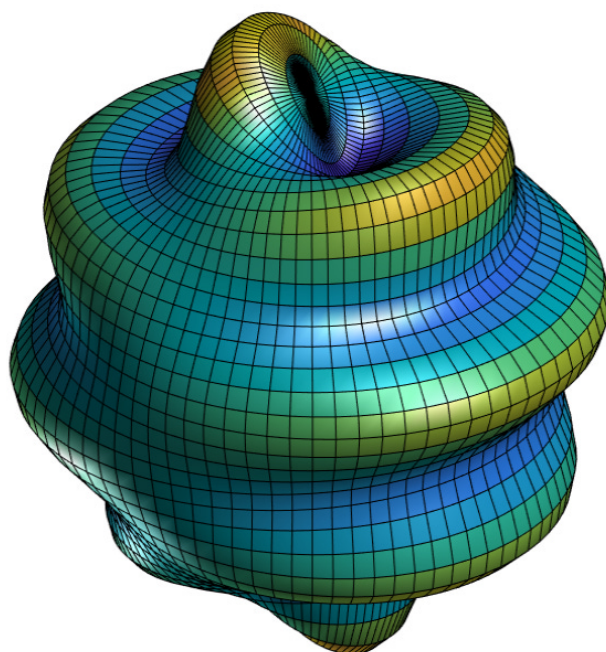


APPUNTI DI GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

MANUEL DEODATO



INDICE

1	Teoria delle curve	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Riparametrizzazione di una curva	4
1.3	Riferimento ed equazioni di Frenet	9
1.4	Riferimento di Frenet senza lunghezza d'arco	14
1.5	Teorema fondamentale della teoria delle curve	16
1.6	Esercizi	18

1 | TEORIA DELLE CURVE

§1.1 Introduzione

Definizione 1.1 (Curva parametrizzata). Una *curva parametrizzata* è un'applicazione $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe $C^\infty(I)$, con I intervallo aperto. Data $t \in I$, si può scrivere in componenti come

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ tutte di classe $C^\infty(I)$.

Osservazione 1.1. La necessità di definire la curva su un aperto, o quantomeno di poter estendere l'intervallo di definizione ad un aperto, deriva dal fatto che, in questo modo, si può effettivamente parlare di derivata piena anche per gli estremi, potendo trovare, infatti, un aperto che contiene interamente i punti di frontiera dell'intervallo di definizione. Se non si avesse questa possibilità, nel caso di $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, per esempio, non si potrebbe calcolare la derivata tradizionale in a , o b , perché si potrebbe solamente calcolare il limite destro o sinistro.

Si nota che, nel caso in cui I non fosse aperto, si estende l'intervallo di definizione ad $A \supset I$ aperto.

Si parla di *traccia* della curva in riferimento all'immagine che genera dell'intero intervallo: $\text{Tr } \alpha = \alpha(I)$. La traccia rappresenta l'unione di ciascun punto di $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I$. Per *velocità* della curva, invece, si intende la grandezza¹

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (1.1.1)$$

In realtà, questo rappresenta il *vettore velocità*, mentre la velocità vera e propria è data dalla sua norma $\|\alpha'(t)\|$.

Esempio 1.1 (Retta parametrizzata). Siano $P, Q \in \mathbb{R}^3$, con $P \neq Q$, due punti dello

¹Questa è ben definita perché si sta operando in uno spazio vettoriale, con $\alpha(t+h) - \alpha(t)$ giustificata dall'operazione di somma dello spazio e divisione per h data dalla moltiplicazione per uno scalare.

spazio; si definisce, allora, *retta parametrizzata* la curva

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & P + t(Q - P) = P + t\overrightarrow{PQ} \end{array}$$

La sua traccia è la retta affine passante per P e Q , e ha vettore velocità $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$, da cui $\|\alpha'(t)\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$, che è costante.

Esempio 1.2 (Circonferenza parametrizzata). Dato $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, si definisce *circonferenza parametrizzata* come

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a \cos t, a \sin t, 0) \end{array}$$

il cui vettore velocità è dato da $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$, che non risulta costante, mentre la sua velocità $\|\alpha'\| = a > 0$ sì. La traccia corrisponde ad una circonferenza nel piano $z = 0$, di centro l'origine e raggio a .

§1.2 Riparametrizzazione di una curva

Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata; una sua *riparametrizzazione* è data dalla coppia di mappe $h : [a, b] \rightarrow [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ e $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow h & \nearrow \beta & \\ [c, d] & & \end{array}$$

commuta, quindi si ha $\beta(h(t)) = \alpha(t)$. Perché questo sia verificato, si assume che $h \in C^\infty([a, b])$ e $h'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$; in questo modo, $\exists h^{-1}$ di classe C^∞ tale che $\beta = \alpha \circ h^{-1}$, quindi anche β risulta liscia ed è verificata la relazione $(\beta \circ h)(t) = \alpha(t)$, con $\text{Tr } \alpha = \text{Tr } \beta$.

Ora si definisce la lunghezza di una curva; se ne giustifica la definizione tramite il seguente ragionamento. Sia dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $P \in \mathcal{P}([a, b])$ una sua partizione, tale che $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$; allora la lunghezza di una

curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ approssimata a tale partizione è data da:

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \quad (1.2.1)$$

Si nota, dunque, che la lunghezza effettiva della curva coincide con

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([a, b])} L(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du \quad (1.2.2)$$

Definizione 1.2 (Lunghezza d'arco). Sia $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva; si definisce *lunghezza d'arco* la funzione

$$s : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \end{array}$$

La lunghezza dell'intera curva α è data da $L(\alpha) = s(b)$.

Osservazione 1.2. Si nota che per $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$, valendo $\|\alpha'(t)\| = a$, si ha:

$$s(t) = a \int_0^t du = ta \implies s(2\pi) = 2\pi a$$

Vale la pena chiedersi se $L(\alpha)$ sia indipendente dalla sua parametrizzazione, cioè se $L(\alpha) = L(\beta)$, se β è una riparametrizzazione di α ; questo si vede facilmente per conto diretto.

Dimostrazione. Se $\alpha(t) = \beta(h(t))$, allora $\alpha'(t) = \beta'(h(t))h'(t)$, quindi

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b |h'(t)| \|\beta'(h(t))\| dt$$

Ora si distinguono due casi: essendo $h'(t) \neq 0, \forall t$, si può avere o $h'(t) < 0$, o $h'(t) > 0$. Nel primo caso, si ha $h'(t) < 0$, quindi $|h'(t)| = -h'(t)$, con $h(a) = d$ e $h(b) = c$; nel secondo caso, $|h'(t)| = h'(t)$, con $h(a) = c$ e $h(b) = d$. Si trova, per $s = h(t)$,

rispettivamente:

$$\begin{cases} -\int_d^c h'(t) \|\beta'(h(t))\| dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = L(\beta) \\ \int_c^d h'(t) \|\beta'(h(t))\| dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = L(\beta) \end{cases}$$

In entrambi i casi, dunque, si ottiene $L(\alpha) = L(\beta)$. \square

Ora si introduce una particolare riparametrizzazione, talvolta nota col nome di *riparametrizzazione canonica*, o *naturale*; per poterla definire, è necessario che α soddisfi la seguente condizione.

Definizione 1.3 (Curva regolare). Una curva parametrizzata $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ è detta *regolare* se $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Si considera, quindi, una curva regolare $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$; visto che $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$, allora $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. Si può pensare alla lunghezza d'arco come $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\alpha)]$, che, essendo monotona perché si è appena osservato che $s'(t) > 0$, allora ha anche inversa $t : [0, L(\alpha)] \rightarrow [a, b]$. È, quindi, possibile definire la funzione

$$\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.2.3)$$

tale che $Tr(\beta) = Tr(\alpha)$ e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, per cui

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t)\|}$$

per cui $\|\beta'(s)\| = 1$.

Definizione 1.4 (Curva p.l.a.). Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una curva tale che $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$, allora si dice che è *parametrizzata tramite lunghezza d'arco*, o *pla*.

Osservazione 1.3. In base a quanto detto prima, ogni curva regolare è *riparametrizzabile tramite lunghezza d'arco*.

Osservazione 1.4 (Non unicità della versione pla). Data una curva regolare $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, la riparametrizzazione tramite lunghezza d'arco non è univoca ma dipende dall'estremo inferiore di integrazione della lunghezza d'arco $s(t)$; se, infatti, $a, b \in I$ con $a < b$:

$$s_a(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \quad s_b(t) = \int_b^t \|\alpha'(u)\| du$$

Le due, però, differiscono solo per una costante perché

$$s_a(t) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du + \int_b^t \|\alpha'(u)\| du = \text{cost.} + s_b(t)$$

Questa differenza per una costante non influirà sulla trattazione del riferimento di Frenet perché si lavora con derivate e la costante sparisce.

Esempio 1.3 (Elica). Sia $a > 0$; allora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, z) & \longmapsto & (a \cos u, a \sin u, z) \end{array}$$

definisce un cilindro di raggio a attorno all'asse z . Preso $b > 0$ e presi i punti $\{(t, bt)\}_{t \in \mathbb{R}}$, relativi ad una retta passante per l'origine, aperto, si può definire la curva

$$\alpha(t) = \varphi(t, bt) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

che descrive un'elica destrorsa, visto che si è preso $b > 0^a$, di raggio a e passo b . Si nota che

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

da cui α è regolare. Restringendola a $[0, +\infty)$, cioè considerando $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, si ha:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t(s) \sqrt{a^2 + b^2} \implies t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \alpha(t(s)) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ &= \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{aligned}$$

con β pla e, conseguentemente, $\beta(\mathbb{R}) = \text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha) = \alpha(\mathbb{R})$.

^aFosse stato $b < 0$, sarebbe stata un'elica sinistrorsa.

Esempio 1.4 (Ellisse). Siano $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

| Si vuole definire una curva α tale che $\text{Tr } \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$

Svolgimento. Si nota che $(x/a, y/b) \in S^1$, cioè

$$\frac{x}{a} = \cos t \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

con S^1 circonferenza unitaria e $t \in [0, 2\pi)$. Sia, allora

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a \cos t, b \sin t, 0) \end{array}$$

e si vede che $\text{Tr } \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$. ■

Esempio 1.5. Sia

$$\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire α tale che $\text{Tr } \alpha = \mathcal{C}$.

Svolgimento. Se si considera la secante $y = tx$, allora $t^2 x^2 = x^3$, ossia $x = t^2$ e $y = t^3$. Ne segue che la curva che soddisfa la richiesta è $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$. ■

Esempio 1.6. Sia

$$\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \mid y^2 = x^3 + x^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire una curva α tale che $\text{Tr } \alpha = \mathcal{C}$.

Svolgimento. Si considera, come prima, $y = tx$, da cui $x^3 + x^2(1 - t^2) = 0$, e si vede che $x = t^2 - 1$ e $y = t^3 - t$, quindi $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t, 0)$. ■

Per quanto in linea teorica se α è una curva regolare, allora si può riparametrizzare tramite lunghezza d'arco, questo non è praticamente fattibile in ogni singolo caso; se, per esempio, si considera $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, si ha $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, che, dunque, è regolare, ma data

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du$$

non si è in grado di trovare un'espressione per $t(s)$ perché la primitiva di s non è scrivibile in termini di funzioni elementari.

§1.3 Riferimento ed equazioni di Frenet

Definizione 1.5 (Versore tangente). Data una curva riparametrizzabile $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e la sua riparametrizzazione tramite lunghezza d'arco $\beta(s)$, si definisce il *versore tangente* ad α come $T(s) = \beta'(s)$.

Definizione 1.6 (Curvatura). Data una curva pla $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo versore tangente $T(s)$, allora se ne definisce la *curvatura* come

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

Ora si ricavano il riferimento di Frenet e le equazioni di Frenet. Per poter definire il riferimento di Frenet e ricavare, conseguentemente, le equazioni di Frenet, è necessario imporre ulteriori condizioni sulle curve in esame; la condizione operativa necessaria è la seguente.

Definizione 1.7 (Curva di Frenet). Una curva regolare $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è detta *di Frenet* se la sua pla $\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ è tale che $k(s) > 0, \forall s \in [0, L(\alpha)]$.

Lemma 1.0.1. Se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono due mappe, allora

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Dimostrazione. Si ha

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$$

quindi

$$(f(t) \cdot g(t))' = \sum_{i=1}^3 [f'_i(t)g_i(t) + f_i(t)g'_i(t)]$$

□

Data $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet e $T(s) = \beta'(s)$ il suo versore normale, con β versione pla di α , si nota che $T'(s)$ non è, in generale un versore e

$$1 = \|T(s)\|^2 = T(s) \cdot T(s) \implies [T(s) \cdot T(s)]' = 2T'(s) \cdot T(s) = 0 \implies T'(s) \perp T(s)$$

Avendo assunto α di Frenet, significa che $k_\alpha(s) \neq 0$, quindi $T'(s)$ è normalizzabile e si ottiene un versore ortogonale a $T(s)$. Usando questo versore e $T(s)$, tramite il prodotto vettore, se ne può definire un terzo; allora si ha la seguente definizione.

Definizione 1.8 (Versori normale e binormale). Dato $T(s)$ versore tangente di una curva di Frenet $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, si definiscono $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$ *versore normale principale* e $B(s) = T(s) \times N(s)$ *versore binormale*.

Evidentemente, si ha $\|N(s)\| = \|B(s)\| = 1$ e $T(s) \cdot N(s) = T(s) \cdot B(s) = N(s) \cdot B(s) = 0$. Ne segue che $(T(s), N(s), B(s)), \forall s \in I$ forma una base ortonormale di \mathbb{R}^3 , nota col nome di **riferimento di Frenet**. Per definizione di $N(s)$, si ottiene la **I equazione di Frenet**:

$$T'(s) = k(s)N(s) \quad (1.3.1)$$

Si nota che, essendo un versore, si ha $N(s) \cdot N(s) = 1$, quindi $N'(s) \cdot N(s) = 0$ (per lo stesso ragionamento fatto per $T(s)$), dunque $N'(s) \in \langle T(s), B(s) \rangle$; inoltre, essendo $T(s) \cdot N(s) = 0$, si ha

$$T'(s) \cdot N(s) + T(s) \cdot N'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot N(s)}_{=1} + T(s) \cdot N'(s) = 0$$

perciò si trova $\tau(s)$ tale per cui

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad (1.3.2)$$

Questa è nota come **II equazione di Frenet**.

Definizione 1.9 (Torsione). Data una curva regolare $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ e β la sua pla, si definisce $\tau(s)$ come la *torsione* di β nel punto s .

Ripetendo lo stesso ragionamento, si ha $B(s) \cdot B(s) = 1 \Rightarrow B'(s) \cdot B(s) = 0$, da cui $B'(s) \in \langle T(s), N(s) \rangle$ e, essendo $N(s) \cdot B(s) = 0$, dalla derivata di $T(s) \cdot B(s) = 0$, si ha

$$T'(s) \cdot B(s) + T(s) \cdot B'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot B(s)}_{=0} + T(s) \cdot B'(s) = 0$$

quindi $B'(s) \in \langle N(s) \rangle$. Usando $T(s) \cdot B(s) = 0$ e derivando $N(s) \cdot B(s) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} N'(s) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) &= (-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) \\ &= \tau(s) \underbrace{B(s) \cdot B(s)}_{=1} + N(s) \cdot B'(s) = 0 \end{aligned}$$

cioè

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) \quad (1.3.3)$$

che è nota come **III equazione di Frenet**. Ricapitolando, le equazioni di Frenet stabiliscono delle relazioni tra le derivate dei versori ortonormali del riferimento di Frenet e i versori stessi e sono:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Ora si applicano i concetti visti alle curve studiate nella sezione precedente.

Esempio 1.7. Sia $\alpha(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$ una curva parametrizzata (con $P, Q \in \mathbb{R}^3$ e $P \neq Q$). Si ha $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$, quindi la curva è regolare, quindi se ne può trovare una pla:

$$s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{PQ}\| du = t\|\overrightarrow{PQ}\| \implies t = \frac{s}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

quindi si ha $\beta(s) = P + s \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$. Allora il versore tangente è dato da

$$T(s) = \beta'(s) = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \implies T'(s) = 0$$

perciò $k(s) = 0$ e, quindi, α non è una curva di Frenet perché non ha curvatura positiva.

Esempio 1.8. Per $a > 0$, sia $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ una circonferenza parametrizzata di raggio a . Evidentemente, si può vedere come un caso particolare di elica parametrizzata per $b = 0$, quindi si può fare uso del risultato trovato in precedenza:

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left(a \cos \left(\frac{s}{a} \right), a \sin \left(\frac{s}{a} \right), 0 \right) \implies T(s) = \left(-\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a}, 0 \right) \\ \implies T'(s) &= \underbrace{\frac{1}{a} \left(-\cos \frac{s}{a}, -\sin \frac{s}{a}, 0 \right)}_{\substack{k(s) \\ N(s)}} \end{aligned}$$

Si conclude che $N(s) \perp z$ e punta proprio verso z ; inoltre, la circonferenza parametrizzata è una curva di Frenet perché ha curvatura positiva, essendo $1/a > 0$ perché

$a > 0$ per assunzione. Infine:

$$B(s) = \begin{pmatrix} -\sin s/a \\ \cos s/a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/a \\ -\sin s/a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\tau(s)N(s) = B'(s) = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0$$

Esempio 1.9. Si considera l'elica parametrizzata $\alpha = (a \cos t, a \sin t, bt)$, con raggio $a \in \mathbb{R}^{>0}$ e passo $b \in \mathbb{R}$. La sua pla è già stata ricavata; dato $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, si ottiene:

$$\beta(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{c}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{c}} \right), \frac{b}{\sqrt{c}} s \right)$$

da cui

$$T(s) = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right) \Rightarrow T'(s) = \underbrace{\frac{a}{c^2}}_{k(s)} \underbrace{\left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right)}_{N(s)}$$

quindi, come nel caso della circonferenza, $N(s) \perp z$ e punta verso di esso. Si ha:

$$B(s) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -a \sin s/c \\ a \cos s/c \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/c \\ -\sin s/c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b \sin s/c \\ -b \cos s/c \\ a \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \Rightarrow \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = \frac{b}{c^2}$$

Da questo, si vede che

- se $b > 0$, allora l'elica è destrorsa e $\tau(s) > 0$,
- se $b < 0$, allora l'elica è sinistrorsa e $\tau(s) < 0$,
- se $b = 0$, si ha una circonferenza e $\tau(s) = 0$, con $k(s) = 1/a$.

Fissando a , si nota che, per $b \rightarrow \pm\infty$, si ha $\tau(s) \rightarrow 0$ e $k(s) = a/(a^2 + b^2) \rightarrow 0$.

Proposizione 1.1. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare; allora $k_\alpha = 0 \iff \alpha(I)$ è contenuta in una retta.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- (\Leftarrow) Se $\alpha(I) \subseteq P + \langle v \rangle$, per v versore generico, si considera la sua versione pla $\alpha(I) = \beta(J) \subseteq P + \langle v \rangle$; allora $\beta = P + f(s)v$ e $\beta' = f'(s)v$, con $f'(s) = \pm 1$ perché $\|\beta'\| = 1$. Ne segue che:

$$T(s) = \beta'(s) = f'(s)v = \pm v \implies T'(s) = 0 \implies k_\alpha(s) = 0$$

- (\Rightarrow) Sia $\|T'(s)\| = k_\alpha(s) = 0$, quindi $T(s) = \beta'(s) = v$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$. Allora si deve avere $\beta(s) = \beta(0) + sv \in \beta(0) + \langle v \rangle$.

□

Esercizio 1.1. Sia $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva pla tale che

$$\beta(I) \subseteq S_r^2(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| = r\}$$

Mostrare che β è di Frenet.

Svolgimento. Se $\beta(I) \subseteq S_r^2(P)$, allora $\|\beta(s) - P\|^2 = r^2$; derivando due volte rispetto a s , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [T(s) \cdot (\beta(s) - P)] &= 0 \implies T'(s) \cdot (\beta(s) - P) + T(s) \cdot T(s) = 0 \\ \implies T'(s) \cdot (\beta(s) - P) &= -1 \implies k(s) [N(s) \cdot (\beta(s) - P)] = -1 \end{aligned}$$

Quindi $k(s) \neq 0$ e, pertanto β è di Frenet. ■

Proposizione 1.2. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet; allora $\tau_\alpha = 0 \iff \alpha(I)$ è contenuta in un piano.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- (\Rightarrow) Si assume, senza perdita di generalità, che α sia pla¹. Allora

$$\tau_\alpha = 0 \implies B'_\alpha(s) = -\tau_\alpha(s)N_\alpha(s) = 0$$

quindi B_α è costante; sia $B_\alpha(s) = B_0$, per qualche $B_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|B_0\| = 1$. Ne segue, allora, che

$$T(s) \cdot B_0 = \alpha'(s) \cdot B_0 \implies (\alpha(s) \cdot B_0)' = 0$$

quindi $\alpha(s) \cdot B_0 = c \in \mathbb{R}$, dunque $\alpha(I) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\}$.

¹Altrimenti, α ammette una versione pla perché è una curva di Frenet.

- (\Leftrightarrow) Sia $\alpha(I) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\}$, per qualche $B_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|B_0\| = 1$ e $c \in \mathbb{R}$; allora $\forall s, \alpha(s) \cdot B_0 = c$. Ne segue che

$$T(s) \cdot B_0 = 0 \implies k(s)(N(s) \cdot B_0) = 0 \implies N(s) \cdot B_0 = 0$$

dove la seconda implicazione è giustificata dal fatto che α è di Frenet, quindi $k(s) > 0$. Visto che $B_\alpha(s) = T(s) \times N(s)$, considerando (continuare ...).

□

Proposizione 1.3. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet; se $\tau_\alpha = 0$, allora k_α è costante $\iff \alpha(I)$ è contenuta in una circonferenza.

Dimostrazione. Da scrivere...

□

Proposizione 1.4. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare; se $\alpha(I) \subseteq \mathbb{S}_R(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| = R\}$, allora α è di Frenet e $k_\alpha \geq 1/R > 0$.

Dimostrazione. Sia β la versione pla di α . Assumendo che $\text{Tr}(\beta) \subseteq \mathbb{S}_R(P)$, si ha:

$$(\beta(s) - P) \cdot (\beta(s) - P) = \|\beta(s) - P\|^2 = R^2$$

Derivando questa relazione, si ha:

$$\beta'(s) \cdot (\beta(s) - P) = 0$$

Derivando nuovamente:

$$T'(s) \cdot (\beta(s) - P) + \underbrace{\beta'(s) \cdot \beta'(s)}_{=1} = 0$$

Passando alla norma, si vede che:

$$1 = \|T'(s) \cdot (\beta(s) - P)\| \leq \|T'(s)\| \|\beta(s) - P\| = k_\alpha(s)R$$

da cui $k_\alpha(s) \geq 1/R > 0$, quindi α è di Frenet.

□

§1.4 Riferimento di Frenet senza lunghezza d'arco

Come accennato, la possibilità di ottenere la versione pla di una curva regolare, anche se ammissibile in teoria, non sempre è concreta in pratica.

Sia, allora, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare; per definizione

$$\beta(s(t)) = \alpha(t) \implies \beta'(s(t))s'(t) = \beta'(s(t)) \|\alpha'(t)\| = \alpha'(t)$$

da cui si ottiene la relazione

$$T(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

Dalla relazione precedente, sostituendo $\beta'(s(t)) = T(s(t))$, si ottiene

$$s'(t)T(s(t)) = \alpha'(t) \quad (1.4.1)$$

e, derivando:

$$s''(t)T(s(t)) + s'^2(t)T'(s(t)) = \alpha''(t) \quad (1.4.2)$$

A questo punto, si vede che, facendo il prodotto vettore $\alpha' \times \alpha''$, il termine $T' \times T' = 0$, quindi:

$$\alpha' \times \alpha'' = s'^3 T \times T' \quad (1.4.3)$$

Si nota che, essendo $T' \perp T$ e $\|T\| = 1$, si ha $\|T' \times T\| = \|T'\| = k$, perciò

$$k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{s'^3} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

Per continuare, si assume che α sia una curva di Frenet; allora, usando la I equazione di Frenet, si ottiene

$$s'^3 \underbrace{k T \times N}_{=B} = \alpha' \times \alpha''$$

da cui si ottiene

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha'\|^3 k} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

Da questo, si ricava

$$N = B \times T = \frac{\alpha' \times \alpha'' \times \alpha'}{\|\alpha' \times \alpha''\| \|\alpha'\|}$$

Infine, si calcola la torsione. Per farlo, si deriva la I equazione di Frenet:

$$s'T'' = s'k'N + s'kN' \implies T'' = k'N + kN'$$

dove $s' \neq 0$ perché la curva è regolare e, quindi, si cancella. Vista la III equazione di Frenet $B' = -\tau N$, si ha $\tau = -B' \cdot N$; in realtà, si nota che

$$0 = \underbrace{(B \cdot N)'}_{=0} = B' \cdot N + B \cdot N' \implies B' \cdot N = -B \cdot N'$$

da cui $\tau = B \cdot N'$. Derivando l'equazione 1.4.2:

$$\alpha''' = T''s'^3 + 3T's's'' + Ts'''$$

Ora, visto che $T' \propto N$ e $T, N \perp B$, dal prodotto scalare per B si ha:

$$\alpha''' \cdot B = s'^3 T'' \cdot B = s'^3 k N' \cdot B = s'^3 k \tau$$

Ricordando l'espressione per B , si ha:

$$\tau = \frac{\alpha''' \cdot (\alpha' \times \alpha'')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

Osservazione 1.5. L'esistenza di queste formule implica l'indipendenza di curvatura, torsione e intero riferimento di Frenet dalla scelta della lunghezza d'arco per la riparametrizzazione.

§1.5 Teorema fondamentale della teoria delle curve

Siano $\beta, \tilde{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ due curve pla di Frenet, con $\tilde{\beta}$ ottenuta tramite roto-traslazione di β , cioè

$$\tilde{\beta}(s) = A\beta(s) + b$$

con $A \in SO(3)$ e $b \in \mathbb{R}^3$. Quello che si vuole verificare ora è che le due curve abbiano uguali curvatura e torsione. Per farlo, si nota che, essendo A un operatore lineare, è anche continuo (visto che opera su uno spazio finito-dimensionale), dunque:

$$\tilde{T}(s) = AT(s) \quad \tilde{T}'(s) = T'(s) \implies \tilde{k}(s)\tilde{N}(s) = k(s)AN(s)$$

$\forall s \in I$. Passando alle norme, visto che A le preserva si ha $\|AN(s)\| = 1$, $\forall s \in I$, dunque $\tilde{k}(s) = k(s)$, $\forall s \in I$.

Per la torsione, invece, si ha:

$$\tilde{B}(s) = \tilde{T}(s) \times \tilde{N}(s) = (AT(s)) \times (AN(s)) = A[T(s) \times N(s)] = AB(s)$$

Per passaggi analoghi a prima, si vede che

$$\tilde{B}'(s) = AB'(s) \implies -\tilde{\tau}(s)\tilde{N}(s) = -\tau(s)AN(s)$$

da cui $\tilde{\tau}(s) = \tau(s)$. Ora ci si chiede il viceversa: date due curve con uguale curvatura e torsione, è vero che una è la versione roto-traslata dell'altra? Per rispondere, si ha il seguente.

Teorema 1.1. Se $\beta, \tilde{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono due pla di Frenet con $k(s) = \tilde{k}(s)$ e $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, allora $\exists A \in SO(3)$, $\exists b \in \mathbb{R}^3$ tali che $\tilde{\beta}(s) = A\beta(s) + b$, $\forall s \in I$.

Dimostrazione. Si fissa un punto $s_0 \in I$; in questo punto, si possono calcolare i valori del riferimento di Frenet di ciascuna curva, ottenendo un totale di sei vettori. Si possono costruire $M = (T(s_0), N(s_0), B(s_0))$ e $\tilde{M} = (\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0), \tilde{B}(s_0))$, che sono due matrici di $SO(3)$ ¹ e, a partire da queste, si può costruire la matrice $A = \tilde{M}M^{-1}$ che permette di passare dal riferimento di β a quello di $\tilde{\beta}$ nel punto s_0 .

Ora bisogna mostrare che A permette il passaggio da un riferimento all'altro e bisogna trovare la costante di traslazione. Per farlo, si definisce $\beta^*(s) = A\beta(s) + b$; si mostra che $\beta^*(s) = \tilde{\beta}(s)$, $\forall s \in I$. Intanto si trova b : è sufficiente notare che

$$\beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0) = A\beta(s_0) + b \implies b = \tilde{\beta}(s_0) - A\beta(s_0)$$

Si nota che, dimostrando l'uguaglianza delle terne del riferimento di β^* e $\tilde{\beta}$ per ogni $s \in I$, unito al fatto che $\beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0)$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} T^*(s) = \tilde{T}(s) \\ \beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0) \end{cases} \iff \begin{cases} (\beta^*)'(s) = \tilde{\beta}'(s) \\ \beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0) \end{cases}$$

da cui, integrando, si ha $\beta^*(s) = \tilde{\beta}(s)$, $\forall s \in I$.

¹Evidentemente, il riferimento di Frenet restituisce un elemento di $O(3)$ perché la relazione $M^T M = \text{Id}$ corrisponde a moltiplicare i vettori del riferimento tra loro. Inoltre, usando $\det M = T \cdot (N \times (T \times N)) = T \cdot [(N \cdot N)T - (N \cdot T)N] = \|T\| = 1$.

Per dimostrarlo, si definisce la funzione

$$f(s) = T^*(s) \cdot \tilde{T}(s) + N^*(s) \cdot \tilde{N}(s) + B^*(s) \cdot \tilde{B}(s)$$

che è sempre minore o uguale a 3 perché ciascun termine è minore o uguale ad 1 e l'uguaglianza vale quando il riferimento di β^* e quello di $\tilde{\beta}$ coincidono; in particolare, quindi, $f(s_0) = 3$. Basta mostrare che questa è costante per mostrare che i due riferimenti coincidono ovunque su I . Allora si vede che:

$$f'(s) = kN^* \cdot \tilde{T} + kT^* \cdot \tilde{N} + (-kT^* + \tau B^*) \cdot \tilde{N} + N^* \cdot (-k\tilde{T} + \tau\tilde{B}) - \tau N^* \cdot \tilde{B} - \tau B^* \cdot \tilde{N} = 0$$

dove si è usato che $k^*(s) = \tilde{k}(s) = k(s)$ e $\tau^*(s) = \tilde{\tau}(s) = \tau(s)$ per quanto dimostrato all'inizio della sezione, essendo che β^* è la roto-traslata di β e le uguaglianze tra $\tilde{\beta}$ e β valgono per assunzione. \square

A questo punto, ci si può chiedere se, date comunque $\tau, k : I \rightarrow \mathbb{R}$, di classe $C^\infty(I)$ e con $k > 0$, si può trovare una pla di Frenet $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $k_\beta = k$ e $\tau_\beta = \tau$. Questo si dimostra essere vero, ma non si dimostra.

§1.6 Esercizi

Esercizio 1.2. Sia data la curva

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1}{3}t^3, \sqrt{2}(t \sin t + \cos t), \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) \right) \end{array}$$

Rispondere ai seguenti punti.

- (a). Dimostrare che α , ristretta ad un intorno dell'origine, è di Frenet.
- (b). Calcolare la curvatura e il riferimento di Frenet in un intorno di $t = 0$.

Svolgimento. Per lo svolgimento, si userà la seguente definizione di lunghezza d'arco:

$$s(t) := \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du$$

Si divide lo svolgimento nei due punti.

- (a). Essendo interessati ad un intorno dell'origine, per dire che α è di Frenet bisogna preliminarmente verificarne la regolarità; allora si nota che

$$\alpha' = (t^2, \sqrt{2}t \cos t, \cos^2 t)$$

che è non-nulla in un intorno di $t = 0$. Ora, invece di procedere direttamente con i conti, che sono estremamente lunghi e complessi, si può notare che la condizione da mostrare è $T'(0) \neq 0$, per far vedere che α è di Frenet in un intorno dell'origine. Per farlo, si può mostrare che $T \cdot T' \neq 0$ in $s(0)$ e si possono usare le relazioni

$$\alpha'(t) = s'(t)T(s(t)) \quad \alpha''(t) = s''(t)T(s(t)) + s'^2(t)T'(s(t))$$

Infatti

$$\alpha' \times \alpha'' = \|\alpha'\|^3 T \times T'$$

e α'' si calcola facilmente come

$$\alpha''(t) = (2t, \sqrt{2}(\cos t - t \sin t), -2 \cos t \sin t)$$

Quindi

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che permette di concludere direttamente che $T' \neq 0$ in un intorno di $t = 0$.

- (b). Si nota che, essendo

$$\|\alpha'\| = \sqrt{t^4 + 2t^2 \cos^2 t + \cos^4 t} = t^2 + \cos^2 t \Rightarrow \|\alpha'(0)\| = 1$$

allora, dalla norma di $\alpha'(0) \times \alpha''(0)$, si ricava:

$$\sqrt{2} = \underbrace{\|\alpha'(0)\|^3}_{=1} k \Rightarrow k(0) = \sqrt{2}$$

Dalla stessa relazione, si ricava anche B , inserendo la I equazione di Frenet:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \times T' = kT \times N = kB \Rightarrow B(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dai calcoli precedenti, si può ottenere il versore tangente in $t = 0$:

$$T(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per finire, si ottiene il versore normale tramite prodotto vettore:

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■