ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Текст текст текст текст текст

ГЛАВА 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Теория графов

Графы — это фундаментальное понятие в дискретной математике, и теория графов играет важную роль в изучении различных аспектов их применения. Графы используются для моделирования и анализа множества реальных явлений, таких как сети, маршрутизация, социальные взаимодействия и многое другое.

В этом разделе мы рассмотрим основные понятия теории графов, которые помогут нам заложить базис для дальнейшего изучения этой темы.

1.1.1 Основные определения

Графы обеспечивают эффективное средство для описания бинарных отношений между различными объектами. Чтобы понять эту концепцию, можно взять пример из социальной сети: люди в этой сети представляют собой множество объектов, обозначаемых как V. В то же время отношения между этими людьми, такие как подписки или дружба, можно рассматривать как набор бинарных связей. Если объект v_i подписан на объект v_j, это означает наличие определенной связи между этими двумя людьми.

Для визуализации графов часто используется графическое представление, в котором объекты изображаются в виде кругов или узлов, а связи между ними – в виде линий или рёбер. Такой способ визуализации помогает лучше понять структуру графа и позволяет легче выявлять взаимосвязи между различными элементами.

В теории графов мы можем классифицировать графы по их структуре и направленности. Граф считается ориентированным, если он содержит непустое множество вершин V и множество отношений или рёбер $E \subset V \times V$, при этом каждое ребро можно трактовать как упорядоченную пару (v_i, v_j). Это означает, что в ориентированном графе направление связи между вершинами имеет значение. В данном случае, если в графе есть ребро из вершины v_i в вершину v_j, то может не быть обратного ребра из v_j в v_i. Такой граф часто называют "ориентированным графом"или "диграфом".

Если же граф содержит симметричные отношения между вершинами, он называется неориентированным. В неориентированном графе наличие ребра между вершинами v_i и v_j означает, что связь двусторонняя: если есть ребро (v_i, v_j), то автоматически имеется и обратное ребро (v_j, v_i).

Существует также класс графов, называемых смешанными графами. Они обладают одновременно ориентированными и неориентированными рёбрами, что придаёт им более сложную структуру и позволяет описывать более разнообразные ситуации.

На рисунке 1.1 представлен пример различных типов графов, показывающий, как можно визуально различать ориентированные, неориентированные и смешанные графы. Такой подход к изображению графов позволяет легко понять, какой тип отношений присутствует в каждом конкретном случае.

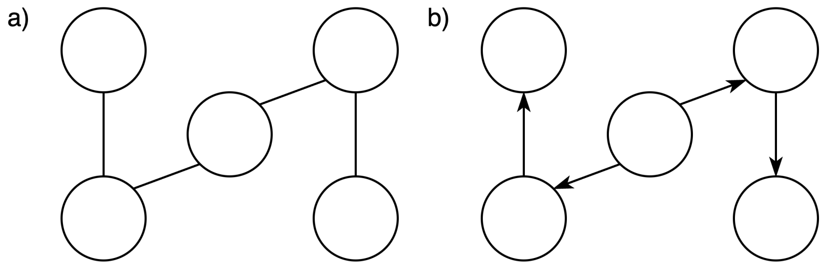

Рисунок 1.1 — Ориентированный граф (a), неориентированный граф (b)

Полный граф — это граф, в котором каждая вершина соединена со всеми другими вершинами. Это означает, что множество рёбер E эквивалентно декартовому произведению множества вершин $V \times V$. В таком графе между любой парой вершин существует прямое отношение или ребро, что создает сеть с максимальной плотностью связей. Полные графы часто используются в различных теоретических моделях и имеют ряд интересных свойств.

Взвешенный граф — это граф, в котором каждому ребру или вершине присваивается некоторый вес или значение. Этот вес может представлять что угодно: от стоимости или длины пути до количества ресурсов или времени, необходимого для преодоления данного ребра или для работы с данной вершиной. Взвешенные графы позволяют анализировать графы с учетом дополнительных параметров и часто используются для задач, связанных с оптимизацией.

Путь в графе — это последовательность рёбер, которая соединяет ряд вершин, начиная с исходной вершины и заканчивая конечной. Формально, путь определяется как набор рёбер $E_1, E_2, \ldots, E_n$, где конечная вершина одного ребра совпадает с начальной вершиной следующего. Путь считается простым, если никакое ребро не повторяется более одного раза. Элементарный путь — это путь, в котором каждая вершина посещается только один раз, что означает отсутствие повторяющихся вершин.

Цикл — это особый тип пути, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине. Если граф является направленным, цикл может называться контуром. Циклы важны для выявления повторяющихся процессов или замкнутых систем в графе.

На изображении 1.2 показан пример пути, который является простым, поскольку каждое ребро используется только один раз, но не элементарным, так как центральная вершина посещается дважды. Такие примеры иллюстрируют различия между простыми и элементарными путями и показывают, как они могут применяться в различных контекстах анализа графов.

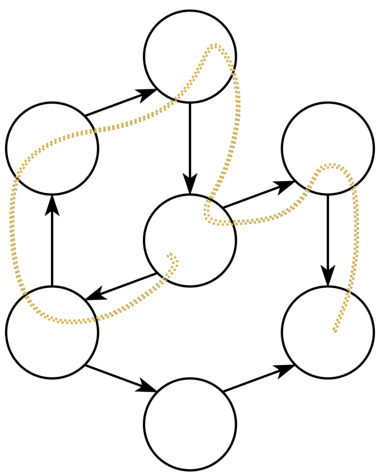

Рисунок 1.2 — Простой, но не элементарный путь в графе

Граф считается связным, если для каждой пары различных вершин в этом графе существует хотя бы один путь, соединяющий их. Это означает, что в связном графе можно переместиться из любой вершины к любой другой, следуя по рёбрам, которые соединяют вершины.

Связность является ключевым свойством графов, которое определяет их структуру и характер. В связном графе все вершины так или иначе соединены друг с другом, даже если путь между ними может проходить через другие промежуточные вершины.

Связные графы часто используются для моделирования систем, в которых элементы имеют некоторую степень взаимодействия или зависимости. Например, в социальной сети связный граф указывает на то, что существует путь коммуникации между любыми двумя участниками сети, даже если они могут быть связаны через нескольких посредников.

Если граф не является связным, то он состоит из нескольких отдельных компонент, каждая из которых представляет собой связный граф. Эти компоненты могут быть изучены отдельно, так как они не имеют связей друг с другом. Исследование связности графов позволяет выявлять изолированные сегменты или группы тесно связанных элементов.

1.1.2 Изоморфизм графов

Изоморфизм в теории графов — это понятие, которое указывает на структурное сходство между графами. Когда говорят, что графы G_1 и G_2 изоморфны, это означает, что между ними можно установить взаимно однозначное соответствие для вершин и рёбер. Иными словами, если имеется биекция между вершинами двух графов, которая сохраняет структуру рёбер, то такие графы считаются изоморфными.

Изоморфизм графов подразумевает, что их визуальная структура может отличаться, но по сути они идентичны. Например, если у одного графа вершины A, B, C соединены рёбрами в определенной последовательности, то в другом графе можно найти соответствие, в котором другие вершины X, Y, Z имеют те же рёбра в той же последовательности. Изоморфизм позволяет понять, когда два графа, несмотря на различие в именах или представлениях, имеют одинаковую структуру.

Подграфы — это части графа, которые включают некоторую подмножество вершин и рёбер из исходного графа. Если два подграфа из разных графов изоморфны друг другу, то их называют изоморфными подграфами. Такое понятие полезно при анализе сложных графов, когда нужно найти общие структуры или повторяющиеся паттерны.

Двойной изоморфизм подграфов — это ситуация, в которой два разных графа содержат подграфы, которые изоморфны друг другу. Это более широкий концепт, который указывает на то, что в двух графах есть общие структуры, но сами графы при этом могут не быть изоморфными.

Таким образом, изоморфизм и его вариации позволяют исследовать и выявлять структурное сходство в графах, что часто используется в таких областях, как компьютерные науки, биоинформатика и теория сетей.

1.1.3 Деревья

Деревья представляют собой особый вид графов, которые широко применяются в различных областях информационных технологий, таких как алгоритмы, структуры данных. В этой работе деревья будут служить основой для алгоритмов генерации маршрутов.

Подобно графам, деревья делятся на два класса: ориентированные и неориентированные. Неориентированное дерево — это связный граф, который не содержит простых циклов. Это означает, что если начать обход по дереву из любой вершины, невозможно вернуться к исходной точке, не пройдя по рёбрам назад. Деревья уникальны своей структурой, поскольку они всегда связаны, но не имеют замкнутых путей.

В деревьях есть особые вершины, которые называются листовыми. Листовые вершины — это вершины, которые имеют степень, равную единице, то есть из них выходит только одно ребро. Они представляют собой конечные точки в дереве, и их наличие указывает на то, что это дерево имеет четко определенную структуру без циклов.

Остальные вершины в дереве, из которых выходит более одного ребра, называются внутренними вершинами. Внутренние вершины обеспечивают структуру дерева, соединяя между собой другие вершины и образуя пути, которые могут вести к листовым вершинам.

В целом, деревья обладают рядом полезных свойств, которые делают их ключевым элементом в алгоритмах, особенно тех, что связаны с обработкой данных, маршрутами и поиском путей. Их использование в алгоритмах генерации маршрутов позволяет оптимизировать процесс поиска и обеспечить целостность структуры данных.

В теории алгоритмов и структур данных распространены так называемые деревья поиска. Деревом поиска называется дерево, в каждой вершине которого находятся 2 объекта (ключ и значение).

1.1.4 Расстояния на графе

1.1.5 Раскраска графов

1.1.6 Эйлеровы и гамильтоновы графы

1.1.7 Кратчкайшие пути на графе

1.2 Теория вероятности

1.2.1 Основные определения

1.2.2 Случайные переменные

1.2.3 Теория информации

1.3 Интеллектуальный анализ с помощью теории графов

1.4 Вероятностные модели

1.4.1 Байесовсеие классификаторы

1.4.2 Скрытые марковские модели

1.4.3 Марковские случайные поля

1.4.4 Байесовские сети

1.5 Модели принятия решений

1.5.1 Графы принятия решений

1.6 Варианты хранения взаимосвязанных данных

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Текст текст текст текст текст

1.9 Название подраздела 1

Рисунок 1.3 — Пример вставки изображения

1.10 Название подраздела 2

A1	B1	C1
A2	B2	C2

Таблица 1.1 — Пример вставки таблицы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Andrew Ng, Machine Learning from Stanford University. https://www.coursera.org/learn/machine-learning
2. Воронцов К.В., Введение в машинное обучение от НИУ ВШЭ & Yandex School of Data Analysis. https://www.coursera.org/learn/vvedenie-mashinnoe-obuchenie
3. Samuel, Arthur L. Some Studies in Machine Learning Using the Game of Checkers // IBM Journal. - 1959. - №3. - http://www.cs.virginia.edu/ evans/greatworks/samuel1959.pdf

Список иллюстраций

Стр.

Список таблиц

Список программных листингов