

NOTE DI STRUTTURA DELLA MATERIA

MANUEL DEODATO

INDICE

1	Nozioni di meccanica statistica e termodinamica	3
1.1	Gas di particelle	3
1.2	Principi della termodinamica	3
1.3	Potenziali termodinamici	3
1.4	Calori specifici e compressibilità	4
1.5	Diagrammi di fase	4
1.6	Modello per sistemi statistici	4
1.6.1	Sistema in bagno termico	4
1.6.2	Funzione di granpartizione	5
1.6.3	Entropia e potenziali	5
1.6.4	Degenerazione dei livelli energetici	6
1.6.5	Applicazione – Particelle non-interagenti	6
1.6.6	Applicazione – Gas perfetto	6
1.6.7	Applicazione – Sistema a due stati*	7
1.7	Spazio delle fasi	7
1.7.1	Costante di Planck	8
1.7.2	Applicazione – Densità di energia ed energia per singola particella	8
1.7.3	Applicazione – Gas interagente	8
1.8	Distribuzione delle variabili termodinamiche*	9
1.9	Incertezze quantistiche*	9

1 NOZIONI DI MECCANICA STATISTICA E TERMODINAMICA

1.1 Gas di particelle

Si considera gas di particelle non interagenti e puntiformi. Ciascuna particella soddisfa $\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$ con $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ e $E = \frac{\hbar^2}{2m}q^2$, quindi la soluzione generale è:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.1.1)$$

Imponendo condizione di periodicità al bordo della scatola $\Rightarrow q_i = \frac{2\pi}{L}l_i$, $l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si assumerà che particelle interagiscano abbastanza poco da rendere valida questa trattazione, e abbastanza tanto da permettere transizioni di fase.

1.2 Principi della termodinamica

- (a). **Primo principio:** per un sistema chiuso (niente scambio di particelle) e isolato, vi è conservazione dell'energia interna:

$$dE = \delta Q + \delta L \quad (1.2.1)$$

- (b). **Secondo principio:** l'entropia, data da $S = \kappa_B \log \Gamma^1$ (con Γ numero di microstati del sistema all'equilibrio), per un sistema isolato, soddisfa $\frac{dS}{dt} \geq 0$. L'uguaglianza vale quando è raggiunto l'equilibrio.

- (c). **Terzo principio:** l'entropia tende a 0 per sistemi perfettamente ordinati, cioè sistemi in cui tutte le particelle popolano un solo microstato $\Rightarrow S = \kappa_B \log 1 = 0$. Sistemi perfettamente ordinati sono cristalli perfetti a temperatura nulla; non tutti i materiali a $T = 0$ risultano perfettamente ordinati e alcuni presentano entropia residua.

1.3 Potenziali termodinamici

A seconda del caso, si usano diverse riscritture dell'energia.

- **Energia libera di Helmholtz:** $F = E - TS \Rightarrow dF = -SdT - PdV$. La sua variazione a temperatura costante restituisce lavoro compiuto sul sistema: $\delta F|_T = -P\delta V|_T = \delta L$.
- **Energia libera di Gibbs:** $\Phi = E - TS + PV = F + PV \Rightarrow d\Phi = VdP - SdT$. È adatta a descrivere transizioni di fase.
- **Entalpia:** $W = E + PV \Rightarrow dW = TdS + VdP$. La sua variazione a pressione costante è il calore scambiato dal sistema: $\delta W|_P = T\delta S|_P = \delta Q$.

Se è possibile scambio di particelle, la dipendenza da N nei potenziali si aggiunge con:

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{SV} = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{TV} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{SP} \quad (1.3.1)$$

μ è esso stesso un potenziale: $d\mu = -S/NdT + V/NdP = -sdT + vdP^2$. Un altro potenziale utile è il **potenziale di Landau:** $\Omega = F - \mu N \Rightarrow d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu$.

¹Questa espressione è il caso limite della più generale $S = \kappa_B \sum_i p_i \log p_i$ che si ha quando il sistema non è all'equilibrio, cioè quando i microstati non sono popolati uniformemente.

²Aggiungendo particelle ferme ad un sistema, è ragionevole avere $\mu < 0$, visto che l'energia media diminuirebbe con l'aumentare di N .

1.4 Calori specifici e compressibilità

Calori specifici a volume e pressione costante:

$$\begin{aligned} c_V &= \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \\ c_P &= \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = -T \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \right)_P \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Vale

$$c_P \geq c_V \quad (1.4.2)$$

Compressibilità per trasformazioni isoterma e adiabatica:

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial P^2} \right)_T ; \quad k_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = \left[V \left(\frac{\partial^2 E}{\partial V^2} \right)_S \right]^{-1} \quad (1.4.3)$$

1.5 Diagrammi di fase

Grafico che mostra stato fisico di una sostanza in funzione, solitamente, di temperatura e pressione. Assumendo di avere un sistema con due stati coesistenti $\Rightarrow N_1 + N_2 = \text{cost.} \Rightarrow \delta N_1 = -\delta N_2$, all'equilibrio:

$$\frac{\partial F}{\partial N_1} = \frac{\partial}{\partial N_1} (F_1 + F_2) = \frac{\partial F_1}{\partial N_1} - \frac{\partial F_2}{\partial N_2} = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

da cui si ottiene relazione $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T)$ che permette di tracciare grafico $P = f(T)$. Lo stesso si può fare per tre stati coesistenti, individuando *punto triplo*.

Da $d\mu_1 = d\mu_2$, si ha $-s_1 dT + v_1 dP = -s_2 dT - v_2 dP$, quindi:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \quad (1.5.1)$$

1.6 Modello per sistemi statistici

Si tratteranno i sistemi dividendo l'Universo in sistema in esame (E, S, T) + parte complementare, chiamata **bagno termico** (E', S', T) . Quest'ultimo sarà assunto essere *sempre all'equilibrio e alla stessa temperatura del sistema*.

La variazione di energia del bagno termico dipende solo da variazione dell'entropia $\Rightarrow \delta E' = T \delta S'$; inoltre essendo l'Universo sempre isolato, la sua variazione di energia è nulla $\Rightarrow \delta E + \delta E' = 0$.

Unendo le due, si ha $\delta S' = -\delta E/T$; per il secondo principio, $\delta S + \delta S' \geq 0 \Rightarrow T \delta S - \delta E \geq 0 \Rightarrow \delta(E - TS) \leq 0$, da cui si deduce che un sistema a *temperatura fissata* è all'equilibrio quando $F = E - TS$ è al minimo.

Consentendo scambio di particelle, vale lo stesso principio con $\delta \Omega \leq 0$, quindi $\Omega = F - \mu N$ minimo.

1.6.1 Sistema in bagno termico

Si indica con \mathcal{S} il sistema immerso in bagno termico \mathcal{S}' e con \mathcal{S}_0 l'Universo. Questi hanno rispettivamente dipendenza dalle variabili (V, N, E, S) , (V', N', E', S') , (V_0, N_0, E_0, S_0) .

\mathcal{S} si trova in stato quantistico generico indicato tramite serie di numeri quantici α ; si assume che il volume sia fissato e si richiede che: $E_\alpha \ll E_0$ e $N_\alpha \ll N_0$; in questo modo temperatura e potenziale chimico del bagno termico sono costanti.

I microstati dell'Universo sempre equiprobabili perché è sempre all'equilibrio $\Rightarrow w_{eq} = 1/\Gamma_0$, con Γ_0 numero di microstati. La probabilità di avere uno stato α per il sistema, allora è $w_\alpha = \Gamma'_\alpha/\Gamma_0$, dove Γ'_α è il numero di microstati in cui \mathcal{S} è in α e \mathcal{S}' è in uno stato generico.

L'entropia di \mathcal{S}' è:

$$S'_\alpha = \kappa_B \log \Gamma'_\alpha = S'(E_0 - E_\alpha, N_0 - N_\alpha) \quad (1.6.1)$$

Inoltre:

$$S_0 - S'_\alpha = \kappa_B \log \Gamma_0 - \kappa_B \log \Gamma'_\alpha = -\kappa_B \log \frac{\Gamma'_\alpha}{\Gamma_0} = -\kappa_B \log w_\alpha \quad (1.6.2)$$

quindi

$$w_\alpha = \exp\left(-\frac{S_0 - S'_\alpha}{\kappa_B}\right) \equiv A e^{S'_\alpha/\kappa_B} \quad (1.6.3)$$

In questo modo, si può calcolare valore medio dell'entropia per \mathcal{S} (in genere α non è uno stato di equilibrio per \mathcal{S}):

$$\langle S \rangle \equiv \langle S_0 - S'_\alpha \rangle = -\kappa_B \sum_\alpha w_\alpha \log w_\alpha \quad (1.6.4)$$

1.6.2 Funzione di granpartizione

Sviluppando in serie eq. 1.6.1, si ha:

$$S'_\alpha \simeq S'(E_0, N_0) - \left(\frac{\partial S'}{\partial E'}\right)_{N'} E_\alpha - \left(\frac{\partial S'}{\partial N'}\right)_{E'} N_\alpha \Rightarrow S'_\alpha = \text{cost.} - \frac{E_\alpha - \mu N_\alpha}{T} \quad (1.6.5)$$

perciò la probabilità, comprensiva di normalizzazione, è:

$$w_\alpha = \frac{\exp[-(E_\alpha - \mu N_\alpha)/\kappa_B T]}{\sum_\alpha \exp[-(E_\alpha - \mu N_\alpha)/\kappa_B T]} \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\frac{E_\alpha - \mu N_\alpha}{\kappa_B T}\right) \quad (1.6.6)$$

con \mathcal{Z} **funzione di granpartizione**. Nel limite di $N_\alpha = N$, $\forall \alpha$, w_α tende al caso canonico con normalizzazione data dalla funzione di partizione \mathcal{Z} .

1.6.3 Entropia e potenziali

Ora si può calcolare $\langle S_\alpha \rangle$:

$$\langle S \rangle = \kappa \log \mathcal{Z} + \frac{1}{T} \sum_\alpha w_\alpha E_\alpha - \frac{\mu}{T} \sum_\alpha w_\alpha N_\alpha = \kappa_B \log \mathcal{Z} + \frac{\langle E \rangle - \mu \langle N \rangle}{T} \quad (1.6.7)$$

Da questa si ottiene il potenziale di Landau:

$$\begin{aligned} \Omega &= -\kappa_B T \log \mathcal{Z} = -\kappa_B T \log \sum_\alpha \exp\left(-\frac{E_\alpha - \mu N_\alpha}{\kappa_B T}\right) \\ &= -\mu N - \kappa_B T \log \sum_\alpha \exp\left(-\frac{E_\alpha}{\kappa_B T}\right) = -\mu N - \kappa_B T \log \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

dove si è imposto $N_\alpha = N, \forall \alpha$. Conseguentemente $F = \Omega + \mu N = -\kappa_B T \log \mathcal{Z}$.

1.6.4 Degenerazione dei livelli energetici

Ammettendo che *diversi stati occupano stesso livello energetico*, continuando ad assumere $N_\alpha = N, \forall \alpha$:

$$w(E_\alpha) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \rho(E_\alpha) \exp \left(-\frac{E_\alpha}{\kappa_B T} \right) \quad (1.6.9)$$

con ρ degenerazione relativa a energia E_α . Passando al continuo:

$$w(E_\alpha) \rightarrow w(\mathcal{E}) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \rho(\mathcal{E}) \exp \left(-\frac{\mathcal{E}}{\kappa_B T} \right), \quad \mathcal{Z} \rightarrow \int_0^{+\infty} d\mathcal{E} \rho(\mathcal{E}) \exp \left(-\frac{\mathcal{E}}{\kappa_B T} \right) \quad (1.6.10)$$

Il numero di microstati si può riscrivere come:

$$d\Gamma = \frac{d\Gamma}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (1.6.11)$$

1.6.5 Applicazione – Particelle non-interagenti

Per N particelle non-interagenti, ciascun grado di libertà fattorizza in \mathcal{Z} ; per particelle **distinguibili** (distribuzioni diverse delle particelle in microstati individuano stati diversi), si ha $\mathcal{Z}_{\text{tot}} = \mathcal{Z}_{1p}^N$; per particelle **indistinguibili**, una buona stima è: $\mathcal{Z}_{\text{tot}} = \frac{1}{N!} \mathcal{Z}_{1p}^N$. Si considera il secondo caso.

Si ha $F = -\kappa_B T \log \mathcal{Z} = \kappa_B T \log N! - \kappa_B N T \log \mathcal{Z}_{1p}$. Ricordando che $E_{q_i} = \frac{\hbar^2 q_i^2}{2m}$, con $q_i = \frac{2\pi l_i}{L}$, quindi $E_q \propto L^{-2} = V^{-2/3}$, pertanto:

$$\begin{aligned} P &= - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = \frac{N \kappa_B T}{\mathcal{Z}_{1p}} \frac{\partial \mathcal{Z}_{1p}}{\partial V} = - \frac{N \kappa_B T}{\mathcal{Z}_{1p}} \frac{1}{\kappa_B T} \sum_i \frac{\partial E_{q_i}}{\partial V} \exp \left(-\frac{E_{q_i}}{\kappa_B T} \right) \\ &= \frac{2N}{3V} \frac{1}{\mathcal{Z}_{1p}} \sum_i E_{q_i} \exp \left(-\frac{E_{q_i}}{\kappa_B T} \right) \equiv \frac{2N}{3V} \langle E \rangle \end{aligned}$$

1.6.6 Applicazione – Gas perfetto

Particelle confinate in scatola con autostati dell'energia individuati dagli impulsi q . Numero di particelle in uno stato è n_q .

Per gas ideale, la maggior parte dei microstati sarà vuota, cioè $w(0) \approx 1$, e la probabilità di avere più di una particella in un microstato è praticamente nulla, quindi $w(1) \ll 1$ e $w(n \geq 2) \approx 0$. Usando $\mathcal{Z} = \exp [-\Omega/\kappa_B T]$:

$$w(n_q) = \exp \left[\frac{\Omega_q - n_q(E_q - \mu)}{\kappa_B T} \right] \quad (1.6.12)$$

Allora le condizioni di popolazione dei microstati si traducono in:

$$\begin{aligned} w(0) &\approx 1 \Rightarrow \exp \left(\frac{\Omega_q}{\kappa_B T} \right) \approx 1 \\ w(n) &= e^{\Omega_q/\kappa_B T} \left[\exp \left(-\frac{E_q - \mu}{\kappa_B T} \right) \right]^n \equiv w^n(1) \ll 1, \forall q \iff \exp \left(\frac{\mu}{\kappa_B T} \right) \ll 1 \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

quindi $\mu \rightarrow -\infty$. Da questo, il numero medio di particelle in uno stato q è:

$$\langle n_q \rangle = \frac{\sum_{n_q} n_q \exp[-n_q(E_q - \mu)/\kappa_B T]}{\sum_{n_q} \exp[-n_q(E_q - \mu)/\kappa_B T]} \approx \exp\left(-\frac{E_q - \mu}{\kappa_B T}\right) \quad (1.6.14)$$

avendo usato $w(1) \ll 1$. Dal potenziale di Landau, si ottiene equazione di stato dei gas perfetti:

$$\Omega_q \approx -\kappa_B T \log \left[1 + \exp\left(-\frac{E_q - \mu}{\kappa_B T}\right) \right] = -\kappa_B T \log \left(1 + \langle n_q \rangle \right) \approx -\kappa_B T \langle n_q \rangle$$

Essendo $\Omega \approx -\kappa_B T \sum_q a \langle b_q \rangle \equiv -\kappa_B T N$ e valendo allo stesso tempo $\Omega = -PV$, si ha $PV = \kappa_B NT$.

1.6.7 Applicazione – Sistema a due stati*

*Sistema in cui particelle interagiscono solo tramite spin
Valutare se va scritto*

1.7 Spazio delle fasi

Per sistema di N particelle, è uno spazio $6N$ -dimensionale delle coordinate e impulsi. Fissare energia dell'Universo equivale a definire un'ipersuperficie Σ_0 a $(6N - 1)$ dimensioni data da $\mathcal{E}_0(\{x_i\}, \{p_i\}) = E_0$.

Si discretizza lo spazio in celle che rispettano $\Delta x_k \Delta p_k = \tau$, con τ costante generica. Si assume che le celle siano piccoli a sufficienza da avere un solo stato in ciascuna; allora numero di stati sarà area dell'ipersuperficie normalizzata con elemento di volume:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{\tau^{f_0}} \iint_{\Sigma_0} \prod_{i=1}^{f_0} dx_i, dp_i, \quad \text{con } f_0 = 3N \quad (1.7.1)$$

Allora l'entropia dell'Universo è:

$$S_0 = \kappa_B \log \iint_{\Sigma_0} \prod_{i=1}^{f_0} dx_i dp_i - \kappa_B f_0 \log \tau \quad (1.7.2)$$

Per Σ' ipersuperficie data da $E'_\alpha = E_0 - E_\alpha$, si può ripetere il discorso per il bagno termico:

$$S'_\alpha = \kappa_B \log \iint_{\Sigma'} \prod_{i=1}^{f'} dx_i dp_i - \kappa_B f' \log \tau \quad (1.7.3)$$

In questo modo, l'entropia media del sistema è:

$$\langle S \rangle = \kappa_B \log \iint_{\Sigma_0} \prod_{i=1}^{f_0} dx_i dp_i - \left\langle \kappa_B \log \iint_{\Sigma'} \prod_{i=1}^{f'} dx_i dp_i \right\rangle - \kappa_B (f_0 - f') \log \tau \quad (1.7.4)$$

L'entropia è singolare per $\tau \rightarrow 0$, quindi deve essere un valore finito.

1.7.1 Costante di Planck

Si ricava per particella confinata in segmento L . I livelli energetici sono $E_q = \hbar^2 q^2 / (2m)$ con $q = 2\pi l / L$, e $l \in \mathbb{Z}$. Il conteggio degli stati nella cella $L\Delta p$ è $\Delta l = L\Delta q / (2\pi) = L\Delta p / (2\pi\hbar)$; d'altra parte:

$$\frac{1}{\tau} \int_L \int_{\Delta p} dx dp = \frac{L}{\tau} \Delta p \Rightarrow \tau = 2\pi\hbar = h$$

1.7.2 Applicazione – Densità di energia ed energia per singola particella

Per singola particella libera, usando coordinate cilindriche per gli impulsi:

$$\Gamma = \frac{1}{h^3} \iint d^3x d^3p = \frac{V}{h^3} \int 4\pi p^2 dp \quad (1.7.5)$$

Visto che $\mathcal{E} = p^2 / 2m$, tramite confronto:

$$\rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 \frac{dp}{d\mathcal{E}} d\mathcal{E} = \frac{4\pi V m^{3/2}}{h^3} \sqrt{2\mathcal{E}} d\mathcal{E} \quad (1.7.6)$$

Si può calcolare l'energia media:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} \mathcal{E} e^{-\mathcal{E}/\kappa_B T} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}}{\int_0^{+\infty} e^{-\mathcal{E}/\kappa_B T} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E}} = \kappa_B T \frac{\int_0^{+\infty} dx x^{3/2} e^{-x}}{\int_0^{+\infty} dx x^{1/2} e^{-x}} = \kappa_B T \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3/2)} = \frac{3}{2} \kappa_B T$$

1.7.3 Applicazione – Gas interagente

Gas non-relativistico immerso in potenziale generico dipendente solo dalle coordinate. Elemento differenziale dello spazio delle fasi è $d\Gamma = \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{N! h^{3N}} \prod_{i=1}^{3N} dx_i dp_i$, da cui essendo $\mathcal{E} = U(\{x_i\}) + \sum_{i=1}^{3N} p_i^2 / 2m$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int e^{-\mathcal{E}/\kappa_B T} \rho(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \frac{1}{N! h^{3N}} \iint \prod_{i=1}^{3N} dx_i dp_i e^{-\mathcal{E}/\kappa_B T} \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \iint \prod_{i=1}^{3N} dx_i dp_i \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^{3N} p_i^2}{2m\kappa_B T} - \frac{U(\{x_i\})}{\kappa_B T} \right] \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int \prod_{i=1}^N d^3p_i \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^N p_i^2}{2m\kappa_B T} \right] \int \prod_{i=1}^N d^3x_i \exp \left[-\frac{U(\{x_i\})}{\kappa_B T} \right] \end{aligned}$$

Il primo integrale, insieme al prefattore, si può ricondurre a quello di un gas ideale, a meno di un V^N :

$$\mathcal{Z}_{IG} = \frac{1}{N!} \left[\frac{1}{h^3} \iint d^3x d^3p \exp \left(-\frac{p^2}{2m\kappa_B T} \right) \right]^N = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int \prod_{i=1}^N d^3p_i \exp \left(-\frac{\sum_{i=1}^N p_i^2}{2m\kappa_B T} \right) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{\Lambda^{3N}}$$

con $\Lambda = 2\pi\hbar / \sqrt{2\pi m \kappa_B T}$ lunghezza d'onda termica di de Broglie. Il secondo dipende dalla forma del potenziale ed è detto **integrale delle configurazioni**:

$$\mathcal{D} \equiv \int \prod_{i=1}^N d^3x_i \exp \left(-\frac{U(\{x_i\})}{\kappa_B T} \right) \quad (1.7.7)$$

Quindi:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{N!} \frac{\mathcal{D}}{\Lambda^{3N}} \quad (1.7.8)$$

Per la funzione di granpartizione¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{\alpha} \exp \left[-\frac{E_{\alpha} - \mu N_{\alpha}}{\kappa_B T} \right] = \sum_{N_{\alpha}} \left[\exp \left(\frac{\mu N_{\alpha}}{\kappa_B T} \right) \sum_{\alpha|N_{\alpha}} \exp \left(-\frac{E_{\alpha}}{\kappa_B T} \right) \right] \\ &= \sum_{N_{\alpha}} \left\{ \left[\exp \left(\frac{\mu}{\kappa_B T} \right) \right]^{N_{\alpha}} \sum_{\alpha|N_{\alpha}} \exp \left(-\frac{E_{\alpha}}{\kappa_B T} \right) \right\} \equiv \sum_{N_{\alpha}} \left[z^{N_{\alpha}} \sum_{\alpha|N_{\alpha}} \exp \left(-\frac{E_{\alpha}}{\kappa_B T} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

dove z è detta **fugacità**. Nel limite al continuo, si trova:

$$\mathcal{Z} = \sum_N \frac{z^N \mathcal{D}_N}{N! \Lambda^{3N}} \quad (1.7.10)$$

con \mathcal{D}_N integrale delle configurazioni relativo agli stati α con N particelle.

1.8 Distribuzione delle variabili termodinamiche*

Valutare se va aggiunto

1.9 Incertezze quantistiche*

Valutare se va aggiunto

¹Nella seconda uguaglianza, si spezza la somma, raggruppando i termini della somma stessa in base a N_{α} , per questo $\alpha|N_{\alpha}$ indica una somma sugli α relativa a ciascun N_{α} .