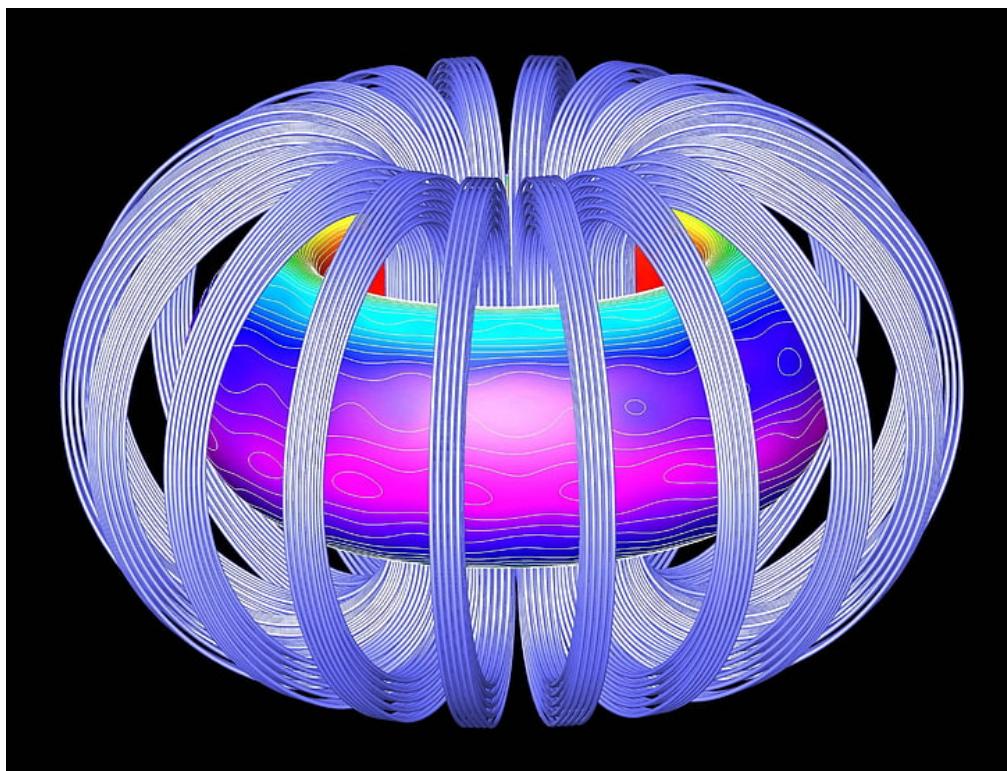


NOTE DI FISICA 2

MANUEL DEODATO



INDICE

1	Elettrostatica e conduzione elettrica	7
1.1	Elettrostatica nel vuoto	7
1.1.1	Teorema della divergenza e I equazione di Maxwell nel vuoto	8
1.1.2	Superfici equipotenziali	9
1.1.3	Energia e densità di energia elettrica	9
1.1.4	Dipolo elettrico	10
1.1.5	Teorema di Stokes e III equazione di Maxwell	11
1.2	Elettrostatica dei conduttori	11
1.2.1	Reazione di un conduttore ad un campo esterno	11
1.2.2	Capacità elettrica e condensatori	13
1.2.3	Pressione elettrostatica	14
1.2.4	Equazioni di Poisson e Laplace e funzioni armoniche	15
1.2.5	Problema fondamentale dell'elettrostatica	16
1.3	Sviluppo in serie di multipoli	17
1.3.1	Termine di monopolo	18
1.3.2	Termine di dipolo	18
1.3.3	Termine di quadrupolo	19
1.4	Elettrostatica nei dielettrici	20
1.4.1	Effetti sulla capacità	20
1.4.2	Polarizzazione per deformazione	21
1.4.3	Polarizzazione per orientamento	21
1.4.4	Vettore di polarizzazione elettrica	22
1.4.5	Cariche di polarizzazione	23
1.4.6	Suscettività elettrica	24
1.4.7	Equazioni di Maxwell per dielettrici	24
1.4.8	Teoremi di Gauss e Coulomb	25
1.4.9	Relazione tra χ e ϵ_r	25
1.4.10	Legge di rifrazione del campo elettrico	26
1.4.11	Energia elettrostatica per dielettrici	26
1.5	Conduzione elettrica	27
1.5.1	Corrente elettrica	27
1.5.2	Modello di Drude	27
1.5.3	Densità e intensità di corrente elettrica	28
1.5.4	Conducibilità e resistività	28
1.5.5	Equazione di continuità della corrente	28

1.5.6	Correnti stazionarie	29
1.5.7	Leggi di Kirchhoff	29
1.5.8	Legge di Ohm	30
1.5.9	Correnti radiali	30
1.5.10	Dielettrici non perfetti	30
1.5.11	Effetto Joule	31
1.5.12	Forza elettromotrice	31
1.5.13	Fem per generatori ideali e reali	32
1.5.14	Potenza del generatore	32
1.5.15	Campi contro-elettromotori	33
1.5.16	Legge di Ohm generalizzata	33
1.5.17	Conduttori attraversati da corrente	33
1.5.18	Scarica di un condensatore	34
1.5.19	Carica di un condensatore	35
2	Magnetismo	36
2.1	Magnetismo nel vuoto	36
2.1.1	Forza di Lorentz	36
2.1.2	Momento di una spira rigida	36
2.1.3	Sollecitazioni meccaniche su circuiti	37
2.1.4	Legge di Biot-Savart	38
2.1.5	II equazione di Maxwell	38
2.1.6	IV equazione di Maxwell	39
2.1.7	Scelta di Gauge per il potenziale vettore	40
2.1.8	Solenoidi	41
2.1.9	Potenziale magnetostatico	42
2.1.10	Forza esercitata fra due circuiti	42
2.1.11	Effetto Hall	42
2.2	Magnetismo nella materia	43
2.2.1	Caratterizzazione del magnetismo nella materia	43
2.2.2	Densità di correnti microscopiche	44
2.2.3	Campo ausiliario	44
2.2.4	Campi all'interfaccia	45
2.2.5	Campo locale	45
2.2.6	Diamagnetismo	45
2.2.7	Paramagnetismo	46
2.2.8	Ferromagnetismo	47
2.3	Induzione elettromagnetica	48
2.3.1	Legge di Faraday-Neumann-Lenz e III equazione di Maxwell	48

2.3.2	Autoinduttanza	48
2.3.3	IV equazione di Maxwell non-stazionaria	49
2.3.4	Mutua induzione	49
2.3.5	Energia magnetica di un'induttanza	50
2.3.6	Energia per circuiti accoppiati	51
2.3.7	Azioni meccaniche su circuiti accoppiati	52
3	Elettromagnetismo	54
3.1	Soluzione delle equazioni di Maxwell	54
3.1.1	Equazioni nel vuoto	54
3.1.2	Equazioni nella materia	55
3.1.3	Analisi dell'equazione della corda vibrante*	55
3.1.4	Soluzione per simmetria piana	56
3.1.5	Soluzione per simmetria sferica	57
3.1.6	Soluzione per pacchetto gaussiano in mezzo non-dispersivo	58
3.1.7	Soluzione per pacchetto gaussiano in mezzo dispersivo	59
3.1.8	Velocità di fase e di gruppo	60
3.1.9	Trasformazioni di Gauge	60
3.1.10	Equazioni nel vuoto con sorgenti	61
3.1.11	Potenziali ritardati	62
3.2	Sviluppo in multipoli per i potenziali ritardati	63
3.2.1	Condizioni per lo sviluppo	64
3.2.2	Termine di dipolo elettrico	64
3.2.3	Relazione tra \vec{p} e \vec{j}^*	66
3.2.4	Approssimazioni di campo prossimo	66
3.2.5	Approssimazione di campo lontano	66
3.2.6	Termine di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico	67
3.2.7	Potenziali di Liénard-Wiechert*	68
3.3	Proprietà delle radiazioni elettromagnetiche	69
3.3.1	Teorema di Poynting	69
3.3.2	Irraggiamento di dipolo elettrico	70
3.3.3	Equazione di continuità per la densità di impulso	71
3.3.4	Tensore degli sforzi di Maxwell*	72
3.3.5	Effetto Doppler classico	73
3.3.6	Effetto Doppler relativistico	73
3.4	Formulazione covariante dell'elettromagnetismo	74
3.4.1	Notazione e quadrivettori	74
3.4.2	Tensore dei campi	75
3.4.3	Invarianti elettromagnetici	76

3.4.4	Potenziali per carica in moto rettilineo uniforme	76
3.4.5	Campi per carica in moto rettilineo uniforme	77
3.4.6	Quadriforza	80
3.4.7	Energia nel limite non-relativistico	80
3.4.8	Composizione delle radiazioni elettromagnetiche	81
3.4.9	Tensore energia-impulso	81
3.5	Onde elettromagnetiche nei dielettrici	82
3.5.1	Modello di Lorentz e cielo blu	82
3.5.2	Vettore di polarizzazione	84
3.5.3	Equazioni di Maxwell per dielettrici	84
3.5.4	Relazione di dispersione	85
3.5.5	Indice di rifrazione	85
3.5.6	Coefficiente di assorbimento	86
3.5.7	Funzione dielettrica	86
3.5.8	Suscettività elettrica	87
3.6	Onde elettromagnetiche nei conduttori	87
3.6.1	Modello atomico	87
3.6.2	Conducibilità generalizzata	88
3.6.3	Equazioni di Maxwell per conduttori	88
3.6.4	Relazione di dispersione	89
3.6.5	Limite di bassa frequenza – Lunghezza di pelle longitudinale	89
3.6.6	Limite di alta frequenza	90
3.7	Onde elettromagnetiche in gas	91
4	Ottica	92
4.1	Introduzione all'ottica fisica	92
4.1.1	Piano di incidenza	92
4.1.2	Campo elettrico all'interfaccia	92
4.1.3	Legge di Cartesio	92
4.1.4	Legge di Snell	93
4.1.5	Angolo critico	93
4.1.6	Relazioni di Fresnel in polarizzazione S	93
4.1.7	Relazioni di Fresnel in polarizzazione P	94
4.1.8	Angolo di Brewster	94
4.1.9	Riflettanza e trasmittanza	95
4.1.10	Shift di fase relativo	95
4.1.11	Materiali anisotropi	96
4.2	Ottica geometrica	96
4.2.1	Equazione dell'iconale	96

4.2.2	Iconale e equazioni di Hamilton	97
4.2.3	Miraggi*	98
4.3	Interferenza e diffrazione	98
4.3.1	Principio di sovrapposizione e termine di interferenza	98
4.3.2	Interferenza costruttiva e distruttiva	99
4.3.3	Esperimento di Young	99
4.3.4	Diffrazione di Fraunhofer e Fresnel	100
4.3.5	Diffrazione con singola fenditura	100
4.4	Ottica non-lineare	101

1 ELETTROSTATICA E CONDUZIONE ELETTRICA

1.1 Elettrostatica nel vuoto

Forza della carica q_1 su q_2 , con \hat{r}_{12} diretto da q_1 verso q_2 :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (1.1.1)$$

Campo elettrico generato da una carica Q in un certo punto individuato da \vec{r} a partire dalla posizione di Q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (1.1.2)$$

Il campo generato da una moltitudine di cariche si trova applicando il principio di sovrapposizione. Le linee di forza partono sempre dalle cariche positive e terminano in quelle negative; queste non possono mai incrociarsi altrimenti il vettore campo elettrico non sarebbe ben definito nel punto di incrocio (non sarebbe definito tramite verso, direzione eccetera).

Per una distribuzione continua di carica, volumica per esempio, si ha

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau(\vec{r}') \quad (1.1.3)$$

essendo $dq(\vec{r}) = \rho(\vec{r})d\tau(\vec{r})$. Per distribuzioni di carica lineare e superficiale si ha, rispettivamente $dq(\vec{r}) = \lambda d\ell(\vec{r})$ e $dq(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})dS(\vec{r})$.

TEOREMA 1.1 — TEOREMA DI GAUSS NEL VUOTO.

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa S è

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (1.1.4)$$

Per una distribuzione di carica volumica:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(\vec{r})d\tau(\vec{r}) \equiv \frac{Q_{\text{int,tot}}}{\epsilon_0} \quad (1.1.5)$$

1.1.1 Teorema della divergenza e I equazione di Maxwell nel vuoto

TEOREMA 1.2 — TEOREMA DELLA DIVERGENZA.

Sia \vec{A} un campo differenziabile; allora:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \quad (1.1.6)$$

Usando il teorema della divergenza, si ottiene la **prima equazione di Maxwell nel vuoto**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1.7)$$

Dimostrazione. Visto che $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau \rho d\tau$, per il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau \rho d\tau, \forall \tau$$

■

Si definisce il potenziale elettrostatico come:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C \quad (1.1.8)$$

e si ha che

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \equiv V(A) - V(B) \\ \mathcal{L}_A^B(\vec{F}_e) &\equiv \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = q(V_A - V_B) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

È valida la seguente relazione fra campo e potenziale:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (1.1.10)$$

Dimostrazione. Per A, B punti vicini fra loro, si ha $-dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, con $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$. Visto che V è una funzione di x, y, z , si ha

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Riscrivendo l'uguaglianza, si trova:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

■

1.1.2 Superfici equipotenziali

Le **superfici equipotenziali** sono tutte e sole quelle la cui direzione \hat{v} è tale che

$$\frac{\partial V}{\partial \hat{v}} \equiv \left| \vec{\nabla} V \right| \cos \alpha = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Dalla relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, si trova che lungo queste superfici, il campo è nullo.

1.1.3 Energia e densità di energia elettrica

Una carica q posta nel punto P e soggetta ad un potenziale esterno $V(r)$ possiede un'**energia potenziale elettrostatica** data da:

$$U = qV(P) = q(V(P) - V(\infty)) = - \int_{\infty}^P q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\mathcal{L}_{\infty}^P(\vec{F}_e) \quad (1.1.11)$$

dove si assume $V(\infty) = 0$.

In assenza di campo esterno, l'energia elettrostatica di un sistema composto da N cariche puntiformi è l'**energia di interazione**:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i^N q_i \sum_{\substack{j \\ i \neq j}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (1.1.12)$$

Per una **distribuzione continua**, si esegue il passaggio al continuo:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho(x, y, z) V(x, y, z) d\tau \quad (1.1.13)$$

Questa energia comprende quella di interazione e un'autoenergia.

Un'altra definizione di energia si ha tramite la **densità di energia** u :

$$U = \int_{\mathbb{R}^3} u(x, y, z) d\tau \quad (1.1.14)$$

Dimostrazione. Da $U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$, inserendo la prima equazione di Maxwell per cui $\rho = \epsilon_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$, si ha

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} V(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau \quad (1.1.15)$$

Usando $V(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (V\vec{E}) + E^2$, si ottengono due integrali; il primo si può portare ad un integrale di superficie tramite il teorema della divergenza, quindi mandando $\tau \rightarrow +\infty$, esso tende a 0 mentre quello di E^2 no in quanto rimane un integrale di volume. Allora il risultato finale è proprio quello cercato, con $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. ■

1.1.4 Dipolo elettrico

Due cariche elettriche con vettore distanza $\vec{\delta}$ che punta dalla negativa alla positiva. Momento di dipolo: $\vec{p} = q\vec{\delta}$, con q valore delle cariche.

Per il principio di sovrapposizione, il potenziale generato è:

$$V(r) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.1.16)$$

In **coordinate polari** $V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$, per cui usando $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, si ha:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Riscrivendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\vec{p} \cdot \vec{r} = pz$, in coordinate cartesiane, si trova

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \quad (1.1.18)$$

Sotto l'effetto di un generico campo elettrico \vec{E} , il dipolo elettrico ha energia:

$$U = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{\delta}) \simeq q\vec{\nabla}V(\vec{r}) \cdot \vec{\delta} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.1.19)$$

dove V è il potenziale generato dal campo elettrico esterno.

1.1.5 Teorema di Stokes e III equazione di Maxwell

Per un campo scalare differenziabile A , vale la seguente relazione: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} A) = 0$.

TEOREMA 1.3 — TEOREMA DI STOKES.

Sia \vec{v} un campo vettoriale, siano γ una curva orientata e S la superficie contornata da γ ; allora:

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad (1.1.20)$$

Da questo, si ottiene la **III equazione di Maxwell nel vuoto**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.1.21)$$

Dimostrazione. Visto che il campo elettrico è conservativo:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0, \quad \forall \gamma$$

Per il teorema di Stokes deve valere

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0, \quad \forall S$$

da cui si ricava che deve essere l'integrando pari a 0. ■

1.2 Elettrostatica dei conduttori

1.2.1 Reazione di un conduttore ad un campo esterno

Conduttore \rightarrow corpo in cui le cariche sono libere di muoversi. Se posto in campo esterno, non vi è campo nel conduttore perché le cariche si dispongono in modo tale da annullarlo (**all'equilibrio elettrostatico**).

Per Gauss, allora, non vi è carica all'interno di un conduttore \rightarrow la carica si distribuisce in uno spessore infinitesimo sul bordo del conduttore.

Le linee di forza sono ortogonali alla superficie di ogni conduttore.

Dimostrazione. Si considera un rettangolo posto tra l'esterno e l'interno del conduttore, con i lati normali alla superficie molto più corti di quelli tangenziali. La circuitazione del campo elettrico è nulla e gli unici contributi sono i lati del rettangolo che si trovano uno nel conduttore, uno nel vuoto. Questo vuol dire che il campo nel vuoto e quello nel conduttore devono essere uguali. Visto che quello nel conduttore deve essere nullo, anche quello all'esterno lo è. Questo significa che il campo elettrico subito fuori dal conduttore è ortogonale alla superficie del conduttore stesso. ■

Per quanto appena trovato, si conclude che le superfici di un conduttore sono equipotenziali.

Si può concludere direttamente dal fatto che il campo è ortogonale a tale superficie, da cui anche $\vec{\nabla}V$ lo è, visto $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

Ogni punto interno del conduttore è allo stesso potenziale.

Dimostrazione. Il campo interno è nullo, quindi

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 = V_A - V_B \Rightarrow V_A = V_B$$

■

TEOREMA 1.4 — TEOREMA DI COULOMB.

Il campo subito fuori da un conduttore è:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (1.2.1)$$

con \hat{n} normale alla superficie del conduttore.

Dimostrazione. Superficie cilindrica con una base (di area A) nel conduttore e una nel vuoto $\Rightarrow EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Il campo è ortogonale alla superficie. ■

Un conduttore con una cavità interna immerso in campo esterno non presenta cariche al suo interno.

Dimostrazione. Deve valere $\vec{E} = 0$ nel conduttore $\Rightarrow \Phi_S(\vec{E}) = 0$, quindi per Gauss $q_{\text{int}} = 0$. ■

Anche sulla superficie della cavità non sono presenti cariche.

Dimostrazione. Usando lo stesso rettangolino con lati ortogonali alla superficie trascurabili, ed essendo che il campo nel conduttore è nullo, anche quello nella cavità è nullo. Per il teorema di Coulomb, si ha $\sigma_{\text{int}} = 0$. ■

Effetto delle punte → parte più appuntita di un conduttore ha una distribuzione di carica maggiore, quindi esercita un campo elettrico maggiore.

Dimostrazione. Si considerano due sfere conduttrici di raggi R_1, R_2 , $R_1 \gg R_2$. Collegandole con un filo conduttore, la carica si deve redistribuire in modo che $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$ e che $\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$. Risolvendo per Q'_1, Q'_2 , si trova

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (1.2.2)$$

Per $R_1 \gg R_2$ si ha $\sigma'_2 \gg \sigma'_1$ e per Coulomb $E'_1 \ll E'_2$. ■

1.2.2 Capacità elettrica e condensatori

Dato un conduttore di carica Q con potenziale superficiale V , si definisce la sua capacità come

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1.2.3)$$

Condensatore → sistema di due conduttori fra i quali c'è *induzione completa*¹.

Si **costruisce** un condensatore sferico. Si prende una sfera di carica $+Q$ e raggio R_1 e la si racchiude in una superficie sferica di raggio interno R_2 e raggio esterno R'_2 .

All'equilibrio elettrostatico, non ci deve essere campo elettrico tra R_2 e R'_2 , conclusione che si ottiene usando Gauss con una superficie sferica di raggio $R_2 < r < R'_2$, visto che non vi devono essere cariche interne.

Allora si distribuisce $-Q$ sulla superficie di R_2 ; per lo stesso motivo, $+Q$ si distribuisce sulla superficie di R'_2 . Collegando la superficie a terra, R'_2 si trova a potenziale nullo.

¹Per induzione completa, si intende che le linee di forza che partono da un conduttore terminano tutte nell'altro

Il sistema ottenuto è complessivamente neutro e vi è induzione completa fra le due armature. La differenza di potenziale fra le due armature è proporzionale a Q :

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \propto Q \quad (1.2.4)$$

Allora si dà la definizione di **capacità di un condensatore** come

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (1.2.5)$$

Per il parallelo di due condensatori:

$$C = C_1 + C_2 \quad (1.2.6)$$

Dimostrazione. Per il parallelo $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ (ddp ai capi di ciascun condensatore), per cui $Q_1 = C_1 \Delta V$ e $Q_2 = C_2 \Delta V$, da cui $Q = Q_1 + Q_2 = \Delta V(C_1 + C_2)$. ■

Per la serie di due condensatori:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (1.2.7)$$

Dimostrazione. $Q_1 = Q_2 = Q$, perciò la tensione ai capi della serie è $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$. ■

1.2.3 Pressione elettrostatica

Pressione dovuta all'interazione di cariche dello stesso segno sulla superficie di un conduttore. Il suo valore è dato dalla densità di energia elettrostatica.

Dimostrazione. Per Coulomb $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$ fuori dal conduttore. Il campo sentito dalla superficie del conduttore meno un elemento dS è:

$$\vec{E} = \vec{E}_{(dS)} + \vec{E}_{(S-dS)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \Rightarrow \vec{E}_{(S-dS)} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad (1.2.8)$$

La forza su dS è

$$d\vec{F} = Q_{dS} \vec{E}_{(S-dS)} = \sigma dS \vec{E}_{(S-dS)} = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \hat{n} \quad (1.2.9)$$

Dalla relazione $p = \frac{|d\vec{F}|}{dS}$, si ottiene proprio $p = u$. ■

1.2.4 Equazioni di Poisson e Laplace e funzioni armoniche

L'equazione di Poisson è:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.2.10)$$

Dimostrazione. Dalla prima equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ e da $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, si ottiene l'equazione cercata. ■

La soluzione dell'equazione permette di trovare l'espressione del potenziale generato nello spazio da una distribuzione di carica ρ .

TEOREMA 1.5 — TEOREMA DI UNICITÀ.

Fissata una certa distribuzione di carica ρ e fissate le condizioni al contorno del potenziale date da una superficie S che contorna il volume τ in cui è localizzata ρ , l'equazione di Poisson ammette un'unica soluzione per tali condizioni al contorno.

Dimostrazione. Per assurdo f_1, f_2 , $f_1 \neq f_2$ soddisfano $\nabla^2 f_1 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ e $\nabla^2 f_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, per cui $f = f_1 - f_2$ è t.c. $\nabla^2 f = \nabla^2 f_1 - \nabla^2 f_2 = 0$. Si considera il seguente integrale, che si trova essere nullo tramite il teorema della divergenza per le condizioni al contorno:

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} f) d\tau = \int_S (f \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{S} = 0$$

Vale $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{\nabla} f) = f \nabla^2 f + (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} f) = (\vec{\nabla} f)^2$ perché $\nabla^2 f = 0$. Visto che $(\vec{\nabla} f)^2 \geq 0$, allora $\vec{\nabla} f = 0$ perché l'integrale di partenza sia nullo, quindi f è costante. Visto che $f = 0$ su S per le condizioni al contorno, allora è nulla in tutto τ e quindi $f_1 = f_2$. ■

Nelle regioni di spazio in cui non sono presenti cariche ($\rho = 0$), allora si trova l'**equazione di Laplace**:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.2.11)$$

Le funzioni che la soddisfano sono dette **armoniche**.

TEOREMA 1.6 — TEOREMA DELLA MEDIA.

Sia f armonica su τ ; allora la sua media \bar{f} su una superficie sferica è uguale al valore di f nel centro di tale sfera.

1.2.5 Problema fondamentale dell'elettrostatica

→ Trovare il potenziale generato da un certo numero di conduttori tramite la conoscenza di apposite condizioni al contorno e l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$ applicata alla regione di spazio in cui non sono presenti i conduttori.

Le condizioni al contorno del problema devono stabilire il valore del potenziale all'infinito e sulle superfici dei conduttori.

- **Problema di Dirichlet:** sono noti i V_i sulle superfici dei conduttori e si calcolano le Q_i . Soluzione attraverso i punti:
 - ricavare $V(\vec{r})$ da $\nabla^2 V = 0$;
 - ricavare $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V$;
 - ricavare le densità $\sigma_i(\vec{r})$ da Coulmb;
 - ricavare le Q_i dalle σ_i .
- **Problema di Neumann:** sono note le Q_i e si cercano V_i . Soluzione attraverso i punti:

- scegliere potenziali arbitrari V_i^0 per i conduttori;
- risolvere il problema di Dirichlet con V_i^0 e trovare Q_i^0 ;
- ricavare i coefficienti C_{ij} ;
- impostare i veri valori di Q_i e trovare V_i .

Per ricavare tutti i c_{ij} si considerano nulli tutti i potenziali eccetto uno, si risolve $\nabla^2 V = 0$ con tali condizioni e si trovano delle cariche \tilde{Q}_i ; impostando l'uguaglianza

$$\tilde{Q}_i = c_{ij} V_j$$

si trova una parte dei c_{ij} ; ripetendo il discorso per tutti i potenziali, si trova la matrice C , da cui si ottiene il comportamento del sistema per ogni tipo di condizione al contorno imposta.

Metodo delle cariche immagine → semplificazione del problema fondamentale che prevede di sostituire il conduttore con cariche immagini la cui sovrapposizione produce un potenziale che rispetti le condizioni al contorno previste dal problema originale. Per l'unicità della soluzione, si è risolto il problema di partenza.

1.3 Sviluppo in serie di multipoli

→ Calcolo approssimato per ottenere più facilmente il potenziale. Si assume che

- $\rho \neq 0$ in una regione limitata di spazio τ , con *dimensione caratteristica*² d ;
- $|\vec{r}| \gg d$.

Si considerano volumi infinitesimi di τ , indicati con $d\tau' = dx' dy' dz'$, relativi a \vec{r}' . Il contributo infinitesimo di potenziale per $d\tau'$ ³ è $dV(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$. Il potenziale complessivo è

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(\vec{r}') f(\vec{r}, \vec{r}') d\tau' \quad (1.3.1)$$

Dalla seconda assunzione, si sviluppa f attorno $\vec{r}' = 0$ (varrà $|\vec{r}| \gg \vec{r}'$):

²Grandezza che identifica la dimensione di ordine di grandezza maggiore della regione.

³Essendo $d\tau'$ molto piccolo, si pensa che il suo potenziale sia come quello di una carica puntiforme, quindi si usa \vec{r}' al denominatore.

$$\begin{aligned}
f(\vec{r}, \vec{r}') \simeq f(\vec{r}, 0) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{\vec{r}'=0} x' + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{\vec{r}'=0} y' + \frac{\partial f}{\partial z'} \Big|_{\vec{r}'=0} z' \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \Big|_{\vec{r}'=0} x'^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \Big|_{\vec{r}'=0} y'^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \Big|_{\vec{r}'=0} z'^2 + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial y'} \Big|_{\vec{r}'=0} x' y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial z'} \Big|_{\vec{r}'=0} y' z' + \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial z'} \Big|_{\vec{r}'=0} x' z' \quad (1.3.2)
\end{aligned}$$

L'ordine 0 si indica con $f^{(0)}$, l'ordine 1 con $f^{(1)}$ e il 2 con $f^{(2)}$.

Il potenziale sarà la somma dei potenziali ai vari gradi di approssimazione.

1.3.1 Termine di monopolio

Si considera $f = f^{(0)}$. Allora

$$V^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\tau} \rho(\vec{r}') d\tau' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1.3.3)$$

La carica q è detta **momento di monopolio**.

1.3.2 Termine di dipolo

Si considera $f^{(1)}$ con

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x'} \Big|_{\vec{r}'=0} &= \frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial f}{\partial z'} \Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{z}{r^3} \\
\Rightarrow f^{(1)} &= \frac{x'x}{r^3} + \frac{y'y}{r^3} + \frac{z'z}{r^3} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \quad (1.3.4)
\end{aligned}$$

Il potenziale è

$$\begin{aligned}
V^{(1)}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \rho(\vec{r}') d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \int_{\tau} \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau' \\
&\equiv \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.3.5)
\end{aligned}$$

Integrale \vec{p} noto come **momento di dipolo**. Per due cariche puntiformi, ha l'espressione già trovata.

Dimostrazione. Per due cariche $+q, -q$ a distanza \vec{d} (da negativa a positiva) vale $\rho(\vec{r}') = -q\delta(\vec{r}' - \vec{r}_1) + q\delta(\vec{r}' - \vec{r}_2)^a$. Allora:

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -q \int_{\tau} \vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_1) d\tau' + q \int_{\tau} \vec{r}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}_1 - \vec{d}) d\tau' \\ &= -q\vec{r}_1 + q(\vec{r}_1 + \vec{d}) = q\vec{d}\end{aligned}\quad (1.3.6)$$

■

^a \vec{r}_1 raggio vettore per $-q$, \vec{r}_2 per $+q$ | vale $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{d}$

1.3.3 Termine di quadrupolo

Vale

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j} \right|_{\vec{r}'=0} &= \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \\ \Rightarrow f^{(2)} &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x'_i \partial x'_j} \right|_{\vec{r}'=0} x'_i x'_j = \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) x'_i x'_j \\ &= \frac{1}{6r^5} \left[\sum_{i,j} (9x_i x_j x'_i x'_j) - 3r^2 r'^2 \right] \\ &= \frac{1}{6r^5} \sum_{i,j} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2)\end{aligned}\quad (1.3.7)$$

Si dimostra l'ultima uguaglianza.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) &= \\ &= \sum_{i,j} 9x_i x_j x'_i x'_j - 3r'^2 r^2 - 3r^2 r'^2 + \underbrace{\sum_i r^2 r'^2}_{=3r^2 r'^2} \\ &= \sum_{i,j} (9x_i x_j x'_i x'_j) - 3r'^2 r^2\end{aligned}\quad (1.3.8)$$

■

Il potenziale di quadrupolo è

$$\begin{aligned}
 V^{(2)}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6r^5} \sum_{i,j} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \underbrace{\int_{\tau} [3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2] \rho(\vec{r}') d\tau'}_{\equiv Q_{ij}} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6r^5} \sum_{i,j} (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) Q_{ij}
 \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

$Q_{ij} \rightarrow$ **momento di quadrupolo** ed è un tensore del secondo ordine, simmetrico e con traccia nulla.

1.4 Elettrostatica nei dielettrici

Dielettrici \rightarrow isolante polarizzabile da campo esterno. Si assumeranno omogenei e isotropi⁴.

Il campo sentito dal singolo atomo o molecola i -esima è

$$\vec{E}_{l,i} = \vec{E} + \sum_{j \neq i} \vec{E}_j \tag{1.4.1}$$

con \vec{E} campo esterno e \vec{E}_j campo generato dalla molecola j -esima per polarizzazione. La somma dei campi degli altri atomi o molecole sottintende una media su $d\tau$ e dt per eliminare le fluttuazioni.

1.4.1 Effetti sulla capacità

Condensatore piano con armature separate da dielettrico. Si verifica una diminuzione della tensione fra le armature dovuta al dielettrico, quindi cambia il campo elettrico e cambia la capacità del condensatore. **Costante dielettrica relativa:**

$$\epsilon_r \equiv \frac{\Delta V}{\Delta V'} > 1 \tag{1.4.2}$$

Campo elettrico precedente $E = \Delta V/d$ implica che il nuovo è:

$$E' = \frac{\Delta V}{\epsilon_r d} \tag{1.4.3}$$

La nuova capacità è:

$$C' = \epsilon_r C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} \equiv \epsilon \frac{S}{d} \tag{1.4.4}$$

dove ϵ **costante dielettrica assoluta del materiale** e $\epsilon > \epsilon_0$.

⁴Rispettivamente invarianza delle caratteristiche del materiale per traslazioni e per rotazioni.

In presenza di campo esterno, il dielettrico si polarizza o per deformazione o per orientamento.

1.4.2 Polarizzazione per deformazione

Atomo immerso in campo locale (diretto verso il basso) $\vec{E}_l \rightarrow$ il nucleo si sposta verso il basso di \vec{r} . Spostato dal centro, il nucleo percepisce il campo \vec{E}_{at} generato dalla nube elettronica. Modellando l'atomo come una sfera di raggio R :

$$|\rho| = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \vec{E}_{at} = -\frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \quad (1.4.5)$$

Per trovare r si deve avere il nucleo in equilibrio, quindi si sfrutta la relazione $|\vec{E}_{at}| = |\vec{E}_l|$:

$$r = \frac{3\epsilon_0}{|\rho|} |\vec{E}_l| \quad (1.4.6)$$

Il momento di dipolo indotto è:

$$\vec{p} = Ze\vec{r} = Ze \frac{3\epsilon_0}{|\rho|} \vec{E}_l = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{E}_l \equiv \alpha_D \vec{E}_l \quad (1.4.7)$$

α_D è la **polarizzabilità elettronica**, di espressione generale data da $\alpha_D = 3\epsilon_0 \mathcal{V}$ (\mathcal{V} volume della figura, sfera in questo caso).

1.4.3 Polarizzazione per orientamento

\rightarrow Molecole con atomi che hanno momento di dipolo \vec{p}_0 permanente polarizzano per campo locale \vec{E}_l . Inizialmente ($E_l = 0$), gli atomi hanno momenti orientati casualmente \Rightarrow la molecola ha $\langle p \rangle = 0$.

L'energia di ciascun atomo è $U = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E}_l = -p_0 E_l \cos \theta \Rightarrow$ dipolo si allineerà con il campo locale per minimizzare energia.

A equilibrio termodinamico, la molecola sarà a temperatura $T \rightarrow$ perturbazione da energia minima. La propensione degli atomi ad allinearsi col campo locale è $\frac{U}{\kappa_B T}$ e si usa la distribuzione di Boltzmann

$$W(U) = Ae^{-\frac{U}{\kappa_B T}} \quad (1.4.8)$$

per indicare la distribuzione probabilistica dell'allineamento dei dipoli dovuta ad agitazione termica.

Energia indipendente da angolo azimutale $\varphi \Rightarrow$ configurazioni a stessa energia rappresentate da una circonferenza. Ci si può spostare di $d\theta$ e trovare la stessa energia, per cui si individua regione $d\Omega_0$ a uguale energia che descrive anello $d\Omega$ in cui si ha stessa configurazione energetica. Allora $W(U)d\Omega$ è la probabilità che il dipolo sia orientato in $d\Omega$. Vale che

$$\begin{aligned} d\Omega_0 &= \frac{dS}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi, \quad dS = r d\theta r \sin\theta d\varphi \\ \Rightarrow d\Omega &= 2\pi \sin\theta d\theta \\ \Rightarrow dW &\equiv W(U)d\Omega = A e^{-\frac{U}{\kappa_B T}} d\Omega = A \exp\left(\frac{p_0 E_l \cos\theta}{\kappa_B T}\right) 2\pi \sin\theta d\theta \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Considerando $U \ll \kappa_B T$, si sviluppa l'esponenziale attorno a 0 fino al primo ordine, quindi

$$dW \simeq 2\pi A \left(1 + \frac{p_0 E_l \cos\theta}{\kappa_B T}\right) \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \frac{p_0 E_l \cos\theta}{\kappa_B T}\right] \sin\theta d\theta \quad (1.4.10)$$

Questa è una densità probabilità, quindi deve fare 1 se integrata da $\theta = 0$ a $\theta = \pi$; in questo modo si trova $A = \frac{1}{4\pi}$.

Ora si può calcolare $\langle p_z \rangle^5$ come

$$\begin{aligned} \langle p_z \rangle &= \int p_z dW = \int p_0 \cos\theta dW = \int_0^\pi p_0 \cos\theta \frac{1}{2} \left[1 + \frac{p_0 E_l \cos\theta}{\kappa_B T}\right] \sin\theta d\theta \\ &= \frac{p_0^2 E_l}{3\kappa_B T} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Si risolve prendendo $x = \cos\theta$. Inoltre si chiama $\alpha_0 \equiv \frac{p_0^2}{3\kappa_B T}$ **polarizzabilità per orientamento**.

La polarizzazione per deformazione è sempre presente, ma quando è presente anche quella per orientamento, si considera $\alpha = \alpha_D + \alpha_0 \simeq \alpha_0$.

1.4.4 Vettore di polarizzazione elettrica

Porzione $\Delta\tau$ di volume di un dielettrico; si definisce:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \sum_i \vec{p}_i \quad (1.4.12)$$

⁵Non si ha motivo di supporre che il momento di dipolo della molecola si distribuirà in una direzione diversa da quella del campo esterno.

Si riscrive come:

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} \rangle &= \frac{1}{\Delta N} \sum_i \vec{p}_i \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \Delta N \langle \vec{p} \rangle \\ \Rightarrow \vec{P} &= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta \tau} \langle \vec{p} \rangle \equiv n \langle \vec{p} \rangle\end{aligned}\quad (1.4.13)$$

con ΔN numero di dipoli in $\Delta \tau$ e n densità di dipoli in $\Delta \tau$.

1.4.5 Cariche di polarizzazione

Dielettrico con \vec{P} generico. Porzione di volume del dielettrico $d\tau'$ in posizione \vec{r}' . Si calcola potenziale nel punto A in \vec{r} . In $d\tau'$, si ha $d\vec{p} = \vec{P}d\tau'$; il contributo della porzione è

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.4.14)$$

Per tutto il dielettrico:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\vec{P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (1.4.15)$$

Dato che

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}' &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right) \\ \Rightarrow \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \Rightarrow V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau\end{aligned}\quad (1.4.16)$$

Usando $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{g}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{g} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{g}$, con $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ e il teorema della divergenza, si ha:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad (1.4.17)$$

Per il teorema di unicità:

$$\begin{cases} \sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \\ \rho_P = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P} \end{cases} \quad (1.4.18)$$

con \hat{n} normale alla superficie che contorna il dielettrico. Per \vec{P} uniforme, $\rho_P = 0$.

1.4.6 Suscettività elettrica

Per **materiali rarefatti** $\vec{E}_l \simeq \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle$, con $\langle \vec{p} \rangle = \alpha \vec{E}_l = \alpha \vec{E}$. Quindi

$$\vec{P} = n\alpha \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.4.19)$$

con $\chi = \frac{n\alpha}{\epsilon_0}$ suscettività elettrica.

Per **liquidi non polari** (solo deformazione) $\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_i \Rightarrow \vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$, immaginando che ogni molecola sia una sfera polarizzata. Allora:

$$\vec{P} = n\alpha \vec{E}_l = n\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right) \Rightarrow \vec{P} = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}} \vec{E} \equiv \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.4.20)$$

Visto che⁶ $\chi = \epsilon_r - 1$:

$$\frac{n\alpha}{\epsilon_0 \left(1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} \right)} = \epsilon_r - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\epsilon_0}{n} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (1.4.21)$$

nota come **relazione di Clausius-Mossotti**. Questa funziona bene per solidi a struttura cubica, ma non per gli altri.

1.4.7 Equazioni di Maxwell per dielettrici

Continua a valere $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ perché \vec{E} è conservativo. La prima va modificata per tenere conto delle cariche di polarizzazione. Vale:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho + \rho_P}{\epsilon_0} = \frac{\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

con $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ **vettore di spostamento elettrico**. Per **dielettrici perfetti, omogenei e isotropi**:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0 \chi \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{D} &= \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{P} &= \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \vec{D} \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

⁶Non ancora dimostrato.

Dalla prima equazione di Maxwell corretta, se \vec{E}_0 è il campo nel vuoto, si ricava che:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad (1.4.24)$$

1.4.8 Teoremi di Gauss e Coulomb

Dalla prima, si ottiene una versione modificata del **teorema di Gauss**:

$$\Phi_S(\vec{D}) = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}} \quad (1.4.25)$$

Dimostrazione. Integrando sul volume del dielettrico:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d\tau = \int_\tau \rho d\tau = Q_{\text{int}} \quad (1.4.26)$$

■

Applicando Gauss all'interfaccia fra dielettrico e un conduttore, si ha il **teorema di Coulomb**:

$$\vec{D} = \sigma \hat{n} \quad (1.4.27)$$

1.4.9 Relazione tra χ e ϵ_r

Condensatore con armature con distribuzione σ e $-\sigma$; alle estremità del dielettrico fra le armature si distribuisce rispettivamente $-\sigma_P$ e $+\sigma_P$. Il campo è $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$.

Usando Gauss su una superficie cilindrica con basi parallele ad un'armatura tale da comprendere all'interno $+\sigma$ e $-\sigma_P$:

$$\Phi_S(\vec{E}) = AE = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{(\sigma - \sigma_P)A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma - \sigma_P}{\epsilon_0} \quad (1.4.28)$$

Usando $\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow |\sigma_P| = |\vec{P}|$ e $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ (in questo caso, il coseno è $+1$ o -1):

$$E = \frac{\sigma - \epsilon_0 \chi E}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E_0 - \epsilon_0 \chi E}{\epsilon_0} = E_0 - \chi E \Rightarrow E = \frac{E_0}{1 + \chi} \quad (1.4.29)$$

Allora $\epsilon_r = 1 + \chi$.

1.4.10 Legge di rifrazione del campo elettrico

Interfaccia fra due dielettrici con $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r,1}$, $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r,2}$ in assenza di cariche libere. Per la componente ortogonale, si considera un cilindro con $\sqrt{A} \gg dh$; applicando Gauss al cilindro S e usando $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$:

$$0 = \oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv A \left[\vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2 \right] = D_{1\perp} - D_{2\perp} \Rightarrow D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (1.4.30)$$

Per la componente parallela, si prende un rettangolo con $h \ll \ell$ (altezza e lato parallelo). \vec{E} conservativo, quindi, usando $d\vec{l}_1 = -d\vec{l}_2$:

$$0 = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 \Rightarrow E_{1\parallel} = E_{2\parallel} \quad (1.4.31)$$

Unendo i due risultati:

$$\begin{cases} \epsilon_{r,1} E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_{r,2} E_2 \cos \theta_2 \\ E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,2}} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} \quad (1.4.32)$$

1.4.11 Energia elettrostatica per dielettrici

Vale ancora

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau \quad (1.4.33)$$

dove ρ è la densità di cariche libere e V è il potenziale dovuto sia a quelle libere che quelle di polarizzazione.

Per procedimenti analoghi al caso di una distribuzione continua di carica, usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, si arriva alla conclusione che

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau = \int \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 d\tau \quad (1.4.34)$$

dove l'integrale è su tutto lo spazio, con $u \equiv \frac{1}{2} \epsilon E^2$ densità di energia.

1.5 Conduzione elettrica

1.5.1 Corrente elettrica

→ Moto ordinato delle cariche positive in un conduttore quando sottoposto ad un campo esterno. È:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1.5.1)$$

Se ΔV costante, I è stazionaria.

1.5.2 Modello di Drude

La densità di elettroni liberi per unità di volume è:

$$n = \frac{Z \rho_m N_A}{A} \quad (1.5.2)$$

dove A è la massa atomica, Z è il numero di elettroni di valenza del conduttore, ρ_m la densità del materiale conduttore, A è la massa atomica e N_A il numero di Avogadro.

Il modello di Drude afferma che gli elettroni urtano gli ioni; dopo l'urto gli elettroni prendono una velocità con direzione casuale e modulo dipendente dalla temperatura nel punto dell'urto pari a v_T .

Il tempo medio fra due collisioni $\tau = \frac{\Delta \ell}{v_T}$, con $\Delta \ell$ cammino libero medio⁷; un buon valore per $\Delta \ell$ è la distanza fra due ioni. In presenza di campo esterno \vec{E} , $\vec{a} = \frac{-e\vec{E}}{m_e}$; prendendo come velocità iniziale quella termica, fra un urto e l'altro, la legge oraria dell'elettrone è:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_T - e \frac{\vec{E}}{m_e} t \\ \Rightarrow \langle \vec{v}(t) \rangle &= \langle \vec{v}_T \rangle - e \frac{\vec{E}}{m_e} \tau \equiv -e \frac{\vec{E}}{m_e} \tau \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

perché in media $\langle v_T \rangle = 0$ visto che dopo un urto, ha direzione casuale. Per il teorema di equipartizione

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \kappa_B T \Rightarrow v_T = \sqrt{3 \kappa_B T / m} \quad (1.5.4)$$

⁷Indica lo spostamento medio fra un urto e l'altro di un elettrone.

quindi inserendo $\tau = \frac{\Delta \ell}{v_T}$:

$$\vec{v}_d = \frac{-e\Delta \ell}{\sqrt{3\kappa_B T m}} \vec{E} \quad (1.5.5)$$

è la **velocità di deriva**. In genere $v_D \ll v_T$.

1.5.3 Densità e intensità di corrente elettrica

Si considera un cilindro all'interno del quale scorrono cariche. Data $d\vec{S}$ al suo interno, se n = densità di portatori di carica liberi di carica q e \vec{v}_D campo di velocità di deriva, la superficie è attraversata da un quantitativo di carica

$$dq_{dS} = nq\vec{v}_D \cdot d\vec{S} dt \Rightarrow dq_S = dt \int_S nq\vec{v}_D \cdot d\vec{S} \quad (1.5.6)$$

ogni intervallo temporale dt . Definendo $\vec{j} = nq\vec{v}_D$:

$$I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{attraverso } \vec{S}) \quad (1.5.7)$$

1.5.4 Conducibilità e resistività

Essendo $\vec{v}_D = k\vec{E}$ ⁸, vale $\vec{j} = nqk\vec{E}$, dove $\sigma \equiv nqk$ ed è detta **conducibilità elettrica**. **Resistività** definita come $\rho = 1/\sigma$, per cui $\vec{E} = \rho\vec{j}$. Per modello di Drude $\rho \propto 1/\tau \propto 1/\sqrt{T}$, ma in realtà si osserva una dipendenza lineare approssimata come

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \quad \rho_0 = \rho(T_0) \quad (1.5.8)$$

con α **coefficiente di temperatura**.

1.5.5 Equazione di continuità della corrente

S superficie immaginaria qualsiasi (fissa) che circonda τ . All'interno, c'è una carica $Q(t)$ che fuoriesce dalla superficie. La variazione è:

$$-dQ = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} dt \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.5.9)$$

⁸Qui si è chiamato $k = \frac{-e\Delta \ell}{\sqrt{3\kappa_B T m}}$.

Visto che $Q = \int_{\tau} \rho \, d\tau$, si ha

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.5.10)$$

Usando il teorema della divergenza sul secondo membro e visto che l'uguaglianza deve valere $\forall \tau$, allora:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.5.11)$$

nota come **equazione di continuità della corrente**.

1.5.6 Correnti stazionarie

Le correnti stazionarie si riferiscono al caso in cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, quindi, localmente, non vi sono variazioni nella distribuzione delle cariche⁹, di fatto il flusso complessivo della densità di corrente è nullo a indicare che tante sono le cariche che entrano, tante sono quelle che escono, il che porta ad avere complessivamente una corrente costante nel tempo.

1.5.7 Leggi di Kirchhoff

Per correnti stazionarie, valgono:

- $\sum_i I_i = 0$, con i ramo attraverso cui scorre I_i ;
- $\sum_i \Delta V_i = 0$.

La prima si giustifica dalla stazionarietà; la seconda dal fatto che correnti stazionarie generano campi elettrostatici¹⁰ per cui $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, quindi la circuitazione di \vec{E} su tutto il circuito è nulla.

Valgono anche per correnti **lentamente variabili** purché il tempo di variazione sia molto maggiore di quello che impiega la corrente a percorrere il circuito; in questo caso, si possono usare le leggi di Kirchhoff istante per istante.

⁹Perché $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

¹⁰Questo perché $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, quindi si hanno campi elettrostatici generati da distribuzioni di cariche che rimangono costanti nel tempo.

1.5.8 Legge di Ohm

Per certi materiali (**ohmici**) vale $\Delta V = RI$, con R **resistenza**. Questa è data da:

$$R = \frac{\ell}{S} \rho \quad (1.5.12)$$

con ℓ lunghezza del materiale, S superficie e ρ resistività elettrica (che dipende dalla temperatura). Si definisce **conducibilità elettrica** $\sigma = \frac{1}{\rho}$. Per **materiali ohmici**¹¹ vale:

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.5.13)$$

Dimostrazione. $R = \rho \frac{\ell}{S} \Rightarrow \Delta V = \rho \frac{\ell}{S} I \Rightarrow E \equiv \frac{\Delta V}{\ell} = \rho \frac{I}{S} \equiv \rho j$. ■

Per resistenze in **serie** vale $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$, mentre per il **parallelo** vale $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

NOTA: per conduttori non-ohmici, vale $\Delta V = RI$, ma $R \equiv f(\Delta V)$.

1.5.9 Correnti radiali

Si considera lo scorrimento di corrente, in verso radiale, attraverso un cilindro cavo conduttore che ha raggio interno r_A e raggio esterno r_B e altezza h .

Si considera un guscio cilindrico di raggio r , spessore dr e altezza h ; allora $S = 2\pi rh$ mentre $\ell = dr$ perciò $dR = \rho \frac{dr}{2\pi rh}$. La resistenza complessiva è:

$$R = \int_{r_A}^{r_B} \rho \frac{dr}{2\pi rh} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r_B}{r_A} \quad (1.5.14)$$

1.5.10 Dielettrici non perfetti

→ Dielettrici in cui può scorrere corrente. Ponendo questo tra le armature di un condensatore di forma generica, usando una superficie S anch'essa generica fra le due armature:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \rho \vec{j} \cdot d\vec{S} = \rho I \quad (1.5.15)$$

Contemporaneamente:

$$Q = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow \rho I = \frac{Q}{\epsilon} \quad (1.5.16)$$

¹¹ Vale anche per materiali non ohmici, ma ρ non è uniforme e dipende da $|\vec{E}|$.

Se il dielettrico è **ohmico** $\Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R}$; per il condensatore $Q = C\Delta V$, per cui:

$$RC = \rho\epsilon \quad (1.5.17)$$

1.5.11 Effetto Joule

L'energia generata dal campo elettrico per il moto delle cariche viene dissipata sotto forma di energia termica per effetto Joule. La potenza è $W = \frac{dL}{dt}$ con $dL = dq(V_A - V_B)$ e $dq = Idt$ per cui

$$W = I\Delta V = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (1.5.18)$$

Questo si ha perché il conduttore oppone una certa resistenza al passaggio di cariche.

La **forma locale** dell'effetto Joule è:

$$\frac{dL}{d\tau dt} = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (1.5.19)$$

Dimostrazione. $dL = dq(V_A - V_B)$ con dq cariche in volume $d\tau$ e $dq = nqd\tau$ per n densità di cariche. Si prende $d\tau$ di lunghezza $d\vec{\ell} = \vec{v}_D dt$. Allora

$$dL = nqd\tau \vec{E} \cdot \vec{v}_D dt = \vec{E} \cdot (nq\vec{v}_D) d\tau dt = \vec{E} \cdot \vec{j} d\tau dt \quad (1.5.20)$$



Questa rappresenta la potenza dissipata per unità di volume.

1.5.12 Forza elettromotrice

→ Nome assegnato al lavoro del campo elettrico non conservativo che permette la chiusura di un circuito elettrico.

Un **generatore di fem** ha un accumulo di cariche positive sull'**anodo** e di cariche negative sul **catodo**; permette di trasportare cariche dall'anodo al catodo e ricominciare il processo. Per fare ciò e mantenere una differenza di potenziale costante nel circuito bisogna mantenere gli accumuli di carica costanti, quindi è necessario far passare cariche positive dal catodo all'anodo; allora c'è un campo non conservativo \vec{E}_e (**campo elettromotore**) che punta da $C \rightarrow A$ che permette questo moto e si oppone al campo elettrostatico \vec{E}_s generato dall'accumulo di cariche di segno opposto tra anodo e catodo.

La forza elettromotrice è definita come:

$$f = \int_C^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \quad (1.5.21)$$

dove C sta per catodo e A sta per anodo. Il campo elettrico totale che interessa il circuito è dato da $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_s + \vec{E}_e$; allora

$$\oint_l \vec{E}_{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \oint_l \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \int_C^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \quad (1.5.22)$$

Allora

$$f \equiv \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.5.23)$$

1.5.13 Fem per generatori ideali e reali

Circuito aperto (solo generatore) e condizioni stazionarie $\Rightarrow |\vec{E}_e| = |\vec{E}_s|$ quindi:¹²

$$f = - \int_C^A \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = V(A) - V(C) \quad (1.5.24)$$

A circuito chiuso, se generatore **ideale** sarebbe costante $f = V(A) - V(C)$; in realtà

$$V(A) - V(C) = f - rI \quad (1.5.25)$$

con r resistenza interna del generatore. Andamento ΔV all'aumentare di I è lineare fino a una certa I_{max} , dopo di che crolla a picco.

1.5.14 Potenza del generatore

Data da $W_g = \frac{dL_g}{dt}$, dove $dL_g = dqf = fIdt$, quindi:

$$W_g = fI \quad (1.5.26)$$

Una parte di questa è dissipata dalla resistenza interna (W_d), l'altra trasferita al carico ai capi del generatore:

$$\begin{aligned} W_g &= I(V_A - V_B) + W_d \Rightarrow fI = I(V_A - V_B) + W_d \\ \Rightarrow f &= V_A - V_B + \frac{W_d}{I} \\ \Rightarrow W_d &= rI^2 \end{aligned} \quad (1.5.27)$$

¹² Ancora A indica l'anodo e C il catodo.

Per i **carichi ohmici**, la potenza viene dissipata in calore. Per **carichi non-ohmici**, la potenza viene trasformata in altre forme di energia.

1.5.15 Campi contro-elettromotori

Per carichi non-ohmici (come bobine o condensatori) si sviluppano dei campi contro-elettromotori \vec{E}_c che si oppongono alla variazione dell'intensità di corrente. La **forza contro-elettromotrice** associata è:

$$f_C = \int_A^B \vec{E}_c \cdot d\vec{l} \quad (1.5.28)$$

se la corrente scorre da B verso A .

1.5.16 Legge di Ohm generalizzata

Si considera una componente ohmica (i cui terminali sono A e B) attraversata da campi elettromotori e contro-elettromotori:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_s + \vec{E}_e + \vec{E}_c = \rho \vec{j} \\ \Rightarrow (V_A - V_B) + \sum_i f_{e,i} + \sum_i f_{c,i} &= \int_A^B \rho \vec{j} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (1.5.29)$$

dove si è calcolato il lavoro di tutti i campi da A a B terminali della componente. Il membro di destra è:

$$\int_A^B \rho \vec{j} \cdot d\vec{l} \equiv \int_A^B \rho j dl = \int_A^B \rho \frac{I}{S} dl = I \int_A^B \rho \frac{dl}{S} = I R_{AB} \quad (1.5.30)$$

dove si assume $\vec{j} \parallel \vec{S}$ e $\sqrt{S} \ll l$ (lunghezza tubo di flusso) per avere \vec{j} omogeneo. Per una maglia, vale la **II legge di Kirchhoff generalizzata** ottenuta tramite circuitazione:

$$\sum_i f_{e,i} + \sum_i f_{c,i} = \sum_i R_i I_i \quad (1.5.31)$$

1.5.17 Conduttori attraversati da corrente

Si considerano correnti stazionarie. Vale $\vec{E}_{\text{int}} \neq 0$ perché cariche nel conduttore sono in moto. Per questo, la superficie non è più equipotenziale e, quindi, il campo elettrico esterno non è più ortogonale alla superficie del conduttore.

- (1). All'interno del conduttore **non ci possono essere accumuli di carica**. Visto che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$ e che $\vec{E}_{\text{int}} = \rho \vec{j}$, allora $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{j}) = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$. Per conduttori ohmici $\Rightarrow \epsilon_0 \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \rho_c = 0$ (cond. stazionarie $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$), quindi non vi possono essere accumuli di carica interni al conduttore ohmico. Utilizzando la legge di Ohm locale, si arriva alla stessa conclusione anche per materiali non-ohmici. Questa conclusione si può anche vedere come l'assenza di uno squilibrio di carica: in un conduttore attraversato da corrente, non sono presenti squilibri di carica negativi o positivi.
- (2). La densità \vec{j} è **sempre parallela alla superficie** del conduttore. Per vederlo, si usa Gauss con un cilindro di altezza trascurabile rispetto all'area delle basi. Versore \hat{n} indica la normale alla superficie, $\hat{\theta}$ indica quella parallela. Visto che $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \Phi(\vec{j}) = 0$. Il flusso attraverso la superficie superiore è nullo perché è nel vuoto, quello attraverso le superfici trascurabili è nullo, quindi il flusso attraverso base inferiore è anch'esso nullo. Quindi la componente di \vec{j} normale al conduttore è nulla, quindi $\vec{j} \parallel \hat{\theta}$:

$$\vec{j} = j \hat{\theta} = \frac{I}{S} \hat{\theta} \quad (1.5.32)$$

- (3). Il campo interno è $\vec{E}_{\text{int}} = \rho \vec{j} = \rho \frac{I}{S} \hat{\theta}$. Si è visto che la componente parallela del campo si conserva nel passaggio da conduttore ad altro mezzo, quindi $E_{\parallel, \text{ext}} = \rho j$.
- (4). La componente normale è $E_{\perp, \text{ext}} = \frac{\sigma_c}{\epsilon_0}$ per via delle cariche disposte sulla superficie del conduttore. Si trova usando Gauss con la superficie al punto (2) e serve a mantenere il campo interno parallelo al conduttore.

1.5.18 Scarica di un condensatore

A $t = 0$ condensatore carico con Q_0 . La carica lascia il condensatore e si dissipa nella resistenza.

$$\begin{aligned} \begin{cases} V(t) = RI(t) \\ V(t) = \frac{Q(t)}{C} \end{cases} &\Rightarrow RI(t) = -R \frac{dQ}{dt} = \frac{Q(t)}{C} \\ &\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \\ &\Rightarrow I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau} \equiv I_0 e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

La potenza dissipata dal processo è $W = RI(t)^2$, allora

$$U = \int_0^{+\infty} RI_0 e^{-t/\tau} dt = \frac{Q_0^2}{2C} \quad (1.5.34)$$

Questa è l'energia immagazzinata dal condensatore inizialmente e poi totalmente dissipata dalla resistenza.

1.5.19 Carica di un condensatore

Generatore di fem $\equiv f$ e $V(t)$ tensione ai capi di $C \Rightarrow f - V(t) = RI(t)$:

$$\begin{aligned} R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} &= f \\ \Rightarrow Q(t) &= Ae^{-t/\tau} + fC \equiv fC(1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

con $A = -fC$ perché $Q(0) = 0$. Da questo si trova

$$\begin{cases} V(t) = \frac{Q}{C} = f(1 - e^{-t/\tau}) \\ I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{f}{R} e^{-t/\tau} \end{cases} \quad (1.5.36)$$

La potenza erogata dal generatore è $W = If$, quindi:

$$U = \int_0^{+\infty} fI dt = f \int_0^{+\infty} \frac{f}{R} e^{-t/\tau} dt = \frac{f^2}{R} \tau = f^2 C \quad (1.5.37)$$

L'energia immagazzinata dal condensatore è $U = \frac{1}{2}CV^2 \rightarrow \frac{1}{2}Cf^2$ per $t \rightarrow +\infty$; l'altra metà di energia rimanente erogata è consumata per effetto Joule attraverso R .

2 MAGNETISMO

2.1 Magnetismo nel vuoto

2.1.1 Forza di Lorentz

Un circuito percorso da corrente stazionaria presenta un tratto $d\vec{l}$ mobile attaccato a due molle e lo si immerge in un campo magnetico. Sperimentalmente, la forza sentita dal tratto $d\vec{l}$ è:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (2.1.1)$$

Si considera un volume $d\tau = d\vec{l}S$ nel quale scorre una corrente I ; allora $I d\vec{l} = j S d\vec{l} \equiv \vec{j} d\tau = n q \vec{v}_d d\tau$, con $n = \frac{dN}{d\tau}$ cioè la densità di portatori di carica nel cilindro. Si ha $I d\vec{l} = dN q \vec{v}_d$

$$\Rightarrow d\vec{F} = dN q \vec{v}_d \times \vec{B} \quad (2.1.2)$$

Una singola carica percepisce la **forza di Lorentz**:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.1.3)$$

La sua forma più generale comprende anche la forza relativa al campo elettrico:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} + q \vec{E} \quad (2.1.4)$$

Escludendo il campo elettrico:

- se $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$ (cariche ferme, niente forza);
- si ha $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \mathcal{L}(\vec{F}) = 0$ cioè la forza magnetica non compie lavoro;
- \vec{F} non compie lavoro, quindi modifica la direzione di \vec{v} .

2.1.2 Momento di una spira rigida

La forza netta che agisce su una spira in campo \vec{B} uniforme è nulla:

$$\vec{F} = \oint_L I d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \quad (2.1.5)$$

Il momento, invece, è dato da:

$$\vec{\Gamma} = I \vec{S} \times \vec{B} \equiv \vec{m} \times \vec{B} \quad (2.1.6)$$

con \vec{S} orientata da vedere la corrente in senso anti-orario e \vec{m} momento magnetico della spira.

Dimostrazione. Spira rettangolare per esempio, ma valido per forma generica. La somma delle forze agenti è $\vec{F} = 0$ come visto. Tutta via, se \vec{B} forma un angolo θ con la normale alla spira \hat{n} , una coppia di forze fa momento. Siano a i lati lungo cui la forza fa momento e b gli altri:

$$\Gamma_i = I a B \frac{b}{2} \sin \theta \quad (2.1.7)$$

con $\frac{b}{2} \sin \theta$ braccio della forza. Allora:

$$\Gamma_{\text{tot}} = I a B b \sin \theta = I B S \sin \theta = I \vec{S} \times \vec{B} \quad (2.1.8)$$

■

TEOREMA 2.1 — TEOREMA DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE.

Una spira percorsa da corrente stazionaria con momento \vec{m} è equivalente ad un dipolo magnetico con stesso momento \vec{m} .

2.1.3 Sollecitazioni meccaniche su circuiti

Principio dei lavori virtuali su un circuito \rightarrow spostamento $d\vec{s}$ a velocità trascurabile. Su un tratto $d\vec{l}$ di circuito agisce $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$. Deve esistere¹³ $d\vec{f} = -d\vec{F}$ per frenare il moto; $dL = dU$ lavoro di $d\vec{f}$ ¹⁴:

$$dL = \oint_l d\vec{f} \cdot d\vec{s} = - \oint_l d\vec{F} \cdot d\vec{s} = -I \oint_l (d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = I \oint_l (d\vec{l} \times d\vec{s}) \cdot \vec{B} \quad (2.1.9)$$

usando $(d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -(d\vec{l} \times d\vec{s}) \cdot \vec{B}$. Se \hat{n} normale al piano dato da $d\vec{s}$ e $d\vec{l} \Rightarrow d\vec{l} \times d\vec{s} = dl ds \sin \theta \hat{n} \equiv d\vec{S}$ superficie parallelogramma. Allora

$$dL = I \int_{d\Sigma} d\vec{S} \cdot \vec{B} \equiv I \Phi_{d\Sigma}(\vec{B}) \quad (2.1.10)$$

con $d\Sigma$ superficie laterale dello spostamento del circuito. Se Σ è l'area racchiusa dal circuito iniziale e Σ' da quello finale, usando che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, vale $\Phi_{\Sigma}^{\text{out}}(\vec{B}) +$

¹³Per il teorema delle forze vive, se $\Delta K = 0$, allora anche il lavoro compiuto dalle forze agenti sul sistema deve esserlo.

¹⁴Gli integrali sono riferiti a tutta la spira e sono rispetto a $d\vec{l}$ contenuto nella forza esterna e in $d\vec{F}$.

$\Phi_{\Sigma'}^{\text{out}}(\vec{B}) + \Phi_{d\Sigma}^{\text{out}}(\vec{B}) = 0$. Essendo $\Phi_{\Sigma}(\vec{B})^{\text{in}} = -\Phi_{\Sigma}^{\text{out}}(\vec{B})$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\Sigma}^{\text{in}}(\vec{B}) &= \Phi_{\Sigma'}^{\text{out}}(\vec{B}) + \Phi_{d\Sigma}^{\text{out}}(\vec{B}) \Rightarrow d\Phi(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma'}^{\text{out}}(\vec{B}) - \Phi_{\Sigma}^{\text{in}}(\vec{B}) = -\Phi_{d\Sigma}^{\text{out}}(\vec{B}) \\ \Rightarrow dU &= I\Phi_{d\Sigma}(\vec{B}) = -Id\Phi(\vec{B}) \\ \Rightarrow U &= -I\Phi(\vec{B})\end{aligned}\quad (2.1.11)$$

2.1.4 Legge di Biot-Savart

Tratto di filo $d\vec{l}'$ in posizione \vec{r}' ; il campo magnetico generato nel punto P in posizione \vec{r} è:

$$d\vec{B}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.1.12)$$

Il contributo di tutto il circuito è:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\gamma'} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (2.1.13)$$

Questo vale per un circuito **filiforme**; per un circuito **spesso** si ha

$$\begin{aligned}I &= \int_{S'} \vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' \\ \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma'} \int_{S'} \left[\vec{j}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' \right] \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\end{aligned}\quad (2.1.14)$$

con \vec{S}' superficie nel tubo di flusso. Visto che $\vec{j} \cdot d\vec{S}' = J dS'_n$ con $dS'_n = dS' \cos \alpha^{15}$, allora $J dS'_n d\vec{l}' = \vec{j} dS'_n d\vec{l}' = \vec{j} d\tau'$:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (2.1.15)$$

2.1.5 II equazione di Maxwell

Spira non filiforme \rightarrow legge di Biot-Savart non filiforme; il termine $\Delta\vec{r}/|\Delta\vec{r}|^3 = -\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r}$. Si usa la relazione $\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f\vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla} f \times \vec{v}$ e si ottiene un termine contenente $\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}') = 0$ perché \vec{j} dipende da \vec{r}' , non da \vec{r} . Allora:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\Delta r} d\tau' = \vec{\nabla} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\Delta r} d\tau' \right] \quad (2.1.16)$$

¹⁵Angolo fra \vec{j} e $d\vec{S}'$.

visto che rotore e integrale agiscono su coordinate diverse. Si definisce **potenziale vettore**

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \text{ (non filiformi)} \\ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{l'} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ (filiformi)}\end{aligned}\quad (2.1.17)$$

Questo vuol dire che

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.1.18)$$

Visto che la divergenza di un rotore è nulla, allora si ha la **II equazione di Maxwell**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) d\tau = 0 \quad (2.1.19)$$

Sulla destra è la forma integrale.

2.1.6 IV equazione di Maxwell

Si calcola

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \Delta \int_{\tau'} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\Delta r} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \vec{j}(\vec{r}') \Delta \left(\frac{1}{\Delta r} \right) d\tau'\end{aligned}\quad (2.1.20)$$

essendo $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0^{16}$ e visto che Δ è relativo a variabili diverse da quelle di integrazione. Visto, poi, che $\Delta \frac{1}{\Delta r} = 0$, si ottiene la **quarta equazione di Maxwell**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (2.1.21)$$

che vale in ogni punto in cui $\vec{j} = 0$, cioè in cui non vi è flusso di cariche.

Ora si considera il caso particolare $|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{r} \simeq \vec{r}'$. Ripetendo il calcolo per un volume piccolo ω attorno a \vec{r} , si può approssimare $\vec{r}' \simeq \vec{r}$ e $\vec{j}(\vec{r}') \simeq \vec{j}(\vec{r})$, quindi

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) \int_{\omega} \Delta \frac{1}{\Delta r} d\tau' \quad (2.1.22)$$

Sostituendo $\Delta \frac{1}{\Delta r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r}$ e usando il teorema della divergenza:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) \int_{\Sigma} \frac{\Delta \vec{r} \cdot d\vec{\Sigma}}{\Delta r^3} \quad (2.1.23)$$

¹⁶Non si dimostra, ma è legato al fatto che $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ nel caso stazionario.

con Σ superficie che contorna ω e $\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r} = -\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r^3}$. Usando $\Delta \vec{r} \cdot d\vec{\Sigma} = \Delta r d\Sigma \cos \theta = \Delta r d\Sigma_n$ e $\frac{d\Sigma_n}{\Delta r^2} \equiv d\Omega$ angolo solido:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) \int_{\Omega} d\Omega \\ &= \mu_0 \vec{j}(\vec{r})\end{aligned}\quad (2.1.24)$$

valida nel vuoto e per correnti stazionarie.

TEOREMA 2.2 — TEOREMA DI AMPÈRE.

Attraverso una superficie \vec{S} con contorno I vale:

$$\oint_I \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (2.1.25)$$

con I correnti che scorrono attraverso \vec{S} . Il segno è positivo se il verso della corrente è concorde con quello di \vec{S} .

Dimostrazione. Si integra su S la IV equazione:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (2.1.26)$$

con correnti ortogonali alla superficie nel punto di attraversamento ($\Rightarrow \vec{j} \cdot d\vec{S} = j dS$). Rimane da applicare il teorema di Stokes al primo membro. ■

2.1.7 Scelta di Gauge per il potenziale vettore

\vec{A} non è univocamente definito perché $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. \vec{A}' è una **trasformazione di Gauge** di \vec{A} che non cambia la sua definizione.

Nella dimostrazione della IV equazione di Maxwell, si è usata la **Gauge di Coulomb** per cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Per questa, si ha, usando la IV equazione di Maxwell:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}_{=0}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \\ \Rightarrow \Delta \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}\end{aligned}\quad (2.1.27)$$

Questa è l'**equazione di Poisson** per il potenziale vettore.

2.1.8 Solenoidi

Solenoido con N spire, lunghezza l e corrente I . Si prende $n = N/l$ e R raggio. Campo magnetico lungo l'asse passante per il centro della spira. Nella sezione, si prende x che individua il punto P (sull'asse x) in cui calcolare \vec{B} , ξ individua la coppia di punti in cui la spira entra e poi esce, che ha spessore $d\xi$. La distanza di questa coppia da P è $x - \xi$.

Il contributo al campo di $d\xi$ si trova tramite $dI = nd\xi I$ per cui $|d\vec{m}| = \pi R^2 dI$ da cui

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|d\vec{m}|}{(R^2 + (x - \xi)^2)^{3/2}} = n \frac{\mu_0 R^2 I}{2 [R^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}} d\xi \\ \Rightarrow B &= \int_0^l n \frac{\mu_0 R^2 I}{2 [R^2 + (x - \xi)^2]^{3/2}} d\xi = n \frac{\mu_0 I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

con θ_1, θ_2 angoli che individuano, rispettivamente, l'inizio e la fine del solenoide a partire da P .

Ora si considera un **solenoido infinito**, approssimazione di $l \gg R$; in questo caso $\theta_1 \simeq 0$ e $\theta_2 \simeq \pi$ quindi $\vec{B} = n\mu_0 I \hat{x}$. Questa approssimazione è valida per P lontano dai bordi.

Si vede cosa succede per P non sull'asse x . Se P interno al solenoide, per un rettangolo di lato maggiore a e inferiore r posto con lato maggiore sulle x si ha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ perché non ci sono correnti concatenate:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 a - B(r) a = 0 \Rightarrow B_0 = B(r) \quad (2.1.29)$$

Ad una distanza r dall'asse x , il campo è uniforme pari a B_0 purché $r \leq R$.

Fuori dal solenoide, si prende un rettangolo di lato maggiore a posto parallelo a x e all'interno del solenoide, con lato opposto fuori. Per il teorema di Ampère

$$\oint_{\gamma'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 a - B_{\text{ext}} a = \mu_0 I \quad (2.1.30)$$

con B_{ext} campo all'esterno da determinare e I corrente concatenata. Visto che $I = naI$, allora $B_0 - B_{\text{ext}} = \mu_0 nI \Rightarrow B_{\text{ext}} = 0$ perché $B_0 = \mu_0 nI$.

Nella realtà (solenoido finito) è presente un campo esterno e quello interno non è uniforme; lungo asse x , ha modulo diverso rispetto a quanto trovato.

2.1.9 Potenziale magnetostatico

Si può definire in regioni D semplicemente connesse per cui $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$. Si trova che il potenziale è:

$$\varphi = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \Rightarrow \vec{B} = -\vec{\nabla} \varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \Omega \quad (2.1.31)$$

con Ω angolo solido formato dai segmenti tracciati da P verso la spira che genera il campo. In funzione di \vec{r} :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.1.32)$$

2.1.10 Forza esercitata fra due circuiti

Due circuiti, 1 e 2, percorsi da corrente; tratto $d\vec{l}_1$ in P_1 e $d\vec{l}_2$ in P_2 uniti da \vec{r}_{12} da 1 verso 2. $d\vec{F}_{12}$ forza su $d\vec{l}_2$ a causa di $d\vec{l}_1$:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(P_2) = I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \\ \Rightarrow \vec{F}_{12} &= \oint_{l_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Vale $d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}) = (d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1) \vec{r}_{12}$, dove il primo è nullo:

$$\oint_{l_1} d\vec{l}_1 \oint_{l_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = - \oint_{l_1} d\vec{l}_1 \oint_{l_2} \vec{\nabla} \frac{1}{r_{12}} \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

Il risultato è:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (2.1.34)$$

2.1.11 Effetto Hall

Parallelepipedo conduttore percorso da corrente uniforme in campo esterno \vec{B} . Lati pari a b , altezze pari ad a . Portatori di carica soggetti a $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$. Gli elettroni sono spinti verso la faccia inferiore \rightarrow squilibrio di carica \rightarrow si genera campo elettrostatico \vec{E}_s che esercita una forza opposta a quella di Lorentz. L'equilibrio è dato da: $qvB = qE_s \Rightarrow E_s = vB$.

La differenza di potenziale fra le due facce è $\Delta V_H = -E_s a = -v_d B$. Corrente uniforme $\Rightarrow I = j a b = n q v_d a b \Rightarrow v_d = \frac{I}{n q a b}$, da cui:

$$\Delta V_H = -\frac{1}{n q} \frac{I B}{b} \equiv -R_H \frac{I B}{b}, \quad R_H = \frac{1}{n q} \quad (2.1.35)$$

2.2 Magnetismo nella materia

2.2.1 Caratterizzazione del magnetismo nella materia

Materia in campo \vec{B} uniforme di un solenoide \rightarrow azione meccanica di repulsione o attrazione a seconda del tipo di sostanza.

- **Diamagnetiche:** respinte debolmente dall'interno.
- **Paramagnetiche:** attratte debolmente all'interno.
- **Ferromagnetiche:** fortemente attratte all'interno.

Modello Rutherford per idrogeno \rightarrow singolo elettrone in moto rotatorio attorno a protone. Forza di Coulomb: $\vec{F}_C = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \hat{r} \equiv$ forza attrazione percepita dall'elettrone. Condizione di equilibrio in orbita:

$$m_e \omega^2 r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi\epsilon_0 m_e r_0^3}$$

A questo moto dell'elettrone con periodo T corrisponde una corrente atomica $I_a = e/T$, per cui si ha momento magnetico $m = I_a S = I_a \pi r_0^2$.

Nella materia, si definisce la densità di correnti microscopiche \vec{j}_m legate al moto degli elettroni, per cui le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Inoltre, per porzione $d\tau$ di volume, si definisce la **magnetizzazione**:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \sum_i \vec{m}_i \equiv \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta\tau} \langle \vec{m} \rangle \quad (2.2.2)$$

2.2.2 Densità di correnti microscopiche

In materiale di volume τ , si prende $d\tau'$ in posizione \vec{r}' ; si calcola \vec{A} nel punto \vec{r} .
Se $\vec{r} \gg \vec{r}'$ (non dimostrato):

$$d\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS$$

dove si è usato $\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f\vec{\nabla} \times \vec{v} + \vec{\nabla}f \times \vec{v}$ e $\int_{\tau} \vec{\nabla} \times \vec{v} d\tau = -\oint_S \vec{v} \times d\vec{S}$ con S che racchiude τ . Confrontando questa espressione di \vec{A} con

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

deve valere

$$\begin{cases} \vec{j}_{mv} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ \vec{j}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Per \vec{M} uniforme, si ha $\vec{j}_{mv} = 0$.

2.2.3 Campo ausiliario

II e IV equazione di Maxwell non valide all'interfaccia perché \vec{B} discontinuo. All'interno della materia $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_{mv}) = \mu_0\vec{j} + \mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{M})$. Si definisce campo ausiliario \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0\vec{M}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (2.2.4)$$

con \vec{j} riferito a correnti macroscopiche.

TEOREMA 2.3 — TEOREMA DI AMPÈRE PER \vec{H} .

Forma integrale della IV equazione:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{conc}} \quad (2.2.5)$$

con I_{conc} correnti concatenate a l . Per trovarla, basta integrare su superficie S concatenata a l e usare Stokes sul primo membro.

Nei mezzi omogenei e isotropi, $\vec{H} \parallel \vec{B}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Inoltre, questo è corretto per diamagnetici e paramagnetici, mentre per i ferromagnetici $\mu = \mu_0 \mu_r$ è funzione di \vec{B} . Confrontando questa espressione con la definizione di \vec{H} si ottiene:

$$\mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \Rightarrow \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} \equiv \chi \vec{H} \quad (2.2.6)$$

con χ suscettività magnetica. Questo è valido solo per mezzi omogenei e isotropi.

2.2.4 Campi all'interfaccia

Interfaccia fra mezzi 1 e 2 in assenza di correnti macroscopiche. Cilindro con altezza trascurabile, si usa $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow B_{1\perp} = B_{2\perp}$.

Rettangolo di altezza trascurabile e $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ (niente correnti macroscopiche) implica $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow H_{1\parallel} = H_{2\parallel} \Rightarrow B_{1\parallel}/\mu_1 = B_{2\parallel}/\mu_2$. Mettendo insieme le due, si ottiene

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (2.2.7)$$

2.2.5 Campo locale

Cavità sferica in un certo materiale; campo al centro della sfera è $\vec{H}_{sf} = \vec{H} + \frac{1}{3} \vec{M}$, $\vec{M} = \chi \vec{H}$. Quello locale è $\vec{H}_l = \vec{H}_{sf} + \sum_i \vec{H}_i \equiv \vec{H}_{sf}^{17}$ per disposizione simmetrica delle molecole nella sfera.

2.2.6 Diamagnetismo

→ Magnetizzazione per deformazione, sempre presente. Un elettrone in moto attorno a nucleo sottoposto a $\vec{B}_l = \mu_0 \vec{H}_l$. \vec{L} momento angolare elettrone → $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B}_l$. $\dot{\vec{L}} \perp \vec{L} \Rightarrow$ mom. angolare cambia solo in direzione e $\vec{B}_l \parallel \hat{z} \Rightarrow \dot{L}_z = 0$. Allora \vec{L} ruota attorno a \hat{z} con frequenza $\vec{\omega}_L$ (freq. di Larmor) con

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_L \times \vec{L}, \quad \vec{\omega}_L = \frac{e}{2m_e} \vec{B}_l$$

A questa rotazione corrisponde corrente

$$I_L = e \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B_l}{4\pi m_e}$$

¹⁷Gli \vec{H}_i sono i campi generati dalle molecole nella sfera.

Si genera momento magnetico di Larmor $m_L = I_L \pi(\langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2)$; dato che $\langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2 + \langle z \rangle^2 = r_0^2$ ¹⁸ si ha

$$\vec{m}_L = -\frac{e^2 r_0^2}{6m_e} \vec{B}_l$$

Per molecole polielettroniche $r_0^2 \rightarrow Z a^2$ con a^2 non ben definito e Z numero elettroni:

$$\vec{M} = n\vec{m}_L = -\frac{nZ e^2 a^2}{6m_e} \vec{B}_l = -\mu_0 \frac{nZ e^2 a^2}{6m_e} \vec{H}_l \equiv \alpha_d \vec{H}_l \quad (2.2.8)$$

α_d coefficiente di magnetizzabilità per deformazione. Da $\vec{H}_l = \vec{H} + \frac{1}{3}\vec{M}$ si ha:

$$\vec{M} = \frac{3\alpha_d}{3 - \alpha_d} \vec{H} = \chi_m \vec{H} \quad (2.2.9)$$

Si ha $|\alpha_d| \ll 1 \Rightarrow \vec{H}_l \simeq \vec{H} \Rightarrow \chi_m \simeq \alpha_d$. Questa suscettività magnetica è indipendente da \vec{H} e dalla temperatura.

2.2.7 Paramagnetismo

→ Risposta di certi materiali a magnetizzazione per orientamento, come per ferromagnetismo. Questi materiali hanno dipoli magnetici \vec{m}_0 orientati a caso e si allineano con campo locale \vec{B}_l perché $U = -\vec{m}_0 \cdot \vec{B}_l$. A temperatura $T \rightarrow$ perturbazione posizione di equilibrio per agitazione termica \rightarrow si usa la distribuzione di Boltzmann. La probabilità che \vec{m}_0 sia orientato in $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ è $dW = W(U)d\Omega$. Per trovare la costante di normalizzazione:

$$\int_{\Omega} W d\Omega \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int_0^\pi e^{-\frac{U}{\kappa_B T}} 2\pi \sin \theta d\theta} \quad (2.2.10)$$

perché non vale più $\kappa_B T \gg U$. Allora:

$$\begin{aligned} \langle m_{0z} \rangle &= \int_{\Omega} m_{0z} W(U) d\Omega = \frac{\int_0^\pi m_0 \cos \theta e^{-\frac{m_0 B_l \cos \theta}{\kappa_B T}} 2\pi \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{-\frac{m_0 B_l \cos \theta}{\kappa_B T}} 2\pi \sin \theta d\theta} \\ \Rightarrow \langle m_{0z} \rangle &= m_0 \frac{\int_{-1}^{+1} e^{yx} x dx}{\int_{-1}^{+1} e^{yx} dx} = m_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \equiv L(y) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

¹⁸Non si ha motivo di immaginare che questi valori medi siano diversi l'uno dall'altro.

con $\cos \theta = x$, $\frac{m_0 B_l}{\kappa_B T} = y$. $L(y)$ è detta **funzione di Langevin**. Per campi sufficientemente deboli, $L(y) \simeq \frac{m_0}{3} y$, quindi:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= n \langle \vec{m}_0 \rangle = n \langle m_{0z} \rangle \hat{z} = \frac{nm_0 y}{3} \hat{z} = \frac{nm_0^2}{\kappa_B T} \vec{B}_l = \frac{nm_0^2 \mu_0}{3\kappa_B T} \vec{H}_l \equiv \alpha_p \vec{H}_l \\ \Rightarrow \vec{M} &= \alpha_p \vec{H}_l = \alpha_p \left(\vec{H} + \frac{1}{3} \vec{M} \right) \Rightarrow \vec{M} = \frac{3\alpha_p}{3 - \alpha_p} \vec{H} \equiv \chi_m \vec{H}\end{aligned}\quad (2.2.12)$$

In questo caso, $\alpha_p > 0$, $\alpha_p \ll 1 \Rightarrow \chi_m \simeq \alpha_p$.

2.2.8 Ferromagnetismo

→ Risposta di certi materiali a campo magnetico. Questi rispondono con funzioni complicate a campo esterno: $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ segue un **ciclo di isteresi**. Aumentando \vec{H} per la prima volta con $\vec{B} = 0$, si segue la **curva di prima magnetizzazione** fino ad andamento lineare a valore \vec{H}_M ; diminuendo \vec{H} si segue un'altra curva fino a intercetta con \vec{B} in B_r , **campo magnetico residuo** e si arriva a $\vec{H} = 0$ in $-H_C$ **campo di coercizione** (campo necessario per avere nuovamente $B = 0$ nel materiale). Scendendo ancora, si arriva a andamento lineare e, aumentando nuovamente H , si segue una curva simmetrica a quella appena percorsa.

In formule:

- per $H > H_M \Rightarrow B \simeq \mu_0 H$ e M arriva a saturazione;
- $B_R = \mu_0 M_R$, M_R **magnetizzazione residua**;
- applicando $-H_C \Rightarrow \mu_0(-H_C + M) = 0 \Rightarrow H_C = M$.

Per materiali ferromagnetici si usa $\mu_d = \frac{dB}{dH}$ come coeff. di proporzionalità: $\vec{B} = \mu_d \vec{H}$. Microscopicamente $\vec{H}_l = \vec{H} + \gamma \vec{M}$ per $\gamma \sim 10^3 - 10^4$ e $L(y)$ non si può approssimare al primo ordine. Per $T > T_C$ **temperatura di Curie** → mat. ferromagnetici hanno stesso comportamento dei paramagnetici ⇒ niente isteresi, con $\gamma = \frac{3\kappa_B T_C n}{\mu_0 M_S^2}$ e M_S **magnetizzazione di saturazione**. Allora se $T > T_C \Rightarrow y \ll 1$ e $M(y) \simeq nm_0 \frac{y}{3}$, da cui

$$\vec{M} = \frac{T_C}{\gamma T} (\vec{H} + \gamma \vec{M}) \Rightarrow \vec{M} = \frac{T_C}{\gamma(T - T_C)} \vec{H} \equiv \vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.2.13)$$

2.3 Induzione elettromagnetica

2.3.1 Legge di Faraday-Neumann-Lenz e III equazione di Maxwell

→ Variazione flusso di \vec{B} concatenato a circuito \Rightarrow forza elettromotrice:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}, \quad \varepsilon = \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \quad (2.3.1)$$

dove $\vec{E}_i = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ ¹⁹ è il **campo elettromotore indotto**. Forza elettromotrice indotta \rightarrow campo elettromotore indotto \rightarrow corrente indotta nel circuito (che concatena le linee di \vec{B}) \rightarrow campo magnetico indotto che si oppone al primo.

In **forma locale**, la legge è data dalla **III equazione di Maxwell**:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3.2)$$

Dimostrazione. Dimostrazione per circuito rigido in quiete. Si richiede $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \neq 0$ così si genera $\vec{E}_i = \vec{E}$ (velocità trascinamento nulla) quindi

$$\varepsilon = \oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

dove si è usato che S non cambia perché il circuito è assunto rigido. Usando Stokes sulla circuitazione

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad \forall S$$

■

2.3.2 Autoinduttanza

Circuito $I(t)$ lentamente variabile²⁰ $\rightarrow \vec{B}(t)$ generato dal circuito percorso da $I(t)$ con $\Phi(\vec{B}) = LI(t)$ con L **coefficiente di autoinduzione**, o **induttanza**. Allora si genera **forza elettromotrice auto-indotta**

$$\varepsilon_a = -\frac{d\Phi_a(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt} \quad (2.3.3)$$

¹⁹La velocità è di solo trascinamento del circuito perché quella di deriva è tale da $(\vec{v}_d \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0$ perché $\vec{v}_d \times \vec{B} \perp \vec{B}$, visto che $\vec{v}_d \parallel d\vec{l}$.

²⁰Nel senso che ogni punto del circuito deve vedere la stessa I a ogni istante.

2.3.3 IV equazione di Maxwell non-stazionaria

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ valida solo per caso stazionario: $0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \neq 0$.

L'equazione nel caso non stazionario è:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.3.4}$$

Dimostrazione. Dall'equazione di continuità:

$$\begin{aligned}0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0\end{aligned}$$

Si definisce **densità di corrente di spostamento** $\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. In generale, vale quella del rotore di \vec{H} perché nel vuoto $\vec{M} = \vec{P} = 0$. ■

2.3.4 Mutua induzione

Due circuiti, 1 e 2, percorsi da correnti $I_1(t)$, $I_2(t)$; $I_1(t)$ produce $\vec{B}_1(t)$ e $\Phi_2(\vec{B}_1) \propto \vec{B}_1(t) \propto I_1(t)$ con $\Phi_2(\vec{B}_1) = M_{21} I_1(t)$, M_{ij} **coefficiente di mutua induzione**. In 2 allora:

$$\epsilon_{m,2} = -\frac{d\Phi_2(\vec{B}_1)}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}\tag{2.3.5}$$

Lo stesso si trova per 1. Inoltre $M_{ij} = M_{ji}$.

Dimostrazione. Usando Stokes:

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{l_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 \quad (2.3.6)$$

Essendo $M_{21} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{I_1}$:

$$M_{21} = \frac{1}{I_1} \oint_{l_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\vec{l}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1 l_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (2.3.7)$$

che è simmetrico per scambio di indici. ■

2.3.5 Energia magnetica di un'induttanza

L'espressione dell'energia magnetica, valida solo per induttanze lineari (cioè tali che $\Phi(\vec{B}) = LI$ con L costante), è:

$$U_M = \frac{1}{2} LI^2 \quad (2.3.8)$$

Dimostrazione. Circuito RL con switch abbassato a $t = 0 \rightarrow f - L \frac{dI}{dt} = RI$.
Si moltiplica per $dQ = Idt$:

$$f dQ = f I dt = RI^2 dt + LI dI$$

$f dQ$: energia erogata dal generatore di fem f ; $RI^2 dt$ energia dissipata per effetto Joule nell'intervallo dt ; $dU_M \equiv LI dI$ energia fornita all'induttanza per far variare $I \rightarrow I + dI$. Integrando l'ultima da 0 (corrente iniziale) a I (corrente a regime):

$$U_M = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2 \quad \blacksquare$$

Espressione di **densità di energia magnetica** valida in generale:

$$du_M = H dB \Rightarrow du_M = \frac{B}{\mu} dB \quad (2.3.9)$$

con $H = B/\mu$. Assumendo μ indipendente da B :

$$u_M = \frac{1}{2\mu} B^2 \quad (2.3.10)$$

Dimostrazione. Si considera solenoide infinito. Visto che $LI = \Phi_{\text{tot}}(\vec{B}) \Rightarrow LI dI = d\Phi_{\text{tot}}(\vec{B}) = Nd\Phi(\vec{B})^a$; allora $dU_M = LI dI = INS dB = InSl dB$ dove S area spira, N numero spire, $n = N/l$ densità di spire e $d\Phi(\vec{B}) = SdB$.

Allora si definisce $du_M = \frac{dU_M}{Sl}$ con $nI = H$ per solenoide infinito. ■

^aIn questo caso, $\Phi(\vec{B})$ è il flusso del campo magnetico attraverso una sola spira del solenoide.

2.3.6 Energia per circuiti accoppiati

Tutte le seguenti espressioni sono valide solo per mezzi omogenei, isotropi e lineari, cioè senza isteresi o comportamento non lineari. L'energia magnetica per N circuiti accoppiati è:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N M_{ij} I_i I_j \quad (2.3.11)$$

Dimostrazione. Coppia di circuiti RL 1 e 2; per Ohm generalizzata: $f_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = R_1 I_1$ e $f_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = R_2 I_2$. Si moltiplicano per $dQ_1 = I_1 dt$ e $dQ_2 = I_2 dt$ e si sommano:

$$(f_1 I_1 + f_2 I_2) dt = (I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2) dt + (L_1 I_1 dI_1 + L_2 I_2 dI_2) + M(I_1 dI_2 + I_2 dI_1)$$

L'ultima è:

$$dU_M = d \left(\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} M_{21} I_1 I_2 \right) \quad (2.3.12)$$

Si integra tra $I_1 = I_2 = 0$ e I_1, I_2 , si usa $M_{ij} \equiv L_{ij}$, $i = j$. ■

Si può riscrivere come

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k \quad (2.3.13)$$

Dimostrazione. Visto che $M_{11} I_1 = L_1 I_1 = \Phi_1(B_1)$ e $M_{12} I_2 = \Phi_1(B_2) \Rightarrow \Phi_1(B_1) + \Phi_1(B_2) = \Phi_1(B_1 + B_2) \equiv \Phi_1$. Allora si sostituisce e si estende a N circuiti. ■

Nel caso stazionario, per N circuiti accoppiati:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau \quad (2.3.14)$$

con τ volume contenente tutti i circuiti.

Dimostrazione. k -esimo circuito ha corrente I_k e sezione σ_k , quindi $dI_k = \vec{j}_k \cdot d\vec{\sigma}_k$. L'energia magnetica complessiva è:

$$\begin{aligned} U_M &= \frac{1}{2} \sum_k I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_k \left[\left(\int_{\sigma_k} \vec{j}_k \cdot d\vec{\sigma}_k \right) \left(\int_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{S}_k \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\left(\int_{\sigma_k} \vec{j}_k \cdot d\vec{\sigma}_k \right) \left(\int_{S_k} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}_k \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left[\left(\int_{\sigma_k} \vec{j}_k \cdot d\vec{\sigma}_k \right) \left(\oint_{l_k} \vec{A} \cdot d\vec{l}_k \right) \right] \end{aligned}$$

con \vec{B} campo magnetico totale in cui sono immersi i circuiti.

Vale $\vec{j}_k \cdot d\vec{\sigma}_k = d\sigma_k d\vec{l}_k = d\vec{\tau}_k$ con $j_k d\vec{\tau}_k = \vec{j}_k d\tau_k$. Si può espandere l'integrale su tutto τ perché fuori dal circuito k -esimo, $j_k = 0$, da cui l'espressione cercata. ■

Nel caso non-stazionario è valida:

$$U_M = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} d\tau \Rightarrow u_M = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (2.3.15)$$

dove l'integrale è su tutto lo spazio.

Dimostrazione. Nell'espressione per il caso stazionario, si manda $\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_{\tau} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{A} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A} d\tau$$

Si usa $\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{A} - \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ e il teorema della divergenza su $\vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \vec{A})$; estendendo $\tau \rightarrow \infty$, quest'ultimo va a 0, mentre $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ porta all'espressione cercata. ■

2.3.7 Azioni meccaniche su circuiti accoppiati

N circuiti accoppiati interagiscono tramite campi magnetici \rightarrow esercitano forze l'uno sull'altro. Tramite i lavori virtuali (non dimostrato) la forza agente sul

k -esimo è:

$$f_{k,x} = \left. \frac{\partial U_M}{\partial x^{(k)}} \right|_{I \text{ cost.}} ; f_{k,y} = \left. \frac{\partial U_M}{\partial y^{(k)}} \right|_{I \text{ cost.}} ; f_{k,z} = \left. \frac{\partial U_M}{\partial z^{(k)}} \right|_{I \text{ cost.}} \quad (2.3.16)$$

dove $x^{(k)}$ coordinata x del circuito k -esimo. Visto che $U_M = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j$:

$$\left. \frac{\partial U_M}{\partial x^{(k)}} \right|_{I \text{ cost.}} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial M_{ik}}{\partial x^{(k)}} I_i I_k + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial M_{ki}}{\partial x^{(k)}} I_k I_i = \sum_i \frac{\partial M_{ik}}{\partial x^{(k)}} I_i I_k$$

L'autoinduzione M_{kk} non varia al variare delle coordinate perché dipende dalle caratteristiche del circuito; sotto l'assunzione di rigidità, la derivata è nulla.

Indicando con U_{acc} l'**energia magnetica di accoppiamento**:

$$f_{k,x} = \left. \frac{\partial U_{\text{acc}}}{\partial x^{(k)}} \right|_{I \text{ cost.}} = \sum_{i \neq k} \frac{\partial M_{ik}}{\partial x^{(k)}} I_i I_k \quad (2.3.17)$$

3 Elettromagnetismo

3.1 Soluzione delle equazioni di Maxwell

3.1.1 Equazioni nel vuoto

Nel vuoto $\rho, \vec{j} = 0$; le equazioni di Maxwell sono:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0; & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

Le equazioni per \vec{E} e \vec{B} sono

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (3.1.2)$$

con $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Dimostrazione. Si trovano quelle per \vec{E} ; i passaggi per \vec{B} sono analoghi. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}^a$. Allo stesso tempo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$



^aNel vuoto, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

Queste non sono equivalenti alle equazioni di Maxwell perché aumentano di 1 il grado dell'equazione e introducono soluzioni *spurie*: \vec{E}, \vec{E}' soluzioni delle eq. di Maxwell, $\vec{E} + \vec{E}'$ non le risolve mentre risolve l'equazione di d'Alembert.

3.1.2 Equazioni nella materia

Assumendo $\vec{j}_{\text{lib}} = 0$ e $\rho_{\text{lib}} = 0$ si ha

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0; & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0; & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.1.3)$$

Per mezzo lineare $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ ²¹. Trattando **solo onde monocromatiche** e fissando ϵ_r, μ_r a tale frequenza:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

La velocità di propagazione non è più c , ma $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$, con $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ **indice di rifrazione del mezzo**.

3.1.3 Analisi dell'equazione della corda vibrante*

Si risolve $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in due modi.

- Cambio di variabile.

$$\begin{cases} a = x - vt \\ b = x + vt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial a} \right) \end{cases}$$

Sostituendo nel d'Alambertiano $\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 0 \Rightarrow u(x, t) = U(a) + V(b)$.

- Separazione delle variabili.

$$u(x, t) = A(t)B(x) \Rightarrow B(x) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2 A(t) \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2 \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

²¹Inserendo queste nell'equazione delle onde, si finisce per portare fuori ϵ_r, μ_r sotto l'assunzione di indipendenza temporale. Questa assunzione si trasforma in indipendenza dalla frequenza in trasformata di Fourier, cosa che non è affatto vera in generale, a meno che non si assumano onde monocromatiche così da poter fissare i valori di $\epsilon_r(\omega_0), \mu_r(\omega_0)$.

Si assume $\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 \Rightarrow A(t) = A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}$; si prende poi $\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = -k^2 \Rightarrow B(x) = B_+ e^{ikx} + B_- e^{-ikx}$. Inoltre $-\omega^2 = v^2(-k^2) \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$. Essendo u reale $\Rightarrow u(x, t) = \Re \{ A(t)B(x) \}$, da cui

$$u(x, t) = u_+ \cos(\omega t + kx) + u_- \cos(\omega t - kx) = u_- \cos(k(x - vt)) + u_+ \cos(k(x + vt))$$

Date le condizioni iniziali $u(x, 0) = f_0(x)$, $\partial_t u(x, 0) = 0$ si ha $u(x, 0) = u_-(x) + u_+(x) = f_0(x)$ e $u'_+(x) - u'_-(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(u_+ - u_-) = 0 \Rightarrow u_+(x) - u_-(x) = C \stackrel{!}{=} 0$. Allora

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f_0(x - vt) + f_0(x + vt)] \quad (3.1.5)$$

In presenza di condizioni al contorno del tipo $u(0, t) = u(l, t) = 0$, $\forall t$ (cioè estremi fissi), usando la separazione delle variabili si trova:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left[a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}vt\right) + b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}vt\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}vt + \theta_n\right) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Se a $t = 0$, $u_t(x, 0) \Rightarrow \theta_n = 0, \forall n$.

3.1.4 Soluzione per simmetria piana

Nel vuoto, assumendo invarianza sul piano yz , l'onda si propaga lungo x e $\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ perché se ci fosse variazione lungo altri assi, non si avrebbe simmetria $\Rightarrow \vec{E}, \vec{B}$ dipendono da t, x . Per il campo elettrico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Per il campo magnetico:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Si conclude che $E_x = B_x = 0$ ²² e che E_y dipende solo da B_z , mentre E_z solo da B_y . Si considerano solo **onde piane polarizzate linearmente** tali che solo $E_y, B_z \neq 0$ ($E_z = 0$); derivando nuovamente rispetto a x :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (3.1.9)$$

Analogo per B_z . Per $a = x \pm ct$:

$$\frac{dE_y}{da} \equiv \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = \mp c \frac{dB_z}{da} \Rightarrow E_y = \mp c B_z + \text{cost.} \Rightarrow \vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$$

con \vec{c} diretto lungo la direzione di propagazione. La costante si rimuove per lo stesso motivo di $E_x = B_x = 0$. In un mezzo materiale, sotto stesse ipotesi, $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$, con $v = c/n$.

Prendendo \vec{k} orientato verso la direzione di propagazione:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{E}_0 || \hat{y} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad \vec{B}_0 || \hat{z} \end{cases}$$

Essendo $k = \omega/c$ e $T = 2\pi/\omega$, allora $k = 2\pi/\lambda$, con λ **lunghezza d'onda**.

3.1.5 Soluzione per simmetria sferica

Forma generale equazione onde $\rightarrow \nabla^2 \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$. Simmetria sferica $\Rightarrow \xi \equiv \xi(r) \Rightarrow$ l'equazione si riduce:

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1.10)$$

²²Nessun senso fisico nel considerare il valore di un campo costante e uniforme e al contempo non nullo.

Assunzione che la soluzione sia della forma $\xi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{f(r, t)}{r} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{f(r, t)}{r} \right) \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(-\frac{f}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\cancel{\frac{\partial f}{\partial r}} + r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cancel{\frac{\partial f}{\partial r}} \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Si è assunto $r \neq 0$ e si trova forma dell'equazione della corda. Soluzione generale del tipo $f(r, t) = f_1(r + ct) + f_2(r - ct)$, ma si tiene solo f_2 che è quella che si allontana dalla sorgente, mentre l'altra si avvicina e non ha senso fisico. Allora $\xi(r, t) = \frac{f_2}{r}$ quindi

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} \quad (3.1.12)$$

Onda piana \rightarrow approssimazione onda sferica per $r \gg 1$.

3.1.6 Soluzione per pacchetto gaussiano in mezzo non-dispersivo

\rightarrow Rappresentazione realistica di un'onda piana. Descritto da $f(x) = e^{ik_0 x} e^{-x^2/L}$, con L larghezza pacchetto. Si assumono **tante oscillazioni** nel pacchetto $\Leftrightarrow k_0 L \gg 1$.

Si sceglie condizione iniziale $\xi(x, 0) = f(x)$; in trasformata di Fourier:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\xi}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega dk$$

Si prende un mezzo tale che $\omega = kv$, con v costante così da integrare solo rispetto a k :

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\xi}(k) e^{ik(x-vt)} dk$$

In $t = 0$, $\hat{\xi}(k) \equiv \hat{f}(k)$ perché $\xi(x, 0) \equiv f(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{L}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}} \\ \Rightarrow \xi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}} e^{ik(x-vt)} dk \end{aligned}$$

Moltiplicando per $1 = e^{-ik_0(x-vt)} e^{ik_0(x-vt)}$, aggiungendo e sottraendo $\left(\frac{-i(x-vt)}{L} \right)^2$

all'esponente e rimuovendo traslazioni, si trova

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \frac{L}{2\sqrt{\pi}} e^{ik_0(x-vt)} e^{-\frac{(x-vt)^2}{L^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2 L^2}{4}} dk \\ &= e^{ik_0(x-vt)} e^{-\frac{(x-vt)^2}{L^2}}\end{aligned}\quad (3.1.13)$$

con l'integrale che fa $2\frac{\sqrt{\pi}}{L}$. La velocità nel primo esponentiale è **di fase**; quella del secondo è di **gruppo**. Nel caso di **mezzi non dispersivi** $v_f = v_g$; in generale:

$$\begin{cases} \omega \equiv \omega(k) \text{ funzione complessa} \\ v_f = \frac{\omega(k)}{k}; \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \end{cases}\quad (3.1.14)$$

3.1.7 Soluzione per pacchetto gaussiano in mezzo dispersivo

Mezzo dispersivo $\rightarrow \omega \equiv \omega(k)$:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\xi}(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}} e^{ikx - i\omega(k)t} dk$$

Assumendo ancora $k_0 L \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{L} \ll k_0 \rightarrow$ si sviluppa l'esponentiale attorno a k_0 ; per $\omega(k)$:

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0)$$

Inserendolo nell'espressione di ξ e rimaneggiando gli esponentziali:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{L}{\sqrt{2}} e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2 L^2}{4}} e^{i(k-k_0)\left(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0)t\right)} dk \\ &= e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t} e^{-\frac{1}{L^2} \left(x - \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0)t\right)^2}\end{aligned}\quad (3.1.15)$$

Questa volta $v_f = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$ e $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0)$. Espansione al primo ordine \rightarrow il pacchetto non si allarga.

3.1.8 Velocità di fase e di gruppo

Nei mezzi materiali dispersivi $\omega(k) = \frac{ck}{n(k)} \Rightarrow v_f \neq v_g$. Da questa si ha $v_f = \frac{c}{n(k)}$ che ammette, per $n < 1$, $v_f > c$ ²³. Velocità di gruppo data da:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{ck}{n} \right) = \frac{c}{n} - ck \frac{1}{n^2} \frac{\partial n}{\partial k} = \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial k} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial k} \left(1 + \frac{ck}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) = \frac{c}{n} \Rightarrow \left(n + \frac{ck}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \\ &\Rightarrow v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}} \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Dispersione normale quando $\frac{dn}{d\omega} > 0 \Rightarrow v_f > v_g$; **dispersione anomala** quando $\frac{dn}{d\omega} < 0 \Rightarrow v_g > v_f$ e si può avere $v_g > c$ ²⁴.

3.1.9 Trasformazioni di Gauge

\vec{A} potenziale vettore e φ potenziale scalare derivanti da $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Se $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$. Si impone $\vec{E}' = \vec{E}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla} \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi' - \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \psi \stackrel{!}{=} \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \\ &\Rightarrow -\vec{\nabla} \varphi' - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \psi = -\vec{\nabla} \varphi \\ &\Rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

Generica trasformazione di Gauge data da:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases} \quad (3.1.17)$$

Ci si può sempre mettere nella **Gauge di Lorenz** in cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ per semplificare equazioni nel vuoto con sorgenti.

²³Non viola relatività ristretta perché la velocità di fase non trasmette informazioni.

²⁴Neanche v_g trasporta informazioni perché è la velocità dell'involuppo che non coincide con la velocità del segnale.

Dimostrazione. Si assume di non essere nella Gauge di Lorenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(\vec{x}, t)$. Trasformazione di Gauge: $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \beta$, $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \beta}{\partial t}$. Si impone che valga la condizione della Gauge di Lorenz:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \beta) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi - \frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \beta = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \beta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{\equiv -F(\vec{x}, t)} \Rightarrow \nabla^2 \beta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = -F(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

La soluzione β dell'eq. differenziale permette il passaggio nella Gauge di Lorenz. ■

3.1.10 Equazioni nel vuoto con sorgenti

Si dividono le equazioni di Maxwell in omogenee (sinistra) e disomogenee (destra):

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Usando $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Portando tutto da un lato, si ottiene il rotore di un campo vettoriale uguale a zero, per cui si può assumere che derivi da un potenziale scalare φ :

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.1.18)$$

Sostituendo in $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1.19)$$

Invece da $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2}$ con $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, si ottiene:

$$\nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (3.1.20)$$

Mettendosi nella Gauge di Lorenz:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi' - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \varphi - \cancel{\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ e ripetendo lo stesso procedimento per l'altra equazione, si ottengono le seguenti due:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \end{cases} \quad (3.1.21)$$

3.1.11 Potenziali ritardati

Equazioni potenziale scalare e vettore hanno stessa forma \rightarrow si risolve di forma generica:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -S(\vec{x}, t) \quad (3.1.22)$$

dove²⁵

$$S(\vec{x}, t) = \int S(\vec{x}_0, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) d^3 x_0 \quad (3.1.23)$$

a indicare somma di sorgenti puntiformi. La soluzione per una sola sorgente in \vec{x}_0 è ψ_0 che soddisfa

$$\nabla^2 \psi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = -S(\vec{x}_0, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \Rightarrow \psi = \int \psi_0 d^3 x_0$$

e ψ_0 è detto **funzionale di Green**. Per $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$ e ψ_0 deve soddisfare

$$\nabla^2 \psi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \psi_0(\vec{x}, t; \vec{x}_0) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}_0 \quad (3.1.24)$$

²⁵Integrale svolto su tutto lo spazio.

Per $\vec{x} = \vec{x}_0 \rightarrow$ integrale su sfera di raggio R che circonda sorgente:

$$\begin{aligned} \int_{B_R(\vec{x}_0)} \nabla^2 \psi_0 d^3x - \frac{1}{c^2} \int_{B_R(\vec{x}_0)} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} d^3x &= - \int_{B_R(\vec{x}_0)} S(\vec{x}_0, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) d^3x \\ \Rightarrow \int_{B_R(\vec{x}_0)} \nabla_r \left[-\frac{f}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{f'}{r} \right] d^3x - \frac{1}{c^2} \int_{B_R(\vec{x}_0)} \frac{f''}{r} d^3x &= - \int_{B_R(\vec{x}_0)} S(\vec{x}_0, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) d^3x \end{aligned}$$

dove si è usato

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi_0 d^3x = \int \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \frac{f(t-r/c)}{r} \right] d^3x = \int \left(-\frac{f}{r^2} - \frac{1}{c} \frac{f'}{r} \right) \vec{\nabla} \cdot \hat{r} d^3x$$

e $\vec{\nabla} \cdot \hat{r} \equiv \nabla_r$. Si manda $R \rightarrow 0$:

- $\int_{B_R(\vec{x}_0)} \frac{f''}{r} d^3x = \int_0^R \frac{f''}{r} 4\pi r^2 dr \rightarrow 0$;
- $\int_{B_R(\vec{x}_0)} \nabla_r \left[-\frac{f}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{f'}{r} \right] d^3x = \int_{\partial B_R(\vec{x}_0)} \left(-\frac{f}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{f'}{r} \right) \hat{r} \cdot d\vec{S} = \left(-\frac{f}{R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{f'}{R} \right) 4\pi R^2 = -4\pi f - \frac{4\pi}{c^2} f' R \rightarrow -4\pi f$.

Allora

$$-4\pi f = - \int_{B_R(\vec{x}_0)} S(\vec{x}_0, t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) d^3x = -S(\vec{x}_0, t) \Rightarrow f = \frac{S(\vec{x}_0, t)}{4\pi}$$

Sostituendo in ψ_0 e integrando su tutto lo spazio per $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$, si trova:

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \psi_0(\vec{x}, t; \vec{x}_0) d^3x_0 = \int \frac{S(\vec{x}_0, t - |\vec{x} - \vec{x}_0|/c)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_0|} d^3x_0 \quad (3.1.25)$$

I **potenziali ritardati** sono:

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}_0, t - |\vec{x} - \vec{x}_0|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} d^3x_0 \\ \varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}_0, t - |\vec{x} - \vec{x}_0|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} d^3x_0 \end{cases} \quad (3.1.26)$$

3.2 Sviluppo in multipoli per i potenziali ritardati

Integrali dei potenziali ritardati sono difficili da risolvere \rightarrow si approssima il risultato. I potenziali ritardati hanno integrali sulla regione dello spazio che contorna la sorgente (o equivalentemente su tutto lo spazio); qualora non ci fosse dominio definito nell'integrale, si intende tale regione dello spazio.

3.2.1 Condizioni per lo sviluppo

Si assume, per lo sviluppo, che $\frac{d}{r} \ll 1$ e si mostra che è necessario avere $\frac{d}{\lambda} \ll 1$, dove $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$. Sorgente concentrata in volume τ con dimensione caratteristica d e \vec{x}' posizione dell'elemento d^3x' . Visto che $\frac{d}{r} \ll 1 \Rightarrow r \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|$ è circa costante²⁶:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\tau} \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \simeq \frac{1}{4\pi r \epsilon_0 c^2} \int_{\tau} \vec{j}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c) d^3x'$$

Ora si espande \vec{j} , correggendo l'assunzione di r costante al primo ordine. Per farlo, si inizia espandendo prima il tempo ritardato:

$$t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \simeq t - \frac{1}{c} \left(r + \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}'} \right|_{\vec{x}'} \cdot \Delta \vec{x}' \right) = t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot \Delta \vec{x}' \equiv t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r} \cdot \Delta \vec{x}'}{c}$$

dove $\Delta \vec{x}'$ collega \vec{x}' con un altro punto della sorgente. Allora:

$$\vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right) \simeq \vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{r} \cdot \Delta \vec{x}'}{c} \right) \simeq \vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\hat{r} \cdot \Delta \vec{x}'}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right)$$

Essendo $\hat{r} \cdot \Delta \vec{x}' \sim d$ e $\lambda = c/\omega$, allora se \vec{j} varia con una frequenza ω , al secondo ordine si ha $\frac{\hat{r} \cdot \Delta \vec{x}'}{c/\omega} \sim \frac{d}{\lambda}$ da cui si richiede la seconda condizione $\frac{d}{\lambda} \ll 1$. Il primo termine dello sviluppo è \vec{j}_1 ; il secondo è \vec{j}_2 .

3.2.2 Termine di dipolo elettrico

Al primo ordine, si tiene solo \vec{j}_1 :

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \int_{\tau} \vec{j} \left(\vec{x}', t - \frac{r}{c} \right) d^3x' \quad (3.2.1)$$

che è il **termine di dipolo elettrico**. Infatti $j_k = j_i \delta_{ik} = j_i \partial_i x'_k = \partial_i (x'_k j_i) - x'_k \partial_i j_i$ implica²⁷:

$$\int j_k d^3x' = \int \left[\partial_i (x'_k j_i) - x'_k \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right] d^3x' = - \int x'_k \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x' = \int \vec{x}' \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x' = \frac{d}{dt} \int \vec{x}' \rho d^3x' \equiv \dot{\vec{p}}$$

²⁶Si sta assumendo che cambiando \vec{x}' punto della sorgente, la distanza tra quel punto e il punto in cui calcolare i potenziali $|\vec{x} - \vec{x}'| \equiv r$ rimane costante.

²⁷Il primo termine è nullo perché è la divergenza di un termine contenente \vec{j} , usando il teorema della divergenza, si ha un integrale di superficie in cui la corrente non c'è perché la sorgente è contenuta nel volume.

da cui

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \quad (3.2.2)$$

Essendo nella Gauge di Lorenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$, supponendo $\vec{p} = p\hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 = \frac{\partial A_1}{\partial z}$, si ricava:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[\vec{p} + \frac{r}{c}\dot{\vec{p}}\right]_{t-r/c} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (3.2.3)$$

Dimostrazione. Usando $\vec{A} \parallel \vec{p} \parallel \hat{z}$, che $\partial_z \dot{\vec{p}}(t - r/c) = (\partial_r \dot{p})(\partial_z r) = -\frac{1}{c} \ddot{p} \frac{z}{r} \equiv -\frac{1}{rc} \ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}$ e che $\partial_z r = \frac{\hat{z} \cdot \vec{r}}{r}$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\partial_z \dot{p})r - \dot{p}(\partial_z r)}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\frac{1}{c}\ddot{\vec{p}} + \frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\right]_{t-r/c} \cdot \vec{r}}{r^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\frac{r}{c}\ddot{\vec{p}} + \dot{\vec{p}}\right]_{t-r/c} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Essendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[\frac{r}{c}\ddot{\vec{p}} + \dot{\vec{p}}\right]_{t-r/c} \cdot \vec{r}}{r^3}$. Rimane da integrare rispetto al tempo. ■

Il campo magnetico è:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\dot{\vec{p}} + \frac{r}{c}\ddot{\vec{p}}\right]_{t-r/c}}{r^3} \times \vec{r} \quad (3.2.4)$$

Dimostrazione. Si ha $\vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \vec{\nabla} \times \frac{\dot{\vec{p}}}{r}$. Dal calcolo di φ_1 :

$$\vec{\nabla} \times \frac{\dot{\vec{p}}}{r} = \frac{-\left(\frac{r}{c}\ddot{p} + \dot{p}\right)y}{r^3} \hat{x} - \frac{-\left(\frac{r}{c}\ddot{p} + \dot{p}\right)x}{r^3} \hat{y} = \frac{-\left(\frac{r}{c}\ddot{p} + \dot{p}\right)}{r^3} \vec{r} \times \hat{z} = \frac{\frac{r}{c}\ddot{\vec{p}} + \dot{\vec{p}}}{r^3} \hat{z} \times \vec{r}$$

Allora

$$\vec{B}_1 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\frac{r}{c}\ddot{\vec{p}} + \dot{\vec{p}}\right]_{t-r/c}}{r^3} \times \vec{r} \quad (3.2.5)$$

■

Definendo $\vec{p}^* = \vec{p}|_{t-r/c} + \frac{r}{c} \dot{\vec{p}}|_{t-r/c}$ e visto che $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p}^* \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}^*}{r^3} + \frac{1}{c^2 r^3} \left(\ddot{\vec{p}}|_{t-r/c} \times \vec{r} \right) \times \vec{r} \right] \quad (3.2.6)$$

- **Approssimazione di campo prossimo** $\rightarrow \frac{r}{\lambda} \ll 1$ (trascura ultimo termine \vec{E}).
- **Approssimazione di campo di radiazione** $\rightarrow \frac{r}{\lambda} \gg 1 \rightarrow$ (conta ultimo termine \vec{E}).

3.2.3 Relazione tra $\dot{\vec{p}}$ e \vec{j}^*

Per definizione $\vec{p} = \int \rho(\vec{x})\vec{x} d^3x$ quindi:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x})\vec{x} d^3x = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{x} d^3x = - \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \vec{x} d^3x = \int \vec{j} d^3x \quad (3.2.7)$$

per l'equazione di continuità e integrando per parti all'ultima uguaglianza.

3.2.4 Approssimazioni di campo prossimo

Si ha $t_{\text{rit}} \simeq t \Rightarrow \vec{p}_{\text{rit}} \simeq \vec{p}(t) + (t_{\text{rit}} - t)\dot{\vec{p}}(t)$ allora:

$$\vec{B} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\vec{p}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\vec{p}}(t) + \frac{r}{c} \ddot{\vec{p}}(t) \right]}{r^3} \times \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}(t)}{r^3} \times \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}', t) \times \vec{r}}{r^3} d^3x' \quad (3.2.8)$$

con $\dot{\vec{p}} = \int \vec{j} d^3x'$. Per \vec{E} si trascura ultimo termine e si fa limite per $\frac{r}{\lambda} \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{p}^* \rightarrow \vec{p}(t)$:

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \quad (3.2.9)$$

3.2.5 Approssimazione di campo lontano

Si ha $\frac{r}{\lambda} \gg 1$. Per \vec{E} si tiene solo l'ultimo termine:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\ddot{\vec{p}}_{\text{rit}} \times \vec{r}) \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.2.10)$$

quindi $\vec{E} \perp \vec{r}$, $|\vec{E}| \sim 1/r$. Per \vec{B} , si trascura $|\vec{p}|$ perché $|\dot{\vec{p}}| \sim \omega p$ e $\frac{r}{c}|\ddot{\vec{p}}| \sim \frac{r}{c}\omega^2 p \Rightarrow \dot{p} + \frac{r}{c}\ddot{p} \sim \omega p(1 + r\omega/c) \sim \omega^2 pr/c$:

$$\vec{B} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\frac{r}{c}\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2} \quad (3.2.11)$$

3.2.6 Termine di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico

Termine dato da

$$\vec{A}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \int \vec{x}' \cdot \vec{r} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(\vec{x}', t_{\text{rit}}) d^3 x'$$

Si prende $\vec{j}' \equiv \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ e $\vec{A}_2 \equiv \vec{A}$. Per componenti:

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \int x'_k r'_k j'_i d^3 x' = \frac{r_k}{4\pi\epsilon_0 c^3 r^2} \int j'_i x'_k d^3 x'$$

Nota: $j'_i x'_k = \frac{1}{2}(j'_i x'_k + j'_k x'_i) + \frac{1}{2}(j'_i x'_k - j'_k x'_i)$ somma di parte simmetria e anti-simmetria per scambio di indici; inoltre:

$$\frac{\partial}{\partial x'_l}(x'_i x'_k j'_l) \equiv \partial_l(x'_i x'_k j'_l) = \delta_{lk} x'_i j'_l + \delta_{li} x'_k j'_l + x'_k x'_i \partial_l j'_l = x'_i j'_k + x'_k j'_i + x'_i x'_k \partial_l j'_l$$

Si integra la parte simmetrica. Usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, essa è:

$$\frac{1}{2}(j'_i x'_k + j'_k x'_i) = \frac{1}{2}\partial_l(x'_i x'_k j'_l) - \frac{1}{2}x'_i x'_k \partial_l j'_l = \frac{1}{2}\partial_l(x'_i x'_k j'_l) + \frac{1}{2}x'_i x'_k \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

integrando, visto che $\vec{j} = 0$ sulla superficie del volume:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int j'_i x'_k + j'_k x'_i d^3 x' &= \frac{1}{2} \int x'_k x'_i \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} d^3 x' = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int x'_k x'_i \rho d^3 x' \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int \underbrace{\left(x'_k x'_i \rho - \frac{1}{3} |\vec{x}'|^2 \delta_{ki} \rho \right)}_{\equiv Q_{ik}} d^3 x' + \frac{1}{6} \frac{d^2}{dt^2} \int |\vec{x}'|^2 \delta_{ki} \rho d^3 x' \\ &= \frac{1}{2} \ddot{Q}_{ik} + \frac{1}{6} \frac{d^2}{dt^2} \int |\vec{x}'|^2 \rho \delta_{ik} d^3 x' \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

con Q_{ik} **momento di quadrupolo elettrico** tensore di rango 2 a traccia nulla. L'altro pezzo è trascurabile perché $|\vec{x}'|^2 \sim d^2$ e $\frac{d^2}{dt^2} \rho(t - r/c) \propto \frac{1}{\lambda^2}$ e vale $\frac{d}{\lambda} \ll 1$. Allora:

$$\vec{A}_{2,\text{sim}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{Q}(t - r/c)}{r} \hat{r} \quad (3.2.13)$$

L'anti-simmetrica è:

$$\vec{A}_{2,\text{asimm}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{\vec{m}}(t - r/c) \times \hat{r}}{r}, \quad \vec{m} = \int \vec{x}' \times \vec{j} d^3x' \quad (3.2.14)$$

\vec{m} momento di dipolo magnetico.

3.2.7 Potenziali di Liénard-Wiechert*

Nello sviluppo si assume $\frac{d}{\lambda} \ll 1$ da $\omega \frac{\hat{r} \cdot \vec{x}'}{c} \ll 1$, ma $\omega x' \sim v$, quindi equivale a $\frac{v}{c} \ll 1$; si considera ora limite relativistico.

Carica q in moto con legge oraria $X(t)$; si indica, poi, con \vec{x}' vettore che unisce O con carica, \vec{x} unisce O con P (punto in cui calcolare potenziali). Distribuzione $\rho(\vec{x}', t_{\text{rit}}) = q\delta^3(\vec{x}' - \vec{X}(t_{\text{rit}}))^{28}$. Per potenziale scalare, con τ contorna sorgente e $\vec{f}(\vec{x}') = \vec{x}' - \vec{X}(t_{\text{rit}})$ e \vec{x} unisce O con P :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\vec{x}', t_{\text{rit}})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\delta^3(\vec{f}(\vec{x}'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Usando

$$\int \delta^3(\vec{f}(\vec{x}')) d^3x' = \sum \frac{1}{|\vec{f}'(\vec{x}'_0)|} \Big|_{\vec{f}(\vec{x}'_0)=0}$$

$$1D: f'(x') = 1 - \frac{dX}{dt_{\text{rit}}} \frac{dt_{\text{rit}}}{dx'} = 1 - \frac{v(t_{\text{rit}})}{rc} (x - x') \Rightarrow 3D: f'(x') \equiv |\vec{f}'(\vec{x}')| = 1 - \frac{\vec{v}(t_{\text{rit}}) \cdot \hat{r}}{c}$$

e prendendo $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}') \Rightarrow \vec{x}' = \vec{f}^{-1}(\vec{y}) \Rightarrow d^3x' = |\vec{f}'|^{-1} d^3y$, con $r = |\vec{x} - \vec{X}|$:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\delta^3(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{f}^{-1}(\vec{y})| |\vec{f}'|} d^3y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{f}^{-1}(0)|} \frac{1}{|\vec{f}'(0)|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}} \Big|_{t_{\text{rit}}} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

essendo $\delta^3(\vec{y}) \Rightarrow$ in integrale sopravvive solo $\vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{x}' = \vec{X}(t_{\text{rit}})$. Per passaggi simili:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q\vec{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \left[r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right]_{t_{\text{rit}}}} \quad (3.2.16)$$

²⁸La presenza di t_{rit} in δ è perché il punto P vede carica nella posizione ritardata, visto che segnale emesso ha un tempo finito di propagazione.

3.3 Proprietà delle radiazioni elettromagnetiche

3.3.1 Teorema di Poynting

→ Equazione di continuità per l'energia elettromagnetica. Si cerca densità di potenza; per singola particella: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$. Per N densità di particelle in τ : $W_\tau = Nq\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{j}$.

Ora si cerca l'altro membro dell'equazione di continuità, dato dalla divergenza un vettore e dalla derivata temporale di una densità di energia. Per la IV equazione di Maxwell:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} = \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{j} &= \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t}\end{aligned}$$

Visto che

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \partial_i (\vec{E} \times \vec{B})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} E_j B_k = \epsilon_{ijk} \partial_i (E_j B_k) = \epsilon_{ijk} (B_k \partial_i E_j + E_j \partial_i B_k) \\ &= B_k \epsilon_{kij} (\partial_i E_j) - E_j \epsilon_{jik} (\partial_i B_k) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})\end{aligned}$$

Sostituendo e usando $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \epsilon_0 c^2 \frac{B^2}{2}}_{\equiv u} \right) + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}}_{\equiv \vec{S}} = -\vec{E} \cdot \vec{j} \quad (3.3.1)$$

dove u è la densità di energia elettromagnetica e \vec{S} è il **vettore di Poynting**.

Il vettore di Poynting non è univocamente definito:

- se $u \rightarrow u' = u + \vec{\nabla} \cdot \vec{X}$ con \vec{X} campo vettoriale generico e $\vec{S} \rightarrow \vec{S}' = \vec{S} - \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u + \cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{X}}) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{S} - \cancel{\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}} \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j}$$

- se $\vec{S} \rightarrow \vec{S}' = \vec{S} + \vec{\nabla} \times \vec{y} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{S}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$.

Il vettore di Poynting **non è additivo**.

3.3.2 Irraggiamento di dipolo elettrico

Nella zona di radiazione:

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{\vec{p}}(t-r/c) \times \hat{r}}{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\vec{a}}{r} \\ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\left[\ddot{\vec{p}}(t-r/c) \times \hat{r} \right] \times \hat{r}}{r} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{a} \times \hat{r}}{r} \end{cases}, \quad \vec{a} \equiv \ddot{\vec{p}}(t-r/c) \times \hat{r}$$

da cui

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^2 \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2 c^5} \frac{1}{r^2} (\vec{a} \times \hat{r}) \times \vec{a}$$

Si usa $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\ddot{\vec{p}} \times \hat{r})(\ddot{\vec{p}} \times \hat{r}) = |\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \theta$ e $(\vec{a} \times \hat{r}) \times \vec{a} = a^2 \hat{r} - (\vec{a} \cdot \hat{r}) \cdot \vec{a} = a^2 \hat{r}$ essendo $\vec{a} \perp \hat{r}$:

$$\vec{S} = \epsilon_0 \frac{k_0^2}{c^3} \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}, \quad k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.3.2)$$

Questa è la **potenza irraggiata per unità di superficie**. Si definisce **intensità di radiazione**:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}| dt = \langle |\vec{S}| \rangle \quad (3.3.3)$$

con T periodo della radiazione. Per un'onda piana: $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega(t-r/c)) \Rightarrow |\ddot{\vec{p}}|^2 = \omega^4 |\vec{p}_0|^2 \cos^2(\omega t_{\text{rit}})$, allora:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon_0 \frac{k_0^2 \omega^4 |\vec{p}_0|^2 \cos^2(\omega t) \sin^2 \theta}{c^3 r^2} dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{k_0^2}{c^3} \frac{|\vec{p}_0|^2 \sin^2 \theta}{r^2} \omega^4 = \frac{|\vec{p}_0|^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{c^3 r^2}$$

Si definisce **potenza per unità di angolo solido** come

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Omega} = |\vec{S}| r^2 \quad (3.3.4)$$

con $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ e $d\Sigma = r^2 d\Omega$, essendo $\frac{dP}{d\Sigma} = |\vec{S}|$. Potenza totale data da:

$$\begin{aligned} P &= \int_{\Omega} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} |\vec{S}| r^2 d\Omega = \frac{\epsilon_0 k_0^2}{c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \frac{|\ddot{\vec{p}}(t-r/c)|^2 \sin^2 \theta}{r^2} \sin \theta \\ &= \frac{2}{3} k_0 \frac{|\ddot{\vec{p}}(t-r/c)|^2}{c^3} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Mediandola su periodo:

$$\langle P \rangle = \frac{k_0}{3c^3} |\vec{p}_0|^2 \omega^4, \text{ con } \vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t) \quad (3.3.6)$$

3.3.3 Equazione di continuità per la densità di impulso

Forza agente su carica: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$; **densità di forza** $\rightarrow \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$.

Questo, cambiato di segno, sarà un termine dell'equazione.

Visto che $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ e $\vec{j} = \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \epsilon_0 c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \left[\epsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \left[\epsilon_0 \vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \epsilon_0 c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) + \left[\epsilon_0 \vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \epsilon_0 c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \epsilon_0 (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right] \end{aligned}$$

ultima uguaglianza, usato che $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ cambiando segno e invertendo ordine prodotto vettore. Si usa:

$$\begin{aligned} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} \right]_i &= \epsilon_{ijk} (\epsilon_{jlm} \partial_l E_m) E_k = \epsilon_{jki} \epsilon_{jlm} (\partial_l E_m) E_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) (\partial_l E_m) E_k \\ &= \partial_k E_i E_k - (\partial_i E_k) E_k = \partial_k E_i E_k - \frac{1}{2} \partial_i E_k^2 = \partial_k (E_i E_k) - (\partial_k E_k) E_i - \frac{1}{2} \partial_i E_k^2 \\ \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right]_i &= \partial_k B_i B_k - (\partial_k B_k) B_i - \frac{1}{2} \partial_i B_k^2 = \partial_k B_i B_k - \frac{1}{2} \partial_i B_k^2 \end{aligned}$$

per il campo magnetico $\partial_i B_i = 0$. La componente i -esima della parentesi quadra è:

$$\begin{aligned} &\cancel{\epsilon_0 E_i (\partial_k E_k)} + \epsilon_0 c^2 \left[\partial_k (B_i B_k) - \frac{1}{2} \partial_i B_k^2 \right] + \epsilon_0 \left[\partial_k (E_i E_k) - (\partial_k E_k) E_i - \frac{1}{2} \partial_i E_k^2 \right] \\ &= \epsilon_0 \left[-\frac{1}{2} \partial_i E_k^2 - \frac{1}{2} c^2 \partial_i B_k^2 + \partial_k (E_i E_k) + c^2 \partial_k (B_i B_k) \right] \\ &= \epsilon_0 \partial_j \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{E^2 + c^2 B^2}{2} \delta_{ij} \right] \end{aligned}$$

visto che $-\frac{1}{2} \partial_i E_k^2 = -\frac{1}{2} \partial_j E^2 \delta_{ij}$ e $\partial_k (E_i E_k) \equiv \partial_j (E_i E_j)$ (e lo stesso vale per \vec{B}).

Mettendo tutto insieme:

$$\begin{aligned}
 (\vec{f})_i &= \rho E_i (\vec{j} \times \vec{B})_i = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})_i + \partial_j \left[\underbrace{\varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \delta_{ij}}_{\equiv T_{ij}} \right] \\
 \Rightarrow \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B})_i - \partial_j T_{ij} &= -\rho E_i - (\vec{j} \times \vec{B})_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{S}}{c^2} \right)_i - \partial_j T_{ij} = -\rho E_i - (\vec{j} \times \vec{B})_i \quad (3.3.7) \\
 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{S_i}{c^2} + \left[\rho E_i + (\vec{j} \times \vec{B})_i \right] &= \partial_j T_{ij}
 \end{aligned}$$

T_{ij} è il **tensore degli sforzi di Maxwell** ed è simmetrico. Integrando ultima espressione su volume generico τ che contiene il sistema:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \frac{\vec{S}}{c^2} d\tau &= \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{em}} \\
 \int_{\tau} \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} d\tau &= \frac{d}{dt} \vec{P}_{\text{mecc}} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{P}_{\text{em}} + \vec{P}_{\text{mecc}}) = \oint_{\partial\tau} T_{ij} n_j dS \quad (3.3.8)
 \end{aligned}$$

dove si è usato il teorema della divergenza, con \vec{P}_{em} **impulso elettromagnetico**, \vec{P}_{mecc} **impulso meccanico** e \hat{n} normale uscente a $\partial\tau$.

3.3.4 Tensore degli sforzi di Maxwell*

Le componenti diagonali T_{ii} sono dette **pressioni**; le altre **tensioni**. Se T_{ij} uniforme sulla superficie, circuitazione su τ è nulla perché le componenti hanno verso opposto su facce opposte.

Assumendo T_{ij} dipendente dalla posizione, si prende parallelepipedo centrato in (x_1, x_2, x_3) di dimensioni $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Forza applicata al volume è (f_1, f_2, f_3) . Prima componente (analogo per le altre due):

$$\begin{aligned}
 f_1 &= T_{11} \left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3 \right) \Delta x_2 \Delta x_3 - T_{11} \left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3 \right) \Delta x_2 \Delta x_3 \\
 &+ T_{12} \left(x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3 \right) \Delta x_1 \Delta x_3 - T_{12} \left(x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3 \right) \Delta x_1 \Delta x_3 \\
 &+ T_{13} \left(x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2} \right) \Delta x_1 \Delta x_2 - T_{13} \left(x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2} \right) \Delta x_1 \Delta x_2
 \end{aligned}$$

Per parallelepipedo molto piccolo, si sviluppa attorno a x_1, x_2, x_3 ; ad esempio

$$T_{11} \left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3 \right) \simeq T_{11} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2}; \quad T_{11} \left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3 \right) \simeq T_{11} - \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{2}$$

quindi

$$f_1 \simeq \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (3.3.9)$$

3.3.5 Effetto Doppler classico

Nel vuoto, onda piana che si propaga in S lungo \hat{x} ; si passa in S' in boost lungo \hat{x} con velocità $\vec{v} = v\hat{x}$. La fase $\phi = k_x x - \omega t$ in S è uguale a $\phi' = k'_x x' - \omega' t'$ in S' visto che la fase è invariante²⁹. Limite non relativistico $\frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow$ trasformazioni di Galileo: $t' = t$ e $x' = x - vt$, quindi:

$$k_x x - \omega t = k'_x (x - vt) - \omega' t \Rightarrow k'_x x - (\omega' + k'_x v)t = k_x x - \omega t \Rightarrow \begin{cases} k'_x = k_x \\ \omega' = \omega - k'_x v \end{cases}$$

L'effetto Doppler classico è regolato dalla legge $\omega' = \omega - k_x v$; se $\omega \equiv \omega_0$ (frequenza del SR fermo), allora $k_x = \omega_0/c$ implica

$$\omega' = \omega_0 \left(1 \mp \frac{v}{c} \right) \quad (3.3.10)$$

a seconda se la sorgente si allontana o si avvicina rispettivamente. Nel primo caso, $\omega' < \omega_0$; nel secondo $\omega' > \omega_0$. In questo caso classico si nota effetto Doppler unicamente **longitudinale**.

3.3.6 Effetto Doppler relativistico

Caso generale \rightarrow trasformazioni di Lorentz per boost lungo \hat{x} tramite matrice Λ^μ_ν :

$$\phi' = k'_x \gamma (x - vt) - \omega' \frac{\gamma}{c} (ct - \beta x) = \gamma \left(k'_x + \omega' \frac{v}{c^2} \right) x - \gamma (\omega' + k'_x v) t$$

Imponendo invarianza, cioè $\phi' \stackrel{!}{=} \phi = k_x x - \omega t$, si trova:

$$\begin{cases} \frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_x \right) \\ k'_x = \gamma \left(k_x - \beta \frac{\omega}{c} \right) \end{cases} \quad (3.3.11)$$

²⁹Corrisponderebbe ad un conteggio, quindi essa risulta la stessa in ogni sistema di riferimento.

Viste le trasformazioni sopra, si definisce **quadrivettore d'onda** $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$. Se in S' , sorgente si allontana lungo asse di propagazione, prendendo $\omega \equiv \omega_0$, allora

$$\omega' = \gamma \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \omega_0 = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \omega_0 \quad (3.3.12)$$

Se la sorgente si avvicina:

$$\omega' = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \omega_0 \quad (3.3.13)$$

Ora si tratta l'**effetto Doppler trasverso**³⁰. Si verifica quando velocità relativa tra S, S' è ortogonale a \vec{k} ; allora:

$$\omega' = \gamma(\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v}) = \gamma \omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3.14)$$

In questo caso, si verifica sempre un **red-shift**.

3.4 Formulazione covariante dell'elettromagnetismo

3.4.1 Notazione e quadrivettori

Un generico quadrivettore a trasforma (per boost lungo \hat{x}) secondo la matrice Λ , quindi in modo controvariante e si scriverà $a^\mu = (a_0, \vec{a})$. La metrica è una forma quadratica e quindi si scrive $g_{\mu\nu}$. Trasformazione si indica con $a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu$; prodotto scalare con $a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu$. Per alzare/abbassare gli indici, si usa la metrica: $a_\mu = a^\nu g_{\mu\nu}$.

- **Quadrimpulso:** $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ con $E = m\gamma c^2$ e $\vec{p} = m\gamma \vec{v}$ ³¹; si ha $p^\mu p_\mu = E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$.
- **Quadrivelocità:** $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, con τ tempo proprio e $dt = \gamma d\tau$; per questo $u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \left(\gamma \frac{d(ct)}{dt}, \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$.
- **Quadrigradiente:** $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$. Per ϕ scalare, $\partial_\mu \phi \equiv \Phi_\mu$ è un quadrivettore covariante, mentre per b^μ quadrivettore

$$\partial_\mu b^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial b_0}{\partial t} - \left(-\frac{\partial b_x}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial b_y}{\partial y} \right) - \left(-\frac{\partial b_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial b_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b}$$

è un invariante (scalare). Per trasformazione, si usa $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu$.

³⁰Questo non ha un analogo classico, è un fenomeno prettamente relativistico.

³¹Qui m è la massa a riposo (o massa invariante), cioè quella misurata nel sistema di riferimento in cui la massa stessa è a riposo.

- **D'Alambertiano:** $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$ ed è quindi un invariante.
- **Quadricorrente:** $J^\mu = (c\rho, \vec{j})$ permette di riscrivere l'equazione di continuità come $\partial_\mu J^\mu = 0$:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.4.1)$$

- **Quadripotenziale:** definito come $A^\mu = (\varphi, c\vec{A})$ perché i potenziali

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0 \\ \nabla^2 c\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 c\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\square \varphi = -\frac{\rho c}{\epsilon_0 c} \\ -\square c\vec{A} = -\frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c} \end{cases}$$

dove i ρc , \vec{j} componenti di J^μ . Le equazioni per φ e \vec{A} diventano:

$$\square A^\mu = \frac{J^\mu}{\epsilon_0 c} \quad (3.4.2)$$

e la condizione per Gauge di Lorentz è $\partial_\mu A^\mu = 0$.

3.4.2 Tensore dei campi

Trasformazione di Gauge con quadripotenziale $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial_\mu(c\psi)$, ψ funzione scalare generica.

In una Gauge generica le equazioni per i potenziali:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \frac{J^\nu}{\epsilon_0 c} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{J^\nu}{\epsilon_0 c} \quad (3.4.3)$$

con $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ **tensore dei campi**, che è antisimmetrico:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

Per equazioni di Maxwell omogenee $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, con:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & E_z & -E_y \\ cB_y & -E_z & 0 & E_x \\ cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.5)$$

tenore duale dei campi e $F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}$.

3.4.3 Invarianti elettromagnetici

Si costruiscono a partire dai tensori dei campi; sono:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(E^2 - c^2 B^2); \quad F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 4c^2 \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (3.4.6)$$

- Se $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ in un S.R., varrà in tutti.
- Se $E^2 > c^2 B^2$ in uno, lo sarà in tutti e ne esisterà uno in cui $B = 0$.
- Se $E^2 < c^2 B^2$ in uno, lo sarà in tutti e ne esisterà uno in cui $E = 0$.
- Se $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, esiste S' in cui $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$ con $E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2$.
- Se $E^2 = c^2 B^2$ e $\vec{E} \perp \vec{B}$ (invarianti nulli) vale in tutti i S.R. quindi un'onda piana in un S.R. lo è in tutti.

3.4.4 Potenziali per carica in moto rettilineo uniforme

Carica q in moto uniforme con $\vec{v} = v\hat{x}$ nel LAB. Sia S' il SR della carica; in questo:

$$\vec{A}' = 0; \quad \varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \quad (3.4.7)$$

visto che la carica in S' è ferma. Usando le trasformazioni di Lorentz di A^μ :

$$\begin{cases} \varphi' = \gamma(\varphi - \beta c A_x) \\ c A'_x = \gamma(c A_x - \beta \varphi) \\ c A'_y = c A_y \\ c A'_z = c A_z \end{cases} \quad (3.4.8)$$

nel sistema LAB, essendo $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2$:

$$\begin{cases} \varphi' = \gamma\varphi - \gamma\beta c A_x \\ 0 = \gamma(c A_x - \beta\varphi) \\ 0 = c A_y \\ 0 = c A_z \end{cases} \Rightarrow \beta\varphi = c A_x = (\gamma\varphi - \varphi') \frac{1}{\gamma\beta} \Rightarrow \varphi(r') = \gamma\varphi'(r') \quad (3.4.9)$$

Qui, r' è il vettore posizione di S' ; si vuole riscrivere in termini delle coordinate del LAB e, quindi, si cerca relazione $r'(r, t)$. Per trasformazioni di Lorentz:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}$$

da cui

$$\varphi(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(x-vt)^2}{1-v^2/c^2} + y^2 + z^2}} \quad (3.4.10)$$

Visto che $c A_x - \beta\varphi = 0$, allora, usando $\vec{v}||\hat{x}$:

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \varphi \quad (3.4.11)$$

Questi sono i **potenziali di Liénard-Wiechert**.

3.4.5 Campi per carica in moto rettilineo uniforme

Continuando esempio §3.4.4, si cercano i campi. Si usa il tensore $F^{\mu\nu}$, il quale trasforma come segue:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma} \Rightarrow F' = \Lambda F \Lambda^\top \quad (3.4.12)$$

Imponendo l'uguaglianza degli elementi trasformati con gli elementi con il primo, si ricavano trasformazioni per i campi:

$$\begin{cases} E'_x = \gamma^2(1 - \beta^2)E_x \equiv E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + v/c^2 E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - v/c^2 E_y) \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Visto che $\vec{v} \parallel \hat{x}$:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \text{ (comp. parallela al boost)} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \text{ comp. ortogonale al boost} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right)_{\perp} \end{cases} \quad (3.4.14)$$

Si indica con S_0 SR in cui q ferma. In S_0 , il **campo elettrico** è:

$$\vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \vec{r}_0 \quad (3.4.15)$$

con $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ vettore coordinate di S_0 . Le sue componenti sono:

$$\begin{cases} E_{0x} = \frac{qx_0}{4\pi\epsilon_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{0y} = \frac{qy_0}{4\pi\epsilon_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ E_{0z} = \frac{qz_0}{4\pi\epsilon_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (3.4.16)$$

Si considera un nuovo SR chiamato S che è in moto con velocità $\vec{v}_0 = -v_0\hat{x}$ rispetto a S_0 ; allora, in S , q è in moto con velocità $v_0\hat{x}$, per cui tramite trasformazioni si ottiene³²:

$$\begin{cases} E_x = E_{x_0} \\ E_y = \gamma_0 E_{y_0} \\ E_z = \gamma_0 E_{z_0} \end{cases}, \text{ con } \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \quad (3.4.17)$$

In S , \vec{R} vettore che unisce q con punto $P = (x, y, 0)$ in cui calcolare campi e che forma θ con asse $\hat{x} \Rightarrow x - v_0 t = R \cos \theta$ con $v_0 t$ distanza percorsa da q in tempo t rispetto all'origine di S . Allora le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} x_0 = \gamma_0(x - v_0 t) = \gamma_0 R \cos \theta \\ y_0 = y = R \sin \theta \\ z_0 = z = 0 \end{cases} \quad (3.4.18)$$

³²Il campo magnetico è assente perché in S_0 la carica è ferma, quindi $\vec{B}_0 = 0$.

Quindi:

$$\begin{cases} E_x = \frac{q\gamma_0 R \cos \theta}{4\pi\epsilon_0(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ E_y = \frac{q\gamma_0 R \sin \theta}{4\pi\epsilon_0(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (3.4.19)$$

Il denominatore è:

$$(\gamma_0^2 R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta)^{3/2} = R^3 (\gamma_0^2 (1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta)^{3/2} = R^3 \gamma_0^3 \left(1 - \sin^2 \theta + \frac{1}{\gamma_0^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}$$

quindi

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) q}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{R}}{\bar{R}} \quad (3.4.20)$$

Quanto al **campo magnetico**, in S_0 , $\vec{B}_0 = 0$; in S , q ha velocità $v_0 \hat{x}$ rispetto a S_0 per cui $\vec{B}_{||} = 0$ ancora, ma:

$$\begin{aligned} \vec{B}_\perp &= \gamma_0 \frac{\vec{v}_0 \times \vec{E}_0}{c^2} = \frac{\gamma_0}{c^2} (-v_0 E_{0z} \hat{y} + v_0 E_{0y} \hat{z}) = \frac{\gamma_0}{c^2} \left(-v_0 \frac{E_z}{\gamma_0} \hat{y} + v_0 \frac{E_y}{\gamma_0} \hat{z} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} (-\vec{v}_0 \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Nel limite non-relativistico $\frac{v_0}{c} \ll 1$, $\vec{E} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R}$; sostituendolo nel campo magnetico, si ritrova la legge di Biot-Savart:

$$\begin{aligned} \vec{B} &\simeq \frac{1}{c^2} \left(-\vec{v}_0 \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R} \right) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^2} (\vec{v}_0 \times (-\hat{R})) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{R^2} (\vec{v}_0 \times \hat{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v}_0 \times \hat{r}}{r^2} \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

dove $q\vec{v}_0$ è equivalente a \vec{j} per la singola carica.

3.4.6 Quadriforza

Riprendendo espressione $F^{\mu\nu}$, la forza di Lorentz è $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Si riscrive in termini di $F^{\mu\nu}$:

$$f_x = q \left(F^{10} - \frac{v_y}{c} F^{12} - \frac{v_z}{c} F^{13} \right) = \frac{q}{\gamma c} (u^0 F^{10} - u^1 F^{11} - u^2 F^{12} - u^3 F^{13})$$

$$\Rightarrow f^1 = \frac{q}{\gamma c} u^\nu F^{1\nu}$$

Allora

$$f^\mu = \frac{q}{\gamma c} u^\nu F^{\mu\nu} \quad (3.4.23)$$

La componente temporale è:

$$f^0 = \frac{q}{\gamma c} (u^0 F^{00} - u^1 F^{01} - u^2 F^{02} - u^3 F^{03}) = \frac{q}{\gamma c} [-\gamma v_1(-E_x) - \gamma v_2(-E_y) - \gamma v_3(-E_z)]$$

Quindi $f^0 = \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}$; notando che $q\vec{E} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} \Rightarrow f^0 = \frac{1}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}$, si definisce **quadriforza**³³:

$$F^\mu = \gamma f^\mu = \frac{q}{c} u^\nu F^{\mu\nu} = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{f} \right) \quad (3.4.24)$$

Si possono scrivere le **equazioni del moto** in formalismo covariante:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (3.4.25)$$

3.4.7 Energia nel limite non-relativistico

Da $F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$:

$$\gamma \vec{f} = \frac{d}{d\tau}(m_0 \gamma \vec{v}) = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma \vec{v}) \Rightarrow \vec{f} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma \vec{v})$$

Per $\gamma \rightarrow 1 \Rightarrow$ **equazioni di Newton**. Per componente temporale $F^0 = \frac{\gamma}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}$ e $F^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c) \Rightarrow \vec{f} \cdot \vec{v} \frac{d}{dt}(m_0 \gamma c^2)$; allora:

$$\vec{f} \cdot \vec{v} dt \equiv \vec{f} \cdot d\vec{s} = d(m_0 \gamma c^2) \equiv dE \quad (3.4.26)$$

³³Si indica con F^μ la quadriforza, con $F^{\mu\nu}$ il tensore dei campi e \vec{f} è la forza di Lorentz.

è il teorema dell'energia cinetica. Per $v/c \ll 1$:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \simeq m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (3.4.27)$$

3.4.8 Composizione delle radiazioni elettromagnetiche

Visto che $p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2$, nel SR in cui $\vec{v} = 0 \Rightarrow |\vec{p}| = 0$ con $E^2 = m_0 c^4$, quindi, in generale:

$$\frac{m_0 c^4}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 \Rightarrow E^2 = c^2 |\vec{p}|^2 + m_0^2 c^4 \quad (3.4.28)$$

Se $m_0 = 0$ (particella massa nulla) $\Rightarrow p^\mu p_\mu = 0 \Rightarrow E = c |\vec{p}|$; essendo $|\vec{p}| = m_0 \gamma |\vec{v}| \Rightarrow c^2 |\vec{p}| m_0 \gamma c^2 |\vec{v}| = E |\vec{v}| \Rightarrow E = \frac{c^2 |\vec{p}|}{|\vec{v}|}$. Confrontando le due, si ottiene $|\vec{v}| = c$.

Ricordando che densità di impulso em $|\vec{P}_{\text{em}}| = \frac{|\vec{S}|}{c^2} = \epsilon_0 |\vec{E} \times \vec{B}| \stackrel{*}{=} \frac{\epsilon_0}{2c} E_0^2$ ³⁴ e che $E_{\text{em}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ ³⁵, si ricava $E_{\text{em}} = c |\vec{P}_{\text{em}}|$. Allora relazione fra energia e impulso che vale per particelle a massa nulla è valida per radiazione em \Rightarrow radiazioni em composte da **fotoni** a massa nulla.

3.4.9 Tensore energia-impulso

Usando u densità di energia, \vec{S} vett. di Poynting e T^{ij} tensore degli sforzi di Maxwell, si definisce:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} u & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & & & \\ S_y/c & & -T^{ij} & \\ S_z/c & & & \end{pmatrix} \quad (3.4.29)$$

³⁴*Uguaglianza valida solo per onde piane mediano il risultato sul periodo.

³⁵Sempre per onda piana mediata su periodo.

Questo compatta equazioni di continuità:

$$\begin{aligned} \text{no sorgenti} \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow & \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_{\text{em}} = \vec{\nabla} T^{ij} \end{cases} \\ \text{con sorgenti} \Rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2} F^{\mu\nu} J_\nu \Rightarrow & \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{S}}{c^2} - \vec{\nabla} T^{ij} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) \equiv \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{mecc}} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

dove $\vec{p}_{\text{mecc}} = \frac{\vec{S}}{c^2}$ è la densità di impulso meccanico, \vec{p}_{em} è la densità di impulso elettromagnetico:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_{\text{em}} + \vec{p}_{\text{mecc}}) = \vec{\nabla} T^{ij} \quad (3.4.31)$$

3.5 Onde elettromagnetiche nei dielettrici

Nel seguito, per materia, si intenderanno esclusivamente dielettrici.

3.5.1 Modello di Lorentz e cielo blu

Schema atomico $\rightarrow M$ massa nucleo, m massa elettroni con $M \gg m \Rightarrow$ nucleo fermo e elettroni in moto. Si modella radiazione em come onda piana e atomo come nube elettronica sferica attorno a nucleo.

Si considera atomo con $Z = 1 \rightarrow$ distribuzione di carica nube: $\rho = -\frac{e}{\frac{4}{3}\pi a_0^3}$. Il campo interno alla sfera è³⁶ $|\vec{E}| = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \Rightarrow \vec{F}_e = -\frac{|\rho|e}{3\epsilon_0} \vec{x} = -m\omega_0^2 \vec{x}$ è la forza del nucleo su un elettrone con $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a_0^3}}$. Il moto dell'elettrone è dato da:

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega_0^2 x + F \quad (3.5.1)$$

dove il primo è un termine **viscoso**, il secondo è la forza di nucleo su elettrone \vec{F}_e e l'ultimo è forza elettromagnetica $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ derivante da radiazioni elettromagnetiche esterne, come il sole.

³⁶Nube elettronica \rightarrow sfera uniformemente carica con nucleo al centro quindi forza della nube in un punto al suo interno è quello di una sfera uniformemente carica con distribuzione ρ ; per il terzo principio, la forza del nucleo interno alla nube è l'opposto.

Se $\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow |\vec{v} \times \vec{B}| \sim vB_0 = v\frac{E_0}{c}$ ³⁷ trascurabile rispetto a E_0 . Per \vec{E} onda piana $\Rightarrow F = -eE_0 \exp(-i\omega t)$ ³⁸; assumendo soluzioni del tipo $x(t) = x_0 \exp(-i\omega t)$:

$$m(-\omega^2 x_0 - i\omega\gamma x_0 + \omega_0^2 x_0) = -eE_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

Spostamento nube elettronica genera dipolo in ogni atomo³⁹:

$$\vec{p}(t) = q\vec{x}(t) = qx_0 e^{-i\omega t} \hat{x} \equiv p_0 e^{-i\omega t} = \frac{q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \vec{E} = \frac{q^2 E_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \hat{x} \quad (3.5.2)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è assunto $\omega \neq \omega_0$ e $\gamma \simeq 0$. La potenza irradiata media è

$$\langle P \rangle = \frac{k_0}{3c^3} \frac{q^4 E_0^2}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \equiv \frac{k_0}{3c^3} \frac{q^4 E_0^2}{m^2} F(\omega) \quad (3.5.3)$$

Si calcola **sezione d'urto**, con $I = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2}$ intensità onda incidente e $\langle P \rangle$ potenza media irradiata dal singolo atomo:

$$\sigma \equiv \frac{\langle P \rangle}{I} = \frac{\langle P \rangle}{\langle |\vec{S}| \rangle} = \frac{8\pi}{3} \frac{k_0^2 q^4}{m^2 c^4} F(\omega) \equiv \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (3.5.4)$$

con $r_e = \frac{k_0 q^2}{mc^2}$ raggio classico elettrone. Per atomo non legato $\Leftrightarrow \omega_0 = 0 \Rightarrow F(\omega) = 1$ si trova **sezione d'urto di Thomson**.

Per gli atomi nell'atmosfera, invece, vale $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow F(\omega) \simeq \omega^4/\omega_0^4$ (**scattering di Rayleigh**), quindi

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \propto \frac{1}{\lambda^4} \quad (3.5.5)$$

perciò solo radiazioni con basse λ vengono disperse. Per N atomi, i termini misti di campo elettrico e magnetico sono a media nulla quindi si considera $\vec{S}_{\text{tot}} = \sum \vec{S}_i \Rightarrow \sigma_{\text{tot}} = N\sigma$.

Se la materia non fosse discreta e si distribuisse tramite parametro η con $m \rightarrow m/\eta$, $q \rightarrow q/\eta$ e $N \rightarrow \eta N$:

$$\sigma_{\text{tot}} = N \frac{\eta(q/\eta)^4}{8\pi\epsilon_0(m/\eta)^2 c^4} F(\omega) \propto \frac{1}{\eta} \quad (3.5.6)$$

che andrebbe a 0 per $\eta \rightarrow 0$ (limite materia continua) e non ci sarebbe diffusione.

³⁷In approssimazione di dipolo elettrico $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$. Questa approssimazione $\frac{v}{c} \ll 1$ equivale ad avere campi deboli.

³⁸Si trascura il termine con kx perché elettrone si muove su scala atomica che è $\ll \lambda$.

³⁹Si pone $q = -e$.

3.5.2 Vettore di polarizzazione

Da §3.5.1, il dipolo indotto è:

$$\vec{p} = \frac{e^2 \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} \equiv \epsilon_0 \alpha(\omega) \vec{E} \quad (3.5.7)$$

Considerando N atomi per unità di volume e ω_{pl} **frequenza di plasma**⁴⁰:

$$\vec{P} = N \vec{p} = \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \epsilon_0 \vec{E} \equiv \epsilon_0 N \alpha(\omega) \vec{E}, \quad \omega_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{N e^2}{m \epsilon_0}} \quad (3.5.8)$$

Questa relazione deriva dall'assunzione di **mezzi lineari**. Visto che, in generale, $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$, allora \vec{P} e \vec{E} possono essere sfasati.

3.5.3 Equazioni di Maxwell per dielettrici

Quelle disomogenee si scrivono come:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0}; \quad c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}_{\text{ext}} + \vec{j}_{\text{pol}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.5.9)$$

dove $\rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Per cariche di polarizzazione, vale⁴¹

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{pol}} = -\frac{\partial \rho_{\text{pol}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (3.5.10)$$

Sostituendo nelle equazioni di Maxwell⁴²:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{ext}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}; \quad \epsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (3.5.11)$$

⁴⁰La frequenza di plasma è la frequenza a cui gli elettroni oscillano per effetto di un campo elettrico esterno. Nei dielettrici, le oscillazioni sono relative ai dipoli, essendo gli elettroni vincolati nel materiale.

⁴¹In verità, $\vec{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ a meno del rotore di un campo vettoriale, che continuerebbe a verificare $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{pol}} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, ma questo termine si prende pari a 0. Infatti, l'espressione generale sarebbe $\vec{j} = \vec{j}_{\text{pol}} + \vec{j}_{\text{mag}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$ con \vec{j}_{mag} densità di corrente di magnetizzazione.

⁴²Nel dominio delle frequenze, si possono introdurre \vec{D} , \vec{H} , ma non nel dominio dei tempi perché \vec{D} e \vec{E} non sarebbero proporzionali istante per istante; questo è legato al fatto che la risposta del materiale al campo esterno non è istantanea, di fatto \vec{P} e \vec{E} sono sfasati in generale.

Si assume $\rho_{\text{ext}} = 0$, $\vec{j}_{\text{ext}} = 0$, da cui per $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) \quad (3.5.12)$$

Usando, ora

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} = -N\alpha(\omega) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} (1 + N\alpha(\omega)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Il caso $1 + N\alpha(\omega) = 0 \Rightarrow$ **onde longitudinali**, cioè i campi oscillano parallelamente a \vec{k} , e sono possibili solo in materia; invece, il caso $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow$ **onde trasversali** (campi elettrico e magnetico oscillano perpendicolarmente a \vec{k}) e comporta:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (3.5.14)$$

3.5.4 Relazione di dispersione

Per onde trasversali ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$), la soluzione dell'equazione è $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} || \hat{x}$. Si assume **materiale isotropo** $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ e **dielettrico lineare** $\Rightarrow |\vec{P}| \propto e^{i\omega t}$. I dipoli si orientano con \vec{E} , quindi $\vec{P} || \hat{x}$; inoltre $\frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2} = -\omega^2 P_x$. Sostituendo tutto nell'equazione differenziale di \vec{E} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_0 e^{i(kz - \omega t)} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) E_0 e^{i(kz - \omega t)} &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} N \epsilon_0 \alpha(\omega) (-\omega^2) E_0 e^{i(kz - \omega t)} \\ \Rightarrow -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} &= -\frac{\omega^2}{c^2} N \alpha(\omega) \\ \Rightarrow kc^2 &= \omega^2 (1 + N\alpha(\omega)) \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

3.5.5 Indice di rifrazione

Dalla relazione di dispersione

$$\begin{aligned} v_f = \frac{\omega}{k} &= \frac{c}{\sqrt{1 + N\alpha(\omega)}} \stackrel{!}{=} \frac{c}{n(\omega)} \Rightarrow n(\omega) = \sqrt{1 + N\alpha(\omega)} \\ \Rightarrow n^2 &= 1 + N\alpha(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

Questo è valido solo per **dielettrici rarefatti**. In **materiali densi** si deve tenere conto di $E_I = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$; essendo $P = \epsilon_0 N\alpha(\omega)E_I$, allora:

$$\vec{P} = \frac{N\alpha(\omega)}{1 - \frac{N\alpha(\omega)}{3}}\epsilon_0\vec{E} \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{N\alpha(\omega)}{1 - \frac{N\alpha(\omega)}{3}} \quad (3.5.17)$$

3.5.6 Coefficiente di assorbimento

$\alpha(\omega) \in \mathbb{C} \Rightarrow n(\omega) \in \mathbb{C}$; si può scrivere $n = n_R + in_I$, $n_R, n_I \in \mathbb{R}$. Sostituendo relazione di dispersione nel campo elettrico, si ha:

$$E_x = E_0 \exp \left[i \left(\frac{\omega n}{c} z - \omega t \right) \right] = \left[E_0 \exp \left(-\frac{\omega n_I}{c} z \right) \right] \exp \left[i \omega \left(\frac{n_R}{c} z - t \right) \right] \quad (3.5.18)$$

Questo indica che ampiezza di \vec{E} decresce esponenzialmente con distanza percorsa nel mezzo. L'intensità dell'onda è $I \propto |E_x|^2 \propto E_0^2 e^{-\beta z}$, dove si definisce $\beta = \frac{2\omega n_I}{c}$ **coefficiente di assorbimento**. Energia trasportata dall'onda viene assorbita dal dielettrico a seconda del suo β .

3.5.7 Funzione dielettrica

Da $v_f = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ con $n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \simeq \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = \sqrt{\epsilon_r}$ (essendo $\mu \simeq \mu_0$ alle frequenze di interesse), si trova la **funzione dielettrica**:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (3.5.19)$$

Essendo complessa, si può dividere in parte reale e immaginaria:

$$\begin{cases} \epsilon_R = 1 + \frac{\omega_{pl}^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ \epsilon_I = \frac{\omega_{pl}^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \end{cases} \quad (3.5.20)$$

dove ω_0 è la frequenza di risonanza del mezzo alla quale c'è assorbimento massimo.

3.5.8 Suscettività elettrica

Da $\vec{P} = \epsilon_0 N \alpha(\omega) \vec{E} = \epsilon_0 (n^2 - 1) \vec{E} \equiv \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, si introduce la **suscettività elettrica** $\chi_e = n^2 - 1 = (\epsilon_R - 1) + i\epsilon_I$. La si può riscrivere anche come $\chi_e(\omega) = |\chi_e(\omega)| \exp(-i\phi_p(\omega))$. Per definizione

$$\phi_p(\omega) = \text{atan2} \left(\frac{\epsilon_I}{\epsilon_R - 1} \right) = \text{atan2} \left(\frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right); \quad |\chi_e(\omega)| = \sqrt{(\epsilon_R - 1)^2 + \epsilon_I^2} \quad (3.5.21)$$

Si studia risposta materiale a diverse frequenze.

- Basse frequenze ($\omega \ll \omega_0$).

In questo caso $\epsilon_I \rightarrow 0$, $\epsilon_R - 1 \rightarrow \frac{\omega_{pl}^2 \omega_0^2}{\omega_0^4}$, quindi $\phi_p(\omega) \rightarrow 0$ e $\chi_e(\omega) = \epsilon_R - 1 = \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_0^2}$ è reale.

- Frequenza di risonanza ($\omega = \omega_0$).

In questo caso $\epsilon_I \rightarrow \frac{\omega_{pl}^2}{\gamma \omega_0}$, $\epsilon_R - 1 \rightarrow 0$ e $\phi_p \rightarrow \pi/2$; allora $|\chi_e(\omega_0)| = |\epsilon_I| = \frac{\omega_{pl}^2}{\gamma \omega_0} \gg |\chi_e(0)|$, visto che $\gamma \ll \omega_0$.

- Alte frequenze ($\omega \gg \omega_0$).

In questo caso $\epsilon_I \simeq \frac{\omega_{pl}^2 \gamma \omega}{\omega^4} \rightarrow 0$, $\epsilon_R - 1 \simeq -\frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$ e $\phi_p \rightarrow \pi$, quindi $|\chi_e(\omega \gg \omega_0)| \simeq |\epsilon_R - 1| \rightarrow 0$.

Quindi, per frequenze molto maggiori o molto minori di quella di risonanza, il mezzo tende a non assorbire l'energia della radiazione elettromagnetica.

3.6 Onde elettromagnetiche nei conduttori

Nel seguito, per materia, si intenderanno esclusivamente conduttori.

3.6.1 Modello atomico

Si modifica modello di Lorentz in §3.5.1 perché nei conduttori elettroni di valenza liberi di muoversi \Rightarrow nessun richiamo elastico. Allora $m(\ddot{x} + \gamma \dot{x}) = -eE_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \dot{v} + \gamma v = \frac{-eE_0}{m} e^{-i\omega t}$. Si assume soluzione $v(t) = v_0 e^{-i\omega t}$:

$$-i\omega v_0 + \gamma v_0 = -\frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t} \Rightarrow v_0 = -\frac{eE_0}{m(-i\omega + \gamma)} \Rightarrow \vec{v}(t) = -\frac{e\vec{E}}{m(-i\omega + \gamma)} \quad (3.6.1)$$

3.6.2 Conducibilità generalizzata

Considerando N elettroni per unità di volume:

$$\vec{j} = -Ne\vec{v} = \frac{Ne^2}{m(-i\omega + \gamma)} \vec{E} \equiv \underbrace{\frac{\omega_{pl}^2}{-i\omega + \gamma} \epsilon_0}_{\equiv \sigma} \vec{E} \quad (3.6.2)$$

con σ **conducibilità generalizzata**⁴³. Essendo una grandezza complessa:

$$\sigma = \sigma_R + i\sigma_I = \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2 \gamma}{\gamma^2 + \omega^2} + i \frac{\epsilon_0 \omega \omega_{pl}^2}{\gamma^2 + \omega^2} \quad (3.6.3)$$

Si considerano limiti per basse e alte frequenze.

- Basse frequenze $\omega \ll \gamma$.

Si ha $\sigma \simeq \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2}{\gamma} = \frac{Ne^2}{m\gamma} \Rightarrow \sigma \in \mathbb{R}$. Significa che \vec{j} è in fase con \vec{E} e σ non dipende da $\omega \Rightarrow$ **limite ohmico**. Essendo $\gamma = \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2}{\sigma} \Rightarrow \omega \ll \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2}{\sigma}$ dipende dalle caratteristiche del conduttore.

- Alte frequenze $\omega \gg \gamma$.

Visto che $\sigma_I \rightarrow 0$ più lentamente di $\sigma_R \Rightarrow \sigma \simeq i \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2}{\omega} = i \frac{Ne^2}{m\omega} = e^{i\pi/2} \frac{Ne^2}{m\omega} \Rightarrow \sigma \in \mathbb{C}$. Allora \vec{j}, \vec{E} sfasati di $\pi/2$. Per questo motivo, $\vec{j} \cdot \vec{E} \propto \sin \omega t \cos \omega t \Rightarrow \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$, il che significa che non vi è potenza dissipata.

3.6.3 Equazioni di Maxwell per conduttori

Equazione continuità per cariche libere: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$; visto $\vec{j} = \sigma \vec{E}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho \Rightarrow \rho(t) = \rho(0) e^{-t/\tau} \quad (3.6.4)$$

con $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$. La carica libera è un transiente che va a 0 esponenzialmente. Si trascura transiente e si prende $\rho = 0$ nelle equazioni di Maxwell $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \Rightarrow$ **onde trasversali**. L'equazione per il campo elettrico è:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

⁴³Significa che è valida per campi variabili nel tempo, mentre la conducibilità introdotta precedentemente era limitata al caso stazionario.

Usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (3.6.5)$$

3.6.4 Relazione di dispersione

Cercando soluzione del tipo $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikx - i\omega t}$, si trova

$$\left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} (-i\omega) \Rightarrow k^2 c^2 - \omega^2 = \frac{i\omega\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.6.6)$$

Sostituendo $\sigma(\omega) = \frac{\omega_{pl}^2 \epsilon_0}{\gamma - i\omega}$:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{i\omega}{i\omega - \gamma} \omega_{pl}^2 \quad (3.6.7)$$

3.6.5 Limite di bassa frequenza – Lunghezza di pelle longitudinale

Si considera $\omega \ll \gamma \Rightarrow \omega^2 \simeq k^2 c^2 - \frac{i\omega}{\gamma} \omega_{pl}^2 \Rightarrow k^2 = i \frac{\omega}{\gamma c^2} \omega_{pl}^2$, essendo ω trascurabile.

Per calcolare \sqrt{i} , si scrive $i = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2$, da cui $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$:

$$k = (1 + i) \underbrace{\frac{\omega_{pl}}{c} \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}}}_{1/\ell_s} \quad (3.6.8)$$

Qui ℓ_s è la **lunghezza di pelle longitudinale** e parametrizza l'attenuazione del campo incidente:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikx - i\omega t} = \vec{E}_0 e^{-x/\ell_s} \exp \left[i \left(\frac{x}{\ell_s} - i\omega t \right) \right] \quad (3.6.9)$$

L'attenuazione della radiazione nel conduttore è legata alla formazione di correnti parassite. Per basse frequenze $\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega_{pl}^2}{\gamma}$, quindi

$$\ell_s = c \sqrt{\frac{m\epsilon_0}{Ne^2} \frac{2\gamma}{\omega}} = c \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} \quad (3.6.10)$$

Ora si calcola \vec{B} . Se $\vec{E}||\hat{y} \Rightarrow \vec{B}||\hat{z}$; inoltre, componente z di $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ è $\partial_x E_y$, quindi:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} E_y = -\frac{i-1}{\ell_s} E_0 e^{i-1 \frac{x}{\ell_s}} e^{-i\omega t} \Rightarrow B_z = \frac{i+1}{\omega\ell_s} E_0 e^{-x/\ell_s} \exp \left[i \left(\frac{x}{\ell_s} - \omega t \right) \right]$$

Allora:

$$\vec{B} = \Re \{ B_z \} \hat{z} = \frac{E_0 e^{-x/\ell_s}}{\omega \ell_s} \left[\cos \left(\frac{x}{\ell_s} - \omega t \right) - \sin \left(\frac{x}{\ell_s} - \omega t \right) \right] \quad (3.6.11)$$

\vec{B} ha una parte in fase con \vec{E} e una sfasata di $\pi/2$. Visto che $\vec{S} = \epsilon_0 c \vec{E} \times \vec{B}$, la sua media temporale è:

$$\langle \vec{S} \rangle = \epsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{2\omega \ell_s} e^{-\frac{2x}{\ell_s}} \hat{x} \neq 0 \quad (3.6.12)$$

Quindi c'è assorbimento di energia nel conduttore.

3.6.6 Limite di alta frequenza

Se $\gamma \ll \omega \Rightarrow \omega^2 \simeq k^2 c^2 + \omega_{pl}^2 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{pl}^2}{c^2}$. Allora se $\omega > \omega_{pl} \Rightarrow k \in \mathbb{R}$ e il mezzo è **trasparente**; se $\omega < \omega_{pl} \Rightarrow k = i\sqrt{\omega_{pl}^2 - \omega^2}$ è immaginario. Allora:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[-\frac{(\omega_{pl}^2 - \omega^2)^{1/2}}{c} x \right] e^{-i\omega t} \equiv \vec{E}_0 e^{-x/\ell_p} e^{-i\omega t}$$

con

$$\ell_p = \frac{c}{\sqrt{\omega_{pl}^2 - \omega^2}} \quad (3.6.13)$$

lunghezza di pelle inerziale. Le onde relative a $\omega < \omega_{pl}$ sono dette **evanescenti** perché esistono in uno strato sottile del conduttore, per poi decadere; questo è relativo ad un assorbimento o riflessione dell'onda da parte del materiale e non vi trasportano energia all'interno:

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega \ell_p} e^{-x/\ell_s} \sin(\omega t) \hat{z} \Rightarrow \langle \vec{S} \rangle = 0 \quad (3.6.14)$$

Prendendo conduttore con spessore $d < \ell_p$ si può mostrare che $\langle \vec{S} \rangle \neq 0$ perché il conduttore è troppo fino per dissipare la radiazione, pertanto esiste un'onda trasmessa. Questo è chiamato **effetto tunnel elettromagnetico**.

3.7 Onde elettromagnetiche in gas

La materia ora è un gas di elettroni libero e senza attrito. In questo caso $\omega_0, \gamma = 0$:
 $m\ddot{x} = -eEe_0e^{-i\omega t}$, da cui

$$\vec{x}(t) = \frac{e\vec{E}_0}{m\omega^2}e^{-i\omega t} = \frac{e}{m\omega^2}\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = n\vec{p} = -\frac{Ne^2\vec{E}}{m\omega^2} = -\frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2}\epsilon_0\vec{E} \quad (3.7.1)$$

Allora $n^2 = 1 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2} \equiv \epsilon_r$. Segue che $\omega > \omega_{\text{pl}} \Rightarrow n \in \mathbb{R}$, mentre $\omega < \omega_{\text{pl}} \Rightarrow n$ immaginario.

4 OTTICA

4.1 Introduzione all'ottica fisica

Si indica con L la lunghezza caratteristica su cui avviene il passaggio di mezzo; se $L \ll \lambda \Rightarrow$ discontinuità; se $L \gg \lambda$ si trova il limite dell'**ottica geometrica**. Si considererà $L \ll \lambda$.

4.1.1 Piano di incidenza

Piano formato da \vec{k}_i (vettore d'onda dell'onda incidente) e \hat{n} normale alla superficie dell'interfaccia nel punto di incidenza.

A seconda di come il campo elettrico è diretto rispetto al piano, si parla di **polarizzazione P** (\vec{E} giace nel piano di incidenza) o **polarizzazione S** (\vec{E} ortogonale al piano di incidenza).

Nel stessa zona di semi-piano, vi sono un'onda **incidente** E_i , con un certo θ_i rispetto alla verticale (data dalla superficie di separazione) e un'onda **riflessa** E_r con un certo θ_r . Nel nuovo mezzo, c'è l'onda **trasmessa** E_t con un certo θ_t .

4.1.2 Campo elettrico all'interfaccia

Assumendo piano incidenza $\equiv (x, y)$ e che $E_i \in \{x < 0, y < 0\} \Rightarrow E_r \in \{x < 0, y > 0\}$ e $E_t \in \{x > 0, y > 0\}$.

Se $x < 0$, allora $\vec{E} = \vec{E}_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} + \vec{E}_r e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x} - i\omega' t}$; se $x > 0$ $\vec{E} = \vec{E}_t e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x} - i\omega'' t}$. Nell'origine $\vec{x} = 0$, la componente parallela del campo deve essere continua; imponendo il raccordo:

$$E_{i,||} e^{-i\omega t} + E_{r,||} e^{-i\omega' t} \stackrel{!}{=} E_{t,||} e^{-i\omega'' t}, \forall t \Rightarrow \omega = \omega' = \omega'' \quad (4.1.1)$$

Usando sempre continuità per $E_{||}$ ma per $x = 0$, quindi in ogni punto $\vec{x} = (0, y, z) \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{x} = k_y y$, quindi

$$E_{i,||} e^{ik_y y} + E_{r,||} e^{ik'_y y} \stackrel{!}{=} E_{t,||} e^{ik''_y y}, \forall y \Rightarrow k_y = k'_y = k''_y \quad (4.1.2)$$

4.1.3 Legge di Cartesio

Per legge di Cartesio, si studia relazione angolare tra onda incidente e riflessa. Dovendo valere $n_1 = \frac{kc}{\omega} = \frac{k'c}{\omega'} = \frac{k''c}{\omega''} \Rightarrow k = k'$, cioè $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$. Sapendo già che

$k'_y = k_y$ e che l'onda riflessa non prosegue nel mezzo, deve essere $k'_x = -k_x$. Da questo, si ricava $\theta_r = \theta_i$, che è la **legge di Cartesio**.

4.1.4 Legge di Snell

Relazione tra onda incidente e onda trasmessa:

$$n_1 = \frac{ck}{\omega} = \frac{c\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\omega} \quad n_2 = \frac{c\sqrt{k_x'^2 + k_y'^2}}{\omega}$$

Calcolando n_2^2/n_1^2 e usando $k_x'' = k'' \cos \theta_t$, $k_y = k'' \sin \theta_i$ e $k_y'' = k_y$:

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{\left(\frac{\cos \theta_t}{\sin \theta_i}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{\sin^2 \theta_t}}{\frac{1}{\sin^2 \theta_i}} = \frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_t} \quad (4.1.3)$$

e si trova $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$.

4.1.5 Angolo critico

Se $n_1 > n_2 \Rightarrow \theta_t > \theta_i$ da Snell. Valore limite perché vi sia trasmissione $\theta_{t,\max} = \pi/2$, allora esiste **angolo critico** θ_c t.c.:

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin \pi/2 = n_2 \Rightarrow \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (4.1.4)$$

Per $\theta_i > \theta_c$ c'è **riflessione totale**. Si vede cosa succede in questo caso. Visto che $n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} = k_x''^2 + k_y^2 = k_x''^2 + k^2 \sin^2 \theta_i$ e che $k^2 \frac{c^2}{\omega^2} = n_1^2$, allora

$$k_x''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i] \quad (4.1.5)$$

Se $\theta_i > \theta_c \Rightarrow k_x'' \equiv iK$ immaginario e $\vec{k}'' = (iK, k_y)$ implica

$$\vec{E} = \vec{E}_t e^{i\vec{k}'' \cdot \vec{x} - i\omega t} = \vec{E}_t e^{-Kx} e^{i(k_y y - \omega t)} \quad (4.1.6)$$

che è un'onda evanescente.

4.1.6 Relazioni di Fresnel in polarizzazione S

In questa polarizzazione, continuità di \vec{E} all'interfaccia è relazione vettoriale perché tutto il campo è parallelo all'interfaccia. Prendendo $\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} -$

ωt), $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)$ e $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)$ e notando che deve valere $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$, $\forall \vec{r}, \omega, t$, si sceglie $\vec{r} = 0$ per cui risulta $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$.

Deve anche conservarsi componente tangenziale di $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$:

$$-\frac{B_{0i}}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{B_{0r}}{\mu_i} \cos \theta_r = -\frac{B_{0t}}{\mu_t} \cos \theta_t \Rightarrow \frac{n_i}{\mu_i} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t} \cos \theta_t$$

per $B_{0i} = E_{0i}/v_i$. Combinando le relazioni trovate, le relazioni tra ampiezze in polarizzazione S sono:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \\ t_{\perp} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{2n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

dove \perp sottolinea la validità per polarizzazione S. Combinando $\mu_r \sim \mu_t \sim \mu_0$ e la legge di Snell:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

4.1.7 Relazioni di Fresnel in polarizzazione P

Polarizzazione P $\Rightarrow \vec{E} \parallel$ piano incidenza. Svolgendo conti, si trova (usando $\mu_r \sim \mu_t \sim \mu_0$ e legge di Snell):

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

4.1.8 Angolo di Brewster

Nel caso $n_i < n_t$, $r_{\parallel} = 0$ nel punto $\theta_i = \theta_p$, dopo il quale continua a decrescere. Questo angolo è dato da $r_{\parallel} = 0 \iff \theta_p + \theta_t = \pi/2$ e, da Snell:

$$n_i \sin \theta_p = n_t \sin(\pi/2 - \theta_p) = n_t \cos \theta_p \Rightarrow \theta_p = \arctan \left(\frac{n_t}{n_i} \right) \quad (4.1.10)$$

Tramite questo si ha **polarizzazione per riflessione** perché l'onda riflessa ha polarizzazione S. Se l'onda incidente ha polarizzazione P, non vi è onda riflessa perché i dipoli dovrebbero produrre radiazione parallela alla loro oscillazione, ma non vi è potenza emessa in tale direzione.

L'andamento di r_{\perp} , r_{\parallel} per $n_i > n_t$ è diverso, ma anche qui è presente angolo di Brewster θ'_p .

4.1.9 Riflettanza e trasmittanza

Dato piano di incidenza infinito con cilindri all'interno di cui si propagano onde, se A è l'area che individuano sul piano, allora la base di quello di incidenza ha area $A \cos \theta_i$, quello di riflessione $A \cos \theta_r$ e quello di trasmissione $A \cos \theta_t$.

Per $I = \langle |\vec{S}| \rangle$, si definiscono:

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_r S_r}{I_i S_i} = \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} \equiv r^2 \\ T &= \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} \equiv \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} t^2 \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

dove R è potenza riflessa su potenza incidente e T potenza trasmessa su potenza incidente.

Da conservazione energia⁴⁴ $I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t \Rightarrow n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i = n_i E_{0r}^2 \cos \theta_r + n_t E_{0t}^2 \cos \theta_t$ si trova

$$1 = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 + \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 \equiv R + T \quad (4.1.12)$$

Questa è valida per **mezzi non assorbenti**. Questa relazione è valida per le singole polarizzazioni.

Quando $\theta_i = \theta_c$ **angolo critico**, tutta l'energia incidente viene riflessa perché $R = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = 1$.

4.1.10 Shift di fase relativo

Quando $\theta_i > \theta_c$, r_{\perp} e r_{\parallel} diventano complessi perché dipendono entrambi da $\sqrt{\left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}$; è possibile riscriverli in termini di un angolo di sfasamento φ come $r_{\perp} = e^{i\varphi_{\perp}}$ e $r_{\parallel} = e^{i\varphi_{\parallel}}$. Lo sfasamento fra le due componenti **non è uguale**,

⁴⁴ $I \cdot S$ rappresenta flusso di energia entrante in tempo unitario attraverso superficie S .

da cui si definisce $\varphi = \varphi_{||} - \varphi_{\perp}$; la funzione che lo descrive è:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2}}{\sin^2 \theta_i}, \quad \theta_i > \theta_c \quad (4.1.13)$$

per cui $\varphi = 0$ se $\theta = \theta_c$ o $\theta = \pi/2$. In questo intervallo, ha un massimo relativo che supera $\pi/4$ nel caso di $n_t/n_i = 1/1.51$. Questo significa che si può ottenere uno sfasamento di $\pi/2$ tra le due componenti tramite incidenza ai due angoli in cui $\varphi = \pi/4$, teoria alla base del **rombo di Fresnel**. In questo modo si ha **onda polarizzata circolarmente**.

4.1.11 Materiali anisotropi

Per questi la suscettività elettrica diventa un tensore χ_{ij} . Per cristalli ordinari non assorbenti, χ_{ij} è simmetrico e esistono assi principali del cristallo rispetto a cui è diagonale con elementi χ_{11} , χ_{22} , χ_{33} .

Si classificano materiali anisotropi **dicroici**, cioè che assorbono meglio radiazioni elettromagnetiche a certe frequenze più che ad altre, e **birifrangenti**, che dividono un raggio incidente in due, polarizzati ortogonalmente fra loro, uno **ordinario** che si propaga con un indice di rifrazione costante nel mezzo e uno **straordinario** che si propaga con indice di rifrazione diverso a seconda della direzione nel mezzo. Esiste un certo **asse ottico** lungo il quale i due raggi hanno stessa velocità di fase.

4.2 Ottica geometrica

Approssimazione dell'ottica per $\lambda \ll L$.

4.2.1 Equazione dell'iconale

Per $n(\vec{r})$ lentamente variabile, si assume soluzione approssimata per una componente di \vec{E} o \vec{B} sia della forma $\mathcal{E}(\vec{r}) = \mathcal{E}_0(\vec{r})e^{ik_0S(\vec{r})}$, con $k_0S(\vec{r})$ fase lentamente variabile e $S(\vec{r})$ cammino ottico. Sostituendo $\mathcal{E}(\vec{r})$ nelle equazioni omogenee, si trova:

$$\left| \vec{\nabla} S(\vec{r}) \right|^2 = n^2(\vec{r}) \quad (4.2.1)$$

Il cammino ottico del raggio tra A e B è dato da:

$$\int_A^B n(\vec{r}) ds \quad (4.2.2)$$

con s distanza parametrica lungo il raggio.

Sia \vec{r} raggio che parte da origine e indica un punto sul raggio; $d\vec{r}$ vettore che unisce \vec{r} con $\vec{r} + d\vec{r}$ ed è giacente su raggio. Si può scrivere $\vec{\nabla} S(\vec{r}) = n(\vec{r})\hat{s}$ ⁴⁵, che si può anche scrivere come $\vec{\nabla} S(\vec{r}) = n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}$; derivando rispetto a s : $\frac{d}{ds}\vec{\nabla} S(\vec{r}) = \frac{d}{ds}\left[n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right]$. Si nota

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left[\vec{\nabla} S(\vec{r})\right] &= \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} S(\vec{r})\right] = \frac{1}{n(\vec{r})}\vec{\nabla} S(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} S(\vec{r})\right] \\ &= \frac{1}{2n(\vec{r})}\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla} S \cdot \vec{\nabla} S\right] = \frac{1}{2n(\vec{r})}\vec{\nabla}\left[n^2(\vec{r})\right] = \vec{\nabla} n(\vec{r}) \end{aligned}$$

Allora:

$$\frac{d}{ds}\left[n(\vec{r})\frac{d\vec{r}}{ds}\right] = \vec{\nabla} n(\vec{r}) \quad (4.2.3)$$

In mezzo **omogeneo, isotropo e costante** $n(\vec{r}) \equiv n_0$ costante $\Rightarrow \vec{\nabla} n_0 = 0$, quindi

$$\frac{d}{ds}\left[n_0\frac{d\vec{r}}{ds}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \vec{r}(s) = \vec{c}s + \vec{d} \quad (4.2.4)$$

con \vec{c}, \vec{d} costanti \Rightarrow la luce viaggia in linea retta.

4.2.2 Iconale e equazioni di Hamilton

Si definisce **iconale** come $S(\vec{x}, t) = k_0 S'(\vec{x}, t)$ con S' è la S del paragrafo precedente. In piccole regioni spaziali e brevi intervalli temporali:

$$S(\vec{x}, t) = S_0 + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} S + t \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.2.5)$$

e nella soluzione generica $\mathcal{E}(\vec{x}, t) = \mathcal{E}_0(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x}, t)}$. Confrontando questa con $\mathcal{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t + \varphi}$, si ha:

$$\vec{k} = \vec{\nabla} S; \quad \omega = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.2.6)$$

Queste sono le **equazioni di Hamilton** per i raggi. In generale, $\omega \equiv f(k, \vec{r}, t)$.

⁴⁵Qui \hat{s} indica la direzione del raggio e il verso in cui si propaga.

4.2.3 Miraggi*

Si considera sistema in cui onda si propaga nel piano (x, z) e vale $\omega = \frac{kc}{n(z)}$; allora $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ e eq. di Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{k_x c}{kn(z)}; \dot{y} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = 0; \dot{z} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{k_z c}{kn(z)} \\ k_x &= -\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0; k_y = -\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0; k_z = -\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{kc}{n^2(z)} \frac{dn}{dz} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Si considera $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{k_z}{k_x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{k_z}{k_x}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{1}{k_x} \frac{dk_z}{dx} = \frac{1}{k_x} \frac{dk_z}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{k_x} \frac{kc}{n^2(z)} \frac{dn}{dz} \frac{kn(z)}{k_x c} \\ &= \frac{k^2 c^2}{k_x^2 c^2 n^2(z)} n \frac{dn}{dz} = \frac{\omega^2}{k_x^2 c^2} \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dz} \end{aligned}$$

Ora si sceglie $n^2(z) = n_0^2(1 + \alpha z) \Rightarrow \frac{dn^2}{dz} = \alpha n_0^2 \Rightarrow \frac{d^2 z}{dx^2} = A > 0$ costante e $z(x) = Ax^2 + Bx + C$ parabola con concavità verso l'alto. Allora parte della luce riflessa da un oggetto segue questa direzione parabolica e arriva agli occhi che la interpretano come fosse rettilinea, quindi l'oggetto appare rovesciato a terra, mentre è dritto.

4.3 Interferenza e diffrazione

4.3.1 Principio di sovrapposizione e termine di interferenza

Due onde $\vec{E}_1, \vec{E}_2 \rightarrow \vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Si considerano onde della forma $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)$ e $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)$. Quando $\phi_1 - \phi_2$ è costante sempre, le sorgenti sono dette **mutuamente coerenti**.

L'intensità⁴⁶ è $I = \epsilon_0 c \langle |\vec{E}|^2 \rangle$; per $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$:

$$|\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \quad (4.3.1)$$

Il termine misto è detto **di interferenza**. Nel prodotto scalare, si sviluppano i

⁴⁶Fisicamente è la grandezza rilevante perché i campi nell'ottica oscillano con ω molto elevate e si misura l'intensità della radiazione.

coseni per dividere termine temporale e spaziale:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \left[\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1) \cos \omega t + \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1) \sin \omega t \right] \cdot \left[\cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2) \cos \omega t + \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_2) \sin \omega t \right]$$

Mediando su periodo $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$ e $\langle \cos \omega t \cos \omega t \rangle = \langle \sin \omega t \sin \omega t \rangle = \frac{1}{2}$:

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \phi_2) \equiv \frac{1}{2} \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \theta \quad (4.3.2)$$

θ è la differenza di fase accumulata dalle due onde.

4.3.2 Interferenza costruttiva e distruttiva

Mettendo insieme paragrafo precedente, si scrive $I = I_1 + I_2 + I_{12}$, con $I_{12} = \epsilon_0 c \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \theta$. Si assume $\vec{E}_{01} \parallel \vec{E}_{02}$ e che $I_1 = I_2 \equiv I_0$; allora:

$$\begin{aligned} I_{12} &= \epsilon_0 c E_{01} E_{02} \cos \theta = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta \\ &\Rightarrow I = 2I_0 + 2I_0 \cos \theta = 2I_0(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

che assume valore massimo pari a $4I_0$ (**interferenza costruttiva**) e minimo pari a 0 (**interferenza distruttiva**).

4.3.3 Esperimento di Young

Onda piana incide singola fenditura da cui si propaga onda sferica che incide su altre due fenditure S_1, S_2 . La distanza da queste dallo schermo è D ; si indicano con \vec{r}_1, \vec{r}_2 i vettori da S_1, S_2 a un punto P su schermo e \vec{k}_1, \vec{k}_2 i vettori d'onda delle onde sulle direzioni \vec{r}_1, \vec{r}_2 . In realtà, le onde sono cilindriche che hanno espressioni

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &\propto \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega t) \hat{z} \\ \vec{E}_2 &\propto \frac{1}{\sqrt{r_2}} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega t) \hat{z} \end{aligned}$$

Per $|\vec{r}| \ll D$ (\vec{r} va da metà delle due fenditure a P), si considera $r_1 \simeq r_2 \equiv r$ tranne che nella fase quindi si può dire $|\vec{E}_{01}| = |\vec{E}_{02}| \Rightarrow I_1 = I_2 \equiv I_0$. Per $\theta = k(r_1 - r_2)$, si scrive $I(P) = 2I_0(1 + \cos \theta)$.

Si ha interferenza costruttiva per $\theta = 2n\pi \Rightarrow k|r_1 - r_2| = 2n\pi \Rightarrow k = 2\pi/\lambda$ con $|r_1 - r_2| = n\lambda$. Se le due fenditure distano h , indicando con x la distanza dallo

schermo:

$$r_2 = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{h}{2}\right)^2}; \quad r_1 = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2}$$

per $y \ll x$, $h \ll x \Rightarrow r_2 - r_1 \simeq \frac{yh}{x}$. La distanza fra due massimi consecutivi è $\Delta y = \frac{\lambda x}{h}$.

Assunzione di coerenza verificata finché $|r_1 - r_2| < L_c$ **lunghezza di coerenza** perché con la distanza, le onde perdono coerenza.

4.3.4 Diffrazione di Fraunhofer e Fresnel

La diffrazione coinvolge rapporto tra onde e ostacoli/aperture invece che relazioni di coerenza con altre onde. Ci sono due regimi:

- diffrazione di Fraunhofer: sorgente e schermo a distanza infinita \Rightarrow fronti d'onda piani;
- diffrazione di Fresnel: sorgente e schermo a distanza finita e si creano relazioni complesse.

Per lo studio della diffrazione, si usa teorema di Kirchhoff.

TEOREMA 4.1 — TEOREMA DI KIRCHHOFF.

Si può calcolare valore di un'onda $U = U(x, y, z)e^{-i\omega t}$ in un punto dello spazio tramite integrale su superficie che circonda spazio contenente tale punto:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(U \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iks}}{s} - \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \quad (4.3.4)$$

con \hat{n} normale alla superficie di contorno e s direzione radiale.

4.3.5 Diffrazione con singola fenditura

Fenditura di larghezza $a \sim \lambda$ e lunghezza $L \gg a$. Fenditura si suddivide in N strisce di larghezza Δy e ogni striscia funge da sorgente contribuendo con ΔE all'ampiezza di E_R nel punto P ad un angolo θ rispetto alla normale. I contributi ΔE relativi a due strisce adiacenti hanno, in P , la differenza di fase $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin \theta$ derivante da differenza di cammino $\Delta y \sin \theta$. Si definisce poi $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$ che è differenza di fase ΔE_A e ΔE_B (campi emessi agli estremi della fenditura).

La somma dei ΔE formerà un arco di circonferenza spigoloso perché ognuno è sfasato allo stesso modo rispetto a quello adiacente; nel limite $\Delta y \rightarrow 0$, diventa

un arco continuo e il campo risultante è $E_R = 2\rho \sin \frac{\alpha}{2}$ con ρ lato. Al centro dello schermo $\theta = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0 \Rightarrow E_{\max} = \rho\alpha \Rightarrow \rho = E_{\max}/\alpha$, da cui

$$E_R = E_{\max} \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2} \Rightarrow I(\theta) = I_{\max} \left[\frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2} \right]^2 \quad (4.3.5)$$

Nel caso della doppia fenditura studiata sotto assunzione di assenza di diffrazione, cioè $a \ll \lambda$, questo non è vero quasi mai e si corregge il termine con una combinazione di interferenza e diffrazione:

$$I = I_0 \cos^2 \beta \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (4.3.6)$$

con $\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$, $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$ (α definito diverso rispetto a singola fenditura).

4.4 Ottica non-lineare

Tiene conto di relazione non lineare tra P ed E :

$$P = \epsilon_0 [\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots] \equiv P_{\text{lin}} + P_{\text{non-lin}} \quad (4.4.1)$$

In un mezzo non lineare, le equazioni di Maxwell diventano

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{\text{non-lin}}}{\partial t^2} \quad (4.4.2)$$

$\chi^{(2)} = 0$ nella maggior parte dei casi eccetto specifiche situazioni; $\chi^{(3)}$ molto debole, ma sempre presente in tutti i materiali. Assumendo $\chi^{(2)} = 0$ e termini dipendenti da ω in E^3 (che contiene termini dipendenti da 3ω):

$$P_{\text{tot}}(\omega) = \epsilon_0 [\chi^{(1)} E(\omega) + 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 E(\omega)] \equiv \epsilon_0 \chi_{\text{eff}} E(\omega) \quad (4.4.3)$$

con $\chi_{\text{eff}} = \chi^{(1)} + 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2$. Conseguentemente, l'indice di rifrazione effettivo è

$$\begin{aligned} n_{\text{eff}} &= \sqrt{1 + \chi_{\text{eff}}} = \sqrt{(1 + \chi^{(1)}) \left(1 + \frac{3\chi^{(3)}}{1 + \chi^{(1)}} |E(\omega)|^2 \right)} \\ &\equiv n_0 \sqrt{1 + \frac{3\chi^{(3)}}{1 + \chi^{(1)}} |E(\omega)|^2} \simeq n_0 + \frac{3\chi^{(3)}}{2n_0} |E(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$