Sommaire

Il existe plusieures manières de représenter un graphe, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Nous allons présenter les représentations les plus importantes.

1 Représentation des graphes

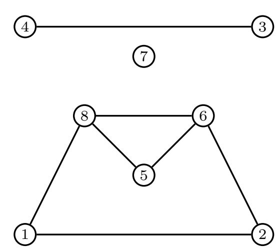
1.1 Listes d'adjacence

Définition 1.1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe (fini). On suppose que les sommets de V sont numérotés de 1 à n.*
La représentation par listes d'adjacence de G consiste en un "tableau" de n "listes", une pour chaque sommet de V.
La liste, $L[i]$ associée au sommet v_i est constituée de tous ses voisins (successeurs pour un graphe orienté) :

$$L[v_i] = \{v_j | \{v_i, v_j\} \in E\}$$

($(v_i, v_j) \in E$ pour un graphe orienté).

On peut déjà noter que cette représentation est adaptée aux graphes peu denses (seules les arêtes existantes sont représentées/stockées). Parmi ses inconvénients on peut remarquer qu'il est difficile de savoir si deux sommets sont effectivement connectés (par une chaîne de longueur supérieure à 1).
Nous avons déjà utilisé cette structure pour les premiers tp.



$L_1 = [2, 8]$	$L_5 = [6, 8]$
$L_2 = [1, 6]$	$L_6 = [2, 5, 8]$
$L_3 = [4]$	$L_7 = [\,]$
$L_4 = [3]$	$L_8 = [1, 5, 6]$

1.2 Matrice d'adjacence

Définition 1.2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n, avec $V = \{v_1 \dots v_n\}$.*
On appelle matrice d'adjacence *de G la matrice $A_G = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i v_j \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas d'un graphe non-orienté cette matrice est donc symétrique.
Pour un graphe orienté le coefficient a_{ij} vaut 1 s'il existe un arc d'origine v_i et d'extrémité v_j (0 sinon).
On peut généraliser la définition précédente aux multigraphes, le coefficient a_{ij} a pour valeur le nombre d'arêtes reliant v_i à v_j (ou le nombre d'arcs allant de v_i à v_j dans le cas orienté).

Exemple 1.1. *Pour les deux graphes, G_1 (orienté) et G_2 (non-orientés) ci-dessous :*

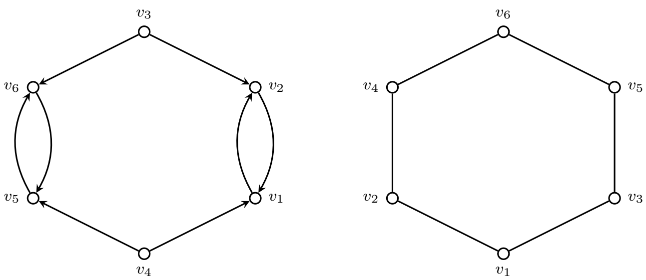


Figure 1: Graphes G_1 et G_2

on obtient les matrices d'adjacence :

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{G_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le résultat principal concernant les matrices d'adjacence est donné par le théorème suivant

Théorème 1.2.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté (resp. orienté) de matrice d'adjacence A_G.*
Le nombre de chaines (resp. chemins) de longueur n joignant le sommet v_i au sommet v_j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice A_G^n.

1.3 Matrice d'incidence

On peut représenter un graphe par une autre matrice, appelée matrice d'incidence. Il faut alors distinguer les cas orientés et non-orientés.

Définition 1.3.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe* ***non-orienté*** *d'ordre n, avec $V = \{v_1 \dots v_n\}$ et de taille m, on suppose que les m arêtes sont numérotées de 1 à m, $E = \{e_1 \dots e_m\}$.*
On appelle matrice d'incidence *de G la matrice $Ic_G = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, telle que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \text{ est une extrémité de } e_j \\ 2, & \text{si } e_j \text{ est une boucle sur } v_i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour le cas orienté la définition précédente devient

Définition 1.3.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe* ***orienté*** *d'ordre n, avec $V = \{v_1 \dots v_n\}$ et de taille m, on suppose que les m arcs sont numérotées de 1 à m, $E = \{e_1 \dots e_m\}$. On appelle* matrice d'incidence *de G la matrice $I_G = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, telle que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{si } e_j \text{ est une boucle sur } v_i \\ 1, & \text{si } v_i \text{ est l'origine de } e_j \\ -1, & \text{si } v_i \text{ est l'extrémité de } e_j \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.3.3. *Attention, certains auteurs utilisent une autre définition en échangeant simplement les valeurs précédentes ($a_{ij} = -1$ si v_i est l'origine de e_j et 1 si c'est l'extrémité de e_j). Cela ne fait aucune différence à condition de ne pas changer de définition en cours de route.*

Exemple 1.2. *Pour les deux graphes, G_1 (orienté) et G_2 (non-orientés) ci-dessous :*

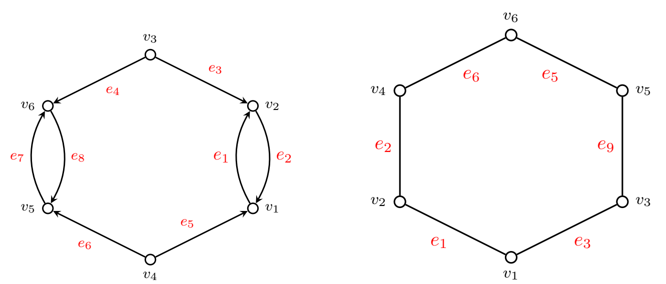


Figure 2: Graphes G_1 et G_2

on obtient les matrices d'incidence :

$$I_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 Matrice des degrés, matrice Laplacienne

Définition 1.4.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n, avec $V = \{v_1 \dots v_n\}$.*
On appelle matrice des degrés *de G la matrice $D_G = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que*

$$a_{ij} = \begin{cases} deg(v_i), & si\ i = j, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

La matrice des degrés est donc une matrice diagonale où l'on retrouve en ligne i le degré du sommet v_i.

Définition 1.4.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté d'ordre n, avec $V = \{v_1 \dots v_n\}$.*
On appelle matrice laplacienne *de G la matrice $L_G = (l_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que*

$$l_{ij} = \begin{cases} deg(v_i), & si\ i = j, \\ -1, & si\ v_i v_j \in E, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

On peut noter que cette matrice peut s'exprimer grâce aux matrices d'adjacence et des degrés :

$$L = D_G - A_G$$

La matrice laplacienne permet, entre autres, de calculer le nombre d'arbres couvrants d'un graphe.

2 Opérations sur les graphes

On peut définir définir des opération sur les graphes en utilisant les opérations sur les ensembles.

2.1 Union disjointe, intersection, différence symétrique

Définition 2.1.1. *Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes tels que $V_1 = V_2$ ou $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ou $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.*
*La **réunion disjointe** des deux graphes G_1 et G_2 est l'opération notée $\cup$ qui associe aux deux graphes précédents le graphe G tel que :*

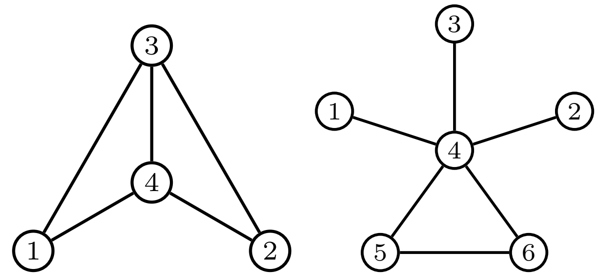
$$G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

On définit de même l'intersection de deux graphes :

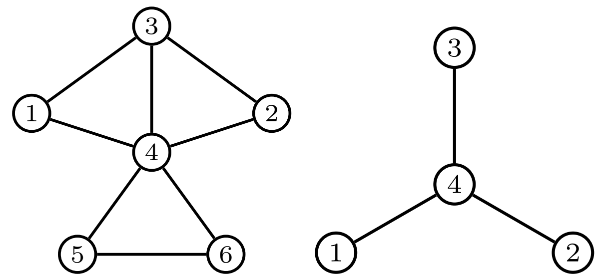
Définition 2.1.2. *Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes.*
***L'intersection** des deux graphes G_1 et G_2 est l'opération notée $\cap$ qui associe aux deux graphes précédents le graphe G tel que :*

$$G = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$$

Pour les graphes G_1 et G_2 suivants, cela donne :



(a) Graphe G_1 (b) Graphe G_2



(a) $G_1 \cup G_2$ (b) $G_1 \cap G_2$

On rappelle que la différence symétrique de deux ensembles V_1 et V_2 notée $V_1 \Delta V_2$ est donnée par

$$V_1 \Delta V_2 = (V_1 \cup V_2) \setminus (V_1 \cap V_2)$$

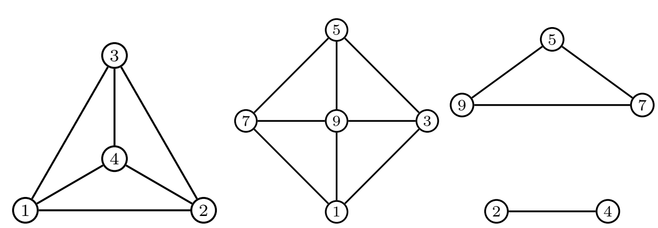
On peut alors définir la différence symétrique de deux graphes :

Définition 2.1.3. *Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes.*
***La différence symétrique** des deux graphes G_1 et G_2 est l'opération notée Δ qui associe aux deux graphes précédents le graphe G tel que :*

$$G = (V_1 \Delta V_2, E)$$

avec

$$E = (E_1 \Delta E_2) \setminus \{uv \mid u \in V_1 \cap V_2 \ \ ou \ \ v \in V_1 \cap V_2\}$$



(a) Graphe G_1 (b) Graphe G_2 (c) Graphe $G_1 \Delta G_2$

2.2 Compléments, produit cartésien

On peut également définir le complément d'un graphe :

Définition 2.2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, on appelle complément de G, le graphe noté $\overline{G}$ tel que*

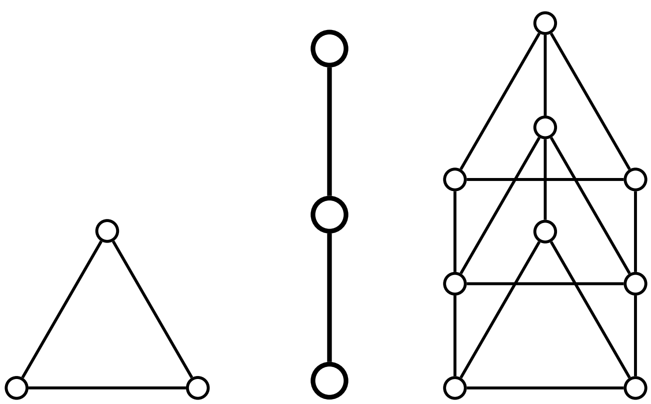
$$\overline{G} = (V, \overline{E})$$

où $\overline{E}$ désigne le complémentaire de E.

Définition 2.2.2. *Le produit cartésien de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, G_2)$ est le graphe $G = (V, E)$ tel que :*

$$V = V_1 \times V_2$$
$$E = (V_1 \times E_2) \cup (E_2 \times V_1)$$

Une illustration du produit cartésien (attention les sommets de $G_1 \times G_2$ sont des couples) :



(a) Graphe G_1 (b) Graphe G_2 (c) Graphe $G_1 \times G_2$

2.3 Opérations matricielles correspondantes

Connaissant les matrices d'adjacences des graphes G_1 et G_2 intervenant dans les opérations élémentaires, on peut en déduire la matrice d'adjacence du graphe résultant G.
La matrice d'adjacence du graphe complément est obtenue simplement en prenant "la négation" de la matrice d'adjacence de G (vue comme une matrice booléenne).
L'intersection en faisant la conjonction (toujours considérées comme des matrices booléennes) des matrices de G_1 et G_2.
Pour la réunion, il faut traiter les cas où $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Pour le premier cas la matrice d'adjacence du produit est la matrice diagonale par blocs avec sur la diagonale les matrices d'adjacences de G_1 et G_2.
Dans le deuxième cas c'est simplement la disjonction des matrices de G_1 et G_2 vues commes des matrices booléennes.