NOTE DI ANALISI 2

Manuel Deodato

Indice

1 Calcolo differenziale in più variabili

1.1 Derivate parziali

Una funzione di più variabili $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ può essere derivata mantenendo fissa una variabile e derivando rispetto all'altra. Questo corrisponde al valutare la variazione di f lungo un asse specifico.

Definizione 1.1 (Derivata parziale)

Sia $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; la sua derivata parziale rispetto a x_k è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h} \tag{1.1.1}$$

Il vettore che ha per componenti le derivate di f rispetto a ciascuna delle sue variabili si chiama **gradiente** e si indica con ∇f.

1.2 Derivate direzionali

È possibile studiare la variazione di f lungo una particolare direzione individuata dal versore $\hat{n}$. Una retta parallela a $\hat{n}$ e passante per un punto x si individua con $x + t\hat{n}$; fissando i punti x e $\hat{n}$, $g(t) := f(x + t\hat{n})$ è una funzione di una variabile e $g'(0)$ è la derivata direzionale di f lungo $\hat{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x) = g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\hat{n}) - f(x)}{h} \tag{1.2.1}$$

Più in generale:

$$g'(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_t + h\hat{n}) - f(x_t)}{h} \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_t) \tag{1.2.2}$$

con $x_t = x + t\hat{n}$.

Osservazione 1.1. Conoscendo ∇f, si può calcolare la derivata direzionale di f come $\nabla f \cdot \hat{n}$.

Esempio 1.1. Si calcola la derivata direzionale di $f(x,y) = x^2 y - e^{x+y}$ lungo la direzione $\hat{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Svolgimento. Si ha

$$g(t) = f\left(x + \frac{t}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \exp\left[x + y + t\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x,y) = g'(0) = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y}$$

Alternativamente $\nabla f = \left(2xy - e^{x+y}, x^2 - e^{x+y}\right)$, quindi $\partial_{\hat{n}} f = \nabla f \cdot \hat{n} = xy - \frac{1}{2}e^{x+y} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{x+y} = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y}$. ■

Teorema 1.1

Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha un massimo o minimo relativo in x_0 interno ad A e se ammette derivata lungo $\hat{n}$ in x_0, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0) = 0 \tag{1.2.3}$$

Dimostrazione. Si prende $g(t) = f(x_0 + t\hat{n})$ che, per costruzione, ha un minimo in $t = 0$, quindi $g'(0) = 0$, da cui segue la tesi. □

In particolare, se f è derivabile in x_0, tutte le derivate parziali si annullano in quel punto; in questo caso, x_0 è detto **punto stazionario**.

Osservazione 1.2. Nel caso a una variabile, i punti di massimo/minimo che cadevano sulla frontiera di un insieme erano, solitamente, un numero finito; qua chiaramente non è più così.

Esempio 1.2. Calcolare massimi e minimi di $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y}$ nel cerchio chiuso centrato nell'origine e di raggio 1.

Svolgimento. Sul bordo del cerchio $x^2 + y^2 = 1$, quindi $f \equiv 0$. All'interno:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xe^{x+y} + (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} \\ f_y &= 2ye^{x+y} + (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} \end{aligned}$$

che si annullano quando

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

Sostituendo $x = y$ nella prima equazione, ad esempio, si ottengono due soluzioni, una sola delle quali appartiene al cerchio; questo corrisponderà al punto di minimo della funzione:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = (1 - \sqrt{3})e^{\sqrt{3}-1} < 0$$

■

In più dimensioni vale un analogo del teorema di Lagrange:

Teorema 1.2

Sia $f(x) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, con $I(x_0, r) \subset A$. Considerando una direzione $\hat{n}$, si definisce $g(s) = f(x_0 + s\hat{n})$ per $|s| < r$. Vale l'analogo del teorema di Lagrange:

$$f(x_0 + s\hat{n}) - f(x_0) = g(s) - g(0) = sg'(\tau) = s\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0 + \tau\hat{n}) \tag{1.2.4}$$

1.3 Derivate successive

Sia f una funzione per cui esistono le derivate prime e sono anch'esse derivabili; le derivate seconde potranno essere derivate prima rispetto a x_i e poi rispetto a x_j o viceversa. In generale se f è una funzione di m, si hanno m^n derivate di ordine n. Per le derivate seconde miste[1] vale il seguente.

[1] Chiaramente il risultato vale in generale, ma si affronta per funzione di due variabili nel caso delle derivate seconde miste per semplicità.

Teorema 1.3 (Teorema di Schwarz)

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I del punto (x, y) e siano queste continue nello stesso intervallo; allora $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Dimostrazione. Siano $h, k \in \mathbb{R} : (x + h, y + k) \in I$ e sia

$$A(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$

Prendendo $p(t) = f(t, y + k) - f(t, y)$, si ha $A(h, k) = p(x + h) - p(x)$; per Lagrange:

$$A(h, k) = p'(\xi)h = \left[f_x(\xi, y + k) - f_x(\xi, y)\right]h, \;\; x < \xi < x + h$$

Applicando nuovamente Lagrange, si ha $A(h, k) = f_{yx}(\xi, \eta)hk, \;\; y < \eta < y + k$. Ripetendo il discorso con $q(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$, si trova $A(h, k) = f_{xy}(\sigma, \tau)hk$, quindi $f_{yx}(\xi, \eta) = f_{xy}(\sigma, \tau)$, dove $x < \sigma < x + h$ e $y < \tau < y + k$. Prendendo il limite per $h, k \to 0$, risulta $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ per continuità delle derivate seconde.

□

Come per funzioni di una variabile, vale la formula di Taylor.

Teorema 1.4 (Formula di Taylor)

Sia $f(x)$ di classe C^2 in $A \subset \mathbb{R}^n$ e x_0 punto interno ad A; in un intorno di x_0, allora, si ha:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + R_2(x; x_0) \tag{1.3.1}$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x; x_0)}{\left\| x - x_0 \right\|^2} = 0$$

1.4 Funzioni differenziabili

Una funzione derivabile, anche in ogni direzione, non è necessariamente continua in più variabili.

Esempio 1.3. La funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases}$ ha derivate in ogni direzione nel punto $(0, 0)$, ma non è continua; prendendo $x_k = (1/k, 1/k^2)$ per $k \to \infty$, si ha $x_k \to (0, 0)$, ma $f(x_k) = \frac{1/k^4}{2/k^4} \to \frac{1}{2}$.

Definizione 1.2 (Differenziabilità)

Una funzione $f(x)$ si dice differenziabile in x_0 se è derivabile in x_0 e se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\left\| x - x_0 \right\|} = 0 \tag{1.4.1}$$

Questa definizione impone che una funzione sia differenziabile in punto se esiste un piano tangente che la approssima precisamente nel punto stesso.

Teorema 1.5

Una funzione $f(x)$ differenziabile in x_0 è continua in x_0 ed è derivabile in ogni direzione.

Dimostrazione. Si mostra che è continua:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\left\| x - x_0 \right\|} \left\| x - x_0 \right\| + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Per $x \to x_0$ il primo termine di destra va a 0 per assunzione di differenziabilità e l'altro anche perché diventa un prodotto scalare per 0, quindi si verifica $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Data generica direzione $\hat{v}$ con $x = x_0 + t\hat{v}$, usando ancora definizione di differenziabilità:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\hat{v}) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), t\hat{v} \rangle}{t} = 0$$

Visto che $\langle \nabla f(x_0), t\hat{v} \rangle = t\langle \nabla f(x_0), \hat{v} \rangle$, si ottiene la tesi. □

La direzione di massimo incremento di una funzione è quella del gradiente. Per mostrarlo, si parte da x_0, assumendo che non sia un punto stazionario; si definisce, allora, $\hat{n} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$, da cui:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \hat{n} \rangle = \|\nabla f(x_0)\|$$

Prendendo altra direzione generica $\hat{v}$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \hat{v} \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \, \|\hat{v}\| = \|\nabla f(x_0)\| \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0)$$

Dalla definizione di funzione differenziabile il piano $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ è quello che meglio approssima la funzione in (x_0, y_0).

Si è concluso che una funzione differenziabile è derivabile in ogni direzione, ma una funzione derivabile non è differenziabile in generale. Vale, però, il seguente.

Teorema 1.6 (Teorema del differenziale totale)

Sia $f(x)$ derivabile in x_0 e siano le sue derivate continue nello stesso punto; allora f è differenziabile in x_0.

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Si usa il teorema di Lagrange per riscrivere $f(x, y) - f(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned} & f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x - x_0), \;\; x_0 < \xi < x \\ & f(x, y) - f(x, y_0) = f_y(x, \eta)(y - y_0), \;\; y_0 < \eta < y \\ & \Rightarrow f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

Il limite scritto sopra si riscrive come:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} & \left[f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right] \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \\ & + \left[f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \right] \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \end{aligned}$$

Essendo le frazioni ≤ 1 e visto che le quantità fra parentesi quadre, questo limite si maggiora con la somma delle parentesi quadre, che tende a 0 per $(x, y) \to (x_0, y_0)$. □

1.5 Funzioni composte

Data una funzione $x(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, si definisce, per una generica direzione v:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t} \right)^\top \tag{1.5.1}$$

Vale il seguente per la derivata della funzione composta.

Teorema 1.7

Siano $E \subset \mathbb{R}^k$, $F \subset \mathbb{R}^n$ e $x(t) : E \to F$, $f(x) : F \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1. Allora la funzione composta $g(t) = f(x(t)) : E \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e per ogni direzione v:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(t) = \left\langle \nabla f\big(x(t)\big), \frac{\partial x}{\partial v}(t) \right\rangle \tag{1.5.2}$$

Dimostrazione. Si ha $g(t+hv) - g(t) = f\big(x(t+hv)\big) - f\big(x(t)\big) = f\big(x(t) + [x(t+hv) - x(t)]\big) - f\big(x(t)\big)$. Si prende $s = \|x(t+hv) - x(t)\|$ e la direzione$w = \frac{x(t+hv)-x(t)}{s}$ e si usa il teorema di Lagrange:

$$g(t+hv) - g(t) = f\big(x(t) + sw\big) - f\big(x(t)\big) = s\frac{\partial f}{\partial w}\big(x(t) + \tau w\big) = s\left\langle \nabla f\big(x(t) + \tau w\big), w \right\rangle$$

con $0 < \tau < s$. Dividendo per h e prendendo il limite $h \to 0$, per definizione $s \to 0$ e, quindi, $\tau \to 0$, mentre $\frac{x(t+hv)-x(t)}{h} \to \frac{\partial x}{\partial v}(t)$ quindi:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t+hv) - g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\langle \nabla f\big(x(t) + \tau w\big), \frac{x(t+hv) - x(t)}{h} \right\rangle = \left\langle \nabla f\big(x(t)\big), \frac{\partial x}{\partial v}(t) \right\rangle$$

□

Nel caso particolare $k = 1$, $x(t)$ è una curva e $g(t)$ è funzione di una sola variabile con

$$g'(t) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_h}\big(x(t)\big)x'_h(t) \equiv \left\langle \nabla f\big(x(t)\big), x'(t) \right\rangle$$

Spesso si prende $x(t) = x + tv$, cioè retta passante per x lungo direzione v; in questo caso $g'(t) = \nabla f(x+tv) \cdot v$. Se le derivate seconde sono continue, le derivate prime sono differenziabili e si può scrivere:

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{d}{dt} D_i f(x+tv) = \sum_{i=1}^{n} v_i \sum_{j=1}^{n} v_j D_{ij} f(x+tv) \tag{1.5.3}$$

Indicando con $Hf = \nabla f \nabla^\top$ la matrice Hessiana di f, allora $\sum_j v_j D_{ij} f(x+tv) \equiv [Hf(x+tv)v]_i$, cioè è la componente i-esima del vettore tra parentesi quadre, essendo Hf una matrice. Allora:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \nabla f(x) \cdot v \\ g''(0) &= \langle Hf(x)v, v \rangle \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

1.6 Massimi e minimi relativi

Perché una funzione f di più variabili abbia un punto di massimo o di minimo in x_0, è condizione necessaria che per ogni direzione v, valga $g'(0) = 0$ e $g''(0) \le 0$ o $g''(0) \ge 0$, cioè:

$$\begin{aligned} &\langle Hf(x_0)v, v \rangle \le 0 \text{ punto di massimo} \\ &\langle Hf(x_0)v, v \rangle \ge 0 \text{ punto di minimo} \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Allora vale il seguente.

Teorema 1.8

Sia $f(x)$ una funzione con derivate seconde continue; se in x_0, $\nabla f(x_0) = 0$ e la matrice Hessiana è tale che $Hf(x_0) > 0$ (definita positiva), allora x_0 è di minimo relativo per f. Se fosse $Hf(x_0) < 0$, x_0 sarebbe di massimo relativo.

Possono verificarsi altri due casi:

- se $\langle Hf(x_0)v, v\rangle$ assume sia valori positivi che negativi al variare di v, si ha un **punto di sella**;
- se la matrice Hessiana è semidefinita, ma non definita, non si può concludere niente e bisogna esaminare cosa accade attorno a x_0.

2 Calcolo integrale in più variabili

2.1 Integrazione in dimensioni superiori

Per le definizioni di base, si deve definire cos'è un rettangolo.

Definizione 2.1

Dati due intervalli $[a.b)$ e $[c,d)$, il rettangolo che identificano è definito come $R = [a,b) \times [c,d)$, con $a \leq x < b$ e $c \leq y < d$.

Si suddividono due intervalli in intervalli più piccoli, cioè $[a,b)$ si suddivide in n sotto-intervalli $I_h = [x_{h-1}, x_h)$, con $x_0 = a, \dots x_n = b$ e $[c,d)$ in m sotto-intervalli $J_k = [y_{k-1}, y_k)$. Allora il rettangolo sarà suddiviso in $n \times m$ sotto-rettangoli $R_{hk} = I_h \times J_k$.

Una funzione semplice $\varphi(x)$ è una funzione che assume un valore costante su ogni sotto-rettangolo e che vale 0 fuori da R. Indicando con λ_{hk} il valore costante che assume in R_{hk}:

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk} \chi_{R_{hk}}(x) \tag{2.1.1}$$

con χ_D funzione caratteristica del dominio D. L'integrale di funzioni simili è dato da:

$$\int \varphi(x)\, dxdy = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk} m(R_{hk}) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk} m(I_h) m(J_k) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{hk} (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1}) \tag{2.1.2}$$

È necessario dare anche la definizione di supporto di una funzione:

Definizione 2.2

Il supporto di una funzione f è la chiusura dell'insieme in cui $f \neq 0$, cioè:

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \,:\, f(x) \neq 0\}} \tag{2.1.3}$$

Infine, si indica con $\mathscr{S}^+(D)$ la classe delle funzioni semplici φ che maggiorano f in D e $\mathscr{S}^-(D)$ la classe delle funzioni semplici ψ che minorano f in D; da questo, si ha la seguente definizione di integrale di Riemann.

Definizione 2.3 (Integrazione di funzioni a supporto compatto)

Sia f una funzione a supporto compatto, con $\operatorname{supp}(f) \subset K$; f è integrabile secondo Riemann se:

$$\sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(K)} \int \psi\, dxdy = \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(K)} \int \varphi\, dxdy \tag{2.1.4}$$

dove

$$\begin{aligned} \int_* f(x)\, dx &= \inf_{\varphi \in \mathscr{S}^+(K)} \int \varphi\, dxdy \ \text{ integrale inferiore} \\ \int^* f(x)\, dx &= \sup_{\psi \in \mathscr{S}^-(K)} \int \psi\, dxdy \ \text{ integrale superiore} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

La condizione di integrabilità si può esprimere come:

$$\int_* f(x)\, dx = \int^* f(x)\, dx \tag{2.1.6}$$

Osservazione 2.1. Anche per più variabili, è condizione sufficiente e necessaria perché f a supporto compatto sia integrabile che $\forall\varepsilon > 0$, esistono funzioni semplici φ, ψ tali che:

$$\int \varphi \, dxdy - \int \psi \, dxdy < \varepsilon \tag{2.1.7}$$