APPUNTI DI GEOMETRIA

MANUEL DEODATO

Indice

1 Geometria proiettiva

1.1 Introduzione agli spazi proiettivi

Definizione 1.1 (Spazio proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; il suo *spazio proiettivo* è dato da:

$$\mathbb{P}(V) = {V \setminus \{0\}}/{\sim}$$

dove $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda v$.

Dalla definizione, uno spazio proiettivo collassa tutti i vettori di uno spazio vettoriale che appartengono alla stessa retta in un punto. In questo senso, $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme delle rette di V.

Esempio 1.1. Si nota che $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing/\sim\, = \varnothing$, mentre per $v \neq 0$, si ha:

$$\mathbb{P}(\text{Span } v) = {\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0\}}/{\sim} = \{[v]\}$$

dove $[v]$ rappresenta la classe di equivalenza di v; questo significa che lo spazio proiettivo dello span di un elemento è composto da un solo punto.

Definizione 1.2 (Dimensione di uno spazio proiettivo). La dimensione di uno spazio proiettivo è

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$$

Intuitivamente, questa definizione è dovuta al fatto che gli spazi proiettivi collassano le rette in punti, abbassando di 1 la dimensione dello spazio vettoriale.

Definizione 1.3 (Punti, rette e piani proiettivi). Si definisce *punto proiettivo* uno spazio proiettivo di dimensione 0, *retta proiettiva* uno spazio di dimensione 1 e *piano proiettivo* uno spazio di dimensione 2.

Definizione 1.4 (Spazio proiettivo standard). Sia $\mathbb{K}$ un campo; si definisce lo *spazio proiettivo standard* come

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$$

1.1.1 Trasformazioni proiettive

Analogamente al caso dei gruppi e degli anelli, si studiano quelle mappe che preservano la struttura di spazio proiettivo.

DEFINIZIONE 1.5 (TRASFORMAZIONE PROIETTIVA). Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ è detta *trasformazione proiettiva* se $\exists \varphi : V \longrightarrow W$ applicazione lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

In questa definizione, si dice che f è *indotta* da φ e, talvolta, si scrive che $f = [\varphi]$.

PROPOSIZIONE 1.1. Se f è una trasformazione proiettiva indotta da φ, allora φ è iniettiva.

Dimostrazione. Per assurdo, $\ker \varphi \neq \{0\}$ e sia $v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$; allora $f([v]) = [0]$, ma $[0] \notin \mathbb{P}(W)$ per definizione di spazio proiettivo, quindi f non sarebbe ben definita. □

PROPOSIZIONE 1.2. Ogni applicazione lineare iniettiva $\varphi : V \longrightarrow W$ induce una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ tramite l'associazione $[v] \mapsto [\varphi(v)]$.

Dimostrazione. Se $v \neq 0$, allora $\varphi(v) \neq 0$ perché φ è iniettiva. Se, invece, $[v] = [w]$, allora, per definizione, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$[\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)]$$

□

PROPOSIZIONE 1.3. Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

Dimostrazione. Sia $f([v]) = f([w])$ e sia φ l'applicazione lineare che induce f; allora l'uguaglianza si traduce in $[\varphi(v)] = [\varphi(w)]$, ma per come sono definite queste classi di equivalenza, questo vuol dire che $\varphi(v) = \lambda\varphi(w) = \varphi(\lambda w)$. Essendo φ iniettiva, però, si ottiene che $v = \lambda w$, cioè $[v] = [\lambda w]$. □

PROPOSIZIONE 1.4. La trasformazione $\mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$ è proiettiva ed è indotta da id_V.

Dimostrazione. Tale trasformazione deve essere tale per cui $\mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}([v]) = [v] = [\mathrm{id}_V\, v]$, quindi è indotta da id_V; essendo quest'ultima iniettiva, anche $\mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$ è iniettiva. □

PROPOSIZIONE 1.5. Siano $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ e $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Z)$ due trasformazioni proiettive; allora $g \circ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(Z)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Se φ induce f e ψ induce g, allora $\psi \circ \varphi$ induce $g \circ f$:

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g\left([\varphi(v)]\right) = g \circ f\left([v]\right)$$

□

Si passa, ora, a caratterizzare gli isomorfismi di spazi proiettivi; il seguente teorema giustificherà la definizione di isomorfismo proiettivo.

TEOREMA 1.1. Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ una trasformazione proiettiva; allora, le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti.

(a). f è suriettiva.

(b). f è biettiva.

(c). $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.

(d). f è invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Il fatto che (a) $\iff$ (b) è dato dal fatto che f è proiettiva, quindi è iniettiva.

Per mostrare che (b) $\Rightarrow$ (c), si prende φ che induce f e si fa vedere che è suriettiva. Visto che $\varphi(0) = 0$, basta mostrare che $W \setminus \{0\} \subset \operatorname{Im}\varphi$. Sia, dunque, $w \in W \setminus \{0\}$, quindi $[w] \in \mathbb{P}(W)$; visto che f è suriettiva, $\exists [v] \in \mathbb{P}(V) : f([v]) = [w] = [\varphi(v)]$. Allora $w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow w \in \operatorname{Im}\varphi$. Questo significa che φ è un isomorfismo tra V e W, per cui

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W)$$

Ora si mostra che (c) $\Rightarrow$ (d), quindi sia φ lineare che induce f. Si sa, dunque, che φ è iniettiva e che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$, il che implica che $\dim V = \dim W$, pertanto φ è un isomorfismo; in quanto tale, φ^{-1} è ben definita ed è ancora un isomorfismo di spazi vettoriali. Rimane da mostrare che φ^{-1} induce f; a questo scopo, si nota che:

$$\begin{aligned} [\varphi^{-1}]f([v]) &= [\varphi^{-1}][\varphi(v)] = [\varphi^{-1}\varphi(v)] = [v] \\ f[\varphi^{-1}]([v]) &= f\left([\varphi^{-1}(v)]\right) = [\varphi\varphi^{-1}(v)] = [v] \end{aligned}$$

Infine, (d) $\Rightarrow$ (a) perché, essendo f invertibile, è anche suriettiva. □

DEFINIZIONE 1.6 (ISOMORFISMO PROIETTIVO). Una trasformazione proiettiva che sia anche suriettiva è detta *isomorfismo proiettivo*.

DEFINIZIONE 1.7 (PROIETTIVITÀ). Ogni trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è detta *proiettività*; si indica con $\mathbb{P}GL(V)$ l'insieme delle proiettività di V.

Da questa definizione, si può notare che ogni proiettività è un isomorfismo perché, se f è indotta da φ, allora vale la formula della dimensione

$$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V \implies \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$$

Inoltre, si può mostrare che equipaggiando $\mathbb{P}GL(V)$ con l'operazione di composizione, questo è un gruppo.

OSSERVAZIONE 1.1 (PUNTI FISSI). Sia f una proiettività indotta da φ, con $[v]$ punto fisso, cioè

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)]$$

Allora $\lambda v = \varphi(v)$, cioè v è un autovettore di φ, con autovalore λ; analogamente, se v è un autovettore di φ, allora $[v]$ è un punto fisso per lo stesso motivo.

1.1.2 Sottospazi proiettivi

Per semplicità di notazione, si introduce la proiezione

$$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V) \tag{1.1.1}$$

che manda $V \setminus \{0\}$ sul suo quoziente con la relazione di equivalenza.

DEFINIZIONE 1.8 (GRASSMANNIANA). Sia V uno spazio vettoriale tale che $\dim V = n$ e sia $k \in \{0, \ldots, n\}$; allora la *grassmanniana* k di V è l'insieme di tutti i sottospazi di V di dimensione k:

$$\operatorname{Gr}_k(V) = \{W \subseteq V \mid W \text{ spazio vettoriale con } \dim W = k\}$$

Si userà, inoltre, la seguente notazione:

$$\operatorname{Gr}(k, n) = \operatorname{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$$

DEFINIZIONE 1.9 (SOTTOSPAZIO PROIETTIVO). Sia V uno spazio vettoriale; un *sottospazio proiettivo* S di $\mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$S = \pi(H \setminus \{0\})$$

per qualche H sottospazio vettoriale di V.

OSSERVAZIONE 1.2. Dalla definizione, si deduce che uno sottospazio proiettivo è esso stesso uno spazio proiettivo, cioè $\pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$.

DEFINIZIONE 1.10 (IPERPIANO PROIETTIVO). Un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$\dim S = \dim \mathbb{P}(V) - 1$$

TEOREMA 1.2. Siano V uno spazio vettoriale e H un suo sottospazio. Sia $S = \pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$; allora $\pi^{-1}(S) = H \setminus \{0\}$. In sostanza, si ha una biezione tra i sottospazi vettoriali di V e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Si nota che

$$\pi^{-1}(S) = \bigcup_{[v]\in S} \pi^{-1}([v]) = \bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v])$$

Si dimostrerà il teorema per doppia inclusione. Avendo $\pi(v) = [v]$, allora $v \in \pi^{-1}([v])$, perciò

$$\bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v]) \supseteq H \setminus \{0\}$$

Si nota anche che

$$\pi^{-1}([v]) = \{w \mid [w] = [v]\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

pertanto $\forall w \in \pi^{-1}([v])$, si ha $w = \lambda v \in H \setminus \{0\}$, da cui segue che

$$\bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v]) \subseteq H \setminus \{0\}$$

□

Il teorema appena mostrato permette di concludere che

$$\dim \mathbb{P}(H) = \dim H - 1 \iff \dim \pi^{-1}(S) \cup \{0\} = \dim S + 1$$

Dal punto di vista delle grassmanniane, si ha che

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{P}(V)) \cong \mathrm{Gr}_{k+1}(V)$$

dove le grassmanniane di uno spazio proiettivo sono ottenute tramite la definizione di dimensione per uno spazio proiettivo.

Si passa, ora, allo studio di somme e intersezioni di sottospazi proiettivi; in particolare, si ha il seguente.

Proposizione 1.6. Siano S_i, per $i \in I$ un certo insieme di indici, dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$; allora l'intersezione $\bigcap_{i\in I} S_i$ è ancora un sottospazio di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Si indicano con H_i i sottospazi vettoriali di V tali che $S_i = \mathbb{P}(H_i)$. Per conto diretto, si trova che:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in I} S_i = \bigcap_{i\in I} \pi(H_i \setminus \{0\}) &= \big\{[v] \mid \forall i \in I,\ [v] \in \pi(H_i \setminus \{0\})\big\} \\
&= \big\{[v] \mid \forall i \in I,\ \exists w_i \in H_i \setminus \{0\} \text{ t.c. } [w_i] = [v]\big\} \\
&= \big\{[v] \mid \forall i \in I,\ v \in H_i \setminus \{0\}\big\} = \pi\left(\bigcap_{i\in I}(H_i \setminus \{0\})\right) \\
&= \pi\left(\left(\bigcap_{i\in I} H_i\right) \setminus \{0\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} H_i\right)
\end{aligned}$$

□

La proposizione appena dimostrata permette di concludere che

$$\mathbb{P}(V) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(V \cap W) \tag{1.1.2}$$

Come nel caso degli spazi vettoriali, l'unione di spazi proiettivi non è, in generale, uno spazio proiettivo; l'idea, allora, è quella di definire anche in questo caso un concetto di somma.

Definizione 1.11 (Spazio proiettivo generato). Sia $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$. A partire da A, si può definire il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ contenente A come

$$L(A) = \bigcap \{S \subseteq \mathbb{P}(V) \mid A \subseteq S \text{ e } S \text{ sottospazio proiettivo}\}$$

Si nota che, per definizione, tale intersezione è non vuota perché $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di se stesso.

In questo modo, si può trovare lo spazio proiettivo della somma di due sottospazi prendendo

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2) \tag{1.1.3}$$

PROPOSIZIONE 1.7. Siano $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$ due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, con H_1, H_2 sottospazi vettoriali di V; allora

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

Dimostrazione. Si procede per doppia inclusione. Si mostra prima che $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$; per farlo, visto che $H_1 \subseteq H_1 + H_2$, si ha

$$S_1 = \mathbb{P}(H_1) = \pi(H_1 \setminus \{0\}) \subseteq \pi\big((H_1 + H_2) \setminus \{0\}\big) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

In maniera del tutto analoga, si mostra che $S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$. Questo significa che $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$ è un sottospazio proiettivo contenente sia S_1, che S_2, quindi, per la minimalità di $L(S_1, S_2)$, deve valere $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$.

Per l'inclusione inversa, visto che $L(S_1, S_2)$ è un sottospazio proiettivo, si prende H sottospazio vettoriale di V tale che $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H) \Rightarrow H = \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\}$. Allora:

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \implies H_1 = \pi^{-1}(S_1) \cup \{0\} \subseteq \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\} = H$$

Analogamente si mostra che $H_2 \subseteq H$, quindi si ha $H_1 + H_2 \subseteq H$, da cui $\mathbb{P}(H_1 + H_2) \subseteq \mathbb{P}(H) = L(S_1, S_2)$. □

PROPOSIZIONE 1.8. Sia $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$ e f una trasformazione proiettiva; allora $f(L(S)) = L(f(S))$.

Dimostrazione. Siano $H = \pi^{-1}(S)$ un sottoinsieme di V e $f = [\varphi]$. Si nota che $f(S) = f(\pi(H)) = \pi(\varphi(H))$, quindi

$$\begin{aligned} f(L(S)) = f\big[\pi(\mathrm{Span}(H) \setminus \{0\})\big] &= \pi\big[\varphi(\mathrm{Span}(H)) \setminus \{0\}\big] \\ &= \pi\big[\mathrm{Span}(\varphi(H)) \setminus \{0\}\big] = \pi\big\{\mathrm{Span}[\pi^{-1}(f(S))] \setminus \{0\}\big\} \\ &= L(f(S)) \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.3 (FORMULA DI GRASSMANN). Siano S_1, S_2 due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$; allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

Dimostrazione. Siano H_1, H_2 i sottospazi di V tali che $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$. Per la formula di Grassmann, si ha

$$\dim H_1 + H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$$

Dal punto di vista degli spazi proiettivi, questa si traduce in:

$$\begin{aligned}
&\dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) + 1 = (\dim \mathbb{P}(H_1) + 1) + (\dim \mathbb{P}(H_2) + 1) - \dim \mathbb{P}(H_1 \cap H_2) - 1 \\
&\Rightarrow \dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2
\end{aligned}$$

□

COROLLARIO 1.3.1. Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ tali che $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$, allora $S_1 \cap S_2 \neq 0$.

Dimostrazione. Usando la formula di Grassmann:

$$\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim \mathbb{P}(V) - \dim L(S_1, S_2) \geq 0$$

Visto che, per convenzione, $\dim \emptyset = -1$, si ha $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. □

TEOREMA 1.4. Sui piani proiettivi, non esistono *rette parallele*. Più precisamente, dati r_1, r_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ e $\dim r_1 = \dim r_2 = 1$, si ha $r_1 = r_2$, oppure $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, dove P è un punto proiettivo.

Dimostrazione. Sia $r_1 \neq r_2$; allora $\dim L(r_1, r_2) = 2$ e

$$\dim r_1 \cap r_2 = \dim r_1 \dim r_2 - \dim L(r_1, r_2) = 1 + 1 - 2 = 0$$

quindi $r_1 \cap r_2$ è un punto proiettivo. □

1.1.3 **Riferimenti proiettivi**

L'idea è quella di estendere il concetto di indipendenza lineare e base agli spazi proiettivi.

2 Spazi metrici, topologici e applicazioni continue

2.1 Spazi metrici

Definizione 2.1 (Spazio metrico). Sia X un insieme non vuoto; allora X si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, x') \geq 0$ e $d(x, x') = 0 \iff x = x'$;
- $d(x, x') = d(x', x)$;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Dato uno spazio metrico (X, d_X) e un insieme $Y \subset X$, si può definire un sottospazio di (X, d_X) restringendo la distanza al solo Y:

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'),\ \forall y, y' \in Y$$

Quindi (Y, d_Y) è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di (X, d_X), il quale è detto *spazio ambiente* di Y.

2.1.1 Insiemi aperti

In uno spazio metrico (X, d), si può definire un *disco aperto* di raggio r e centro x come

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

Definizione 2.2 (Insieme aperto). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

2.1.2 Continuità in spazi metrici

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon,\ \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,\ \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$

È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

DEFINIZIONE 2.3 (CONTINUITÀ IN SPAZI METRICI). Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, con (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici. Si dice che f è continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon$, $\exists \delta(\epsilon)$ tale che:

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon, \ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \tag{2.1.1}$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

TEOREMA 2.1. Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\iff$ $\forall A \subset Y$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni.

- ($\Rightarrow$) Si assume che f sia continua. Si prende $f(x) \in A$, con $A \subset Y$ aperto, per qualche $x \in f^{-1}(A)$. Essendo A aperto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset A$; allo stesso tempo, per continuità di f, dato ε scelto prima, deve esistere $\delta(\varepsilon)$ tale che

  $$f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$$

  quindi $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Valendo $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- ($\Leftarrow$) Si assume che $\forall A \subset Y$ aperto, la funzione f sia tale che l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto. Per $f(x) \in Y$, esiste $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset Y$; essendo questo aperto, deve essere aperto anche $f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$. Dunque, dato $x \in f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, $\exists \delta(\varepsilon)$: $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, quindi vuol dire che $f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$, ossia:

  $$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon, \ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

  Valendo $\forall x \in X$, allora f è continua.

$\square$

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

2.1.3 **Distanze equivalenti**

DEFINIZIONE 2.4 (DISTANZE TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI). Due distanze $d, \overline{d}$ su X si dicono *topologicamente equivalenti* se hanno gli stessi insiemi aperti, cioè se generano la stessa topologia.

Se $d(x, y) = r\overline{d}(x, y)$, per $r > 0$, si hanno due distanze equivalenti perché, evidentemente, $\forall \varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(x) = \overline{B}_{r\varepsilon}(x)$$

cioè le due distanze $d, \overline{d}$ identificano le stesse palle aperte, quindi gli stessi insiemi aperti. In $\mathbb{R}^n$, le distanze

$$\begin{aligned} d_2(x, x') &= \|x - x'\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2} \\ d_1(x, x') &= \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| \\ d_\infty(x, x') &= \max_i \left\{ |x_i - x_i'| \right\} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

sono equivalenti e si ha

$$d_\infty(x, x') \leq d_2(x, x') \leq d_1(x, x') \leq n d_\infty(x, x') \tag{2.1.3}$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è giustificata da:

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2} \geq \sqrt{\max_i \left\{ (x_i - x_i')^2 \right\}} = \max_i \left\{ |x - x_i'| \right\} = d_\infty(x, x')$$

La seconda, invece, è vera perché:

$$[d_2(x, x')]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i')^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| \right]^2 = [d_1(x, x')]^2$$

L'ultima disuguaglianza è immediata. □

Da questo segue direttamente che[1]

$$B_\varepsilon^{(\infty)}(x) \supset B_\varepsilon^{(2)}(x) \supset B_\varepsilon^{(1)}(x) \supset B_{\varepsilon/n}^{(\infty)}(x) \tag{2.1.4}$$

[1] Apparentemente, la distanza più grande dovrebbe includere più elementi, quindi i simboli $\supset$ dovrebbero essere dei $\subset$, invece, avendo fissato il raggio ε, quella che permette di creare la palla più grande è la distanza più piccola perché *avvicina* i punti tra di loro, quindi più elementi rientreranno in tale raggio.

Questo mostra che se A è aperto rispetto ad una distanza, lo è anche rispetto alle altre.

2.1.4 Alcuni risultati sulla continuità

PROPOSIZIONE 2.1. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \to Y$ un'applicazione. Dato $x \in X$, se esiste costante $M > 0$ tale che

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leq M d_X(x', x),\ \forall x' \in X$$

allora f è continua in x.

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che, per ipotesi, definendo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$, si ha $f\big(D_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset D_\varepsilon\big(f(x)\big)$. □

PROPOSIZIONE 2.2. Ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alle distanze euclidee.

Dimostrazione. Si usa Prop. **??** applicato alle distanze $d^{(1)}$, che sono topologicamente equivalenti alle distanze euclidee $d^{(2)}$. Inoltre, visto che ogni applicazione costante è continua, si esclude che L sia nulla. Si denota con $(a_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ la matrice che rappresenta L; se $x, x' \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} d^{(1)}\big(L(x), L(x')\big) &= \left|\sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j - x'_j)\right| + \ldots + \left|\sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j - x'_j)\right| \\ &\leq \left(\max_j |a_{1j}| + \ldots + \max_j |a_{mj}|\right) \sum_{j=1}^n |x_j - x'_j| \leq Mmd^{(1)}(x, x') \end{aligned}$$

con $M = \max|a_{ij}|$, che è maggiore di 0 perché L è non-nulla. Da Prop. **??**, segue la tesi. □

La precedente proposizione può essere applicata al caso particolare di applicazioni lineari: le **proiezioni**. Una proiezione è generalmente definita come:

$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p_i(x) = x_i \tag{2.1.5}$$

È possibile definire, più in generale, per $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m < n$, la proiezione

$$p_{i_1,\ldots,i_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ p_{i_1,\ldots,i_m}(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \tag{2.1.6}$$

che è lineare e, quindi, continua.

2.1.5 **Isometrie e omeomorfismi**

DEFINIZIONE 2.5 (ISOMETRIA). Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ è un'isometria se $\forall x, x' \in X$, si ha $d_X(x, x') = d_Y\big(f(x), f(x')\big)$.

Da Prop **??**, segue che un'isometria è un'applicazione continua. Se fra due spazi metrici X, Y esiste un'isometria $f : X \to Y$, gli spazi si dicono **isometrici**.

Sono isometrie $\mathrm{Id} : X \to X$, cioè l'applicazione identità, l'inversa di un'isometria e la composizione di isometrie. Questo porta al seguente.

PROPOSIZIONE 2.3. Un'isometria fra due spazi metrici è una relazione di equivalenza.

DEFINIZIONE 2.6 (OMEOMORFISMO). Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ è un *omeomorfismo* se la sua inversa e f stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo $e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, questa ha un'inversa continua $\log(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda $(-\infty, 0]$ in $(0, 1]$. Anche gli omemorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

2.2 **Spazi topologici**

DEFINIZIONE 2.7 (TOPOLOGIA E SPAZIO TOPOLOGICO). Sia X un insieme non-vuoto. Una *topologia* su X è una famiglia non-vuota τ di sottoinsiemi di X, chiamati *insiemi aperti della topologia*. Questi soddisfano le seguenti condizioni:

- $\varnothing$, X sono aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un aperto.

Allora si definisce *spazio topologico* la coppia (X, τ), dove X è detto *supporto* dello spazio topologico e i suoi elementi sono i *punti* dello spazio.

Dato (X, d) spazio metrico, la famiglia degli insiemi aperti rispetto a d è una topologia su X indotta da d stessa. In $\mathbb{R}^n$, si definisce **topologia euclidea** (o **naturale**) $\mathcal{E}$ come quella indotta dalla distanza euclidea d_2. Su $\mathbb{C}$, la topologia euclidea $\mathcal{E}$ è quella indotta da $d(z, w) = |z - w|$; questa conclusione si può ottenere identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ da

$z = x + iy \mapsto (x, y)$ e considerando la distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$. In modo del tutto analogo, si identifica $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ e la distanza euclidea di $\mathbb{R}^{2n}$ definisce, su $\mathbb{C}^n$, una distanza e, quindi, una topologia che è la topologia naturale di $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{E}$. Su un qualunque insieme non-vuoto X, si possono sempre definire due topologie:

- la **topologia banale** $\mathcal{B} = \{X, \varnothing\}$, con $(X, \mathcal{B})$ **spazio topologico banale**;
- la **topologia discreta** ottenuta prendendo $\tau = \mathcal{P}(X)$, con $(X, \mathcal{P}(X))$ **spazio topologico discreto**.

DEFINIZIONE 2.8 (SPAZIO METRIZZABILE). Uno spazio topologico (X, τ) è detto *metrizzabile* se si può definire una distanza su X che induce la topologia τ.

Sia dato Y sottoinsieme non-vuoto di uno spazio metrizzabile (X, d_X); si sa già che d_Y, ottenuta come restrizione di d_X a Y, è una distanza su Y. In questo caso, la topologia indotta da d_Y su Y si dice *topologia indotta da X su Y*. Allora, se $y \in Y$: $B_\varepsilon^{(Y)}(y) = B_\varepsilon^{(X)}(y) \cap Y$; questo significa che gli aperti di Y sono della forma $A \cap Y$, con A aperto di X.