Meccanica Quantistica, Corso B, Compito del 5 giugno 2025

Si consideri un sistema quantistico composto da due particelle di massa m_1 e m_2, carica opposta q e $-q$, e spin 1/2, la cui Hamiltoniana è data da

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_2^2}{2m_2} - \frac{q^2}{|\hat{\boldsymbol{x}}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_2|}. \tag{1}$$

(1) Scrivere l'Hamitoniana usando $\hat{\boldsymbol{X}}$ e $\hat{\boldsymbol{x}} \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_2 - \hat{\boldsymbol{x}}_1$, associati alla posizione del centro di massa e alla posizione relativa, i loro momenti coniugati $\hat{\boldsymbol{P}}$ e $\hat{\boldsymbol{p}}$, la massa totale $M = m_1 + m_2$, e la massa ridotta $\mu = m_1 m_2/M$. Scrivere l'operatore momento angolare totale $\hat{\boldsymbol{L}}_T = \hat{\boldsymbol{L}}_1 + \hat{\boldsymbol{L}}_2$ nel sistema del centro di massa in termini degli operatori $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{p}}$.

(2) Determinare i livelli dello spettro associati agli stati legati del sistema, inclusi i contributi del moto del centro di massa. Discutere la loro degenerazione nel sistema del centro di massa, tenendo conto dello spin 1/2 delle particelle.

(3) Scrivere l'espressione della lunghezza che caratterizza gli stati legati del sistema. Scrivere le funzioni d'onda degli stati legati dei primi due livelli energetici, e calcolare la distanza media relativa $D = \sqrt{\langle |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1|^2 \rangle}$

Consideriamo adesso il caso specifico del positronio, composto da un elettrone e un positrone (che hanno la stessa massa, $m\,c^2 \approx 0.51$ Mev, spin 1/2, e carica opposta, e e $-e$).

(4) Il positronio non è stabile, infatti decade in fotoni. La probabilità di tale processo è proporzionale alla probabilità P_λ che le due particelle vengano in *contatto*, cioè che siano ad una distanza inferiore alla lunghezza Compton dell'elettrone λ nello stato fondamentale [$\lambda = \hbar/(m_e c)$ dove c è la velocità della luce]. Calcolare λ e stimare la probabilità P_λ dei primi due livelli energetici, usando il fatto che $\lambda \ll r_B$ (vedi formule in fondo).

Consideriamo adesso gli effetti di un interazione spin-spin tra le particelle, descritta dal termine Hamiltoniano

$$\hat{H}_{ss} = \beta\, \hat{\boldsymbol{s}}_e \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_p, \qquad 0 < \hbar^2 \beta \ll m_e \alpha^2 c^2,$$

dove $\hat{\boldsymbol{s}}_{e,p}$ sono gli operatori di spin delle particelle.

(5) Scrivere la relazione tra gli elementi $|n, l, m, s_e^z, s_p^z\rangle$ della base identificata dai numeri quantici associati al set completo $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}^z$, $\hat{s}_e^z$ e $\hat{s}_p^z$, e gli elementi $|n, l, m, s, s^z\rangle$ della base identificata dai numeri quantici associati al set completo $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{L}}^2$, $\hat{L}^z$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ e $\hat{S}^z$, dove $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_e + \hat{\boldsymbol{s}}_p$ è l'operatore di spin totale. i primi 3 distinti

(6) Descrivere lo spettro in presenza dell'interazione H_{ss}. Discutere la degenerazione dei primi livelli dello spettro.

(7) Scrivere la matrice di densità ridotta ρ associata alle variabili di spin delle particelle nello stato fondamentale del sistema, e verificare se rappresenta uno stato puro. Calcolare anche la matrice densità ridotta ρ_e associata allo spin dell'elettrone, e verificare se rappresenta uno stato puro.

(8) Calcolare la probabilità che una misura della componente $\hat{s}_e^x$ dello spin dell'elettrone dia il valore 1/2 nello stato fondamentale. Calcolare il valore medio dell'operatore $\hat{s}_e^y$.

Poniamo $\beta = 0$ e consideriamo adesso un interazione del tipo $\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}$, più precisamente

$$\hat{H}_{ls} = \gamma\, \hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}, \qquad \hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}_e + \hat{\boldsymbol{L}}_p, \qquad \hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_e + \hat{\boldsymbol{s}}_p,$$

dove $\hat{\boldsymbol{L}}$ è il momento angolare spaziale totale nel sistema del centro di massa.

(9) Mostrare che la base ottimale per trattare la perturbazione $\hat{H}_{ls}$ è data da $|n, l, s, J, J^z\rangle$ dove J, J^z sono gli autovalori degli operatori $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ e $\hat{J}^z$ (dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$). Scrivere formalmente la relazione tra la base di stati $|n, l, m, s, s^z\rangle$, definiti al punto (5), e la base $|n, l, s, J, J^z\rangle$ introducendo i coefficienti di Clebsch-Gordan $C^{J,J^z}_{l,s,m,s^z} = \langle l, s, m, s^z | l, s, J, J^z\rangle$. Scrivere la probabilità di misurare $J = 0$ nello stato $|n, l, m, s, s^z\rangle$ in termini dei coefficienti di Clebsch-Gordan.

(10) Descrivere lo spostamento dei livelli energetici dei primi stati dello spettro e la degenerazione dei livelli.

Roprtiamo alcune formule delle autofunzioni dell'atomo di idrogeno (dove la massa del protone si assume infinita):

$$R_{10}(r) = \frac{2}{r_B^{3/2}} e^{-r/r_B}, \qquad R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2} r_B^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2r_B}\right) e^{-r/(2r_B)}, \qquad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24} r_B^{3/2}} \frac{r}{r_B} e^{-r/(2r_B)},$$

dove

$$r_B = \frac{\hbar}{m_e c\, \alpha} \approx 0.53 \times 10^{-10} m, \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$