Compito 15 luglio 2022

Si consideri una particella di massa m e spin $s = 1/2$ confinata nello spazio da una forza centrale armonica, il cui Hamiltoniano è

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{r}^2 \,, \qquad \hat{p}^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_i^2 \,, \quad \hat{r}^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i^2 \,.$$

L'operatore di spin $\hat{S}$ della particella non compare esplicitamente nell'Hamiltoniano.

(1) Definire le unità naturali del problema, che permettono di riscrivere l'equazione di Schrödinger in termini di quantità adimensionali. In particolare, scrivere la scala di lunghezza, di tempo e di energia del problema. Scrivere l'Hamiltoniano in termini degli operatori di costruzione e distruzione $a^\dagger$ e a associati alle varie direzioni cartesiane.

(2) Calcolare lo spettro energetico e, per i primi due autovalori dell'Hamiltoniana, le degenerazioni dei livelli.

(3) Scrivere le funzioni d'onda dello stato fondamentale e dei primi stati eccitati (associati al primo autovalore dell'energia sopra quello dello stato fondamentale). Su questi stati calcolare la distanza quadratica media dal centro definita come $d = \sqrt{\langle \psi | r^2 | \psi \rangle}$, e l'impulso quadratico medio definito come $\kappa = \sqrt{\langle \psi | p^2 | \psi \rangle}$. Verificare il principio di indeterminazione

$$\Delta_{x_i} \, \Delta_{p_i} \geq \frac{\hbar}{2}$$

nello stato fondamentale, per ogni coppia $\hat{x}_i$, $\hat{p}_i$ associata alle varie direzioni.

(4) Dato $0 < c < 1$ esiste un valore $r_{\rm max}$ tale che la probabilità di trovare la particella a distanza $r < r_{\rm max}$ dal centro sia $P(r_{\rm max}) = c$. Scrivere l'equazione che determina questo $r_{\rm max}$ per lo stato fondamentale, lasciando indicati eventuali integrali adimensionali non scrivibili in termini di funzioni elementari.

(5) Al fine di determinare le leggi di conservazione, consideriamo le osservabili $\hat{O}$ per le quali si conserva il valore medio $\langle \Psi(t) | \hat{O} | \Psi(t) \rangle$, dove $|\Psi(t)\rangle$ è l'evoluzione temporale di un generico stato della particella. Dire quali delle seguenti osservabili soddisfano la proprietà di rimanere costanti nel tempo:

$$\hat{\boldsymbol{x}}, \ \hat{\boldsymbol{p}}, \ \hat{H}, \ \hat{\boldsymbol{L}} \equiv \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{p}}, \ \hat{\boldsymbol{S}}, \ \hat{\boldsymbol{J}} \equiv \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}, \ \hat{P}_{\rm arity}.$$

Giustificare brevemente.

(6) Determinare gli autovalori dell'operatore momento angolare $\boldsymbol{L}^2$ dello stato fondamentale e dei primi stati eccitati. Scrivere le funzioni d'onda corrispondenti in coordinate sferiche.

(7) Assumiamo adesso che nel centro del sistema sia posta un'altra particella di spin $s = 1/2$, e che sia vincolata nella posizione $\boldsymbol{x} = 0$. Si consideri il sistema globale delle due particelle, e assumiamo una perturbazione spin-spin locale tra le due particelle (quella che si muove soggetta al potenziale armonico e quella vincolata al centro), cioè

$$\hat{V}(\boldsymbol{x}) = \beta \, \delta(\boldsymbol{x}) \, \hat{\boldsymbol{S}}_c \cdot \hat{\boldsymbol{S}}$$

dove $\hat{\boldsymbol{S}}_c$ è l'operatore di spin della particella vincolata nel centro. Calcolare l'effetto di questa perturbazione sui livelli più bassi, al primo ordine.

(8) Consideriamo adesso un interazione del tipo $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$, più precisamente

$$H_{ls} = \gamma \, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} \,, \qquad \gamma = -\frac{\hbar^2 \omega^2}{2mc^2} \,.$$

Rispondere alla domanda (5) in presenza di questa interazione (si consideri $\beta = 0$).

(9) Scrivere lo spostamento dei livelli energetici dei primi stati dello spettro assumendo l'interazione $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ perturbativa, discutere i limiti di validità della approssimazione e la degenerazione dei livelli in presenza di questa perturbazione.

(10) Vogliamo adesso studiare gli effetti di un'eventuale perturbazione dovuta ad un ulteriore potenziale centrale $U(r) = -\kappa/r$. Si descriva il suo effetto sui primi livelli dello spettro dell'oscillatore armonico tridimensionale al primo ordine in κ (assumendo $\beta = \gamma = 0$).

Riportiamo per referenza le funzioni d'onda in rappresentazione di Schrödinger dei primi due livelli dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}} \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}} \ ; \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \frac{x}{\ell_\omega} e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}}$$

dove ℓ_ω è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico.

Alcuni integrali potenzialmente utili

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha^{-3/2} \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \alpha^{-3/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-5/2} \ .$$