Compitino di Meccanica Quantistica, Corso B, 18 Dicembre 2023

(1) Si consideri una particella che si muove in un piano (quindi in due dimensioni) in presenza di una forza armonica, la cui Hamiltoniana è

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \, \hat{\boldsymbol{x}}^2 \, .$$

(a) Scrivere la lunghezza ℓ_ω che caratterizza questo oscillatore quantistico in termini dei parametri dell'Hamiltoniana. Dimostrare che l'operatore Hamiltoniana si può scrivere nella forma

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1 \right), \qquad \hat{x}_i = \frac{\ell_\omega}{\sqrt{2}}(a_i + a_i^\dagger), \quad \hat{p}_i = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\ell_\omega}(-ia_i + ia_i^\dagger),$$

dove a_1 and a_2 sono gli operatori di *distruzione* associati alle due direzioni dello spazio. Determinare lo spettro e discutere le degenerazioni.

(b) Calcolare il valore di aspettazione degli operatori $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{p}}$, e $\hat{\boldsymbol{x}}^2 = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2$ sullo stato fondamentale $|\Psi_0\rangle$.

(c) Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale, e calcolare la probabilità che la particella si trovi ad una distanza $d < \ell_\omega$.

(2) Si consideri un sistema composto da due qubits (equivalenti a due sistemi di spin 1/2), la cui Hamiltonian è data da

$$\hat{H} = \beta \hat{\boldsymbol{s}}^{(1)} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}^{(2)} = \beta \sum_{k=1}^{3} \hat{\boldsymbol{s}}_k^{(1)} \, \hat{\boldsymbol{s}}_k^{(2)} \, , \qquad \beta > 0 \, , \qquad \hat{s}_k^{(a)} = \frac{\hbar}{2} \sigma_k^{(a)} \, ,$$

dove $\hat{\sigma}_k^{(a)}$ sono le matrici di Pauli che agiscono sullo qubit a. Si consideri come base del sistema il prodotto delle basi associate agli autostati degli operatori $\hat{\sigma}_3^{(1)}$ e $\hat{\sigma}_3^{(2)}$,

$$|1\rangle \equiv |1\rangle^{(1)}|1\rangle^{(2)}, \quad |2\rangle \equiv |1\rangle^{(1)}|-1\rangle^{(2)}, \quad |3\rangle \equiv |-1\rangle^{(1)}|1\rangle^{(2)}, \quad |4\rangle \equiv |-1\rangle^{(1)}|-1\rangle^{(2)}.$$

(a) Dire quali dei seguenti operatori è conservato:

$$\hat{\boldsymbol{s}}^{(a)} \, , \qquad \hat{\boldsymbol{s}}^{(a)} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}^{(a)} \, , \qquad \hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{s}}^{(2)} \, , \qquad \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}} \, .$$

(b) Determinare lo spettro di $\hat{H}$, e scrivere gli autostati in termini della base $|n\rangle$ scritta sopra.

(c) Calcolare la matrice densità ridotta del singolo qubit (1) nello stato fondamentale del sistema, e calcolare il valore medio dell'operatore $\hat{s}_3^{(1)}$.

(d) Scrivere l'evoluzione del sistema nel caso la condizione iniziale per $t = 0$ sia data dallo stato $|2\rangle$, e calcolare l'energia media dopo un tempo t.