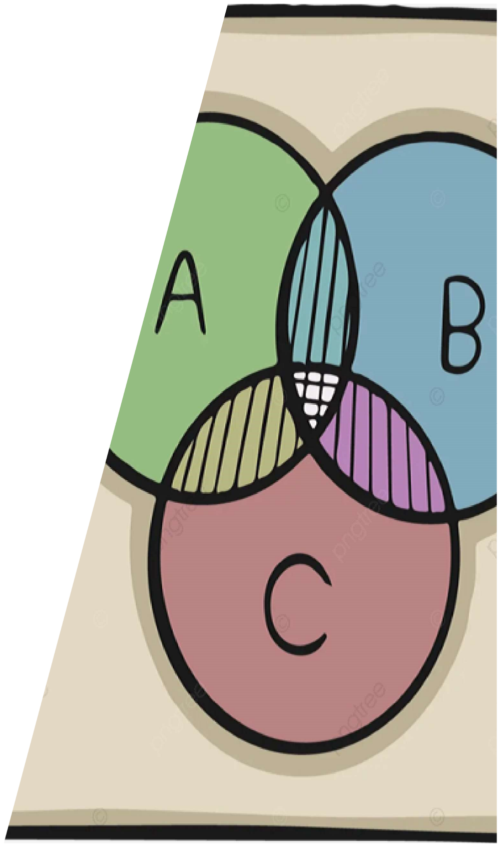
Cours 3

Ensembles



Ressource R1.06 - Mathématiques Discrètes

Tiphaine Jézéquel, Mickaël Le Palud

2023-2024

Plan du cours

1. Notions d'ensemble, d'appartenance
2. Ensembles finis / infinis, cardinal, ensemble vide
3. Définir un ensemble en extension/en compréhension
4. Produit cartésien de 2 ensembles

Pourquoi les ensembles ? - *En informatique : type d'une variable*

- Le **type** d'une variable est l'**ensemble des valeurs** qu'une variable pourra prendre.

Dans un langage **typé**, les variables occupent un nombre d'octets dépendant du **type** de donnée stockée.

Exemple en langage C :

$$\text{int } y;$$
$$y = 2;$$
$$y = 2 * y;$$

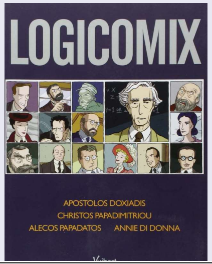
En C, types prédéfinis, puis possibilité de composer, de faire des unions de types...

Pourquoi étudier les ensembles en cours de **maths** ?

Des siècles d'existence : un langage formel qui a fait ses preuves, et est à la base de tous les langages informatiques.

Exemples de notations que vous avez déjà croisées :

- A connaitre :
  - $\mathbb{N}$ ensemble des entiers positifs.
  - $\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs.
  - $\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels (fractions).
  - $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels.
  - $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes.
- Quelques notations : $\in, \bigcap, \subset, \cdots$



Pour la culture...
La **théorie des ensembles** : domaine actif de la recherche en mathématiques.
En effet, il y a des paradoxes comme "L'ensemble de tous les ensembles n'est pas un ensemble".
$\hookrightarrow$ voir la BD "Logicomix".

1. Notions d'**ensemble**, d'**appartenance**

Définitions

- Un **ensemble** est la réunion d'objets bien déterminés. On appelle ces objets les **éléments de l'ensemble**.
- Pour signifier que x est un élément d'un ensemble E on écrit : $x \in E$ et on lit x **appartient à** E.
- Si x n'est pas un élément d'un ensemble E on écrit $x \notin E$ et on dit que x **n'appartient pas à** E.

Remarque : traditionnellement on note les ensembles par une lettre majuscule et les éléments par une lettre minuscule.
...**Remarque**^{2} **:** *ce qui marche moins bien avec des ensembles d'ensembles...*

Exemple : $E_1 = \{\dots$

$\dots \in E_1$

$\dots \notin E_1$

E_1 a $\dots$ éléments.

Exercice : $E_2 = \{1, 3, (1,2), \{2,3\}\}$

$$\begin{array}{rcl} 3 & \dots & E_2 \\ (2,3) & \dots & E_2 \\ \{2,3\} & \dots & E_2 \\ \{1,3\} & \dots & E_2 \end{array}$$

E_2 a $\dots$ éléments.

2. Ensembles **finis / infinis, cardinal, ensemble vide**

Définition

Un ensemble E est dit **fini** lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel.

Définitions

- Lorsqu'un ensemble est fini, le nombre d'éléments est appelé le **cardinal** de l'ensemble et on le note $\mathrm{Card}(E)$.
- Lorsqu'un ensemble n'est pas fini on dit qu'il est **infini**.

Définition

L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$ et son cardinal vaut 0.

Exemples :

- $\mathbb{N}$ est un ensemble infini,
- $\{1,\ 2,\ 3\}$ est un ensemble fini.
- $[1,3]$ est un ensemble infini, *(c'est l'intervalle de 1 à 3)*
- $\{1,3\}$ est un ensemble fini, son cardinal est 2.
- $\mathrm{Card}(\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}) = 4$
- $\mathrm{Card}(\{(1,2)\,,\ (3,4)\}) = 2$

Exercice :
Les ensembles suivants sont-ils finis ou infinis ? Pour les ensembles finis, donner leur cardinal.

- $[1,2]$
- $\{1,2\}$
- $\emptyset$
- $\mathbb{Z}$
- Ensemble des nombres premiers.

3. Définir un ensemble en **extension** / en **compréhension**

Définition

Définir un ensemble **en extension** signifie qu'on le définit en donnant la liste de tous ses éléments.

Remarque : L'ordre, ainsi qu'une éventuelle répétition des éléments, sont sans influence : $\{0,1\} = \{0,0,1\} = \{1,0,0\}$

Exemples :

- $E_3 = \{1,5,4,5\}, \quad Card(E_3) = 3$
- $E_4 = \{(0,1),(1,0),(0,0),(1,1)\}, \quad \ldots \in E_1$

Exercice : Écrire **en extension** les ensembles suivants :

- $E_5 = [3,7] \cap \mathbb{N} =$
- $E_6 = \{1,\ 2,\ 6,\ 5\} \cup \{6,\ 3,\ 4\} =$

Définition

Définir un ensemble **en compréhension** signifie qu'on le définit en énonçant la propriété qui caractérise les éléments de l'ensemble, de la manière suivante :

$$\{e \mid Proposition(e)\},$$

qui se lit "l'ensemble de tous les e tels que la proposition *Proposition(e)* est vraie"

On peut aussi remplacer e par une forme f construite à partir de e :

$$\{f(e) \mid Proposition(e)\},$$

qui se lit "l'ensemble des éléments $f(e)$ pour tous les e tels que la proposition *Proposition(e)* est vraie".

Exemples :

- $\{0,1,2\}$ peut s'écrire en compréhension . . . .
- $\{1,4,9\}$ s'écrit en compréhension . . . .
- $\{(0,1),(1,0),(0,0),(1,1)\}$ peut s'écrire en compréhension :

. . . .

Remarque : L'écriture en compréhension permet de définir des ensembles infinis... l'écriture en extension non.

Exemple : l'ensemble des entiers positifs qui sont des multiples de 3 peut s'écrire

. . . .

Exercice : Proposer une écriture **en compréhension** des ensembles suivants :

- $\{3,4,5\} =$ . . . .
- l'ensemble des nombres entiers pairs

. . . .

Facultatif. Saurez-vous traduire mathématiquement, en compréhension, ces écritures d'ensembles **en Python** ?

- { x for x in N if x < 5 } =
- { x for x in N if x%2==0} =

4. Produit cartésien de 2 ensembles

$\rightarrow$ sera utile en base de données pour modéliser les tableaux à plusieurs entrées

Définition

• On appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble noté $E \times F$ constitué des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$, c'est-à-dire

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \ ET \ y \in F\}.$$

• Deux couples (x, y) et (x', y') de $E \times F$ sont dits **égaux** si on a à la fois $x = x'$ et $y = y'$.On écrit alors $(x, y) = (x', y')$.

• On introduit la **notation** E^n, qui correspond à

$$\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n.$$

Exemples :

- Soient $E_1 = \{a, b, c\}$ et $F_1 = \{1, 2, 3, 4\}$.
  $E_1 \times F_1 = \ldots$
- $\mathbb{R}^2$ désigne ....
- Soit $E_2 = \{$ Collet, Larose$\}$ un ensemble de noms,
  et $F_2 = \{$ Evan, Flavie, Camille$\}$ un ensemble de prénoms.
  L'ensemble des nom-prénom possibles est alors :
  $E_2 \times F_2 = \ldots$

Exercice : Écrire en extension l'ensemble suivant :

- $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\}$

Remarque : Attention à ne pas confondre les 3 notations suivantes :

- (x, y) se dit *le couple* x, y. Équivaut à une liste en Python, en particulier l'ordre compte : $(x, y) \neq (y, x)$.
- $\{x, y\}$ est l'*ensemble à deux éléments* x *et* y. En particulier, on a ici $\{x, y\} = \{y, x\} = \{x, y, x\}$...
- $[x, y]$ est l'*intervalle de* x *à* y. Cette notation n'a de sens que pour x et y nombres réels, et désigne l'ensemble de tous les réels compris entre x et y. En particulier c'est un ensemble infini.

Interro Moodle sur le Cours 3

Test à faire sur Moodle avant lundi 18/09 à 23h59.

Questions du Test sur le Cours 3 :

1. Je vous écris 2 ensembles, vous devez dire s'ils sont définis en extension ou en compréhension.
2. Je vous donne un ensemble et un objet, et vous devez dire si l'objet appartient à l'ensemble.

   Par exemple, je vous donne l'ensemble $E = \{1, (2, 3), 4\}$ *et l'objet* $(3, 4)$. *Vous devrez dire que* $(3, 4)$ *n'appartient pas à* E.
3. Je vous donne 2 ensembles E et F, vous devez dire combien il y a d'éléments dans $E \times F$.

   Par exemple $\{1, 2\}x\{b, c\}$ *est l'ensemble* $\{(1, b), (1, c), (2, b), (2, c)\}$, *qui a 4 éléments (ce sont 4 couples).*