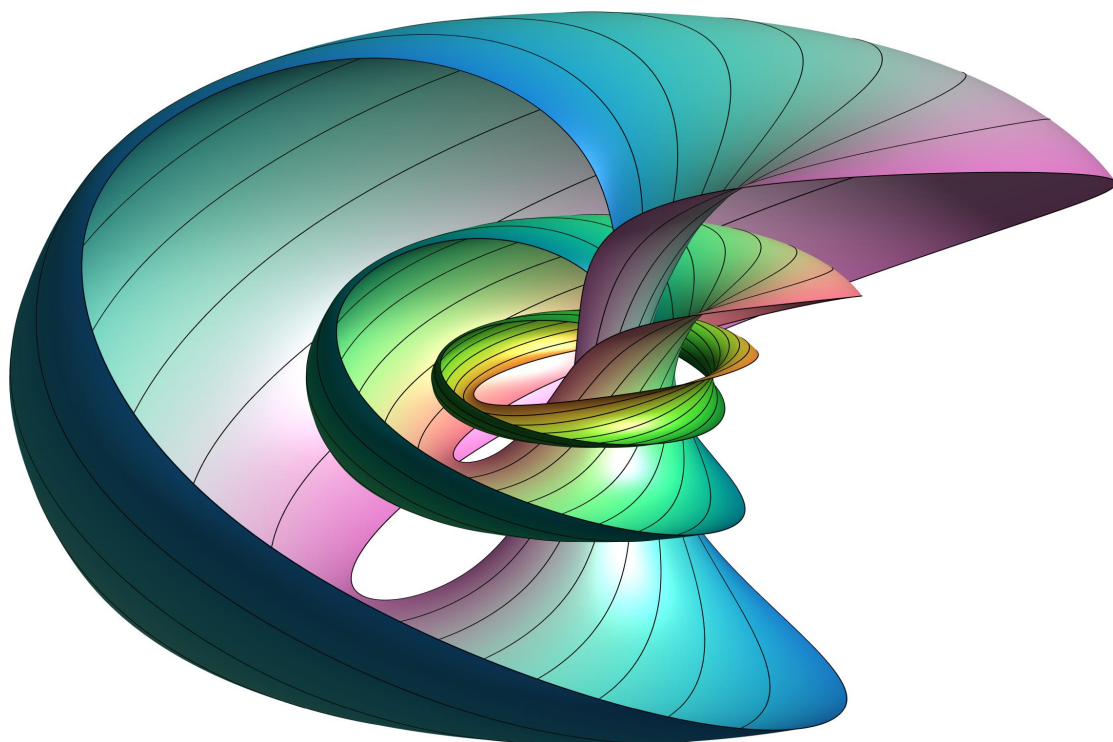


APPUNTI DI TOPOLOGIA

MANUEL DEODATO



INDICE

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Spazi metrici, topologici e applicazioni continue | 3 |
| 1.1 | Spazi metrici | 3 |
| 1.1.1 | Insiemi aperti | 3 |
| 1.1.2 | Continuità in spazi metrici | 3 |
| 1.1.3 | Distanze equivalenti | 4 |
| 1.1.4 | Alcuni risultati sulla continuità | 5 |
| 1.1.5 | Isometrie e omeomorfismi | 6 |
| 1.2 | Spazi topologici | 6 |

1 SPAZI METRICI, TOPOLOGICI E APPLICAZIONI CONTINUE

1.1 Spazi metrici

Definizione 1.1 (Spazio metrico)

Sia X un insieme non vuoto; allora X si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, x') \geq 0$ e $d(x, x') = 0 \iff x = x'$;
- $d(x, x') = d(x', x)$;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Dato uno spazio metrico (X, d_X) e un insieme $Y \subset X$, si può definire un sottospazio di (X, d_X) restringendo la distanza al solo Y :

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'), \forall y, y' \in Y$$

Quindi (Y, d_Y) è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di (X, d_X) , il quale è detto *spazio ambiente* di Y .

1.1.1 Insiemi aperti

In uno spazio metrico (X, d) , si può definire un *disco aperto* di raggio r e centro x come

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

Definizione 1.2 (Insieme aperto)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

1.1.2 Continuità in spazi metrici

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$

È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

Definizione 1.3 (Continuità in spazi metrici)

Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione, con (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici. Si dice che f è continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon, \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \quad (1.1.1)$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

Teorema 1.1

Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è continua $\iff \forall A \subset Y$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni.

- (\Rightarrow) Si assume che f sia continua. Si prende $f(x) \in A$, con $A \subset Y$ aperto, per qualche $x \in f^{-1}(A)$. Essendo A aperto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset A$; allo stesso tempo, per continuità di f , dato ε scelto prima, deve esistere $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

quindi $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Valendo $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- (\Leftarrow) Si assume che $\forall A \subset Y$ aperto, la funzione f sia tale che l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto. Per $f(x) \in Y$, esiste $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$; essendo questo aperto, deve essere aperto anche $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$. Per costruzione $x \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$, perciò $\exists \delta(\varepsilon) : B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$, quindi vuol dire che $f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$, ossia:

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon, \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

Valendo $\forall x \in X$, allora f è continua. □

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

1.1.3 Distanze equivalenti

Definizione 1.4 (Distanze topologicamente equivalenti)

Due distanze d, \bar{d} su X si dicono *topologicamente equivalenti* se

$$d(x, x') = r\bar{d}(x, x'), \text{ per qualche } r \in \mathbb{R}^{>0} \quad (1.1.2)$$

Evidentemente, $\forall \varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(x) = \bar{B}_{r\varepsilon}(x)$$

cioè le due distanze d, \bar{d} identificano le stesse palle aperte, quindi gli stessi insiemi aperti, da qui il termine **topologicamente equivalenti**. In \mathbb{R}^n , le distanze

$$\begin{aligned} d_2(x, x') &= \|x - x'\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} \\ d_1(x, x') &= \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \\ d_\infty(x, x') &= \max_i \{|x_i - x'_i|\} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

sono equivalenti e si ha

$$d_\infty(x, x') \leq d_2(x, x') \leq d_1(x, x') \leq n d_\infty(x, x') \quad (1.1.4)$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è giustificata da:

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} \geq \sqrt{\max_i \{(x_i - x'_i)^2\}} = \max_i \{|x_i - x'_i|\} = d_\infty(x, x')$$

La seconda, invece, è vera perché:

$$[d_2(x, x')]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \right]^2 = [d_1(x, x')]^2$$

L'ultima disuguaglianza è immediata. □

Da questo segue direttamente che¹

$$B_\epsilon^{(\infty)}(x) \supset B_\epsilon^{(2)}(x) \supset B_\epsilon^{(1)}(x) \supset B_{\epsilon/n}^{(\infty)}(x) \quad (1.1.5)$$

Questo mostra che se A è aperto rispetto ad una distanza, lo è anche rispetto alle altre.

1.1.4 Alcuni risultati sulla continuità

Proposizione 1.1

Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Dato $x \in X$, se esiste costante $M > 0$ tale che

$$d_Y(f(x'), f(x)) \leq M d_X(x', x), \quad \forall x' \in X$$

allora f è continua in x .

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che, per ipotesi, definendo $\delta(\epsilon) = \epsilon/M$, si ha $f(D_{\delta(\epsilon)}(x)) \subset D_\epsilon(f(x))$. □

Proposizione 1.2

Ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alle distanze euclidee.

Dimostrazione. Si usa Prop. 1.1 applicato alle distanze $d^{(1)}$, che sono topologicamente equivalenti alle distanze euclidee $d^{(2)}$. Inoltre, visto che ogni applicazione costante è continua, si esclude che L sia nulla. Si denota con $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ la matrice che rappresenta L ; se $x, x' \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} d^{(1)}(L(x), L(x')) &= \left| \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j - x'_j) \right| + \dots + \left| \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j - x'_j) \right| \\ &\leq \left(\max_j |a_{1j}| + \dots + \max_j |a_{mj}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j - x'_j| \leq M d^{(1)}(x, x') \end{aligned}$$

con $M = \max |a_{ij}|$, che è maggiore di 0 perché L è non-nulla. Da Prop. 1.1, segue la tesi. □

¹Apparentemente, la distanza più grande dovrebbe includere più elementi, quindi i simboli \supset dovrebbero essere dei \subset , invece, avendo fissato il raggio ϵ , quella che permette di creare la palla più grande è la distanza più piccola perché avvicina i punti tra di loro, quindi più elementi rientreranno in tale raggio.

La precedente proposizione può essere applicata al caso particolare di applicazioni lineari: le **proiezioni**. Una proiezione è generalmente definita come:

$$p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, p_i(x) = x_i \quad (1.1.6)$$

È possibile definire, più in generale, per $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n$, la proiezione

$$p_{i_1, \dots, i_m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, p_{i_1, \dots, i_m}(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \quad (1.1.7)$$

che è lineare e, quindi, continua.

1.1.5 Isometrie e omeomorfismi

Definizione 1.5 (Isometria)

Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \rightarrow Y$ è un'isometria se $\forall x, x' \in X$, si ha $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$.

Da Prop 1.1, segue che un'isometria è un'applicazione continua. Se fra due spazi metrici X, Y esiste un'isometria $f : X \rightarrow Y$, gli spazi si dicono **isometrici**.

Sono isometrie $\text{Id} : X \rightarrow X$, cioè l'applicazione identità, l'inversa di un'isometria e la composizione di isometrie. Questo porta al seguente.

Proposizione 1.3

Un'isometria fra due spazi metrici è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.6 (Omeomorfismo)

Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \rightarrow Y$ è un *omeomorfismo* se la sua inversa e f stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo $e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, questa ha un'inversa continua $\log(x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda $(-\infty, 0]$ in $(0, 1]$.

Anche gli omeomorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

1.2 Spazi topologici