Équations du second degré

Proposition 1. *Étant donnée une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on note $P(x) = ax^2+bx+c$ le trinôme associé et on pose $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant de cette équation.*

Trois cas se présentent :

- *si $\Delta = 0$, il existe une racine double réelle qui vaut $-\dfrac{b}{2a}$ et le trinôme se factorise :*

$$P(x) = a(x+\frac{b}{2a})^2,$$

- *si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et une factorisation :*

$$P(x) = a(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}),$$

- *si $\Delta < 0$, on n'a pas de solutions réelle et $P(x)$ est du signe de c pour tout réel x.*

Exercice 1.
1. Résoudre l'équation du second degré $x^2+3x-1=0$.
2. En déduire le signe de $P(x) = x^2+3x-1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.
1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de racines réelles de l'équation du second degré :

$$(m-1)x^2-2(m-2)x+m+1=0$$

2. Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$.

Somme et produit de racines

Proposition 2. *Si le trinôme $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines distinctes ou confondues, alors leur somme S et leur produit P vérifient :*

$$S = \frac{-b}{a} \text{ et } P = \frac{c}{a}.$$

Remarque 1. Ce résultat est surtout pratique lorsque l'on connaît déjà une racine de l'équation afin de déterminer l'autre.
Pour trouver des racines simplement, on peut notamment utiliser les constatations suivantes :

- Si $a+b+c=0$ alors $\alpha = 1$ est une racine du trinôme.
- Si $a-b+c=0$ alors $\alpha = -1$ est une racine du trinôme.

Exercice 3. Trouver a priori une racine de l'équation, puis en déduire l'autre :

1. $3x^2-4x+1=0$.
2. $x^2+19x+18=0$.

Proposition 3. *Deux réels ont pour somme S et pour produit P si, et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.*

Exercice 4. Déterminer les couples de nombres réels qui ont pour somme S et pour produit P, s'ils existent, dans les cas suivants :

1. $S = 2; P = -3$.
2. $S = 2m; P = m^2 - 4$.

Équations algébriques de degré 3 et 4

Proposition 4. *On considère l'équation du troisième degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ et on suppose que l'on connaît une de ses racines α. Alors il existe trois réels a', b' et c' tels que :*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)(a'x^2 + b'x + c')$$

Remarque 2. Ce résultat nous permet de factoriser un polynôme de degré 3 pour se ramener à un polynôme de degré 2. Cela suppose tout de même de déterminer une racine α, les raisonnements suivants peuvent être utiles :

- Si $a + b + c + d = 0$ alors $\alpha = 1$ est une racine du polynôme.
- Si $-a + b - c + d = 0$ alors $\alpha = -1$ est une racine du polynôme.

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes, puis étudier le signe des polynômes associés :

1. $x^3 - 7x + 6 = 0$,
2. $x^2 + x - 6$.

Définition 1. On appelle **équation bicarrée**, une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Remarque 3. Pour résoudre une équation bicarrée on pose $X = x^2$ pour se ramener ensuite à une équation du second degré.

Exercice 6. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$,
2. $x^4 + (m + 1)x^2 + m = 0$.