ⓒAdib N. Rahmouni. Copyleft.
Permission vous est donnée de copier, distribuer et/ou modifier ce document selon les termes de la Licence GNU Free Documentation License, Version 1.2 ou ultérieure publiée par la Free Software Foundation ; avec pas de section inaltérable, pas de texte de première page de couverture, pas de texte de dernière page de couverture.
On pourra consulter la licence sur http://www.gnu.org/licenses/fdl.html.

Sommaire

1 Graphes non-orientés

On s'interesse dans un premier temps aux graphes non-orientés, non-valués (non-pondérés) et sans arêtes multiples.

1.1 Définition formelle

Définition 1.1.1. *Soient V et E des ensembles finis tels que*

$$V = \{v_1 \dots v_n\}$$
$$E \subset \{\{v_i, v_j\} | v_i, v_j \in V\}$$

On appelle ***graphe non-orienté****, noté G, le couple (V, E). Les éléments de V sont appelés les sommets du graphes (verticies), ceux de E les arêtes (edges). Afin d'alléger les notations, on notera l'arête $\{v_i, v_j\}$ simplement $v_i v_j$.*

On peut déjà noter que $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$, on notera donc indifféremment cette arête $v_i v_j$ ou $v_j v_i$ (d'où le terme non-orienté pour ce graphes).

1.2 Ordre, taille, voisins

Définition 1.2.1. *Le cardinal $|V|$ de V est* ***l'ordre*** *du graphe. Celui de E, $|E|$ est la* ***la taille*** *du graphe.*

Définition 1.2.2. *Soit $v_i v_j \in E$ est une arête d'un graphe non-orienté (V, E). Les sommets v_1 et v_2 sont alors dits adjacents (ou voisins). On notera $\nu(v_i)$ l'ensemble des voisins du sommet v_i*
On dit que l'arêtes $v_i i v_j$ est ***incidente*** *aux sommets v_i et v_j et on notera $\omega(v_i)$ l'ensemble des arêtes de E incidentes à v_i.*

1.3 Degré, formule des poignées de mains

Définition 1.3.1. *Le degré ou la valence d'un sommet v, noté deg(v) (ou simplement $d(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, où une* ***boucle compte double.****.*

On a le résultat suivant appelé **lemme ou formule des poignées de mains** (handshaking formula) :

Lemme 1.3.2. *Soit (V, E) un graphe non orienté, on a*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Exemple 1.1. *Pour le graphe représenté sur la figure 1.*

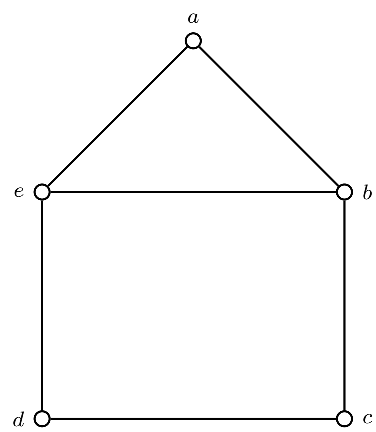

FIGURE 1: Un graphe "maison"

on a,

$$V = \{a, b, c, d, e\ \}$$
$$E = \{ab,\ ae,\ bc,\ be,\ cd,\ de\}$$

$$\nu(a) = \{b, e\} \quad \nu(b) = \{a, c, e\}$$
$$\nu(c) = \{b, d\} \quad \nu(d) = \{c, e\}$$
$$\nu(e) = \{a, b, d\}$$

de même

$$\omega(a) = \{ab,\ ae\},\ \ \omega(b) = \{ba,\ bc,\ be\ \}\dots$$

on a ainsi

$$deg(a) = deg(c) = deg(d) = 2 \ \ et \ \ deg(b) = deg(e) = 3$$

On a bien, comme annoncé par le lemme des poignées de mains :

$$\sum_{v \in V} d(v) = 3 \times 2 + 2 \times 3 = 2|E| = 2 \times 6$$

Exemple 1.2. *Une boucle compte double pour la calcul du degré du sommet concerné, sur l'exemple suivant, cela donne*

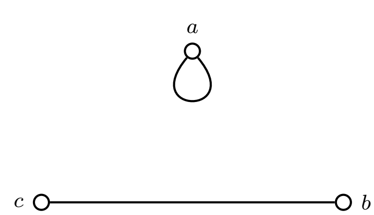

FIGURE 2: Le cas des boucles

$$V = \{a,\ b,\ c\} \ \ E = \{aa,\ bc\}$$

et on a

$$deg(a) = 2 \ \ \ et \ \ deg(b) = deg(c) = 1$$

on retrouve bien la aussi le résultat annoncé par le lemme des poignées de mains :

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 + 1 + 1 = 2.|E| = 4$$

2 Graphes orientés

On s'interesse dans un cette section aux graphes orientés, non-valués (non-pondérés) et sans arcs multiples.
On verra que l'on peut aisément adapter les définitions et propriétés de la sections précédente aux graphes non-orientés.

Définition 2.0.1. *Soient V et E des ensembles finis tels que*

$$V = \{v_1 \dots v_n\}$$
$$E \subset V \times V = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in V\}$$

On appelle ***graphe orienté****, noté G, le couple (V, E). Comme pour les graphes non-orientés, les éléments de V sont appelés les sommets du graphes (verticies), ceux de E* ***les arcs****. Les arcs sont donc des couples (v_i, v_j) que l'on notera simplement $v_i v_j$.*

Contrairement aux arêtes, l'ordre des sommets de l'arc est important (car un arc est un couple).

2.1 Successeurs, prédécesseurs

Pour l'ordre et la taille on garde la même définition que dans le cas d'un graphe non-orienté. Les arcs étant cependant orientés, on peut définir les successeurs et prédécesseurs d'un sommet :

Définition 2.1.1. *Si $a = (v_i, v_j)$ est un arc d'un graphe orienté $G = (V, E)$, alors v_i est l'origine de a, v_j sa destination.*
L'arc a est alors dit sortant de v_i ou incident à v_i vers l'exterieur.
De même, a est dit entrant dans v_j ou incident à v_j vers l'interieur.
Deux arcs sont ***adjacents*** *s'ils ont au moins une extrémité en commun.*

On notera $\omega^+(v_i)$ l'ensemble des arcs sortant de v_i et $\omega^-(v_j)$ l'ensemble des arcs entrant dans v_j. L'ensemble des arcs incidents à un sommet v sera noté $\omega(v)$ et vérifie $\omega(v) = \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$.

Définition 2.1.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et soit $v \in V$ un sommet de G.*
Un sommet $v_i \in V$ est un successeur de v si $(v, v_i) \in E$ $((v, v_i) \in \omega^+(v))$
De même, $v_j\ inV$ est un prédécesseur de v si $(v_j, v) \in E$ $((v_j, v) \in \omega^-(v))$.

On notera respectivement succ(c) et pred(v) l'ensemble des successeurs et des prédécessurs de v.

2.2 Demi-degré, formule des poignées de mains

Définition 2.2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Le demi-degré entrant d'un sommet $v \in V$, noté $deg^+(v)$ (ou $d^+(v)$) est le nombre d'arcs sortant de v (c'est donc le cardinal de $\omega^+(v)$).*
Le demi-degré sortant de v, noté $deg^-(v)$ (ou $d^-(v)$), est le nombre d'arcs entrant dans ce sommet (c'est donc le cardinal de $\omega^-(v)$).
Ainsi

$$deg^+(v) = |\omega^+(v)| \quad et \;\; deg^-(v) = |\omega^-(v)|$$

On a alors le résultat suivant, **lemme ou formule des poignées de mains** (handshaking formula), analogue à celui obtenu dans le cas des graphes non-orientés :

Lemme 2.2.2. *Soit (V, E) un graphe non orienté, on a*

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$$

3 Multigraphes

On peut généraliser les définitions précédentes en introduisant la notion de multi-graphe.

Définition 3.0.1. *Un multigraphe, est un graphe (orienté ou non) doté d'une ou plusieures arêtes (ou arcs dans le cas orienté), ou de boucles.*

Définition 3.0.2. *Soit $p \in \mathbb{N}$, un p-graphe est un multigraphe dans lequel toute arête (ou arc dans le cas orienté) est répété au plus p fois.*
En particulier un 1-graphe est un graphe.

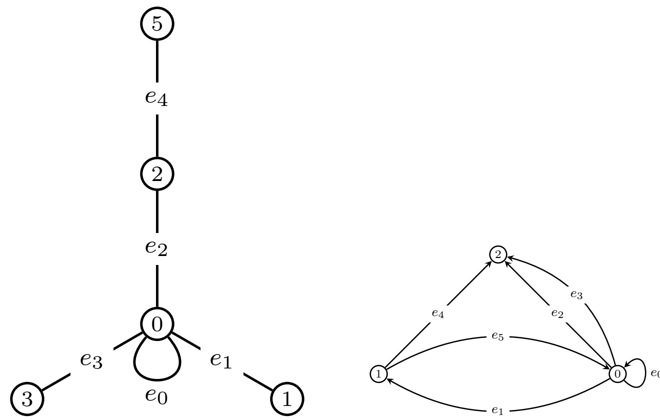

Figure 3: Un graphe non-orienté et un multigraphe orienté

On peut étendre les définitions précédentes aux multigraphes (demi-degré, successeurs, prédécesseurs), la formule des poignées reste valable.

4 Graphe simple

Définition 4.0.1. *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple si c'est un 1-graphe sans boucles.*