

# Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения

Королев Е.В. Туманов Г.А.

Московский авиационный институт (НИУ)

5 ноября 2021 г.

# План презентации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

1 Введение

2 Постановка задачи

3 Численный эксперимент

4 Заключение

# Введение

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## LMS

С переходом на дистанционное образование активно развиваются системы управления обучением (LMS)

## Способ повышения качества дистанционного образования

Применение анализа данных в LMS может повысить качество дистанционного образования

## За счет чего повышактся качество?

Сложность заданий оценивается экспертами, либо программно. Происходит адаптация контента под оцениваемый уровень знаний пользователя

# Логнормальная модель Ван дер Линдена

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Пусть  $Z = (z_1, \dots, z_I)$  – вектор заданий

Ван дер Линден предположил, что логарифм времени  $T_j^i$  (время ответа  $j$ -го пользователя на  $i$ -ю задачу) состоит из 3-х компонент:

- $\mu$  – общая составляющая для всех пользователей и задач;
- $\beta_i$  – индивидуальная сложность  $i$ -й задачи;
- $\tau_j$  – особенности  $j$ -го пользователя, решающего задание.

Модель имеет вид:

$$\ln T_j^i = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  – независимые СВ

# Оценки параметров модели

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Из ММП можно получить оценки модели:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \ln t_j^i, \quad \hat{\beta}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \ln t_j^i - \hat{\mu}, \quad \hat{\tau}_j = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{i=1}^I \ln t_j^i - \hat{\mu}, \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{I \cdot J} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \left( \ln t_j^i - \hat{\mu} - \hat{\beta}_i - \hat{\tau}_j \right)^2 \quad (3)$$

# Плотность вероятности логнормального распределения

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Таким образом, из модели (1) и с учетом оценок (2), (3) в качестве модели времени ответа пользователя на задание можно выбрать модель логнормального распределения с плотностью вероятности:

$$f(x, \tau_j, \beta_i, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln x - (\hat{\mu} + \hat{\beta}_i + \hat{\tau}_j)}{\hat{\sigma}} \right]^2 \right\} \quad (4)$$

# Обозначения

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Матрица принадлежности

Разобъем множество заданий на  $M$  различных типов,  $I_m$  – число заданий  $m$ -го типа.

$$\text{Пусть } A = \|a_i^m\|_{i=1, I}^{m=\overline{1, M}}, \quad a_i^m = \begin{cases} 1, & z_i \in Z_m, \\ 0, & z_i \notin Z_m. \end{cases}$$

## Тестовый набор

Определим вектор  $u \in \mathbb{R}^I$ .

$$\text{Пусть } u_i = \begin{cases} 1, & \text{если задача } i \text{ попала в тестовый набор,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тестовым набором считаются  $k$  заданий, для которых  $u_i = 1$ .

# Обозначения

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Сложность заданий

Введем  $w \in \mathbb{R}^I$ ,  $i$ -я координата – сложность  $i$ -го задания.

Пусть изначально задаётся суммарная сложность теста, обозначаемая через  $s$ , которая определяется на основе экспертной оценки.

## Некоторые обозначения

Пусть в тестировании участвуют  $N$  пользователей.

Пусть  $T_n^i$  – случайное время, потребовавшееся пользователю  $n$  на решение задачи  $i$ .

И пусть  $T = \left\| T_n^i \right\|_{n=1, N}^{i=1, I}$ .



# Задача квантильной оптимизации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Функция квантили

Пусть  $\varphi$  – общее время выполнения теста, которое неизвестно.

Тогда для того, чтобы за некоторое оптимальное время все тестируемые могли выполнить выданный вариант теста с заданной вероятностью  $\alpha$ , рассмотрим функцию квантили: функцию квантили:

$$\Phi_{\alpha}(u) \triangleq \min \left\{ \varphi : P \left\{ \max_{n=1, N} T_n u \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\} \quad (5)$$

# Задача квантильной оптимизации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

## Постановка задачи

Требуется составить множество индивидуальных тестовых наборов из  $k$  заданий, принадлежащих различным типам, учитывая, что  $k \geq M$ .

При этом, возможно отклонение от  $s$  на какое-либо малое число  $\varepsilon$  в большую, либо меньшую сторону.

# Задача квантильной оптимизации

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \mathit{Arg} \min_{u \in \{0,1\}^I} \left( \frac{\gamma |c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1 - \gamma) \Phi_\alpha(u)}{2700} \right) \\ \varphi_\alpha &= \min_{u \in \{0,1\}^I} \left( \frac{\gamma |c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1 - \gamma) \Phi_\alpha(u)}{2700} \right) \end{aligned} \quad (6)$$
$$\begin{aligned} |c - w^T u| &\leq \varepsilon \\ A^T u &\geq e_M \\ e_I^T u &= k \end{aligned}$$

# Дискретный аналог

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Заменяем непрерывные случайные величины  $T_n^i$  на дискретные  $\Theta_n^i$  со следующими распределениями:

$\Theta_n^i(\lambda)$	$\theta_n^i(1)$	$\theta_n^i(2)$	...	$\theta_n^i(L_{ni})$
$p_n^i(\lambda)$	$p_n^i(1)$	$p_n^i(2)$	...	$p_n^i(L_{ni})$

где:

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{L_{ni}-1} < +\infty$  – разбиение временного интервала

$\theta_n^i(\lambda)$  – середины интервалов  $[t_{\lambda-1}, t_\lambda], l = 2, \dots, L_{ni} - 1$

$\theta_n^i(1)$  и  $\theta_n^i(L_{ni})$  – квантили  $T_n^i$  уровней 0.01 и 0.99 соответственно

$$p_n^i(\lambda) = \int_{t_{\lambda-1}}^{t_\lambda} f(t, \tau_n, \beta_i, \sigma) dt$$

# Функция квантили

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Вместо матрицы  $T$  будем использовать матрицу  $\Theta = \|\Theta_n^i\|$ .

Обозначим  $\Theta_n$  –  $n$ -ая строка матрицы  $\Theta$ . Тогда функция квантили примет вид:

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min \left\{ \varphi : P \left\{ \max_{n=1, N} \Theta_n u \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\}$$

# Сведение к детерминированной задаче

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

Введём следующие обозначения:

$$D = \prod_{n=1}^N \prod_{i=1}^I L_{ni}$$

$\theta_d, d = 1, \dots, D$  – реализации случайной матрицы  $\Theta$

$$p = (p_1, \dots, p_D), p_d = P(\Theta = \theta_d) = \prod_{n=1}^N \prod_{i=1}^I P(\Theta_n^i = (\theta_d)_n^i)$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi, \dots, \varphi)^T \in R^N$$

$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_D) \in \{0, 1\}^D$  – вектор булевых переменных, определяющий доверительное множество

# Детерминированная задача

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

$$u^* = \underset{u \in \{0,1\}^I, \delta \in \{0,1\}^D, \varphi \geq 0}{\operatorname{Arg\,min}} \left( \frac{\gamma |c - w^T u|}{\varepsilon} + \frac{(1 - \gamma)\varphi}{2700} \right)$$

$$\theta_d u - \bar{\varphi} \leq (\theta_d e_I) \delta_d$$

$$c - w^T u \leq \varepsilon$$

$$w^T u - c \leq \varepsilon$$

$$A^T u \geq e_M$$

$$e_I^T u = k$$

$$p \delta^T \leq 1 - \alpha$$

# Численный эксперимент

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

текст



# Заключение

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

текст

# Список литературы

Стохастическая  
задача формирования  
теста

Королев  
Егор,  
Туманов  
Георгий

Введение

Постановка  
задачи

Численный  
эксперимент

Заключение

текст

Спасибо за внимание!