

Compito 23 giugno 2022

Si consideri un sistema quantistico composto da un elettrone e un positrone (identico all'elettrone ma con carica opposta), che interagiscono attraverso il potenziale di Coulomb $U(r) = -\kappa/r$ dove r è la distanza tra le particelle e $\kappa = e^2$ (in CGS, oppure $\kappa = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ in SI), dove e è la carica dell'elettrone. I suoi stati legati formano il cosiddetto *positronio*.

(1) Scrivere l'operatore di Hamilton del sistema usando le coordinate \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 delle due particelle. Dire quali quantità del sistema si conservano.

(2) Riscrivere l'Hamiltoniana usando la coppia di coordinate date dal vettore posizione \mathbf{X} del centro di massa, e il vettore posizione relativa $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$. Scrivere gli autovalori dell'Hamiltoniano associati agli stati legati del sistema, senza trascurare i contributi associati al moto del centro di massa.

(3) Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale nel sistema del centro di massa e calcolare il raggio quadratico medio r_p del positronio nel suo stato fondamentale (cioè la distanza quadratica media tra le particelle, definita come $r_p = \sqrt{\langle |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 \rangle}$).

(4) Scrivere le funzioni d'onda dei primi stati eccitati, con momento angolare $\ell = 0$ e $\ell = 1$, nel sistema del centro di massa, e calcolare il loro raggio quadratico medio.

(5) Supponiamo che il sistema sia nello stato fondamentale nel sistema di riferimento del centro di massa. Un osservatore in moto con velocità \mathbf{V} rispetto al sistema del centro di massa come scriverebbe la funzione d'onda del positronio? A che autovalore della Hamiltoniana corrisponderebbe?

La probabilità di osservare l'annichilazione del positronio in fotoni è proporzionale alla probabilità che le due particelle vengano in contatto, e cioè siano ad una distanza più piccola di $\lambda_e = \hbar/(m_e c)$ dove c è la velocità della luce (ricordatevi che il raggio di Bohr è dato da $r_B = \hbar/(m_e c \alpha) \approx 0.53 \times 10^{10} \text{m}$ e $\alpha \approx 1/137$, quindi $\lambda = \alpha r_B$).

(6) Assumendo che il positronio sia nello stato fondamentale, calcolare la probabilità che le due particelle siano ad una distanza inferiore a λ_e . Dato che $\lambda_e \ll r_B$, nel calcolo è possibile usare approssimazioni, la cui validità deve essere debitamente giustificata.

(7) Assumendo adesso che il positronio sia in uno dei primi stati eccitati con momento angolare $\ell = 1$, calcolare la probabilità che le due particelle siano ad una distanza inferiore a λ_e . Dire come dipende tale risultato dal momento angolare L_z lungo l'asse \hat{z} .

Consideriamo adesso il fatto che l'elettrone e il positrone sono entrambe particelle di spin $1/2$.

Assumiamo l'esistenza di un'interazione spin-spin tra le particelle, cioè

$$H_{ss} = \beta \mathbf{s}_e \cdot \mathbf{s}_p$$

dove $\beta > 0$, e $\mathbf{s}_{e/p}$ sono gli operatori di spin dell'elettrone e del positrone.

(8) Descrivere lo spettro in presenza dell'interazione H_{ss} , e discuterne la degenerazione dei livelli.

Poniamo $\beta = 0$ e consideriamo adesso un'interazione del tipo $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$, più precisamente

$$H_{ls} = \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_p,$$

dove \mathbf{L} è il momento angolare spaziale totale nel sistema del centro di massa.

(9) Discutere le leggi di conservazione in presenza di questa interazione. In particolare si conserva il momento angolare totale? Si conserva il momento angolare spaziale $\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_p$ (calcolato rispetto al centro di massa) e lo spin totale $\mathbf{S} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_p$? Si conservano S^2 e L^2 ?

(10) Scrivere lo spostamento dei livelli energetici dei primi stati dello spettro assumendo l'interazione $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ perturbativa, discutere i limiti di validità della approssimazione e la degenerazione dei livelli in presenza di questa perturbazione.

Alcune formule utili che riguardano le autofunzioni (parte radiale) del fondamentale e primi eccitati dell'atomo di idrogeno:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{r_B^{3/2}} e^{-r/r_B}, \quad R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2} r_B^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2r_B} \right) e^{-r/(2r_B)}, \quad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24} r_B^{3/2}} \frac{r}{r_B} e^{-r/(2r_B)}.$$

I. SOLUZIONI

(1) La Hamiltoniana del sistema nelle coordinate x_1 e x_2 è

$$H = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{k}{r}, \quad r = |x_1 - x_2| \quad (1)$$

L'impulso totale è conservato perché il sistema è invariante per traslazioni. Il momento angolare è conservato.

(2) La Hamiltoniana in funzione della coordinata del centro di massa $X = (x_1 + x_2)/2$ e la coordinata relativa $x = x_1 - x_2$ diventa

$$\frac{P_X^2}{2M} + \frac{p_x^2}{2\mu} - \frac{k}{r}, \quad \text{with } \mu = \frac{m_e}{2} \quad M = 2m_e. \quad (2)$$

dove $P_X = p_1 + p_2$ e $p_x = (p_1 - p_2)/2$. Il moto del centro di massa è disaccoppiato e nel seguito non è considerato. Il centro di massa si comporta come una particella libera. Il sistema è essenzialmente l'atomo di idrogeno. Le energie degli stati legati dell'Hamiltoniana sono

$$E_n = -\frac{\mu k^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad (3)$$

dove $\mu = m_e/2$ è la massa ridotta.

(3) Lo stato fondamentale è descritto dalla funzione d'onda

$$|0, 0, 0\rangle = Y_{00}(\theta, \phi) R_{10}(r), \quad (4)$$

dove usiamo la notazione standard $|n, \ell, \ell_z\rangle$ per gli autostati dell'atomo di idrogeno. Il raggio quadratico medio del fondamentale è definito come

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty dr r^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta Y_{00}^2(\theta) R_{10}^2(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dr r^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{-2r/\tilde{r}_B}. \quad (5)$$

Qui \tilde{r}_B è il raggio di Bohr a meno della sostituzione $m_e \rightarrow \mu$. L'integrale angolare dà 1. L'integrale su r è

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4}{\tilde{r}_B^3} \int_0^\infty dr r^4 e^{-2r/\tilde{r}_B} = 3\tilde{r}_B^2. \quad (6)$$

Allora abbiamo

$$r_p = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{3}\tilde{a}_B. \quad (7)$$

(4) Le funzioni d'onda per i primi stati eccitati sono

$$|2, 0, 0\rangle, |2, 1, 1\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 1, -1\rangle, \quad (8)$$

dove $|n, \ell, \ell_z\rangle = Y_{\ell, \ell_z}(\theta) R_{n, \ell}(r)$.

Il raggio quadratico medio si calcola in maniera simile al punto (3). Possiamo trascurare la dipendenza angolare delle funzioni d'onda perché si semplificano nell'integrale. Otteniamo gli integrali radiali

$$r_p^2 = \langle 2, 0, 0 | r^2 | 2, 0, 0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \frac{r^4}{\tilde{r}_B^3} \left(1 - \frac{r}{2\tilde{r}_B}\right)^2 e^{-r/\tilde{r}_B} = 42\tilde{r}_B^2 \quad (9)$$

$$r_p^2 = \langle 2, 1, \ell_z | r^2 | 2, 1, \ell_z \rangle = \frac{1}{24} \int_0^\infty dr \frac{r^6}{\tilde{r}_B^5} e^{-r/\tilde{r}_B} = 30\tilde{r}_B^2. \quad (10)$$

(5) Rispetto ad un sistema di riferimento che si muove a velocità V la funzione d'onda è data da

$$e^{-iM\mathbf{V}\cdot\mathbf{X}/\hbar}\psi, \quad E = \frac{MV^2}{2} - \frac{\mu k^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad (11)$$

dove ψ è la funzione d'onda rispetto al sistema di riferimento originale.

(6) La probabilità che le due particelle siano ad una distanza inferiore a $\lambda_e \ll \tilde{r}_B$ è data da

$$p(r \leq \lambda_e) = \int_0^{\lambda_e} dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta |\psi_{n,\ell,\ell_z}(r, \theta, \phi)|^2 \quad (12)$$

Per lo stato fondamentale otteniamo

$$p(r \leq \lambda_e) = 4 \int_0^{\lambda_e} dr \frac{r^2}{\tilde{r}_B^3} e^{-2r/\tilde{r}_B} \quad (13)$$

Dopo il cambio di variabile $x = r/\lambda_e$ otteniamo

$$p(r \leq \lambda_e) = 4 \frac{\lambda_e^3}{\tilde{r}_B^3} \int_0^1 dx x^2 e^{-2x\lambda_e/\tilde{r}_B}. \quad (14)$$

Siccome $\lambda_e \ll \tilde{r}_B$ possiamo espandere l'esponenziale ottenendo

$$p(r \leq \lambda_e) \approx \frac{4}{3} \frac{\lambda_e^3}{\tilde{r}_B^3}. \quad (15)$$

(7) In maniera simile possiamo procedere per gli stati con $\ell = 1$. Notiamo che il risultato non dipende dal valore di ℓ_z . Procedendo come prima, otteniamo

$$p(r \leq \lambda_e) = \frac{\lambda_e^5}{24\tilde{r}_B^5} \int_0^1 dx x^4 e^{-x\lambda_e/\tilde{r}_B} \approx \frac{1}{120} \frac{\lambda_e^5}{\tilde{r}_B^5}. \quad (16)$$

Notiamo che per il livello con $n = 2$ e $\ell = 0$ otterremmo un andamento del tipo $\lambda_e^3/\tilde{r}_B^3$, come per lo stato fondamentale.

(8) In presenza di H_{ss} è conveniente considerare la base dello spin total $\mathbf{S} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_p$ in cui H_{ss} è diagonale. Scriviamo

$$H_{ss} = \frac{\beta}{2} (\mathbf{S}^2 - s_e^2 - s_p^2) \quad (17)$$

Gli autostati del sistema diventano

$$|n, \ell, \ell_z\rangle \otimes |S, S_z\rangle, \quad (18)$$

dove $S = 0, 1$ e $S_z = -S, -S+1, \dots, S-1, S$. Gli autovalori di H_{ss} E_{ss} diventano

$$E_{ss} = \begin{cases} -\frac{3}{4}\beta & S = 0 \\ \frac{\beta}{4} & S = 1 \end{cases} \quad (19)$$

Se consideriamo l'elettrone e il positrone come particelle di spin $1/2$ e mettiamo $\beta = 0$, i livelli rimangono gli stessi di prima, ma la degenerazione è $4n^2$. Il fattore 4 è dovuto agli stati di spin. Se consideriamo l'effetto di H_{ss} la degenerazione $4n^2$ del generico livello con n fissato si splitta in $3n^2 + n^2$, dove $3n^2$ sono i livelli nello stato di spin di tripletto e n^2 sono nello stato di singoletto. Per $\beta > 0$ gli stati di singoletto sono shiftati verso il basso di $-3/4\beta$, mentre gli stati di tripletto sono shiftati verso l'alto di $\beta/4$. Il ground state è nello stato di singoletto.

(9) Accendiamo ora la perturbazione di spin orbita. Ora il momento angolare orbitale totale \mathbf{L} e quello di spin \mathbf{S} non commutano con la perturbazione. \mathbf{S}^2 , \mathbf{L}^2 , $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, sono quantità conservate. La perturbazione è uno scalare rispetto a \mathbf{J} .

Per studiare l'effetto della perturbazione conviene utilizzare la base

$$|n, j, j_z, \ell, S\rangle, \quad (20)$$

dove j è l'autovalore di \mathbf{J}^2 , j_z quello di J_z , ℓ quello di \mathbf{L}^2 e s di \mathbf{S}^2 . In questa base la perturbazione è diagonale con autovalori E_{ls}

$$E_{ls} = \frac{\gamma}{2} (j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)) \quad (21)$$

L'energia totale dei livelli è

$$E = E_n + E_{ls}, \quad (22)$$

dove E_n è data in (3) e E_{ls} è definita in (21).

Lo stato con $n = 1$ può avere solo $\ell = 0$ e può essere nello stato di singoletto o tripletto di spin di spin. Gli stati di tripletto sono degeneri. Inoltre l'effetto della perturbazione è zero su tutti gli stati con $n = 1$. Per $n = 2$ possiamo avere $\ell = 0, 1$ e $S = 0, 1$. Questi livelli danno $j = 0, 0, 1, 1, 1, 2$. Un singoletto e due tripletti sono degeneri e non affetti dalla perturbazione, per un totale di 7 stati degeneri, tenendo conto della degenerazione su j_z . Gli stati che rimangono (singoletto, il tripletto e il quintupletto) hanno solo la degenerazione su j_z . Quindi la degenerazione è rotta come $16 = 7 + 1 + 3 + 5$.