos codes en Python.

Exercice 6. Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, I_n la matrice identitée d'ordre n. Développer et simplifier les produits suivants :

1. $(2A - I_n)(A + 3I_n)$,
2. $(A - 4I_n)(2A + 3I_n)$,
3. $(I_n - A)(I_n + A + A^2)$,
4. $(A + 2I_n)^2$.
5. $(2A - B)(A + B)$,
6. $(-A + 3B)(3A - B)$
7. $(B - 4A)(B + 4A)$,
8. $(3A - B)^2$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 8. Soit M la matrice suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2 puis M^3 et M^4.
2. Conjecturer, pour tout entier naturel n, une expression de M^n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 9. On considère la matrice A : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2. Prouver que $A^3 = -I_2$.
2. Exprimer pour tout entier naturel n, A^{3n}, A^{3n+1},A^{3n+2} en fonction de n.

Exercice 10. Soit A et B deux matrices carrées non nulles d'ordre n telles que $A+B = I_n$. Soit M une matrice carrée d'ordre n telle qu'il existe deux réels non nuls distincts λ et μ vérifiant :

$$M = \lambda A + \mu B \text{ et } M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$$

1. (a) Montrer que $(M - \lambda I_n)(M - \mu I_n) = (M - \mu I_n)(M - \lambda I_n) = O_n$
   (b) En déduire que $AB = BA = 0_n$ et que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
2. Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :
$$M^p = \lambda^p A + \mu^p B.$$
3. **Application :** Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer λ et μ tels que $M = \lambda A + \mu B$ et $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.
   (b) En déduire M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.