

近年の生産関数推定法の概観

菊地雄太^{*} 今井 晋[†] 鈴木広人[‡]

概 要

本稿では近年の生産関数の推定法について概観する。まず Akerberg et al. (2015) による生産関数の識別条件の分析と、それに基づく付加価値生産関数の推定法を紹介する。次に Gandhi et al. (2020) によるノンパラメトリック総生産関数の識別と推定の議論を紹介する。さらに、産出量が観測できず、収益しかデータから観察できない場合、需要側のモデルを用いて生産関数の推定を行う方法について議論する。

キーワード

生産関数, 生産性, 識別, 収益のデータ

1 はじめに

本項では、近年の生産関数の推定法について概観する。生産関数の推定は経済学において一貫して試みられており、近年でもその推定法は開発され続けている。その際、特に生産関数推定上の内生性の問題にどう対処するかが最も大きな問題であるので、識別に焦点を置いて議論を行う。

生産関数の推定問題は、企業の生産性が企業によってまず観察され、その生産性を元に企業は生産のために各投入財を決定することから生じる。生産性と各投入財の間にはそうした相関が存在するが、生産性は分析者にとって観察できないため、各投入財の弾力性の一致推定は難しくなるのである。このような内生性の問題は Marschak and Andrews

^{*} 早稲田大学商学研究科, E-mail: yuta.kikuchi@aoni.waseda.jp

[†] 北海道大学大学院経済学研究院, E-mail: susimaig@gmail.com

[‡] 城西国際大学経営情報学部, E-mail: h-suzuki@jiu.ac.jp

(1944) によって transmission bias として古くから知られている。

近年に至るまでの内生性の問題に対処する方法の発展を概観する。一つ目の方法は、パネルデータを用いて生産性を時間不変的な固定効果として処理する方法があったが、Griliches and Mairesse (1998) により、時間不変的なものとして扱うことにより生産関数の推定にバイアスが生み出されている可能性が指摘された。二つ目の方法は、企業の投入財に関わる利潤最大化の一階の条件 (F.O.C.) を利用することであり、それによって投入財のコストシェアが投入財の弾力性と等しくなるという関係により生産関数の弾力性を推定するのであるが、これは投入財が静学的な F.O.C. の結果選択される限りにおいて成功を収めた。しかし、例えば資本投入の選択は複雑な動学的な要因を含んでいるため、単純な静学的 F.O.C. だけではモデル化できないという問題が認識されるようになった。そのため、三つ目の方法として、投入財価格を投入財投入量の操作変数として用いると言うものがある。これは、F.O.C. を明示的に考えて資本投入のような複雑な動学的モデルを特定化する必要はなく、シンプルに誘導系の回帰分析として各投入について操作変数法の手法を応用すれば一致推定を得られると言う利点があった。しかし、この操作変数法が可能となるためには、分析者は各投入財について企業ごとに異なる投入財価格を観測できなければならないが、それは通常難しい。また、それらの企業ごとに異なる投入財価格が操作変数として妥当となるための仮定を満たすと結論づけることも難しい (Griliches and Mairesse (1998))。

これらの問題に対処するため二つの構造推定的アプローチが考案された。一つは Olley and Pakes (1996) や Levinsohn and Petrin (2003) であり、生産性を時間可変的なものとし、操作変数に頼らず、さらに資本といった投入財について動学的に投入量が意思決定されることを取り込むことができる代理変数法によるアプローチである。もう一つは生産性に特定のパネルの構造を仮定する Blundell and Bond (1998) および Blundell and Bond (2000) の動学パネルのアプローチである。この二つが主流になった背景としては、企業や製造工場レベルでパネルデータの利用可能性が、近年広がってきていることもある。

Ackerberg et al. (2015) は代理変数法によるアプローチと動学パネルのアプローチはそれぞれ利点と欠点があり、どちらを応用するかどうかは分析者がデータに応じて適切に使い分けるべきであるというスタンスであるが、特に Olley and Pakes (1996) と Levinsohn and Petrin (2003) の代理変数法によるアプローチが正しく機能するための識別条件を精査した。Ackerberg et al. (2015) は、どの投入財が動学的（資本、労働投入）であり、どの投入財が非動学的（中間投入財）であるかの峻別が生産関数を識別する上で重要であることを浮き彫りにした。中間投入財の弾力性の推定を行わない付加価値生産関数を推定するならば、Ackerberg et al. (2015) が広く使われている。

一方で Gandhi et al. (2020) は, Akerberg et al. (2015) までの代理変数法によるアプローチによって, 中間投入財の弾力性もモデルに含まれる総生産関数を識別することは難しいことを示した. Gandhi et al. (2020) は, 企業の利潤最大化問題からもたらされる制約を明示的に制約として組み込むことによって, ノンパラメトリックに Share regression と呼称される回帰モデルを推定して中間投入財の弾力性を識別し, それを積分することによって総生産関数を識別する手法を開発した. この識別のステップを適切に表現できるようなノンパラメトリック推定を近似できる Sieve series 推定量が Gandhi et al. (2020) の識別方法のもとでの推定を可能にした.

生産関数の推定は, 生産関数の形状を推定し, 生産性を推定すること以外にも使われる. 例えば De Loecker and Warzynski (2012) らは総生産関数を推定し, その中間投入財の弾力性を使って企業レベルのマークアップの推定に用いている.

本稿では, 特に近年主流となっている Akerberg et al. (2015) と Gandhi et al. (2020) に焦点を置いてサーベイする. また, これらの生産関数推定法は, 企業の生産数量が観察できる場合に直接応用可能であるが, 企業の会計上のデータには収益やコストのみしか観察できない場合が多い. その場合, Katayama et al. (2009) や De Loecker (2011) によって需要側のモデルと収益データを用いて生産関数の推定を行う方法が考えられているのでそれらを紹介する.

2 Akerberg et al. (2015) による生産関数識別条件の精査に基づく推定法

まず, Levinsohn and Petrin (2003) (以下, LP) について紹介し, それに対する Akerberg et al. (2015) (以下, ACF) の批判を紹介し, ACF の方法による付加価値生産関数の推定法を紹介する.

2.1 生産関数の内生性の問題

生産関数は, コブダグラス型生産関数を仮定すると,

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l l_{it} + \beta_m m_{it} + \omega_{it} + \varepsilon_{it} \quad (1)$$

となる. y_{it} は企業 i の t 期における生産量の対数, k_{it} は企業 i の t 期における資本の投入量の対数, l_{it} は労働の投入量の対数であり, m_{it} は中間材の投入量の対数である. このように中間投入財 m_{it} が生産関数に含まれているものを総生産関数 (Gross production

function) と呼ぶ。ここで、 ε_{it} は企業が t 期における投入財の投入量を意思決定した後
に決まる企業にとって観察も予測もできない生産性に対するショックである。一方で、
 ω_{it} は企業が投入財の投入量を意思決定する際に企業に観察され、予測される生産性
ショックである。これには例えば企業のマネジメント能力、機械の故障による予測され
る稼働停止時間、製造工程で測される不良製品率、土壌改良、ある特定の場所に立地する
企業にとって予測される降水などが具体的な例としてあげられる。これら二つの観察不可
能なショックは、古典的な生産関数の文脈では、TFP（全要素生産性）として単一のもの
として扱われているが、近年の生産関数の推定においてはこの二つは明確に区別される。
生産関数を考える際には、 ε_{it} と ω_{it} のように、企業が意思決定する際に企業の情報集合の
中に含まれるもの、そして意思決定の後に決まるものの区別、といったような、どの要素
が先に決まってそれがどのように利用されるかというタイミングを明確にモデルの中で把
握することが重要となる。

生産関数の推定における推定上の問題は、各投入財の投入量の選択は、生産性ショッ
ク ω_{it} と相関があり、それによって各投入財の弾力性の推定にバイアスが生じることであ
る。高い生産性ショックは、企業の各投入財の投入量を高める。例えば、 $Cov(l_{it}, \omega_{it}) > 0$
だとすると、 β_l の推定において推定量の一致性が成立せず、上方バイアスをもたらす。生
産関数の推定はこの内生性バイアスの対処（生産関数の文脈では transmission bias と呼ばれ
る）をどうするか、が問題となる。

対処方法としては代理変数法アプローチと動学パネルのアプローチを用いることが近年
の主流となっている。これらの手法を用いる際には、どの投入財を動学的な変数とみな
し、どの投入財を非動学的（flexible）な変数であるとみなすべきかがポイントとなる。

2.2 Levinsohn and Petrin (2003) による生産関数の識別

それではまず LP を用いて生産関数の識別と推定を説明する。

LP では生産関数は式 (1) を想定している。企業は t 期における情報集合 \mathcal{I}_{jt} を用い
て t 期における意思決定問題を解く。LP では、 l_{it} と m_{it} は非動学的な投入財であり、
 k_{it} は動学的な投入財であるとみなす¹。 $k_{it}, l_{it}, m_{it}, \omega_{it} \in \mathcal{I}_{it}$ であり、 $\varepsilon_{it} \notin \mathcal{I}_{it}$ である。

LP では、企業の間接投入財に対する要素需要関数は

$$m_{it} = M_t(k_{it}, \omega_{it})$$

1 k_{it} についての要素需要関数は動学的モデルを解くことによって得られ、ACF では $t-1$ 期に投資 i_{it-1} が選
ばれ、 $k_{it} = \kappa(k_{it-1}, i_{it-1})$ という方策関数によって動学的に決定されるとされている。

と仮定する。これは、 l_{it} と m_{it} が非動学的投入財であり、企業が状態変数 ω_{it} と k_{it} を観察した後に t 期に決定されるというモデルの想定と整合的である。このモデルは、中間投入財需要の意思決定に関して、単一の生産性ショックの存在しか許さない。これは次の二つを意味する。第一に、冒頭で挙げたような生産性ショック自体は各企業や工場のマネージメント能力や、予測される天候の変化であったり、様々な要因からなるものであり、それらは本来はそれぞれ独立した別々の変数であるが、ここでは単一の生産性ショックという変数として集約される、ということの意味する。また、例えば、McElroy (1987) は k_{it} や l_{it} などの生産要素毎に特定の観察不可能な要因を考慮したが、そうした複数の観察不可能な要因の存在を許さない。第二に、中間投入財市場の競争環境は企業によって同一であり、企業特有の分析者に観察不可能な中間投入財価格ショックを許さない。この単一の生産性ショックしか許さないという仮定を観察不可能変数単一の仮定 (scalar unobservability assumption) と呼称する。

次に、 $\mathbb{M}_t(k_{it}, \omega_{it})$ は ω_{it} の狭義単調増加関数であると仮定する。これは高い生産性 ω_{it} を持つ企業は、より多くの中間投入財を需要することを意味する。

これらの中間投入財需要に対する仮定により、代理変数法アプローチが利用可能となる。内生性の問題は ω_{it} が観察できないことから生じたが、それを観察可能な変数の関数によって置き換えれば良い、という考え方が代理変数法アプローチのアイディアである。つまり、以上の中間投入財需要の仮定により、逆関数 $\omega_{it} = \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it})$ を導出できる。この右辺は k_{it} と m_{it} の関数であるので、データから観察可能な変数から構成される。これを生産関数に代入すると、

$$\begin{aligned} y_{it} &= \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l l_{it} + \beta_m m_{it} + \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it}) + \varepsilon_{it} \\ &= \beta_l l_{it} + \phi_t(k_{it}, m_{it}) + \varepsilon_{it} \end{aligned}$$

となる。上式で、 \mathbb{M}_t^{-1} は関数形について特定の仮定を置いていないためノンパラメトリックな関数として扱い、 β_0 , k_{it} , m_{it} の部分はまとめて $\phi_t(k_{it}, m_{it})$ としてノンパラメトリックに扱われる。

また、生産性 ω_{it} は、動学パネルの文脈で用いられる仮定として、一次マルコフ過程に従うと仮定する ($P(\omega_{it+1}|\omega_{it})$ であり、 $h(\omega_{jt-1}) = E[\omega_{jt}|\omega_{jt-1}]$ と表す)。

推定は以下のように第一ステージと第二ステージから構成される。

第一ステージとして、GMM 推定により、 $\hat{\beta}_l$ と $\hat{\phi}_t(k_{it}, m_{it})$ を次のモーメント条件により推定する。

$$E[\varepsilon_{it}|\mathcal{I}_{jt}] = E[y_{it} - \beta_l l_{it} - \phi_t(k_{it}, m_{it})|\mathcal{I}_{it}] = 0$$

第二ステージで生産関数の他の係数を推定する。生産性 ω_{it} は一次マルコフ過程に従っていると仮定されているので、 $\omega_{it-1} = \phi_{t-1}(k_{it-1}, m_{it-1}) - \beta_0 - \beta_k k_{it-1} - \beta_l l_{it-1}$ であることを用いると、

$$\begin{aligned}\omega_{it} &= E[\omega_{it}|\omega_{it-1}] + \eta_{it} = h(\omega_{it-1}) + \eta_{it} \\ &= h(\phi_{t-1}(k_{it-1}, m_{it-1}) - \beta_0 - \beta_k k_{it-1} - \beta_l l_{it-1}) + \eta_{it}\end{aligned}$$

として表され、ここで η_{it} は ω_{it} の誤差項であり、 $E[\eta_{it}|\mathcal{I}_{it-1}] = 0$ と仮定する。第一ステージで推定された $\hat{\phi}_t(k_{it}, m_{it})$ を用い、この ω_{it} を生産関数に代入すると、

$$\begin{aligned}y_{it} &= \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l l_{it} + \beta_m m_{it} \\ &\quad + h(\phi_{t-1}(k_{it-1}, m_{it-1}) - \beta_0 - \beta_k k_{it-1} - \beta_m m_{it-1}) + \eta_{it} + \varepsilon_{it}\end{aligned}$$

であり、標準的な仮定により、 $E[\varepsilon_{it}|\mathcal{I}_{it-1}] = 0$ となるので、第二ステージのモーメント条件は、

$$\begin{aligned}E[\eta_{it} + \varepsilon_{it}|\mathcal{I}_{it-1}] &= E\left[y_{it} - \beta_0 - \beta_k k_{it} - \beta_l l_{it} - \beta_m m_{it} \right. \\ &\quad \left. - h(\phi_{t-1}(k_{it-1}, l_{it-1}) - \beta_0 - \beta_k k_{it-1} - \beta_m m_{it-1})|\mathcal{I}_{it-1}\right] = 0\end{aligned}$$

となり、これにより $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_k, \hat{\beta}_m$ 推定する。

説明のために、具体的には例えば次のような方法で推定することも考えられる。第一ステージとして、生産関数について、条件付期待値をとると、

$$E[y_{it}|m_{it}, k_{it}] = \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l E[l_{it}|m_{it}, k_{it}] + \beta_m m_{it} + \omega_{it}(m_{it}, k_{it})$$

これと生産関数との差分をとると、

$$y_{it} - E[y_{it}|m_{it}, k_{it}] = \beta_l (l_{it} - E[l_{it}|m_{it}, k_{it}]) + \varepsilon_{it} \quad (2)$$

ここで $E[y_{it}|m_{it}, k_{it}]$ と $E[l_{it}|m_{it}, k_{it}]$ をノンパラメトリックに推定する。例えば、被説明変数を y_{it} として、右辺を多項式で回帰し、その推定値を用いて条件付期待値を次のように導出する：

$$y_{it} = \sum_{j,k} a_{jk} m_{it}^j k_{it}^k + \eta_{y,it} \Rightarrow \hat{E}[y_{it}|m_{it}, k_{it}] = \sum_{j,k} \hat{a}_{jk} m_{it}^j k_{it}^k$$

$$l_{it} = \sum_{j,k} b_{jk} m_{it}^j k_{it}^k + \eta_{l,it} \Rightarrow \hat{E}[l_{it}|m_{it}, k_{it}] = \sum_{j,k} \hat{b}_{jk} m_{it}^j k_{it}^k$$

これらを用いて、

$$y_{it} - \sum_{j,k} \hat{a}_{jk} m_{it}^j k_{it}^k = \beta_l (l_{it} - \sum_{j,k} \hat{b}_{jk} m_{it}^j k_{it}^k) + \varepsilon_{it}$$

により $\hat{\beta}_l$ を得る.

第二ステージとして,

$$\phi_t(k_{it}, m_{it}) = \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_m m_{it} + \omega_{it} = \hat{E}[y_{it} | m_{it}, k_{it}] - \hat{\beta}_l l_{it}$$

であることに留意し,

1. $\hat{\beta}_0^{(s)}, \hat{\beta}_k^{(s)}$ および $\hat{\beta}_m^{(s)}$ が与えられたとする.
2. 与えられたパラメーターのもとで,

$$\hat{\omega}_{it} = \phi_{it}(k_{it}, m_{it}) - \hat{\beta}_0^{(s)} - \hat{\beta}_k^{(s)} k_{it} - \hat{\beta}_m^{(s)} m_{it}$$

$$\hat{\omega}_{it-1} = \phi_{it-1}(k_{it-1}, m_{it-1}) - \hat{\beta}_0^{(s)} - \hat{\beta}_k^{(s)} k_{it-1} - \hat{\beta}_m^{(s)} m_{it-1}$$

として,

$$\hat{\omega}_{it} = \sum_{j=0}^J \gamma_j^{(s)} \hat{\omega}_{it-1}^j + e_{it}$$

を回帰分析することによって $\hat{\gamma}_j^{(s)}, j = 1 \dots J$ を求める.

3. 第二ステージのモーメント条件の標本モーメントとして

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(y_{it} - \hat{\beta}_0^{(s)} - \hat{\beta}_k^{(s)} k_{it} - \hat{\beta}_l l_{it} - \hat{\beta}_m^{(s)} m_{it} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^J \hat{\gamma}_j^{(s)} (\phi_{it-1}(k_{it-1}, m_{it-1}) - \hat{\beta}_0^{(s)} - \hat{\beta}_k^{(s)} k_{it-1} - \hat{\beta}_m^{(s)} m_{it-1})^j \right) \\ & \quad \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ k_{it-1} \\ m_{it-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上のステップを, $s = 1 \dots$ から繰り返し, 標本モーメントをできるだけ0に近づけるパラメーターを見つける.

2.3 関数従属性による識別問題

労働投入 l_{it} の弾力性 β_l を第一ステージで推定しようとする, 識別問題が生じる. こ

の問題を具体的な例で説明する．

生産関数を

$$Y_{it} = Y_{it}(K_{it}, L_{it}, M_{it}, \omega_{it})$$

とし， K_{it} が与えられた元で企業が短期的に非動学的な L_{it} と M_{it} について費用最小化すると仮定する．資本の価格を P_t^K ，労働の価格を P_t^L ，中間投入財の価格を P_t^M とし，ラグランジアン関数を

$$\mathcal{L}(K_{it}, L_{it}, M_{it}, \omega_{it}) = P_t^K K_{it} + P_t^L L_{it} + P_t^M M_{it} + \lambda_{it}(Y_{it} - Y_{it}(\cdot))$$

とすると，F.O.C. より，

$$P_t^L - \lambda_{it} \frac{\partial Y_{it}(\cdot)}{\partial L_{it}} = 0 \text{ and } P_t^M - \lambda_{it} \frac{\partial Y_{it}(\cdot)}{\partial M_{it}} = 0 \Leftrightarrow P_t^L \frac{\partial Y_{it}(\cdot)}{\partial M_{it}} = P_t^M \frac{\partial Y_{it}(\cdot)}{\partial L_{it}}$$

例えば，コブダグラス型生産関数を $Y_{it} = AK_{it}^{\beta_k} L_{it}^{\beta_l} M_{it}^{\beta_m} e^{\omega_{it}}$ を仮定すると，これは

$$L_{it} = \frac{P_t^M}{P_t^L} \frac{\beta_l}{\beta_m} M_{it}$$

となる．両辺の対数を取ると，

$$l_{it} = \ln P_t^M - \ln P_t^L + \ln \beta_l - \ln \beta_m + m_{it}$$

となり，外生的な $\ln P_t^M$ と $\ln P_t^L$ の元で，条件付期待値を取ると，

$$E[l_{it}|k_{it}, m_{it}] = \ln P_t^M - \ln P_t^L + \ln \beta_l - \ln \beta_m + m_{it}$$

従って，常に

$$l_{it} - E[l_{it}|k_{it}, m_{it}] = 0$$

が成り立つ．従って，例えば第一ステージとして式 (2) を推定することを考えると， β_l は識別できない．

一般的にはこれは Ai and Chen (2003) の β_l の識別条件である

$$E\left[\left\{l_{it} - E[l_{it}|k_{it}, m_{it}, t]\right\}\left\{l_{it} - E[l_{it}|k_{it}, m_{it}, t]\right\}'\right] \text{が正定値である}$$

という条件が満たされていない，つまり，関数従属性 (functional dependence) を意味する．この条件が意味することは， k_{it}, m_{it}, t 以外によって l_{it} に変動をもたらすことができれば β_l が識別される，ということである．

そこで ACF は、どのようなデータ生成過程 ((Data Generating Process (DGP)) によって β_l が識別できるような l_{it} に対する変動が生じるかを調べた。

2.4 β_l が識別される DGP は存在するか

ACF は、LP といった手法で β_l が多重共線性 (関数従属性) の問題が起こらず推定されているのならば、それはどういうデータ生成過程 (DGP) なのかどうかを模索した。結論を言うと、彼らはいくつかの DGP を考え、そのうち 2 つの DGP のみでしか β_l の識別を可能でないことを提示した。ほとんどのケースで β_l を識別することは難しいので、関心がない場合はこのセクションは読み飛ばして問題ない。ただし、生産関数の推定がいかに生産要素の投入の意思決定のタイミングの仮定に依存しているかを端的に示している点で重要である。

2.4.1 $l_{it} = h_t(k_{it}, \omega_{it})$ のケース

l_{it} は動学的ではなく、状態変数 k_{it}, ω_{it} のもと、 $l_{it} = h_t(k_{it}, \omega_{it})$ として選択されると仮定する。ここで、 $\omega_{it} = \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it})$ を代入すると、 $l_{it} = g_t(k_{it}, \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it}))$ となり、 l_{it} を変動させる要因として、 k_{it}, m_{it} しかないので関数従属性の問題が生じる (これが広く知られている l_{it} の多重共線性の問題)。

2.4.2 企業特有の投入財価格が観察されるケース

企業によって異なる労働賃金 p_{it}^l と、中間財価格 p_{it}^m を要素需要関数に代入すると、

$$l_{it} = h_t(k_{it}, \omega_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m)$$

$$m_{it} = \mathbb{M}(k_{it}, \omega_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m)$$

となる。ここで、観察不可能変数単一の仮定を満たすために、 p_{it}^l と p_{it}^m は分析者に観察可能であるとしよう。 $\omega_{it} = \mathbb{M}^{-1}(k_{it}, m_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m)$ を生産関数に代入すると、

$$\begin{aligned} y_{it} &= \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l l_{it} + \beta_m m_{it} + \mathbb{M}^{-1}(k_{it}, m_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m) + \varepsilon_{it} \\ &= \beta_l l_{it} + \phi_t(k_{it}, m_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m) + \varepsilon_{it} \end{aligned}$$

となり、第一ステージのモーメント条件

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{it} | \mathcal{I}_{it}] &= E[y_{it} - \beta_l l_{it} - \phi_t(k_{it}, m_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m) | \mathcal{I}_{it}] \\ &= E[y_{it} - \beta_l h_t(k_{it}, \omega_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m) - \phi_t(k_{it}, m_{it}, p_{it}^l, p_{it}^m) | \mathcal{I}_{it}] = 0 \end{aligned}$$

に帰着する。ここから明らかなように、 l_{it} のみに変動を与える変数はないので関数従属性の問題が生じる。

2.4.3 l_{it} が動学的であるケース

労働投入が動学的であるとする、 l_{it} は状態変数となるので一般的に投入財需要は

$$l_{it} = h_t(k_{it}, \omega_{it}, l_{it-1})$$

$$m_{it} = f_t(k_{it}, \omega_{it}, l_{it-1})$$

となる。逆関数 $\omega_{it} = \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it}, l_{it-1})$ より、第一ステージは、

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{it} | \mathcal{I}_{it}] &= E[y_{it} - \beta_l l_{it} - \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it}, l_{it-1}) | \mathcal{I}_{it}] \\ &= E[y_{it} - \beta_l h_t(k_{it}, m_{it}, l_{it-1}) - \phi_t(k_{it}, m_{it}, l_{it-1}) | \mathcal{I}_{it}] = 0 \end{aligned}$$

従って l_{it} のみに変動を与える変数はないので関数従属性の問題が生じる。

2.4.4 l_{it} に、i.i.d. の最適化誤差が存在するケース

例えば、労働者が病気になった場合を考える。 l_{it}^{optimal} を最適な労働投入量とすると、労働者が病気であるために実際に観測された労働投入量はその影響 (i.i.d. の ε_{it}^l) を受け、実際に観察された l_{it}^{obs} と最適な投入量の関係は以下ようになる：

$$l_{it}^{\text{optimal}} = h_t(k_{it}, \omega_{it})$$

$$l_{it} = l_{it}^{\text{obs}} = \ell_t(l_{it}^{\text{optimal}}, \varepsilon_{it}^l) = \ell_t(h_t(k_{it}, \omega_{it}), \varepsilon_{it}^l)$$

もし分析者が観測した m_{it} が中間財として「実際に投入された段階のもの」であったならば、例えば労働者が病気であることによって中間投入財である電気や水の使用が減少するなどして、 ε_{it}^l が影響を与え、 $m_{it} = \mathbb{M}(k_{it}, \omega_{it}, \varepsilon_{it}^l)$ となり、その逆関数は $\omega_{it} = \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it}, \varepsilon_{it}^l)$ となるので、これを l_{it} の式に代入すると、

$$l_{it} = \ell_t(h_t(k_{it}, \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it}, \varepsilon_{it}^l)), \varepsilon_{it}^l) = \ell_t(k_{it}, m_{it}, \varepsilon_{it}^l)$$

となり、第一ステージは、

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{it} | \mathcal{I}_{it}] &= E[y_{it} - \beta_l l_{it} - \phi_t(k_{it}, m_{it}, \varepsilon_{it}^l) | \mathcal{I}_{it}] \\ &= E[y_{it} - \beta_l \ell_t(k_{it}, m_{it}, \varepsilon_{it}^l) - \phi_t(k_{it}, m_{it}, \varepsilon_{it}^l) | \mathcal{I}_{it}] = 0 \end{aligned}$$

であるので、関数従属性の問題が生じる。

しかし、もし分析者が観測した m_{it} が中間財投入量として「 l_{it}^{obs} が実現する前に計画された段階のもの」であったならば、 $m_{it} = \mathbb{M}_t(k_{it}, \omega_{it})$ であり、その逆関数は $\omega_{it} = \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, m_{it})$ となるので、第一ステージは

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{it}|\mathcal{I}_{it}] &= E[y_{it} - \beta_l l_{it} - \phi_t(k_{it}, m_{it})|\mathcal{I}_{it}] \\ &= E[y_{it} - \beta_l l_t(k_{it}, m_{it}, \varepsilon_{it}^l) - \phi_t(k_{it}, m_{it})|\mathcal{I}_{it}] = 0 \end{aligned}$$

となり、i.i.d. エラー ε_{it}^l がもつばら l_{it} に変動を与え、 β_l は識別される。

2.4.5 l_{it} が決まった後に m_{it} が決まるケース

図1のように t 期と $t-1$ 期の間の $t-b$ 期に l_{it} が決定され、その後の t 期に m_{it} が決まるとする。

この場合、一般的に m_{it} は $t-b$ 期に決まった l_{it} に依存するので、 $m_{it} = \mathbb{M}_t(k_{it}, l_{it}, \omega_{it})$ であり、逆関数は $\omega_{it} = \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, l_{it}, m_{it})$ となる。従って第一ステージは、

$$E[\varepsilon_{it}|\mathcal{I}_{it}] = E[y_{it} - \beta_l l_{it} - \phi_t(k_{it}, l_{it}, m_{it})|\mathcal{I}_{it}] = 0$$

となるので、第一ステージでの β_l の識別は明らかに不可能となる。

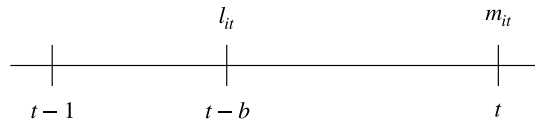


図1

2.4.6 m_{it} が決まった後に i.i.d. 賃金ショックが生じその後に l_{it} が決まるケース

図2のように m_{it} が $t-b$ 期に決まった後に i.i.d. 賃金ショック ε_{it} が生じ、その後の t 期に l_{it} が決まるとする。

$t-b$ 期に m_{it} が決定されるので、 $m_{it} = \mathbb{M}_t(k_{it}, \omega_{it-b})$ と考えるのが妥当であるが、 $\omega_{it-b} = \omega_{it}$ と仮定すると、 $m_{it} = \mathbb{M}_t(k_{it}, \omega_{it-b}) = \mathbb{M}_t(k_{it}, \omega_{it})$ なので、それによって導出される ω_{it} についての逆関数と、 l_{it} が賃金ショック ε_{it} に依存することを考えると、

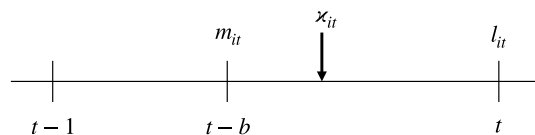


図2

$$l_{it} = h_t(k_{it}, \omega_{it}, \varkappa_{it}) = \ell_t(k_{it}, m_{it}, \varkappa_{it})$$

となる。第一ステージのモーメント条件は、

$$\begin{aligned} E[\varepsilon_{it}|\mathcal{I}_{it}] &= E[y_{it} - \beta_l l_{it} - \phi(k_{it}, m_{it})|\mathcal{I}_{it}] \\ &= E[y_{it} - \beta_l \ell_t(k_{it}, m_{it}, \varkappa_{it}) - \phi(k_{it}, m_{it})|\mathcal{I}_{it}] \end{aligned}$$

となり、 \varkappa_{it} が l_{it} のみに変動を与えるので、 β_l が識別できる。

2.5 ACF の付加価値生産関数の識別

以上の議論を受けて、 l_{it} を非動学的なものとして考え、第一ステージで推定しようとする
と識別が難しくなるので、単純に、ACF では労働投入 l_{it} を動学的なインプットとして
考え、第一ステージで β_l を推定しないことで識別を可能とした。²

以下の m_{it} を取り除いた付加価値生産関数 (Value-added production function) を考える³。

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l l_{it} + \omega_{it} + \varepsilon_{it}$$

l_{it} は状態変数であり中間投入財の需要関数は

$$m_{it} = \mathbb{M}_t(k_{it}, l_{it}, \omega_{it}).$$

、つまり、 m_{it} は l_{it} の後か、あるいは同時に選ばれると仮定する。観察不可能変数単一の
仮定も同じく課す。逆関数 $\omega_{it} = \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, l_{it}, \omega_{it})$ を生産関数に代入し、ノンパラメトリッ
クに表現すると、

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_k k_{it} + \beta_l l_{it} + \mathbb{M}_t^{-1}(k_{it}, l_{it}, \omega_{it}) + \varepsilon_{it} = \phi_t(k_{it}, l_{it}, m_{it}) + \varepsilon_{it},$$

となり、第一ステージのモーメント条件は、

$$E[\varepsilon_{it}|\mathcal{I}_{it}] = E[y_{it} - \phi_t(k_{it}, l_{it}, m_{it})|\mathcal{I}_{it}] = 0$$

となり、 ϕ_t だけを推定する。第二ステージのモーメント条件は、

2 厳密には、彼らは l_{it} が動学的含意を持つ、として、 t 期、 $t-1$ 期、あるいはその間の $t-b$ 期に選ばれると
いう仮定であり、資本 k_{it} と異なり、動学的な最適問題を解いた結果である、ということではない。

3 Gandhi et al. (2020) は m_{it} を生産関数に含めた総生産関数は識別が難しいことを示したが、それについて
は次のセクションで説明する。

$$\begin{aligned}
E[\xi_{it} + \varepsilon_{it} | I_{it-1}] &= E[y_{it} - \beta_0 - \beta_k k_{it} - \beta_l l_{it} \\
&\quad - g(\phi_{t-1}(k_{it-1}, l_{it-1}, m_{it-1}) - \beta_0 - \beta_k k_{it-1} - \beta_l l_{it-1}) | I_{it-1}] = 0.
\end{aligned}$$

であり、第一ステージで推定した結果得られる ϕ_{t-1} を用いている。ここで、 $\beta_0, \beta_k, \beta_l$ を推定する。

最後に、生産性は、 $\omega_{it} \equiv \phi_t(k_{it}, l_{it}, m_{it}) - \beta_0 - \beta_k k_{it} - \beta_l l_{it}$ として識別される。

3 Gandhi et al. (2020) の総生産関数のノンパラメトリック識別と推定

Gandhi et al. (2020) (以下, GNR) では ACF のような付加価値生産関数ではなく、中間投入財 m_{it} を生産要素として含むノンパラメトリックな総生産関数

$$Y_{it} = F(k_{it}, l_{it}, m_{it}) e^{\omega_{it} + \varepsilon_{it}} \Leftrightarrow y_{it} = f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) + \omega_{it} + \varepsilon_{it}$$

を識別推定する。ACF の帰結を踏まえ、 k_{it} だけでなく l_{it} も動学的に決定されると仮定し、一方で m_{it} は非動学的であると仮定する。また、古典的な状況として中間投入財とアウトプットの市場において完全競争を仮定し、 t 期における中間投入財価格は ρ_t 、生産物価格は P_t であるとする。

ACF までの議論では企業の利潤最適化行動により導出される F.O.C. を考慮していなかったが、GNR では明示的に仮定し登場させている、という点が GNR の議論の重要な点である。

3.1 総生産関数の識別の問題

GNR はまず総生産関数の識別は難しいことを示した。

総生産関数推定の際に m_{it} の弾力性の推定も行う場合、GNR は代理変数法アプローチとして $m_{it} = M_t(k_{it}, l_{it}, \omega_{it})$ を仮定するが、一見すると m_{it} は ω_{it} のもと、動学的に決まる k_{it}, l_{it} によって決定されるので、多重共線性の問題により、 m_{it} の弾力性の推定はできないのではないかと考えられるかもしれない。

しかし、企業は利潤最適化行動を取っていることを明示的に仮定すると、企業の中間投入財に関する利潤最大化問題は、 M_{it} が動学的ではなく、 t 時点の利潤にのみ影響を与えるため、完全競争の仮定の元では、短期的に

$$\max_{M_{it}} P_t E[F(k_{it}, l_{it}, m_{it}) e^{\omega_{it} + \varepsilon_{it}} | \mathcal{I}_{it}] - \rho_t M_{it},$$

となり、これを解いて企業の F.O.C. は、

$$P_t \frac{\partial}{\partial M_{it}} F(k_{it}, l_{it}, m_{it}) e^{\omega_{it}} \mathcal{E} = \rho_t \quad (3)$$

となる。ここで、 \mathcal{E} は

$$\mathcal{E} \equiv E[e^{\varepsilon_{jt}} | \mathcal{I}_{jt}] = E[e^{\varepsilon_{jt}}].$$

として定数となると仮定する。この F.O.C. が中間投入財 m_{it} の需要関数にどのような制約を加えているかを考える。 $d_t = \ln(\frac{\rho_t}{P_t}) - \ln \mathcal{E}$ とすると、 $k_{it}, l_{it}, \omega_{it} - d_t$ が F.O.C. の中で変数として登場しているので、

$$m_{it} = \mathbb{M}(k_{it}, l_{it}, \omega_{it} - d_t) = \mathbb{M}_t(k_{it}, l_{it}, \omega_{it})$$

となり、代理変数法だけでは明示的に現れてこなかった d_t が m_{it} に変動を与えるという制約があることがわかる。

生産関数の推定に際し、ACF と同じように、代理変数法と、動学パネルの文脈として ω_{it} が一次マルコフ過程に従うことを仮定し利用する。その際に ω_{it} を次のように入れ替えると、

$$\begin{aligned} m_{it} &= \mathbb{M}(k_{it}, l_{it}, \omega_{it} - d_t) \\ &= \mathbb{M}(k_{it}, l_{it}, E[\omega_{it} | \omega_{it-1}] + \eta_{it} - d_t) \\ &= \mathbb{M}(k_{it}, l_{it}, h(\omega_{it-1}) + \eta_{it} - d_t) \\ &= \mathbb{M}(k_{it}, l_{it}, h(\mathbb{M}^{-1}(k_{it-1}, l_{it-1}, m_{it-1}) + d_{t-1})) + \eta_{it} - d_t \end{aligned}$$

となる。モーメント条件の中で $(k_{it}, l_{it}, d_{t-1}, k_{it-1}, l_{it-1}, m_{it-1})$ は、それら自体の操作変数として使われるので、それ以外で m_{it} に変動を与えるのは、 η_{it} と d_t である。このうち η_{it} は観察不可能なので、 m_{it} の識別は d_t に依存することがわかる⁴。

GNR は、 d_t に変動がない、つまり $d_t = d \ \forall t$ の時、 m_{it} の識別のためにほかにクロスセクションで m_{it} に変動をもたらし変数がないので総生産関数は識別できないことを証明した。さらにショートパネルの場合やモデルが時間によって変動する場合も総生産関数は識別できないことを証明した。

また、仮にもし d_t に十分な時系列的な変動があったとしても、識別を達成するために

4 d_t は中間投入財の価格から構成されるので、もっぱら中間投入財需要のみに変動を与える。その意味で Ai and Chan (2003) の識別条件を満たす。

は弱い変動であり、モンテカルロシミュレーションにより、バイアスが生じると示した。

3.2 F.O.C. を用いたノンパラメトリック識別と推定

GNR は、ACF までの方法と異なり、F.O.C. によるモデルに対する制約を利用することによってノンパラメトリックに総生産関数を推定することが可能であることを示した。

3.2.1 中間投入財の弾力性の識別

第一に、GNR は企業の最適化行動によりもたらされる制約を明示的に導入することと、代理変数法の仮定を課すことでノンパラメトリックに中間財の弾力性を識別できることを示した。

企業の間接投入財に関する利潤最大化問題の解である F.O.C. の式 (3) より、 $\frac{\partial}{\partial M_{it}}$ $F(k_{it}, l_{it}, m_{it})$ の部分を変形し、対数を取ると、F.O.C. は、

$$\ln P_t - \ln M_{it} + \ln \left(\frac{\partial}{\partial m_{it}} f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) \right) + f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) + \omega_{it} + \ln \mathcal{E} - \ln \rho_t = 0$$

となることを示すことができる。上式から $f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) + \omega_{it}$ の部分を消すために、生産関数との差を取ると、

$$s_{it} \equiv \ln \left(\frac{\rho_t M_{it}}{P_t Y_{it}} \right) = \ln \mathcal{E} + \ln \left(\frac{\partial}{\partial m_{it}} f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) \right) - \varepsilon_{it}$$

を導出できる。仮定から $E[\varepsilon_{it} | k_{it}, l_{it}, m_{it}] = 0$ を示すことができるので、

$$E[s_{it} | k_{it}, l_{it}, m_{it}] = \ln \mathcal{E} + \ln \left(\frac{\partial}{\partial m_{it}} f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) \right) \equiv \ln D^\varepsilon(k_{it}, l_{it}, m_{it})$$

と条件付期待値をとる。これを share regression と呼称する。 $\varepsilon_{it} = \ln D^\varepsilon(k_{it}, l_{it}, m_{it}) - s_{it}$ であるので、定数

$$\mathcal{E} = E[e^{\varepsilon_{it}}] = E[\exp(\ln D^\varepsilon(k_{it}, l_{it}, m_{it}) - s_{it})]$$

を識別でき、

$$\frac{D^\varepsilon(k_{it}, l_{it}, m_{it})}{\mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial m_{it}} f(k_{it}, l_{it}, m_{it})$$

として $\frac{\partial}{\partial m_{it}} f(k_{it}, l_{it}, m_{it})$ を識別できる。

3.2.2 中間投入財の弾力性推定後の生産関数の識別

第二に GNR は、前のセクションで識別された中間投入財の弾力性を積分すること、さ

らに動学パネルの文脈における ω_{it} が一次マルコフ過程に従う仮定を課すことを通して生産関数を識別できることを示した。

微分積分学の基本定理より、

$$\int \frac{\partial}{\partial m_{it}} f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) dm_{it} = f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) + \mathcal{C}(k_{it}, l_{it}). \quad (4)$$

であるので、 $\mathcal{C}(k_{it}, l_{it})$ を識別できれば生産関数が識別できることに気づく。そこで、まず生産関数との差をとると、

$$\mathcal{Y}_{it} \equiv y_{it} - \varepsilon_{it} - \int \frac{\partial}{\partial m_{it}} f(k_{it}, l_{it}, m_{it}) dm_{it} = -\mathcal{C}(k_{it}, l_{it}) + \omega_{it}.$$

となり、 \mathcal{Y}_{it} は中間投入財に関わる第一段階の推定および、 y_{it} が観察可能である場合にデータから観察可能である。

ここで、 ω_{it} は一次マルコフ過程に従うと仮定すると、 η_{it} は $E[\eta_{it}|\mathcal{I}_{it-1}] = 0$ とした時、 $\omega_{it} = E[\omega_{it}|\omega_{it-1}] + \eta_{it} = h(\omega_{it-1}) + \eta_{it}$ であり、さらに代理変数法の仮定を利用すると、 ω_{it} について

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{it} &= -\mathcal{C}(k_{it}, l_{it}) + \omega_{it} \\ &= -\mathcal{C}(k_{it}, l_{it}) + h(\omega_{it-1}) + \eta_{it} \\ &= -\mathcal{C}(k_{it}, l_{it}) + h(\mathcal{Y}_{it-1} + \mathcal{C}(k_{it-1}, l_{it-1})) + \eta_{it} \end{aligned}$$

として置き換えることができる。 $(\mathcal{Y}_{it-1}, k_{it-1}, l_{it-1})$ は $t-1$ 期に企業は知っており、 (k_{it}, l_{it}) はあらかじめ決まっているため、 $E[\eta_{it}|k_{it}, l_{it}, \mathcal{Y}_{it-1}, k_{it-1}, l_{it-1}] = 0$ が成立し、従って

$$E[\mathcal{Y}_{it}|k_{it}, l_{it}, \mathcal{Y}_{it-1}, k_{it-1}, l_{it-1}] = -\mathcal{C}(k_{it}, l_{it}) + h(\mathcal{Y}_{it-1} + \mathcal{C}(k_{it-1}, l_{it-1}))$$

である。これより、 \mathcal{Y}_{it} を $(k_{it}, l_{it}, \mathcal{Y}_{it-1}, k_{it-1}, l_{it-1})$ に回帰すると、左辺が識別できる。最後に、直観的には、もし (k_{it}, l_{it}) を $(\mathcal{Y}_{it-1}, k_{it-1}, l_{it-1})$ と独立に変動させることができれば、 $\mathcal{C}(k_{it}, l_{it})$ を $h(\mathcal{Y}_{it-1} + \mathcal{C}(k_{it-1}, l_{it-1}))$ とは分離して識別できることが示され、それを用いて (4) の生産関数 $f(k_{it}, l_{it}, m_{it})$ を識別できることが証明されている (THEOREM 3)。

以上の識別の議論に基づき、GNR は推定について、Chen (2007) で分析されているような Sieve Series 推定量を用いたノンパラメトリック推定を行う方法を提案した。生産関数のノンパラメトリックモデルの推定を達成するために、ノンパラメトリック推定を簡単に近似することができ、また、識別で議論したような中間投入財の弾力性に対して積分を行う必要があるので、積分を簡単に行うことができる Sieve Series 推定量を用いることが適している。推定の方法は識別の議論にほとんど沿うようにできているので、詳細は GNR を参照していただきたい。

4 収益のデータに基づく生産関数の推定

ここまでの議論では、製品の産出量と製品価格、投入量と投入財価格が分析者に観測できることを仮定してきた。しかし、多くの企業レベルのデータでは収益や費用に関するデータは記載されているが、販売する製品の産出量や販売量、製品価格、そして投入財価格、投入量は記載されていない。多くの場合、分析者は単純に観測されない価格の代わりに価格指数を用いて、収益から産出量を導出し、それを生産関数における産出量として用いるが、本論ではまずそのような方法がもたらす問題点を指摘する。それからその解決策として、需要側のモデルも用いて生産関数を推定する方法を議論する。

4.1 Katayama et al. (2009) による問題提起

例として、議論の単純化のため、静学的な意思決定により需要量が決まる中間投入財だけを投入財として考え、以下のような生産関数を仮定する。

$$Y_{it} = \exp(\omega_{it}) h(M_{it}) \quad (5)$$

すると、生産関数 $h()$ を推定したのちに、生産性ショックの対数は以下のように求めることができる。

$$\omega_{it} = \ln Y_{it} - \ln \hat{h}(M_{it}) \quad (6)$$

\hat{h} は関数 h の推定されたものであることを示す。ところが、多くのデータでは収益 $R_{it} = P_{it}Y_{it}$ と、 W_{mit} を中間財の価格とした時、費用（この場合は中間財費用） $TC_{it} = W_{mit}M_{it}$ のみが記載されている。よって、産業全体の価格指数 \bar{P}_t を実際の価格の代わりに用いて産出量を $\hat{Y}_{it} = R_{it}/\bar{P}_t$ とし、産業全体の中間投入財の価格指数 \bar{W}_{mt} を用いて中間投入財の投入量を $\hat{M}_{it} = TC_{it}/\bar{W}_{mt}$ とすることが一般的であり、多くの実証研究でこのような方法が採られている。Katayama et al. (2009) はそのような場合に生じる問題点を詳しく指摘した。以下、彼らの主張を説明する。

生産性ショックは以下のように計測されることになる。

$$\hat{\omega}_{it} = \ln \left(\frac{R_{it}}{\bar{P}_t} \right) - \ln \hat{h} \left(\frac{TC_{it}}{\bar{W}_{mt}} \right) \quad (7)$$

ここからわかるように、計測された生産性ショックは、企業間の生産性の違いを説明するために、基本的には産出量の代わりに収益を、そして中間投入財の代わりに中間投入財の

費用を代入することによって求められている。

次に、以上のように価格の代わりに価格指数を代入して収益と費用から産出量と投入量を求め、それをもとにして計測された生産性にどのような問題があるかを検討する。まず、産出量に関する限界収益を求めると、それは以下ようになる。

$$\frac{\partial P_{it} Y_{it}}{\partial Y_{it}} = P_{it} + Y_{it} \frac{\partial P_{it}}{\partial Y_{it}} = P_{it} \left[1 + \frac{Y_{it}}{P_{it}} \frac{\partial P_{it}}{\partial Y_{it}} \right] = P_{it} \left[1 - \frac{1}{\eta_{it}} \right]$$

ここで η_{jt} は需要の価格弾力性である。さらに中間投入財に関する限界収益を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{it} Y_{jt}}{\partial M_{it}} &= \frac{\partial P_{it} Y_{it}}{\partial Y_{it}} \frac{\partial Y_{it}}{\partial M_{it}} = \left[1 - \frac{1}{\eta_{it}} \right] P_{it} \exp(\phi_{it}) h'(M_{it}) \\ &= \left[1 - \frac{1}{\eta_{it}} \right] R_{it} \frac{\partial \ln h(M_{it})}{\partial M_{it}} = \left[1 - \frac{1}{\eta_{it}} \right] \frac{R_{it}}{M_{it}} \gamma_{it} \end{aligned}$$

となる。ここで γ_{it} は投入財の産出量への弾力性である。中間投入財の限界費用が W_{mt} であるので、

$$\left[1 - \frac{1}{\eta_{it}} \right] \frac{R_{it}}{M_{it}} \gamma_{it} = W_{mt}$$

より、収益 R_{it} は以下のように表現できる。

$$R_{it} = \frac{\eta_{it}}{\eta_{it} - 1} \frac{TC_{it}}{\gamma_{it}}, \quad \gamma_{it} = \frac{\partial \ln h(M_{it})}{\partial \ln M_{it}}$$

以上の結果を式 (7) に代入すると、計測された生産性は、マーク・アップ、そして投入財価格の関数となるが、これは真の生産性がこれらの変数と独立か否かにかかわらず成立する。

収益や費用、そして価格指数をもとにして得られた生産性の計測値は、生産性と投入財価格、または生産性とマーク・アップの関係を統計的に検証した過去の多くの実証研究において使われてきた。それらの研究において、企業規模が大きい企業、またはより多くの企業が集まっている場所に立地している企業、そして多国籍企業の生産性が他の企業より高いことが検証されているが、それはそれらの企業の真の生産性が高いのではなく、生産要素の一つである労働者の雇用費用が高いことが理由である可能性は否定できない。同様のことが、マーク・アップと生産性の関係を調べた実証研究においても言える。

さらに、もし生産関数が投入財に関して線形である、つまり $h(M_{it}) = H M_{it}$ が成立すると仮定すると、 $\gamma_{it} = 1$ となるので、式 (7) より、

$$\hat{\omega}_{it} = \ln \left(\frac{\eta_{it}}{\eta_{it} - 1} \right) - \ln \hat{H} - \ln \bar{P}_t + \ln \bar{W}_{mt}$$

が成立する。よって、もしマーク・アップが外生的に決定され、真の生産性とは独立であ

る場合、計測された生産性は、単にマーク・アップ、 \hat{H} 、 \bar{P}_t 、 \bar{W}_{mt} の関数であるので、これはデータからリカバーしたい真の生産性とは全く関係なくなってしまう。本稿の冒頭で述べたように、企業は企業自身の生産性をまず観察し、それを元に、例えば投入財価格などを観察して投入財投入量を意思決定するので、そうした意思決定の大元にあるような生産性を測定したいのである。

以上の議論によって、収益、そして費用のデータと、産業全体の価格指数を用いて生産性を計測することには重要な問題があることが指摘された。それでは、どのようにすれば正しく生産性を計測することができるのであろうか。

4.2 CES 型効用関数を仮定する場合

一つの方法として、De Loecker (2011) において議論された、CES 型効用関数を用いた生産関数の推定を考える。その場合において、収益、投入財価格、そして投入量があるデータを想定する。さらに、CES 型効用関数を仮定すると、ある産業の企業 i のセグメント s 、時間 t の需要関数は以下のように表すことができる。

$$Y_{it} = Y_{st} \left(\frac{P_{it}}{P_{st}} \right)^{-\eta_s} \exp(\xi_{it})$$

ここでセグメントは、ある産業の一つの市場、またはより細分化された部門と考えることができる。そして、 ξ_{it} は需要ショックであるが、それは以下のように表される。

$$\xi_{it} = \xi_i + \mathbf{x}_{it}\beta + \tilde{\xi}_{it}$$

ここで ξ_i は企業 i の固定効果、 \mathbf{x}_{it} は需要ショックに影響を与える観測される外生変数、そして $\tilde{\xi}_{it}$ は他の変数とは独立である計測誤差であると仮定されている。すると、収益は以下のように表すことができる。

$$R_{it} = Y_{it}^{(1-\frac{1}{\eta_s})} Y_{st}^{1/\eta_s} P_{st} (\exp(\xi_{it}))^{1/\eta_s} \quad (8)$$

式 (8) の対数を取ると、

$$r_{it} = \left(1 - \frac{1}{\eta_s} \right) y_{it} + \frac{1}{\eta_s} y_{st} + p_{st} + \frac{1}{\eta_s} \xi_{st}$$

そして、上式を以下のコブ・ダグラス型生産関数

$$y_{it} = l_{it}\alpha_l + m_{it}\alpha_m + k_{it}\alpha_k + \omega_{it} + \varepsilon_{it} \quad (9)$$

に代入すると、収益のデータを用いた生産関数は以下のように表すことができる。

$$r_{it} = l_{it}\beta_l + m_{it}\beta_m + k_{it}\beta_k + y_{st}\beta_s + \omega_{it}^* + \xi_{it}^* + \varepsilon_{it} \quad (10)$$

ここで $\omega_{it}^* \equiv \omega_{it}(1 - 1/\eta_s)$ は生産性の対数の線形関数、そして $\xi_{it}^* \equiv \xi_{it}/\eta_s$ は計測誤差の線形関数であるので、すでに説明した生産関数の推定法を用いて推定を行うことができる。収益を被説明変数とした式 (10) の推定結果から、以下のようにして生産関数のパラメータの推定値を得ることができる。

$$\alpha_h = \frac{\eta_s}{1 - \eta_s} \beta_h, \quad h \in \{l, m, k\}$$

この方法の限界は、需要関数に計測誤差を入れることができるが、企業が利潤最大化の際に考慮するような通常の需要ショックを入れることができないことである。

5 まとめ

本稿では、近年の生産関数の推定方法について概観した。生産関数の生産性が観測できないことから生じる内生性バイアスに対処するため、代理変数法に基づく推定法を紹介した。こうした手法が機能するために、分析者は企業や工場についての生産量や資本や労働、および中間投入材のデータをパネルデータとして用いることが可能であること、観察不可能変数が特定の時系列的な構造を持っていること、観察不可能変数が単一であること、などを仮定する必要があることを確認した。また、収益しか観測できない場合の推定上の問題とその際の一つの対処方法についても紹介した。

本稿では扱わなかったが、生産関数の形状よりも、生産性や効率性を測定したい場合には、確率フロンティア分析 (Stochastic Frontier Analysis)⁵ や、包絡分析法 (Data Envelopment Analysis)⁶ が広く使われている。これらは最も効率的なインプットとアウトプットの生産関係からの乖離でもって各企業の生産性や効率性を評価する。これらの手法が使われる場合には生産関数および生産性の識別についてはほとんど議論されていなかったが、近年確率フロンティアモデルにおいて Amsler et al. (2016) により操作変数を用いて内生性の問題に対処する手法が試みられている。

実際の企業の生産プロセスをデータから推定することを生産関数推定の目的と考えた場合、対象とする産業や、生産関数の特定化には考えるべき余地がある。例えば、これまでの特定化では、特に製造業に存在するような在庫を考えていない。多くの製造業が在庫を

5 Aigner et al. (1977) と Meeusen and van Den Broeck (1977) によって考案された。

6 Charnes et al. (1978) により考案された。

保有することによって、需要変動に対応しているが、これまでの生産関数の推定方法ではモデルに組み込むことができていない。従って、在庫を考慮しなくても良い産業に適用する必要がある。

参考文献

- Akerberg, Daniel A, Kevin Caves, and Garth Frazer, "Identification properties of recent production function estimators," *Econometrica*, 2015, 83(6), 2411-2451.
- Ai, Chunrong and Xiaohong Chen, "Efficient estimation of models with conditional moment restrictions containing unknown functions," *Econometrica*, 2003, 71(6), 1795-1843.
- Aigner, Dennis, CA Knox Lovell, and Peter Schmidt, "Formulation and estimation of stochastic frontier production function models," *Journal of econometrics*, 1977, 6(1), 21-37.
- Amsler, Christine, Artem Prokhorov, and Peter Schmidt, "Endogeneity in stochastic frontier models," *Journal of Econometrics*, 2016, 190(2), 280-288.
- Blundell, Richard and Stephen Bond, "Initial conditions and moment restrictions in dynamic panel data models," *Journal of econometrics*, 1998, 87(1), 115-143.
- and ———, "GMM estimation with persistent panel data: an application to production functions," *Econometric reviews*, 2000, 19(3), 321-340.
- Charnes, Abraham, William W Cooper, and Edwardo Rhodes, "Measuring the efficiency of decision making units," *European journal of operational research*, 1978, 2(6), 429-444.
- Chen, Xiaohong, "Large sample sieve estimation of semi-nonparametric models," *Handbook of econometrics*, 2007, 6, 5549-5632.
- Gandhi, Amit, Salvador Navarro, and David A Rivers, "On the identification of gross output production functions," *Journal of Political Economy*, 2020, 128(8), 2973-3016.
- Griliches, Zvi and Jacques Mairesse, "Production functions: the search for identification," Technical Report 1998.
- Katayama, Hajime, Shihua Lu, and James R Tybout, "Firm-level productivity studies: illusions and a solution," *International Journal of Industrial Organization*, 2009, 27(3), 403-413.
- Levinsohn, James and Amil Petrin, "Estimating production functions using inputs to control for unobservables," *The review of economic studies*, 2003, 70(2), 317-341.
- Loecker, Jan De, "Product differentiation, multiproduct firms, and estimating the impact of trade liberalization on productivity," *Econometrica*, 2011, 79(5), 1407-1451.
- and Frederic Warzynski, "Markups and firm-level export status," *American economic review*, 2012, 102(6), 2437-71.
- Marschak, Jacob and William H Andrews, "Random simultaneous equations and the theory of production," *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, 1944, pp. 143-205.
- McElroy, Marjorie B, "Additive general error models for production, cost, and derived demand or share systems," *Journal of Political Economy*, 1987, 95(4), 737-757.
- Meeusen, Wim and Julien van Den Broeck, "Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error," *International economic review*, 1977, pp. 435-444.
- Olley, S and A Pakes, "The dynamics of productivity in the Telecommunications Equip-ment Industry, in "Econometrica", vol. 64," 1996.