Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения

Е.В.Королев Г.А.Туманов

Московский авиационный институт (НИУ)

11 ноября 2021 г.

План презентации

Введение

LMS

С переходом на дистанционное образование активно развиваются системы управления обучением (LMS)

Способ повышения качества дистанциооного образования

Применение анализа данных в LMS может повысить качество дистанционного образования

За счет чего повышактся качество?

Сложность заданий оценивается экспертами, либо программно. Происходит адаптация контента под оцениваемый уровень знаний пользователя

Логнормальная модель Ван дер Линдена

Пусть $Z = (z_1, \cdots, z_I)$ – вектор заданий
Ван дер Линден предположил, что логарифм времени T_j^i (время ответа j-го пользователя на i-ю задачу) состоит из 3-х компонент:

- μ – общая составляющая для всех пользователей и задач;
- β_i – индивидуальная сложность i-й задачи;
- τ_j – особенности j-го пользователя, решающего задание.

Модель имеет вид:

$$\ln T_j^i = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ – независимые СВ

Оценки параметров модели

Из ММП можно получить оценки модели:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \ln t_j^i, \quad \hat{\beta}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \ln t_j^i - \hat{\mu}, \quad \hat{\tau}_j = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=1}^{I} \ln t_j^i - \hat{\mu}, \tag{2}$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \left(\ln t_j^i - \hat{\mu} - \hat{\beta}_i - \hat{\tau}_j \right)^2 \tag{3}$$

Плотность вероятности логнормального распределения

Таким образом, из модели (1) и с учетом оценок (2), (3) в качестве модели времени ответа пользователя на задание можно выбрать модель логнормального распределения с плотностью вероятности:

$$f(x, \tau_j, \beta_i, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\ln x - (\hat{\mu} + \hat{\beta}_i + \hat{\tau}_j)}{\hat{\sigma}} \right]^2 \right\} \tag{4}$$

Обозначения

Матрица принадлежности

Разобъем множество заданий на M различных типов, I_m – число заданий m-го типа.

Пусть $A = \|a_i^m\|_{i=\overline{1,I}}^{m=\overline{1,M}}$, $\quad a_i^m = \begin{cases} 1, & z_i \in Z_m, \\ 0, & z_i \notin Z_m. \end{cases}$

Тестовый набор

Определим вектор $u \in \mathbb{R}^I$.

Пусть $u_i = \begin{cases} 1, & \text{если задача } i \text{ попала в тестовый набор}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$

Тестовым набором считаются k заданий, для которых $u_i = 1$.

Обозначения

Сложность заданий

Введем $w \in \mathbb{R}^I$, i-я координата – сложность i-го задания.
Пусть изначально задаётся суммарная сложность теста, обозначаемая через c, которая определяется на основе экспертной оценки.

Некоторые обозначения

Пусть в тестировании участвуют N пользователей.
Пусть T_n^i – случайное время, потребовавшееся пользователю n на решение задачи i.
И пусть $T = \| T_n^i \|_{n=\overline{1,N}}^{i=\overline{1,I}}$.

Задача квантильной оптимизации

Функция квантили

Пусть φ – общее время выполнения теста, которое неизвестно.
Тогда для того, чтобы за некоторое оптимальное время все тестируемые могли выполнить выданный вариант теста с заданной вероятностью α, рассмотрим функцию квантили: функцию квантили:

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min \left\{ \varphi : P \left\{ \max_{n=\overline{1,N}} T_n u \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\} \tag{5}$$

Задача квантильной оптимизации

Постановка задачи

Требуется составить множество индивидуальных тестовых наборов из k заданий, принадлежащих различным типам, учитывая, что $k \geq M$.
При этом, возможно отклонение от c на какое-либо малое число ε в большую, либо меньшую сторону.

Задача квантильной оптимизации

$$u_\alpha = Arg \min_{u \in \{0,1\}^l} \left(\frac{\gamma \left| c - w^T u \right|}{\varepsilon} + \frac{(1-\gamma)\Phi_\alpha(u)}{2700} \right)$$

$$\varphi_\alpha = \min_{u \in \{0,1\}^l} \left(\frac{\gamma \left| c - w^T u \right|}{\varepsilon} + \frac{(1-\gamma)\Phi_\alpha(u)}{2700} \right)$$

$$c - w^T u \le \varepsilon$$

$$w^T u - c \le \varepsilon$$

$$A^T u \ge e_M$$

$$e_l^T u = k$$

Дискретный аналог

Заменим непрерывные случайные величины T_n^i на дискретные Θ_n^i со следующими распределениями:

Θ_n^i	$\theta_n^i(1)$	$\theta_n^i(2)$	...	$\theta_n^i(L_{ni})$
p_n^i	$p_n^i(1)$	$p_n^i(2)$	...	$p_n^i(L_{ni})$

где:

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{L_{ni}-1} < t_{L_{ni}} = +\infty$ – разбиение временного интервала

$\theta_n^i(\lambda)$ – середины интервалов $[t_{\lambda-1}, t_\lambda], l = 2, ..., L_{ni} - 1$

$\theta_n^i(1)$ и $\theta_n^i(L_{ni})$ – квантили T_n^i уровней 0.01 и 0.99 соответственно

$p_n^i(\lambda) = \int_{t_{\lambda-1}}^{t_\lambda} f(t, \tau_n, \beta_i, \sigma)dt$

Функция квантили

Вместо матрицы T будем использовать мктрицу $\Theta = ||\Theta_n^i||$.
Обозначим Θ_n – n-ая строка матрицы Θ. Тогда функция квантили примет вид:

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\left\{\varphi : P\left\{\max_{n=\overline{1,N}} \Theta_n u \leq \varphi\right\} \geq \alpha\right\}$$

Сведение к детерминированной задаче

Введём следующие обозначения:

$$D = \prod_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{I} L_{ni}$$

$\theta_d, d = 1, ..., D$ – реализации случайной матрицы Θ

$$p = (p_1, ..., p_D), p_d = P(\Theta = \theta_d) = \prod_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{I} P(\Theta_n^i = (\theta_d)_n^i)$$

$$\overline{\varphi} = (\varphi, ..., \varphi)^T \in R^N$$

$\delta = (\delta_1, ..., \delta_D) \in \{0, 1\}^D$ – вектор булевых переменных, определяющий доверительное множество

Детерминированная задача

$$u^* = Arg \min_{u \in \{0,1\}^I, \delta \in \{0,1\}^D, \varphi \geq 0} \left(\frac{\gamma \left| c - w^T u \right|}{\varepsilon} + \frac{(1-\gamma)\varphi}{2700} \right)$$

$$\theta_d u - \overline{\varphi} \leq (\theta_d e_I) \delta_d$$

$$c - w^T u \leq \varepsilon$$

$$w^T u - c \leq \varepsilon$$

$$A^T u \geq e_M$$

$$e_I^T u = k$$

$$p\delta^T \leq 1 - \alpha$$

Численный эксперимент

Сформулируем задачу для одного студента на основе данных, полученных при обработке статистической информации системы дистанционного обучения МАИ CLASS.NET.

$$N = 1, D = \prod_{i=1}^{I} L_{1i}$$

$M = 3$ – число типов заданий

$I_m = 10$ – число различных заданий типа m, $m = 1, 2, ..., M$

z_i^m – i-е задание типа m, $m = 1, 2, ..., M, i = 1, 2, ..., I_m$

Сложности заданий

Сложности w_i^m заданий z_i^m приведены в таблице:

m/i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.311	3.254	3.254	3.254	4.874	5.368	7.011	7.217	8.244	9.636
2	4.132	6.902	2.121	3.436	2.456	5.359	6.902	7.283	7.815	9.399
3	2	2.418	2.666	3.653	5.242	5.547	6.453	7.194	8.795	3.657

Потребуем суммарную сложность $c = 29.46$ для теста из $k = 5$ заданий.
ε будем варьировать от 0.0004 до 0.004 с шагом 0.0001.

Параметры распределений

Время T_1^{im} на выполнение задания z_i^m имеет логнормальное распределение $LN(\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^m + \hat{\tau}_1, 0.31)$. Математические ожидания приведены в таблице:

z_i^1	$\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^1 + \hat{\tau}_1$	z_i^2	$\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^2 + \hat{\tau}_1$	z_i^3	$\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^3 + \hat{\tau}_1$
z_1^1	3.51	z_1^2	4.72	z_1^3	3.65
z_2^1	3.92	z_2^2	5.87	z_2^3	3.73
z_3^1	3.89	z_3^2	3.83	z_3^3	3.87
z_4^1	3.91	z_4^2	3.91	z_4^3	3.96
z_5^1	4.22	z_5^2	3.87	z_5^3	4.84
z_6^1	4.63	z_6^2	5.13	z_6^3	4.95
z_7^1	5.67	z_7^2	5.25	z_7^3	5.53
z_8^1	5.71	z_8^2	5.71	z_8^3	5.89
z_9^1	6.13	z_9^2	5.94	z_9^3	6.18
z_{10}^1	6.39	z_{10}^2	6.27	z_{10}^3	3.88

Результаты эксперимента

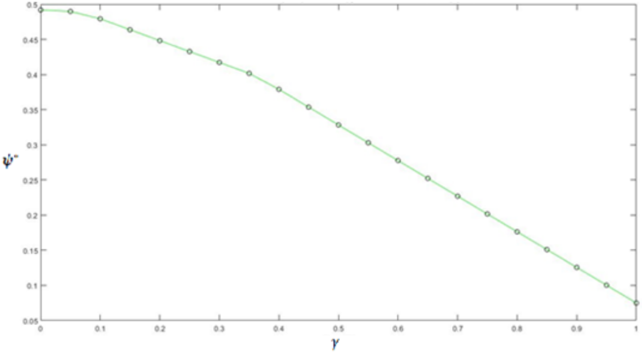
Решим задачу на уровне доверия $\alpha = 0.95$ при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0.5$.

Обозначим n_{det} – количество решений, удовлетворяющих детерминированным ограничениям, u^* – оптимальный набор заданий, а ψ^* – оптимальное время в академических часах.

ε	n_{det}	$u^*, \gamma = 0.5$	$\psi^*, \gamma = 0.5$	$u^*, \gamma = 0$	$\psi^*, \gamma = 0$
0.0007	3	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.5050	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.5815
0.0009	4	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.4574	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0.5023
0.003	21	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.3408	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	0.4710
0.004	35	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.3283	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	0.4710

Анализ зависимости

Построим график зависимости оптимального решения ψ^* от значения γ при $\varepsilon = 0.004$:



Анализ результатов

При $\gamma \geq 0.5$ оптимальный набор не изменяется с увеличением ε и является набором с наименьшим отклонением по сложности от c.

При $0 \leq \gamma < 0.5$ оптимальный набор меняется несколько раз при изменении ε.

Поэтому рассмотрим подробнее задачу при $\gamma = 0$:

ε	u^*	φ^*(сек)	φ^*(мин)	ψ^*
0.0004	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	1570.0833	26.1681	0.5815
0.0008	$z_5^1, z_8^2, z_7^3, z_8^3, z_{10}^3$	1377.6667	22.9611	0.5102
0.001	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	1356.2	22.6033	0.5023
0.002	$z_6^1, z_7^1, z_4^2, z_7^3, z_8^3$	1328.025	22.1337	0.4919
0.003	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	1271.775	21.1963	0.4710

Время выполнения алгоритма

Зависимость затраченного времени выполнения алгоритма t от значений ε:

ε	t(сек)
0.0004	4.189767
0.0005	4.648206
0.0006	4.521878
0.0007	4.178228
0.0008	5.498839
0.0009	7.365371
0.001	8.716812
0.002	23.158336
0.003	34.178394
0.004	39.744152

Заключение

Была исследована мат. модель времени ответа пользователя и решена задача формирования ограниченных по времени тестов с заданной суммарной сложностью задания как одноэтапная задача квантильной оптимизации.

За основу была взята модель ван дер Линдена ответа пользователя. Непрерывные С.В. были дискретизированы, и затем полученная задача свелась к задаче мат. программирования большой размерности.

Было получено 35 наборов тестовых заданий для $\varepsilon = 0.004$. Результаты численного эксперимента подтверждают адекватность предложенной модели. В итоге был разработан гибкий и удобный инструмент, который позволит формировать наборы тестовых заданий с учётом целей тестирования.

Список литературы

- А. В. Наумов, Г. А. Мхитарян, Е. Е. Черыгова "Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения"
- А. В. Наумов "Методы и алгоритмы решения задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием"

Спасибо за внимание!