TD5
Relations, fonctions, applications

A. Parcours des notions du cours

Exercice 1
On s'intéresse à la relation $\mathcal{R} = (E, F, L)$ avec $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$L = \{(1, a), (2, a), (3, e)\}.$$

1. Représenter le diagramme sagittal de cette relation.
2. Quels sont les éléments en relation avec a ? avec b ? avec c ?
3. Cette relation est-elle une fonction ? Une application ?
4. Si la relation est une fonction f, que valent $f(1), f(2), f(3), f(4)$?

Exercice 2
On s'intéresse à la relation $\mathcal{R} = (E, F, L)$ avec $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2\}$ et

$$L = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2)\}.$$

1. Représenter le diagramme sagittal de cette relation.
2. Quels sont les éléments en relation avec a ? avec b ? avec c ?
3. Cette relation est-elle une fonction ? Une application ?

B. Notion de fonction

Exercice 3
On s'intéresse à la relation $\mathcal{R} = (A, B, L)$ avec $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e, f\}$. Parmi les différentes valeurs de L suivantes, lesquelles font de $\mathcal{R}$ une relation ? une fonction ?

1. $L = \{(a, b),\ (b, d)\}$.
2. $L = \{(c, c),\ (b, f),\ (a, f)\}$.
3. $L = \{(a, c),\ (c, f),\ (a, c),\ (b, e)\}$.
4. $L = \{(b, e), (a, c)\}$.
5. $L = \{\}$.
6. $L = \{(c, b),\ (d, f)\}$.

C. Notion d'application

Exercice 4
On reprend les relations considérées dans l'exercice 3.
Lesquelles sont des applications ? Pour celles qui n'en sont pas, proposer une modification pour qu'elles le deviennent.

D. Relations définies autrement que par L

<u>Exercice 5</u> - *Par une propriété*

Donner le diagramme sagittal des relations suivantes. Dire s'il s'agit de fonctions ou/et d'applications.

1. R_1 relation de $E_1 = \{1; 2; 3\}$ dans $F_1 = \{4; 5; 6\}$ telle que pour tout $(x, y) \in \{1; 2; 3\} \times \{4; 5; 6\}$, on ait :
$$xR_1y \iff x + y = 6$$
Ecrire de plus l'ensemble L_1 associé à R_1.
2. R_2 relation de $\{1; 2; 3; 4\}$ dans $\{0; 1; 4; 9\}$ définie par :
$$\forall (x, y) \in \{1; 2; 3; 4\} \times \{0; 1; 4; 9\}, \quad xR_2y \iff x^2 = y$$
Ecrire de plus l'ensemble L_2 associé à R_2.
3. R_3 relation de $\{3; 5; 7\}$ dans $\{-10; 1; 11; 27; 28\}$ définie par :
$$\forall (x, y) \in \{3; 5; 7\} \times \{-10; 1; 11; 27; 28\}, \ \ xR_3y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \ \ y = kx$$
4. R_4 relation de $\{3; 5; 7\}$ dans $\{-10; 1; 11; 20; 27; 28\}$ définie par :
$$\forall (x, y) \in \{3; 5; 7\} \times \{-10; 1; 11; 20; 27; 28\}, \ \ xR_4y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = kx$$

<u>Exercice 6</u> - *Par une fonction*

Rappel : pour une fonction $f : A \to B$, le **domaine de définition** D_f *est le sous-ensemble de A constitué des éléments x de A pour lesquels $f(x)$ est bien défini <u>dans B</u>.*

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition D_f et dire si $f : A \to B$ est une application.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n-5 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1; 2] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Approfondissement

suite Exercice 6

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x/y \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & x/y \end{array}$$

<u>Exercice 7</u>

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre de relations, de fonctions et d'applications pouvant exister de E dans F :

1. $E = \{1\}, F = \{1\}$.
2. $E = \{1, 2\}, F = \{1, 2, 3\}$.
3. $E = \{1, 2, 3\}, F = \{1, 2\}$.
4. $E = \{1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 3\}$.

<u>Exercice 8</u>

Soit R la relation de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$xRy \Leftrightarrow a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x) = 0,$$
où $a(x) = 4x^2 + 4x + 1, \quad b(x) = 2x^2 + 5x + 2, \quad c(x) = x^2 + 4x + 4$.

1. Factoriser les trois fonctions polynômiales $a(x)$ puis $b(x)$ et $c(x)$. *On rappelle que si un polynôme $ax^2 + bx + c$ a pour racines x_1 et x_2 alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.*
2. Montrer que R n'est pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
3. Montrer que R est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et donner son domaine de définition D.
4. Soit (x, y) appartenant à $D \times \mathbb{R}$ tel que xRy. Expliciter y en fonction de x.