APPUNTI DI EDP

Manuel Deodato

Indice

1 Introduzione – Derivata e soluzioni deboli, spazi $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$ 2

2 Distribuzioni 4

2.1 Caratterizzazione 4

1 Introduzione – Derivata e soluzioni deboli, spazi $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$

Definizione 1.1 (Definizione di derivata debole)

Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$; allora si dice che esiste $\partial^\alpha f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *in senso debole* se:

$$\exists g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : \int_\Omega g\varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi \, dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.0.1}$$

Se questo è vero, allora $\partial^\alpha f = g$ e si dice che g è la **derivata debole** di ordine α di f.

Teorema 1.1 (Teorema di Riemann-Lebesgue)

Sia $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\int_\Omega g\varphi \, dx = 0, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; allora $g = 0$ quasi ovunque in Ω.

Si applica il concetto di derivata debole alle edp; sia $P(x, \partial)$ un operatore differenziale lineare di ordine $m \in \mathbb{N}$ del tipo:

$$P(x, \partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha, \ a_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega), \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ |\alpha| \leq m \tag{1.0.2}$$

Si prende $u \in C^m(\Omega)$ come la soluzione classica di $P(x, \partial)u = f, \ f \in C^0(\Omega)$; integrando per parti per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\partial^\alpha u) \right] dx = \int_\Omega \left[\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \right] u \, dx$$

da cui si definisce:

$$P^\top(x, \partial)\varphi := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \tag{1.0.3}$$

e si chiama **operatore trasposto** di $P(x, \partial)$. Si arriva alla seguente definizione.

Definizione 1.2 (Soluzione debole)

Siano $u, f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e sia $P(x, \partial)$ come definito sopra; si dice che $P(x, \partial)u = f$ è valida debolmente se:

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = \int_\Omega \left[P^\top(x, \partial)\varphi \right] u \, dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.0.4}$$

Il problema con la definizione 1.1 è che mentre il lato di destra è sempre verificato, quello di sinistra potrebbe perdere senso perché non è detto che una funzione $u \in L^1_{\text{loc}}$ sia derivabile; a questo proposito, ci si concentra sul lato di destra e, data $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, si considera la mappa:

$$g_\alpha : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}, \ g_\alpha(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(\partial^\alpha \varphi) \, dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.0.5}$$

Questo funzionale g_α è lineare e $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se ne può stimare la norma:

$$|g_\alpha(\varphi)| \leq \int_K |f| \, |\partial^\alpha \varphi| \, dx \leq \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \int_K |f| \, dx \tag{1.0.6}$$

dove viene fissato K compatto e tale che $K \subset \Omega$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$ così da avere l'integrale di f indipendente dal supporto di φ e, quindi, costante. Questo fa pensare di dotare $C^\infty(\Omega)$ di una topologia[1] τ si definisce $\mathcal{E}(\Omega) := (C^\infty(\Omega), \tau)$. Allora:

[1] L'obiettivo per C^∞ e poi per C_0^∞ è quello di definire delle topologie rispetto alle quali gli operatori differenziali con i quali si avrà a che fare risulteranno essere continui.

- una successione $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ converge in $\mathcal{E}(\Omega)$ a $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ se e soltanto se:

$$\forall K \subset \Omega \text{ compatto }, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ \lim_{j\to\infty} \sup_{x\in K} \left|\partial^\alpha(\varphi_j - \varphi)(x)\right| = 0 \tag{1.0.7}$$

- $\mathcal{E}(\Omega)$ è un localmente convesso, metrizzabile e completo spazio vettoriale topologico su $\mathbb{C}$.

Si vuole arrivare allo stesso risultato per $C_0^\infty(\Omega)$; si potrebbe pensare di usare la topologia indotta da $\mathcal{E}(\Omega$ in $C_0^\infty(\Omega)$, ma questa avrebbe il difetto che non assicura la compattezza di funzioni risultanti da serie di funzioni compatte.

La definizione di $\mathcal{D}(\Omega)$ si ottiene come segue: si prende $\mathcal{D}_K(\Omega)$ come lo spazio di funzioni $C^\infty(\Omega)$ a supporto in K con la topologia indotta da $\mathcal{E}(\Omega)$; si considera in $C_0^\infty(\Omega)$ la topologia indotta limite dagli spazi $\{\mathcal{D}_K(\Omega)\}$, $K \subset \Omega$ compatto e il risultante spazio vettoriale topologico è proprio $\mathcal{D}(\Omega)$. Presenta le seguenti caratteristiche:

- $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso e completo, su $\mathbb{C}$;
- una successione $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge in $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se e soltanto se sono verificate le due seguenti condizioni:
  - esiste $K \subset \Omega$ compatto tale che $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\operatorname{supp} \subseteq K$;
  - $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ si ha:
$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in K} \left|\partial^\alpha(\varphi_j - \varphi)(x)\right| = 0 \tag{1.0.8}$$

La topologia definita su $\mathcal{D}(\Omega)$ è talmente più raffinata di quella su $\mathcal{E}(\Omega)$ che se anche la funzione limite di una successione di funzioni lisce a supporto compatto appartiene a $\mathcal{D}(\Omega)$, può ancora non avere limite nel senso di $\mathcal{D}(\Omega)$.

2 Distribuzioni

2.1 Caratterizzazione

Riprendendo la mappa definita in 1.0.5, si dà la seguente definizione.

Definizione 2.1 (Definizione di distribuzione)

La mappa $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ è chiamata distribuzione su Ω se è lineare e continua.

Ogni funzionale lineare e continuo è, in generale, sequenzialmente continuo, ma non vale il contrario. Tuttavia, per un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$, continuità e continuità sequenziale si equivalgono, quindi: *sia* $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *lineare; allora* u *è una distribuzione se e soltanto se* $\forall \left\{\varphi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ *t.c.* $\varphi_j \to \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$, *vale* $\lim_{j\to\infty}\langle u, \varphi_j\rangle = \langle u, \varphi\rangle$.

Proposizione 2.1

Sia $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ lineare; allora u è una distribuzione se e soltanto se $\forall K \subset \Omega$ compatto, esiste $k \in \mathbb{N}_0$ e $C \in (0, \infty)$ tale che:

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le C \sup_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\le k}} |\partial^\alpha \varphi(x)|\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \subseteq K \tag{2.1.1}$$

Dimostrazione. Si dimostra ($\Leftarrow$), assumendo che $\forall K \subset \Omega$ compatto, esistano k e C che soddisfano la relazione riportata sopra. Per mostrare che u è una distribuzione, si prende $\varphi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$; allora esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ t.c. $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq K$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\partial^\alpha \varphi_j \to 0$ uniformemente in K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ per definizione di convergenza in $\mathcal{D}$.
Per l'assunzione di partenza, ci sono k, C per questo K che soddisfano

$$\left|\langle u, \varphi_j\rangle\right| \le C \sup_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\le k}} \left|\partial^\alpha \varphi_j(x)\right| \to 0 \tag{2.1.2}$$

□