Taux d'accroissement et nombre dérivé

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 1. On appelle **taux d'accroissement** de f entre x et x_0 le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Exercice 1.
- Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, calculer le taux d'accroissement entre x et 1.
- Si g est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$, calculer le taux d'accroissement entre x et 0.

Définition 2. On dit que f est **dérivable en** x_0 si le **taux d'accroissement** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.
La limite s'appelle alors le **nombre dérivé** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exercice 2. Si $f(x) = x^2$, que vaut $f'(1)$?

Fonction dérivée

Définition 3. f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.
Exemple 1. La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x\to x_0]{} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.
Exemple 2 (Difficile). Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}.$$

Remarquons déjà que la première assertion prouve $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \to 1$ et donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1$.

Pour x_0 quelconque on écrit :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Lorsque $x \to x_0$ alors d'une part $\cos \frac{x+x_0}{2} \to \cos x_0$ et d'autre part en posant $u = \frac{x-x_0}{2}$ alors $u \to 0$ et on a $\frac{\sin u}{u} \to 1$. Ainsi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \cos x_0$ et donc $f'(x) = \cos x$.
Exercice 3. En appliquant la définition du nombre dérivé déterminer le nombre dérivé en 1, puis la fonction dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x + 3,$ $\qquad$ $g(x) = x^3.$

dérivées des fonctions usuelles à connaître :

Les dérivées à connaître sont :

$$\begin{array}{c|c}
f(x) = x^n & f'(x) = nx^{n-1} \\
f(x) = \frac{1}{x} & f'(x) = \frac{-1}{x^2} \\
f(x) = \sqrt{x} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f(x) = \sin(x) & f'(x) = \cos(x) \\
f(x) = \cos(x) & f(x) = -\sin(x) \\
f(x) = \exp(x) & f'(x) = \exp(x) \\
f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x}
\end{array}$$

Proposition 1. *Soit $u,v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I alors*

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u},$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v', \qquad (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exercice 4.
1. Calculer la dérivée de $\tan x$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
2. Calculer la dérivée de $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ sur son ensemble de définition.

Application

Exercice 5. Démontrer les assertions suivantes:
1. On pose $f_1(x) = -3x^4 + 2x^2 + 7$, f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = -12x^3 + 4x$.
2. On pose $f_2(x) = -2x^3 + x + \dfrac{4}{x^2}$, f_2 est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f_2'(x) = -6x^2 + 1 - \dfrac{8}{x^3}$.
3. On pose $f_3(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$, f_3 est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et $f_3'(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$
4. On pose $f_4(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, avec $(a,b,d) \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}^*$, f_4 est définie pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ et $f_4'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
5. On pose $f_5(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$, f_5 est définie sur $]0,\pi[$ et $f_5'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)}$.
6. On pose $f_6(x) = \dfrac{x^2-5x+1}{x^2+x+1}$, f_6 est définie sur $\mathbb{R}$ et $f_6'(x) = \dfrac{6x^2-6}{(x^2+x+1)^2}$
7. On pose $f_7(x) = \dfrac{sin(x)}{2+cos(x)}$, f_7 est définie sur $\mathbb{R}$ et $f_7'(x) = \dfrac{2cos(x)+1}{(2+cos(x))^2}$.