

APPUNTI DI ALGEBRA

MANUEL DEODATO



INDICE

1	Teoria dei gruppi	3
1.1	Il gruppo degli automorfismi	3
1.2	Azioni di gruppo	4
1.2.1	Azione di coniugio	6
1.2.2	Formula delle classi	7
1.3	I p-gruppi	8
1.4	Teoremi di Cauchy e Cayley	9
1.5	Commutatore e gruppo derivato	11
1.6	Gruppi diedrali	13
1.6.1	Sottogruppi di D_n	14
1.6.2	Centro, quozienti e automorfismi di D_n	17
1.7	Permutazioni	18
1.8	Gruppi di Sylow e prodotti diretti	20

1 TEORIA DEI GRUPPI

1.1 Il gruppo degli automorfismi

Lemma 1.0.1. Siano H, G due gruppi ciclici; un omomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ è univocamente determinato da come agisce su un generatore di G .

Dimostrazione. Sia $g_0 \in G$ tale che $\langle g_0 \rangle = G$ e sia $\varphi(g_0) = \bar{h} \in H$. Per $g \in G$ generico, per cui $g_0^k = g$ per qualche intero k , si ha:

$$\varphi(g) = \varphi(g_0^k) = \varphi(g_0)^k = \bar{h}^k$$

Cioè tutti gli elementi di $\text{Im } \varphi$ sono esprimibili come potenze di \bar{h} . □

Osservazione 1.1. Non ogni scelta di $\bar{h} \in H$ è ammissibile, ma bisogna rispettare l'ordine di g_0 . Se $g_0^n = e_G$, allora $e_H = \varphi(g_0^n) = \varphi(g_0)^n = \bar{h}^n$. Questa condizione, impone che $\text{ord}(\bar{h}) \mid \text{ord}(g_0)$.

Definizione 1.1 (Gruppo degli automorfismi). Sia G un gruppo; si definisce il gruppo dei suoi automorfismi come

$$\text{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ è un isomorfismo di gruppi}\}$$

Esempio 1.1. Si calcola $\text{Aut}(\mathbb{Z})$.

Svolgimento. Il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ è ciclico, quindi un omomorfismo è determinato in base a come agisce su un generatore. Prendendo, per esempio 1, si definisce $q_a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $q_a(1) = a$; perché $\langle q_a(1) \rangle = \mathbb{Z}^1$, è necessario che a sia un generatore di \mathbb{Z} , perciò sono ammessi $a = \pm 1$. In questo caso, $\text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\pm \text{Id}_{\mathbb{Z}}\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. ■

Teorema 1.1. $\text{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Dimostrazione. $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ è ciclico, quindi si stabilisce l'azione di $f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ su un generatore. Preso, allora, $\bar{k} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tale che $\text{gcd}(k, m) = 1$ e scelto $f(\bar{k}) = \bar{a}$, si ha che $\langle f(\bar{k}) \rangle = \langle \bar{a} \rangle = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \iff \text{gcd}(a, m) = 1 \iff \bar{a} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. □

Definizione 1.2 (Automorfismo interno). Sia G un gruppo; si definisce $\phi_g : G \rightarrow G$, $\forall g \in G$, come $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ ed è detto *automorfismo interno*. L'insieme di questi automorfismi, al variare di $g \in G$, forma il gruppo

$$\text{Int}(G) = \{\phi_g : G \rightarrow G \mid g \in G \text{ e } \phi_g \text{ automorfismo interno}\}$$

Proposizione 1.1. Sia G un gruppo; allora $\text{Int}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ e $\text{Int}(G) \cong G/Z(G)$.

¹Richiesto dal fatto che q_a sia suriettivo.

Dimostrazione. $\text{Int}(G)$ è un sottogruppo di $\text{Aut}(G)$ perché $\text{Id}(x) = exe^{-1} = x \Rightarrow \text{Id} \in \text{Int}(G)$. Inoltre, $\phi_g \circ \phi_h(x) = ghxh^{-1}g^{-1} = \phi_{gh}(x) \in \text{Int}(G)$ e $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g(x) = x \Rightarrow \phi_g^{-1} = \phi_{g^{-1}} \in \text{Int}(G)$.

È un sottogruppo normale perché $\forall f \in \text{Aut}(G)$, si ha

$$f \circ \phi_g \circ f^{-1}(x) = f(gf^{-1}(x)g^{-1}) = f(g)xf(g)^{-1} \in \text{Int}(G)$$

Per finire, si definisce $\Phi : G \rightarrow \text{Int}(G)$. Questo è un omomorfismo perché $\Phi(gh) = \phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h = \Phi(g)\Phi(h)$. È, inoltre, suriettivo perché ogni automorfismo interno è associato ad un elemento di G , cioè $\forall \phi_g \in \text{Int}(G)$, $\exists g \in G : \Phi(g) = \phi_g$. Allora, la tesi deriva dal I teorema di omomorfismo, visto che $\text{Ker } \Phi = Z(G)$. \square

Osservazione 1.2. $H \triangleleft G \iff \phi_g(H) = H, \forall \phi_g \in \text{Int}(G)$.

Dimostrazione. Per ogni elemento di $\text{Int}(G)$, si ha $\phi_g(H) = H \iff gHg^{-1} = H \iff H \triangleleft G$. \square

Definizione 1.3 (Sottogruppo caratteristico). Sia G un gruppo e $H < G$. Si dice che H è *caratteristico* se è invariante per automorfismo, cioè $\forall f \in \text{Aut}(G)$, $f(H) = H$.

Corollario 1.1.1. Sia G un gruppo; per la proposizione 1.1 e l'osservazione 1.2 se H è caratteristico, allora $H \triangleleft G$.

Il viceversa è falso, cioè normale \nRightarrow caratteristico; infatti, in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il sottogruppo $\langle(1, 0)\rangle$ è normale, ma non caratteristico perché l'automorfismo che scambia le coordinate è tale per cui $\langle(1, 0)\rangle \mapsto \langle(0, 1)\rangle \neq \langle(1, 0)\rangle$.

1.2 Azioni di gruppo

Definizione 1.4 (Azione). Sia G un gruppo; un'azione di G su un insieme X è un omomorfismo

$$\gamma : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ biettiva}\} \\ g & \longmapsto & \psi_g : \psi_g(x) = g \cdot x \end{array}$$

Più concretamente, si definisce *azione* la mappa $\gamma : G \times X \rightarrow X$ tale che

- (a). $e \cdot x = x$, per $e \in G$ e $x \in X$;
- (b). $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$, per $g, h \in G$ e $x \in X$.

Si verifica che una mappa $\gamma : G \times X \rightarrow X$, con G gruppo e X insieme generico, che soddisfa le proprietà (a) e (b), è tale che $\gamma(g)(x) = \psi_g(x)$ (cioè a g fissato) è biettiva.

Dimostrazione. Per l'iniettività, si ha $\psi_g(x) = \psi_g(y) \iff g \cdot x = g \cdot y \iff x = y$, visto che si può applicare l'azione inversa $\gamma(g^{-1})$ ad entrambi i lati. Per la suriettività,

invece, si nota che $\forall x \in X$, si trova anche una $y \in X : y = g^{-1} \cdot x$ dovuta all'azione di $\gamma(g^{-1})$, per cui $\psi_g(y) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = x$. \square

Esempio 1.2. Sia $G = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} \cong S^1$ la circonferenza unitaria e $X = \mathbb{R}^2$. Un'azione di G su X è una rotazione definita da $\gamma(z) = R(\arg z)$. Questa è un omomorfismo perché $\gamma(zw) = R(\arg zw) = R(\arg z + \arg w) = R(\arg z)R(\arg w) = \gamma(z)\gamma(w)$.

Un'azione γ di G su X definisce, proprio su X , una relazione di equivalenza definita da

$$x \sim_\gamma y \iff x = \psi_g(y) = g \cdot y, \text{ con } x, y \in X \quad (1.2.1)$$

La relazione di equivalenza è ben definita perché le ψ_g sono mappe biettive.

Definizione 1.5 (Orbita). Sia $\gamma : G \rightarrow S(X)$ un'azione di G gruppo su X . Dato $x \in X$, la sua classe di equivalenza rispetto alla relazione \sim_γ è detta *orbita* ed è indicata con $\text{Orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Ricordando che una relazione di equivalenza fornisce una partizione dell'insieme su cui è definita, si ha:

$$X = \bigsqcup_{x \in R} \text{Orb}(x) \quad (1.2.2)$$

con R insieme dei rappresentanti di tutte le orbite. Se, poi, X ha cardinalità finita, allora:

$$|X| = \sum_{x \in R} |\text{Orb}(x)| \quad (1.2.3)$$

Definizione 1.6 (Stabilizzatore). Sia $\gamma : G \rightarrow S(X)$ un'azione di G su X ; allora per ogni $x \in X$, si definisce l'insieme

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} < G$$

Lemma 1.1.1. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X e sia $x \in X$ un suo elemento. Dati anche $g \cdot x, h \cdot x \in \text{Orb}(x)$ tali che $g \cdot x = h \cdot x$, allora g e h appartengono alla stessa classe di $G/\text{Stab}(x)$.

Dimostrazione. Se $g \cdot x, h \cdot x \in \text{Orb}(x)$ sono uguali, allora $x = h^{-1}g \cdot x$, cioè $h^{-1}g \in G$ lascia invariato x , quindi è in $\text{Stab}(x)$. Da questo segue che $h \text{Stab}(x) = hh^{-1}g \text{Stab}(x) = g \text{Stab}(x)$. \square

Teorema 1.2 (Teorema di orbita-stabilizzatore). Esiste una mappa biettiva $\Gamma : \text{Orb}(x) \rightarrow G/\text{Stab}(x)$ tale che $\Gamma(g \cdot x) = g \text{Stab}(x)$.

Dimostrazione. Γ è iniettiva come diretta conseguenza del lemma 1.1.1 ed è suriettiva perché $\forall g \text{ Stab}(x) \in G/\text{Stab}(x), \exists g \cdot x \in \text{Orb}(x)$ tale che $\Gamma(g \cdot x) = g \text{Stab}(x)$. Segue che $|\text{Orb}(x)| = |G|/|\text{Stab}(x)|$. \square

Osservazione 1.3. Si osserva che, per il teorema di orbita-stabilizzatore, la cardinalità di un'orbita indica il numero di classi laterali dello stabilizzatore nel gruppo che compie l'azione, cioè il teorema di orbita-stabilizzatore si può riscrivere come $|\text{Orb}(x)| = [G : \text{Stab}(x)] = |G/\text{Stab}(x)| = |G|/|\text{Stab}(x)|$.

1.2.1 Azione di coniugio

Un caso notevole di azione è il coniugio: per $X = G$, si definisce $\gamma : G \rightarrow \text{Int}(G) \subset S(G)$. Le orbite indotte da questa azione sono dette *classi di coniugio* e si indicano con $\text{cl}(x)$, mentre lo stabilizzatore è detto *centralizzatore* e si indica con:

$$Z(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = gxg^{-1} = x\} \quad (1.2.4)$$

Come conseguenza del teorema di orbita-stabilizzatore (1.2), si ha:

$$|G| = |\text{cl}(x)||Z(x)|, \quad \forall x \in G \quad (1.2.5)$$

Proposizione 1.2. Sia G un gruppo e γ l'azione di coniugio su di esso; allora

$$\bigcap_{x \in G} Z(x) = Z(G)$$

Dimostrazione. Si ha $g \in Z(x), \forall x \iff gxg^{-1} = x, \forall x \in G \iff g \in Z(G)$. \square

Osservazione 1.4 (Centro di un sottogruppo). Sia G un gruppo e $H < G$; allora il centro di H è definito come

$$\bigcap_{x \in H} Z(x) = Z(H)$$

Si considera, ora, l'azione di coniugio di un gruppo G su $X = \{H \subseteq G \mid H < G\}$ e $\gamma(g) = \psi_g$ tale che $\psi_g(H) = gHg^{-1}$. Questa è un'azione ed è ben definita.

Dimostrazione. Per dimostrare che è un'azione, si deve mostrare che la mappa $g \mapsto \psi_g$ è un omomorfismo e che $\psi_g : X \rightarrow X$ sia biettiva.

Si nota che $g \mapsto \psi_g$ è un omomorfismo perché $\psi_{g_1 g_2}(H) = g_1 g_2 H g_2^{-1} g_1^{-1} = \psi_{g_1} \circ \psi_{g_2}(H)$, cioè $g_1 g_2 \mapsto \psi_{g_1} \psi_{g_2}$. Inoltre, $\psi_g : X \rightarrow X$ è biettiva perché $\exists \psi_g^{-1} = \psi_{g^{-1}} : \psi_{g^{-1}} \circ \psi_g(H) = H$.

Per mostrare che è ben definita, si fa vedere che effettivamente $\forall g, \psi_g$ mappa un sottogruppo di G in un altro sottogruppo, cioè che $gHg^{-1} < G$. Intanto, $e \in gHg^{-1}$

perché $H < G \Rightarrow e \in H \Rightarrow geg^{-1} = e$; poi, $(ghg^{-1})(gh'g^{-1}) = gh'h'g^{-1} \in gHg^{-1}$ e $h^{-1} \in H \Rightarrow \exists (ghg^{-1})^{-1} = gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$ elemento inverso. \square

Lo stabilizzatore di questa azione è detto *normalizzatore*, in quanto è definito come tutti elementi di G rispetto a cui H è normale:

$$N_G(H) = \text{Stab}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} \quad (1.2.6)$$

Infine, l'orbita è l'insieme (classe di equivalenza) di tutti i coniugati di un sottogruppo di G :

$$\text{Orb}(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\} \quad (1.2.7)$$

Per il teorema di orbita-stabilizzatore (1.2), si ha:

$$|G| = |N_G(H)| |\text{Orb}(H)| \quad (1.2.8)$$

da cui si ricava anche che $H \triangleleft G \iff N_G(H) = G \iff \text{Orb}(H) = \{H\}$.

1.2.2 Formula delle classi

Si ricorda che le orbite definite da un'azione di un gruppo G su un insieme X formano una partizione di X stesso, in quanto sono delle classi di equivalenza. Se $|X| < \infty$, si ha:

$$|X| = \sum_{x \in R} |\text{Orb}(x)| = \sum_{x \in R} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|} = \sum_{x \in R'} 1 + \sum_{x \in R \setminus R'} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|} \quad (1.2.9)$$

con R insieme dei rappresentanti delle orbite e R' insieme dei rappresentati delle orbite tali che $\text{Orb}(x) = \{x\}$, cioè degli elementi invarianti sotto l'azione di G .

Teorema 1.3 (Formula delle classi). Sia $\gamma : G \rightarrow S(G)$ l'azione di coniugio di un gruppo G su un insieme X ; allora:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in R \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z(x)|}$$

Dimostrazione. Segue per quanto appena detto e dall'osservazione che

$$R' = \{x \in R \mid \text{Orb}(x) = \{x\}\} = \{x \in R \mid gxg^{-1} = x\} = Z(G)$$

Visto che ogni orbita del genere contiene un solo elemento, i rappresentanti delle orbite sono esattamente tutti gli elementi di $Z(G)$, cioè un elemento $x \in Z(G)$ non può essere contenuto in nessun'altra orbita, se non nel singoletto $\{x\}$. Perciò, la relazione in eq. 1.2.9, avendo $X = G$, conferma la tesi. \square

1.3 I p-gruppi

Definizione 1.7 (p-gruppo). Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo; allora si dice che G è p -gruppo se $|G| = p^n$, per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 1.3. Il centro di un p -gruppo è non-banale.

Dimostrazione. Per la formula delle classi, si ha:

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{x \in R \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z(x)|}$$

Se $|Z(G)| = p^n$, la tesi è verificata, altrimenti $\exists x \in R \setminus Z(G)$, quindi tale che $Z(x) \subsetneq G$; allora, per qualche intero $k > 0$, si ha $|G|/|Z(x)| = p^k$, da cui

$$|Z(G)| = p^n - \sum_{x \in R \setminus Z(G)} p^k \implies p \mid |Z(G)|$$

Visto che $e \in Z(G)$, deve risultare $|Z(G)| \geq 1$, da cui $|Z(G)| = p^s$, per qualche intero $s > 1$. \square

Lemma 1.3.1. Vale $G/Z(G)$ ciclico $\iff G$ è abeliano.

Dimostrazione. Sia $G/Z(G)$ ciclico e sia $x_0Z(G)$ il suo generatore. Date due classi laterali distinte $xZ(G), yZ(G) \in G/Z(G)$ e visto che $x_0Z(G)$ genera, si avrà $x_0^m Z(G) = xZ(G)$ e $x_0^n Z(G) = yZ(G)$, ossia, per $z, w \in Z(G)$, $x = x_0^m z$, $y = x_0^n w$. Allora:

$$xy = x_0^m z x_0^n w = x_0^m x_0^n z w = x_0^n w x_0^m z = yx$$

Essendo questo valido per $x, y \in G$ generiche, si è dimostrata l'implicazione verso destra.

Per l'implicazione inversa, sia G abeliano; allora $Z(G) = G$ e $G/Z(G) = \{e\}$, che è ovviamente ciclico. \square

Proposizione 1.4. Un gruppo di ordine p^2 è abeliano.

Dimostrazione. Sia G un p -gruppo tale che $|G| = p^2$. Per mostrare che è abeliano, si fa vedere che $Z(G) = G$, ossia $|Z(G)| = p^2$. Per la proposizione 1.3, si può avere solamente $|Z(G)| = p$, oppure $|Z(G)| = p^2$. Se, per assurdo, fosse $|Z(G)| = p$, allora $|G|/|Z(G)| = p$, quindi $G/Z(G)$ avrebbe ordine primo e, quindi, sarebbe ciclico; per il lemma precedente (1.3.1), però, questo è assurdo perché risulterebbe anche abeliano al contempo, ma senza avere $|Z(G)| = |G|$. Quindi deve essere $|Z(G)| = p^2 = |G| \implies Z(G) = G$, da cui G è abeliano. \square

1.4 Teoremi di Cauchy e Cayley

Lemma 1.3.2 (Teorema di Cauchy abeliano). Sia p un primo e G un gruppo abeliano finito; se $p \mid |G|$, allora $\exists x \in G : \text{ord}(x) = p$.

Dimostrazione. Sia $|G| = pn$; si procede per induzione su n . Il passo base è ovvio: se $|G| = p$, allora è ciclico e, quindi, contiene un elemento di ordine p .

Per il passo induttivo, si suppone che la tesi sia vera per ogni $m < n$ e si dimostra per n .

Sia, allora $|G| = pn$; sia, poi $y \in G$, $y \neq e$ tale che $\langle y \rangle = H < G$: per Lagrange, $|G| = |G/H||H|$. Allora, se $p \mid |G| \Rightarrow p \mid |H|$, oppure $p \mid |G/H|$.

- Se $p \mid |H|$, allora può essere $|G| = |H|$, caso in cui $G = \langle y \rangle$ sarebbe ciclico e, quindi, avrebbe un elemento di ordine p^1 , oppure può essere $|H| = pm < pn$, caso in cui l'elemento di ordine p è presente per ipotesi induttiva.
- Se $p \mid |G/H|$, invece, allora $|G/H| = pm' < pn$ perché H contiene almeno due elementi, cioè y ed e ; per ipotesi induttiva, allora, esiste $zH \in G/H$ il cui ordine è p . Considerando la proiezione $\pi_H : G \rightarrow G/H$ tale che $x \mapsto xH$ e ricordando che è un omomorfismo, si ha che, per questo motivo, $\text{ord}(zH) \mid \text{ord}(z) \Rightarrow \text{ord}(z) = pk$; se $k = n$, allora G è ciclico e z^n ha ordine p , altrimenti, se $k < n$, si ha la tesi per induzione.

□

Teorema 1.4 (Teorema di Cauchy). Sia p un numero primo e G un gruppo finito; se $p \mid |G|$, allora esiste $x \in G : \text{ord}(x) = p$.

Dimostrazione. Sia $|G| = pn$, con p primo e $n \in \mathbb{N}$; si procede per induzione su n . Se $n = 1$, $|G| = p \Rightarrow G$ è ciclico, quindi $\exists x \in G : \langle x \rangle = G$ e $\text{ord}(x) = p$.

Per il passo induttivo, si assume che la tesi sia valida per ogni $m < n$ e si dimostra per n .

Si nota che se $\exists H < G$ tale che $p \mid |H|$, allora $|H| = pm$, $m < n \Rightarrow \exists x \in H$ tale che $\text{ord}(x) = p$ per ipotesi induttiva. Si assume, dunque, che non esista alcun sottogruppo di G il cui ordine sia divisibile per p . Per la formula delle classi

$$pn - \sum_{x \in G \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z(x)|} = |Z(G)|$$

Ora, visto che $Z(x) < G \Rightarrow p$ non divide $|Z(x)|$, quindi si ha la certezza che, essendo $p \mid |G| = |Z(x)||G/Z(x)|$, p divide $|G/Z(x)|$. Allora $p \mid |Z(G)|$, per cui $Z(G) = G$;

¹In questo caso, l'elemento di ordine p sarebbe proprio $y^{p^{n-1}} \in G$; infatti, $(y^{p^{n-1}})^p = y^{p^n} = e$, visto che $|G| = p^n$.

infatti, se così non fosse, sarebbe un sottogruppo proprio di G e p non lo potrebbe dividere, il che è assurdo.

Da questo, segue che G è abeliano, quindi la tesi segue dal teorema di Cauchy per gruppi abeliani (lemma 1.3.2). \square

Proposizione 1.5. Siano $H, K < G$; allora $HK < G \iff HK = KH$ e $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.

Dimostrazione. Per la prima parte, è sufficiente osservare che per $hk \in HK$, l'elemento neutro $(hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$ sta in HK se e solo se $HK = KH$, e, allo stesso modo, il prodotto è chiuso cioè $hkh'k' = hh''k''k' \in HK$ solamente se $HK = KH$ così da poter trovare un elemento di HK che sia uguale a $kh' \in KH$ che compare in tale prodotto.

La seconda parte, invece, si verifica considerando l'applicazione $\gamma : H \times K \rightarrow HK$ tale che $\gamma((h, k)) = hk$, che è evidentemente suriettiva; inoltre, se $s \in H \cap K$, allora $(hs, s^{-1}k) \in H \times K \Rightarrow \gamma((hs, s^{-1}k)) = hk$, il che vuol dire che $\forall hk \in HK$, si trovano $|H \cap K|$ coppie in $H \times K$ che hanno immagine hk , da cui la tesi. \square

Classificazione dei gruppi di ordine 6

Sia G un gruppo di ordine 6; per Cauchy, allora, esistono $x, y \in G$ tali che $\text{ord}(x) = 2$ e $\text{ord}(y) = 3$. Se G è abeliano, poi, si ha $\text{ord}(xy) = 6^a$, quindi $G = \langle xy \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Se, invece, G non è abeliano, si considera il sottogruppo $\langle x, y \rangle$ e si considera anche l'insieme $\langle x \rangle \langle y \rangle$ che, in generale, non è un sottogruppo.

Applicando la proposizione precedente (1.5), si ha che $|\langle x, y \rangle| = (3 \cdot 2)/1 = 6^b$, da cui $G = \langle x \rangle \langle y \rangle$, con $\langle x \rangle = \{e, x\}$ e $\langle y \rangle = \{e, y, y^2\}$, quindi $G = \{e, x, y, xy, y^2, xy^2\}$.

Per finire, si mostra che $G \cong S_3$. Per farlo, si definisce $\phi : G \rightarrow S_3 = \{e, \tau, \rho, \tau\rho, \tau^2, \rho\tau^2\}$ tale che $\phi(x) = \rho$ e $\phi(y) = \tau$, con $\tau = (1, 2, 3)$ e $\rho = (1, 2)$. Questa mappa è suriettiva per costruzione, quindi è biettiva per questioni di cardinalità; inoltre, è un omomorfismo, da cui segue la tesi.

^aSi dimostra per calcolo diretto; per esempio: $(xy)^3 = xyxyxy = xxxyyy = x$.

^bL'intersezione è solo l'unità perché i due elementi hanno ordini diversi, quindi generano gruppi disgiunti.

Teorema 1.5 (Teorema di Cayley). Sia G un gruppo; allora G è isomorfo a un sottogruppo di $S(G)$. In particolare, se $|G| = n$, allora G è isomorfo a un sottogruppo di S_n .

Dimostrazione. Si definisce l'azione

$$\phi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S(G) \\ g & \longmapsto & \gamma_g \end{array}, \quad \text{tale che } \gamma_g(x) = g \cdot x$$

Questa è ben definita perché $\gamma : G \rightarrow G$ è biettiva, infatti $\gamma_g(x) = \gamma_g(y) \iff g \cdot x = g \cdot y \iff x = y$ e $\forall y \in G, \exists \gamma_g(g^{-1} \cdot y) = y$, il che mostra che è rispettivamente

iniettiva e suriettiva. Inoltre, ϕ è un omomorfismo (ovvio) ed è anche iniettiva perché $\text{Ker } \phi = \{g \in G \mid \phi_g = \phi_e\} = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} = \{e\}$. Da questo, segue che $S(G)$ contiene una copia isomorfa a G . \square

1.5 Commutatore e gruppo derivato

Definizione 1.8. Sia G un gruppo e $S \subset G$ un suo sottoinsieme; allora $\langle S \rangle$ è il più piccolo sottogruppo di G contenente anche S .

Proposizione 1.6. Dato G un gruppo e $S \subset G$ un suo sottoinsieme, vale la relazione

$$\langle S \rangle = \{s_1 s_2 \dots s_k \mid k \in \mathbb{N}, s_i \in S \cup S^{-1}\} = X$$

con $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$.

Dimostrazione. Per definizione

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{H < G \\ S \subset H}} H$$

Questa scrittura è ben definita perché l'intersezione di gruppi è ancora un gruppo e, in questo modo, si ha il gruppo più piccolo contenente S ; se così non fosse, ne esisterebbe uno più piccolo ancora, che, però, farebbe parte dell'intersezione e sarebbe assurdo.

Ora, per quanto detto sopra, S è contenuto in tutti i gruppi la cui intersezione genera $\langle S \rangle$, quindi anche S^{-1} deve essere contenuto in tali sottogruppi di G . Segue che $S, S^{-1} \subset H \Rightarrow X \subset H$, $\forall H < G$ e $S \subset H$, quindi $X \subset \bigcap H = \langle S \rangle$.

Allo stesso tempo, X è evidentemente un sottogruppo di G e contiene S per costruzione, quindi $X \supset \langle S \rangle$, da cui la tesi. \square

Definizione 1.9 (Commutatore). Sia G un gruppo; dati $g, h \in G$, il loro *commutatore* è definito come

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$$

Definizione 1.10 (Gruppo derivato). Dato un gruppo G , si definisce *gruppo dei commutatori*, o *derivato* di G , il gruppo

$$G' = \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle = [G : G]$$

Ora si caratterizza il gruppo derivato. Intanto, si ricorda che $\langle S \rangle$ è abeliano $\iff \forall s_1, s_2 \in S, s_1 s_2 = s_2 s_1$, $\langle S \rangle$ è normale $\iff \forall g \in G, \forall s \in S, gsg^{-1} \in \langle S \rangle$ e, infine, $\langle S \rangle$ è caratteristico $\iff \forall f \in \text{Aut}(G), \forall s \in S$ si ha $f(s) \in S$. Applicando queste alla definizione di commutatore, si ottiene la seguente.

Proposizione 1.7 (Proprietà del derivato). Sia G un gruppo e G' il suo derivato; allora:

- (a). $G' = \{e\} \iff G$ è abeliano;
- (b). $G' \triangleleft G$;
- (c). G' è caratteristico in G ;
- (d). dato $H \triangleleft G$, se G/H è abeliano, allora $G' \subset H$.

Dimostrazione. La (a) è immediata perché $G' = \{e\} \iff \forall g_1, g_2 \in G, [g_1, g_2] = e$, cioè g_1 e g_2 commutano, da cui G abeliano.

Per la (b), $\forall x \in G, \forall g, h \in G$, si ha

$$\begin{aligned} x[g, h]x^{-1} &= xghg^{-1}h^{-1}x^{-1} = xgx^{-1}xhx^{-1}xg^{-1}x^{-1}xh^{-1}x^{-1} \\ &= [xgx^{-1}, xhx^{-1}] \in G' \end{aligned}$$

Per la (c), si nota che $\forall f \in \text{Aut}(G), \forall g, h \in G$, si ha:

$$f([g, h]) = f(ghg^{-1}h^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1}f(h)^{-1} = [f(g), f(h)] \in G'$$

Infine, per la (d), se $H \triangleleft G$ e G/H è abeliano, si ha $\forall x, y \in G$

$$xHyH = yHxH \Rightarrow xyH = yxH \implies x^{-1}y^{-1}xy \in H \Rightarrow [x, y] \in H$$

da cui $H \supset G'$. □

Corollario 1.5.1. Sia G un gruppo e G' il suo derivato; allora G/G' è sempre abeliano ed è chiamato *abelianizzazione* di G , nel senso che è il più grande quoziente abeliano di G .

Dimostrazione. Si mostra che G/G' è sempre abeliano. Siano, quindi $gG', hG' \in G/G'$ due classi laterali; allora si osserva che

$$(gG')(hG') = ghG' = hg[g^{-1}, h^{-1}]G' = hgG'$$

visto che $g^{-1}h^{-1}gh = [g^{-1}, h^{-1}] \in G'$. Allora, dalla proprietà (d) della precedente proposizione (1.7), si ha $G' \subset H = G'$, cioè in questo caso si ha l'inclusione nell'insieme più piccolo, ovvero proprio G' . Questo vuol dire che G/G' è il quoziente con più elementi che sia abeliano perché ottenuto tramite quoziente con G' , che è l'insieme più piccolo che soddisfa la proprietà¹. □

¹Per controposizione, se $G' \not\subset H \implies G/H$ non abeliano.

1.6 Gruppi diedrali

Definizione 1.11 (Gruppo diedrale). Per $n \in \mathbb{N}$, si considera un n -agono regolare nel piano; l'insieme di tutte le isometrie del piano che mandano l' n -agono in se stesso è indicato con D_n ed è noto col nome di *gruppo diedrale*.

Proposizione 1.8. Per $n \in \mathbb{N}$, il gruppo diedrale D_n ha cardinalità $|D_n| = 2n$.

Dimostrazione. Un'isometria è univocamente determinata dall'immagine di un vertice e di un lato adiacente al vertice stesso; allora, l'immagine può essere pari a n possibili vertici, con due, conseguenti, possibilità per il lato, da cui $2n$ possibili isometrie. \square

Proposizione 1.9. Sia ρ una rotazione che sottende un lato¹ e σ una simmetria (riflessione) dell' n -agono regolare; allora $\rho^n = e$, $\sigma^2 = e$ e $\sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$.

Dimostrazione. Visto che ρ manda un lato dell' n -agono regolare nella posizione del successivo, impiegherà n iterazioni a far tornare il lato di partenza nella posizione originale; similmente, se σ è una riflessione, sarà sufficiente riapplicarla per far tornare l' n -agono nella posizione originale.

Per l'ultima, si nota che, componendo una rotazione e una riflessione, si ottiene una riflessione; applicando la seconda proprietà, si ottiene $\sigma\rho\sigma\rho = e \Rightarrow \sigma\rho\sigma = \rho^{-1}$. \square

Osservazione 1.5. Le isometrie del piano che agiscono su un n -agono, quindi gli elementi di D_n , si possono mettere in relazione con $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, cioè possono essere rappresentate tramite matrici:

$$\rho \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ -\sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} = M_\rho \quad \sigma \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M_\sigma \quad (1.6.1)$$

Si nota, inoltre, che indicando con \mathbb{D}_n il gruppo generato da queste matrici, allora la mappa $\gamma : \langle \rho, \sigma \rangle \rightarrow \mathbb{D}_n$ e notare che questo è un omomorfismo di gruppi; infatti, la composizione di isometrie che fissano un punto, sono ancora isometrie che fissano lo stesso punto (in questo caso, l' n -agono). Questo per dire che la mappa $\rho^i \sigma^j \mapsto M_\rho^i M_\sigma^j$ è ben definita.

Si può, inoltre, verificare che $M_\rho^n = \text{Id}$, $M_\sigma^2 = \text{Id}$ e $M_\sigma M_\rho M_\sigma = M_\rho^{-1}$, per cui si conclude che γ è un omomorfismo.

Essendo γ un omomorfismo, si vede anche che ρ e σ , come elementi di D_n , non sono legati da alcuna relazione perché, altrimenti, lo sarebbero anche le loro matrici associate, cosa che sarebbe assurda.

Proposizione 1.10. Tutti gli elementi di D_n si scrivono come $\sigma\rho^i$, oppure ρ^i , con $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

¹Cioè che manda un lato nel successivo.

Dimostrazione. Sia $g \in D_n$; allora g sarà una generica composizione di riflessioni e rotazioni del tipo $g = \rho^{a_1} \sigma^{b_1} \dots \rho^{a_k} \sigma^{b_k}$, dove $a_i \in \mathbb{Z}$ e $b_j \in \{0, 1\}$. Usando le relazioni $\sigma^2 = \rho^n = e$, si riscalgano gli esponenti per scrivere $g = \rho^{c_1} \sigma \dots \rho^{c_m} \sigma$, dove si sono anche, eventualmente, uniti esponenti di rotazioni consecutive (quindi $m \leq k$).

Usando $\sigma^2 = e$ e assumendo $c_1 \neq 0$, si può scrivere

$$g = \rho^{c_1} \sigma \dots \rho^{c_m} \sigma = \sigma \sigma \rho^{c_1} \sigma \sigma \rho^{c_2} \dots \sigma \rho^{c_m} \sigma = \sigma \rho^{-c_1} \rho^{-c_2} \dots \rho^{-c_m} = \sigma \rho^{-d}$$

dove si è fatto uso della relazione $\sigma \rho \sigma = \rho^{-1}$ e con $d \equiv -\sum_{i=1}^m c_i \pmod{n}$.

Se, invece, $c_1 = 0$ (cioè la *parola* inizia con σ), allora $g = \rho^{-c_2} \dots \rho^{-c_m} = \rho^{d'}$, con $d' \equiv -\sum_{i=2}^m c_i \pmod{n}$. \square

Grazie alla precedente proposizione, è possibile definire $\rho^{[i]} = \rho^i$, con $[i] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, visto che $\rho^n = e$.

Inoltre, se $\rho, \sigma \in D_n$, allora $\langle \rho, \sigma \rangle < D_n$; però, per quanto detto finora, si ha $|\langle \rho, \sigma \rangle| = 2n$ perché $\rho^n = e = \sigma^2$, quindi, per ragioni di cardinalità, segue che $D_n = \langle \rho, \sigma \rangle$.

1.6.1 Sottogruppi di D_n

Numero di elementi di ordine k . Sia ρ una rotazione in D_n ; si considera $\langle \rho \rangle \cong C_n < D_n$ ¹.

Essendo C_n ciclico, vi sono $\phi(k)$ elementi di ordine k , se $k \mid n$. Oltre alle n rotazioni ρ^i , in D_n sono presenti anche le n riflessioni $\sigma \rho^i$; osservando che $\sigma \rho^i \sigma \rho^i = \rho^{-i} \rho^i = e$, si conclude che se n è pari, vi sono $n + 1$ elementi di ordine 2 (cioè le n riflessioni e $\rho^{n/2}$), mentre se n è dispari, vi sono n elementi di ordine 2. Ricapitolando:

$$\# \{\text{elementi di ordine } k\} = \begin{cases} n + 1 & , \text{ se } k = 2 \text{ e } n \text{ pari} \\ n & , \text{ se } k = 2 \text{ e } n \text{ dispari} \\ \phi(k) & , \text{ se } k \mid n \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases} \quad (1.6.2)$$

visto che le n riflessioni sono tutte di ordine 2 e l'esistenza di $\rho^{n/2}$ dipende dalla parità di n .

I sottogruppi. Nel punto precedente, si è notato che C_n è uno dei sottogruppi. Inoltre, i sottogruppi di C_n sono noti: ne esiste uno per ogni divisore dell'ordine del gruppo, cioè n in questo caso, per cui se $H < D_n$ e $H < C_n$, allora H è l'unico sottogruppo di ordine $|H|$. Se, invece $H < D_n$ e $H \not< C_n$, allora H contiene almeno una riflessione τ .

Proposizione 1.11. Si ha $(H \cap C_n) \sqcup (\tau H \cap C_n)$ ed esiste una mappa biettiva tra $(H \cap C_n)$ e $(\tau H \cap C_n)$.

¹Qui, con C_n si indica un generico gruppo ciclico di ordine n .

Dimostrazione. Si considera

$$\begin{array}{ccc} D_n & \xrightarrow{\gamma} & \text{GL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & \searrow \varphi & \nearrow \end{array}$$

dove γ è l'omomorfismo definito che a ρ e σ associa le relative matrici, mentre le matrici di $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ sono mappate a $\{\pm 1\}$ tramite il determinante: $\det M_\rho = 1$ e $\det M_\sigma = -1$. La mappa $\phi = \gamma \circ \det$ è un omomorfismo suriettivo proprio per come è definita γ (cioè è un omomorfismo) e per il teorema di Binet per cui $\det(M_\rho^i M_\sigma^j) = \det(M_\rho)^i \det(M_\sigma)^j = 1^i (-1)^j = 1 \iff j = 0$.

Considerando, quindi, $\varphi : D_n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la sua restrizione φ_H con $H < D_n$ e $H \not\leq C_n$ è suriettiva e il suo kernel è $H \cap C_n$; per il I teorema di omomorfismo, allora $H/(H \cap C_n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Per il teorema di Lagrange, poi, si ha $|H|/|H \cap C_n| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}|$, per cui $|H| = 2|H \cap C_n|$.

Si nota che $\tau H \cap C_n \not\subset H \cap C_n$ perché se $h \in H$, allora $\det(M_\tau M_h) = \det M_\tau \det M_h = -1$, per cui i due insiemi sono disgiunti; inoltre, $\tau h_1 = \tau h_2 \Rightarrow h_1 = h_2$, per cui $|\tau H \cap C_n| = |H \cap C_n|$. Considerando, allora

$$\psi : \begin{array}{ccc} H \cap C_n & \longrightarrow & \tau H \cap C_n \\ h & \longmapsto & \tau h \end{array}$$

questa è biettiva. Ora, $H \cap C_n = \langle \rho^m \rangle = \{e, \rho^m, \rho^{2m}, \dots, \rho^{n-m}\}$, con $m \mid n$; se $\tau = \sigma \rho^i$, allora

$$\tau H \cap C_n = \{\sigma \rho^i, \sigma \rho^{i+m}, \dots, \sigma \rho^{i+n-m}\}$$

quindi, l'unione dei due restituisce tutto H . □

Segue che H è composto da m rotazioni e m simmetrie; in particolare $H = \langle \rho^m, \tau \rangle \cong D_m$, quindi, se $m \mid n$, si hanno dei sottogruppi della forma $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e D_m .

Sottogruppi normali. Per lo studio dei sottogruppi normali, si considerano le due seguenti proposizioni.

Proposizione 1.12. Sia G un gruppo e sia $H < G$; se H ha indice 2 in G , allora $H \triangleleft G$.

Dimostrazione. Sia, quindi, $G/H = \{H, \tau H\}$, per qualche $\tau \in G$; dato $g \in G$, allora, si ha $g = h_1$, oppure $g = \tau h_2$, con $h_1, h_2 \in H$. Sia, ora, $hg \in Hg$ per $g \in G \setminus H$; allora $g = \tau h_3$, oppure $hg = \tau h_4 = \tau h_3 h_3^{-1} h_4 = gh_5$, per cui $Hg \subset gH$. Inoltre, $|Hg| = |gH|$, quindi deve essere $Hg = gH$ e, quindi, $H \triangleleft G$. □

Proposizione 1.13. Siano $H \triangleleft G$ e $K < H$, con K caratteristico in H ; allora $K \triangleleft G$.

Dimostrazione. Si considera, per $g \in G$, $\phi_g : G \rightarrow G$ con $\phi_g(x) = gxg^{-1}$; per definizione, si ha $\phi_g(H) = H$, quindi $\phi_g|_H$ è un automorfismo, quindi $\phi_g|_H(K) = K$, $\forall g \in G \Rightarrow gKg^{-1} = K$, pertanto $K \triangleleft G$. \square

L'indice di C_n in D_n è 2, quindi $C_n \triangleleft D_n$ per la prima proposizione. Visto che per G ciclico di ordine n , esiste un unico H , con $|H| = m \mid n$, allora ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è caratteristico e, quindi, nel caso di D_n , ogni sottogruppo di $\langle \rho \rangle \cong C_n$ è caratteristico. Per la seconda proposizione, questo significa che ogni sottogruppo di C_n è normale; se n è pari, allora $\langle \rho^2 \rangle < C_n$ ha $n/2$ elementi.

Considerando $H < D_n$ e $H \not\subset C_n$, con $H \cap C_n = \langle \rho^2 \rangle$, si ha

$$H = \langle \rho^2 \rangle \sqcup \tau \langle \rho^2 \rangle$$

quindi $[D_n : H] = 2$, per cui $H \triangleleft D_n$.

Di sottogruppi di questa forma, se ne trovano due: $\langle \rho^2, \sigma \rangle$ e $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$, ma non si sa se siano tutti i sottogruppi normali, quindi si cerca di caratterizzarli meglio. Si sa che $H \triangleleft G \iff gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$, quindi per ogni elemento di un sottogruppo normale, devono figurare anche tutti i suoi coniugati. Per la proposizione 1.10, per capire come sono fatti i coniugati di D_n , è sufficiente studiare quali siano quelli di ρ^i e $\sigma\rho^i$. Si nota che:

$$\rho^i \rho^i \rho^{-i} = \rho^i \quad \sigma \rho^i \rho^i \rho^{-i} \sigma = \sigma \rho^i \sigma = \rho^{-i}$$

quindi l'insieme dei coniugati di ρ^i è $\{\rho^i, \rho^{-i}\}$; in particolare, se $i \in \{0, n/2\}$, tale insieme diventa $\{e\}$, oppure $\{\rho^{n/2}\}$ rispettivamente. Poi, si nota che:

$$\rho^i \sigma \rho^j \rho^{-i} = \sigma \rho^{-i} \rho^j \rho^{-i} = \sigma \rho^{j-2i} \quad \sigma \rho^i \sigma \rho^j \rho^{-i} \sigma = \rho^{-i} \rho^j \rho^{-i} \sigma = \sigma \rho^{2i-j}$$

quindi se n è pari, allora $\sigma \rho^s \sim \sigma \rho^t \iff \equiv t \pmod{2}$, quindi le riflessioni di spezzano in due classi di coniugio; se n è dispari, invece, le riflessioni sono tutte coniugate.

Ricapitolando:

- se n è dispari e se un sottogruppo contiene una riflessione, allora le contiene tutte e tutte le riflessioni generano D_n , infatti σ è dato e $\rho = \sigma \sigma \rho$, quindi $H \triangleleft D_n \Rightarrow H = D_n$, mentre se non contiene alcuna riflessione, allora è un sottogruppo di C_n ;
- se n è pari, oltre ai sottogruppi di C_n , si considerano gli $H \triangleleft D_n$ che sono tali che $\sigma \rho^i \in H$, per cui $\sigma \rho^{i+2} \in H$ e $\rho^2 \in H$, pertanto, se $H \neq D_n$, devono essere della forma $\langle \rho^2, \sigma \rangle$, o $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$.

Sottogruppi caratteristici. Usando quanto visto per i sottogruppi normali, si conclude che i possibili sottogruppi caratteristici sono i sottogruppi di C_n e $\langle \rho^2, \sigma \rangle$ e $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$. Mentre si sa già che i sottogruppi di C_n sono caratteristici, si osserva che, per gli altri due, la mappa $\tau : D_n \rightarrow D_n$ tale che $\tau(\rho) = \rho$ e $\tau(\sigma) = \sigma\rho$ è un automorfismo che scambia $\langle \rho^2, \sigma \rangle$ con $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$ e viceversa, quindi non sono caratteristici.

1.6.2 Centro, quozienti e automorfismi di D_n

Il centro. Si cercano tutti gli elementi $\tau \in D_n$ tale che $\forall \rho \in D_n, \rho\tau\rho^{-1} = \tau$. Dal precedente studio dei coniugi nei sottogruppi normali, si conclude che $Z(D_n) = \{e\}$ se n è dispari e $Z(D_n) = \{e, \rho^{n/2}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se n è pari.

Quozienti. Si sa che i quozienti sono in corrispondenza biunivoca con i sottogruppi normali, il che vuol dire che esiste un quoziente per ciascun $H \triangleleft G$. A meno di un automorfismo, i quozienti si ottengono come segue. Per quanto visto precedentemente, i sottogruppi normali sono i sottogruppi di C_n e, se n è pari, anche quelli della forma $\langle \rho^2, \sigma \rangle$ e $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$. Sia, $\langle \rho^m \rangle < C_n$, con $m \mid n$, per cui $|D_n/\langle \rho^m \rangle| = 2n/m$.

Proposizione 1.14. Si ha $D_n/\langle \rho^m \rangle \cong D_{n/m}$.

Dimostrazione. Si considera

$$\begin{array}{ccc} D_n & \longrightarrow & D_{n/m} \\ \gamma: \quad \sigma & \longmapsto & \tau \\ & \rho & \longmapsto \epsilon \end{array}$$

dove $D_n = \langle \sigma, \rho \mid \rho^n = \sigma^2 = e, \sigma\rho\sigma = \rho^{-1} \rangle$ e $D_{n/m} = \langle \tau, \epsilon \mid \epsilon^{n/m} = \tau^2 = e, \tau\epsilon\tau\epsilon^{-1} \rangle$. Si nota che questo è suriettivo e il suo nucleo è $\langle \rho^m \rangle$, quindi si ha la tesi per il I teorema di omomorfismo. \square

Nel caso di n pari, poi, vi sono gli altri due sottogruppi citati sopra, che hanno indice 2 e, quindi, i cui quozienti sono isomorfi a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Gli automorfismi. Si studia $\text{Aut}(D_n)$. Per farlo, si cerca di calcolarne la cardinalità. Per definire un automorfismo in D_n , lo si definisce sui generatori, che si sanno essere ρ e σ . L'immagine di questi generatori deve essere un altro generatore: ad esempio, l'immagine di ρ , che ha ordine n , deve avere come immagine un elemento di ordine n ; questi sono della forma ρ^i , con $\gcd(i, n) = 1$, quindi ci sono $\phi(n)$ possibili scelte. Poi, σ ha ordine 2 e deve avere, come immagine, un altro elemento di ordine 2 che, insieme al ρ^i scelto prima, generi D_n ; ci sono n riflessioni della forma $\sigma\rho^j$, quindi un totale di n scelte possibili. Si nota che se n è pari, anche $\rho^{n/2}$ ha ordine 2, ma la coppia $\rho^i, \rho^{n/2}$ non genera D_n .

Sia, allora

$$\begin{array}{ccc} D_n & \longrightarrow & D_n \\ \gamma: \quad \rho^h & \longmapsto & \rho^{ih} \\ & \sigma\rho^k & \longmapsto \sigma\rho^j\rho^{ik} \end{array}$$

con $\gcd(i, n) = 1$ e j qualsiasi; γ è ben definita e

$$\gamma((\rho^s)(\sigma\rho^t)) = \gamma(\sigma\rho^{t-s}) = \sigma\rho^j\rho^{i(t-s)} = \sigma\rho^{-is}\rho^j\rho^{it} = \rho^{is}\sigma\rho^j\rho^{it} = \gamma(\rho^s)\gamma(\sigma\rho^t)$$

per cui è un omomorfismo. Inoltre, è biettiva per costruzione, quindi si ha $|\text{Aut}(D_n)| = n\phi(n)$; da un punto di vista insiemistico, esiste una biezione tra $\text{Aut}(D_n)$ e $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Esercizio 1.1. Studiare D_4 (risultati a pagina 19) e D_6 .

1.7 Permutazioni

Definizione 1.12 (Permutazione). Sia X un insieme; una mappa $f : X \rightarrow X$ è detta *permutazione* se è biettiva. Le permutazioni formano un gruppo rispetto alla composizione tra funzioni ed è indicato con

$$S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è biettiva}\}$$

Se $X = \{1, \dots, n\}$, allora il gruppo delle permutazioni si indica con S_n e $|S_n| = n!$.

Una permutazione di S_n può essere rappresentata tramite cicli, i quali sono disgiunti e, quindi, commutano fra loro.

Ogni k -ciclo (ciclo di lunghezza k) ha k scritture diverse, tutte equivalenti fra loro, dovute alla possibilità di scegliere uno fra i k elementi del ciclo come primo elemento; dopo questa scelta, tutti gli altri sono univocamente determinati.

Proposizione 1.15. I cicli di una permutazione di S_n sono orbite degli elementi di $X = \{1, \dots, n\}$ formate dall'azione indotta da tale permutazione.

Dimostrazione. Sia $\sigma \in S_n$ e sia $\langle \sigma \rangle$ il sottogruppo ciclico generato da σ . Si considera l'azione di $\langle \sigma \rangle$ su X secondo la legge $\sigma^k \cdot x = \sigma^k(x)$; l'orbita di ciascun elemento di X è della forma

$$\text{Orb}(x) = \left\{ \sigma^k(x) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si nota che $|X| < \infty \Rightarrow |\text{Orb}(x)| < \infty, \forall x$. Sia, poi, $m \geq 1$ il più piccolo intero tale che $\sigma^m(x) = x^1$; allora gli elementi

$$x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{m-1}(x)$$

sono tutti distinti (per definizione di m) e formano $\text{Orb}(x)$. Facendo agire σ su $\text{Orb}(x) \subset X$, si nota che

$$x \mapsto \sigma(x), \sigma(x) \mapsto \sigma^2(x), \dots, \sigma^{m-1}(x) \mapsto \sigma^m(x) = x$$

¹Questo esiste per forza, altrimenti si avrebbero orbite di infiniti elementi a partire da un insieme finito.

L'azione di σ ristretta a $\text{Orb}(x)$, allora, si può vedere come la permutazione

$$\begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \sigma^2(x) & \cdots & \sigma^{m-1}(x) \end{pmatrix}$$

che è un m -ciclo. Se O_1, \dots, O_r sono le orbite non banali (cioè di lunghezza > 1), σ agisce su ciascuna O_i come un m_i -ciclo, chiamato c_i per ogni orbita, con $|O_i| = m_i$, mentre su quelle banali agisce come l'identità. Visto che le orbite partizionano X , ciascun ciclo c_i è disgiunto dagli altri e la loro composizione restituisce proprio σ , visto che per definizione sono la restrizione di σ a partizioni di X . \square

Corollario 1.5.2. Il gruppo S_n è generato dai cicli.

Dimostrazione. Il teorema precedente mostra come ciascuna permutazione $\sigma \in S_n$ si possa scrivere come composizione di un numero finito di cicli disgiunti, pertanto combinando l'insieme di tutti i possibili cicli, si ottiene S_n . \square

Numero di k -cicli di S_n . Si cerca quanti k -cicli, con $k \leq n$, sono contenuti in S_n . Visto che un ciclo è una sequenza di k numeri, il problema si riduce a trovare quanti k numeri possono essere estratti da un insieme di n numeri, che si sa essere dato da $\binom{n}{k}$. Queste, però, non sono tutte perché i k numeri si possono scambiare in $k!$ modi diversi; allo stesso tempo, è possibile costruire k k -cicli equivalenti, quindi il numero totale ammonta a $\binom{n}{k} \frac{k!}{k} = \binom{n}{k} (k-1)!$.

Numero di permutazioni di S_{12} sono composizione di 2 3-cicli e 3 2-cicli disgiunti.

Dal punto precedente, si sa che in S_{12} si trovano $\binom{12}{3} \frac{3!}{3}$; fissato il primo 3-ciclo, restano $12 - 3$ elementi liberi per gli altri cicli¹, quindi, per il secondo 3-ciclo, si hanno $\binom{9}{3} \frac{3!}{3}$ scelte possibili. Continuando così per tutti i cicli rimanenti, si ottengono

$$\binom{12}{3} \frac{3!}{3} \binom{9}{3} \frac{3!}{3} \binom{6}{3} \frac{2!}{2} \binom{4}{3} \frac{2!}{2} \binom{2}{3} \frac{2!}{2}$$

possibili permutazioni, dove si è modificata la formula per scegliere due 3-cicli e tre 2-cicli. Però se ne sono contati troppi: prendendo d'esempio i due 3-cicli, essendo disgiunti, questi possono commutare senza alterare la permutazione, però col conto precedente si sono considerati distinti. Per risolvere, si deve dividere per tutti i possibili modi di commutare i 3-cicli, cioè $2!$ in questo caso. Lo stesso si deve fare per i tre 2-cicli, i cui modi di permutarle sono $3!$. Complessivamente, si hanno un totale di

$$\binom{12}{3} \frac{3!}{3} \binom{9}{3} \frac{3!}{3} \binom{6}{3} \frac{2!}{2} \binom{4}{3} \frac{2!}{2} \binom{2}{3} \frac{2!}{2} \frac{1}{3!2!}$$

possibili permutazioni.

¹I tre scelti vanno rimossi affinché gli altri cicli siano disgiunti.

Ordine di una permutazione di S_n . Un k -ciclo ha ordine k ; infatti per $\sigma = (a_1 \cdots a_k)$, si ha

$$\sigma^s(a_i) = a_j \quad \text{con } j \equiv s + i \pmod{k} \text{ e } j < k$$

quindi $\sigma^s(a_i) = a_{i+s} = a_i \iff s + i \equiv i \pmod{k} \iff s \equiv 0 \pmod{k}$.

Se la permutazione è formata da ℓ cicli disgiunti σ_i , invece, il suo ordine è

$$\text{ord}(\sigma) = \text{lcm}(\text{ord}(\sigma_1), \dots, \text{ord}(\sigma_\ell))$$

perché è il più piccolo numero tale che ogni ciclo torni al punto di partenza. Si nota, infatti, che se m è tale che $\sigma^m = e$, allora

$$e = \sigma^m = \sigma_1^m \cdots \sigma_\ell^m \implies \sigma_i^m = e, \quad \forall i = 1, \dots, \ell$$

quindi $\text{ord}(\sigma_i) \mid m$, $\forall i$ e, quindi, $m = \text{lcm}(\text{ord}(\sigma_1), \dots, \text{ord}(\sigma_\ell))$.

Definizione 1.13 (Trasposizione). Sia $\tau \in S_n$; se τ è della forma (a_i, a_j) , cioè è un 2-ciclo, allora si dice *trasposizione*.

Proposizione 1.16. Tutte le permutazioni di S_n si scrivono come composizione di trasposizioni.

Dimostrazione. Per il corollario 1.5.2, è sufficiente mostrare che vale per un k -ciclo generico. A questo proposito, si osserva che:

$$(1, \dots, k) = (1, k)(1, k-1) \cdots (1, 2)$$

□

Osservazione 1.6. La decomposizione in trasposizioni non è unica: per esempio:

$$(12) = (12)(34)(34) = (12)(34)(35)(67)(34)(35)(67)$$

Proposizione 1.17. L'applicazione

$$\begin{aligned} S_n &\longrightarrow \{\pm 1\} = \mathbb{Z}^* \\ \text{sgn} : \sigma &\longmapsto \text{sgn } \sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \end{aligned}$$

1.8 Gruppi di Sylow e prodotti diretti