Tangente à une courbe

Définition 1. Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle $I in \mathbb{R}$.
La droite qui passe par les points distincts $(x_0,f(x_0))$ et $(x,f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, dont on a vu que la limite, quand x tend vers x_0, est $f'(x_0)$.
On appelle **tangente** au point $(x_0,f(x_0))$ la droite d'équation :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

Exercice 1. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 donné, à la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 0$.
2. $f_2(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2}$, $x_0 = 1$.
3. $f_3(x) = \frac{x(ln(x))^2+1}{1+x^2}$, $x_0 = 1$.
4. $f_4(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, $x_0 = a$.

Droites asymptotes

Définition 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, éventuellement non bornée, de $\mathbb{R}$ et soient a et b deux nombres réels.

1. On dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
2. On dit que la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.
3. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative de f si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Remarque 1.
- Pour déterminer les coefficients a et b d'une asymptote oblique, on commence par calculer $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ puis $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b$.
- Dans le cas où $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, on parlera alors de **branche parabolique** de direction $y = ax$.

Exemple 1. Soit f définie par $\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- On a $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à Γ_f en -1.
- Par ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
  Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 2$, on en déduit que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à Γ_f en $+\infty$.
  On montre de même que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à Γ_f en $-\infty$.

Exercice 2. Déterminer les asymptotes à la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x-1}$.
Exercice 3. Faites l'étude complète de la fonction définie par $f(x) = (x + 1)(1 + e^{-x})$