

# RIASSUNTI DI ALGEBRA

MANUEL DEODATO

## INDICE

<b>1 Teoria dei gruppi</b>	<b>3</b>
1.1 Automorfismi e azioni	3
1.2 I p-gruppi	4
1.3 Teoremi di Cauchy e Cayley	4
1.4 Commutatore e gruppo derivato	4
1.5 Il gruppo diedrale	5
1.6 Il gruppo simmetrico	6
1.7 I quaternioni	8
1.8 Prodotti diretti	9
1.9 Prodotti semi-diretti	9
1.10 Teorema di struttura per gruppi abeliani finiti	10
1.11 Teoremi di Sylow	10
1.12 Risultati sulle classificazioni	11
1.13 Risultati vari sui gruppi	12
<b>2 Teoria degli anelli</b>	<b>13</b>
2.1 Proprietà di base	13
2.2 Omomorfismi e quoziente	14
2.3 Ideali primi e ideali massimali	15
2.4 Anello delle frazioni	16
2.5 Divisibilità nei domini	17
2.6 ED, PID e UFD	18
2.6.1 ED	18
2.6.2 PID	18
2.6.3 UFD	19
2.7 Anelli di polinomi	19
2.8 Gli interi di Gauss	20
<b>3 Teoria dei campi</b>	<b>21</b>

<b>4 Esercizi</b>	<b>22</b>
4.1 Esercizi su gruppi 1	22
4.2 Esercizi su campi e anelli 1	22
4.3 Esercizi su gruppi 2	32
4.4 Esercizi su anelli 2	35
<b>A Nozioni fondamentali</b>	<b>36</b>
A.1 Applicazioni	36
A.2 Relazioni	36
<b>B Esercizi sulle azioni di gruppo</b>	<b>38</b>

# 1 | TEORIA DEI GRUPPI

## §1.1 Automorfismi e azioni

**Proposizione 1.1.** Dato un gruppo  $G$ , si ha che  $\text{Int } G \triangleleft \text{Aut } G$  e  $\text{Int } G \cong G/Z(G)$ .

**Definizione 1.1 (Azione).** Un'azione di  $G$  su  $X$  insieme è un omomorfismo

$$\begin{aligned}\gamma : G &\longrightarrow S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ biettiva}\} \\ g &\longmapsto \psi_g : \psi_g(x) = g \cdot x\end{aligned}$$

Cioè un'azione di  $G$  permette di identificare un modo in cui un elemento del gruppo può agire (tramite una permutazione) sull'insieme  $X$ .

Un'azione di gruppo è ben definita se:

- (a).  $e \cdot x = x, \forall x \in X$ , con  $e \in G$  identità;
- (b).  $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$ , per  $g, h \in G$  e  $x \in X$ .

Relativamente ad un'azione  $\gamma : G \rightarrow S(X)$ , si definiscono:

- **orbita:** dato  $x \in X$ , la sua orbita è l'insieme  $\text{Orb } x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ ;
- **stabilizzatore:** dato  $x \in X$ , il suo stabilizzatore è l'insieme

$$\text{Stab } x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} < G$$

Le orbite partizionano  $X$ , visto che  $x \sim_\gamma y \iff \text{Orb } x = \text{Orb } y$ , quindi:

$$|X| = \sum_{x \in X} |\text{Orb } x|$$

**Lemma 1.0.1 (Orbita-stabilizzatore).** Esiste una biezione  $\text{Orb } x \rightarrow G/\text{Stab } x$  definita da  $g \cdot x \mapsto g \text{ Stab } x$ .

Per  $X = G$  e  $\gamma : G \rightarrow \text{Int } G \subset S(G)$  si ha l'azione per coniugio. Le orbite sono le **classi di coniugio**  $\text{Cl}(x)$  e gli stabilizzatori sono detti **centralizzatori**  $Z(x)$ . Per il lemma orbita-stabilizzatore, si ha  $|G| = |\text{Cl}(x)| |Z(x)|$ .

Si può far agire  $G$  su  $X = \{H \leq G\}$  con  $g \cdot H = gHg^{-1}$ . In questo caso, le orbite non hanno un nome particolare, ma gli stabilizzatori si dicono **normalizzatori**  $N_G(H)$ . In questo senso,  $H \triangleleft G \iff N_G(H) = G$ . Questo significa che  $N_G(H)$  contiene tutti i generatori  $g_1, \dots, g_n$  di  $G$ , quindi  $g_i H g_i^{-1} = H, \forall i$ .

Dall'azione per coniugio, si ottiene la **formula delle classi di coniugio**:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z(x)|}$$

## §1.2 I p-gruppi

**Definizione 1.2.** Un  $p$ -gruppo è un gruppo  $G$  di ordine  $p^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ .

**Proposizione 1.2.** Il centro di un  $p$ -gruppo è non-banale.

**Proposizione 1.3.** Un gruppo di ordine  $p^2$  è abeliano.

**Teorema 1.1.** Ogni  $p$ -gruppo  $G$  di ordine  $p^n$  ha sottogruppi  $G_k$  di ordine  $p^k$ ,  $k = 0, \dots, n$  tali che

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G$$

## §1.3 Teoremi di Cauchy e Cayley

**Teorema 1.2 (Cauchy).** Sia  $p$  un primo e  $G$  un gruppo finito; se  $p \mid |G|$ , allora  $G$  ha un elemento di ordine  $p$ .

**Teorema 1.3 (Cayley).** Ogni gruppo  $G$  è isomorfo a un sottogruppo di  $S(G)$ . Se  $|G| = n$ , allora  $G \hookrightarrow S_n$ .

## §1.4 Commutatore e gruppo derivato

**Definizione 1.3 (Derivato).** Dato  $G$  gruppo, si definisce il derivato come

$$G' = [G : G] := \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$$

cioè è il più piccolo sottogruppo di  $G$  contenente tutti i commutatori.

Le sue proprietà sono le seguenti:

- $G' = \{e\} \iff G$  abeliano;
- $G' \triangleleft G$ ;
- $G'$  caratteristico in  $G$ ;
- se  $H \triangleleft G$  è tale che  $G/H$  è abeliano, allora  $G' \subset H$ .

**Proposizione 1.4.** Sia  $G$  un gruppo e  $G'$  il suo derivato. Allora  $G_{\text{ab}} = G/G'$  è abeliano ed è il più grande quoziente abeliano di  $G$ .

## §1.5 Il gruppo diedrale

**Proposizione 1.5.** Tutti gli elementi di  $D_n$  si scrivono come  $\sigma\rho^i$ , oppure come  $\rho^i$ , per  $i = 0, \dots, n - 1$ .

**Proposizione 1.6.** In  $D_n$ , il numero di elementi di ordine  $k$  è dato da:

$$\begin{cases} n+1 & , \text{ se } k=2, n \text{ pari} \\ n & , \text{ se } k=2, n \text{ dispari} \\ \phi(k) & , \text{ se } k \mid n \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito, si riportano tutte le caratteristiche riguardanti la struttura di  $D_n$ .

- **Sottogruppi.** Un sottogruppo di  $D_n$  può essere composto da sole rotazioni, caso in cui coincide con un sottogruppo di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , oppure ha, in egual numero, rotazioni e riflessioni, caso in cui è isomorfo a  $D_m$ , per qualche  $m$ .
- **Sottogruppi normali.** Visto che  $[D_n : C_n] = 2$ , allora  $C_n \triangleleft D_n$ . Ogni sottogruppo di  $C_n$  è caratteristico in  $C_n$  perché unico, quindi è automaticamente normale in  $D_n$ . Se  $n$  è pari, si può definire  $H = \langle \rho^2 \rangle \sqcup \tau \langle \rho^2 \rangle$ , per cui  $[D_n : H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft D_n$ . In questo caso, sottogruppi di questa forma sono  $\langle \rho^2, \sigma \rangle$  e  $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$ . Se  $n$  è dispari, invece, un sottogruppo normale contenente una riflessione, le deve contenere tutte, quindi coincide con  $D_n$ .
- **Sottogruppi caratteristici.** Per  $n \geq 3$ ,  $C_n$  e i suoi sottogruppi di ordine  $d > 2$ ,  $d \mid n$  sono gli unici ad essere sempre caratteristici. Per gli  $n$  pari,  $\langle \rho^2, \sigma \rangle$  e  $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$  non sono caratteristici perché  $\tau : D_n \rightarrow D_n$  con  $\tau(\rho) = \rho$  e  $\tau(\sigma) = \sigma\rho$  è un automorfismo ben definito che scambia i due sottogruppi.

- **Centro.** Se  $n$  è dispari,  $Z(D_n) = \{e\}$ , mentre, se  $n$  è pari,  $Z(D_n) = \{e, \rho^{n/2}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- **Quozienti.** Questi sono in corrispondenza biunivoca con i sottogruppi normali. In generale, si ha  $D_n/\langle \rho^m \rangle \cong D_m$ . Per  $n$  pari, invece, i quozienti relativi a  $\langle \rho^2, \sigma \rangle$  e  $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$  hanno indice due, quindi sono isomorfi a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- **Automorfismi.** Un automorfismo di  $D_n$  è della forma

$$\begin{array}{rccc} D_n & \longrightarrow & D_n \\ \gamma : & \rho & \longmapsto & \rho^i \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma\rho^j \end{array}, \quad \gcd(i, n) = 1$$

Allora  $|\text{Aut}(D_n)| = n\phi(n)$ .

$$D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

## §1.6 Il gruppo simmetrico

**Proposizione 1.7.** Ogni  $k$ -ciclo ha  $k$  scritture equivalenti.

**Proposizione 1.8.** I cicli di una permutazione di  $S_n$  sono le orbite degli elementi di  $X = \{1, \dots, n\}$  formate dall'azione indotta da tale permutazione.

**Corollario 1.3.1.**  $S_n$  è generato dai cicli.

**Proposizione 1.9.** Ogni permutazione si scrive come composizione di trasposizioni.

L'applicazione **segno** è definita da

$$\text{sgn} : \begin{array}{rccc} S_n & \longrightarrow & \{\pm 1\} \\ \sigma & \longmapsto & \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{array}$$

ed è un omomorfismo di gruppi. Vale  $-1$  sulle trasposizioni; infatti, restituisce la parità del numero di trasposizioni presenti nella decomposizione di una permutazione. Il suo nucleo coincide con  $A_n \triangleleft S_n$ .

**Teorema 1.4.** Due permutazioni id  $S_n$  sono coniugate se e solo se hanno lo stesso tipo di decomposizione in cicli disgiunti.

Di seguito, la caratterizzazione di  $S_n$  e dei suoi elementi.

- **Numero di un certo tipo di permutazioni con precisa decomposizione.** In  $S_n$ , il numero complessivo di  $k$ -cicli è ottenuto tramite

$$\binom{n}{k}(k-1)!$$

Volendo cercare quante permutazioni con una precisa decomposizione in cicli disgiunti ci sono, si procede come da esempio. In  $S_{12}$ , il numero di permutazioni date dalla composizione di due 3-cicli e tre 2-cicli è

$$\binom{12}{3} \frac{3!}{3} \binom{9}{3} \frac{3!}{3} \binom{6}{3} \frac{2!}{2} \binom{4}{2} \frac{2!}{2} \binom{2}{3} \frac{2!}{2} \frac{1}{3!2!}$$

Questo si generalizza nella seguente formula:

$$\frac{n!}{\prod_{k \geq 1} [k^{m_k} (m_k!)]}$$

con  $m_k$  numero di  $k$ -cicli.

- **Ordine di una permutazione.** Un  $k$ -ciclo ha ordine  $k$ ; se una permutazione è composta da  $\ell$  cicli disgiunti  $\sigma_i$ , allora il suo ordine è

$$\text{lcm}(\text{ord}(\sigma_1), \dots, \text{ord}(\sigma_\ell))$$

- **Centralizzatore di una permutazione.** Sapendo che due permutazioni sono coniugate se e solo se hanno lo stesso tipo di decomposizione in cicli disgiunti, si sa calcolare  $|\text{Cl}(\sigma)|$  tramite la formula al primo punto. Per orbita-stabilizzatore, si ha  $|Z(\sigma)||\text{Cl}(\sigma)| = n!$ , quindi si può calcolare  $|Z(\sigma)|$ .

**Proposizione 1.10.** Per la formula delle classi,  $|Z_{S_n}(\sigma)||\text{Cl}_{S_n}(\sigma)| = n!$  e  $|Z_{A_n}(\sigma)||\text{Cl}_{A_n}(\sigma)| = n!/2$ , con:

$$Z_{A_n}(\sigma) = Z_{S_n}(\sigma) \cap A_n$$

Per la stessa formula, nel passare da  $\text{Cl}_{S_n}(\sigma)$  a  $\text{Cl}_{A_n}(\sigma)$  e da  $Z_{S_n}(\sigma)$  a  $Z_{A_n}(\sigma)$ , uno dei due dimezza di ordine, mentre l'altro rimane invariato.

**Proposizione 1.11.** Dato  $H < S_n$ , allora o  $H \subset A_n$ , quindi  $|H \cap A_n| = |H|$ , oppure  $|H \cap A_n| = |H|/2$ .

**Proposizione 1.12.** I 3-cicli sono tutti coniugati in  $A_n$ , per  $n \geq 5$ .

| **Proposizione 1.13.** I 5-cicli in  $A_5$  NON sono tutti coniugati.

| **Proposizione 1.14.**  $A_4$  non ha sottogruppi di ordine 6.

| **Teorema 1.5.**  $A_n$  è semplice  $\forall n \geq 5$ .

$$S_n \cong A_n \rtimes \langle \tau \rangle, \text{ con } \tau \text{ trasposizione}$$

## §1.7 I quaternioni

Il gruppo è definito come  $Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = 1, i^2 = j^2, ij = j^3i \rangle$ .  $i^4 = 1$  e  $i^2 = j^2$ , allora  $j^4 = 1$ , quindi  $\text{ord}(j) \mid 4$ . Poi  $\text{ord}(j^2) = \text{ord}(i^2) = 2$ , quindi  $\text{ord}(j) = 4$ . Allora  $Q_8$  ha due gruppi ciclici di ordine 4:  $\langle i \rangle$  e  $\langle j \rangle$ , con  $\langle i \rangle \cap \langle j \rangle = \{1, i^2 = j^2\}$ . Visto che  $\langle i \rangle, \langle j \rangle < Q_8$  e  $|\langle i \rangle \langle j \rangle| = 8$ , allora

$$Q_8 = \langle i \rangle \langle j \rangle = \{1, i, i^2, i^3, j, j^3, ij, i^3j\}$$

visto che  $\langle i \rangle, \langle j \rangle \triangleleft Q_8$  (hanno indice 2).

| **Osservazione 1.1.**  $Q_8$  non è abeliano:  $ij = j^3i = j^{-1}i \neq ji$ .

Di seguito, la caratterizzazione strutturale del gruppo.

- **Sottogruppi.**  $\langle i \rangle, \langle j \rangle \triangleleft Q_8$  perché hanno indice 2. Anche  $\langle i^2 \rangle = \langle j^2 \rangle \triangleleft Q_8$  perché  $i^2$  (quindi  $j^2$ ) commuta con i generatori.
- **Centro.** Si ha  $\langle i^2 \rangle = Z(Q_8)$  perché  $\langle i^2 \rangle$  ha ordine 2, quindi contenuto in  $Z(Q_8)$ ; al contempo,  $|Z(Q_8)| \in \{2, 4, 8\}$ , ma, se non fosse 2,  $Q_8$  sarebbe abeliano.
- **Elementi.** Prendendo  $k = ij$  e  $i^2 = -1$ , si ha

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

Si ha  $i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = -i \Rightarrow i^3j = -ij = -k$ . Quindi:  $ij = k$ ,  $jk = i$ ,  $ki = j$  e  $ji = -k$ ,  $ik = -j$  e  $kj = -i$ . Infine,  $k^2 = (ij)^2 = ijij = i^2$ , quindi  $\text{ord}(k) = 4$ . In questi termini,  $\langle -1 \rangle = Z(Q_8)$ .

- **Sottogruppi normali e caratteristici.** Per quanto detto,  $\langle -1 \rangle = Z(Q_8)$  quindi è caratteristico e, in particolare, normale. Invece  $\langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle \triangleleft Q_8$ , ma non sono caratteristici. Allora ogni sottogruppo di  $Q_8$  è normale.

- **Prodotto semi-diretto.** Si nota che  $Q_8$  non si può ottenere come prodotto semi-diretto perché ogni coppia di sottogruppi non si interseca mai solo in 1, ma anche  $-1$ .

## §1.8 Prodotti diretti

**Teorema 1.6 (Decomposizione diretta).** Sia  $G$  un gruppo e siano  $H, K \triangleleft G$ ; se  $HK = G$  e  $H \cap K = \{e\}$ , allora  $G \cong H \times K$ .

**Corollario 1.6.1.** In un prodotto diretto, i fattori commutano fra loro.

**Corollario 1.6.2.** Se  $G = H \times K$ , allora  $Z(H \times K) \cong Z(H) \times Z(K)$ , visto che  $Z(H) \times \{e_K\}$  e  $\{e_H\} \times Z_K$  sono sottogruppi normali di  $Z(H \times K)$ . Questo implica che

$$\text{Int}(H \times K) \cong \frac{H \times K}{Z(H \times K)} \cong H/Z(H) \times K/Z(K) \cong \text{Int}(H) \times \text{Int}(K)$$

**Teorema 1.7.** Si ha  $\text{Aut}(H \times K) \cong \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K)$  se e soltanto se  $H \times \{e_K\}$  e  $\{e_H\} \times K$  sono caratteristici in  $H \times K$ . Altrimenti  $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) \hookrightarrow \text{Aut}(H \times K)$ .

**Corollario 1.7.1.** Sia  $G = H \times K$ , con  $|H| = n$  e  $|K| = m$ ; se  $\gcd(n, m) = 1$ , allora  $H \times \{e_K\}$ ,  $\{e_H\} \times K$  sono caratteristici in  $G$ .

## §1.9 Prodotti semi-diretti

**Definizione 1.4 (Prodotto semi-diretto).** Siano  $H, K$  due gruppi e  $\gamma : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  un omomorfismo tale che  $\gamma(k) = \gamma_k \in \text{Aut}(H)$ . Allora si definisce  $H \rtimes_{\gamma} K$  il gruppo  $H \times K$  la cui operazione di gruppo è definita da

$$(h, k) * (h', k') = (h\gamma_k(h'), kk')$$

Il prodotto diretto è dato da  $\gamma(K) = \text{Id}_H$ .

**Proposizione 1.15.** Si considera  $H \rtimes_{\gamma} K$  e si definiscono  $\overline{H} = H \times \{e_K\}$  e  $\overline{K} = \{e_H\} \times K$ . Per costruzione,  $\overline{K}, \overline{H} \triangleleft H \times K$ , mentre:

- $\overline{H} \triangleleft H \rtimes_{\gamma} K$  sempre;
- $\overline{K} \triangleleft H \rtimes_{\gamma} K \iff$  il prodotto è diretto.

**Teorema 1.8 (Decomposizione semi-diretta).** Sia  $G$  un gruppo e siano  $H \triangleleft G$  e  $K < G$ . Se  $HK = G$  e  $H \cap K = \{e\}$ , allora  $G \cong H \rtimes_{\gamma} K$ , con  $\gamma : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  e  $\gamma(k) = khk^{-1}$ .

### §1.10 Teorema di struttura per gruppi abeliani finiti

**Definizione 1.5 ( $p$ -torsione).** Dato un gruppo abeliano finito  $G$ , se ne definisce la  $p$ -componente

$$G(p) := \{g \in G \mid \text{ord}(g) = p^k, k \in \mathbb{N}\}$$

**Proposizione 1.16.** La  $p$ -torsione  $G(p)$  di un gruppo  $G$  abeliano finito è un sottogruppo caratteristico.

**Teorema 1.9.** Se  $G$  è un gruppo abeliano di ordine  $|G| = n = p_1^{e_1} \cdots p_s^{e_s}$ , con  $p_i$  primi diversi fra loro, allora

$$G \cong G(p_1) \times \cdots \times G(p_s)$$

**Lemma 1.9.1.** Sia  $G$  un  $p$ -gruppo e  $x_1 \in G$  elemento di ordine massimo. Dato anche  $\bar{x} \in G/\langle x_1 \rangle$ ,  $\exists y \in \pi_{\langle x_1 \rangle}^{-1}(\bar{x})$  tale che  $\text{ord}_G(y) = \text{ord}_{G/\langle x_1 \rangle}(\bar{x})$ .

**Teorema 1.10.** Se  $G$  è un  $p$ -gruppo abeliano, allora esistono unici  $r_1, \dots, r_t \in \mathbb{N}$  tali che

$$G \cong \mathbb{Z}/p^{r_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{r_t}\mathbb{Z}$$

con  $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_t$ .

**Teorema 1.11 (Teorema di struttura).** Sia  $G$  un gruppo abeliano finito; allora  $G$  si decomponе univocamente come

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$$

dove  $n_{i+1} \mid n_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, s-1$ .

### §1.11 Teoremi di Sylow

Per i seguenti teoremi, si considera un gruppo finito  $G$  di ordine  $|G| = p^n m$ , con  $p$  primo e  $\gcd(m, p) = 1$ .

**Teorema 1.12 (I teorema).** Dato  $\alpha \in \mathbb{N}$ , con  $0 \leq \alpha \leq n$ , allora  $\exists H < G$  di ordine  $|H| = p^\alpha$ .

**Teorema 1.13 (II teorema).** Ogni  $p$ -gruppo di  $G$  è contenuto in un  $p$ -Sylow. Inoltre, due qualunque  $p$ -Sylow di  $G$  sono coniugati.

**Teorema 1.14 (III teorema).** Dato  $n_p$  il numero di  $p$ -Sylow di  $G$ , si ha che  $n_p \mid |G|$  e  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ . In particolare, si avrà  $n_p \mid m$ .

## §1.12 Risultati sulle classificazioni

- **Classificazione dei gruppi di ordine 6.**

Si ha  $|G| = 2 \cdot 3$ , quindi sono presenti, per Cauchy, un sottogruppo  $P_2$  di ordine 2 e un sottogruppo  $P_3$  di ordine 3. Visto che  $P_3$  ha indice 2 è normale in  $G$ . Inoltre,  $P_3 \cap P_2 = \{e\}$  perché gli altri elementi di un gruppo hanno ordine coprimo con l'ordine dell'altro gruppo. Questo implica che  $P_2P_3 = G$ , quindi  $G \cong P_3 \rtimes_{\phi} P_2$ , con

$$\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Aut } \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Ne segue che ci sono due possibili omomorfismi:  $\phi(1) = 0$ , che corrisponde al prodotto diretto  $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ , oppure  $\phi(1) = 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ . Riguardo l'ultimo caso, notando che  $2 \equiv -1 \pmod{3}$ , si conclude che l'ultimo omomorfismo consiste nel prodotto per  $-1$ . Pertanto, dati  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , il prodotto è definito da:

$$(a, b) * (c, d) = (a + (-1)^b c, b + d)$$

Per finire, si nota che, per  $a \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ :

$$(0, 1)(a, 0)(0, 1)^{-1} = (0, 1)(a, 0)(0, 1) = (-2a, 0) = (a, 0)^{-1}$$

Quindi,  $G$  soddisfa la presentazione di  $S_3$ , per cui  $G \cong S_3$ . Si conclude che se  $G$  è un gruppo di ordine 6, le possibilità sono:

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$S_3$
--------------------------	-------

rispettivamente nel caso abeliano e non-abeliano.

- **Classificazione dei gruppi di ordine  $pq$ .** Se  $p = q$ ,  $G$  è abeliano e  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  oppure  $G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ .

Se  $q > p$  e  $p \nmid q - 1$ , allora si può avere solo  $G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ ; altrimenti si ha un prodotto semi-diretto non-banale, unico a meno di isomorfismo.

- **Classificazione dei gruppi di ordine 12.**

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \quad A_4 \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad D_6$$

- **Classificazione dei gruppi di ordine 8.**

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \quad D_4 \quad Q_8$$

- **Classificazione dei gruppi di ordine 30.**

$$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \quad D_{15} \quad D_5 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad D_3 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

### §1.13 Risultati vari sui gruppi

**Proposizione 1.17.**  $G/Z(G)$  ciclico  $\iff G$  abeliano.

**Proposizione 1.18.** Se  $H, K < G$ , allora  $HK < G \iff HK = KH$ ; in questo caso,  $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ .

**Proposizione 1.19.** Se  $H, K \triangleleft G$ , con  $H \cap K = \{e\}$ , allora  $hk = kh$ ,  $\forall h \in H, \forall k \in K$ .

**Proposizione 1.20.** Sia  $H < G$  con  $[G : H] = 2$ ; allora  $H \triangleleft G$ .

**Proposizione 1.21.** Siano  $H \triangleleft G$  e  $K$  sottogruppo caratteristico di  $H$ ; allora  $K \triangleleft G$ .

**Proposizione 1.22.** Sia  $H < G$ , con  $|H| = 2$ ; allora  $H$  è normale se e solo se  $H < Z(G)$ .

## 2 | TEORIA DEGLI ANELLI

### §2.1 Proprietà di base

**Proposizione 2.1.** Sia  $A$  un anello commutativo con identità; allora:

- (a).  $(A^*, \cdot)$  è un gruppo abeliano;
- (b).  $A^* \cap D(A) = \emptyset$ ;
- (c). se  $A$  è finito, allora  $A = D(A) \cup A^*$ .

*Dimostrazione (c).*  $A^*, D(A) \subseteq A$ , quindi  $A^* \cup D(A) \subseteq A$ . Viceversa, per vedere che  $A \subseteq A^* \cup D(A)$ , si nota che se  $x \in D(A)$ , la tesi è vera, mentre se  $x \in A \setminus D(A)$ , allora si può definire

$$\begin{aligned} \varphi_x : & \quad A \longrightarrow A \\ & a \longmapsto xa \end{aligned}$$

con  $\text{Ker } \varphi_x = \{a \in A \mid xa = 0\}$ . Però  $x \notin D(A)$ , quindi  $\text{Ker } \varphi_x = \{0\}$ ; usando che  $A$  è finito,  $\varphi_x$  è iniettiva e, quindi, anche suriettiva, per cui  $1 \in \text{Im } \varphi_x$ . Questo significa che  $\exists \bar{a} \in A$  per cui  $x\bar{a} = 1$ , quindi  $x \in A^*$ .  $\square$

**Definizione 2.1 (Ideale).** Dato  $A$  anello,  $I \subseteq A$  è un *ideale* se

- (a).  $(I, +) < (A, +)$ ;
- (b). per ogni  $a \in A$ , si ha  $aI \subset I$  e  $Ia \subset I$ .

**Definizione 2.2 (Ideale generato).** Dato  $A$  anello e  $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset A$ , l'*ideale generato* da  $S$  è:

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i \mid a_i \in A \right\}$$

**Proposizione 2.2.** Dato  $A$  anello e  $I, J \subseteq A$  due suoi ideali, le seguenti operazioni producono altri ideali:

- (a).  $I \cap J$ ;
- (b).  $I + J := \langle I, J \rangle = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ ;
- (c).  $IJ = \{\sum_{k=1}^n i_k j_k \mid n \geq 1, i_k \in I, j_k \in J\}$ ;
- (d).  $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}$ ;

(e).  $(I : J) = \{x \in A \mid xJ \subseteq I\}$ .

**Proposizione 2.3.** A anello e  $I, J$  ideali; in generale,  $IJ \subseteq I \cap J$ , mentre  $IJ = I \cap J$  se e solo se  $I + J = A$ .

**Proposizione 2.4.**  $I \subset A$  è un ideale proprio se e solo se  $I \cap A^* = \emptyset$ .

**Corollario 2.0.1.**  $A$  è un campo se e solo se i suoi unici ideali sono  $\{0\}$  e  $A$ .

## §2.2 Omomorfismi e quoziante

**Proposizione 2.5.** Gli ideali di un anello  $A$  sono tutti e soli i nuclei degli omomorfismi da  $A$ .

**Teorema 2.1 (I teorema di omomorfismo).** Sia  $f : A \rightarrow B$  un omomorfismo; allora esiste un unico omomorfismo iniettivo  $\varphi : A/\text{Ker}(f) \rightarrow B$  tale che  $f = \varphi \circ \pi$ , ossia con  $\text{Im } f = \text{Im } \varphi$ .

**Teorema 2.2 (II teorema di omomorfismo).** Dati  $I, J \subset A$  due ideali, con  $I \subset J$ , allora  $J/I$  è un ideale di  $A/I$  e

$$\frac{A/I}{J/I} \cong A/J$$

**Teorema 2.3 (III teorema di omomorfismo).** Sia  $I \subset A$  ideale e  $B \subset A$  sottoanello; allora:

$$\frac{B+I}{I} \cong \frac{B}{B \cap I}$$

**Lemma 2.3.1.** Sia  $f : A \rightarrow B$  un omomorfismo; allora:

(a).  $\forall J$  ideale di  $B$ , si ha che  $f^{-1}(J)$  è un ideale di  $A$ ;

(b). se  $f$  è suriettiva, allora  $\forall I$  ideale di  $A$ , si ha che  $f(I)$  è un ideale di  $B$ .

**Teorema 2.4 (Teorema di corrispondenza).** Sia  $I$  un ideale di  $A$  e  $\pi$  la proiezione al quoziante  $A/I$ . Tale proiezione induce una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di  $A/I$  e gli ideali di  $A$  che contengono  $I$ .

**Teorema 2.5 (Teorema cinese del resto).** Sia  $A$  un anello commutativo con unità e  $I, J$  due suoi ideali; allora

$$f : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & A/I \times A/J \\ a & \longmapsto & (a+I, a+J) \end{array}$$

è un omomorfismo, con  $\text{Ker } f = I \cap J$ . Inoltre, vale  $I + J = A \iff f$  è suriettiva;

in questo caso:

$$A/IJ \cong A/I \times A/J$$

## §2.3 Ideali primi e ideali massimali

**Definizione 2.3 (Maggiorante).** Dato  $(\mathcal{F}, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato e  $X \subset \mathcal{F}$  un sottoinsieme, si dice che  $M \in \mathcal{F}$  è un maggiorante per  $X$  se,  $\forall A \in X$ ,  $A \leq M$ .

**Definizione 2.4 (Elemento massimale).** Dato  $(\mathcal{F}, \leq)$ , si ha  $A \in \mathcal{F}$  elemento massimale per  $\mathcal{F}$  se,  $\forall B \in \mathcal{F} : A \leq B$ , si ha  $A = B$ .

**Definizione 2.5 (Massimo).**  $A \in \mathcal{F}$  è detto *massimo* per  $\mathcal{F}$  se,  $\forall B \in \mathcal{F}$ , si ha  $B \leq A$ .

**Definizione 2.6 (Catena).** Una catena di  $\mathcal{F}$  è un suo sottoinsieme totalmente ordinato.

**Definizione 2.7 (Insieme induttivo).** Si dice che  $\mathcal{F}$  è induttivo se ogni sua catena ammette un maggiorante al suo interno.

**Lemma 2.5.1 (Lemma di Zorn).** Se  $(\mathcal{F}, \leq)$  è un insieme parzialmente ordinato e induttivo, allora contiene elementi massimali.

**Definizione 2.8 (Ideale primo).** Un  $I$  ideale proprio di  $A$  anello, si dice *primo* se

$$xy \in I \implies x \in I \text{ oppure } y \in I, \forall x, y \in A$$

**Definizione 2.9 (Ideale massimale).**  $I \subsetneq A$  è detto *massimale* se è un elemento massimale della famiglia  $\mathcal{F}$  di tutti gli ideali propri di  $A$ , cioè se e solo se  $\forall J \subsetneq A : I \subseteq J \implies I = J$ .

**Proposizione 2.6.** Ogni anello unitario ammette ideali massimali.

**Proposizione 2.7 (Proprietà degli ideali massimali).** Dato  $A$  anello, si ha che

(a). ogni ideale proprio di  $A$  è contenuto in un ideale massimale;

(b). ogni elemento non-invertibile di  $A$  è contenuto in un ideale massimale.

**Proposizione 2.8 (Caratterizzazione degli ideali primi e massimali).** Sia  $A$  un anello e  $I \subsetneq A$  un suo ideale proprio; allora:

(a).  $I$  è primo se e solo se  $A/I$  è un dominio;

(b).  $I$  è massimale se e solo se  $A/I$  è un campo;

(c).  $A$  è un dominio se e solo se  $(0)$  è un ideale primo;

- (d).  $A$  è un campo se e solo se  $(0)$  è un ideale massimale;
- (e).  $I$  massimale  $\implies I$  primo.

**Proposizione 2.9.** La biezione tra ideali data da  $\pi : A \rightarrow A/I$  preserva ideali primi e massimali (contenenti  $I$ ).

## §2.4 Anello delle frazioni

**Definizione 2.10 (Parte moltiplicativa).** Dati  $A$  dominio (commutativo e con identità) e  $S \subset A$ , si dice che  $S$  è una *parte moltiplicativa* di  $A$  se:

- (a).  $0 \notin S$ ;
- (b).  $1 \in S$ ;
- (c).  $S$  è chiuso sotto moltiplicazione, cioè, dati  $x, y \in S$ , allora  $xy \in S$ .

**Definizione 2.11 (Insieme delle frazioni).** Dato un dominio  $A$  e data  $S$  una sua parte moltiplicativa, si definisce l'*insieme delle frazioni* come

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S \right\}_{\sim}$$

dove  $a/s \sim b/t \iff at = bs$ .

**Proposizione 2.10.** L'applicazione

$$\begin{aligned} f : & \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ a & \longmapsto & a/1 \end{array} \end{aligned}$$

è un omomorfismo iniettivo, quindi  $S^{-1}A$  è un'estensione di  $A$ .

**Proposizione 2.11.** Sia  $A$  un dominio e  $S = A \setminus \{0\}$  una sua parte moltiplicativa; allora l'anello delle frazioni  $S^{-1}A$  è il più piccolo campo contenente  $A$ .

**Definizione 2.12 (Localizzato).** Dato un dominio  $A$  e  $P \subset A$  un suo ideale primo, considerando  $S = A \setminus P$ , si definisce  $S^{-1}A = A_p$  come il localizzato di  $A$  a  $P$ .

**Osservazione 2.1.**  $A_p$  è un anello locale, ossia ha un unico ideale massimale.

Di seguito, alcune caratteristiche di  $S^{-1}A$ .

- **Invertibili.** Sono tutti gli  $a/s \in S^{-1}A$  tali che  $s/a \in S^{-1}A$ , ossia quelli tali che  $\exists b \in A : ab \in S$ .
- **Ideali.** Dato  $I \subset A$ , si costruisce l'insieme  $S^{-1}I = \{x/s \in S^{-1}A \mid x \in I, s \in S\}$ . Per questo, vale la seguente proposizione.

**Proposizione 2.12.** Sia  $I \subset A$  e  $S^{-1}A$  l'anello delle frazioni di  $A$ . Allora:

- $S^{-1}I$  è un ideale di  $S^{-1}A$ ;
- per ogni ideale  $J \subset S^{-1}A$ , si trova un ideale  $I \subset A$  tale che  $J = S^{-1}I$ ;
- $S^{-1}I$  è proprio se e solo se  $I \cap S = \emptyset$ ;
- dato  $P$  ideale primo, allora  $S^{-1}P$  è un ideale primo di  $S^{-1}A$ .

## §2.5 Divisibilità nei domini

**Definizione 2.13 (Divisibilità).** Siano  $a, b \in A$  dominio, con  $a \neq 0$ ; allora  $a \mid b \iff \exists c \in A : b = ac$ .

**Osservazione 2.2.**  $a \mid b \iff \langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ ; infatti,  $ca = b \Rightarrow b \in \langle a \rangle \Rightarrow \langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$ .

**Definizione 2.14 (Elemento associato).** Dati  $a, a' \in A$  dominio, si dicono *associati* se vale una delle seguenti, equivalenti, condizioni:

- $a \mid a'$  e  $a' \mid a$ ;
- $\exists u \in A^*$  tale che  $a = ua'$ ;
- $\langle a \rangle = \langle a' \rangle$ .

**Definizione 2.15 (MCD).** Per  $a, b \in A$  dominio non entrambi nulli,  $d$  è un MCD se valgono entrambe le seguenti condizioni:

- $d \mid a$  e  $d \mid b$ ;
- $\forall x \in A$  tale che  $x \mid a$  e  $x \mid b$ , si ha  $x \mid d$ .

**Proposizione 2.13.** Dati  $a, b \in A$ , si dice che  $d$  e  $d'$  sono loro MCD se e solo se  $d \sim d'$ .

**Definizione 2.16 (Elemento primo).**  $x \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$  è primo se,  $\forall a, b \in A$ , si ha  $x \mid ab \implies x \mid a$  oppure  $x \mid b$ .

**Definizione 2.17 (Elemento irriducibile).**  $x \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$  è irriducibile se,  $\forall a, b \in A$ , vale  $x = ab \Rightarrow a \in A^*$  oppure  $b \in A^*$ .

**Proposizione 2.14.** Se  $x \in A$  dominio è primo, allora è irriducibile.

**Proposizione 2.15 (Caratterizzazione elementi primi e irriducibili).** Sia  $x \in A$  dominio. Allora:

- (a).  $x$  è primo  $\iff \langle x \rangle$  è un ideale primo non-nullo;
- (b).  $x$  è irriducibile  $\iff \langle x \rangle$  è un ideale massimale nell'insieme degli ideali principali.

## §2.6 ED, PID e UFD

### §2.6.1 ED

**Definizione 2.18 (ED).**  $A$  dominio è *euclideo* se si può definire una mappa  $d : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che:

- (a).  $d(x) \leq d(xy)$ ,  $\forall x, y \in A \setminus \{0\}$ ;
- (b).  $\forall x \in A$ ,  $\forall y \in A \setminus \{0\}$ , si trovano  $q, r \in A$  tali che  $x = yq + r$ , con  $d(r) < d(y)$  oppure  $r = 0$ .

**Proposizione 2.16 (Algoritmo di Euclide).** In  $A$  dominio euclideo, per ogni coppia  $a, b \in A$ , esiste un MCD ottenuto tramite algoritmo di Euclide.

**Proposizione 2.17.** Gli elementi di grado minimo di  $A$  dominio euclideo coincidono con gli elementi di  $A^*$ .

**Proposizione 2.18.** Tutti gli ideali di  $A$  dominio euclideo sono principali e generati da un elemento di grado minimo nell'ideale in questione.

### §2.6.2 PID

**Definizione 2.19 (PID).** Un dominio  $A$  è a *ideali principali* se ogni suo ideale è principale.

**Proposizione 2.19.** Se  $A$  è un PID, i suoi unici ideali primi sono  $\langle 0 \rangle$  e quelli massimali.

**Proposizione 2.20 (MCD nei PID).** Dati  $x, y \in A$  PID non entrambi nulli, si ha  $\langle x, y \rangle = \langle d \rangle$ , con  $d = (x, y)$ .

### §2.6.3 UFD

**Definizione 2.20 (UFD).** A dominio è a *fattorizzazione unica* se ogni elemento  $x \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$  si decomponе univocamente in irriducibili, a meno di prodotto per un'unità.

**Proposizione 2.21.** Dati  $a, b \in A$  UFD non entrambi nulli, esiste sempre un loro MCD.

**Teorema 2.6 (Caratterizzazione degli UFD).** A dominio è un UFD se e solo se sono soddisfatte entrambe le seguenti condizioni:

- (a). ogni irriducibile è primo;
- (b). ogni catena discendente di divisibilità è stazionaria, cioè data  $\{a_i\}_{i \geq 0} \subset A$ , con  $a_{i+1} | a_i$ , allora  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $a_i \sim a_{n_0}$ ,  $\forall i \geq n_0$ .

**Corollario 2.6.1.** Se  $A$  è un PID, allora è un UFD.

$$\text{ED} \implies \text{PID} \implies \text{UFD}$$

### §2.7 Anelli di polinomi

**Definizione 2.21 (Contenuto).** Dato  $f(x) \in A[x]$ , con  $A$  UFD e  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , si definisce il *contenuto* di  $f(x)$  come l'MCD dei suoi coefficienti:

$$c(f(x)) = \gcd(a_0, \dots, a_n)$$

**Definizione 2.22 (Elemento primitivo).**  $f(x) \in A[x]$ , con  $A$  UFD, è *primitivo* se  $c(f(x)) \sim 1$ .

**Lemma 2.6.1 (Lemma di Gauss).** Dati  $f(x), g(x) \in A[x]$ , allora:

$$c(f(x)g(x)) = c(f(x))c(g(x))$$

**Corollario 2.6.2.** Dati  $f(x), g(x) \in A[x]$ , con  $c(f(x)) = 1$  e  $f(x) | g(x)$  in  $K[x]$ , con  $K$  campo dei quozienti di  $A$ , allora  $f(x) | g(x)$  in  $A[x]$ .

**Corollario 2.6.3.** Dato  $f(x) \in A[x]$ , con  $f(x) = g(x)h(x)$  in  $K[x]$  (con  $K$  campo dei quozienti di  $A$ ) e  $\deg g(x), \deg h(x) \geq 1$  (quindi  $f$  riducibile in  $K[x]$ ), allora  $\exists \delta \in K^*$  tale che  $g_1(x) = \delta g(x) \in A[x]$  e  $h_1(x) = \delta^{-1}h(x) \in A[x]$ , per cui  $f(x) = g_1(x)h_1(x)$  in  $A[x]$ .

**Teorema 2.7.** Gli irriducibili di  $A[x]$ , con  $A$  UFD, soddisfano una tra le seguenti condizioni:

- (a).  $f(x) \in A$  e irriducibile in  $A$ ;
- (b).  $f(x) \in A[x]$ , con  $\deg f(x) \geq 1$ ,  $c(f(x)) = 1$  e  $f(x)$  irriducibile in  $K[x]$ .

**Teorema 2.8.** Se  $A$  è un UFD, allora  $A[x]$  è un anello a fattorizzazione unica.

**Corollario 2.8.1.** Se  $A$  è un UFD, allora  $A[x_1, \dots, x_n]$  è un anello a fattorizzazione unica.

**Proposizione 2.22 (Eisenstein).** Sia  $A$  un UFD e  $f(x) \in A[x]$  primitivo, con  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ . Dato  $p \in A$  un primo tale che

- (a).  $p \nmid a_n$ ,
- (b).  $p \mid a_i$ ,  $\forall i = 0, \dots, n-1$ ,
- (c).  $p^2 \nmid a_0$ ;

allora  $f(x)$  è irriducibile in  $A[x]$  e in  $K[x]$ .

## §2.8 Gli interi di Gauss

## 3 | TEORIA DEI CAMPI

# 4 | ESERCIZI

## §4.1 Esercizi su gruppi 1

**Esercizio 4.1.** Sia  $G = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ; determinare il numero degli omomorfismi  $f : G \rightarrow G$ . Inoltre, dati  $n \in \mathbb{N}$  e  $f_n : G \rightarrow G$  l'omomorfismo dato da  $f_n(x) = nx$ , determinare:

- (a). per quali valori di  $n$ ,  $\text{Ker } f_n$  è ciclico;
- (b). per quali valori di  $n$ ,  $\text{Im } f_n$  è ciclico.

## §4.2 Esercizi su campi e anelli 1

**Esercizio 4.2.** Sia  $f(x) = x^4 + x^3 - 3 \in \mathbb{F}_7[x]$ . Determinare il numero di divisori dello zero e l'inverso di  $\overline{x+1}$  in  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$ .

*Svolgimento.* Si scomponga  $f(x)$  in  $\mathbb{F}_7[x]$ ; per farlo, si vede se ha radici, calcolando  $f(a)$ , per  $a = 0, 1, \dots, 6$ . Provando, si vede che:

$$\begin{aligned}f(0) &= -3 \equiv 4 \pmod{7} \\f(1) &= -1 \equiv 6 \pmod{7} \\f(2) &= 16 + 8 - 3 = 21 \equiv 0 \pmod{7} \\f(3) &= 81 + 27 - 3 = 105 \equiv 0 \pmod{7} \\f(4) &= 256 + 64 - 3 = 317 = 280 + 37 \equiv 2 \pmod{7} \\f(5) &= 625 + 125 - 3 = 747 = 735 + 12 \equiv 5 \pmod{7} \\f(6) &= 1296 + 216 - 3 = 1509 = 1498 + 11 \equiv 4 \pmod{7}\end{aligned}$$

Per effettuare la fattorizzazione di  $f(x)$ , si usa Ruffini. Iniziando con  $(x-2)$ , visto che  $f(x) = x^4 + x^3 - 3 \equiv x^4 + x^3 + 4 \pmod{7}$ , si ottiene:

$$\begin{array}{c|ccccc}2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 2 & 6 & 5 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 5 & 0\end{array}$$

$$f(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + 6x + 5) = (x-2)g(x)$$

Evidentemente,  $g(3) = 0 \implies (x - 3) \mid g(x)$ ; usando ancora Ruffini, si ha:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ & & 3 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x - 2)g(x) = (x - 2)(x - 3)(x^2 + 6x + 3)$$

dove si nota che  $x^2 + 6x + 3$  non si annulla né per  $x = 2$ , né per  $x = 3$ , quindi è irriducibile in  $\mathbb{F}_7[x]$  (altrimenti  $f(x)$  avrebbe una radice diversa da  $x = 2, 3$ , che è assurdo per i calcoli svolti sopra). In questo modo, si può studiare nel dettaglio  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$ . Intanto, visto che  $f(x)$  è un polinomio di grado 4 in  $\mathbb{F}_7[x]$ , tale quoziente sarà composto da tutti i polinomi della forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{F}_7$$

pertanto avrà un totale di  $7^4$  elementi. Le unità di  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$  sono tutte quelle classi  $\overline{h(x)}$  tali che  $(f(x), h(x)) = 1$ ; per studiare meglio questo fatto, si usa il teorema cinese del resto per anelli a partire dall'osservazione che  $x - 2$ ,  $x - 3$  e  $x^2 + 6x + 3$  sono coprimi tra loro:

$$\frac{\mathbb{F}_7[x]}{\langle (x - 2)(x - 3)(x^2 + 6x + 3) \rangle} \cong \mathbb{F}_7[x]/\langle x - 2 \rangle \times \mathbb{F}_7[x]/\langle x - 3 \rangle \times \mathbb{F}_7[x]/\langle x^2 + 6x + 3 \rangle$$

Per studiare il numero delle unità complessive di  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$ , si studia singolarmente ciascun fattore:

- $\mathbb{F}_7[x]/\langle x - 2 \rangle \cong \mathbb{F}_7$ , quindi ha 7 elementi, per un totale di 6 unità;
- $\mathbb{F}_7[x]/\langle x - 3 \rangle \cong \mathbb{F}_7$ , quindi ha 6 unità;
- $\mathbb{F}_7[x]/\langle x^2 + 6x + 3 \rangle$  è un campo perché  $x^2 + 6x + 3$  è irriducibile in  $\mathbb{F}_7[x]$  e ha un totale di  $7^2 = 49$  elementi, quindi è isomorfo a  $\mathbb{F}_{49}$ , con un totale di 48 unità.

Da questo si conclude che il numero totale di unità in  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$  è  $6 \cdot 6 \cdot 48 = 1728$  unità. Essendo interessati ai divisori dello zero, sapendo che divisori dello zero e unità partizionano l'anello (a parte lo zero), si ha che, in totale, sono  $7^4 - 1728 = 2401 - 1728 = 673$  incluso lo zero.

Per finire, si calcola l'inverso di  $\overline{x+1}$  in  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$ . Intanto si nota che  $x + 1$  è coprimo con  $f(x)$  perché si annulla in  $-1 \equiv 6 \pmod{7}$ , quindi l'inverso in  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$

esiste. Si cerca un polinomio  $a(x) \in \mathbb{F}_7[x]$  che soddisfa

$$a(x)(x+1) + b(x)f(x) = 1$$

cosicché, in  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$ ,  $\overline{a(x)(x+1)} = 1$ . Per iniziare, si divide  $f(x)$  per  $x+1$  (usando  $-1 \equiv 6 \pmod{7}$ ):

$$\begin{array}{c|ccccc} 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)x^3 + 4$$

In  $\mathbb{F}_7[x]$ ,  $4^{-1} \equiv 2 \pmod{7}$ , quindi, moltiplicando tutto per 2 in  $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x) \rangle$ , si ha:

$$1 = 2f(x) - 2(x+1)x^3 \implies \overline{1} = \overline{-2}(\overline{x+1})\overline{x^3}$$

da cui l'inverso di  $\overline{x+1}$  è proprio  $\overline{-2x^3} \equiv \overline{5x^3}$ , visto che  $-2 \equiv 5 \pmod{7}$ . ■

**Esercizio 4.3.** Sia  $m$  un numero intero e sia

$$f_m(x) = (x^2 - m)(x^4 - 25)$$

Determinare, per ogni valore intero di  $m$ , il grado del campo di spezzamento di  $f_m(x)$  su  $\mathbb{Q}$ .

*Svolgimento.* Il campo di spezzamento per  $f_m(x)$  si ottiene aggiungendo a  $\mathbb{Q}$  le radici dei due fattori  $x^2 - m$  e  $x^4 - 25$ . Si può notare che

$$x^4 - 25 = (x^2 + 5)(x^2 - 5)$$

Da qui, si ottiene che le radici di  $x^4 - 25$  sono  $\pm\sqrt{5}$  e  $\pm i\sqrt{5}$ , quindi il suo campo di spezzamento corrisponde con  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ . Per finire, si osserva che  $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$  e  $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$ , per cui  $[K : \mathbb{Q}] = 4$ , dato che  $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ . Visto che  $K$  è indipendente da  $m$ , rimarrà fisso per il resto dell'esercizio.

Quanto al fattore  $x^2 - m$ , le sue radici sono  $\pm\sqrt{m}$ , ma qui il campo di spezzamento dipende dalla scelta dell'intero  $m$ .

- Se  $m = 0$ , le radici di  $x^2 - m$  sono già contenute in  $\mathbb{Q}$  poiché è proprio lo zero.
- Se  $m$  è un quadrato perfetto positivo, allora  $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$  e, anche in questo caso,  $\mathbb{Q}$  contiene già le radici.

- Se  $m < 0$ , invece, le radici sono date da  $\pm i\sqrt{|m|}$ ; in questo caso, se  $m = -n^2$ , per qualche intero  $n$ , allora il suo campo di spezzamento coincide con  $\mathbb{Q}(i)$ , visto che  $\sqrt{|m|} \in \mathbb{Q}$ . Altrimenti, il suo campo di spezzamento sarà dato da  $\mathbb{Q}(i\sqrt{|m|})$ .
- Infine, se  $m > 0$  non è un quadrato perfetto, il campo di spezzamento è ottenuto aggiungendo  $\sqrt{m}$ , quindi coincide con  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ .

Allora, il campo di spezzamento per questo fattore, al variare di  $m \in \mathbb{Z}$ , è dato da:

$$L = \begin{cases} \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}(i\sqrt{m}) \\ \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \end{cases}$$

Visto che  $i$  è già stato aggiunto per la radice del secondo fattore, ci si può concentrare sul trattare i casi in cui  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  o  $L = \mathbb{Q}$ .

Per concludere, quindi, il campo di spezzamento del polinomio  $f_m(x)$  su  $\mathbb{Q}$  è dato da  $E = KL$ , con le varie possibilità per  $L$  al variare di  $m \in \mathbb{Z}$ :

- se  $m = 0$ ,  $m$  (positivo o negativo) quadrato perfetto, oppure  $m = \pm 5$ , allora  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ ;
- se  $m$  (positivo o negativo) NON è un quadrato perfetto e  $|m| \neq 5$ , allora  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{|m|}, i)$ .

Nel primo caso, il grado dell'estensione rimane quello di  $K$ , ossia  $[E : \mathbb{Q}] = 4$ , mentre, nel secondo caso,  $[E : \mathbb{Q}] = 2^3 = 8$ . ■

**Esercizio 4.4.** Siano  $f(x) = x^3 + 3x - 1$  e  $g(x) = x^2 - 2$ .

- Se  $\alpha$  è una radice complessa di  $f(x)$ , determinare il polinomio minimo di  $1/(\alpha + 2)$  su  $\mathbb{Q}$ .
- Determinare l'insieme dei numeri primi  $p$  tali che  $f(x)$  e  $g(x)$ , considerati a coefficienti in  $\mathbb{F}_p$ , hanno una radice comune.

*Svolgimento.* Si divide lo svolgimento nei due punti.

- Sia  $\alpha$  una radice complessa di  $f(x)$ . Si cerca il polinomio minimo di

$$\beta = \frac{1}{\alpha + 2} \implies \alpha\beta + 2\beta = 1 \implies \alpha = \frac{1}{\beta} - 2$$

Visto che  $f(\alpha) = 0$ , allora:

$$\left(\frac{1}{\beta} - 2\right)^3 + 3\left(\frac{1}{\beta} - 2\right) - 1 = 0$$

Espandendo e riordinando si ottiene un polinomio in  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta^3} - 8 - \frac{6}{\beta^2} + \frac{12}{\beta} + \frac{3}{\beta} - 6 - 15 &= 0 \implies \frac{1}{\beta^3} - \frac{6}{\beta^2} + \frac{15}{\beta} = 15 \\ \Rightarrow 15\beta^3 - 1 - 6\beta + 15\beta^2 &= 15\beta^3 - 15\beta^2 + 6\beta - 1 = 0\end{aligned}$$

In questo modo, si ricava il polinomio  $p(x) = 15x^3 - 15x^2 + 6x - 1$ , che è a coefficienti razionali, ha  $\beta$  come radice ed è di grado 3. Usando Eisenstein con  $p = 3$  su  $f(x)$ , si conclude che è irriducibile su  $\mathbb{Q}$ , quindi  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ . Infine, visto che  $\beta \in Q(\alpha)$  e, viceversa,  $\alpha \in Q(\beta)$ , si conclude che  $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$ , pertanto  $p(x)$  coincide proprio con il polinomio minimo di  $\beta$ .

- (b). Si cercano i primi  $p$  tali per cui  $\exists a \in \mathbb{F}_p$  con  $f(a) = g(a) = 0$ . Si nota che  $g(a) = 0 \implies a^2 = 2$  in  $\mathbb{F}_p$ . Passando alla condizione  $f(a) = 0$ , si ha  $a^3 + 3a - 1 = 0$ ; moltiplicando tutto per  $a$ , si ottiene  $a^4 + 3a^2 - 1 = 0$ . Sostituendo la condizione trovata prima, cioè  $a^2 = 2$ , si ottiene  $4 + 6 - a = 0$ , quindi  $a = 10$  in  $\mathbb{F}_p$ .

In questo modo, si ricava che  $a$  deve soddisfare due condizioni in  $\mathbb{F}_p$ :  $a \equiv 10 \pmod{p}$  e  $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$ , cioè

$$100 \equiv 2 \pmod{p} \implies p \mid 98 = 2 \cdot 7^2$$

Allora le possibilità sono  $p = 2$ , oppure  $p = 7$ . Si nota che, per  $p = 2$ ,  $g(x) = x^2$  e  $f(x) = x^3 + x + 1$ , che non hanno radici comuni. Perciò, ci si convince facilmente che l'unico  $p$  che soddisfa la richiesta è  $p = 7$ .

■

**Esercizio 4.5.** Sia  $f(x) = x^6 + 4x^3 + 2$ .

- (a). Detta  $\alpha$  una radice complessa di  $f(x)$ , determinare il polinomio minimo di  $1/\alpha^2$  su  $\mathbb{Q}$ .
- (b). Determinare il campo di spezzamento di  $f(x)$  su  $\mathbb{F}_7$ .

*Svolgimento.* Si divide lo svolgimento nei due punti.

- (a). Si nota preliminarmente che  $f(x)$  è irriducibile per il criterio di Eisenstein con  $p = 2$ . Inoltre,  $f(\alpha) = 0$ , quindi  $\alpha^6 + 2 = -4\alpha^3$ ; elevando al quadrato, si ottiene che:

$$\alpha^{12} + 4 + 4\alpha^6 = 16\alpha^6 \implies \alpha^{12} - 12\alpha^6 + 4 = 0$$

In questo modo, sostituendo  $y = \alpha^2$ , si trova  $y^6 - 12y^3 + 4 = 0$ , quindi  $y = \alpha^2$  soddisfa  $p(y) = 0$ , con  $p(x) = x^6 - 12x^3 + 4$ . Ora si deve mostrare che  $p(x)$  è irriducibile per far vedere che è il polinomio minimo per  $\alpha^2$ . Visto che  $\mathbb{Q}(\alpha^2) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ , allora  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^2)] \leq 2$ , quindi  $[\mathbb{Q}(\alpha^2) : \mathbb{Q}] = 3, 6$ ; si vuole escludere il caso in cui il grado sia 3. In questo caso, è facile convincersi che  $p(x)$  dovrebbe scomporsi in due fattori cubici; riducendolo modulo 2, poi, si vede che  $\overline{p(x)} = \overline{x^6}$ , pertanto i polinomi di grado 3,  $A(x)$  e  $B(x)$ , in cui si scomponga  $p(x)$  devono avere coefficienti pari, ad eccezione del primo. Svolgendo il prodotto, si vede anche che i termini noti dei due polinomi devono essere  $c = c' = \pm 2$ , quindi

$$A(x) = x^3 + ux^2 + vx \pm 2 \quad B(x) = x^3 + u'x^2 + v'x \pm 2$$

con  $u, v, u', v' \equiv 0 \pmod{2}$ . Svolgendo il prodotto, si ottengono le condizioni  $u' = -u$ ,  $v' = -u$  per i termini di grado 1 e 5, mentre si ottiene  $u^2 = v^2 = 0$  per quelli di grado 4 e 2, da cui l'assurdo. Pertanto,  $\mathbb{Q}(\alpha^2) = \mathbb{Q}(\alpha)$  e, visto che  $\mathbb{Q}(1/\alpha^2) = \mathbb{Q}(\alpha^2)$ , si conclude che il polinomio minimo di  $\beta = 1/\alpha^2$  ha grado 6. Riprendendo l'espressione  $\alpha^{12} - 12\alpha^6 + 4 = 0$  trovata prima e sostituendo  $\alpha^2 = 1/\beta$ , si trova:

$$\frac{1}{\beta^6} - \frac{12}{\beta^3} + 4 = 0 \implies 4\beta^6 - 12\beta^3 + 1 = 0 \implies \beta^6 - 3\beta^3 + \frac{1}{4} = 0$$

da cui  $P(x) = x^6 - 3x^3 + 1/4$  è il polinomio minimo di  $\beta$  perché soddisfa  $P(\beta) = 0$  e ha stesso grado dell'estensione  $\mathbb{Q}(\beta)$ .

- (b). Bisogna capire se  $f(x)$  è irriducibile in  $\mathbb{F}_7$ . Si osserva che, ponendo  $t = x^3$ , si ottiene  $t^2 + 4t + 2 = 0$ , con  $\Delta = 16 - 8 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ , che è un quadrato in  $\mathbb{F}_7$ , pertanto  $f(x)$  non è irriducibile. Si nota, poi, che  $-3 \equiv 4 \pmod{7}$  e  $-5 \equiv 2 \pmod{7}$ , per cui le radici di  $t^2 + 4t + 2 = 0$  sono  $t = 1, 2$ . Tale polinomio, quindi, si scomponete in

$$t^2 + 4t + 2 = (t - 1)(t - 2) \implies f(x) = x^6 + 4x^3 + 2 = (x^3 - 1)(x^3 - 2)$$

Si osserva, ora, che gli elementi di  $\mathbb{F}_7^\times$  soddisfano  $x^6 = 1$ ; tramite la mappa  $\varphi : \mathbb{F}_7^\times \rightarrow \mathbb{F}_7^\times$  tale che  $x \mapsto x^3$ , si ottiene che  $x^2 = 1$ . In questo modo, si possono capire quali sono i cubi di  $\mathbb{F}_7$ ; da tale relazione, si trova che questi sono  $x = \pm 1$ ,

cioè 1, 6. Questo significa che 1 è un cubo e, pertanto,  $x^3 - 1$  è riducibile, mentre  $x^3 - 2$  no. Le radici di  $x^3 = 1$  sono gli elementi di  $\mathbb{F}_7^\times$  che hanno ordine 3; visto che  $3 \mid 6$ , ci sono sicuramente elementi del genere e sono dati da 1, 2, 4, quindi

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x^3 - 2)$$

è la scomposizione in irriducibili di  $f(x)$ . Visto che le radici dei fattori di primo grado sono già in  $\mathbb{F}_7$ ,  $\text{Spl}_{\mathbb{F}_7} f(x) = \text{Spl}_{\mathbb{F}_7} x^3 - 2$ . Essendo  $x^3 - 2$  irriducibile di grado 3, allora, se  $\xi$  è una radice  $x^3 - 2$ , si ha  $\mathbb{F}_7(\xi) \cong \mathbb{F}_{7^3}$ . Questo permette di concludere che  $\text{Spl}_{\mathbb{F}_7} f(x) = \mathbb{F}_{7^3}$ .

■

**Esercizio 4.6.** Determinare il campo di spezzamento di  $x^6 - 4$  su  $\mathbb{Q}$  e su  $\mathbb{F}_{11}$ .

*Svolgimento.* Si inizia col determinarlo su  $\mathbb{Q}$ . Per farlo, è necessario capire se  $x^6 - 4$  è irriducibile; si nota, però, che  $x^6 - 4 = (x^3 - 2)(x^3 + 2)$ . Questi due fattori, poi, sono irriducibili per Eisenstein con  $p = 2$ , quindi il campo di spezzamento di  $x^6 - 4$  è determinato dai campi di spezzamento di questi due polinomi di grado 3 su  $\mathbb{Q}$ . Visto che sono irriducibili, la loro estensione avrà grado 3:

- per  $\text{Spl}_{\mathbb{Q}} x^3 - 2$ , si ha  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ , con  $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$  radice cubica dell'unità;
- per  $\text{Spl}_{\mathbb{Q}} x^3 + 2$ , si ha lo stesso campo di spezzamento  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ , visto che  $(-\sqrt[3]{2})^3 = -2$ .

Se ne conclude che il campo di spezzamento di  $x^6 - 4$  su  $\mathbb{Q}$  è dato da  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$  ed è un'estensione di grado 6 perché prodotto di un'estensione di grado 2,  $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ , e di un'estensione di grado 3,  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ .

Quanto al caso su  $\mathbb{F}_{11}$ , il procedimento è analogo: si cerca di capire se  $x^6 - 4$  ha qualche radice, o se è irriducibile. Si deve capire se  $\exists x \in \mathbb{F}_{11}^\times$  tale che  $x^6 = 4$ , sapendo che gli elementi di tale campo soddisfano  $x^{10} = 1$ . Pertanto  $x^6 = 4$  è soddisfatta se e solo se  $4^{10/\gcd(10,6)} = 1$  in  $\mathbb{F}_{11}$ ; visto che  $\gcd(10, 6) = 2$ , si verifica che  $4^5 = 1024 \equiv 1 \pmod{11}$ . Si nota che:

$$\begin{aligned} 4^2 &= 16 \equiv 5 \pmod{11} & 4^4 &\equiv 5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11} \\ 4^5 &\equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

Quindi  $x^6 - 4$  si decomponе in  $\mathbb{F}_{11}$ . Per trovare le radici di questo polinomio ci sono due vie: partendo dal fatto che ci sono due elementi che soddisfano  $x^6 - 4 = 0$  in  $\mathbb{F}_{11}$ ,

essendo  $\gcd(10, 6) = 2$ , si procede a trovarle manualmente e si usa che, se  $a$  è una radice, allora anche  $-a$  lo è, oppure si usa che 2 è un generatore di  $\mathbb{F}_{11}^\times$ , quindi

$$x^6 = 4 \iff (2^k)^6 = 2^2 \iff 6k \equiv 2 \pmod{10}$$

che si riduce, dividendo per 2, a  $3k \equiv 1 \pmod{5}$ . Usando che l'inverso di 3 modulo 5 è 2, si ha la congruenza  $k \equiv 2 \pmod{5}$ , che, modulo 10, si traduce in  $k = 2, 7$ . In questo modo, gli elementi che soddisfano  $x^6 - 4 = 0$  sono  $2^2 = 4$  e  $2^7 = 128 \equiv 7 \pmod{11}$ . Se ne conclude che  $x^6 - 4 = (x - 4)(x - 7)p(x)$ , dove la divisione per  $x - 2$  restituisce (usando che  $-4 \equiv 7 \pmod{11}$ ):

$$\begin{array}{c|ccccccc} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ & 4 & 5 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^6 - 4 = (x - 4)(x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 3x + 1)$$

Applicando nuovamente Ruffini, si ottiene:

$$\begin{array}{c|cccccc} 7 & 1 & 4 & 5 & 9 & 3 & 1 \\ & 7 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

$$x^6 - 4 = (x - 4)(x - 7)(x^4 + 5x^2 + 3)$$

Allora il campo di spezzamento su  $\mathbb{F}_{11}$  di  $x^6 - 4$  coincide con quello di  $x^4 + 5x^2 + 3$ . Per trovare il campo di spezzamento di questo polinomio, si prende  $t = x^2$ , per cui si ottiene  $t^2 + 5t + 3 = 0$ , da cui

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} \equiv \frac{6 \pm \sqrt{2}}{2} = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{F}_{11}(\sqrt{2}) \cong \mathbb{F}_{11^2}$$

Ne segue che il campo di spezzamento di  $x^6 - 4$  è proprio  $\mathbb{F}_{11^2}$ , in quanto, contenendo  $t_1$  e  $t_2$ , contiene anche le rispettive radici quadrate  $\pm\sqrt{t_1}$  e  $\pm\sqrt{t_2}$ . ■

**Esercizio 4.7.** Calcolare i gradi delle estensioni  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ . Poi, trovare i polinomi minimi di  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$  e di  $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - 1$  su  $\mathbb{Q}$ .

*Svolgimento.* Per calcolare  $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$ , si nota che una possibile base è data da  $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{3}\sqrt{5}\}$ . Questo significa che tale estensione ha grado 4. Si nota che quella

esposta è effettivamente una base perché  $\sqrt{3}$  e  $\sqrt{5}$  sono indipendenti. Per calcolare il grado della seconda estensione, si tiene a mente quanto appena visto; si farà vedere che  $\sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ . Per farlo, è sufficiente osservare che  $1/(\sqrt{3} - \sqrt{5}), (\sqrt{3} - \sqrt{5}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ , per cui:

$$\frac{3-5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

Ma allora

$$\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2} \quad \sqrt{5} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

quindi  $\sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ . Visto che  $\sqrt{3} - \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ , si conclude facilmente che  $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ , da cui  $[\mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$ .

Per trovare il polinomio minimo di  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ , si prende  $x = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ ; allora si nota che:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3 + 5 - 2\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{x^2 - 8}{2} \\ \Rightarrow 15 &= \frac{1}{4} [x^4 + 64 - 16x^2] \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

In questo modo, il candidato polinomio minimo di  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$  è proprio  $p(y) = y^4 - 16y^2 + 4$  perché è stato costruito in modo tale che  $p(x) = 0$ ,  $x = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ . Visto che l'estensione  $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})/\mathbb{Q}$  ha grado 4 e che  $p(y)$  è un polinomio di grado 4 a coefficienti razionali che ha  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$  come radice, allora è automaticamente il polinomio minimo.

Per  $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - 1$ , si procede in maniera analoga, ponendo  $\beta = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - 1 \Rightarrow \beta + 1 = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ ; in questo modo, si ha:

$$\begin{aligned} (\beta + 1)^2 &= \sqrt{3} - \sqrt{5} \Rightarrow (\beta + 1)^4 = 3 + 5 - 2\sqrt{15} \\ \Rightarrow \sqrt{15} &= \frac{8 - (\beta + 1)^4}{2} \Rightarrow 15 = \frac{1}{4} [64 + (\beta + 1)^8 - 16(\beta + 1)^4] \\ \Rightarrow (\beta + 1)^8 &- 16(\beta + 1)^4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Questo permette di ottenere un polinomio monico di grado 8 a coefficienti razionali e con  $\beta$  come radice; per concludere che è il polinomio minimo, è sufficiente mostrare che il grado dell'estensione è 8. Si osserva che, per  $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ , si ha  $\beta + 1 = \sqrt{\alpha}$ ,

quindi  $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ . Perciò

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}(\alpha)]$$

con  $[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 2$  perché ottenuta aggiungendo una radice quadrata. Si può mostrare che questa estensione ha grado esattamente 2; infatti, se  $\alpha$  fosse un quadrato, avrebbe tutti coniugati positivi, visto che  $\mathbb{Q}(\alpha)$  è un campo totalmente reale, però un possibile coniugato è  $-\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$ , quindi  $\alpha$  non può essere un quadrato. Allora  $[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}] = 8$  e, dunque, quello trovato è proprio il polinomio minimo di  $\beta$ . ■

**Esercizio 4.8.** Determinare il grado del campo di spezzamento di  $f(x) = x^4 - 2$  su  $\mathbb{Q}$ , su  $\mathbb{F}_3$  e su  $\mathbb{F}_{17}$ .

*Svolgimento.* Per  $\text{Spl}_{\mathbb{Q}} x^4 - 2$ , si nota che ha radici date da  $\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\zeta_4, \sqrt[4]{2}\zeta_4^2, \sqrt[4]{2}\zeta_4^3$ , con  $\zeta_4 = i$  radice quartica dell'unità. Evidentemente, il suo campo di spezzamento è dato da  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \zeta_4)$ , dove  $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$  e  $[\mathbb{Q}(\zeta_4) : \mathbb{Q}] = 2$ ; essendo queste estensioni indipendenti, il grado complessivo dell'estensione è 8.

Per  $\text{Spl}_{\mathbb{F}_3} x^4 - 2$ , si nota che tale polinomio è irriducibile:  $-2 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ,  $-1 \not\equiv 0 \pmod{3}$  e  $2^4 - 2 = 14 \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Inoltre,  $x^4 - 2$  non si scomponne neanche in fattori quadratici in  $\mathbb{F}_3$  perché, altrimenti, 2 dovrebbe essere un quadrato, ma  $2^2 = 1$  e  $1^2 = 1$ . Allora  $x^4 - 2$  è irriducibile di grado 4 su  $\mathbb{F}_3$ , il che vuol dire che si decompone completamente in  $\mathbb{F}_{3^4}$ .

Per  $\text{Spl}_{\mathbb{F}_{17}} x^4 - 2$ , infine, si usa il fatto che un elemento di  $\mathbb{F}_{17}^\times$  soddisfa  $x^{16} = 1$ , per cui vale  $x^4 = 2$  se e soltanto se è verificata la relazione  $2^4 \equiv 1 \pmod{17}$ , ma questa non è verificata perché  $2^4 = 16$ . Inoltre,  $x^4 - 2$  non si può scomporre in fattori quadratici; se così fosse, infatti, dovrebbe essere soddisfatta la relazione  $x^2 = 2 \iff 2^8 \equiv 1 \pmod{17}$ , ma  $2^8 = 4^4 = 256 \equiv 8 \pmod{17}$ . Quindi  $x^4 - 2$  è irriducibile di grado 4 anche in  $\mathbb{F}_{17}$ , per cui il suo campo di spezzamento sarà  $\mathbb{F}_{17^4}$ .

**Nota:** si può dimostrare che  $x^4 - a$  è riducibile in un certo campo  $K$  se e soltanto se  $a$  è una potenza quarta in tale campo, oppure è un quadrato. Questo permette di giustificare i passaggi nell'esercizio e la dimostrazione si basa sul proseguire per conto diretto, assumendo una generica decomposizione in fattori quadratici. ■

### §4.3 Esercizi su gruppi 2

**Esercizio 4.9.** Sia  $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  definito da  $\phi(1) = -1 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ .

- (a). Per ogni intero  $n$ , contare gli elementi di ordine  $n$  in  $G$ .
- (b). Dimostrare che  $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- (c). Calcolare  $G'$  e la classe di isomorfismo di  $G_{ab} := G/G'$ .

*Svolgimento.* Si divide lo svolgimento nei vari punti.

- (a). I possibili  $n$  sono  $1, 2, 4, 8, 16$ .

Per  $n = 1$ , si ha evidentemente l'identità  $(0, 0)$ .

Per  $n = 2$ , si osserva che:

$$(a, b)^2 = (0, 0) \iff (a + (-1)^b a, 2b) = (0, 0)$$

Conviene dividere i casi in cui  $b$  è pari o dispari. Se  $b$  pari (cioè  $b = 0, 2$ ), allora il quadrato è pari a  $(2a, 2b)$  e questo coincide con  $(0, 0)$  se e soltanto se  $a, b \in \{0, 2\}$ . Escludendo l'identità stessa, ci sono tre possibilità:  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$ . Se  $b$  è dispari, invece, il quadrato è pari a  $(0, 2b)$ ; questo risulterebbe pari a  $(0, 0)$  se  $b \equiv 0 \pmod{2}$ , ma questo è impossibile perché si è assunto  $b$  dispari.

Per  $n = 4$ , invece, si impone  $(a, b)^4 = (0, 0)$ , cioè:

$$(a + (-1)^b a, 2b)(a + (-1)^b a, 2b) = \begin{cases} (0, 4b) \equiv (0, 0) \pmod{4}, & b \text{ dispari} \\ (4a, 4b) \equiv (0, 0) \pmod{4}, & b \text{ pari} \end{cases}$$

Questo conteggio permette di concludere che tutti gli elementi di  $G$  che non sono di ordine 1 o 2 sono di ordine 4. Visto che l'identità e gli elementi di ordine 2 sono quattro in totale, si conclude che quelli di ordine 4 sono 12.

- (b). Per il lemma orbita-stabilizzatore,  $|Z(G)| \mid |G|$ , quindi le possibili cardinalità sono  $1, 2, 4, 8, 16$ .  $G$  è un  $p$ -gruppo, quindi 1 non è ammissibile; inoltre, 8 e 16 non sono possibili in quanto  $G$  risulterebbe abeliano, che è assurdo. Allora  $|Z(G)| \in \{2, 4\}$ . Tuttavia, neanche  $|Z(G)| = 2$  è possibile perché  $Z(G)$  contiene tutti gli elementi

di ordine 2; infatti, dato  $(a, b) \in G$  con  $a, b \equiv 0 \pmod{2}$ , si ha:

$$(c, d)(a, b) = (c + (-1)^d a, d + b)$$

$$(a, b)(c, d) = (a + (-1)^b c, b + d) = (a + c, b + d)$$

Questi coincidono per ogni elemento  $(c, d) \in G$  se e solo se  $a + c = c - a$ ; però si è assunto  $a \equiv 0 \pmod{2}$ , quindi verifica  $a \equiv -a \pmod{4}$  e, allora,  $(c, d)(a, b) = (a, b)(c, d)$ ,  $\forall (c, d) \in G$ . Se ne conclude che  $|Z(G)| = 4$ , dove tre elementi sono di ordine 2 e l'ultimo è l'identità. Essendo un gruppo di ordine 4 per forza abeliano, il teorema di struttura assicura che  $Z(G) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , oppure  $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; per quanto appena detto sugli ordini degli elementi di  $Z(G)$ , l'unica possibilità è proprio quella richiesta:  $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

(c). Per costruire  $G'$ , si nota che i quozienti

$$\frac{G}{Z(G)} \quad \frac{G}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{0\}}$$

sono abeliani (visto che il quoziente ha cardinalità 4), quindi

$$G' \subseteq Z(G) \cap (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{0\}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{0\}) = \{(0, 0), (1, 0)\}$$

Quindi  $|G'| = \{1, 2\}$ ; visto che  $G$  non è abeliano,  $|G'| = 2$  e, quindi,  $G' = \{(0, 0), (2, 0)\}$ , dato che  $Z(G)$  contiene gli elementi di  $G$  di ordine 2. In questo modo,  $G_{ab}$  ha cardinalità 8 ed è abeliano, quindi le classi di isomorfismo possibili, per il teorema di struttura, sono le seguenti:

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

Però  $G_{ab}$  ha elementi di ordine 4 e non ha elementi di ordine 8, quindi l'unica possibilità rimanente è  $G_{ab} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

■

**Esercizio 4.10.** Sia  $|G| = 3^2 \cdot 5 = 45$ .

- (a). Determinare i possibili valori di  $n_5$ .
- (b). Dimostrare che esiste almeno un sottogruppo normale non-banale di  $G$ .
- (c). Assumendo che un 5-Sylow non sia normale, dimostrare che lo è il 3-Sylow.

*Svolgimento.* Per i teoremi di Sylow, si ha:

$$\begin{aligned} n_3 &\equiv 1 \pmod{3} \quad n_3 \mid 5 \quad \Rightarrow \quad n_3 = 1 \\ n_5 &\equiv 1 \pmod{5} \quad n_5 \mid 3^2 \quad \Rightarrow \quad n_5 = 1 \end{aligned}$$

Questo fa concludere immediatamente entrambi gli altri punti: in  $G$ , si ha un singolo 3-Sylow e un singolo 5-Sylow e sono entrambi sempre normali. ■

**Esercizio 4.11.** Sia  $G = D_4$  il gruppo diedrale di ordine 8.

- (a). Stabilire i possibili ordini dell'immagine di un omomorfismo  $\varphi : G \rightarrow S_4$ .
- (b). Dimostrare che non esiste un omomorfismo iniettivo  $\varphi : G \rightarrow S_3$ .
- (c). Esibire un omomorfismo non-banale  $\varphi : G \rightarrow S_4$ .

*Svolgimento.* Un omomorfismo è univocamente definito in base a come agisce sui generatori. Visto che  $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = e, srs = r^{-1} \rangle$ ,  $\varphi$  è univocamente determinato da  $r \mapsto \varphi(r)$  e  $s \mapsto \varphi(s)$ , immagini che sono vincolate dal dover rispettare  $\varphi(s)\varphi(r)\varphi(s) = \varphi(r)^{-1}$ . Per quanto appena detto, si nota subito che  $\text{ord}(\varphi(r)) \mid \text{ord}(r) = 4$  e  $\text{ord}(\varphi(s)) \mid \text{ord}(r) = 2$ . Sulla base di questo, i possibili ordini dell'immagine di  $D_4$  sono 2, 4, 8, rispettivamente relativi a mappare  $r \mapsto \text{id}$ ,  $r \mapsto \tau$ , con  $\tau$  2-ciclo o doppio 2-ciclo, e  $r \mapsto \sigma$ , con  $\sigma$  4-ciclo.

Un omomorfismo iniettivo  $D_4 \rightarrow S_3$  non può esistere per questioni di ordine:  $S_3$  ha ordine 6, mentre  $D_4$  ha ordine 8.

Un omomorfismo non-banale si costruisce sulla linea del ragionamento fatto all'inizio. Quello più semplice possibile, però, è sicuramente relativo a  $r \mapsto \text{id}$  e  $s \mapsto (1\ 2)$ , per esempio; in questo modo, è anche facile vedere che la presentazione è conservata:  $(1\ 2)\text{id}(1\ 2) = \text{id} = \text{id}^{-1}$ . ■

**Esercizio 4.12.** Sia  $|G| = 3^3 \cdot 7 = 189$ .

- (a). Determinare i possibili valori di  $n_7$ .
- (b). Mostrare che esiste almeno un sottogruppo normale non-banale di  $G$ .

*Svolgimento.* Per i teoremi di Sylow, si ha:

$$\begin{aligned} n_3 &\equiv 1 \pmod{3} \quad n_3 \mid 7 \quad \Rightarrow \quad n_3 = \{1, 7\} \\ n_7 &\equiv 1 \pmod{7} \quad n_7 \mid 3^3 \quad \Rightarrow \quad n_7 = 1 \end{aligned}$$

Se ne conclude che  $G$  ha un unico 7-Sylow,  $P_7$ , il quale, essendo unico, risulta normale

in  $G$ . Questo permette di concludere che  $G$  ha sempre un sottogruppo normale.

Dato  $P_3$  il 3-Sylow di  $G$ , si può concludere, per il teorema di decomposizione semi-diretta, che  $G \cong P_7 \rtimes_{\phi} P_3$ ; infatti,  $P_3P_7 = G$  e  $P_3 \cap P_7 = \{e\}$ , visto che se  $x \in P_3 \cap P_7$ , allora  $\text{ord}(x) \mid 3^3$  e  $\text{ord}(x) \mid 7$ , da cui  $\text{ord}(x) = 1$  è l'unica possibilità. Tale prodotto semi-diretto è dato da  $\phi : P_3 \longrightarrow \text{Aut } P_7 \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Gli unici omomorfismi validi si caratterizzano osservando che  $\text{ord}(\phi(x)) \mid \text{ord}(x)$ , per  $x \in P_3$ , con  $|P_3| = 27$ ; questo permette di concludere che gli unici elementi ammissibili in  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  sono quelli di ordine 3, cioè 2 e 4, oltre che l'identità relativa all'omomorfismo banale. ■

#### §4.4 Esercizi su anelli 2

**Esercizio 4.13.** Siano  $I = (4, 3x + 1)$  e  $J = (3, x^2 + 1)$ , ideali dell'anello  $\mathbb{Z}[x]$ . Contare gli ideali massimali di  $\mathbb{Z}[x]/IJ$ .

*Svolgimento.* Si vuole utilizzare il teorema cinese del resto per scrivere  $\mathbb{Z}[x]/IJ \cong \mathbb{Z}[x]/I \times \mathbb{Z}[x]/J$ . Per farlo, si osserva che  $1 \in I + J$  perché  $4 \in I$  e  $3 \in J$ , quindi  $1 = 4 - 3 \in I + J$ , da cui  $I + J = \mathbb{Z}[x]$ . Questo assicura l'isomorfismo voluto. Ora si nota che

$$\mathbb{Z}[x]/(4, 3x + 1) \cong \mathbb{Z}_4[x]/(3x + 1)$$

dove  $(3x + 1)$  nell'espressione finale è l'ideale in  $\mathbb{Z}_4[x]$ ; per questo motivo, visto che 3 è un'unità in  $\mathbb{Z}_4$ , si ha che  $(3x + 1) = (x + 3) \subset \mathbb{Z}_4[x]$ . Ne segue che  $\mathbb{Z}[x]/(4, 3x + 1) \cong \mathbb{Z}_4[x]/(x + 3) \cong \mathbb{Z}_4$ . Per l'altro fattore, si ha:

$$\mathbb{Z}[x]/(3, x^2 + 1) \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{F}_9$$

perché  $x^2 + 1$  è irriducibile in  $\mathbb{F}_3$  e il campo risultante è quello con 9 elementi. Se ne conclude che  $\mathbb{Z}[x]/IJ \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{F}_9$ . Ora,  $\mathbb{F}_9$  ha, come unico ideale proprio, quello banale, mentre  $\mathbb{Z}_4$  ha solo  $(2)$  come ideale massimale. Questo significa che gli ideali massimali di  $\mathbb{Z}[x]/IJ$  sono due e sono dati da  $(2) \times \mathbb{F}_9$  e  $\mathbb{Z}_4 \times \{0\}$ . ■

# A | NOZIONI FONDAMENTALI

## §A.1 Applicazioni

**Proposizione A.1.** Sia  $f : X \rightarrow Y$ ; valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) & f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) & f(A \cap B) &\subseteq f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

Un diagramma è detto **commutativo** se e soltanto se ogni cammino con stessa partenza e stesso arrivo danno lo stesso risultato per composizione. Nel caso del diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ A & \xleftarrow{i} & B \end{array}$$

questo è commutativo se e solo se  $(h \circ f)(x) = (i \circ g)(x)$ .

## §A.2 Relazioni

Sia  $X$  un insieme e  $R \subseteq X \times X$ . Si dice che ad  $R$  è associata una **relazione**  $\sim_R$  (o più semplicemente  $\sim$  quando non vi è ambiguità) su  $X$  se  $x \sim_R y \iff (x, y) \in R$ .

Un esempio, sono le relazioni di equivalenza, cioè relazioni che soddisfano le proprietà *riflessiva* ( $x \sim x$ ), *simmetrica* ( $x \sim y \iff y \sim x$ ) e *transitiva* ( $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ ).

**Teorema A.1.** Se  $\sim$  è una relazione di equivalenza su  $X$ , allora la famiglia delle sue classi di equivalenza è una partizione di  $X$ . Viceversa, se  $\mathcal{P}$  è una partizione di  $X$ , allora induce, su  $X$ , una relazione di equivalenza data da

$$x \sim y \iff \exists C \in \mathcal{P} : x, y \in C$$

che ha, per classi, gli insiemi  $C$  della partizione  $\mathcal{P}$ .

**Definizione A.1.**  $f : X \rightarrow Y$  è *compatibile* con  $\sim$  su  $X$  se  $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$ .

Data  $X \xrightarrow{f} Y$  compatibile con  $\sim$  su  $X$  e  $\pi : X \longrightarrow X/\sim$  proiezione al quoziante, allora esiste un'unica applicazione  $f = \bar{f} \circ \pi$  che rende

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

commutativo.

Se  $\sim$  e  $\sim'$  sono due relazioni su  $X$ , con  $x \sim y \Rightarrow x \sim' y$ , allora la partizione  $\mathcal{P}$  indotta da  $\sim$  è più fine di  $\mathcal{P}'$ , cioè quella indotta da  $\sim'$ . Questo significa che per ogni classe  $C \in \mathcal{P}$ ,  $\exists C' \in \mathcal{P}'$  tale che  $C \subseteq C'$ ; in questo senso, la corrispondenza  $C \mapsto C'$  è un'applicazione suriettiva  $\epsilon$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ X/\sim & \xrightarrow{\epsilon} & X/\sim' \end{array}$$

**Definizione A.2 (Insieme di rappresentanti).** Dato  $X$  un insieme e  $\sim$  relazione di equivalenza su  $X$ , un insieme  $\mathcal{R} \subseteq X$  è un *insieme di rappresentanti* se

$$\pi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \subseteq X \longrightarrow X/\sim$$

è biettiva.

Questo vuol dire che, per ogni classe di equivalenza, si è scelto un singolo elemento di  $X$  ad essa associato tramite la proiezione al quoziante  $\pi$ .

## B | ESERCIZI SULLE AZIONI DI GRUPPO

**Esercizio B.1.** Sia  $G = S_n$  e  $X = \{1, \dots, n\}$ ; descrivere le orbite e gli stabilizzatori per l'azione naturale di  $S_n$  su  $X$ .

*Svolgimento.* L'azione naturale di  $S_n$  su un insieme di  $n$  elementi come  $X$  consiste nell'applicare ogni elemento di  $S_n$  a un elemento di  $X$  perché gli elementi di  $S_n$  sono già permutazioni. Cioè:

$$\begin{array}{ccc} \phi : & S_n & \longrightarrow S(X) = S_n \\ & \sigma & \longmapsto \quad \phi_\sigma \end{array} \quad \text{con} \quad \phi_\sigma(x) = \sigma(x)$$

Sia, dunque,  $x \in X$ . Le orbite e gli stabilizzatori sono dati da:

$$\begin{aligned} \text{Orb}(x) &= \{\sigma(x) \mid \sigma \in S_n\} \\ \text{Stab}(x) &= \{\sigma \in S_n \mid \sigma(x) = x\} \end{aligned}$$

Visto che  $S_n$  contiene tutte le permutazioni di  $n$  elementi,  $\text{Orb}(x) = X$ , quindi l'azione è *transitiva*. Per il lemma orbita-stabilizzatore,  $|S_n| = n! = n|\text{Stab}(x)|$ , cioè  $|\text{Stab}(x)| = (n-1)!$ . Visto che  $\text{Stab}(x) < S_n$  ed è il gruppo delle permutazioni che lasciano fisso  $x$ , si può concludere che è isomorfo a  $S_{n-1}$  ■

**Esercizio B.2.** Si considera l'azione  $S_n \curvearrowright X$ , con

$$X := \{(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid i \neq j\}$$

data da  $\sigma \cdot (i, j) = (\sigma(i), \sigma(j))$ . Dire:

- (a). se l'azione è ben definita;
- (b). quante orbite ha l'azione;
- (c). la cardinalità di ogni orbita.

*Svolgimento.* L'azione è ben definita perché  $\text{id} \in S_n$  è tale che  $(i, j) \mapsto (i, j)$  e  $\sigma \circ \tau(i, j) = (\sigma(\tau(i)), \sigma(\tau(j)))$ , quindi  $\phi(\sigma \circ \tau) = \phi(\sigma) \circ \phi(\tau)$ .

Dato  $(i, j) \in X$ :

$$\text{Orb}(i, j) = \{(\sigma(i), \sigma(j)) \mid \sigma \in S_n\}$$

Si vuole dimostrare che anche questa azione è transitiva, usando il fatto che  $i \neq j$ . Sia, allora,  $(m, n) \in X$ ; visto che  $i \neq j$  in ogni elemento di  $X$ , si può costruire una

permutazione  $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2$  tale che  $\tau_1 = (i, m)$  e  $\tau_2 = (j, n)$ . In questo modo, ogni elemento di  $X$  è raggiungibile tramite una permutazione agente su  $(i, j)$ , il che conclude che l'azione è transitiva ed esiste una sola orbita.

Questo vuol anche dire che  $|\text{Orb}(i, j)| = |X| = n^2 - n$ , dove il  $-n$  deriva dal fatto che gli elementi diagonali  $(i, i)$  sono esclusi dall'insieme.

Infine, per il lemma orbita-stabilizzatore, è possibile calcolare  $|\text{Stab}(i, j)|$ :

$$|\text{Stab}(i, j)| = |S_n| / |\text{Orb}(i, j)| = \frac{n!}{n(n-1)} = (n-2)!$$

In questo caso, quindi, le permutazioni nello stabilizzatore di  $(i, j)$  sono tutte quelle che lasciano fissi due elementi, rispettivamente  $i$  e  $j$ ; questo permette di concludere che  $\text{Stab}(i, j) \cong S_{n-2}$ . ■

**Esercizio B.3.** Sia  $G$  un gruppo finito e  $H \leq G$ .

- (a). Definire un'azione naturale di  $G$  sull'insieme dei sottogruppi coniugati di  $H$ .
- (b). Mostrare che la dimensione dell'orbita di  $H$  è  $[G : N_G(H)]$ .

*Svolgimento.* Si vuole studiare l'azione naturale di  $G \curvearrowright X$ , con

$$X := \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$$

Il modo più naturale in cui  $G$  può agire su questo insieme è tramite la seguente azione:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, K) &\longmapsto gKg^{-1} \end{aligned}$$

dove  $K = xHx^{-1}$ ,  $x \in G$ . L'azione è ben definita perché  $eKe = K$ , per  $e$  identità di  $G$ , e, dati  $g_1, g_2 \in G$ , si ha:

$$(g_1g_2) \cdot K = g_1g_2Kg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1 \cdot (g_2 \cdot K)$$

Ora si vuole studiare l'orbita di  $H \in X$ ; si nota che

$$\text{Orb}(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$$

Per studiare l'orbita, conviene passare per il lemma orbita-stabilizzatore: è facile determinare che  $\text{Stab}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1}\} = N_G(H)$ , cioè sono tutti gli elementi di  $G$  rispetto a cui  $H$  è normale. Ne segue che  $|\text{Orb}(H)| = |G|/|N_G(H)| = [G : N_G(H)]$ ,

proprio come richiesto. ■

**Esercizio B.4.** Sia  $G$  un gruppo finito.

- (a). Considerare l'azione di  $G$  su se stesso per coniugazione.
- (b). Dedurre la formula delle classi di coniugio.

*Svolgimento.* L'azione è data da  $G \times G \rightarrow G$  con  $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ . Anche in questo caso, si dimostra che l'azione è ben definita nello stesso modo delle altre. Per dedurre la formula delle classi, è sufficiente notare che  $X = G$ , per cui, se  $\mathcal{R}$  è l'insieme dei rappresentanti delle orbite:

$$|G| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\text{Orb}(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|} = \sum_{x \in \mathcal{R}} \frac{|G|}{|Z(x)|}$$

Tuttavia, si nota che ci sono delle orbite di lunghezza unitaria date dagli elementi di  $G$  che sono nel centro di  $G$ , cioè che commutano con qualunque elemento del gruppo e, chiaramente, sono nell'insieme  $\mathcal{R}$  perché non sono contenuti in altre orbite se non la propria. Allora, l'espressione di sopra si può scrivere in maniera più precisa come:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z(x)|}$$

che è la formula cercata. ■

**Esercizio B.5.** Si considera l'azione  $GL_n(\mathbb{R}) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$  data da  $A \cdot M = AMA^{-1}$ .

- (a). Mostrare che due matrici sono nella stessa orbita se e solo se sono simili.
- (b). Elencare gli invarianti dell'azione.

*Svolgimento.* Siano  $M_1, M_2 \in \text{Orb}(M)$ ; allora  $M_1 = BM_2B^{-1}$ , per qualche  $B \in GL_n(\mathbb{R})$ , che è equivalente a dire che le due matrici sono simili. Questo significa che l'azione di  $GL_n(\mathbb{R})$  sulle matrici quadrate non modifica nessuna caratteristica preservata dalla similitudine. ■

**Esercizio B.6.** Considerare l'azione  $GL(V) \curvearrowright X$ , con  $V$  spazio vettoriale finito-dimensionale e  $X$  insieme dei sottospazi di  $V$ .

- (a). Descrivere le orbite dell'azione.
- (b). Concludere che due sottospazi sono nella stessa orbita se e solo se hanno stessa dimensione.

*Svolgimento.* L'azione naturale di  $GL(V)$  su  $X$  è data da  $(M, W) \mapsto M(W)$ . Ne segue che, dato  $W \in X$ :

$$\text{Orb}(W) = \{M(W) \mid M \in GL(V)\}$$

cioè corrisponde con l'insieme dei sottospazi vettoriali di  $V$  raggiungibili tramite un'applicazione lineare a partire da  $W$ . Un'applicazione lineare di  $GL(V)$  è invertibile, quindi è un isomorfismo lineare; questo significa che due sottospazi nella stessa orbita hanno, necessariamente, uguale dimensione. ■

**Esercizio B.7.** Sia  $G$  un  $p$ -gruppo di ordine  $p^n$ .

- (a). Considerare l'azione per coniugio di  $G$  su se stesso.
- (b). Dimostrare che  $Z(G)$  è non-banale tramite tale azione.

*Svolgimento.* Usando la formula delle classi, ottenuta dall'azione per coniugio di  $G$  su se stesso, si ottiene la relazione

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{p^n}{|Z(x)|}$$

Ora, visto che  $|Z(G)| > 0$  perché  $e \in Z(G)$  e nell'assunzione in cui almeno un elemento di  $G$  non stia in  $Z(G)$  (caso altrimenti banale perché  $Z(G) = G$  soddisfa la tesi), si ha almeno un elemento nella somma che è una certa potenza di  $p$ , arrivando ad un'uguaglianza della forma:

$$|Z(G)| = p^n - p^s$$

con  $s \geq 1$ , per cui  $p \mid |Z(G)|$ . ■

**Esercizio B.8.** Sia  $G$  un gruppo finito e  $P < G$  un suo  $p$ -Sylow. Dedurre il teorema di Sylow sulla congruenza del numero di  $p$ -Sylow.

*Svolgimento.* Sia  $X := \{P < G \mid P \text{ } p\text{-Sylow di } G\}$  e  $P \curvearrowright X$  per coniugio; allora:

$$n_p = |X| = \sum_{P' \in \mathcal{R}} |\text{Orb}(P')|$$

Visto che  $P \in X$  e  $P \curvearrowright X$ , la sua orbita sarà unitaria:

$$n_p = 1 + \sum_{\substack{P' \in \mathcal{R} \\ P' \neq P}} |\text{Orb}(P')|$$

Però, per il lemma orbita-stabilizzatore

$$|P| = |\text{Orb}(P')||\text{Stab}(P')| = |\text{Orb}(P')||N_P(P')|$$

con  $P' \neq P$  e  $N_P(P') = P \cap N_G(P')$ ; questo significa che ogni orbita deve dividere  $p^n$  e, allo stesso tempo,  $\text{Stab}(P')$  non può essere banale se  $P \neq P'$ , quindi  $p \mid \text{Orb}(P')$ . Unendo tutto, si può concludere che  $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ , che è proprio il risultato cercato. ■