TD2
Quantificateurs $\forall, \exists$

Rappel des principaux ensembles de nombres à connaître :

- $\mathbb{N}$ ensemble des entiers positifs.
- $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels (fractions).
- $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes.

A. Comprendre une proposition avec quantificateurs

Exercice 1

Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\exists x \in \mathbb{N}, \quad x^2 > 7.$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad x^2 > 7.$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \quad \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2.$
4. $\exists x \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in \mathbb{N}, y > x^2.$

B. Compléter une proposition avec quantificateurs

Exercice 2

Complétez, lorsque c'est possible, avec les quantificateurs $\forall$ ou $\exists$, pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$
2. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0,$
3. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad 2x + 1 = 0,$
4. $\ldots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2 \leq 0.$

C. Ecrire une proposition mathématique avec quantificateurs

Exercice 3

Ecrire la négation des propositions de l'exercice 1. Ces nouvelles propositions sont-elles vraies ?

Exercice 4

On considère la proposition P suivante :
$P =$"*Pour tout nombre réel x, il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x.*"

1. Ecrire la proposition P avec des quantificateurs.
2. Ecrire la négation de P avec des quantificateurs, puis l'énoncer en français.

D. Traduire une phrase non mathématique avec quantificateurs

Exercice 5

Notons E l'ensemble des étudiant.e.s de Lannion, et S l'ensemble des jours de la semaine. Pour l'étudiant.e $x \in E$, on note $h_j(x)$ son heure de réveil le jour $j \in S$.

1. Ecrire avec des quantificateurs la proposition : *Tout.e étudiant.e de Lannion se réveille au moins un jour par semaine avant 8h.*
2. Ecrire ensuite la négation de cette proposition avec des quantificateurs, puis l'énoncer en français.

Exercice 6 - *Bases de Données*

On considère les ensembles suivants, donnant les couleurs des chats selon qu'il fait nuit ou jour :

chatsnuit={(Tom,gris),(Felix,gris),(Minou,gris)}
chatsjour={(Tom,roux),(Felix,noir),(Minou,gris)}

1. Formuler avec quantificateur(s) la proposition *"La nuit, tous les chats sont gris"*.
2. Trouver une formulation avec quantificateur(s) pour dire que le jour les chats ne sont pas tous gris.
3. Reformuler les expressions précédentes en n'utilisant que l'ensemble suivant :

   chats={(Tom,nuit,gris),(Felix,nuit,gris),(Minou,nuit,gris),
   (Tom,jour,roux),(Felix,jour,noir),(Minou,jour,gris)}

Approfondissement

<u>Exercice 7</u>

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec les quantificateurs la négation des énoncés qui suivent (on ne demande pas de démontrer si l'énoncé est vrai ou faux) :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.

<u>Exercice 8</u>

Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions :

1. f est une fonction paire
   On rappelle qu'une fonction paire est une fonction dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. f est impaire,
3. f ne s'annule jamais,
4. f n'est pas la fonction nulle,
5. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$,
6. f est inférieure à g,
7. f n'est pas inférieure à g.

<u>Exercice 9</u> - *Difficile sans avoir fait de l'arithmétique (maths expertes)*

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, A l'ensemble des nombres pairs, et B l'ensemble des nombres premiers. Exprimer sous forme symbolique les phrases suivantes.

1. Tout nombre pair est divisible par 2.
2. Aucun nombre impair n'est divisible par 2.
3. Il n'existe pas de nombre premier pair distinct de 2.
4. Tout nombre premier distinct de 2 est impair.
5. Il existe un nombre pair qui divise tout nombre pair.
6. Tout nombre premier divise au moins un nombre pair