1 Misure, valori medi, probabilità, proiettore, evoluzione temporale, rappresentazione degli impulsi e principio di indeterminazione

- **Valore medio.**

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \tag{1.1}$$

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \mathrm{Tr}\, \rho_\psi \hat{A} \tag{1.2}$$

- **Normalizzazione.** Per base discreta $\{|n\rangle\}$ e per base continua $\{|x\rangle\}$, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 = 1 \\ \langle \psi | \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \, dx = 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

- **Matrice densità.** Per stato generico:

$$\mathrm{Tr}\,\rho = 1 \qquad \rho^\dagger = \rho \qquad \mathrm{Tr}\,\rho^2 \leqslant 1 \tag{1.4}$$

per stati puri: $\mathrm{Tr}\,\rho^2 = 1$.

Se ρ relativa a spazio composto da due sottospazi, la sua ridotta al primo è:

$$\rho^{(1)} = \mathrm{Tr}_2\, \rho = \sum_m \langle a_n b_m | \rho | a_j b_m \rangle \tag{1.5}$$

La sua evoluzione temporale è:

$$\rho(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \rho(0) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \tag{1.6}$$

- **Flusso di probabilità.**

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m}\big(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\big) \tag{1.7}$$

L'equazione di continuità è:

$$\partial_t |\psi|^2 + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{1.8}$$

- **Probabilità di misura.** Dato osservabile $\hat{A}$, e $\psi = \sum_i c_i |a_i\rangle$ espresso in base fornita da $\hat{A}$, la probabilità di ottenere la misura a_i su $|\psi\rangle$ è $|c_i|^2$.

Se $\hat{A}$ fornisce base continua, allora:

$$P(a) da = |\langle a | \psi \rangle|^2 \, da \tag{1.9}$$

La probabilità di trovare una particella in $|\psi\rangle$ ad una distanza maggiore di x_0, per esempio, è:

$$P(x \geqslant x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \, dx$$

- **Impulso, posizione e distanza media.** Sia $|\psi\rangle$ uno stato; allora:

$$\langle \hat{x} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, |\psi(x)|^2 \, dx$$

$$\langle \hat{p} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \big[-i\hbar \partial_x \psi(x) \big] dx$$

$$\langle \hat{r} \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}^3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, |\psi(\mathbf{x})|^2 \, d^3x$$

$$\langle \hat{r}^2 \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}^3} \big[x^2 + y^2 + z^2 \big] \, |\psi(\mathbf{x})|^2 \, d^3x$$

dove gli ultimi due sono distanza media dal centro e raggio quadratico medio in 3D.

Osservazione 1.1. Il valore medio di spin è analogo, ma calcolato solo su stati di spin; la parte orbitale sparisce per normalizzazione.

- **Evoluzione temporale.**

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{x}, t) \tag{1.10}$$

- **Trasformate di Fourier.**

$$\widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}px} dx \tag{1.11}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}(p) e^{\frac{i}{\hbar}px} dp \tag{1.12}$$

- **Principio di indeterminazione.** Per operatori $\hat{A}, \hat{B}$ tali che $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, su uno stato $|\psi\rangle$ si ha:

$$\Delta_A \Delta_B \geqslant \frac{|\langle \hat{C} \rangle_\psi|}{2} = \frac{|\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|}{2} \tag{1.13}$$

dove per generico operatore $\hat{O}$:

$$\Delta_O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2} \tag{1.14}$$

2 Commutatori e rappresentazione di operatori

- **Rappresentazione di coordinate in impulsi e viceversa.**

$$\hat{X} \widetilde{\psi}(p) = i\hbar \partial_p \widetilde{\psi}(p) \tag{2.1}$$

$$\hat{P} \psi(x) = -i\hbar \partial_x \psi(x) \tag{2.2}$$

- **Commutatore posizione-impulso.**

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \mathbb{1} \tag{2.3}$$

- **Commutatori con momento angolare.**

$$[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\hbar\varepsilon_{abc}\hat{J}_c \qquad [\hat{X}_a, \hat{J}_b] = i\hbar\varepsilon_{abc}\hat{X}_c$$
$$[\hat{P}_a, \hat{J}_b] = i\hbar\varepsilon_{abc}\hat{P}_c$$

- **Momento angolare in coordinate.** Si usa il fatto che $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$:

$$\hat{\mathbf{L}}\psi(\mathbf{x}) = [-i\hbar\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla}]\,\psi(\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

3 Potenziale centrale e cambiamenti di variabile

- **Coordinate CM e relativa.**

$$\hat{\mathbf{X}} = \frac{m_1\hat{\mathbf{r}}_1 + m_2\hat{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} \qquad \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2$$
$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2 \qquad \hat{\mathbf{p}} = \frac{m_1\hat{\mathbf{p}}_1 - m_2\hat{\mathbf{p}}_2}{m_1 + m_2} \tag{3.1}$$

Soddisfano $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ e gli altri commutatori sono nulli.

Tornano utili la massa totale $M = m_1 + m_2$ e la massa ridotta $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

- **Alcuni cambiamenti di variabile.**

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + U(|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2|)$$
$$\to \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + U(\hat{\mathbf{x}})$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2 + \hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{\mathbf{r}}_1^2 + \hat{\mathbf{r}}_2)^2 + \frac{1}{4}m\kappa^2(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2)^2$$
$$\to \hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{\mathbf{R}}^2 + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\omega^2 + \kappa^2)\hat{\mathbf{r}}^2$$

Nell'ultimo, le masse delle due particelle sono uguali, quindi $M = 2m$ e $\mu = m/2$.

4 Oscillatore armonico

- **Hamiltoniano e grandezze caratteristiche.**

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 \tag{4.1}$$

Si definiscono variabili riscalate $\hat{p} = \hat{P}/p_\omega$ e $\hat{x} = \hat{X}/\ell_\omega$, dove $\ell_\omega = \sqrt{\hbar/m\omega}$ e $p_\omega = m\omega\ell_\omega$. Con queste:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left[\hat{p}^2 + \hat{x}^2\right] \tag{4.2}$$

- **Operatori di distruzione e creazione.** Tramite grandezze riscalate, sono definiti, rispettivamente, da:

$$\hat{a} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}} \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} \tag{4.3}$$

Soddisfano $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ e

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left[\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right] \tag{4.4}$$

- **Operatore numero.** Dato da $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ e soddisfa

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \qquad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \tag{4.5}$$

Si ha

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2) \tag{4.6}$$

Gli autovalori di $\hat{N}$ permettono di trovare autovalori di $\hat{H}$ e caratterizzano le autoenergie perché $n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$:

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \tag{4.7}$$

- **Funzioni d'onda dei primi due livelli.**

$$\varphi_0(\omega, x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{\ell_\omega}}e^{-x^2/(2\ell_\omega^2)}$$
$$\varphi_1(\omega, x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}\sqrt{\ell_\omega}}\frac{x}{\ell_\omega}e^{-x^2/(2\ell_\omega^2)} \tag{4.8}$$

La **parità** è $(-1)^n$.

- **Oscillatore armonico in 2D e 3D.** Le funzioni d'onda si ottengono per prodotto lungo le varie dimensioni. Le energie si sommano lungo le varie direzioni:

$$E_N^{(2D)} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) = \hbar\omega(N + 1)$$
$$E_N^{(3D)} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2) = \hbar\omega(N + 3/2)$$

I livelli energetici in 2D hanno degenerazione $N+1$; in 3D hanno degenerazione $(N + 1)(N + 2)/2$.

- **Oscillatore in coordinate sferiche.** Ottenuto perché l'Hamiltoniano commuta con il momento angolare totale.

Le energie si riscrivono per $N = 2n_r + \ell$:

$$E_{n_r,\ell} = \hbar\omega(2n_r + \ell + 3/2) \tag{4.9}$$

La funzione d'onda si scrive come $\psi(r, \theta, \varphi) = R_{n_r,\ell}(r)Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$, con $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ sono le armoniche sferiche.

La **parità** di ciascun livello è legata alle armoniche sferiche ed è $(-1)^\ell$.

5 Particella in buca di potenziale infinita

- **Energia.** Si ha

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2},\ k_n = \frac{n\pi}{a} \tag{5.1}$$

con $n > 0, n \in \mathbb{N}$.

- **Funzioni d'onda.**

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & , n \text{ pari} \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) & , n \text{ dispari} \end{cases} \tag{5.2}$$

per $|x| \leqslant a/2$ e 0 fuori.

6 Atomo di idrogeno

- **Hamiltoniano e approssimazioni.** Si considera protone fermo (altrimenti si studia nel CM con $m_e \to \mu$); l'Hamiltoniano è:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 - \frac{k}{r},\ k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{6.1}$$

- **Costanti fondamentali.** Si definiscono il raggio di Borh $r_B = \hbar/(m_e c\alpha)$ e la costante di Rydberg $E_B = m_e c^2\alpha^2/2$, con α costante di struttura fine.

- **Energie e degenerazione.** Sono proporzionali alla costante di Rydberg E_B:

$$E_n = -\frac{E_B}{n^2} \tag{6.2}$$

La degenerazione di ciascun livello è n^2. Tenendo conto anche dello spin, ammonta a $2n^2$.

La **parità** deriva dai polinomi di Lagrange nelle armoniche sferiche ed è $(-1)^\ell$.

- **Funzioni d'onda per il fondamentale.** Per lo stato fondamentale si ha $n = 1, \ell = 0, m = 0$:

$$\begin{aligned} \psi_{100}(r,\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} e^{-r/r_B} \\ \widetilde{\psi}_{100} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{r_B}{\hbar}\right)^{3/2} \frac{1}{(1+(r_B p/\hbar)^2)^2} \end{aligned} \tag{6.3}$$

- **Funzione d'onda per $n = 2$.** La parte radiale per $n = 2$ è:

$$\begin{aligned} R_{20}(r) &= \frac{1}{2\sqrt{2}r_B^{3/2}}\left(2 - \frac{r}{r_B}\right) e^{-r/2r_B} \\ R_{21}(r) &= \frac{1}{2\sqrt{6}r_B^{3/2}} \frac{r}{r_B} e^{-r/2r_B} \end{aligned} \tag{6.4}$$

7 Spin e composizione di momenti angolari

- **Matrici di Pauli per spin 1/2.**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli operatori di spin 1/2 sono dati da $\hat{S}_a = \frac{\hbar}{2}\sigma_a$.

La base di σ_x è:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix},\ \lambda_\pm = \pm 1 \tag{7.1}$$

La base di σ_y è:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix},\ \lambda_\pm = \pm 1 \tag{7.2}$$

La base di σ_z è:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},\ \lambda_\pm = \pm 1 \tag{7.3}$$

- **Matrici per spin 1.** Le matrici usate per lo spin 1 sono:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ M_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.4}$$

Gli operatori di spin si ottengono dalla relazione

$$\hat{S}_a = \hbar M_a \tag{7.5}$$

La base di M_z è (gli autovalori seguono l'ordine degli autovettori):

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \lambda = 1, 0, -1 \tag{7.6}$$

La base di M_x è:

$$\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \tag{7.7}$$

con $\lambda = 1, 0, -1$ rispettivamente.

La base di M_y è:

$$\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (7.8)$$

con $\lambda = 1, 0, -1$ rispettivamente.

- **Regole di composizione dei momenti angolari.** Nel passare ad una base fornita da $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$, si deve tenere conto che l'autovalore J associato a $\hat{J}^2$ è tale che

$$|j_1 - j_2| \leqslant J \leqslant j_1 + j_2 \quad (7.9)$$

Inoltre, deve valere

$$M = m_1 + m_2 \quad (7.10)$$

Se $n(M)$ indica numero di stati con M e $N(J)$ indica il numero di stati con J:

$$N(J) = n(J) - n(J+1) \quad (7.11)$$

Il valore $n(M)$ sono tutte le combinazioni per cui $m_1 + m_2 = M$.

8 Teoria delle perturbazioni

- **Primo ordine non-degenere.**

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \rangle \quad (8.1)$$

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{n \neq m} \frac{\langle \psi_m^{(0)} | \hat{H}' | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle \quad (8.2)$$

- **Secondo ordine non-degenere.**

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\left| \left\langle \psi_m^{(0)} \middle| \hat{H}' \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (8.3)$$

- **Primo ordine degenere.** Se $E_n^{(0)}$ ha degenerazione g, allora il primo ordine perturbativo è ottenuto dagli autovalori della matrice della perturbazione, diagonalizzata nel sottospazio degenere:

$$W_{ab}^{(n)} = \left\langle \psi_{n,a}^{(0)} \middle| \hat{H}' \middle| \psi_{n,b}^{(0)} \right\rangle, \quad a, b = 1, \dots, g \quad (8.4)$$

Gli autovalori di questa sono le correzioni energetiche.

- **Regola d'oro di Fermi.** Stato iniziale $|i\rangle$ con energia E_i soggetto a perturbazione $\hat{H}'$ che connette a stati continui (con una certa distribuzione) identificati dallo stato finale $|f\rangle$ a energia E_f, la probabilità di transizione è:

$$\omega_{i \to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \left\langle f \middle| \hat{H}' \middle| i \right\rangle \right|^2 \rho(E_f) \quad (8.5)$$

con $\rho(E_f)$ distribuzione degli stati.

9 Operatori parità e time-reversal

- **Definizione di parità e time-reveresal.**

$$\hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a^{-1} = -\hat{x} \quad \hat{P}_a \hat{p} \hat{P}_a^{-1} = -\hat{p} \quad \hat{P}_a \hat{J} \hat{P}_a^{-1} = \hat{J}$$

$$\hat{T} \hat{x} \hat{T}^{-1} = \hat{x} \quad \hat{T} \hat{p} \hat{T}^{-1} = -\hat{p} \quad \hat{T} \hat{J} \hat{T}^{-1} = -\hat{J}$$

- **Proprietà della parità.**

$$\hat{P}_a |x\rangle = |-x\rangle \qquad \hat{P}_a \psi(x) = \psi(-x)$$
$$\hat{P}_a |n\ell m\rangle = (-1)^\ell |n\ell m\rangle$$
$$\hat{P}_a |\ell_1 \ell_2 JM\rangle = (-1)^{\ell_1 + \ell_2} |\ell_1 \ell_2 JM\rangle$$

- **Proprietà del time-reversal.** Se $[\hat{H}, \hat{T}] = 0$ e $|\psi(t)\rangle$ risolve l'equazione di Schrödinger, allora anche $\hat{T}|\psi(-t)\rangle$ la risolve.

$$\hat{T}\psi(x,t) = \psi^*(x,t) \quad (9.1)$$

$$\hat{T}|x\rangle = |x\rangle \qquad \hat{T}|p\rangle = |-p\rangle \quad (9.2)$$

Per spin 1/2, $\hat{T} = \hat{Y}\hat{K}$, con $\hat{K}$ operatore che prende il coniugato e

$$\hat{Y} = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi \hat{S}_y} \quad (9.3)$$

In questo modo $\hat{T}\hat{S}\hat{T}^{-1} = -\hat{S}$.

10 Scattering

- **Flussi e sezione d'urto.** Numero di particelle uscenti:

$$dN = J_i \sigma(\theta) d\Omega \quad (10.1)$$

Flusso uscente:

$$J_s = \frac{dN}{r^2 d\Omega} \quad (10.2)$$

Sezione d'urto differenziale:

$$\sigma(\theta) = \frac{r^2 J_s(\theta)}{J_i} \quad (10.3)$$

Sezione d'urto totale:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta \quad (10.4)$$

- **Approssimazione di Born.** Il potenziale su cui si invia il fascio di particelle deve essere tale per cui

$$|V(a)| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \tag{10.5}$$

con a dimensione caratteristica della scala spaziale su cui agisce V.

Per fascio incidente veloce $ka \gg 1$, si può verificare:

$$|V(a)| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} ka \tag{10.6}$$

- **Ampiezza di scattering.**

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(x')e^{i\mathbf{q}\cdot x'} d^3x' \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int V(r')r' \frac{\sin qr'}{q} dr' \end{aligned} \tag{10.7}$$

con $|\mathbf{q}| = 2k \sin\theta/2$. Da questa la **sezione d'urto** è:

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} |\widetilde{V}(k - k')|^2 \tag{10.8}$$

- **Regola d'oro di Fermi.**

$$d\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \, \delta(E_f - E_i) d\nu_f \tag{10.9}$$

dove $|i\rangle = \sqrt{m/k\hbar} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ è lo stato iniziale e $|f\rangle = e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}$ è quello finale.

Si può scrivere come:

$$d\omega_{kk'} = \frac{4\pi m}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \, \delta(p^2 - p'^2) \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \tag{10.10}$$

con

$$\langle f|V|i\rangle = \sqrt{\frac{m}{k}} \int e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} V e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \tag{10.11}$$

- **Probabilità di transizione.**

$$P_{i\to f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' \, e^{i\omega_{fi}t'} \, \langle \psi_f|\hat{H}'|\psi_i\rangle \right|^2 \tag{10.12}$$

11 Regole di selezione

- **Parità.** Per stati e operatori con parità definita, l'elemento di matrice è non-nullo se $p_1 = p_2$ nel caso di operatore pari, e $p_1 \neq p_2$ per operatori dispari.

- **Momento angolare $\hat{L}_z$.** Per stati con m come numero quantico sono connessi solo con stati con uguale m dalla componente z di operatori come $\hat{\mathbf{d}}$ (dipolo elettrico), mentre le componenti x, y connettono stati con $\Delta m = \pm 1$.

- **Momento angolare $\hat{L}^2$.** Sempre per operatori tipo $\hat{\mathbf{d}}$, si ha $\Delta\ell = \pm 1$, con $\ell, \ell' \neq 0$.

- **Teorema di Wigner-Eckart.** Dato un operatore tensoriale irriducibile $\hat{T}_m^{(\ell)}$, con $m = -\ell, \dots, \ell$, si ha:

$$\left\langle \ell''m'' \middle| \hat{T}_m^{(\ell)} \middle| \ell'm' \right\rangle = C_{\ell m; m m'}^{\ell' m'} \left\langle \ell'' \middle| \hat{T}^{(\ell)} \middle| \ell' \right\rangle \tag{11.1}$$

Da cui l'elemento di matrice è non-nullo se

$$|\ell_i - \ell_f| \leqslant 1 \quad |m_i - m_f| \leqslant 1 \quad \ell_i + \ell_f \neq 0 \tag{11.2}$$

12 Integrali utili

$$\int_0^{r_*} re^{-\alpha r^2} dr = \frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-\alpha r_*^2}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^{+\infty} r^2 e^{-\alpha r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\alpha^{-3/2}$$

$$\int_0^{+\infty} re^{-\alpha r}\sin(\beta r)\ dr = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2},\ \Re\{\alpha\} > 0$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(qr)e^{-r/R}\ dr = \frac{qR^2}{1+q^2R^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2+by} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{b^2/4a}$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\cos^2\theta\ d\theta = \frac{2}{3}$$

13 Sviluppi in serie

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

14 Proprietà del commutatore

$$[a, b+c] = [a,b] + [a,c][a+b,c] = [a,c] + [b,c]$$
$$[a,b] = -[b,a]$$
$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$$
$$[a,bc] = [a,b]c + b[a,c]$$
$$[ab,c] = a[b,c] + [a,c]b$$
$$[abc,d] = ab[c,d] + a[b,d]c + [a,d]bc$$
$$[\lambda a, b] = \lambda[a,b] = [a,\lambda b], \lambda \in \mathbb{K}$$

Per $n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{Z}$ e f, g sviluppabili in serie:

$$\left[\hat{x}, \hat{p}^n\right] = i\hbar n\hat{p}^{n-1}$$
$$\left[\hat{x}^n, \hat{p}\right] = i\hbar n\hat{x}^{n-1}$$
$$\left[\hat{x}, f(\hat{p})\right] = i\hbar\frac{df}{dp}(\hat{p})$$
$$\left[g(\hat{x}), \hat{p}\right] = i\hbar\frac{dg}{dx}(\hat{x})$$

15 Polinomi di Hermite, Laguerre e Lagrange e armoniche sferiche

- **Polinomi di Legendre.** Parte angolare ($m = 0$) per potenziale centrale, tipo atomo di idrogeno in cui $\Theta(\theta) \propto P_\ell(\cos\theta)$.

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

- **Polinomi di Hermite.** Derivanti ad esempio da oscillatore armonico 1D.

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

- **Polinomi di Laguerre.** Parte radiale dell'atomo di idrogeno ($\ell = 0$)

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = 1 - x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$$

- **Armoniche sferiche.** Parte angolare completa dell'equazione di Schrödinger in potenziale centrale (tipo atomo di idrogeno).

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$
$$Y_{11}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$$

16 Derivate in coordinate sferiche

$$\nabla f(r,\theta,\varphi) = \hat{e}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2 f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla = \hat{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

17 Trucchi utili

- **Funzione d'onda negli impulsi.**

  Quando l'Hamiltoniano è speculare in impulso e posizione, è possibile ottenere le funzioni d'onda nello spazio degli impulsi definendo dei parametri in modo che l'impulso assuma stessa forma delle posizioni (*stando attenti a ridefinire tutti i parametri nella funzione d'onda, di modo che eventuali funzioni degli impulsi risultino adimensionali*).

  Esempio 17.1.
  Per oscillatore armonico 2D con $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{x}^2/2$, la funzione d'onda nelle posizioni dello stato fondamentale è $\pi^{-1/2}\gamma^{-1}e^{-(x^2+y^2)/2\gamma^2}$, con γ^2 lunghezza caratteristica del sistema; nello spazio degli impulsi, questa diventa $\pi^{-1/2}\gamma'^{-1}e^{-(p_x^2+p_y^2)/2\gamma'^2}$, dove γ' è l'impulso caratteristico del sistema, dato da $\hbar/\gamma$.

- **Soluzione esatta a Hamiltoniano con perturbazione.**

  Quando viene chiesto un calcolo esatto, invece che approssimazione perturbativa, probabilmente c'è la possibilità di riarrangiare l'Hamiltoniano e di ricondurlo ad uno di una forma analoga a quello imperturbato.

- **Operatore prodotto scalare tra due spin.**

  Nello studio di un Hamiltoniano di spin $\hat{H}_s = \kappa\hat{\mathbf{s}}_1\cdot\hat{\mathbf{s}}_2$, torna utile la relazione

$$\hat{\mathbf{S}}_1\cdot\hat{\mathbf{S}}_2 = \frac{\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2}{2} \tag{17.1}$$

  dove $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$.

- **Quantità conservate.**

  Le quantità di cui verificare la commutazione con l'Hamiltoniano sono: $\hat{p}, \hat{L}, \hat{J}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{T}$. In generale, sono sufficienti le prime tre (se non le prime due nel caso in cui non vi sia un termine di spin nell'Hamiltoniano).

- **Calcolo elementi di matrice.** Ricordare che è possibile utilizzare regole di selezione o espressioni dell'operatore (tipo per la posizione usare operatori di salita e discesa nell'oscillatore armonico), oppure si può passare al calcolo dell'integrale, come nel caso della trattazione perturbativa del potenziale di Coulomb.

$j_1 \times j_2$		J	J	···
		M	M	···
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
⋮	⋮			

$2 \times 1/2$

		5/2
		5/2
2	1/2	1

		5/2	3/2
		3/2	3/2
2	-1/2	1/5	4/5
1	1/2	4/5	-1/5

		5/2	3/2
		1/2	1/2
1	-1/2	2/5	3/5
0	1/2	3/5	-2/5

		5/2	3/2
		-1/2	-1/2
0	-1/2	3/5	2/5
-1	1/2	2/5	-3/5

		5/2	3/2
		-3/2	-3/2
-1	-1/2	4/5	1/5
-2	1/2	1/5	-4/5

		5/2
		-5/2
-2	-1/2	1

$3/2 \times 1/2$

		2
		2
3/2	1/2	1

		2	1
		1	1
3/2	-1/2	1/4	3/4
1/2	1/2	3/4	-1/4

		2	1
		0	0
1/2	-1/2	1/2	1/2
-1/2	1/2	1/2	-1/2

		2	1
		-1	-1
-1/2	-1/2	3/4	1/4
-3/2	1/2	1/4	-3/4

		2
		-2
-3/2	-1/2	1

$1/2 \times 1/2$

		1
		1
1/2	1/2	1

		1	0
		0	0
1/2	-1/2	1/2	1/2
-1/2	1/2	1/2	-1/2

		1
		-1
-1/2	-1/2	1

$1 \times 1/2$

		3/2
		3/2
1	1/2	1

		3/2	1/2
		1/2	1/2
1	-1/2	1/3	2/3
0	1/2	2/3	-1/3

		3/2	1/2
		-1/2	-1/2
0	-1/2	2/3	1/3
-1	1/2	1/3	-2/3

		3/2
		-3/2
-1	-1/2	1

$3/2 \times 1$

		5/2
		5/2
3/2	1	1

		5/2	3/2
		3/2	3/2
3/2	0	2/5	3/5
1/2	1	3/5	-2/5

		5/2	3/2	1/2
		1/2	1/2	1/2
3/2	-1	1/10	2/5	1/2
1/2	0	3/5	1/15	-1/3
-1/2	1	3/10	-8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		-1/2	-1/2	-1/2
1/2	-1	3/10	8/15	1/6
-1/2	0	3/5	-1/15	-1/3
-3/2	1	1/10	-2/5	1/2

		5/2	3/2
		-3/2	-3/2
-1/2	-1	3/5	2/5
-3/2	0	2/5	-3/5

		5/2
		-5/2
-3/2	-1	1

2×1

		3
		3
2	1	1

		3	2
		2	2
2	0	1/3	2/3
1	1	2/3	-1/3

		3	2	1
		1	1	1
2	-1	1/15	1/3	3/5
1	0	8/15	1/6	-3/10
0	1	6/15	-1/2	1/10

		3	2	1
		0	0	0
1	-1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	-2/5
-1	1	1/5	-1/2	3/10

		3	2	1
		-1	-1	-1
0	-1	6/15	1/2	1/10
-1	0	8/15	-1/6	-3/10
-2	1	1/15	-1/3	3/5

		3	2
		-2	-2
-1	-1	2/3	1/3
-2	0	1/3	-2/3

		3
		-3
-2	-1	1

1×1

		2
		2
1	1	1

		2	1
		1	1
1	0	1/2	1/2
0	1	1/2	-1/2

		2	1	0
		0	0	0
1	-1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	-1/3
-1	1	1/6	-1/2	1/3

		2	1
		-1	-1
0	-1	1/2	1/2
-1	0	1/2	-1/2

		2
		-2
-1	-1	1

Figura 1: Clebsch-Gordan coefficients. A square root is understood on each coefficient, that is, $-1/3$ means $-\sqrt{1/3}$.