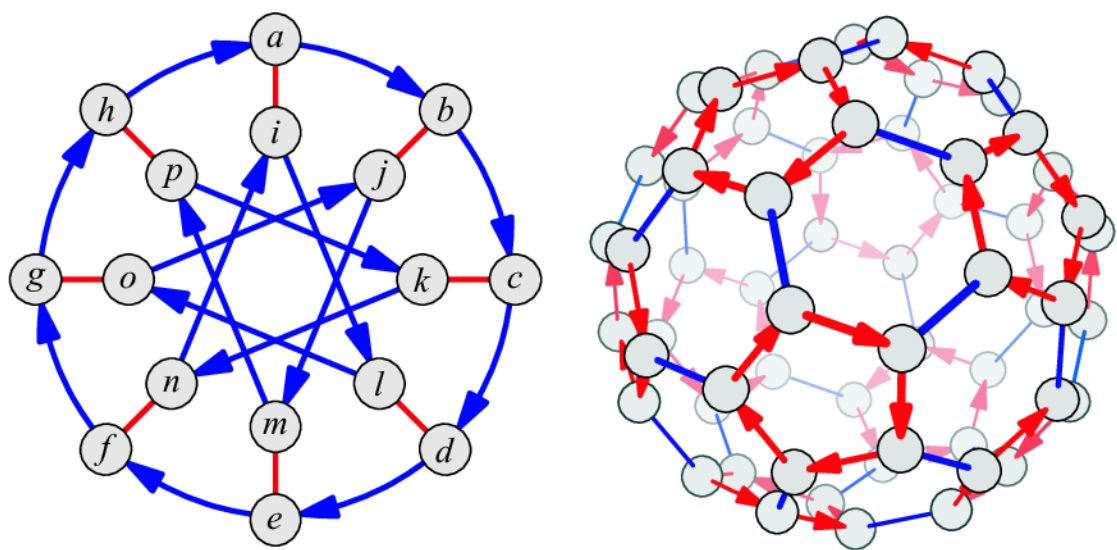


# APPUNTI DI ALGEBRA

MANUEL DEODATO



## INDICE

<b>1</b>	<b>Gli interi</b>	<b>3</b>
1.1	Proprietà di base	3
1.2	Massimo comune divisore	4
1.3	Fattorizzazione unica	7
1.4	Relazioni di equivalenza e congruenza	8
1.5	Identità di Bézout e equazioni diofantee	9
1.5.1	Identità di Bézout	9
1.5.2	Equazioni diofantee	11
1.6	Il teorema cinese del resto e classi di resto	12
1.6.1	Il teorema cinese del resto	12
<b>2</b>	<b>Teoria dei gruppi</b>	<b>14</b>
2.1	Introduzione	14
2.2	Mappe tra gruppi	17
2.3	Omomorfismi, isomorfismi e automorfismi	19
2.4	Classi laterali	24
2.5	Sottogruppi normali	28

# 1 GLI INTERI

## 1.1 Proprietà di base

Una proprietà dei numeri interi, che si prenderà come assiomatica, è quella del *buon ordinamento*:

*Ogni insieme non-vuoto di interi maggiori o uguali a 0, ha un elemento minimo.*

Da questa deriva la seguente.

### **Teorema 1.1 (Principio di induzione (prima forma))**

Sia  $A(n)$  un'affermazione valida per ogni intero  $n \geq 1$ . Se

(1).  $A(1)$  è vera,

(2).  $\forall n \geq 1$ , se  $A(n)$  è vera  $\implies A(n+1)$  è vera,

allora,  $\forall n \geq 1$ ,  $A(n)$  è vera.

*Dimostrazione.* Sia  $S$  l'insieme di interi per cui  $A(n)$  è falsa. Si mostra che  $S$  è l'insieme vuoto. Si assume per assurdo che  $S \neq \emptyset \implies \exists n_0 \in S$ , con  $n_0$  minimo (esistente per il buon ordinamento), e, per assunzione, deve essere  $n_0 \neq 1 \implies n_0 > 1$ . Questo vuol dire che  $n_0 - 1$  non è in  $S$  e, quindi,  $A(n_0 - 1)$  è vera.

Per la proprietà (2), però, deve essere vera anche  $A(n_0)$  perché  $n_0 = (n_0 - 1) + 1$ , il che è assurdo e, pertanto,  $S = \emptyset$ .  $\square$

**Osservazione 1.1.** Nella dimostrazione sopra, si sarebbe potuto sostituire 1 con 0 e far partire il principio di induzione da  $n = 0$  piuttosto che da  $n = 1$  e non sarebbe cambiato nulla.

Il principio di induzione può essere espresso in una forma alternativa, come segue.

### **Teorema 1.2 (Principio di induzione (seconda forma))**

Sia  $A(n)$  affermazione vera  $\forall n \geq 0$  e sia possibile mostrare che:

(1').  $A(0)$  è vera;

(2').  $\forall n > 0$ , se  $A(k)$  è vera  $\forall 0 \leq k < n$ , allora  $A(n)$  è vera.

Allora  $A(n)$  è vera  $\forall n \geq 0$ .

*Dimostrazione.* Sia ancora  $S$  l'insieme degli interi che non soddisfano  $A(n)$ . Ancora per assurdo, si prende  $S \neq \emptyset$ , quindi deve esistere, per il buon ordinamento, un  $n_0 \in S$  minimo.

Per punto (1'), deve valere  $n_0 \neq 0$  e, visto che  $n_0$  è minimo,  $\forall k$  intero tale che  $0 \leq k < n_0$ ,  $A(k)$  deve essere vera. Per il punto (2'), però, deve essere vera anche  $A(n_0)$ , arrivando nuovamente all'assurdo.  $\square$

Un altro importante risultato del buon ordinamento è l'*algoritmo di Euclide*.

### **Teorema 1.3 (Algoritmo di Euclide)**

Siano  $m, n$  interi, con  $m > 0$ ; allora esistono interi  $q, r$ , con  $0 \leq r < m$ , tali che

$$n = qm + r \quad (1.1.1)$$

Inoltre, gli interi  $q, r$  sono univocamente determinati da tali condizioni.

*Dimostrazione.* Visto che l'insieme degli interi  $q$  tali per cui  $qm \leq n$  è limitato superiormente per definizione, si può usare il buon ordinamento per affermare che esiste un elemento più grande<sup>a</sup> tale che

$$qm \leq n < (q+1)m = qm + m$$

ossia  $0 \leq n - qm < m$ . Sia  $r = n - qm$ , per cui vale  $0 \leq r < m$ . Questo dimostra l'esistenza di  $r, q$  come descritti.

Per l'unicità, si assume che valga contemporaneamente

$$\begin{cases} n = q_1m + r_1 & , 0 \leq r_1 < m \\ n = q_2m + r_2 & , 0 \leq r_2 < m \end{cases}$$

con  $r_1 \neq r_2$ . Sia, per esempio,  $r_2 > r_1$ ; allora, sottraendo le due, si ha  $(q_1 - q_2)m = r_2 - r_1$ . Però, si ha  $r_2 - r_1 > 0$  e  $r_2 - r_1 < m$ , il che non è possibile perché  $q_1 - q_2$  è un intero per cui  $(q_1 - q_2)m > 0$ , quindi si avrebbe  $r_2 - r_1 = (q_1 - q_2)m \geq m$  e, quindi  $r_2 - r_1 \geq m$ . Pertanto, deve essere  $r_1 = r_2$ , che fra l'altro implica  $q_1m = q_2m$ , per cui  $q_1 = q_2$ .  $\square$

<sup>a</sup>Basta applicare il buon ordinamento all'elemento più piccolo dell'insieme  $n - qm$ .

Da questo teorema, si definisce  $r$  come il *resto della divisione di  $n$  per  $m$* .

## **1.2 Massimo comune divisore**

Siano  $n, d$  due interi diversi da 0. Si dice che  $d$  *divide*  $n$  se esiste  $q$  intero tale che  $n = dq$ ; in questo caso, si scrive  $d|n$ . Se  $m, n$  sono interi non-nulli, per *divisore comune* di  $m$  e  $n$  si intende un intero  $d \neq 0$  tale che  $d|m$  e  $d|n$ . Allora si ha la seguente definizione.

### **Definizione 1.1 (Massimo comune divisore)**

Per massimo comune divisore di  $m, n$  interi non nulli, si intende un intero  $d > 0$ , divisore comune di  $m$  e  $n$ , e tale che  $\forall e$  intero positivo che divide  $m$  e  $n$ , si ha anche  $e|d$ .

Chiaramente, il massimo comune divisore è univocamente determinato e si mostrerà che esiste sempre. Per farlo, si dà prima la seguente definizione.

**Definizione 1.2 (Ideale)**

Sia  $J \subseteq \mathbb{Z}$  un sottoinsieme degli interi. Si dice che  $J$  è un *ideale* se:

- $0 \in J$ ;
- $m, n \in J \implies m + n \in J$
- se  $m \in J$  e  $n$  è un intero qualsiasi, allora  $mn \in J$ .

**Osservazione 1.2.** Di seguito, per ideale si intenderà sempre un sottoinsieme degli interi.

Siano  $m_1, \dots, m_r$  interi. Sia  $J$  l'insieme di tutti gli interi che si scrivono come

$$x_1 m_1 + \dots + x_r m_r$$

con  $x_1, \dots, x_r$  interi. Allora è automaticamente verificato che  $J$  è un ideale. Infatti

- se  $y_1, \dots, y_r$  sono interi, allora

$$\sum_{i=1}^r x_i m_i + \sum_{j=1}^r y_j m_j = (x_1 + y_1) m_1 + \dots + (x_r + y_r) m_r$$

che, quindi, appartiene a  $J$ ;

- se  $n$  è un intero, si ha

$$n \sum_{i=1}^r x_i m_i = n x_1 m_1 + \dots + n x_r m_r$$

che, quindi, appartiene a  $J$ ;

- si può scrivere 0 come  $0m_1 + \dots + 0m_r$ , quindi anche  $0 \in J$ .

In questo caso, si dice che  $J$  è **generato** dagli interi  $m_1, \dots, m_r$  e che questi sono i suoi **generatori**. L'insieme  $\{0\}$  è esso stesso un ideale, chiamato **ideale nullo**. Inoltre,  $\mathbb{Z}$  è detto **ideale unità**. Ora si può dimostrare il seguente.

**Teorema 1.4**

Sia  $J$  un ideale di  $\mathbb{Z}$ . Allora esiste un intero  $d$  che è un generatore di  $J$ . Inoltre, se  $J \neq \{0\}$ , allora  $d$  è il più piccolo intero positivo in  $J$ .

*Dimostrazione.* Sia  $J$  l'ideale nullo; allora 0 è un suo generatore. Sia, ora,  $J \neq \{0\}$ ; se  $n \in J$ , allora  $-n = (-1)n$  è anche in  $J$ , quindi  $J$  contiene degli interi positivi. Si vuole dimostrare che  $d$ , definito come il più piccolo intero positivo, è un generatore. Per farlo, sia  $n \in J$ , con  $n = dq + r$ ,  $0 \leq r < d$ ; allora  $r = n - dq \in J$  e, visto che vale  $r < d$ , segue che  $r = 0^a$ , quindi  $n = dq$  e, allora,  $d$  è un generatore.  $\square$

<sup>a</sup>Altrimenti  $d$  non sarebbe il più piccolo intero positivo.

**Teorema 1.5**

Siano  $m_1, m_2$  due interi positivi e sia  $d$  un generatore positivo per l'ideale generato da  $m_1, m_2$ . Allora  $d$  è il massimo comune divisore di  $m_1, m_2$ .

*Dimostrazione.* Per definizione,  $m_1, m_2 \in J^a$ , quindi esiste un intero  $q_1$  tale che  $m_1 = q_1 d$ , per cui  $d|m_1$ . Analogamente  $d|m_2$ . Sia, poi,  $e$  un intero non-nullo che divide sia  $m_1$  che  $m_2$  come  $m_1 = h_1 e$  e  $m_2 = h_2 e$ , con interi  $h_1, h_2$ . Visto che  $d$  è nell'ideale generato da  $m_1, m_2$ , esistono degli interi  $s_1, s_2$  tali che  $d = s_1 m_1 + s_2 m_2$ , quindi

$$d = s_1 h_1 e + s_2 h_2 e = (s_1 h_1 + s_2 h_2) e$$

Quindi  $e$  divide  $d$  e il teorema è dimostrato.  $\square$

<sup>a</sup>Questo è ovvio perché  $m_1 = 1m_1 + 0m_2$  e  $m_2 = 0m_1 + 1m_2$ .

**Osservazione 1.3.** La stessa esatta dimostrazione funziona per più di due interi, quindi se si considerassero  $m_1, \dots, m_r$  degli interi, con  $d$  generatore positivo dell'ideale da loro generato,  $d$  sarebbe anche il massimo comune divisore.

Questi due teoremi permettono di concludere i seguenti fatti.

- Ogni ideale  $J$  contiene un numero intero che lo genera interamente e questo coincide col più piccolo intero positivo in esso contenuto, quindi è l'unico generatore *singolo* dell'ideale.
- Ogni insieme di numeri interi ha un massimo comune divisore perché tale insieme genera un ideale, il quale, però, contiene un generatore (più piccolo numero intero in esso contenuto) che è un massimo comune divisore per l'insieme di interi iniziale.

**Definizione 1.3 (Interi coprimi)**

Siano  $m_1, \dots, m_r$  degli interi il cui massimo comune divisore è 1. Allora  $m_1, \dots, m_r$  si dicono *coprimi* e, per questi, esistono interi  $x_1, \dots, x_r$  tali che

$$x_1 m_1 + \dots + x_r m_r = 1$$

perché 1 appartiene all'ideale generato dagli  $m_i$ .

È immediato verificare per definizione di ideale che  $1 \in J \iff J \equiv \mathbb{Z}$ . Dalla definizione 1.3 segue direttamente che ogni insieme di interi coprimi genera  $\mathbb{Z}$ .

**Osservazione 1.4.** Si potrebbe pensare che se  $p$  è un numero primo, allora l'insieme  $\{p\}$  generi  $\mathbb{Z}$ , cioè  $p$  generi  $\mathbb{Z}$ . Questo è ovviamente falso sia perché, evidentemente,  $J_p$  non contiene 1, sia perché  $p$  non è coprimo con se stesso, avendo come altro divisore proprio  $p$  oltre che 1.

### 1.3 Fattorizzazione unica

#### Definizione 1.4 (Numero primo)

Si dice che  $p$  è un numero primo se è un intero e  $p \geq 2$  tale che, data una fattorizzazione  $p = mn$ , con interi positivi  $m, n$ , allora  $m = 1$  o  $n = 1$ .

**Osservazione 1.5.** Il fatto che  $p = mn$  con  $m = 1$ , o  $n = 1$  implica  $p$  numero primo significa che  $p$  è diviso unicamente o da 1 o, da se stesso.

Ora si mostra che ogni numero intero ammette un'unica scomposizione in numeri primi. Per dimostrare l'unicità di tale scomposizione, si introduce il seguente lemma.

#### Lemma 1.1

Sia  $p$  un numero primo e siano  $m, n$  interi non-nulli e tali che  $p$  divide  $mn$ . Allora o  $p|m$  o  $p|n$ .

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità, si assume che  $p$  non divida  $m$ . Allora, il massimo comune divisore di  $p$  e  $m$  deve essere 1, pertanto esistono interi  $a, b$  tali per cui  $1 = ap + bm$ .

Ora, moltiplicando ambo i membri per  $n$ , si ha  $n = nap + bmn$ , ma  $mn = pc$  per qualche intero  $c$  (essendo in assunzione  $mn$  divisibile per  $p$ ), quindi

$$n = nap + bpc = (na + bc)p$$

il che implica che  $p$  divide  $n$ . □

Per evidenziare l'utilità del lemma nel seguente teorema, si nota che se  $p$  divide un prodotto di numeri primi  $q_1 \dots q_s$ , si hanno due possibilità: o  $p$  divide  $q_1$ , o divide  $q_2 \dots q_s$ ; se divide  $q_1$ , allora  $p \equiv q_1$ , altrimenti si trova  $p \equiv q_i$  procedendo induttivamente. Il caso interessante è quando si ha un'uguaglianza tra prodotti di numeri primi

$$p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s$$

dove ogni  $p_i$  divide il prodotto<sup>1</sup>. Rinumerandoli, si può assumere senza perdita di generalità che  $p_1 = q_1$  e, induttivamente, che  $p_i = q_i$  e  $r = s$ , essendo due scomposizioni in un numeri primi.

#### Teorema 1.6

Ogni intero positivo  $n \geq 2$  ammette una fattorizzazione come prodotto di numeri primi (non necessariamente distinti)  $n = p_1 \dots p_r$  e tale fattorizzazione è unica.

*Dimostrazione.* Si assume per assurdo che esista almeno un intero  $\geq 2$  che non possa essere espresso come prodotto di numeri primi. Sia  $m$  il più piccolo di

<sup>1</sup>Per vederlo, è sufficiente prendere  $c = p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$ , quindi si ha  $cp_i = q_1 \dots q_s$ , che è la definizione di  $p_i | q_1 \dots q_s$ .

questi.

Per costruzione,  $m$  non può essere primo, quindi  $m = de$ , con  $d, e > 1$ . Visto che  $d$  ed  $e$  sono minori di  $m$  e visto che  $m$  è scelto per essere il più piccolo fra gli interi non fattorizzabili come numeri primi, allora sia  $d$  che  $e$  ammettono scomposizione in prodotto di numeri primi:

$$\begin{aligned} d &= p_1 \dots p_r \\ e &= p'_1 \dots p'_s \end{aligned} \implies m = p_1 \dots p_r p'_1 \dots p'_s$$

da cui l'assurdo.

Per mostrare l'unicità, si usa il lemma 1.1. Come conseguenza, diretta del lemma, se esistessero due scomposizioni in primi  $p_1 \dots p_r$  e  $p'_1 \dots p'_s$ , varrebbe  $p_1 \dots p_r = p'_1 \dots p'_s \implies p_i = p'_i$  e  $r = s$ , da cui l'unicità  $\square$

## 1.4 Relazioni di equivalenza e congruenza

### Definizione 1.5 (Relazione di equivalenza)

Sia  $S$  un insieme. Una relazione di equivalenza su  $S$  è una relazione indicata con  $x \sim y$ ,  $x, y \in S$ , tale che:

ER 1.  $\forall x \in S, x \sim x$ ;

ER 2. se  $x \sim y$  e  $y \sim z$ , allora  $x \sim z$ ;

ER 3. se  $x \sim y$ , allora  $y \sim x$ .

Se su  $S$  è definita una relazione di equivalenza  $\sim$ , le classi di equivalenza sono insiemi  $C_x := \{y \in S : y \sim x\}$  partizionano  $S$  in insiemi disgiunti. Inoltre, dati due elementi  $r, s \in S$ , si ha  $C_r \equiv C_s$ , oppure  $C_r, C_s$  non hanno elementi in comune. Si sceglie un elemento che identifica la classe di equivalenza, ad esempio  $x$  per  $C_x$ , e tale elemento si chiama rappresentante della classe di equivalenza. Un esempio di relazione di equivalenza è la congruenza.

### Definizione 1.6 (Congruenza)

Sia  $n$  un intero positivo e siano  $x, y$  due interi. Si dice che  $x$  è congruente  $y$  modulo  $n$  se  $\exists m : x - y = mn$ . In tal caso, si scriverà  $x \equiv y \pmod{n}$ .

La congruenza di  $x, y$  come  $x - y = mn$  implica automaticamente che  $x - y$  appartiene all'ideale generato da  $n$ ; inoltre, se  $n \neq 0$ , allora  $x - y$  è divisibile per  $n$ .

Oltre alle proprietà delle relazioni di equivalenza, la congruenza ne soddisfa anche altre due:

- se  $x \equiv y \pmod{n}$  e  $z$  è un intero, allora  $xz \equiv yz \pmod{n}$ ;



- se  $x \equiv y \pmod{n}$  e  $x' \equiv y' \pmod{n}$ , allora  $xx' \equiv yy' \pmod{n}$ <sup>1</sup> e  $x + x' \equiv y + y' \pmod{n}$ .

Dalla definizione di congruenza, si definiscono gli interi **pari** come quelli che sono congruenti a 0 (mod 2) (quindi  $n = 2m$ ) e quelli **dispari** come gli interi che non sono pari, quindi della forma  $2m + 1$ , per qualche intero  $m$ .

## 1.5 Identità di Bézout e equazioni diofantee

### 1.5.1 Identità di Bézout

L'identità di Bézout non è altro che quanto espresso in teorema 1.5. Di seguito lo si enuncia senza ricorrere a tale trattazione.

#### Teorema 1.7 (Identità di Bézout)

Dati  $a, b \in \mathbb{Z}$  non entrambi nulli, esistono altri due interi  $m, n$  tali che:

$$\gcd(a, b) = am + bn$$

*Dimostrazione.* Si considera l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari positive di  $a, b$ , dato da  $\text{CL}^+(a, b) := \{ar + bs : r, s \in \mathbb{Z}, ar + bs > 0\}$ . Questo è non-vuoto perché, assumendo senza perdita di generalità  $a \neq 0$ , esistono, per  $s = 0$ , degli  $r \in \mathbb{Z}$  tali che  $ra > 0$ .

Visto che  $\text{CL}^+(a, b) \subseteq \mathbb{N}$ , per il principio del buon ordinamento, questo ammette un minimo  $d$ ; in quanto tale  $\exists m, n \in \mathbb{Z} : d = am + bn$ . Infine, si motra che  $d = \gcd(a, b)$ , cioè si mostrano i seguenti punti.

- Si ha  $d|a$  e  $d|b$ .

Dividendo  $a$  per  $d$ , si ha  $a = qd + r$ , con  $0 \leq r < d$ , quindi

$$aa = q(am + bn) + r$$

da cui

$$r = (-qm + 1)a + (-qn)b$$

In questo modo,  $r$  è combinazione lineare di  $a, b$  ed è minore di  $d$ , ma questo è assurdo perché  $d$  era minimo per assunzione, quindi deve essere  $r = 0$ . Allo stesso modo si mostra  $d|b$ .

- Se  $c|a$  e  $c|b \implies c \leq d$ .

Questo è vero perché se  $c|a$ ,  $c|b$ , allora (in particolare)  $c|(am + bn)$ , cioè  $c|d \implies c \leq d$ .

<sup>1</sup>Per dimostrare questa, basta notare che  $xx' - yy' = xx' + x'y - x'y - yy' = x'(x - y) + y(x' - y')$ .

□

**Osservazione 1.6.** Il teorema afferma l'esistenza di una possibile coppia  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  che soddisfa  $\gcd(a, b) = am + bn$ , ma non ne specifica l'unicità; di fatto, si vedrà che di coppie simili ce ne sono infinite.

### Corollario 1.1

Dati  $a, b \in \mathbb{Z}$  non entrambi nulli e sia  $c \in \mathbb{Z} : c|a$  e  $c|b$ ; allora  $c | \gcd(a, b)$ .

Complessivamente, esattamente come riportato nel teorema 1.5, si è dimostrato che il massimo comune divisore di due interi  $a, b$  è la più piccola combinazione lineare positiva ottenibile dai due.

### Corollario 1.2

Dati  $a, b$  non entrambi nulli e  $\gcd(a, b)$  il loro massimo comune divisore, allora gli interi

$$a' = \frac{a}{\gcd(a, b)} \quad b' = \frac{b}{\gcd(a, b)}$$

sono coprimi.

*Dimostrazione.* Si può dimostrare in due modi diversi. Nel primo, si assume per assurdo che esista un divisore comune  $d > 1$  di  $a', b'$ ; se così fosse, però,  $d \cdot \gcd(a, b)$  dividerebbe sia  $a$  che  $b$  e sarebbe più grande di  $\gcd(a, b)$  stesso, il che è assurdo. Il secondo fa uso dell'identità di Bézout per cui  $\gcd(a, b) = am + bn$ ; dividendo per  $\gcd(a, b)$ , si ha:

$$1 = a'm + b'n$$

per cui 1 è il più piccolo intero positivo ottenibile come combinazione lineare positiva di  $a', b'$ , quindi i due sono coprimi. □

### Teorema 1.8

Siano  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ; se  $a|bc$  e  $\gcd(a, b) = 1$ , allora  $a|c$ .

*Dimostrazione.* Per Bézout, visto che  $\gcd(a, b) = 1$ , si ha  $1 = an + bm$  per una coppia di numeri  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Moltiplicando ambo i membri per  $c$ , ne segue che:

$$c = acn + bcm$$

quindi  $a|c$  perché, ovviamente,  $a|acn$ , mentre  $a|bcm$  perché, per ipotesi,  $a|bc$ , quindi  $a|(acn + bcm)$ , cioè  $a|c$ . □

Il teorema appena dimostrato è alla base del fatto che la fattorizzazione di interi in numeri primi è unica.

### 1.5.2 Equazioni diofantee

Dati  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , si dice **equazione diofantea** un'equazione del tipo

$$ax + by = c \quad (1.5.1)$$

La sua soluzione è una coppia di interi  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  che la soddisfa.

**Osservazione 1.7.** L'equazione diofantea con  $a = b = 0$  ha soluzione  $\iff c = 0$  e ne ammette infinite, consistenti in tutte le possibili coppie  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , perché ogni coppia soddisfa  $0x + 0y = c$ .

Per il caso generale di  $a, b$  non entrambi nulli, si ha il seguente.

#### Teorema 1.9

L'equazione  $ax + by = c$ , con  $a, b$  non entrambi nulli, ha soluzione  $\iff \gcd(a, b) | c$ .

*Dimostrazione.* Per l'identità di Bézout, si sa che vi è soluzione all'equazione

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

L'equazione da risolvere è diversa: al posto di  $\gcd(a, b)$  c'è  $c$ ; allora la dimostrazione si basa sul capire se  $\gcd(a, b)$  divide o meno  $c$ .

Nel caso in cui  $\gcd(a, b) | c$  (per cui si ha  $c = k \cdot \gcd(a, b)$  per qualche intero  $k$ ), allora l'equazione diofantea ammette soluzione. Infatti, dopo aver trovato  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  che risolve  $am + bn = \gcd(a, b)$ , si ha che  $(mk, nk) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  risolve l'equazione diofantea perché

$$k \cdot (am + bn) = akm + bkn = k \cdot \gcd(a, b) = c$$

Viceversa, se  $\gcd(a, b)$  non divide  $c$ , allora non vi è soluzione. Se, per assurdo, vi fosse soluzione, sia questa  $(\bar{x}, \bar{y})$ , allora  $a\bar{x} + b\bar{y} = c$  implica che  $\gcd(a, b) | c$  perché  $\gcd(a, b)$  divide il membro di sinistra (essendo un divisore sia di  $a$  che di  $b$ ). Questo, però, è assurdo perché si era nell'ipotesi in cui  $\gcd(a, b) \nmid c$ .  $\square$

Si considera il caso in cui l'equazione  $ax + by = c$  ha soluzione; si vuole capire se la soluzione è unica, o se ve ne sono di più. Si considera, a tal proposito, l'**omogenea associata**  $ax + by = 0$ .

**Osservazione 1.8.** La comodità nel lavorare con l'omogenea associata sta nel fatto che se  $(\bar{x}, \bar{y})$  risolve  $ax + by = c$  e  $(\gamma, \delta)$  risolve l'omogenea, allora  $(\bar{x} + \gamma, \bar{y} + \delta)$  è ancora soluzione di  $ax + by = c$ .

L'obiettivo, ora, è di trovare il numero delle soluzioni per l'omogenea associata. Si nota

che  $ax + by = 0 \Rightarrow axa = -by$ ; si risolve

$$\frac{a}{\gcd(a, b)}x = -\frac{b}{\gcd(a, b)}y$$

Sia  $(\gamma, \delta)$  una soluzione di questa; visto che  $a/\gcd(a, b)$  e  $b/\gcd(a, b)$  sono coprimi<sup>1</sup>, il teorema 1.8 afferma che  $a/\gcd(a, b)$  divide  $\delta$ , quindi  $\delta$  è della forma  $\frac{a}{\gcd(a, b)}t$  e  $\gamma$ , analogamente, è della forma  $-\frac{b}{\gcd(a, b)}t$ .

Al contrario, si nota facilmente che una qualunque coppia della forma  $\left(-\frac{b}{\gcd(a, b)}t, \frac{a}{\gcd(a, b)}t\right)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  è una soluzione dell'omogenea associata. Questo significa che le soluzioni dell'omogenea associata sono tutte di questa forma, pertanto sono infinite.

Da questo discorso, si può concludere che anche le soluzioni dell'equazione diofantea iniziale  $ax + by = c$  sono infinite. Il teorema di seguito permette di concludere, ulteriormente, che *tutte* le soluzioni di  $ax + by = c$  sono esprimibili tramite quelle dell'omogenea, quindi equazione originale e omogenea hanno lo stesso numero di soluzioni.

#### **Teorema 1.10**

Se l'equazione  $ax + by = c$  ammette soluzione, allora ne ammette infinite. Data  $(\bar{x}, \bar{y})$  una sua soluzione, l'insieme  $\mathcal{S}$  di tutte le soluzioni di  $ax + by = c$  è ottenibile come

$$\mathcal{S} = \{(\bar{x} + \gamma, \bar{y} + \delta) : (\gamma, \delta) \text{ soluzione dell'omogenea associata}\}$$

*Dimostrazione.* Per quanto detto sopra, si conclude che

$$\{(\bar{x} + \gamma, \bar{y} + \delta) : (\gamma, \delta) \text{ soluzione dell'omogenea associata}\} \subseteq \mathcal{S}$$

Si deve mostrare l'inclusione inversa. Questo segue direttamente dal fatto che, se  $(\alpha, \beta)$  è soluzione di  $ax + by = c$ , allora  $(\alpha - \bar{x}, \beta - \bar{y})$  è soluzione dell'omogenea associata. □

## **1.6 Il teorema cinese del resto e classi di resto**

### **1.6.1 Il teorema cinese del resto**

Stabilisce una condizione per risolvere sistemi di congruenze. Si vuole risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m_1} \\ x \equiv b \pmod{m_2} \end{cases} \quad (1.6.1)$$

---

<sup>1</sup>Vedi corollario 1.2.

La soluzione della prima è data  $x = a + km_1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; inserendolo nella seconda (considerando  $k$  come variabile), si ottiene  $a + km_1 \equiv b \pmod{m_2}$ , da cui

$$m_1 k \equiv b - a \pmod{m_2} \implies km_1 - k'm_2 = b - a$$

che si sa avere soluzione (per th. 1.9) se e soltanto se  $\gcd(m_1, m_2) \mid b - a$ .

Si cerca di capire come trovare tutte le soluzioni una volta concluso che tale sistema ne ammette. A tale proposito, si considera una soluzione particolare  $k_0$  di  $km_1 \equiv b - a \pmod{m_2}$ ; quindi  $x_0 = a + k_0 m_1$  risolve il sistema di partenza in eq. 1.6.1:

$$\begin{cases} x_0 \equiv a \pmod{m_1} \\ x_0 \equiv b \pmod{m_2} \end{cases}$$

Sia  $x_1$  un'altra soluzione di tale sistema; prendendo la differenza, si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 \equiv 0 \pmod{m_1} \\ x_0 - x_1 \equiv 0 \pmod{m_2} \end{cases}$$

Quindi la differenza tra le soluzioni è sia multiplo di  $m_1$  che di  $m_2$ . Il più piccolo intero che soddisfa questa condizione è chiamato *minimo comune multiplo* di  $m_1$  e  $m_2$  e si indica con  $\text{lcm}(m_1, m_2)$ . Tutto questo si riassume nel seguente teorema.

**Teorema 1.11 (Teorema cinese del resto)**

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m_1} \\ x \equiv b \pmod{m_2} \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzione  $\iff \gcd(m_1, m_2) \mid b - a$ ; in questo caso, data  $x_0$  una soluzione, tutte le altre soluzioni del sistema sono della forma

$$x_0 + s \cdot \text{lcm}(m_1, m_2), \quad s \in \mathbb{Z}$$

**Osservazione 1.9.** Equivalentemente, si può scrivere che tutte le soluzioni del sistema sono le  $x$  tali che

$$x \equiv x_0 \pmod{\text{lcm}(m_1, m_2)} \tag{1.6.2}$$

Si nota, infine, che esiste un'unica soluzione  $x$  tale che  $0 \leq x < \text{lcm}(m_1, m_2)$ .

## 2 TEORIA DEI GRUPPI

### 2.1 Introduzione

#### Definizione 2.1 (Gruppo)

Un *gruppo*  $G$  è un insieme su cui è definita una *legge di composizione*  $*$  :  $G \rightarrow G$  che soddisfa le seguenti condizioni per gli elementi di  $G$ :

GR 1.  $(x * y) * z = z * (y * z)$  (*associatività*);

GR 2.  $\exists e \in G : x * e = e * x = x$  (*elemento neutro*);

GR 3.  $\forall x \in G, \exists y \in G$  tale che  $x * y = y * x = e$  (*elemento inverso*).

Quando  $*$  è la moltiplicazione,  $G$  si dice **gruppo moltiplicativo**; quando  $*$  è l'addizione,  $G$  si dice **gruppo additivo**.

#### Definizione 2.2 (Gruppo commutativo)

Un insieme  $G$  è detto *gruppo commutativo* se è un gruppo e se soddisfa ulteriormente

$$x * y = y * x, \forall x, y \in G$$

L'elemento neutro di ciascun gruppo è unico.

*Dimostrazione.* Sia  $e'$  un altro elemento neutro; si nota che:  $e = ee' = e'$ . □

L'elemento inverso di ciascun elemento di un gruppo  $G$  è unico.

*Dimostrazione.* Siano  $y, y'$  gli elementi inversi di  $x$ ; allora:  $e = xy \implies y'e = y'xy \implies y' = y$ . □

Questo elemento inverso si indica con  $x^{-1}$ ; per gruppo additivo, si indicherà con  $-x$ .

**Esempio 2.1.** I numeri reali  $\mathbb{R}$  e i numeri complessi  $\mathbb{C}$  sono entrambi gruppi additivi. I numeri reali diversi da 0,  $\mathbb{R}^*$ , e i numeri complessi diversi da 0,  $\mathbb{C}^*$ , sono gruppi moltiplicativi.

**Esempio 2.2.** L'insieme dei numeri complessi di modulo 1,  $\mathcal{J} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , è un gruppo moltiplicativo.

#### Definizione 2.3 (Prodotto diretto)

Siano  $G_1, \dots, G_n$  dei gruppi; si definisce *prodotto diretto* l'insieme

$$G_P = \prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

e contiene tutte le  $n$ -uple  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in G_i$ .

Prendendo un prodotto diretto di gruppi ed equipaggiandolo con il prodotto componente per componente, dove l'elemento unità è  $(e_1, \dots, e_n)$ , con  $e_i$  unità di  $G_i$ , si ottiene un gruppo moltiplicativo.

#### Definizione 2.4 (Gruppo finito)

Un gruppo  $G$  si dice *finito* se ha un numero limitato di elementi; si chiama **ordine** il numero di elementi di tale gruppo e si indica con  $|G|$ .

#### Definizione 2.5 (Sottogruppo)

Sia  $G$  un gruppo e  $H \subset G$  un sottoinsieme di  $G$ . Si dice che  $H$  è un sottogruppo di  $G$  se:

- $e \in H$ ;
- $\forall x, y \in H, x * y \in H$ ;
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$ .

#### Definizione 2.6 (Generazione di un sottogruppo)

Sia  $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset G$  un sottoinsieme di un gruppo  $G$ ; l'insieme  $H := \{x \in G : x = x_1 * \dots * x_n\} \cup \{x^{-1} \in G : x \in S\} \cup \{e \in G\}$  è un sottogruppo di  $G$  ed è detto *generato* da  $S$ , dove gli elementi di  $S$  sono detti i *generatori* di  $H$ . In questo caso, si scriverà che  $H = \langle S \rangle \equiv \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

**Esempio 2.3.** Si nota che  $\{1\}$  è un generatore per il gruppo additivo degli interi, visto che ogni  $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  si può scrivere come  $1 + 1 + \dots + 1$ , o  $-1 - 1 - \dots - 1$ , mentre l'elemento neutro ne fa parte per definizione.

Ora si definisce una notazione per indicare una ripetizione dell'operazione di composizione con lo stesso elemento. In generale, si scriverà:

$$x^n \equiv \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ volte}} \quad (2.1.1)$$

Se  $n = 0$ , si definisce  $x^n = e$ ; invece, se  $n = -m$ , si ha la seguente definizione:

$$x^{-m} = (x^{-1})^m$$

Allora si possono verificare le seguenti:

- $x^{n+m} = x^n x^m$ ;
- $x^{-m} x^n = x^{n-m}$ ;
- $(x^n)^m = x^{nm}$ .

Queste sono direttamente valide per la moltiplicazione, mentre per l'addizione si ha un qualcosa di analogo. Per cominciare  $x^n \equiv nx$  nel caso dell'addizione, per definizione.

Conseguentemente, le regole soddisfatte sono le seguenti:

$$(m+n)x = mx + nx ; (mn)x = m(nx)$$

Sia,  $G$  un gruppo e sia  $a \in G$ . Si definisce il sottogruppo  $H$  di  $G$  come quell'insieme avente tutti elementi del tipo  $a^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . In questo senso,  $H$  è generato da  $a$ . Per mostrare che è un gruppo, si nota che  $e \in H$  perché  $e = a^0$ ; dati, poi,  $a^n, a^m \in H$ , anche  $a^{n+m} \equiv a^n a^m \in H$  perché  $n+m \in \mathbb{Z}$ . Infine, l'inverso di ciascun elemento  $a^n$  appartiene ad  $H$  perché  $(a^n)^{-1} \equiv a^{-n}$ , che appartiene ad  $H$  perché  $-n \in \mathbb{Z}$ .

### Definizione 2.7 (Gruppo ciclico)

Sia  $G$  un gruppo; si dice che  $G$  è *ciclico* se esiste  $a \in G : \forall g \in G, g = a^n$ , per qualche intero  $n$ .

Riprendendo l'esempio 2.3,  $\mathbb{Z}$  è un gruppo additivo ciclico, con generatore 1. Visto che un sottogruppo di  $\mathbb{Z}$  è quello che si è chiamato *ideale*, si ha la seguente.

### Proposizione 2.1

Sia  $H$  un sottogruppo di  $\mathbb{Z}$ . Se  $H$  non è il sottogruppo banale, sia  $d$  il più piccolo intero in esso contenuto; allora  $H$  contiene tutti elementi della forma  $nd$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , pertanto  $H$  è ciclico.

Sia  $G$  un gruppo ciclico e sia  $a \in G$  il suo generatore; si hanno due casi possibili.

- *Caso 1*: non esiste  $n \in \mathbb{Z}^{>0} : a^n = e$ .

Allora per ogni intero  $n \neq 0$ ,  $a^n \neq e$  e, allora,  $G$  si dice **infinitamente ciclico**, o che  $a$  ha **ordine infinito** perché ogni elemento  $a^n \in G$  è distinto dall'altro.

*Dimostrazione.* Si assume  $a^r = a^s$  per qualche coppia di interi  $r, s$ ; allora  $a^{s-r} = e \Rightarrow s-r=0 \Rightarrow r=s$ .  $\square$

- *Caso 2*:  $\exists m \in \mathbb{Z}^{>0} : a^m = e$ .

In questo caso,  $a$  ha **ordine finito**. Evidentemente, il gruppo è finito perché i suoi elementi si ripetono periodicamente.

Sia  $J$  l'insieme degli  $n \in \mathbb{Z}$  tali che  $a^n = e$ ; allora  $J$  è un sottogruppo di  $\mathbb{Z}$ .

*Dimostrazione.* Si ha  $0 \in J$  perché  $a^0 = e$  per definizione. Se  $m, n \in J$ , allora  $a^{m+n} = a^m a^n = e \Rightarrow m+n \in J$ . Infine, visto che  $a^{-m} = (a^m)^{-1} = e$ , anche  $-m \in J$ .  $\square$

Per il teorema 1.4, il più piccolo intero positivo contenuto in  $J$  genera  $J$  stesso; allora, per definizione,  $d$  è il più piccolo intero tale che  $a^d = e$  e, per questo, viene chiamato



**periodo** di  $a$ . In quanto tale, se  $a^n = e$  per qualche intero  $n$ , allora  $n = ds$ , per qualche intero  $s$ .

### Teorema 2.1

Sia  $G$  un gruppo e sia  $a \in G$  un elemento di periodo  $d$ ; allora  $a$  genera il sottogruppo ciclico di ordine  $d$ , i cui elementi sono  $e, a, \dots, a^{d-1}$ .

*Dimostrazione.* Per mostrare l'esistenza di tale sottogruppo, si nota che per  $a \in G$ , di periodo  $d$ , e per generico  $n \in \mathbb{Z}$ , l'algoritmo euclideo afferma che  $n = qd + r$ , con  $q, r \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r < d$ , per cui vale  $a^n = a^r$ .

Ora si mostra che gli elementi sono distinti. Se fosse  $a^r = a^s$ , con  $0 \leq r, s \leq d-1$  e, per assunzione,  $r \leq s$ , allora  $a^{s-r} = e$ ; però  $0 \leq s-r < d$ , quindi bisogna avere  $s-r = 0$ , da cui  $r = s$ .  $\square$

## 2.2 Mappe tra gruppi

Dati  $S, S'$  due insiemi, una mappa fra questi è indicata con  $f : S \rightarrow S'$ ; per  $x \in S$ , si indica con  $f(x) \in S'$  l'immagine di  $x$  attraverso la mappa  $f$ . Per definire l'immagine di  $x$  attraverso  $f$ , si usa anche la notazione  $x \mapsto f(x)$ .

Data  $f : S \rightarrow S'$  e  $T \subset S$ , si può definire una mappa che è la restrizione di  $f$  a  $T$ , assegnando  $x \mapsto f(x)$ ,  $\forall x \in T \subset S$ ; questa si indica con  $f|_T : T \rightarrow S'$ .

Una mappa  $f : S \rightarrow S'$  si dice **iniettiva** se  $\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ . Una mappa si dice **suriettiva** se  $\forall y \in S', \exists x \in S : f(x) = y$ . Infine,  $f$  è **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Il fatto che  $f$  sia biettiva permette di individuare univocamente il suo inverso, la cui esistenza è assicurata dalla suriettività, mentre l'unicità dall'iniettività.

### Definizione 2.8 (Mappa inclusione)

Sia  $S$  un insieme e  $T \subset S$ ; la mappa identità di  $T$ ,  $\text{id}_T$ , vista come mappa  $\text{id}_T : T \rightarrow S$  è chiamata *inclusione* e si indica con il simbolo  $T \hookrightarrow S$ .

### Definizione 2.9 (Composizione)

Date due mappe  $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow U$ , si definisce la *mappa composta* come:

$$g \circ f : S \rightarrow U, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Va notato che la composizione *non* è commutativa<sup>1</sup>, invece è, per definizione, associativa<sup>2</sup>.

### Proposizione 2.2

Siano  $S, T, U$  insiemi e siano  $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow U$  due mappe; allora:

- $f, g$  iniettive  $\Rightarrow g \circ f$  iniettiva;

<sup>1</sup>se  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ , si ha  $g \circ f = x^2 + 1$ , mentre  $f \circ g = (x + 1)^2$ .

<sup>2</sup>Infatti, se  $f, g, h$  sono tre mappe tali per cui  $h(g(f(x)))$  è ben definita, allora si ha  $h \circ (g \circ f) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x)))$ , ma anche  $(h \circ g) \circ f = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ .

- $f, g$  suriettive  $\Rightarrow g \circ f$  suriettiva.

### Definizione 2.10 (Mappa inversa)

Data  $f : S \rightarrow S'$  una mappa; la sua inversa è la mappa  $f^{-1} : S' \rightarrow S$  tale che

$$(f \circ f^{-1})(x') = \text{id}_{S'}; (f^{-1} \circ f)(x) = \text{id}_S$$

Indicare l'inversa di  $f$  con  $f^{-1}$  presuppone che l'inversa sia unica, e infatti è così.

*Dimostrazione.* Sia  $f : S \rightarrow S'$  e siano  $g_1, g_2$  due mappe inverse per  $f$ ; ma allora:

$$\text{id}_{S'}(x') = (f \circ g_1)(x') \Rightarrow (g_2 \circ \text{id}_{S'})(x') \equiv g_2 = g_2 \circ (f \circ g_1) = (g_2 \circ f) \circ g_1 \equiv g_1$$

□

### Proposizione 2.3

Sia  $f : S \rightarrow S'$ ; allora  $f$  è biettiva se e solo se  $f$  ha un'inversa.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- $(\Rightarrow)$  Si assume che  $f$  sia biettiva e si mostra che ha un'inversa.

La mappa  $f$  è tale che  $\forall x' \in X', \exists! x \in X : f(x) = x'$ ; la mappa  $x' \mapsto x$  è, allora, ben definita e questa coincide con l'inversa.

- $(\Leftarrow)$  Si assume che  $f$  abbia un'inversa e si mostra che è biettiva.

Per l'iniettività, si nota che se  $x_1 \neq x_2$ , allora deve essere anche  $x'_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = x'_2$ , altrimenti, se si avesse  $f(x_1) = f(x_2) = x'$ ,  $f^{-1}(x')$  non sarebbe una mappa ben definita perché ad un singolo elemento, ne fa corrispondere due.

Per la suriettività, il discorso è analogo:  $f^{-1} : S' \rightarrow S$  non sarebbe ben definita se si avesse  $x'_0 \in S' : \nexists x \in X, f(x) = x'_0$ , allora non varrebbe  $(f \circ f^{-1})(x'_0) = \text{id}_{S'}$ .

□

Nonostante la precedente proposizione, la notazione  $f^{-1}$  si usa anche quando  $f : X \rightarrow Y$  non ha propriamente un'inversa. In questo caso,  $f^{-1}$  è definita come una mappa tra l'insieme dei sottoinsiemi di  $Y$  e l'insieme dei sottoinsiemi di  $X$ . Così facendo, si rende possibile avere sempre una  $f^{-1}$  perché il suo risultato può essere l'insieme vuoto (nel caso in cui  $f$  non sia suriettiva), oppure un insieme composto da più elementi nel caso in cui  $f$  non sia iniettiva.

### Definizione 2.11 (Permutazione)

Sia  $S$  un generico insieme; è chiamata *permutazione* di  $S$  una mappa biettiva  $f : S \rightarrow S$  e si indica con  $\text{Perm}(S)$  l'insieme delle permutazioni di  $S$ .

**Proposizione 2.4**

L'insieme  $\text{Perm}(S)$  è un gruppo, la cui legge di composizione è data dalla composizione di mappe.

*Dimostrazione.* Si è già mostrato che la composizione di mappe è associativa e, chiaramente, esiste la permutazione identità che è  $\text{id}_S$ .

Inoltre, se  $f, g$  sono permutazioni, allora  $g \circ f, f \circ g : S \rightarrow S$  e sono biettive, quindi sono permutazioni. Questo mostra che  $\text{Perm}(S)$  è chiuso sotto la composizione di mappe.

Infine, ogni permutazione  $f$  ha un'inversa  $f^{-1}$  perché  $f$  è biettiva per definizione.  $\square$

Generalmente, per la composizione di permutazioni, si scrive direttamente  $\sigma\tau$ , invece di  $\sigma \circ \tau$ .

**Definizione 2.12 (Sistemi di coordinate)**

Siano gli  $Y_1, \dots, Y_n$  degli insiemi; si definisce sistema di coordinate una mappa

$$f : X \rightarrow \prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times \dots \times Y_n, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

dove  $f_i : X \rightarrow Y_i, i = 1, \dots, n$ .

**2.3 Omomorfismi, isomorfismi e automorfismi****Definizione 2.13 (Omomorfismo)**

Dati  $G, G'$  due gruppi, un omomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  è una mappa che conserva le operazioni di gruppo, cioè

$$\forall x, y \in G, \quad f(x *_G y) = f(x) *_{G'} f(y)$$

con  $*_G, *_{G'}$  leggi di composizione, rispettivamente, di  $G$  e  $G'$ .

Si ometteranno i pedici alle leggi di composizioni, ma la distinzione è sottintesa. Per brevità, invece di specificare che in  $f : G \rightarrow G', G$  e  $G'$  sono gruppi, si dirà che  $f : G \rightarrow G'$  è un *omomorfismo di gruppi*.

**Esempio 2.4.** Sia  $G$  un gruppo commutativo; allora la mappa  $x \mapsto x^{-1} : G \rightarrow G$  è un omomorfismo. Si nota che la richiesta che  $G$  sia commutativo è fondamentale perché si abbia tale omomorfismo; infatti,  $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$  solamente se  $G$  è commutativo, altrimenti  $x * y * (x * y)^{-1} = e \neq x * y * x^{-1} * y^{-1}$ .

**Esempio 2.5.** La mappa  $x \mapsto e^x : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$  è un omomorfismo, infatti:

$$x + y \mapsto e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Questo è un esempio in cui le leggi di composizione di gruppo sono diverse perché i due gruppi sono fondamentalmente diversi.

### Proposizione 2.5

Siano  $G, H$  due gruppi, con  $H = \prod_{i=1}^n H_i$ . La mappa  $f : G \rightarrow H$  è un omomorfismo se e soltanto se  $\forall i, f_i$  è un omomorfismo.

### Proposizione 2.6

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi. Allora  $f$  conserva l'unità, nel senso che  $f(e) = e'$ , e conserva l'inversa, nel senso  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Per la prima, si nota che  $f(e) = f(ee) = f(e) * f(e)$ . Moltiplicando (nel senso della legge  $*_{G'}$ ) ambo i membri per  $f(e)^{-1}$ , si ottiene  $e' = f(e)$ .

Per la seconda, sia  $x \in G$  tale che  $\exists f^{-1}(x)$ ; allora  $e' = f(x * x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$ .

Moltiplicando ambo i membri a sinistra per  $f(x)^{-1}$ , si ottiene  $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ .  $\square$

Si nota che nella proposizione di sopra, si è usata la notazione  $f(x)^{-1}$  per indicare l'elemento inverso nel gruppo, ossia quell'elemento tale che  $f(x) *_{G'} f(x)^{-1} = e'$ , ben diverso da  $f^{-1}(x)$  funzione inversa, tale che  $f \circ f^{-1} = \text{id}$ .

### Proposizione 2.7

Siano  $f : G \rightarrow G', g : G' \rightarrow G''$  due omomorfismi di gruppi; allora la loro composizione  $g \circ f : G \rightarrow G''$  è un omomorfismo di gruppi.

*Dimostrazione.* Per calcolo diretto, si ha:  $(g \circ f)(x * y) = g(f(x * y)) = g(f(x) * f(y)) = g(f(x)) * g(f(y))$ .  $\square$

### Proposizione 2.8

Dato  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi, l'immagine di  $f$  è un sottogruppo di  $G'$ .

*Dimostrazione.* Dati due elementi  $f(x) = x', f(y) = y' \in \text{Im}(f) \subset G'$ , si ha:

$$x' * y' = f(x) * f(y) = f(x * y) \in \text{Im}(f)$$

Quindi  $\text{Im}(f)$  è chiuso rispetto alla legge di composizione definita in  $G'$ . Anche l'inverso appartiene a  $\text{Im}(f)$  perché  $x^{-1} \in G \Rightarrow f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in \text{Im}(f)$ . Infine, anche l'identità vi appartiene sempre perché  $e \in G \Rightarrow e' = f(e) \in \text{Im}(f)$ .  $\square$

**Definizione 2.14 (Kernel di un omomorfismo)**

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi; il suo kernel (o nucleo) è l'insieme

$$\text{Ker}(f) := \{x \in G : f(x) = e' \in G'\}$$

**Proposizione 2.9**

Il kernel di un omomorfismo di gruppi  $f : G \rightarrow G'$  è un sottogruppo di  $G$ .

*Dimostrazione.* Se  $x, y \in \text{Ker}(f)$ , allora  $x * y \in \text{Ker}(f)$  perché  $f(x * y) = f(x) * f(y) = e' * e' = e'$ . L'identità appartiene a  $\text{Ker}(f)$  perché  $f(e) = e'$  e, per finire, se  $x \in \text{Ker}(f)$ , anche  $x^{-1}$  vi appartiene perché  $e' = f(e) = f(x * x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1}) = e' * f(x^{-1}) \Rightarrow e' = f(x^{-1})$ .  $\square$

Si considera, ora, un gruppo  $G$  e si prende un suo elemento  $a \in G$ ; si nota che la mappa  $n \mapsto a^n$  è un omomorfismo di  $\mathbb{Z}$  in  $G$ . Questo è facile da dimostrare, ma più interessante è il fatto che il kernel di questo omomorfismo può essere composto o dal solo  $0 \in \mathbb{Z}$ , o è un sottogruppo generato dal periodo di  $a$ .

**Proposizione 2.10**

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi; se  $\text{Ker}(f) = \{e\}$ , allora  $f$  è iniettivo.

*Dimostrazione.* Si assume, quindi, che  $\text{Ker}(f) = \{e\}$  e si mostra che  $f$  è iniettiva. Dati  $x, y \in G$ ,  $x \neq y$ , se per assurdo, si avesse  $f(x) = f(y)$ , allora  $e' = f(x) * f(y)^{-1} = f(x * y^{-1}) \Rightarrow x * y^{-1} \in \text{Ker}(f)$ , con  $x * y^{-1} \neq x * x^{-1} = e$  perché, per assunzione,  $x \neq y$ . Ne segue che  $f$  è iniettiva.  $\square$

Un omomorfismo iniettivo fra due gruppi  $G \rightarrow G'$  è chiamato **embedding** (o **iniezione**) e, come l'inclusione, si indica con  $G \hookrightarrow G'$ .

**Proposizione 2.11**

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo e sia  $H' \subset G'$ ; prendendo  $H = f^{-1}(H')$  come l'insieme delle  $x \in G : f(x) \in H'$ , allora  $H$  è un sottogruppo di  $G$ .

Si nota che nella proposizione sopra, per  $H' = \{e'\}$ , si ha  $f^{-1}(H') \equiv \text{Ker}(f)$ .

**Definizione 2.15 (Isomorfismo di gruppi)**

Dato  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi, si dice che è un *isomorfismo di gruppi* se esiste un altro omomorfismo di gruppi  $g : G' \rightarrow G$  e tale che  $f \circ g = \text{id}_{G'}$  e  $g \circ f = \text{id}_G$ . In tal caso, si dirà che  $G \approx G'$ .

Questo significa che se uno dei due ha delle proprietà esprimibili esclusivamente in termini delle operazioni di gruppo, allora anche ogni altro gruppo isomorfo a questo conserva le stesse proprietà. Alcune di queste sono:

- la ciclicità;

- l'ordine;
- l'essere abeliano.

### Proposizione 2.12

Un omomorfismo di gruppi  $f : G \rightarrow G'$  che è anche biiettivo è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* L'esistenza di  $f^{-1} : G' \rightarrow G$  è assicurata dal fatto che  $f$  è biettiva. Si deve mostrare che  $f^{-1}$  è un omomorfismo.

Siano dati  $x, y \in G' : f(x) = x', f(y) = y' \Rightarrow f(x * y) = x' * y'$ , visto che  $f$  è un omomorfismo; allora si nota che:

$$f^{-1}(x' * y') = x * y = f^{-1}(x) * f^{-1}(y)$$

□

Dalla precedente proposizione, si ottiene il seguente teorema che permette di capire se un omomorfismo è un isomorfismo.

### Teorema 2.2

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi. Allora:

- se  $\text{Ker}(f) = \{e\} \Rightarrow f$  è un isomorfismo da  $G \rightarrow f(G) \equiv \text{Im}(f)$ ;
- $f : G \rightarrow G'$  è suriettiva e  $\text{Ker}(f) = \{e\}$ , allora  $f$  è un isomorfismo da  $G \rightarrow G'$ .

*Dimostrazione.* Si è già dimostrato che se il nucleo di  $f$  è banale, allora  $f$  è iniettiva; chiaramente  $f$  è sempre suriettiva dall'insieme di partenza nella sua immagine, quindi la tesi è verificata dalla proposizione 2.12.

Sempre per la stessa, segue direttamente il punto (b).

□

### Definizione 2.16 (Automorfismo)

Un *automorfismo di gruppi* è un isomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  con  $G' \equiv G$ .

Si indica con  $\text{Aut}(G)$  l'insieme di tutti gli automorfismi definiti su  $G$ . Inoltre, se equipaggiato con la legge di composizione fra funzioni,  $\text{Aut}(G)$  è un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di  $G$ .

*Dimostrazione.* DA DIMOSTRARE.

□

### Definizione 2.17 (Traslazione)

Dato un gruppo  $G$ , la mappa che, per qualche  $a \in G$ , associa  $x \mapsto a * x$ , definita da  $T_a : G \rightarrow G$ , è chiamata *traslazione*. Questa, in particolare, è chiamata traslazione sinistra. La mappa inversa di una traslazione è  $T_{a^{-1}}$ , in quanto  $x = a^{-1}ax$ .

Si consideri la mappa che, per  $a \in G$ , associa  $a \mapsto T_a : G \rightarrow \text{Perm}(G)$ ; questa è un omomorfismo perché dati  $a, b \in G$ , si ha  $T_{ab}(x) = abx = (T_a \circ T_b)(x)$ , cioè  $T_{ab} = T_a \circ T_b$ .

Evidentemente, questo isomorfismo è anche iniettivo perché per  $a \neq b$ , si ha  $T_a \neq T_b$ , pertanto  $a \mapsto T_a$  risulta un isomorfismo su  $G$ , la cui immagine non è necessariamente coincidente con  $\text{Perm}(G)$ .

### Definizione 2.18 (Coniugazioni)

Sia  $G$  un gruppo e sia  $a \in G$ ; si definisce *coniugazione* la mappa  $c_a : G \rightarrow G$  tale che  $x \mapsto axa^{-1}$ .

È evidente che  $c_a$  è un automorfismo di  $G$ , in particolare, si definisce **automorfismo interno**. La mappa  $a \mapsto c_a$  è un omomorfismo di  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$ , la cui legge di composizione è la composizione di funzioni.

### Definizione 2.19 (Somma diretta)

Siano  $B_1, \dots, B_r$  dei sottogruppi di un gruppo abeliano additivo  $A$ ; si dice che  $A$  è *somma diretta* di questi se

$$A = \bigoplus_{i=1}^r B_i = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_r$$

cioè se  $\forall x \in A, x = \sum_{i=1}^r b_i, b_i \in B_i$  è scritto *univocamente* come somma di elementi dei  $B_i$ .

In generale, se  $A$  è un gruppo additivo abeliano, con  $B, C$  suoi sottogruppi, allora  $B + C$  forma un sottogruppo di  $A$ , i cui elementi sono tutti della forma  $b + c, b \in B, c \in C$ .

### Teorema 2.3

Sia  $A$  un gruppo abeliano; questo è somma diretta di suoi sottogruppi  $B, C$  se e soltanto se  $A = B + C$  e  $B \cap C = \{0\}$ . Questo è vero se e soltanto se la mappa  $(b, c) \mapsto b + c : B \times C \rightarrow A$  è un isomorfismo.

Per finire, si considera l'insieme degli omomorfismi tra due gruppi abeliani additivi  $A, B$ , indicato con  $\text{Hom}(A, B)$ . È possibile rendere questo un gruppo, definendo  $f + g : A \rightarrow B$ , per  $f, g \in \text{Hom}(A, B)$ , come

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A$$

*Dimostrazione.* Si mostra che questo, così definito, è un gruppo. Intanto si osserva l'*associatività*:

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) \\ (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) \end{aligned}$$

da cui  $f + (g + h) = (f + g) + h$ . Si ha anche l'elemento unità rispetto a  $+$ , indicato con  $0$ , che ad ogni elemento di  $A$ , assegna l'elemento nullo di  $B$ , che risulta un omomorfismo.

Per finire, si definisce l'elemento  $-f$  con la proprietà che  $f + (-f) = 0$  e si mostra che  $f + g$  e  $-f$  sono omomorfismi:

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$$

e

$$(-f)(x + y) = -(f(x + y)) = -(f(x) + f(y)) = -f(x) - f(y)$$

Quindi  $\text{Hom}(A, B)$  è un gruppo.  $\square$

## 2.4 Classi laterali

Siano  $S, S'$  due sottoinsiemi di un gruppo  $(G, *)$ ; il loro **prodotto** è:

$$S * S' = \{x \in G : x = s * s', s \in S, s' \in S'\}$$

Allora, se  $S_1, S_2, S_3 \subset G$ , vale  $(S_1 * S_2) * S_3 = S_1 * (S_2 * S_3)$ . Di seguito, alcune altre proprietà.

- Sia  $H$  sottogruppo di  $G$ ; allora  $H * H = H$ .

*Dimostrazione.* È sufficiente prendere l'elemento neutro di uno dei due e far variare tutti gli elementi dell'altro per ottenere tutto  $H$ . Non si può uscire da  $H$  perché  $H$  stesso è un gruppo, quindi è chiuso rispetto a  $*$ .  $\square$

- Sia  $S \subset H$  un generico sottoinsieme e  $H$  come sopra; allora  $S * H = H$ .

*Dimostrazione.* Corrisponde a traslare ciascun elemento di  $H$ , ma si riottiene comunque  $H$ . Per vederlo, sia  $s \in S$  fissato; dato un generico  $h_0 \in H$ , si vuole mostrare che  $\exists h \in H : s * h = h_0$ .

Visto che  $H$  è un sottogruppo di  $G$ ,  $H$  contiene l'inverso di qualunque suo elemento e di ogni elemento di  $S$ , pertanto è ben definito  $h = s^{-1} * h_0$ , che soddisfa la richiesta.  $\square$

- Dati  $S_1, S_2, S_3 \subset G$ , allora  $S_1 * (S_2 \cup S_3) = S_1 * S_2 \cup S_1 * S_3$ .

*Dimostrazione.* Si indica con  $S := S_1 * (S_2 \cup S_3)$  e con  $\bar{S} := S_1 * S_2 \cup S_1 * S_3$ .

Un generico elemento di  $S$  è il prodotto tra  $s_1 \in S_1$  e un altro elemento che sta in  $S_2$  o in  $S_3$ . Un generico elemento di  $\bar{S}$  è o il prodotto tra  $s_1 \in S_1$  e  $s_2 \in S_2$ , o  $s_1 \in S_1$  e  $s_3 \in S_3$ . Allora  $S = \bar{S}$ .  $\square$



**Definizione 2.20 (Classe laterale)**

Sia  $G$  un gruppo e sia  $H$  un suo sottogruppo. Dato  $a \in G$ , l'insieme di tutti gli elementi della forma  $ax$ ,  $x \in H$  è chiamato *classe laterale* di  $H$  in  $G$ .

Si indicherà con  $aH$ .

Si nota che, essendo in generale  $G$  non-commutativo, la scrittura  $aH \neq Ha$ ; la prima si chiama *classe laterale sinistra*, mentre la seconda sarà la *classe laterale destra*.

**Osservazione 2.1.** Più precisamente dovrebbe essere  $a * H$ , ma si elimina  $*$  per alleggerire la notazione. Nel caso della somma, diventerebbe  $a + H$ .

**Teorema 2.4**

Siano  $aH$  e  $bH$  due classi laterali di  $H$  in  $G$ : o le due classi laterali sono uguali, o non hanno alcun elemento in comune.

*Dimostrazione.* Si assume che  $\exists x, y \in H : ax = by$ . Allora si osserva che, essendo  $xH = H = yH$ :

$$aH = axH = byH = bH$$

□

È possibile decomporre un gruppo in classi laterali. Si considera il caso specifico di  $G$  gruppo finito; ogni elemento  $x \in G$  appartiene ad una classe laterale, per esempio  $xH$ , con  $H$  sottogruppo di  $G$ . Allora,  $G$  si può scrivere come unione finita di classi laterali di  $H$ <sup>1</sup>:

$$G = \bigsqcup_{i=1}^r a_i H \quad (2.4.1)$$

dove ogni classe laterale è distinta dall'altra, altrimenti sarebbero uguali e non si sarebbe aggiunto nessun nuovo elemento di  $G$ . Ogni elemento  $ah$ ,  $h \in H$  è chiamato **rappresentante** della classe laterale  $aH$ .

Lo stesso si può dire per gruppi infiniti, ma sono ammesse unioni di infinite classi laterali; indicando con  $I$  un certo insieme di indicizzazione potenzialmente infinito:

$$G = \bigsqcup_{i \in I} a_i H \quad (2.4.2)$$

con  $G$  finito o infinito.

**Teorema 2.5**

Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un sottogruppo finito. Allora il numero di elementi di una certa classe laterale  $aH$  è il numero di elementi di  $H$ .

*Dimostrazione.* Siano  $x, x' \in H : x \neq x'$ ; allora,  $ax \neq ax'$  perché se fosse  $ax = ax'$ , si potrebbe moltiplicare ambo i membri per  $a^{-1}$  e ottenere  $x = x'$ , il che è falso

<sup>1</sup>Il simbolo  $\bigsqcup$  indica unione di insiemi disgiunti.

per assunzione di partenza.

Ne segue che, prendendo  $x_1, \dots, x_n \in H$  tutti diversi, anche  $ax_1, \dots, ax_n$  sono diversi, quindi il numero di elementi di una classe coincide col numero di elementi di  $H$ .  $\square$

Dati  $G, H$  come al solito, si indica con  $G/H$  l'insieme di tutte le classi laterali sinistre di  $H$  in  $G$ . Si chiama **indice** il numero di tutte le distinte classi laterali di  $H$  in  $G$  e si indica con  $(G : H)$ . Se  $|S|$  è il numero di elementi in  $S$ , allora  $|(G/H)| = (G : H)$  e  $|G| = (G : 1)$ .

### **Teorema 2.6 (Teorema di Lagrange)**

Sia  $G$  un gruppo finito e  $H$  un suo sottogruppo; allora

$$|G| = (G : H)|H|$$

*Dimostrazione.* Per teorema 2.4, ogni elemento di  $G$  sta in, esattamente, una classe laterale; se  $g \in G \Rightarrow g \in gH$  perché  $g * e \in gH$ . Per teorema 2.5, ciascuna classe ha lo stesso numero di elementi.

La relazione segue direttamente da queste conclusioni perché ogni classe laterale contiene  $|H|$  elementi distinti di  $G$  e diversi da tutte le altre che decompongono  $G$  stesso (altrimenti le classi sarebbero uguali), il cui numero è  $(G : H)$ .  $\square$

### **Corollario 2.1**

Sia  $G$  un gruppo finito e  $H$  un suo sottogruppo; allora  $|H|$  divide  $|G|$ .

### **Corollario 2.2**

Sia  $G$  un gruppo e  $a \in G$  un suo elemento; il periodo di  $a$ , divide  $|G|$ .

*Dimostrazione.* Il periodo di  $a$  è il numero di elementi del sottogruppo generato da  $a$  stesso.  $\square$

### **Corollario 2.3**

Sia  $G$  un gruppo e siano  $K \subset H \subset G$  due sottogruppi; allora  $(G : K) = (G : H)(H : K)$ .

*Dimostrazione.* Applicando due volte Lagrange:

$$|G| = (G : H)|H| = (G : H)(H : K)|K|$$

Allo stesso tempo, sempre per Lagrange,  $|G| = (G : K)|K|$ , quindi:

$$(G : K)|K| = (G : H)(H : K)|K| \implies (G : K) = (G : H)(H : K)$$

$\square$

Si considera d'esempio il gruppo  $S_n$  delle permutazioni di  $\{1, \dots, n\}$ . Sia  $H$  il sottogruppo di  $S_n$  che contiene tutte le permutazioni  $\sigma$  della forma  $\sigma(n) = n$ ; questo, come

sottogruppo, coincide con  $S_{n-1}$ ,  $n > 1$ .

Si studiano le classi laterali di  $H$ ; più in dettaglio, vale il seguente.

**Proposizione 2.13**

Le sole classi laterali distinte di  $H \equiv S_{n-1}$ ,  $n > 1$  come sottogruppo di  $S_n$  sono

$$\tau_1 H, \dots, \tau_n H \quad (2.4.3)$$

con  $\tau_i(n) = i$ ,  $\tau_i(i) = n$  e tutti gli altri interi sono lasciati invariati.

*Dimostrazione.* Per prima cosa, si mostra che ogni elemento  $\sigma \in S_n$  è contenuto in una classe laterale. Intanto si nota che  $H$  coincide con  $\tau_n H$  perché  $\tau_n$  è l'identità per definizione; allora, si prende un elemento che non sta in  $H$  e si mostra che appartiene ad una classe laterale. Senza perdita di generalità, quindi, sia  $\sigma \in S_n$  :  $\sigma(n) = i$ ; allora

$$\tau_i^{-1} \circ \sigma(n) = \tau_i^{-1}(i) = n$$

Questo significa che  $\tau_i^{-1} \sigma \in H \implies \sigma \in \tau_i H$ . Questo dimostra che  $S_n/H \equiv \{\tau_i H\}_{i=1}^n$ ; manca da mostrare che queste sono tutte distinte.

Per vederlo, si assume  $i \neq j$  e si nota che,  $\forall \sigma \in H$ ,  $\tau_i \circ \sigma(n) = \tau_i(n) = i$  e  $\tau_j \circ \sigma(n) = j$ , quindi  $\tau_i H$  e  $\tau_j H$  non possono avere elementi in comune,  $\square$

Vista la proposizione 2.13, il teorema di Lagrange permette anche di concludere che  $|S_n| = n|S_{n-1}|$ ; per induzione, si mostra che, in generale:

$$|S_n| = n! \quad (2.4.4)$$

**Teorema 2.7**

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi. Dato  $a' \in \text{Im}(f) \subset G'$ , con  $a' = f(a)$  per qualche  $a \in G$ , allora l'insieme degli elementi  $x \in G : f(x) = a'$  coincide con la classe laterale  $a\text{Ker}(f)$ .

*Dimostrazione.* L'idea è di mostrare che i due insiemi sono contenuti uno nell'altro. Sia  $x \in a\text{Ker}(f)$ , cioè per qualche  $h \in \text{Ker}(f)$ ,  $x = ah$ ; allora:

$$f(x) = f(a) * f(h) = f(a)$$

cioè  $x \in a\text{Ker}(f) \implies x \in \{y \in G : f(y) = a'\}$ .

Sia ora  $x \in \{y \in G : f(y) = a'\}$ ; allora:

$$f(a^{-1}x) = f(a)^{-1} * f(x) = a'^{-1} * a' = e'$$

cioè  $a^{-1}x \in \text{Ker}(f)$ , per esempio  $h = a^{-1}x$ , quindi  $x = ah \implies x \in a\text{Ker}(f)$ .  $\square$

## 2.5 Sottogruppi normali

### Definizione 2.21 (Sottogruppo normale)

Sia  $G$  un gruppo e sia  $H$  un suo sottogruppo. Si dice che  $H$  è *normale* se soddisfa una delle due, equivalenti, condizioni:

NOR 1.  $\forall x \in G, xH = Hx$ , cioè  $xHx^{-1} = H$ ;

NOR 2.  $H$  è il kernel di qualche omomorfismo di  $G$  in qualche altro gruppo.

Per indicare che  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$  si scrive  $H \triangleleft G$ .

Intanto si nota che la condizione NOR 1 non coincide con la condizione  $xhx^{-1} = h, \forall h \in H$  quando  $G$  non è commutativo. Nel caso di  $G$  commutativo, ogni sottogruppo  $H$  è normale e soddisfa la condizione più forte di NOR 1, cioè proprio  $x^{-1}hx = h, \forall h \in H$ .

Ora si dimostra che  $\text{NOR 1} \iff \text{NOR 2}$ . L'implicazione  $\text{NOR 1} \implies \text{NOR 2}$  si vede di seguito.

*Dimostrazione.* Sia  $H \equiv \text{Ker}(f)$ , con  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo di gruppi; allora:

$$f(xHx^{-1}) = f(x)f(H)f(x)^{-1} = e' \in G'$$

Da questo, segue che  $xHx^{-1} \subset H, \forall x \in G$ , quindi vale anche  $x^{-1}Hx \subset H^1$ , da cui (moltiplicando a sinistra per  $x$  e a destra per  $x^{-1}$ ) si ha  $H \subset xHx^{-1}$ .  $\square$

L'altra implicazione si dimostra nel seguente teorema e nel successivo corollario.

### Teorema 2.8

Sia  $G$  un gruppo e sia  $H$  un sottogruppo tale che  $xH = Hx, \forall x \in G$ . Se  $aH, bH$  sono due classi laterali di  $H$ , allora il prodotto  $(aH) * (bH)$  è ancora una classe laterale. Inoltre, l'insieme delle classi laterali è esso stesso un gruppo, il cui prodotto è quello appena descritto.

*Dimostrazione.* La prima affermazione è immediata:  $(aH) * (bH) = aHbH = abHH = abH$ , usando che  $xH = Hx$ .

L'assioma GR 1 è osservata all'inizio di §2.4; GR 2 è soddisfatto da  $eH = H$ ; GR 3, infine, è soddisfatto da  $a^{-1}H$  come inverso di  $aH$ .  $\square$

Il gruppo delle classi laterali  $G/H$  è chiamato **gruppo quoziente** e si dice anche  **$G$  modulo  $H$** . Il poter trattare questo come un gruppo è dovuto all'assunzione  $xH = Hx$ .

**Osservazione 2.2.** Parlando di gruppo quoziente  $G/H$  si assumerà sempre che  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ .

È chiaro che per essere vero che  $G/H$  è un gruppo quoziente,  $H$  deve per forza essere

<sup>1</sup>Visto che tale condizione vale  $\forall x \in G$ , si può mandare  $x \rightarrow x^{-1}$  e, conseguentemente,  $x^{-1} \rightarrow x$  e ottenere  $x^{-1}Hx \subset H$ .

un sottogruppo normale di  $G$ , da qui il motivo per cui lo si sottintende.

#### Corollario 2.4 (Omomorfismo canonico)

Sia  $G$  un gruppo e sia  $H$  un sottogruppo tale che  $xH = Hx$ ,  $\forall x \in G$ . Sia  $G/H$  il gruppo quoziente e  $f : G \rightarrow G/H$  la mappa che, ad ogni  $a \in G$ , associa la classe laterale  $aH$ , cioè  $f(a) = aH$ . Allora  $f$  è un omomorfismo e  $\text{Ker}(f) \equiv H$ .

*Dimostrazione.* È evidente che  $f$  sia un omomorfismo dalla definizione di prodotto di classi laterali. Per il kernel, si vede che ogni elemento di  $H$  è automaticamente in  $\text{Ker}(f)$  perché se  $h \in H \Rightarrow f(h) = hH \equiv H$ . Sia, invece,  $x \in G : f(x) = xH$  sia l'elemento unità di  $G/H$ , quindi coincidente con il laterale  $H$  stesso:  $xH = H$ . Questo vuol dire che  $xe = x$  è un elemento di  $H$ . Quindi  $H$  coincide con il kernel di  $f$ .  $\square$

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo. Dato  $x \in G$ , allora,  $\forall k \in \text{Ker}(f)$ :

$$f(xk) = f(x)f(k) = f(x) \implies f(x\text{Ker}(f)) = f(x)$$

Questo significa che ogni elemento in un laterale di  $\text{Ker}(f)$  ha la stessa immagine sotto  $f$ .

#### Corollario 2.5

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo e sia  $H = \text{Ker}(f)$ ; allora la mappa  $x\text{Ker}(f) \mapsto f(x\text{Ker}(f))$  è un isomorfismo del gruppo quoziente  $G/H$  con l'immagine di  $f$ , cioè  $G/H \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f)$ . In questo caso, si dice che l'isomorfismo  $\bar{f}$  è **indotto** da  $f$ .

*Dimostrazione.* Si definisce  $\bar{f} : G/H \rightarrow G'$  t.c.  $xH \mapsto f(xH)$ . Ora si verifica che è un isomorfismo usando il teorema 2.2. Intanto si ha che  $\bar{f}$  è un omomorfismo, infatti:

$$\bar{f}(xHyH) = \bar{f}(xyH) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(xH)\bar{f}(yH)$$

È anche iniettiva perché il suo nucleo sono quei laterali  $xH$  tali che  $f(xH) = e'$ , quindi solamente  $H$ , che è l'unità di  $G/H$ .

Infine si ha  $\text{Im}(\bar{f}) = \text{Im}(f)$  per definizione di  $f$ .

Quest'ultima considerazione permette di concludere che  $G/H \cong \text{Im}(f)$ .  $\square$

**Esempio 2.6.** Si considera, come esempio,  $\mathbb{Z}$  come sottogruppo del gruppo additivo  $(\mathbb{R}, +)$ ; il gruppo quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è chiamato **gruppo circolare**.

Dati due numeri reali  $x, y \in \mathbb{R}$ , si dice che  $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}}$  se  $x - y \in \mathbb{Z}$ ; questa definisce una relazione di equivalenza, le cui classi di equivalenza sono esattamente i laterali di  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{R}$ . Se è vero che  $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}}$ , allora  $e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy}$  e la mappa  $x \mapsto e^{2\pi ix}$  definisce un isomorfismo di  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi che hanno modulo unitario.

**Esempio 2.7.** Siano  $\mathbb{C}^*$  e  $\mathbb{R}^+$ , rispettivamente, il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non-nulli e il gruppo moltiplicativo dei reali positivi.

Dato  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , vale  $\alpha = ru$ , con  $r \in \mathbb{R}^+$  e  $|u| = 1$  (si prende  $u = \alpha/|\alpha|$ ). L'espressione di  $u$  è sempre determinata e la mappa  $\alpha \mapsto \alpha/|\alpha|$  è un omomorfismo di  $\mathbb{C}^*$  in  $\mathbb{C}_1 := \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ . Essendo il nucleo di questo omomorfismo proprio  $\mathbb{R}^+$ , allora  $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{C}_1$ .

[Riprendere da pagina 48 dopo esempio 5](#)