Description de l'algorithme

On se propose dans ce TP d'écrire une fonction permettant de calculer l'inverse d'une matrice à l'aide de **l'algorithme de Gauss-Jordan**.

1. Pour illustrer cet algorithme, on considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

L'objectif est de transformer cette matrice en la matrice identité à l'aide de **combinaisons linéaires** de ses lignes.
On commence par créer la **matrice augmentée** suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans un premier temps on cherche à annuler les coefficients situés sous la diagonale principale, en procédant colonne par colonne :

(a) Ainsi, pour faire disparaître le 2 situé sous le premier pivot de la première colonne, on effectue l'opération $L_2 \to L_2 - 2L_1$ (on remplace la deuxième ligne par elle-même moins deux fois la première ligne) :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 12 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tous les termes de la première colonne étant nuls, on passe à la deuxième colonne.

(b) $L_2 \to -L_2$ permet d'avoir le deuxième pivot égal à 1 :

$$A_1' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -12 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis $L_3 \to L_3 - 2L_2$ permet d'annuler le dernier terme sous la diagonale :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -12 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Enfin $L_3 \to \frac{1}{32}L_3$ permet d'avoir le dernier pivot égal à 1 :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -12 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

Maintenant que tous les termes situés sous la diagonale principale sont nuls, l'objectif est d'annuler ceux qui se trouvent au-dessus, en commençant par la troisième colonne, puis la deuxième :

(d) Ainsi $L_2 \to L_2 + 12L_3$ et $L_1 \to L_1 + 4L_3$ donnent après simplification des fractions :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

(e) Enfin $L_1 \to L_1 + L_2$ aboutit à :

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

Si on note N la matrice extraite de A_5 composée de ses trois dernières colonnes, on a :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

(f) Vérifier que N est l'inverse de la matrice M.

2. Reprendre cet algorithme, en adaptant le choix des combinaisons linéaires, pour vérifier que l'inverse de

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Codage de l'algorithme

On se propose d'écrire une fonction `GaussJordan(M)` qui calcule l'inverse d'une matrice carré M de taille quelconque suivant le principe décrit précédemment.

1. Écrire une fonction Python `multiplicationreel(M,i,k)` qui multiplie la ligne i de la matrice M par un réel k.
2. Écrire une fonction Python `elimination(M,i,j,k)` qui soustrait k fois la ligne i à la ligne j.
3. Écrire une fonction Python `GaussJordan(M)` qui retourne l'inverse de la matrice M si elle existe.
4. Tester votre fonction sur les deux exemples précédents.