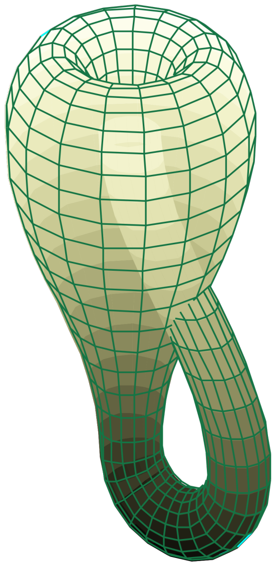
NOTE DI GEOMETRIA 2

Manuel Deodato



Indice

1 | Geometria proiettiva

§1.1 Spazi proiettivi

Definizione 1.1 (Spazio proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Lo spazio proiettivo associato a V è:

$$\mathbb{P}(V) := {V \setminus \{0\}}\big/{\sim}$$

con $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $w = \lambda v$.

La relazione di equivalenza collassa tutti i vettori sulla stessa retta ad un unico elemento. La mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &\longrightarrow V \\ [v] &\longmapsto \operatorname{Span}(v) \end{aligned}$$

è una biezione che associa ad ogni classe di equivalenza nel proiettivo il relativo span di un rappresentante in V e, viceversa, ogni span di un elemento di V è univocamente associato ad un elemento di $\mathbb{P}(V)$.

Esempio 1.1. Si ha $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing/\sim = \varnothing$, mentre, dato $v \neq 0$ in V:

$$\mathbb{P}(\operatorname{Span}(v)) = {\operatorname{Span}(v) \setminus \{0\}}\big/{\sim} = \{[v]\}$$

Definizione 1.2 (Dimensione). La dimensione di uno spazio proiettivo è definita come:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) := \dim_{\mathbb{K}} V - 1$$

Di seguito, alcuni termini comunemente usati:

- **punto proiettivo:** spazio proiettivo di dimensione 0;
- **retta proiettiva:** spazio proiettivo di dimensione 1;
- **piano proiettivo:** spazio proiettivo di dimensione 2.

Infine, per **spazio proiettivo standard** si intende $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$.

§1.2 Trasformazioni proiettive

Definizione 1.3 (Trasformazione proiettiva). Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è una trasformazione proiettiva se esiste $\varphi : V \to W$ applicazione lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

e si dice che f è indotta da φ. In questo caso, si scriverà $f = [\varphi]$.

Proposizione 1.1. Se $f = [\varphi]$ è una trasformazione proiettiva, allora φ è iniettiva.

Dimostrazione. Per assurdo, se $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$, allora si troverebbe $v \in V$ tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [0]$$

ma $[0] \notin \mathbb{P}(W)$, quindi f non sarebbe ben definita. $\square$

Proposizione 1.2. Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ proiettiva indotta da $\varphi : V \to W$; allora

$$[v] \overset{f}{\longmapsto} [\varphi(v)] = [\varphi(w)] \iff \varphi(v) = \lambda\varphi(w) = \varphi(\lambda w)$$

Applicando la proposizione precedente, quindi, due elementi nell'immagine di f coincidono se e solo se $v = \lambda w$, cioè se e solo se $[v] = [w]$. $\square$

Proposizione 1.3. Ogni applicazione lineare iniettiva $\varphi : V \to W$ induce una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tramite la mappa $[v] \longmapsto [\varphi(v)]$.

Dimostrazione. Si nota che, essendo φ iniettiva, $[0] \notin \mathbb{P}(W)$. Inoltre, se $[v] = [v']$ in $\mathbb{P}(V)$, cioè $v' = \lambda v$, allora $\varphi(v') = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$, per cui $[\varphi(v')] = [\varphi(v)]$. $\square$

Osservazione 1.1. La mappa identità $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è proiettiva ed è indotta da Id_V.

Proposizione 1.4. Date $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ e $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Z)$, allora $g \circ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(Z)$ è proiettiva.

Siano $f = [\varphi]$ e $g = [\psi]$. Si mostra che $\psi \circ \varphi$ induce $g \circ f$; infatti:

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g\big([\varphi(v)]\big) = g \circ f([v])$$

Definizione 1.4 (Isomorfismo proiettivo). Data f proiettiva, questa è un isomorfismo proiettivo se è suriettiva.

Teorema 1.1 (Caratterizzazione degli isomorfismi). Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ proiettiva. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a). f suriettiva;

(b). f biettiva;

(c). $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$;

(d). f invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ proiettiva.

Dimostrazione. Evidentemente (a) $\iff$ (b), visto che ogni f proiettiva è iniettiva.

Si ha (b)$\Rightarrow$(c) perché, se $f = [\varphi]$, allora f biettiva implica $\varphi : V \to W$ isomorfismo lineare, per cui $\dim V = \dim W$, da cui la tesi. Infatti, è immediato verificare che f suriettiva $\Rightarrow$ φ suriettiva; se così non fosse, visto che se esiste $v \in V : \varphi(v) = w \implies \lambda w \in \operatorname{Im} \varphi$ perché $\lambda v \xmapsto{\varphi} \lambda\varphi(v) = \lambda w,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, allora un elemento non raggiunto da φ corrisponde ad un intero sottospazio di dimensione 1 non raggiunto in W, cioè ad un elemento non raggiunto da f in $\mathbb{P}(W)$, che è assurdo perché f suriettiva.

Si ha (c)$\Rightarrow$(d) perché $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) \Rightarrow \dim V = \dim W$, quindi φ è invertibile e, quindi, esiste un'applicazione lineare φ^{-1} che induce f^{-1}:

$$f^{-1} \circ f([v]) = [\varphi^{-1} \circ \varphi(v)] = [v]$$

ed è analogo per $f \circ f^{-1}$. Quindi $f^{-1} = [\varphi^{-1}]$ ed è proiettiva perché φ^{-1} è iniettiva per costruzione.

Infine, (d)$\Rightarrow$(a) perché f invertibile implica φ invertibile, quindi φ suriettiva, quindi f suriettiva. $\square$

Definizione 1.5 (Proiettività). Una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è detta proiettività. L'insieme delle proiettività di $\mathbb{P}(V)$ si indica con $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$.

Osservazione 1.2. Ogni proiettività è un isomorfismo proiettivo per il teorema appena dimostrato ($\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(V)$). Inoltre, $\big(\mathbb{P}\mathrm{GL}(V), \circ\big)$ è un gruppo.

Osservazione 1.3 (Punti fissi). Sia $f = [\varphi]$ una proiettività. Assumendo che $[v]$ sia un punto fisso per f:

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)] \iff \varphi(v) = \lambda v$$

cioè $[v]$ è un punto fisso se e solo se v è un autovettore di φ.

§1.3 Sottospazi proiettivi

2 | Topologia generale

§2.1 Spazi metrici

Definizione 2.1 (Spazio metrico). Sia X un insieme non vuoto; allora X si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, x') \geq 0$ e $d(x, x') = 0 \iff x = x'$;
- $d(x, x') = d(x', x)$;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Dato uno spazio metrico (X, d_X) e un insieme $Y \subset X$, si può definire un sottospazio di (X, d_X) restringendo la distanza al solo Y:

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'),\ \forall y, y' \in Y$$

Quindi (Y, d_Y) è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di (X, d_X), il quale è detto *spazio ambiente* di Y. In uno spazio metrico (X, d), si può definire un *disco aperto* di raggio r e centro x come

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

Definizione 2.2 (Insieme aperto). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

Equivalentemente, un insieme $\forall \subseteq X$ si dice aperto rispetto alla metrica d se $\forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Lemma 2.0.1. Le palle aperte sono insiemi aperti relativamente alla metrica che le definisce.

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico e $x_0 \in X$; si dimostra che la palla $B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ è aperto rispetto a d. Si nota che, $\forall x \in B_r(x_0)$, è possibile definire $\delta = r - d(x, x_0)$ tale che $B_\delta(x) \subseteq B_r(x_0)$; infatti tutti i punti di $B_\delta(x)$ sono a distanza minore di ε da x, quindi, per disuguaglianza triangolare:

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + \underbrace{d(x, y)}_{<\delta} < r,\ \forall y \in B_\delta(x)$$

per definizione di δ. $\square$

Nello stesso spazio metrico, è possibile definire la distanza tra un punto $x \in X$ con un sottoinsieme $A \subseteq X$ come:

$$d_A(x) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\} \tag{2.1.1}$$

§2.1.1 Continuità in spazi metrici

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon,\ \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,\ \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$

È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

Definizione 2.3 (Continuità in spazi metrici). Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, con $(X, d_X),\ (Y, d_Y)$ spazi metrici. Si dice che f è continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon,\ \exists \delta(\epsilon)$ tale che:

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon,\ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \tag{2.1.2}$$

Questo si esprime equivalentemente come:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B_{d_X}(x, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

Teorema 2.1. Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\iff \forall A \subset Y$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni.

- $(\Rightarrow)$ Si assume che f sia continua. Si prende $f(x) \in A$, con $A \subset Y$ aperto, per qualche $x \in f^{-1}(A)$. Essendo A aperto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset A$; allo stesso tempo, per continuità di f, dato ε scelto prima, deve esistere $\delta(\varepsilon)$ tale che

  $$f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$$

  quindi $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Valendo $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- ($\Leftarrow$) Si assume che $\forall A \subset Y$ aperto, la funzione f sia tale che l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto. Per $f(x) \in Y$, esiste $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset Y$; essendo questo aperto, deve essere aperto anche $f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$. Dunque, dato $x \in f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, $\exists\delta(\varepsilon) : B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, quindi vuol dire che $f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$, ossia:

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon, \ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

  Valendo $\forall x \in X$, allora f è continua.

$\square$

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

Negli spazi metrici, è possibile caratterizzare delle mappe che preservano le distanze; queste sono note come *immersioni isometriche*.

Definizione 2.4 (Immersione isometrica). Sia $f : X \to Y$ una mappa tra spazi metrici; questa è detta immersione isometrica se

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

Un'immersione isometrica deve necessariamente essere iniettiva:

$$f(x) = f(y) \implies d_Y(f(x), f(y)) = 0 = d_X(x, y) \iff x = y$$

Inoltre, la composizione di due immersioni isometriche è ancora un'immersione isometrica e l'identità ne è un esempio.

Definizione 2.5 (Isometria). Sia $f : X \to Y$ un'immersione isometrica; allora se f è suriettiva, quindi biettiva, è detta *isometria*.

Le isometrie formano un gruppo con l'operazione di composizione, che si indica con $\mathrm{Isom}(X)$.

Definizione 2.6 (Omeomorfismo). Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ è un *omeomorfismo* se la sua inversa e f stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo $e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, questa ha un'inversa continua $\log(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda $(-\infty, 0]$ in $(0, 1]$. Anche gli omemorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

Definizione 2.7 (Mappa lipschitziana). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una mappa; si dice che f è *lipschitizana* se

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq k d_X(p, q), \ \forall p, q \in X$$

Proposizione 2.1. Se $f : X \to Y$ è lipschitizana, allora è continua.

Dimostrazione. Sia f una funzione k-lipschitziana; si fissa $\varepsilon > 0$ e si prende $\delta = \varepsilon/k$, per cui $\forall x' \in X$ tale che $d_X(x, x') < \delta$, si ha

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x') < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

□

§2.2 Spazi topologici

Allo scopo di giustificare la definizione e lo studio di spazi topologici, si considera il seguente risultato.

Proposizione 2.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:

(a). $\varnothing$ e X sono aperti;

(b). se A, B sono aperti, allora $A \cap B$ è aperto;

(c). se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti, allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nei vari punti.

(a). X è ovviamente aperto, mentre per l'insieme vuoto non ci sono punti per cui bisogna verificare la richiesta, quindi è aperto.

(b). Sia $x_0 \in A \cap B$; questo significa che ci sono due palle di raggi ϵ_1, ϵ_2 interamente contenute in A e B rispettivamente, visto che sono aperti. Prendendo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, si verifica immediatamente che $B_\epsilon(x) \subseteq A \cap B$, visto che è interamente contenuta sia in A che B.

(c). Evidentemente $\exists j \in I : x_0 \in A_j \implies \exists \epsilon : B_\epsilon(x_0) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

□

Si nota che l'intersezione arbitraria di aperit può non risultare aperta, come nel caso della famiglia $B_{1/n}(0)$ in $\mathbb{R}$.

Dalla precedente proposizione, è possibile giustificare la seguente definizione di topologia.

Definizione 2.8 (Topologia e spazio topologico). Sia X un insieme non-vuoto. Una *topologia* su X è una famiglia non-vuota $\tau \subseteq \mathcal{P}(x)$, chiamati *insiemi aperti della topologia*. Questi soddisfano le seguenti condizioni:

- $\varnothing$, X sono aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un aperto.

Allora si definisce *spazio topologico* la coppia (X, τ), dove X è detto *supporto* dello spazio topologico e i suoi elementi sono i *punti* dello spazio.