Matrice associée à un système linéaire

Proposition 1. *Un système linéaire* $\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & u \\ cx+dy & = & v \end{array}\right.$ *peut s'écrire*

$$AX = B$$

en posant

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Exemple 1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$AX = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}.$$

et le système $\left\{\begin{array}{lcl} x+2y & = & 3 \\ 3x+4y & = & 12 \end{array}\right.$ peut s'écrire $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. Quelle est l'écriture matricielle du système : $\left\{\begin{array}{lcl} 5x+2y & = & 16 \\ 4x+3y & = & 17 \end{array}\right.$?

Résolution de systèmes à l'aide des matrices

Proposition 2. *Soit A une matrice carrée de taille n, X et B deux matrices colonnes à n lignes.*
Si A est inversible, alors le système d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1} \times B$.

Remarque 1. Si A n'est pas inversible, alors soit le système n'a pas de solution soit il en admet une infinité.

Exemple 2. Le système suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y & = & 3 \\ 3x+4y & = & 12 \end{array}\right.$$

peut s'écrire à l'aide de matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

La solution du système est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}.$$

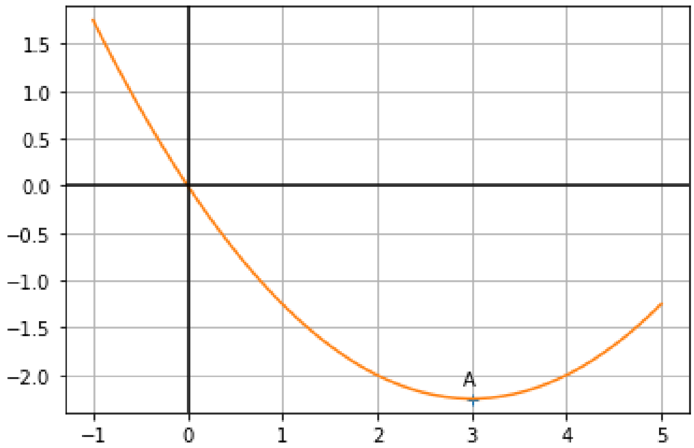
Exercices d'entraînement

Exercice 2. Résoudre le système suivant à l'aide des matrices : $\left\{\begin{array}{rcl} 5x+2y & = & 16 \\ 4x+3y & = & 17 \end{array}\right.$.

Exercice 3. On considère le système suivant $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y & = & 13 \\ -3x-8y & = & 11 \end{array}\right.$

1. Déterminer les matrices A et B telles que le système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2. Résoudre ce système.

Exercice 4. On se place dans un repère orthonormé. On cherche à déterminer la fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On admet que f est une fonction du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le but de l'exercice est donc de détermnier les coefficients a, b et c.
On sait que $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère et par le point A de coordonnées $(3; -2{,}25)$ où la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Traduire ces informations par trois équations d'inconnues a, b et c.
2. En déduire un système $\mathcal{S}$ de deux équations à deux inconnues a et b.
3. Déterminer les matrices A, X et B pour lesquelles le système $\mathcal{S}$ équivaut à $AX = B$.
4. Résoudre le système et trouver l'expression de f.

Résolution de systèmes de dimension supérieure

Les notions précédentes se généralisent aisément aux systèmes linéaires et matrices de tailles supérieures à 2.

Néanmoins les calculs, à la main, du déterminant et de l'inverse d'une matrice d'ordre supérieur ou égal à 3 peuvent vite devenir fastidieux.
La fonction `det` du module `numpy.linalg` va donc nous être utile pour calculer le déterminant d'une matrice et, si ce dernier est non nul, la fonction `inv` donne sa matrice inverse.
Supposons que l'on ait à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y & = & 5 \\ -3x+5y & = & 2 \end{array}\right.$$

On définit la matrice A associée au système :
`A=np.array([[2. , -3. ], [ -3. , 5.]])`
puis le vecteur B :
`B=np.array([[5.], [2.]])`
On vérifie que la matrice A est bien inversible, en calculant son déterminant :

```
alg.det(A)
0.99999999999999956
```

Puis, dans le cas où l'inverse de la matrice existe, la fonction `inv` donne sa matrice inverse.

```
alg.inv(A)
matrix([[5. , 3. ],
[ 3. , 2.]])
```

Il suffit ensuite de faire le produit de A^{-1} et B pour obtenir la solution X du système :

```
X=np.dot(alg.inv(A),B)
array([[31.],[19.]])
```

Exercice 5. On se donne le système linéaire suivant :

$$S:\left\{\begin{array}{rcl} 5x-3z & = & -4 \\ 3x+4y+z & = & 2 \\ x-y-z & = & 2 \end{array}\right.$$

1. Écrire ce système sous la forme d'une égalité matricielle $AX=B$.
2. Utiliser Python pour vérifier que A est inversible (en calculant son déterminant). Puis calculer son inverse A^{-1}.
3. Résoudre le système en utilisant le calcul matriciel.
4. En reprenant cette méthode résoudre les systèmes d'équations :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 2 \\ 2x-3y & = & -5 \\ -3x+y+4z & = & 0 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcl} -2x+5y-z & = & 4 \\ x-y+2z & = & 12 \\ 3x+4z & = & 20 \end{array}\right.$

Exercice 6. Écrire les équations matricielles suivantes sous forme de systèmes linéaires, puis les résoudre à l'aide de Python lorsque cela est possible. X est un vecteur ligne (ou colonne) de coordonnées x, y et z.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ 52 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 51 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -2 & 9 & -1 \\ -5 & 1 & 6 \\ 6 & -8 & 6 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$
4. $X. \begin{pmatrix} -2 & 9 & -1 \\ -5 & 1 & 6 \\ 6 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 19 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Un vélo se déplace à une vitesse constante v. Son déplacement y est donc donné par l'équation :

$$y = vt + b$$

On mesure sa position y aux temps $t = 1$ et $t = 2$: $y(1) = 3.9$ et $y(2) = 15.8$.

1. Traduire ces conditions sous forme de système d'équations linéaires.
2. Retrouver v et b.
3. Prédire y pour $t = 3{,}4{,}5{,}6$.
4. On suppose maintenant que le vélo a une accélération constante a, c'est à dire :

   $$y = at^2 + vt + b$$

   On connait y aux temps $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$: $y(1) = 3.9$, $y(2) = 15.8$ et $y(3) = 32.4$. Quel est l'accélération du cycliste ?