

# Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения

Е.В.Королев    Г.А.Туманов

Московский авиационный институт (НИУ)

15 ноября 2021 г.

# План презентации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

1 Введение

2 Постановка задачи

3 Численный эксперимент

4 Заключение

# Ссылка на работу

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Ссылка на GitHub-репозиторий с презентацией и программой: перейти

# Введение

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## LMS

С переходом на дистанционное образование активно развиваются системы управления обучением (LMS)

## Способ повышения качества дистанционного образования

Применение анализа данных в LMS может повысить качество дистанционного образования

## За счет чего повышактся качество?

Сложность заданий оценивается экспертами, либо программно. Происходит адаптация контента под оцениваемый уровень знаний пользователя

# Логнормальная модель Ван дер Линдена

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Пусть  $Z = (z_1, \dots, z_I)$  – вектор заданий

Ван дер Линден предположил, что логарифм времени  $T_j^i$  (время ответа  $j$ -го пользователя на  $i$ -ю задачу) состоит из 3-х компонент:

- $\mu$  – общая составляющая для всех пользователей и задач;
- $\beta_i$  – индивидуальная сложность  $i$ -й задачи;
- $\tau_j$  – особенности  $j$ -го пользователя, решающего задание.

Модель имеет вид:

$$\ln T_j^i = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  – независимые СВ

# Оценки параметров модели

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Из ММП можно получить оценки модели:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \ln t_j^i, \quad \hat{\beta}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \ln t_j^i - \hat{\mu}, \quad \hat{\tau}_j = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \ln t_j^i - \hat{\mu}, \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left( \ln t_j^i - \hat{\mu} - \hat{\beta}_i - \hat{\tau}_j \right)^2 \quad (3)$$

# Плотность вероятности логнормального распределения

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Таким образом, из модели (1) и с учетом оценок (2), (3) в качестве модели времени ответа пользователя на задание можно выбрать модель логнормального распределения с плотностью вероятности:

$$f(x, \tau_j, \beta_i, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln x - (\hat{\mu} + \hat{\beta}_i + \hat{\tau}_j)}{\hat{\sigma}} \right]^2 \right\} \quad (4)$$

# Обозначения

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Матрица принадлежности

Разобъем множество заданий на  $M$  различных типов,  $I_m$  – число заданий  $m$ -го типа.

$$\text{Пусть } A = \|a_i^m\|_{i=1, I}^{m=\overline{1, M}}, \quad a_i^m = \begin{cases} 1, & z_i \in Z_m, \\ 0, & z_i \notin Z_m. \end{cases}$$

## Тестовый набор

Определим вектор  $u \in \mathbb{R}^I$ .

$$\text{Пусть } u_i = \begin{cases} 1, & \text{если задача } i \text{ попала в тестовый набор,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тестовым набором считаются  $k$  заданий, для которых  $u_i = 1$ .



# Обозначения

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Сложность заданий

Введем  $w \in \mathbb{R}^I$ ,  $i$ -я координата – сложность  $i$ -го задания.

Пусть изначально задаётся суммарная сложность теста, обозначаемая через  $s$ , которая определяется на основе экспертной оценки.

## Некоторые обозначения

Пусть в тестировании участвуют  $N$  пользователей.

Пусть  $T_n^i$  – случайное время, потребовавшееся пользователю  $n$  на решение задачи  $i$ .

И пусть  $T = \left\| T_n^i \right\|_{n=1, N}^{i=1, I}$ .

# Задача квантильной оптимизации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Функция квантили

Пусть  $\varphi$  – общее время выполнения теста, которое неизвестно.

Тогда для того, чтобы за некоторое оптимальное время все тестируемые могли выполнить выданный вариант теста с заданной вероятностью  $\alpha$ , рассмотрим функцию квантили: функцию квантили:

$$\Phi_{\alpha}(u) \triangleq \min \left\{ \varphi : P \left\{ \max_{n=1, N} T_n u \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\} \quad (5)$$

# Задача квантильной оптимизации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Постановка задачи

Требуется составить множество индивидуальных тестовых наборов из  $k$  заданий, принадлежащих различным типам, учитывая, что  $k \geq M$ .

При этом, возможно отклонение от  $s$  на какое-либо малое число  $\varepsilon$  в большую, либо меньшую сторону.

# Задача квантильной оптимизации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

$$u_\alpha = \operatorname{Arg} \min_{u \in \{0,1\}^I} \left( \frac{\gamma |c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1 - \gamma) \Phi_\alpha(u)}{2700} \right)$$

$$\varphi_\alpha = \min_{u \in \{0,1\}^I} \left( \frac{\gamma |c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1 - \gamma) \Phi_\alpha(u)}{2700} \right)$$

$$|c - w^T u| \leq \varepsilon$$

$$A^T u \geq e_M$$

$$e_I^T u = k$$

# Дискретный аналог

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Заменяем непрерывные случайные величины  $T_n^i$  на дискретные  $\Theta_n^i$  со следующими распределениями:

$\Theta_n^i$	$\theta_n^i(1)$	$\theta_n^i(2)$	...	$\theta_n^i(L_{ni})$
$p_n^i$	$p_n^i(1)$	$p_n^i(2)$	...	$p_n^i(L_{ni})$

где:

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{L_{ni}-1} < t_{L_{ni}} = +\infty$  – разбиение временного интервала

$\theta_n^i(\lambda)$  – середины интервалов  $[t_{\lambda-1}, t_\lambda]$ ,  $\lambda = 2, \dots, L_{ni} - 1$

$\theta_n^i(1)$  и  $\theta_n^i(L_{ni})$  – квантили  $T_n^i$  уровней 0.01 и 0.99 соответственно

$$p_n^i(\lambda) = \int_{t_{\lambda-1}}^{t_\lambda} f(t, \tau_n, \beta_i, \sigma) dt$$

# Функция квантили

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Вместо матрицы  $T$  будем использовать матрицу  $\Theta = \|\Theta_n^i\|$ .

Обозначим  $\Theta_n$  –  $n$ -ая строка матрицы  $\Theta$ . Тогда функция квантили примет вид:

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min \left\{ \varphi : P \left\{ \max_{n=1, N} \Theta_n u \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\}$$

# Сведение к детерминированной задаче

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Введём следующие обозначения:

$$D = \prod_{n=1}^N \prod_{i=1}^I L_{ni}$$

$\theta_d, d = 1, \dots, D$  – реализации случайной матрицы  $\Theta$

$$p = (p_1, \dots, p_D), p_d = P(\Theta = \theta_d) = \prod_{n=1}^N \prod_{i=1}^I P(\Theta_n^i = (\theta_d)_n^i)$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi, \dots, \varphi)^T \in R^N$$

$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_D) \in \{0, 1\}^D$  – вектор булевых переменных, определяющий доверительное множество

# Детерминированная задача

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

$$u^* = \underset{u \in \{0,1\}^I, \delta \in \{0,1\}^D, \varphi \geq 0}{\operatorname{Arg\,min}} \left( \frac{\gamma |c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1 - \gamma)\varphi}{2700} \right)$$

$$\theta_d u - \bar{\varphi} \leq (\theta_d e_I) \delta_d$$

$$|c - w^T u| \leq \varepsilon$$

$$A^T u \geq e_M$$

$$e_I^T u = k$$

$$p\delta^T \leq 1 - \alpha$$



# Численный эксперимент

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Сформулируем задачу для одного студента на основе данных, полученных при обработке статистической информации системы дистанционного обучения MAI CLASS.NET.

$$N = 1, D = \prod_{i=1}^I L_{1i}$$

$M = 3$  – число типов заданий

$l_m = 10$  – число различных заданий типа  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$

$z_i^m$  –  $i$ -е задание типа  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots, M, i = 1, 2, \dots, l_m$

# Сложности заданий

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Закключение

Сложности  $w_i^m$  заданий  $z_i^m$  приведены в таблице:

$m/i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.311	3.254	3.254	3.254	4.874	5.368	7.011	7.217	8.244	9.636
2	4.132	6.902	2.121	3.436	2.456	5.359	6.902	7.283	7.815	9.399
3	2	2.418	2.666	3.653	5.242	5.547	6.453	7.194	8.795	3.657

Потребуем суммарную сложность  $c = 29.46$  для теста из  $k = 5$  заданий.  
 $\varepsilon$  будем варьировать от 0.0004 до 0.004 с шагом 0.0001.

# Параметры распределений

Время  $T_1^{im}$  на выполнение задания  $z_i^m$  имеет логнормальное распределение  $LN(\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^m + \hat{\tau}_1, 0.31)$ . Математические ожидания приведены в таблице:

$z_i^1$	$\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^1 + \hat{\tau}_1$	$z_i^2$	$\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^2 + \hat{\tau}_1$	$z_i^3$	$\hat{\mu} + \hat{\beta}_i^3 + \hat{\tau}_1$
$z_1^1$	3.51	$z_1^2$	4.72	$z_1^3$	3.65
$z_2^1$	3.92	$z_2^2$	5.87	$z_2^3$	3.73
$z_3^1$	3.89	$z_3^2$	3.83	$z_3^3$	3.87
$z_4^1$	3.91	$z_4^2$	3.91	$z_4^3$	3.96
$z_5^1$	4.22	$z_5^2$	3.87	$z_5^3$	4.84
$z_6^1$	4.63	$z_6^2$	5.13	$z_6^3$	4.95
$z_7^1$	5.67	$z_7^2$	5.25	$z_7^3$	5.53
$z_8^1$	5.71	$z_8^2$	5.71	$z_8^3$	5.89
$z_9^1$	6.13	$z_9^2$	5.94	$z_9^3$	6.18
$z_{10}^1$	6.39	$z_{10}^2$	6.27	$z_{10}^3$	3.88

# Результаты эксперимента

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Решим задачу на уровне доверия  $\alpha = 0.95$  при  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 0.5$ .

Обозначим  $n_{det}$  – количество решений, удовлетворяющих детерминированным ограничениям,  $u^*$  – оптимальный набор заданий, а  $\psi^*$  – оптимальное решение.

$\varepsilon$	$n_{det}$	$u^*, \gamma = 0.5$	$\psi^*, \gamma = 0.5$	$u^*, \gamma = 0$	$\psi^*, \gamma = 0$
0.0007	3	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.5050	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.5815
0.0009	4	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.4574	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	0.5023
0.003	21	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.3408	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	0.4710
0.004	35	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.3283	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	0.4710

# Анализ зависимости

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

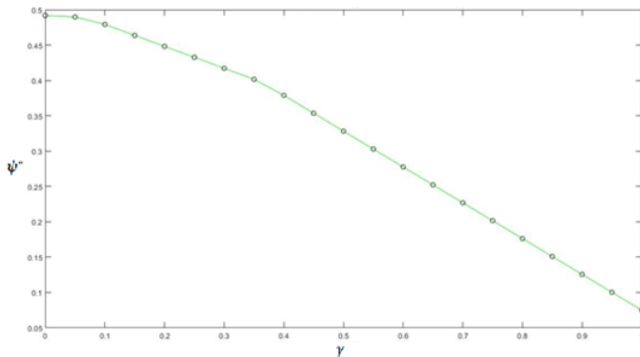
Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Построим график зависимости оптимального решения  $\psi^*$  от значения  $\gamma$  при  $\varepsilon = 0.004$ :



# Анализ результатов

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

При  $\gamma \geq 0.5$  оптимальный набор не изменяется с увеличением  $\varepsilon$  и является набором с наименьшим отклонением по сложности от  $c$ .

При  $0 \leq \gamma < 0.5$  оптимальный набор меняется несколько раз при изменении  $\varepsilon$ .

Поэтому рассмотрим подробнее задачу при  $\gamma = 0$ :

$\varepsilon$	$u^*$	$\varphi^*(\text{сек})$	$\varphi^*(\text{мин})$	$\psi^*$
0.0004	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	1570.0833	26.1681	0.5815
0.0008	$z_5^1, z_8^2, z_7^3, z_8^3, z_{10}^3$	1377.6667	22.9611	0.5102
0.001	$z_6^1, z_1^2, z_7^2, z_9^2, z_5^3$	1356.2	22.6033	0.5023
0.002	$z_6^1, z_7^1, z_4^2, z_7^3, z_8^3$	1328.025	22.1337	0.4919
0.003	$z_6^1, z_8^1, z_1^2, z_6^3, z_8^3$	1271.775	21.1963	0.4710

# Время выполнения алгоритма

Зависимость затраченного времени выполнения алгоритма  $t$  от значений  $\varepsilon$ :

$\varepsilon$	$t(\text{сек})$
0.0004	4.189767
0.0005	4.648206
0.0006	4.521878
0.0007	4.178228
0.0008	5.498839
0.0009	7.365371
0.001	8.716812
0.002	23.158336
0.003	34.178394
0.004	39.744152

# Заключение

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Была исследована мат. модель времени ответа пользователя и решена задача формирования ограниченных по времени тестов с заданной суммарной сложностью задания как одноэтапная задача квантильной оптимизации.

За основу была взята модель ван дер Линдена ответа пользователя. Непрерывные С.В. были дискретизированы, и затем полученная задача свелась к задаче мат. программирования большой размерности.

Было получено 35 наборов тестовых заданий для  $\varepsilon=0.004$ . Результаты численного эксперимента подтверждают адекватность предложенной модели. В итоге был разработан гибкий и удобный инструмент, который позволит формировать наборы тестовых заданий с учётом целей тестирования.



# Список литературы

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

- А. В. Наумов, Г. А. Мхитарян, Е. Е. Черыгова "Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения";
- А. В. Наумов "Методы и алгоритмы решения задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием".

Спасибо за внимание!