Постановка задачи

Пусть имеется система слежения за частотой (ССЧ). Исходя из "теории", для дискриминатора такой системы нужно формировать две корреляционные суммы (I_k, Q_k). Так как в данных суммах содержится информация о фазе сигнала, возможно построение системы слежения за фазой (ССФ), входными сигналами которой будут являться отсчеты I_k, Q_k. Запишем I_k, Q_k :

$$I_k = A_k h_{d\,k} \sum_{l=1}^{L} \cos(\omega_0 t_{k,l} + \omega_{d\,k} lT_d + \varphi_k) \cdot \cos(\omega_0 t_{k,l} + \breve{\omega}_{d\,k} lT_d + \breve{\varphi}_k) + n_{I\,k}$$

$$Q_k = A_k h_{d\,k} \sum_{l=1}^{L} \cos(\omega_0 t_{k,l} + \omega_{d\,k} lT_d + \varphi_k) \cdot \sin(\omega_0 t_{k,l} + \breve{\omega}_{d\,k} lT_d + \breve{\varphi}_k) + n_{Q\,k}$$

где $h_{d\,k}$ - символ навигационного сообщения, $n_{I\,k}$, $n_{Q\,k} \sim N(0, \sigma_{IQ}^2)$.

Временная ось разбита на K интервалов длительностью T, каждый интервал разбит на L отсчетов. Тогда примем следующую запись моментов времени:

$$t_{k,l} = t_{k,0} + lT_d,\ t_{k,0} = t_{k-1,L},\ l = \overline{1,L};\ T = LT_d.$$

Предполагается, что задержка принимаемого сигнала известна точно (опорный и принимаемый дальномерные коды синхронизированы, поэтому $h_{дк}(t_{k,l} - \tau_k)^2 = 1$.

Введем обозначения:

$$\bar{I}_k = A_k h_{d\,k} \sum_{l=1}^{L} \cos(\Phi_{k,l}) \cdot \cos(\breve{\Phi}_{k,l})$$

$$\bar{Q}_k = A_k h_{d\,k} \sum_{l=1}^{L} \cos(\Phi_{k,l}) \cdot \sin(\breve{\Phi}_{k,l})$$

$$\Phi_{k,l} = \omega_0 t_{k,l} + \omega_{d\,k} lT_d + \varphi_k$$

$$\breve{\Phi}_{k,l} = \omega_0 t_{k,l} + \breve{\omega}_{d\,k} lT_d + \breve{\varphi}_k$$

При этом $\varphi_{k,L} = \varphi_k + L\omega_d T_d$, $\varphi_{k,L} = \varphi_{k+1,0}$.

Тогда наблюдения перепишем так

$$I_k = \bar{I}_k + n_{I\,k}$$

$$Q_k = \bar{Q}_k + n_{Q\,k}$$

Синтез фазового дискриминатора

Запишем функцию правдоподобия $p(I_k, Q_k \mid \boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k})$, где $\boldsymbol{\lambda}_k = \begin{vmatrix} \varphi_k \\ \omega_{\partial\,k} \end{vmatrix}$

$$p(I_k, Q_k \mid \boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{IQ}^2}} \exp\left(-\frac{(I_k - \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}))^2}{2\sigma_{IQ}^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{IQ}^2}} \exp\left(-\frac{(Q_k - \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}))^2}{2\sigma_{IQ}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_{IQ}^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{IQ}^2} \left[(I_k - \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}))^2 + (Q_k - \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}))^2 \right] \right)$$

$$\left\{ \frac{1}{2\pi\sigma_{IQ}^2} = B \right\}$$

Усредним функцию правдоподобия по символу навигационного сообщения, считая, что он принимает значения $h_{d\,k} = \pm 1$ с равной вероятностью.

$$p(I_k, Q_k \mid \boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}) = \frac{1}{2} p(I_k, Q_k \mid \boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k} = 1) + \frac{1}{2} p(I_k, Q_k \mid \boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k} = -1) =$$

$$= \frac{B}{2} \left[\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{IQ}^2} \left[(I_k - \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k))^2 + (Q_k - \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k))^2 \right] \right) + \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{IQ}^2} \left[(I_k + \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k))^2 + (Q_k + \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k))^2 \right] \right) \right]$$

Запишем по – иному исходную функцию правдоподобия.Для чего представим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{IQ}^2}} \exp\left(-\frac{(I_k - \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}))^2}{2\sigma_{IQ}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{IQ}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{IQ}^2} I_k^2 \right) \exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2} \left(I_k \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}) - 0.5 \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k})^2 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{IQ}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{IQ}^2} I_k^2 \right) \exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2} \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}) \left(I_k - 0.5 \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}) \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{IQ}^2}} c_I \exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2} \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}) \left(I_k - 0.5 \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k, h_{d\,k}) \right) \right), \quad c_I = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{IQ}^2} I_k^2 \right)$$

Перепишем функцию правдоподобия

$$p(I_k,Q_k\,|\,\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}) = Bc_I c_Q \exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2}\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\left(I_k-0.5\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2}\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\left(Q_k-0.5\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\right)\right)=$$

$$= Bc_I c_Q \exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2}\left[\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\left(I_k-0.5\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\right)+\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\left(Q_k-0.5\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k,h_{d\,k}\right)\right)\right]\right)$$

Усредним по навигационному сообщению

$$p(I_k,Q_k\,|\,\boldsymbol{\lambda}_k)=\frac{Bc_I c_Q}{2}\left[\exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2}\left[\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\left(I_k-0.5\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\right)+\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\left(Q_k-0.5\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\right)\right]\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{1}{\sigma_{IQ}^2}\left[-\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\left(I_k+0.5\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\right)-\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\left(Q_k+0.5\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)\right)\right]\right)\right]$$

$$p(I_k,Q_k\,|\,\boldsymbol{\lambda}_k)=\frac{Bc_I c_Q}{2}\left[\exp\left(\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)I_k}{\sigma_{IQ}^2}\right)\exp\left(-\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2}{2\sigma_{IQ}^2}\right)\exp\left(\frac{\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)Q_k}{\sigma_{IQ}^2}\right)\exp\left(-\frac{\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2}{2\sigma_{IQ}^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)I_k}{\sigma_{IQ}^2}\right)\exp\left(-\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2}{2\sigma_{IQ}^2}\right)\exp\left(-\frac{\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)Q_k}{\sigma_{IQ}^2}\right)\exp\left(-\frac{\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2}{2\sigma_{IQ}^2}\right)\right]$$

Итого

$$p(I_k,Q_k\,|\,\boldsymbol{\lambda}_k)=\tilde{C}\exp\left(-\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2+\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2}{2\sigma_{IQ}^2}\right)ch\left(\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)I_k+\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)Q_k}{\sigma_{IQ}^2}\right),\ \tilde{C}=Bc_I c_Q.$$

Возьмем ln:

$$\ln p(I_k,Q_k\,|\,\boldsymbol{\lambda}_k)=\ln(\tilde{C})-\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2+\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)^2}{2\sigma_{IQ}^2}+\ln\left(ch\left(\frac{\bar{I}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)I_k+\bar{Q}_k\left(\boldsymbol{\lambda}_k\right)Q_k}{\sigma_{IQ}^2}\right)\right)$$

Теперь нужно взять производную по φ_k.Учитываем, что $\bar{I}_k^2(\boldsymbol{\lambda}_k)+\bar{Q}_k^2(\boldsymbol{\lambda}_k)$-мощность «отсчета» в корреляторе, от начальной фазы не зависит.

Получилось так, (преобразования второго сомножителя смотри в выводе для дискриминатора без усреднения по символам НС):

$$u_{\partial\,\varphi_k} = \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\ln p(I_k, Q_k \mid \boldsymbol{\lambda}_k)\,|_{\varphi_k=\tilde{\varphi}_k} = \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\ln\left(ch\left(\frac{\bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) I_k + \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) Q_k}{\sigma_{IQ}^2} \right)\right)\Bigg|_{\varphi_k=\tilde{\varphi}_k} =$$

$$= th\left(\frac{\bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) I_k + \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) Q_k}{\sigma_{IQ}^2} \right)\left(I_k \frac{\partial \bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k)}{\partial\varphi_k} + Q_k \frac{\partial \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k)}{\partial\varphi_k} \right)\Bigg|_{\varphi_k=\tilde{\varphi}_k} =$$

$$= -\frac{A_k L \operatorname{sinc}\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} \right)}{2\sigma_{IQ}^2} th\left(\frac{\bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) I_k + \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) Q_k}{\sigma_{IQ}^2} \right)\Bigg|_{\varphi_k=\tilde{\varphi}_k} \times$$

$$\times\left[I_k \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) + Q_k \cdot \cos\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) \right]$$

где обозначено $\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} = \tilde{\omega}_{\partial\,k} - \breve{\omega}_{\partial\,k}$, $\tilde{\delta}\varphi_k = \tilde{\varphi}_k - \breve{\varphi}_k$

Далее был "опущен" множитель перед гипертангенсом:

$$u_{\partial\,\varphi_k} = -th\left(\frac{\bar{I}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) I_k + \bar{Q}_k(\boldsymbol{\lambda}_k) Q_k}{\sigma_{IQ}^2} \right)\Bigg|_{\varphi_k=\tilde{\varphi}_k} \times$$

$$\times\left[I_k \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) + Q_k \cdot \cos\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) \right]$$

Аргумент гипертангенса расписывается также, как при выводе стат. эквивалент коррелятора. Получаем:

$$u_{\partial\,\varphi_k} = -th\left(\frac{A_k L}{2} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} \right)\left[I_k \cdot \cos\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) - Q_k \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) \right]\right) \times$$

$$\times\left[I_k \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) + Q_k \cdot \cos\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k \right) \right]$$

Для больших отношений сигнал/шум гипертангенс - знаковая функция аргумента, поэтому аппроксимируем его ей и "множитель стираем"

В итоге дискриминатор получается такой:

$$u_{\partial\,\varphi_k} = -sign\left[I_k \cdot \cos\left(\frac{\tilde{\delta\omega}_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta\varphi}_k\right) - Q_k \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\delta\omega}_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta\varphi}_k\right)\right] \times$$
$$\times\left[I_k \cdot \sin\left(\frac{\tilde{\delta\omega}_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta\varphi}_k\right) + Q_k \cdot \cos\left(\frac{\tilde{\delta\omega}_{\partial\,k} T}{2} + \tilde{\delta\varphi}_k\right)\right]$$

Расчет стат. характеристик дискриминатора

На данный момент не рассчитаны – приведу пока те же, что были в дискриминаторе без символа НС (вывод смотреть в том файле)

Рассчитаем дискриминационную характеристику:

$U(\delta\varphi_k) = M\{u_{\partial\,\varphi_k}(t)\}$, где будем обозначать $C = A_k \frac{\ln B}{\sigma_{IQ}^2} \frac{L}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tilde{\delta\omega}_{\partial\,k} T}{2}\right)$

$\breve{\delta\varphi}_k = \varphi_k - \breve{\varphi}_k$, $\breve{\delta\omega}_{\partial k} = \omega_{\partial k} - \breve{\omega}_{\partial\,k}$, $\delta\varphi_k = \varphi_k - \tilde{\varphi}_k$, $\delta\omega_{\partial k} = \omega_{\partial k} - \tilde{\omega}_{\partial\,k}$.

Итого:

$$U(\delta\varphi_k) = \frac{CA_k L}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\breve{\delta\omega}_{\partial\,k} T}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta\omega_{\partial\,k} T}{2} + \delta\varphi_k\right)$$

Найдем крутизну:

$$S_\partial = \frac{\partial}{\partial\delta\varphi_k}\left(-\frac{CA_k L}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\breve{\delta\omega}_{\partial\,k} T}{2}\right) \sin\left(\frac{-\delta\omega_{\partial\,k} T}{2} - \delta\varphi_k\right)\right)\Bigg|_{\substack{\delta\varphi_k = 0 \\ \delta\omega_{\partial\,k} = 0 \\ \breve{\delta\omega}_{\partial\,k} = 0}} =$$

$$= \frac{CA_k L}{2}$$

Флуктуационная характеристика:

$$D_{\eta_\varphi} = M\left\{\left(u_{\partial\,\varphi_k}(t_k) - U(\delta\varphi_k)\right)^2\right\} = M\left\{n_{\partial\,\varphi_k}^2\right\}$$

С учетом принятых ранее обозначений, запишем:

$$D_{\eta_\varphi} == M\left\{n_{\partial\ \varphi_k}^2\right\} = M\left\{\left(-C\left[n_I \sin\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right) + n_Q \cos\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right)\right]\right)^2\right\} =$$

$$= C^2 M\left\{n_I^2 \sin^2\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right) + n_Q^2 \cos^2\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right) + \right.$$

$$\left. +2n_I n_Q \sin\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right)\cos\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right)\right\} =$$

$$= C^2\left[\sigma_{IQ}^2 \sin^2\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right) + \sigma_{IQ}^2 \cos^2\left(\frac{\tilde{\delta}\omega_{\partial\ k}T}{2} + \tilde{\delta}\varphi_k\right)\right] = C^2\sigma_{IQ}^2$$