NOTE DI ANALISI 2

Manuel Deodato

Indice

1 Calcolo differenzialeciao in più variabili

1.1 Derivate parziali

Una funzione di più variabili $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ può essere derivata mantenendo fissa una variabile e derivando rispetto all'altra. Questo corrisponde al valutare la variazione di f lungo un asse specifico.

Definizione 1.1 (Derivata parziale)

Sia $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; la sua derivata parziale rispetto a x_k è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h} \tag{1.1.1}$$

Il vettore che ha per componenti le derivate di f rispetto a ciascuna delle sue variabili si chiama **gradiente** e si indica con ∇f.

1.1.1 Derivate direzionali

È possibile studiare la variazione di f lungo una particolare direzione individuata dal versore $\hat{n}$. Una retta parallela a $\hat{n}$ e passante per un punto x si individua con $x + t\hat{n}$; fissando i punti x e $\hat{n}$, $g(t) := f(x + t\hat{n})$ è una funzione di una variabile e $g'(0)$ è la derivata direzionale di f lungo $\hat{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x) = g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\hat{n}) - f(x)}{h} \tag{1.1.2}$$

Più in generale:

$$g'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_t + h\hat{n}) - f(x_t)}{h} \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_t) \tag{1.1.3}$$

con $x_t = x + t\hat{n}$.

Osservazione 1.1. Conoscendo ∇f, si può calcolare la derivata direzionale di f come $\nabla f \cdot \hat{n}$.

Esempio 1.1. Si calcola la derivata direzionale di $f(x, y) = x^2 y - e^{x+y}$ lungo la direzione $\hat{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Svolgimento. Si ha

$$g(t) = f\left(x + \frac{t}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \exp\left[x + y + t\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x, y) = g'(0) = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{x+y}$$

Alternativamente $\nabla f = \left(2xy - e^{x+y}, x^2 - e^{x+y}\right)$, quindi $\partial_{\hat{n}} f = \nabla f \cdot \hat{n} = xy - \frac{1}{2}e^{x+y} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{x+y} = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{x+y}$. ■

Teorema 1.1

Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha un massimo o minimo relativo in x_0 interno ad A e se ammette derivata lungo $\hat{n}$ in x_0, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0) = 0 \tag{1.1.4}$$

Dimostrazione. Si prende $g(t) = f(x_0 + t\hat{n})$ che, per costruzione, ha un minimo in $t = 0$, quindi $g'(0) = 0$, da cui segue la tesi. □

In particolare, se f è derivabile in x_0, tutte le derivate parziali si annullano in quel punto; in questo caso, x_0 è detto **punto stazionario**.

Osservazione 1.2. Nel caso a una variabile, i punti di massimo/minimo che cadevano sulla frontiera di un insieme erano, solitamente, un numero finito; qua chiaramente non è più così.

Esempio 1.2. Calcolare massimi e minimi di $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y}$ nel cerchio chiuso centrato nell'origine e di raggio 1.

Svolgimento. Sul bordo del cerchio $x^2 + y^2 = 1$, quindi $f \equiv 0$. All'interno:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xe^{x+y} + (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} \\ f_y &= 2ye^{x+y} + (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} \end{aligned}$$

che si annullano quando

$$\begin{matrix} x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

Sostituendo $x = y$ nella prima equazione, ad esempio, si ottengono due soluzioni, una sola delle quali appartiene al cerchio; questo corrisponderà al punto di minimo della funzione:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = (1 - \sqrt{3})e^{\sqrt{3}-1} < 0$$

■

In più dimensioni vale un analogo del teorema di Lagrange:

Teorema 1.2

Sia $f(x) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$, con $I(x_0, r) \subset A$. Considerando una direzione $\hat{n}$, si definisce $g(s) = f(x_0 + s\hat{n})$ per $|s| < r$. Vale l'analogo del teorema di Lagrange:

$$f(x_0 + s\hat{n}) - f(x_0) = g(s) - g(0) = sg'(\tau) = s\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0 + \tau\hat{n}) \tag{1.1.5}$$