TD4
Opérations internes

A. Reconnaitre une opération interne

Exercice 1
Les opérations suivantes sont-elles internes dans les ensembles précisés ? **Si non, justifier.**

1. L'addition dans l'ensemble des entiers naturels pairs.
2. L'addition dans l'ensemble des entiers naturels impairs.
3. La division dans $\mathbb{Z}$.
4. La division dans $\mathbb{Q}^*$. *Rappel : $\mathbb{Q}^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}$ privé de 0*
5. La soustraction dans l'ensemble des entiers relatifs pairs.
6. La soustraction dans l'ensemble des entiers relatifs impairs.
7. La multiplication dans l'ensemble des entiers relatifs pairs.
8. La multiplication dans l'ensemble des entiers relatifs impairs.

B. Propriétés des opérations internes

Exercice 2 - *Opérations classiques*
Les propositions suivantes sont-elles vraies ? **Justifier vos réponses**.

1. La division dans $\mathbb{R}^*$ est commutative. $\mathbb{R}^*$ *est l'ensemble* $\mathbb{R}$ *privé de 0*
2. La division dans $\mathbb{R}^*$ est associative.
3. L'addition dans $\mathbb{R}$ est distributive sur la multiplication.

Exercice 3 - *Opérations classiques : éléments notables*
Les propositions suivantes sont-elles vraies ? **Justifier vos réponses**.

1. L'addition dans $\mathbb{R}$ possède un élément absorbant.
2. L'addition dans $\mathbb{R}^*$ possède un élément neutre.
3. La soustraction dans $\mathbb{R}$ possède un élément neutre.

Exercice 4 - *Opérations nouvelles*
On définit dans $\mathbb{R}$ les opérations internes $\oplus$ et $*$ définies comme suit. Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$,

$$a \oplus b = a^2 + b^2, \qquad a \star b = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1. Calculer $2 \oplus 3$, puis $1 \oplus (2 \oplus 3)$, et $2 \star 3$ puis $1 \star (2 \star 3)$
2. L'opérations $\oplus$ est-elle commutative ? est-elle associative ?
3. L'opération $\oplus$ admet-elle un élément neutre ? Quels éléments de $\mathbb{R}$ admettent un symétrique pour cette opération ?
4. L'opérations $\star$ est-elle commutative ? est-elle associative ?
5. L'opération $\star$ admet-elle un élément neutre ? Quels éléments de $\mathbb{R}$ admettent un symétrique pour cette opération ?

C. Utiliser une table de Pythagore

Exercice 5 - *Lire la table*

Sur $E = \{a, b, c\}$ on définit une opération interne $*$ par sa table de Pythagore :

$*$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

1. Calculer $(a * b) * c$ et $(a * c) * b$.
2. Trouver les propriétés de cette opération (commutativité, associativité).
3. Admet-elle un élément neutre ?

Exercice 6 - *Faire la table*

On note E l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. À tout couple (a, b) d'éléments de E, on associe le reste de la division euclidienne de a^b par 5. On définit ainsi une opération $*$ où $a * b$ est le reste de la division de a^b par 5.

Par exemple, pour calculer $2 * 4$, *on calcule d'abord* 2^4, *on obtient 16. Quand on fait la division euclidienne de 16 par 5, on obtient un quotient de 3, et un reste de 1, car* $16 = 3 \times 5 + 1$. *L'opération* $2 * 4$ *vaut donc ce reste :* $2 * 4 = 1$.

1. Calculer $2 * 3,\ 3 * 3,\ 1 * 3,\ 4 * 3$.
2. Donner la table de Pythagore de cette opération.
3. Démontrer que $*$ est une opération interne dans E.
4. Trouver les propriétés de cette opération (commutativité, associativité).
5. Trouver toutes les solutions dans E des équations suivantes :

$$x * 4 = 1, \quad 2 * x = 3, \quad 4 * x = 2, \quad 1 * x = 1, \quad x * 1 = 1.$$

D. Exemples fondamentaux

Exercice 7 - *Somme et produit de Booléens*

Soit $\mathbb{B} = \{0,\ 1\}$

1. Écrire les ensembles $\mathbb{B}^2$ et $\mathbb{B}^3$ en extension. On rappelle que $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B} \times \mathbb{B}$.
2. On définit l'opération notée « . », définie par la **table de Pythagore** suivante :

.	0	1
0	0	0
1	0	1

   (a) Cette opération est-elle interne dans $\mathbb{B}$?
   (b) Est-elle commutative dans $\mathbb{B}$?
   (c) Est-elle associative dans $\mathbb{B}$?
   (d) Possède-t-elle un élément neutre dans $\mathbb{B}$?
   (e) 0 et 1 possèdent-ils un symétrique pour . dans $\mathbb{B}$?

3. On définit l'opération notée « + », définie par la **table de valeurs** suivante :

a	b	a+b
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

   (a) Quelle est la table de Pythagore correspondante ?
   (b) Reprendre les questions du 2. pour cette opération.

4. L'addition + définie ci-dessus est-elle distributive par rapport à la multiplication . dans $\mathbb{B}$?
5. La multiplication . est-elle distributive par rapport à + dans $\mathbb{B}$?

L'ensemble $\mathbb{B}$ munit des deux lois de composition interne + et . est l'**algèbre de Boole binaire**.

Exercice 8 - *La composition $\circ$ d'applications*

On considère les quatre applications suivantes de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$:

$$f_1 : x \mapsto x, \quad f_2 : x \mapsto -x, \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}, \quad f_4 : x \mapsto -\frac{1}{x}.$$

On pose $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

On rappelle que la composée de deux applications f et g, notée $f \circ g$, est définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Par exemple, pour calculer $f_2 \circ f_3$, on calcule pour tout x :
$f_2 \circ f_3(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$.
On trouve donc que $f_2 \circ f_3 = f_4$.

1. Que vaut $f_4 \circ f_2$ dans E ?
2. Établir la table de Pythagore de la loi $\circ$.
3. L'opération $\circ$ est-elle une opération interne dans E ? Justifier votre réponse.
4. Si oui, quel est l'élément neutre de la loi $\circ$?

Exercice 9 - *Somme et produit dans $\mathbb{Z}_5$*

On note $\overline{p}$ l'ensemble des entiers relatifs dont le reste dans la division par 5 est p ainsi $\overline{p} = \{p + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On pose $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

1. (a) L'une des 2 égalités suivantes est vraie : $\overline{17} = \overline{3}$ ou $\overline{17} = \overline{2}$. Laquelle ?
   (b) $\overline{-6}$ est égal à un élément de $\mathbb{Z}_5$. Lequel ?
2. On définit une addition sur $\mathbb{Z}_5$ en posant $\overline{p} + \overline{q} = \overline{p + q}$.
   (a) Montrer que $\overline{3} + \overline{4}$ est égal à $\overline{2}$.
   (b) Compléter la table de l'addition de $\mathbb{Z}_5$ ci-dessous.
   (c) Pour chaque $\overline{p} \in \mathbb{Z}_5$ trouver son opposé : $-\overline{p}$.
3. On définit une multiplication sur $\mathbb{Z}_5$ en posant $\overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{pq}$.
   (a) Compléter la table de la multiplication $\mathbb{Z}_5$.
   (b) En déduire les inverses de chaque élément de $\mathbb{Z}_5$.

Addition dans $\mathbb{Z}_5$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$					
$\overline{1}$					
$\overline{2}$					
$\overline{3}$					
$\overline{4}$					

Multiplication dans $\mathbb{Z}_5$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$					
$\overline{1}$					
$\overline{2}$					
$\overline{3}$					
$\overline{4}$					

4. Équation du premier degré
   (a) Résoudre l'équation $\overline{3}x + \overline{2} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}_5$. *Rappel : "résoudre l'équation ..." signifie "trouver tous les x qui vérifient ...".*
   (b) Résoudre l'équation $\overline{2}x + \overline{2} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}_5$.
5. Équation du second degré
   (a) Pour x dans $\mathbb{Z}_5$ mettre l'équation $\overline{4}x^2 + \overline{4} = \overline{0}$ sous la forme $x^2 = \overline{a}$.
   (b) Compléter la table de valeurs de la fonction $f(\overline{p}) = \overline{p}^2$ dans $\mathbb{Z}_5$:

$\overline{p}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$f(\overline{p})$					

   (c) Résoudre l'équation $\overline{4}x^2 + \overline{4} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}_5$.

Approfondissement

Exercice 10
Écrire avec les quantificateurs les phrases suivantes :

1. Il y a un élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.
2. La soustraction dans $\mathbb{R}$ ne possède pas d'élément neutre.
   Indication : on pourra écrire d'abord "La soustraction dans $\mathbb{R}$ possède un élément neutre", puis faire la négation.
3. L'addition n'est pas distributive sur la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. L'addition dans $\mathbb{R}$ ne possède pas d'élément absorbant

Exercice 11 - *Somme et produit dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*
On définit l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Cet ensemble pourra vous rappeler les nombres complexes : les opérations sur $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ ressembleront à celles que vous avez faites sur $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. 0 et 1 appartiennent-ils à $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$? Et $\sqrt{2}$?
2. Plus généralement démontrer que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
3. Montrer que l'addition et la multiplication des nombres réels sont des lois de composition interne dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (on précisera quels sont les éléments neutres pour ces opérations).
4. Montrer que tout élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ admet un symétrique pour $+$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
5. Calculer le produit $(1+\sqrt{2}) \times (-1+\sqrt{2})$. Que peut-on en déduire ?
6. *Plus difficile.* Montrer que $\sqrt{2}$ n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 12
On définit dans $\mathbb{R}$ les opérations internes suivantes : $a \star b = \max(a, b)$ et $a \sim b = \min(a, b)$.

1. Calculer $2 \star 4$, $3 \sim 7$, $3 \star (2 \star 4)$ et $8 * (3 \sim 7)$.
2. Montrer que $\star$ et $\sim$ sont associatives et commutatives.
3. Montrer que $\sim$ est distributive par rapport à $\star$.
4. Ces opérations ont-elles un élément neutre ?

Exercice 13
On définit l'opération $x * y = x + y - xy$.

1. Sur $E = [0, 1]$, montrer que $*$ est une opération interne
2. Etudier les propriétés de $*$ sur E (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables).
3. Sur l'ensemble $F =]-\infty, 1[$, l'opération $*$ est-elle interne ?
4. Si oui, étudier ses propriétés.