

Note per Fisica 3

Giovanni Batignani
Claudio Bonati

7 dicembre 2023

Indice

Introduzione	6
I Formulazione covariante dell'elettromagnetismo e irraggiamento	9
1 Complementi sulla geometria della relatività ristretta	10
1.1 Introduzione al concetto di tensore	10
1.2 Il caso della metrica lorentziana	12
2 Formulazione covariante dell'elettromagnetismo	15
2.1 Le equazioni fondamentali	15
2.2 Invarianza di gauge	18
2.3 Trasformazioni di Lorentz ed invarianti del campo elettromagnetico	20
2.4 Il campo generato da una carica in moto rettilineo uniforme	26
2.4.1 Calcolo diretto dei campi	27
2.4.2 Calcolo tramite il 4-potenziale	28
2.4.3 Calcolo dell'impulso trasferito ad una carica inizialmente a riposo	29
2.5 Equazioni del moto di una carica in un campo elettromagnetico	30
2.6 — paragrafo facoltativo — Il formalismo lagrangiano per il campo elettromagnetico	30
2.7 Il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico	33
3 Campo di cariche in moto e irraggiamento	37
3.1 I potenziali ritardati	37
3.2 Richiami di radiazione di dipolo elettrico	40
3.3 Radiazione di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico	42
3.4 I potenziali e i campi di Lienard-Wiechert	44
3.5 La potenza irraggiata da una singola particella	49
3.6 Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (1)	50
3.7 — parte facoltativa — Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (2)	54
3.8 Il caso della accelerazione lineare ed il moto circolare uniforme	55
4 Reazione di radiazione	60
4.1 Argomento euristico non relativistico	60
4.2 Problemi e limiti della formulazione	61
4.3 — parte facoltativa — Generalizzazione relativistica	62
4.4 Limite puntiforme di una carica estesa (Abraham-Lorentz)	64

II Indagine della materia con onde elettromagnetiche	66
5 Scattering e sezione d'urto per onde elettromagnetiche	67
5.1 Sezione d'urto per fenomeni ondulatori	67
5.2 Scattering su circuiti	72
5.2.1 La resistenza di radiazione di una spira quadrata resistiva	72
5.2.2 Onda elettromagnetica su spira quadrata resistiva	73
6 Interazione di onde elettromagnetiche (fotoni) con atomi	76
6.1 Introduzione	76
6.2 Scattering Thomson	77
6.3 Stati risonanti e loro tempi di decadimento	81
6.4 Scattering Rayleigh e fattori di forma	83
6.5 Scattering Compton e produzione di coppie (considerazioni cinematiche)	86
7 **Alcuni argomenti di teoria della diffrazione	88
7.1 **Introduzione	88
7.2 **Polarizzabilità di uno schermo opaco	88
7.3 **Diffrazione da una apertura	91
7.4 **Diffrazione da un ostacolo	93
7.5 **Il teorema ottico	96
7.6 **Diffrazione da un insieme discreto di punti e fattore di forma	97
7.6.1 Caso di un gas	98
7.6.2 Caso di un cristallo	99
7.7 **Oltre la approssimazione di Born: la rifrazione	101
III Indagine della materia con particelle	104
8 **Richiami di cinematica relativistica	105
8.1 **Decadimento $1 \rightarrow 2 + 3$	105
8.1.1 **La relazione $p_a p_b \geq m_a m_b$	107
8.2 Scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$	108
8.2.1 Invarianti relativistici e variabili di Mandelstam	111
9 Scattering e sezioni d'urto di particelle	113
9.1 Introduzione	113
9.2 Sezioni d'urto	116
9.2.1 Singolo proiettile su singolo bersaglio	116
9.2.2 Flusso di proiettili su singolo bersaglio	117
9.2.3 Due flussi di particelle che si scontrano	120
9.2.4 Flusso di particelle su bersaglio fisso	123
9.3 Esempi	125
9.3.1 Sezione d'urto di un fotone su elettrone libero (interazione elettromagnetica)	125
9.3.2 Sezioni d'urto per fotoni su atomo (interazione elettromagnetica)	126
9.3.3 La sezione d'urto protone-protone (interazione forte)	129
9.3.4 La sezione d'urto e^+e^- in adroni (interazione elettrodebole)	129
9.3.5 La sezione d'urto di neutrini e antineutrini su singolo nucleone (interazione debole)	130
9.4 La sezione d'urto Rutherford	132
9.4.1 Misura dei raggi nucleari tramite lo scattering Rutherford	135
9.4.2 Esercizi sulla sezione d'urto Rutherford	137
9.5 Sezione d'urto Mott	139
9.5.1 Espressione della sezione d'urto Mott con le variabili di Mandelstam	140

10 Decadimenti	141
10.1 I decadimenti spontanei	141
10.2 **Decadimenti nucleari: generalità ed esempi	143
10.3 **Probabilità di transizione e spazio delle fasi	154
10.4 **Spazio delle fasi	157
10.5 **Spazio delle fasi a 2 e 3 corpi	170
10.6 **Trasformazione delle funzioni di distribuzione	172
10.7 Effetto Mossbauer e applicazioni	173
IV Interazioni delle particelle cariche con la materia ordinaria	179
11 **Radiazione Cherenkov	180
11.1 **Introduzione	180
11.2 **Richiami di elettromagnetismo nei mezzi	182
11.3 **Radiazione Cherenkov nel caso senza dispersione	186
11.4 **Deduzione della formula di Frank-Tamm	189
11.5 **Deduzione alla Fermi della formula di Frank-Tamm	190
11.6 **Rivelatori Cherenkov	193
11.6.1 Classificazione dei rivelatori	193
11.6.2 Particle Identification	195
11.6.3 Alcune situazioni in cui si utilizzano rivelatori Cherenkov	197
11.7 **Esercizi riassuntivi	198
12 **Radiazione di frenamento (Bremsstrahlung)	201
12.1 **Introduzione	201
12.1.1 Energia irraggiata e sezione d'urto d'irraggiamento	203
12.2 **Il caso non relativistico	205
12.3 **Il caso relativistico e la lunghezza di radiazione	207
12.4 **Formula di Tsai	209
12.5 **Emissione di radiazione elettromagnetica nei decadimenti β	210
12.6 **Sciami elettromagnetici	211
12.7 **Esercizi riassuntivi	212
13 **Perdita di energia per collisioni	214
13.1 **Calcolo à la Bohr	214
13.2 **La formula di Bethe-Bloch	215
13.3 **Bethe-Bloch	218
14 **Scattering coulombiano multiplo	233
15 **Esempi finali	242
15.1 **La scoperta del positrone	242
15.2 **La scoperta dell'antiproton	246
V Appendici	260
A Alcuni dettagli	261
A.1 Convenzioni	261
A.2 Alcune proprietà del tensore completamente antisimmetrico	262
A.3 Sistemi di unità di misura: SI e Gauss	263
A.4 La delta di Dirac e le distribuzioni	266
A.5 Alcuni integrali singolari	269

A.6	Gli integrali di Fresnel	271
A.7	Gli sviluppi asintotici degli integrali \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_1	272
B	Proprietà fondamentali di atomi e nuclei	275
B.1	Atomi e masse atomiche	276
B.2	Dimensioni atomiche	277
B.2.1	Modello atomico di Bohr	278
B.2.2	Gli atomi in fisica quantistica	279
B.3	Nuclei e dimensioni nucleari	282
B.4	Le masse dei nuclei e l'energia di legame nucleare	283
B.4.1	Il modello "a goccia" e i primi termini della formula semiempirica di massa	285
B.4.2	La formula semi-empirica di massa completa e alcune importanti conseguenze	286
B.5	Le tabelle "nuclear wallet cards" e la classificazione dei decadimenti nucleari	287
B.6	Energie di soglia e Q -valori di reazioni o decadimenti nucleari	289
Bibliografia		293

Introduzione

Questi appunti contengono il materiale elaborato dai docenti del corso di “Fisica 3” il cui obiettivo è l’approfondimento dello studio dell’elettromagnetismo in un contesto relativistico, e la sua naturale applicazione all’indagine della materia microscopica (atomi, nuclei, nucleoni, particelle elementari) tramite collisioni e decadimenti.

Tali indagini si effettuano tramite collisioni fra onde elettromagnetiche (fotoni) e materia microscopica, oppure tramite urti fra particelle, oppure studiando i decadimenti spontanei di nuclei o particelle. Nella discussione di queste tematiche sarà utile e necessario effettuare alcuni cenni, puramente fenomenologici e strettamente limitati all’indispensabile, alle interazioni forti e deboli, ed a pochissime nozioni elementari sui nuclei atomici. Le interazioni forti sono infatti le interazioni che, assieme alle interazioni elettromagnetica e gravitazionale – che oggi conoscete solo nella versione classica di Newton – sono responsabili dei comportamenti della materia.

Nonostante nel corso ci si concentrerà principalmente su applicazioni nell’ambito della fisica classica, senza usare in modo diretto i formalismi della meccanica quantistica, molte delle metodologie e degli strumenti introdotti hanno ambiti di applicabilità molto più estesi. Ad esempio il concetto di sezione d’urto nelle sue varie forme è trasversale a tutta la fisica e si estende fino alla chimica ed alla ingegneria. Quanto si dirà a proposito dello scattering delle onde elettromagnetiche è con limitate modifiche estendibile ad ogni fenomeno ondulatorio (quindi ad esempio anche alla acustica) ed in effetti verrà utilizzato spesso per analogia nel caso dello scattering tra particelle quando gli effetti quantistici sono importanti.

Il corso, nella nostra visione, dovrebbe permettere agli studenti di assimilare le nozioni fondamentali per successivi corsi di interazioni fondamentali, relatività generale, fisica teorica e fisica applicata. Negli appunti vi sono alcuni argomenti che riteniamo interessanti da un punto di vista culturale, ma che non fanno parte del programma di esame; tali argomenti sono scritti con caratteri più piccoli oppure esplicitamente indicati con la dizione “facoltativo”.

Gli appunti iniziano (Parte I) con l’approfondimento dell’elettromagnetismo (formulazione covariante campi di cariche in moto relativistico, irraggiamento relativistico) in stretta connessione con il precedente corso di Fisica 2.

Nella parte centrale (Parti II e III) si discutono i metodi di indagine tramite urti, con i due formalismi ondulatorio e corpuscolare, e tramite i decadimenti spontanei. Particolare rilevanza è data all’interazione di fotoni, allo scattering Rutherford e Mott, alle risonanze. Vi sono molte applicazioni delle metodologie che verranno introdotte ed alcune di queste verranno discusse in dettaglio.

La conclusiva Parte (IV) utilizza i risultati precedentemente ottenuti e li applica allo studio delle collisioni delle particelle cariche relativistiche con la materia ordinaria: effetto Cerenkov, perdita di energia per collisioni, radiazione di frenamento, multiplo scattering.

L'appendice contiene riepiloghi su convenzioni, unità di misura e calcoli matematici per la consultazione da parte degli studenti interessati.

Desideriamo ribadire che questi appunti non possono sostituire la lettura di libri di testo più organici e la necessaria frequenza alle lezioni, se si desidera raggiungere una piena comprensione degli obiettivi.

Concludiamo questa introduzione segnalando che questi sono appunti in evoluzione, sia per aggiornamenti suggeriti nel progredire delle lezioni, sia perché alcuni capitoli sono ancora da tradurre da un vecchia versione Microsoft Word alla attuale versione LaTeX. Per questo motivo sono molto probabili refusi ed errori; chiediamo quindi ai lettori di segnalarci commenti, aspetti da chiarire o di refusi.

G. Batignani
C. Bonati

Parte I

Formulazione covariante dell'elettromagnetismo e irraggiamento

Capitolo 1

Complementi sulla geometria della relatività ristretta

In questa sezione si esporranno le idee di base del calcolo tensoriale, con particolare riguardo agli aspetti utili nello studio della relatività ristretta. Come referenze generali riportiamo [1] §2.5 e [2] §16-19, mentre le proprietà principali del gruppo di Lorentz sono discusse più o meno in ogni libro di teoria quantistica dei campi. Useremo $c = 1$ per semplicità di notazione, che è dal punto di vista pratico equivalente ad introdurre la variabile $x^0 = ct$ ed usare la variabile spaziale x^0 per misurare i tempi.

1.1 Introduzione al concetto di tensore

L'idea di base di tutto quanto segue sarà di cercare di distinguere le entità astratte (scalari, vettori, tensori), che rappresentano le quantità fisiche e sono indipendenti dal sistema di coordinate utilizzato, dalle loro componenti, che invece dipendono dal sistema usato, creando un formalismo (indici in alto, indici in basso) che renda algoritmiche il tipo di considerazioni che saranno svolte.

Un vettore p è una entità geometrica che, una volta fissata una base \vec{e}_μ si può scrivere come $p = p^\mu \vec{e}_\mu$ (quando ciò non da luogo ad ambiguità si sottointenderà il simbolo di sommatoria sugli indici ripetuti). Se si effettua un cambio di coordinate $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ e denotiamo lo Jacobiano della trasformazione con

$$R^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} , \quad (1.1.1)$$

allora le componenti del vettore trasformano secondo la legge (trasformazione controvariante)

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = R^\mu_\nu p^\nu . \quad (1.1.2)$$

La motivazione di questa definizione è che si assume che gli spostamenti infinitesimi siano vettori e si ha $dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$. D'altra parte il vettore è sempre lo stesso nei due sistemi di coordinate, quindi $p = p^\mu \vec{e}_\mu = p'^\mu \vec{e}'_\mu$ e si deve avere

$$p^\alpha \vec{e}_\alpha = p'^\mu \vec{e}'_\mu = R^\mu_\alpha p^\alpha \vec{e}'_\mu \quad (1.1.3)$$

e poichè questa relazione deve essere soddisfatta per ogni vettore, cioè per ogni valore numerico assegnato alle componenti p^α , si ha (legge di trasformazione covariante)

$$\vec{e}_\mu \rightarrow \vec{e}'_\mu = (R^{-1})^\nu_\mu \vec{e}_\nu , \quad (1.1.4)$$

dove ovviamente si è usato

$$R^\mu_\alpha (R^{-1})^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu = (R^{-1})^\mu_\alpha R^\alpha_\nu . \quad (1.1.5)$$

Passiamo ora ad analizzare una forma lineare (o covettore), cioè una applicazione lineare dello spazio vettoriale nell'asse reale $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ (un esempio di una forma lineare è la proiezione di un vettore lungo una direzione fissata). In coordinate si ha

$$q(p) = q(p^\mu \vec{e}_\mu) = p^\mu q(\vec{e}_\mu) \equiv p^\mu q_\mu . \quad (1.1.6)$$

Per determinare la regola di trasformazione dei coefficienti q_μ si può ragionare analogamente a come fatto in precedenza, imponendo l'invarianza di $q(p)$ sotto cambi di coordinate, o usare direttamente Eq. (1.1.4), la linearità e la definizione $q_\mu = q(\vec{e}_\mu)$; il risultato che si ottiene in entrambi i casi è

$$q_\mu \rightarrow q'_\mu = (R^{-1})^\nu_\mu q_\nu . \quad (1.1.7)$$

Consideriamo ora il caso che esista un prodotto scalare $(\cdot, \cdot) : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ (non degenere ma non necessariamente definito positivo). In coordinate si ha allora

$$(p, s) = (p^\mu \vec{e}_\mu, s^\nu \vec{e}_\nu) = p^\mu s^\nu (\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \equiv p^\mu s^\nu g_{\mu\nu} . \quad (1.1.8)$$

Di nuovo la legge di trasformazione dei coefficienti $g_{\mu\nu}$ deve essere tale che (p, s) sia invariante, da cui si deduce

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = (R^{-1})^\alpha_\mu (R^{-1})^\beta_\nu g_{\alpha\beta} \quad (1.1.9)$$

cioè ogni indice in basso trasforma separatamente come un indice di un covettore. D'altra parte esiste un secondo modo di pensare il prodotto scalare: (p, s) è una forma lineare nel vettore p , quindi si può scrivere

$$(p, s) \equiv s(p) = s_\mu p^\mu . \quad (1.1.10)$$

Dal confronto con Eq. (1.1.8) si deduce che $s_\mu = g_{\mu\nu} s^\nu$ ed è un semplice esercizio verificare che entrambi i membri di questa relazione trasformano nello stesso modo sotto trasformazione di coordinate. Questo è un caso particolare di una relazione generale che sarà analizzata tra breve.

Si può ora considerare la matrice inversa di $g_{\mu\nu}$, che sarà indicata con $g^{\mu\nu}$ ed è definita da

$$g_{\nu\rho} g^{\rho\mu} = \delta_\nu^\mu = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} . \quad (1.1.11)$$

Richiedendo che $g'^{\mu\nu}$ sia la matrice inversa di $g'_{\mu\nu}$ si ottiene

$$\delta_\mu^\rho = g'_{\mu\nu} g'^{\nu\rho} = (R^{-1})^\alpha_\mu (R^{-1})^\beta_\nu g_{\alpha\beta} g'^{\nu\rho} \quad (1.1.12)$$

e quindi

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g'^{\mu\nu} = R_\alpha^\mu R_\beta^\nu g^{\alpha\beta} , \quad (1.1.13)$$

cioè ogni indice in alto trasforma separatamente come un indice di un vettore.

In generale si definiscono componenti di un tensore di rango (n, m) un insieme di oggetti con n indici in alto ed m in basso, che trasforma secondo la regola

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \cdots \nu_m} = R^{\mu_1}_{\alpha_1} \cdots R^{\mu_n}_{\alpha_n} (R^{-1})^{\beta_1}_{\nu_1} \cdots (R^{-1})^{\beta_m}_{\nu_m} T^{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{\beta_1 \cdots \beta_m} \quad (1.1.14)$$

quindi in particolare uno scalare (invariante) è un tensore di tipo $(0, 0)$, le componenti di vettore formano un tensore di tipo $(1, 0)$, le componenti di un covettore formano un tensore di tipo $(0, 1)$, le componenti della matrice $g_{\mu\nu}$ formano un tensore di tipo $(0, 2)$ ed infine le componenti della matrice $g^{\mu\nu}$ formano un tensore di tipo $(2, 0)$. È inoltre facile vedere che δ_β^α è un tensore di tipo $(1, 1)$ invariante:

$$\delta_\nu^\mu \rightarrow \delta'^\mu_\nu = R_\alpha^\mu (R^{-1})^\beta_\nu \delta_\beta^\alpha = R_\alpha^\mu (R^{-1})^\alpha_\nu = \delta_\nu^\mu . \quad (1.1.15)$$

È semplice verificare che le seguenti operazioni possono essere utilizzate per produrre nuovi tensori da tensori noti: il prodotto diretto $(n, m) \otimes (n', m') \rightarrow (n + n', m + m')$:

$$R'^{\mu_1 \cdots \mu_{n+n'}}_{\nu_1 \cdots \nu_{m+m'}} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \cdots \nu_m} S^{\mu_{n+1} \cdots \mu_{n+n'}}_{\nu_{m+1} \cdots \nu_{m+m'}} \quad (1.1.16)$$

e la contrazione $(n, m) \rightarrow (n - 1, m - 1)$:

$$R^{\mu_2 \cdots \mu_n}_{\nu_2 \cdots \nu_m} \equiv T^{\alpha \mu_2 \cdots \mu_n}_{\alpha \nu_2 \cdots \nu_m}. \quad (1.1.17)$$

Notiamo esplicitamente che l'operazione di contrazione degli indici è ben definita dal punto di vista tensoriale solo quando si contrae un indice covariante con uno controvariante. La contrazione, ad esempio, di due indici controvarianti in un tensore (n, m) non produce un tensore $(n - 2, m)$. Un caso particolare della combinazione di queste due operazioni è stato visto in precedenza: $s_\mu = g_{\mu\nu}s^\nu$. In modo analogo si possono alzare/abbassare indici in modo standard usando $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$. Da un punto di vista formale si sta usando una metrica non degenere per costruire un isomorfismo tra lo spazio vettoriale ed il suo duale.

Fino ad ora non si è fatta nessuna assunzione sul tipo particolare di cambio di coordinate e proseguendo su questa strada si arriverebbe alla geometria differenziale e, dal punto di vista fisico, alla relatività generale. La difficoltà risiede nella legge di trasformazione delle derivate: è semplice vedere che $\partial_\mu f$ trasforma come un covettore (basta usare la derivazione a catena), però per generiche trasformazioni di coordinate $\partial_\mu \partial_\nu f$ non trasforma come un tensore covariante a due indici. Analogamente $\partial_\mu v^\nu$ non è un tensore di rango (1,1) e $\partial_\mu v^\mu$ non è uno scalare per trasformazioni generiche di coordinate. Identificheremo quindi alcuni particolari tipi di cambi di coordinate per cui le cose funzionano bene, che possono essere poi identificati con i cambi di sistemi di riferimento inerziali. L'assunzione che si richiederà è che le trasformazioni lascino invariata la forma della metrica, cioè che siano isometrie dello spazio-tempo.

Se la metrica di partenza è quella euclidea, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$, le isometrie sono identificate dalla relazione $R^t R = I$, ovvero $R^t = R^{-1}$, quindi $(R^{-1})^\alpha_\beta = (R^t)^\alpha_\beta = R^\beta_\alpha$. Di conseguenza la legge di trasformazione degli indici controvarianti è la stessa degli indici covarianti: questo è il motivo per cui per i tensori euclidei usati in meccanica classica non relativistica non si distingue tra indici in alto ed indici in basso.

1.2 Il caso della metrica lorentziana

Se indichiamo ora con Λ la matrice di trasformazione R della sezione precedente (quindi $p^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$), allora il gruppo delle isometrie della metrica pseudo-euclidea $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, comunemente indicato con la notazione $O(1, 3)$, corrisponde alle trasformazioni che lasciano la metrica invariata. Se la metrica rimane invariata anche la sua inversa rimane invariata, quindi si ha

$$\eta^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \eta^{\alpha\beta} \Lambda^\nu_\beta, \quad (1.2.1)$$

che si può riscrivere come $\eta^{-1} = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^t$. Considerando l'inversa di questa equazione (nota che prendendo il trasposto di $\Lambda \Lambda^{-1} = 1$ si vede che $(\Lambda^t)^{-1} = (\Lambda^{-1})^t$) si trova $\eta = (\Lambda^{-1})^t \eta \Lambda^{-1}$, che non è altro che la legge di trasformazione della metrica con gli indici in basso:

$$\eta_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\beta_\nu. \quad (1.2.2)$$

Moltiplicando a sinistra $\eta = (\Lambda^{-1})^t \eta \Lambda^{-1}$ per Λ^t e a destra per Λ si trova $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$, da cui si vede che se Λ è una isometria allora anche Λ^{-1} è una isometria. È inoltre immediato verificare che la composizione di due isometrie è ancora una isometria, da cui segue che il gruppo delle isometrie è effettivamente un gruppo.

Le componenti della matrice inversa Λ^{-1} possono essere ottenute da $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^t \eta$, che in componenti assume la forma

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \eta^{\mu\alpha} (\Lambda^t)^\alpha_\beta \eta_{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha} \Lambda^\beta_\alpha \eta_{\beta\nu}. \quad (1.2.3)$$

Vista la forma di questa equazione è talora usata per gli elementi della matrice $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu$ la notazione Λ_ν^μ che non sarà però usata nel seguito per evitare di confondersi con le posizioni degli indici.

Prendendo il determinante dell'equazione $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ si ottiene subito $\det \Lambda = \pm 1$, inoltre, considerando la componente 00, si ha

$$1 = \eta_{00} = \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 \quad (1.2.4)$$

e quindi

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^i_0)^2 \geq 1. \quad (1.2.5)$$

Esistono quindi almeno quattro componenti connesse del gruppo di Lorentz, che sono associate ai valori $\det \Lambda = \pm 1$ e $\Lambda^0_0 \leq 0$. La componente con determinante positivo ed ortocrona ($\Lambda^0_0 > 0$) è comunemente denominata gruppo di Lorentz proprio, le altre componenti connesse si ottengono componendo una trasformazione di Lorentz propria con la trasformazione di parità ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) e/o l'operazione di inversione temporale $t \rightarrow -t$ (per una dimostrazione del fatto che queste componenti sono effettivamente connesse vedi ad es. [3] §2.1).

Una proprietà fondamentale delle trasformazioni di Lorentz (più in generale delle isometrie) è che sono lineari. Si può infatti mostrare che le uniche trasformazioni non singolari, derivabili almeno due volte ed il cui Jacobiano lascia la metrica di Lorentz invariata sono trasformazioni lineari. Questo risolve il problema notato alla fine della sezione precedente sulla non covarianza delle derivate seconde ed in generale delle derivate che agiscono su tensori.

Per mostrare la linearità delle isometrie si può procedere come segue: derivando la relazione

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \quad (1.2.6)$$

rispetto a x^ρ si ottiene

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \quad (1.2.7)$$

e sommando a questa espressione quella ottenuta scambiando $\mu \leftrightarrow \rho$ e sottraendo quella ottenuta scambiando $\rho \leftrightarrow \nu$ si ottiene (usando il fatto che $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$)

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\rho \partial x^\nu} = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \quad (1.2.8)$$

e poiché il prodotto scalare è non degenere e per ipotesi la trasformazione è non singolare, si ottiene

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = 0. \quad (1.2.9)$$

Si è visto in Sez. (1.1) che δ_ν^μ è un tensore invariante per generiche trasformazioni di coordinate, ovvero le sue componenti hanno gli stessi valori indipendentemente dalle coordinate usate. Se ci si limita alle trasformazioni di Lorentz anche $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$ sono invarianti per costruzione. Se ci si restringe a considerare il gruppo di Lorentz proprio (o, nel caso euclideo, $SO(4)$ o in tre dimensioni $SO(3)$), esiste un altro tensore invariante oltre a questi ed è il tensore completamente antisimmetrico (tensore di Levi-Civita) $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, definito da

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{per permutazioni pari di } 1234 \\ -1 & \text{per permutazioni dispari di } 1234 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \quad (1.2.10)$$

Si ha infatti

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.2.11)$$

e l'espressione a secondo membro è chiaramente completamente antisimmetrica in $\mu\nu\rho\sigma$ (ad esempio scambiare $\mu \leftrightarrow \nu$ è equivalente a scambiare $\alpha \leftrightarrow \beta$, quindi si prende un segno meno a causa di $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$). Utilizzando questo fatto si può quindi scrivere

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\beta \Lambda^3_\gamma \Lambda^4_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det \Lambda = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.2.12)$$

dove si è usata l'espressione $\det M = \sum_{\text{perm}} (-1)^\sigma M^1_{\sigma(1)} \cdots M^n_{\sigma(n)}$ per il determinante di una matrice $n \times n$. Abbassando gli indici si ottiene analogamente

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\gamma} \eta_{\sigma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\eta) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (1.2.13)$$

che è di nuovo un tensore invariante. Nel caso tridimensionale, in cui il gruppo di invarianza è $SO(3)$, il corrispondente tensore invariante è ϵ^{ijk} . Per le generalizzazioni al caso quadridimensionale delle usuali formule di contrazione tridimensionali per il tensore completamente antisimmetrico vedi Sez. (A.2). Se non ci si limita alle trasformazioni di Lorentz ma si usano trasformazioni generiche di coordinate si vede in modo analogo che il tensore $\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è invariante per le trasformazioni aventi Jacobiano positivo, dove g è la metrica.

Notiamo a questo punto che la proprietà di simmetria o antisimmetria per scambio di due indici (entrambi covarianti o entrambi controvarianti) è una proprietà intrinseca di un tensore, cioè è conservata nei cambi di riferimento: se ad esempio $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, allora si ha

$$A'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu A^{\mu\nu} = \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\alpha_\mu A^{\nu\mu} = A'^{\beta\alpha} . \quad (1.2.14)$$

Usando le proprietà di simmetria/antisimmetria degli indici, si possono ottenere delle relazioni tra tensori apparentemente diversi. Consideriamo ad esempio il caso di un tensore a due indici antisimmetrico in tre dimensioni (ad esempio $M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$), un tale tensore ha 3 componenti indipendenti, cioè le stesse di un vettore, quindi non è sorprendente che possa essere riscritto in una forma “vettoriale”. Per fare ciò basta considerare la sua contrazione con un tensore completamente antisimmetrico

$$v^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} M_{ij} , \quad (1.2.15)$$

(il fattore $1/2$ è convenzionale, per fare in modo che in questo caso specifico si ottenga $\vec{v} = \vec{x} \times \vec{p}$). È importante notare che, a causa delle proprietà di ϵ^{kij} , entrambi i membri di questa relazione trasformano nello stesso modo solo se la trasformazione di cambio di coordinate ha determinante $+1$. Il vettore v^k è cioè uno pseudo-vettore, che trasforma correttamente se $\det \Lambda = +1$ ma con un segno sbagliato se $\det \Lambda = -1$. Nel caso generale di uno spazio D -dimensionale, usando il tensore di Levi-Civita si può costruire in modo analogo il duale di un tensore completamente antisimmetrico di tipo $(0, n)$ (con $n \leq D$), ottenendo l’isomorfismo

$$\text{antisym}(0, n) \simeq \text{antisym}(D - n, 0) ; \quad (1.2.16)$$

il tensore duale di T è spesso indicato con le notazioni $\star T$ o \tilde{T} .

Consideriamo infine la trasformazione delle derivate parziali $\partial/\partial x^\mu$: usando la chain rule si ha

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.2.17)$$

quindi le derivate rispetto alle coordinate trasformano in modo covariante, cioè $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$. Poichè Λ è una matrice costante, le regole di trasformazione degli operatori differenziali di grado più elevato seguono da quanto si è visto: ad esempio $\partial_\mu \partial_\nu$ è un tensore simmetrico di tipo $(0,2)$. In generale le derivate rispetto ad osservabili controvarianti risultano covarianti e viceversa. Da ciò segue che un po’ di attenzione ai segni è necessaria nel formalismo lagrangiano, in quanto i momenti coniugati sono “naturalmente” covarianti

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (1.2.18)$$

mentre normalmente gli impulsi vengono pensati come vettori controvarianti. Il vettore impulso è in realtà $p^\mu = \eta^{\mu\nu} p_\nu$.

Tutto questo formalismo può essere usato per scrivere le equazioni differenziali della fisica in un modo che ne renda manifeste le regole di trasformazione ed in particolare il fatto che la loro validità non dipende dal sistema di riferimento usato; una tale proprietà si chiama covarianza delle equazioni. Consideriamo ad esempio l’equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 . \quad (1.2.19)$$

Risulta naturale introdurre la quadricorrente $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ (ricordiamo che $x^0 = ct$) e riscrivere l’equazione di continuità nella forma $\partial_\mu j^\mu = 0$, quindi dal fatto che questa relazione deve essere vera in ogni sistema di coordinate segue che j^μ deve trasformare come un quadrvettore.

Capitolo 2

Formulazione covariante dell'elettromagnetismo

2.1 Le equazioni fondamentali

Per studiare la formulazione covariante dell'elettromagnetismo è concettualmente conveniente usare il sistema di unità di Gauss, in quanto il risultato finale sarà che il campo elettrico ed il campo magnetico sono due componenti di una stessa entità più generale e nel Sistema Internazionale il campo elettrico ed il campo magnetico hanno unità di misura diverse. Dal punto di vista pratico si evita di appesantire le equazioni con i fattori dimensionati ϵ_0 e μ_0 ; per i fattori di conversione Gauss↔SI vedi Sez. (A.3).

Indicando con ρ la densità di carica e con \vec{j} la densità di corrente, le equazioni di Maxwell nel vuoto nel sistema di unità di Gauss si scrivono come:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 ;\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

mentre la forza di Lorentz assume la forma

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) .\tag{2.1.2}$$

A causa della assenza di monopoli magnetici si può introdurre il potenziale vettore \vec{A} , legato al campo magnetico da $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; la legge di Faraday si può allora scrivere nella forma

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0\tag{2.1.3}$$

e quindi si può introdurre il potenziale scalare ϕ , tramite il quale il campo elettrico si può scrivere nella forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} .\tag{2.1.4}$$

Con l'introduzione dei potenziali scalare e vettore le due equazioni di Maxwell omogenee sono automaticamente soddisfatte e le non omogenee si scrivono nella forma

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Per iniziare la conversione dal formalismo tridimensionale a quello quadridimensionale è conveniente partire dalla versione quadridimensionale della densità di corrente, la quadricorrente

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}). \quad (2.1.6)$$

Un modo formale ma molto diretto di mostrare che j^μ è un quadrivettore controvariante è quello già discusso alla fine della sezione precedente: l'equazione di continuità $\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ si può scrivere nella forma $\partial_\mu j^\mu = 0$ ed affinchè questa equazione sia valida in tutti i sistemi di riferimento (ovvero affinchè la carica sia conservata in tutti i sistemi di riferimento) j^μ deve essere un quadrivettore controvariante.

Esempio 2.1.1: —facoltativo—

Dimostrare che j^μ è un quadrivettore controvariante usando il fatto sperimentale che la carica elettrica è un invariante di Lorentz, quindi $\rho dV = \rho' dV'$.

Soluzione: Anche l'elemento di volume quadridimensionale è un invariante di Lorentz (poichè si ha $d^4x = |\det\Lambda|d^4x' = d^4x'$), quindi $dt dV = dt' dV'$ e introducendo il tempo proprio di una particella $d\tau$ (che è invariante per costruzione) si ha quindi che $\rho \frac{d\tau}{dt}$ è un invariante:

$$\rho' \frac{d\tau}{dt'} = \rho' \frac{dV' d\tau}{dV' dt'} = \rho \frac{dV d\tau}{dV dt} = \rho \frac{dV d\tau}{dV dt} = \rho \frac{d\tau}{dt} \quad (2.1.7)$$

da cui si ottiene $\rho = \rho_0 \frac{d\tau}{dt}$, dove si è introdotta la densità di carica ρ_0 nel sistema di riferimento in cui non c'è corrente (in contesti idrodinamici chiamato riferimento di Eckart). Per quanto riguarda le componenti spaziali si ha (nota che stiamo assumendo un mezzo omogeneo, altrimenti è possibile ad esempio avere $\rho = 0$ e \vec{j} non nullo)

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho \frac{d\vec{x}}{dt} = \rho \frac{d\tau}{dt} \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \rho_0 \frac{d\vec{x}}{d\tau}, \quad (2.1.8)$$

dove si è nuovamente usato $\rho_0 = \rho \frac{d\tau}{dt}$. Da questa equazione segue quindi che $(c\rho, \vec{j}) = \rho_0 u^\mu$, dove $u^\mu = (c\gamma, \gamma \vec{v})$ è la quadrivelocità, e poichè ρ_0 è un invariante $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ è effettivamente un quadrivettore controvariante.

□ —fine parte facoltativa—

A questo punto introduciamo il quadripotenziale

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (2.1.9)$$

che si mostrerà a breve essere un vettore controvariante. Tramite A^μ le equazioni di Maxwell non omogenee Eq. (2.1.5) si possono scrivere nella forma

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (2.1.10)$$

come si vede facilmente usando

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (2.1.11)$$

Dalla richiesta che l'equazione Eq. (2.1.10) sia valida in ogni sistema di riferimento segue allora che A^μ trasforma effettivamente come un quadrivettore controvariante.

Si è appena visto che A^μ è la generalizzazione covariante del potenziale scalare e vettore; si pone ora il problema di trovare la generalizzazione covariante dei campi elettrico e magnetico. A questo proposito si introduce il tensore di campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu , \quad (2.1.12)$$

che è ovviamente un tensore di tipo (2, 0) antisimmetrico. Il tensore $F_{\mu\nu}$ può essere costruito abbassando gli indici di $F^{\mu\nu}$ con il tensore metrico e si ottiene $F_{0i} = -F^{0i}$, $F_{ij} = F^{ij}$. Esplicitamente si ha (usando $\partial^i = -\partial_i$)

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \phi)^i = -E_i \\ F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i = (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) \partial^m A^n = \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnk} \partial^m A^n = \\ &= -\epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = -\epsilon^{ijk} B_k . \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Notiamo che, una volta passati alla scrittura "tridimensionale" in modo coerente, non ha più senso distinguere indici alti da indici bassi. Si ha quindi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & B_y \\ +E_y & B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.1.14)$$

In generale ad ogni tensore antisimmetrico quadridimensionale di rango 2 si possono associare in modo analogo un vettore polare (corrispondente al campo elettrico) ed un vettore assiale (corrispondente al campo magnetico) e risulta conveniente introdurre una notazione che renda esplicita questa associazione: nel caso specifico $F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})$ e $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$. Le relazioni inverse delle Eq. (2.1.13) sono ovviamente

$$\begin{aligned} E_i &= -F^{0i} = F_{0i} \\ B_i &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

e le equazioni di Maxwell non omogenee Eq. (2.1.10) possono naturalmente essere riscritte in termini del tensore di campo come

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu . \quad (2.1.16)$$

L'equazione di continuità si ottiene immediatamente da questa equazione in quanto

$$\partial_\nu j^\nu \propto \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.1.17)$$

in cui l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico mentre $\partial_\mu \partial_\nu$ è simmetrico.

Per esprimere le equazioni di Maxwell omogenee in termini del tensore di campo è conveniente introdurre il tensore duale, definito da

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (2.1.18)$$

che è legato ai campi elettrico e magnetico da

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{B}, -\vec{E}), \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = (\vec{B}, -\vec{E}) . \quad (2.1.19)$$

Utilizzando $\tilde{F}^{\mu\nu}$ le equazioni omogenee possono infatti essere riscritte nella forma

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.1.20)$$

visto che

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= \partial_i \tilde{F}^{i0} = +\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu j} &= -\partial_0 B_j + \partial_i \tilde{F}^{ij} = -\partial_0 B_j + \partial_i (\epsilon^{ijk} E_k) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_j}{\partial t} - (\vec{\nabla} \times \vec{E})_j.\end{aligned}\quad (2.1.21)$$

Nel caso tridimensionale le equazioni di Maxwell omogenee possono essere interpretate come delle condizioni di integrabilità necessarie per poter introdurre i potenziali scalare e vettore. Questo resta vero anche nel caso quadridimensionale: la condizione Eq. (2.1.20) è infatti la condizione necessaria (e sufficiente in uno spazio semplicemente connesso) affinché si possa scrivere il campo $F^{\mu\nu}$ nella forma Eq. (2.1.12). Un indizio in proposito è dato dal fatto che se usiamo la forma Eq. (2.1.12) allora l'equazione Eq. (2.1.20) risulta automaticamente soddisfatta:

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0,\quad (2.1.22)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\partial_\mu \partial_\rho$ è simmetrico per scambio di $\mu \leftrightarrow \rho$, mentre $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è antisimmetrico.

L'equazione Eq. (2.1.20) può essere riscritte in termini di $F^{\mu\nu}$ procedendo come segue

$$0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{6} \epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}),\quad (2.1.23)$$

dove nell'ultimo passaggio si è riscritta la somma sugli indici muti in tre modi diversi, e si è usata la antisimmetria del tensore di Levi-Civita. È immediato verificare che la combinazione che compare tra parentesi è completamente antisimmetrica per scambio degli indici μ, ρ, σ , quindi affinché la contrazione con $\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$ si annulli è necessario che essa stessa si annulli. Si ottiene quindi una forma equivalente della Eq. (2.1.20) scritta in termini del tensore di campo invece che del suo duale:

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0.\quad (2.1.24)$$

2.2 Invarianza di gauge

Nel formalismo tridimensionale i campi elettrico e magnetico non determinano univocamente i potenziali scalare e vettoriale. Analogamente il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ non determina univocamente il quadripotenziale A_μ : è infatti immediato verificare che la trasformazione

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu f,\quad (2.2.1)$$

dove f è una generica funzione regolare della posizione, lascia invariato il tensore di campo. Questa proprietà è nota come invarianza di gauge dell'elettromagnetismo e la trasformazione Eq. (2.2.1) è chiamata trasformazione di gauge. Scritta in notazione tridimensionale Eq. (2.2.1) diventa le usuali

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f.\quad (2.2.2)$$

Si vedrà più avanti (vedi Sez. (2.6)) che questa invarianza è associata alla conservazione della carica.

La ridondanza associata all'invarianza di gauge può essere usata per imporre ulteriori vincoli alle equazioni, rendendole più semplici. Supponiamo di partire da un dato quadripotenziale $A_{(0)}^\mu$ e scegliamo ad esempio di effettuare una trasformazione di gauge con una funzione f che soddisfi $\partial_\mu \partial^\mu f = \partial_\nu A_{(0)}^\nu$. Allora si vede subito che $A^\mu = A_{(0)}^\mu - \partial^\mu f$ soddisfa la condizione

$$\partial_\mu A^\mu = 0,\quad (2.2.3)$$

che è nota come gauge di Lorenz¹. Questa condizione non fissa ancora univocamente il quadripotenziale, in quanto la condizione di Lorenz è invariante per trasformazioni di gauge che soddisfino

¹Lorenz da L. Lorenz, che non è il fisico H. A. Lorentz delle trasformazioni di Lorentz.

l'equazione $\partial_\mu \partial^\mu f = 0$. Nella gauge di Lorenz le equazioni di Maxwell non-omogenee assumono un forma particolarmente trasparente: si ha infatti $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu$ e quindi l'equazione Eq. (2.1.16) si riduce nella gauge di Lorenz a delle equazioni d'onda:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu . \quad (2.2.4)$$

Nel vuoto, cioè in assenza di cariche, la componente A^0 del quadripotenziale nella gauge di Lorenz soddisfa quindi $\partial_\mu \partial^\mu A^0 = 0$ e si può usare la libertà di gauge residua per fissare $A^0 = 0$ e quindi la condizione di Lorenz si può ridurre nel vuoto a $A^0 = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Per verificare che questo sia effettivamente possibile supponiamo che il quadripotenziale $A_{(1)}^\mu$ soddisfi l'equazione d'onda $\partial_\mu \partial^\nu A_{(1)}^\mu = 0$ e l'equazione della gauge di Lorenz $\partial_\mu A_{(1)}^\mu = 0$ e costruiamo il nuovo quadripotenziale $A_{(2)}^\mu = A_{(1)}^\mu - \partial^\mu g$, dove

$$g(t, \vec{r}) = c \int_0^t A_{(1)}^0(t', \vec{r}) dt' + h(\vec{r}) \quad (2.2.5)$$

e $h(\vec{r})$ è una funzione da determinare. È immediato verificare che si ha $A_{(2)}^0(t, \vec{r}) = 0$, inoltre si ha

$$\partial_\mu \partial^\mu g = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) g(t, \vec{r}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_{(1)}^0(t, \vec{r}) - c \int_0^t \nabla^2 A_{(1)}^0(t', \vec{r}) dt' - \nabla^2 h(\vec{r}) = \quad (2.2.6)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_{(1)}^0(t, \vec{r}) - \int_0^t \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} A_{(1)}^0(t', \vec{r}) dt' - \nabla^2 h(\vec{r}) = \quad (2.2.7)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_{(1)}^0(0, \vec{r}) - \nabla^2 h(\vec{r}) , \quad (2.2.8)$$

quindi si può scegliere $h(\vec{r})$ tale che $\partial_\mu \partial^\mu g = 0$, ottenendo $\partial_\mu A_{(2)}^\mu = 0$ e $\partial^\nu \partial_\nu A_{(2)}^\mu = 0$.

La scelta di gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ è invece nota come gauge di Coulomb o trasversa e si può ottenere partendo da un quadripotenziale generico $A_{(0)}^\mu$ utilizzando la trasformazione di gauge associata ad una funzione f che soddisfa $\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{(0)}$. Anche nella gauge di Coulomb è presente una libertà di gauge residua: ad esempio si può ancora modificare f aggiungendo una funzione che dipende solo dal tempo. Nella gauge di Coulomb le equazioni Eq. (2.1.5) assumono la forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -4\pi \rho \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} , \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

quindi il potenziale scalare soddisfa l'equazione di Poisson come nel caso elettrostatico, mentre il potenziale vettore soddisfa una equazione d'onda con una corrente modificata.

Esempio 2.2.1: —facoltativo—

Scrivere le equazioni per il potenziale scalare e vettoriale nel gauge di Coulomb utilizzando il formalismo delle correnti trasversali e longitudinali.

Soluzione: Per chiarire il significato della corrente modificata, è conveniente scrivere la corrente \vec{j} nella forma $\vec{j} = \vec{j}_L + \vec{j}_T$, con $\vec{\nabla} \times \vec{j}_L = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T = 0$ (per le espressioni esplicite di \vec{j}_L e \vec{j}_T vedi ad es. [4] §6.3). Scomponendo anche il campo elettrico e magnetico in componenti longitudinali e trasverse nella equazione di Maxwell per $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ (che è trasverso) si ottiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_T , \quad 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t} \quad (2.2.10)$$

e, poiché $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ed \vec{A} è puramente trasverso per la scelta di gauge, si ha $\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi$ e quindi dall'equazione precedente si ottiene

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_L . \quad (2.2.11)$$

Si noti che questa equazione è consistente con l'equazione di continuità, che in questa notazione si scrive $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_L = 0$. L'equazione differenziale del potenziale vettore nella gauge di Coulomb assume dunque la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_T , \quad (2.2.12)$$

che sembra una equazione locale, ma la corrente trasversa è in realtà non locale.

□ — **fine parte facoltativa** —

Nonostante la fisica debba essere la stessa indipendentemente dalla scelta di gauge, con alcune scelte di gauge alcuni fenomeni possono risultare immediatamente evidenti, mentre in altre gauge è necessario un po' di lavoro per arrivare agli stessi risultati. Ad esempio nella gauge di Lorenz è evidente che il campo elettromagnetico propaga con velocità c , visto che le equazioni del moto sono delle equazioni d'onda; nella gauge di Coulomb, invece, questo è molto meno chiaro: il potenziale scalare reagisce infatti in ogni punto istantaneamente ad un cambio di ρ , mentre il calcolo del potenziale vettoriale è complicato dalla presenza della componente longitudinale della corrente. D'altra parte nella gauge di Coulomb si riconoscono più chiaramente i gradi di libertà fisici del campo elettromagnetico libero (le due polarizzazioni trasverse di \vec{A}). Per un confronto esplicito delle soluzioni nelle gauge di Lorenz e di Coulomb ed una dimostrazione della loro equivalenza, vedi [5]. Un altro vantaggio della gauge di Lorenz è che è una gauge definita da una condizione covariante, motivo per cui questa gauge è quella preferita se si vuole mantenere la covarianza a vista delle soluzioni. Altre scelte di gauge meno convenzionali (ad esempio la gauge assiale, definita da $A^3 = 0$) possono comunque in alcuni casi risultare utili: ad esempio nello studio dei livelli di Landau in meccanica quantistica si usa per un campo magnetico uniforme diretto lungo \hat{z} la scelta di gauge $\phi = 0$, $A_y = Bx$, $A_x = A_z = 0$.

2.3 Trasformazioni di Lorentz ed invarianti del campo elettromagnetico

Dal fatto che il campo elettrico e magnetico si possano scrivere tramite il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ si possono ottenere semplicemente le espressioni per le trasformazioni di Lorentz dei campi: basterà usare $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$.

Consideriamo ad esempio il caso di un boost con velocità v lungo la direzione positiva dell'asse \hat{x} : la matrice di trasformazione sarà data da

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (2.3.1)$$

dove come al solito $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Utilizzando questa espressione nella regola di trasformazione di $F^{\mu\nu}$ e ricordando che $F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})$ si ottengono subito le relazioni cercate: ad esempio si ha

$$F'^{01} = \Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} = (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) F^{01} = F^{01} \quad (2.3.2)$$

e quindi $E'_x = E_x$. Le relazioni complete sono:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x , & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) , & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) , & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) . \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Queste relazioni possono essere scritte in un modo che non dipende esplicitamente dal fatto che il boost fosse lungo l'asse \hat{x} introducendo le componenti parallele (\parallel) ed ortogonali (\perp) a $\vec{\beta}$ dei

campi, ottenendo

$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}).\end{aligned}\quad (2.3.4)$$

Scrivendo $\vec{E}_{\parallel} = \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})/\beta^2$ e $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel}$ (ed analogamente per \vec{B}) ed usando $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$ e $(1 - \gamma)/\beta^2 = -\gamma^2/(\gamma + 1)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \\ \vec{B}' &= \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B})\end{aligned}\quad (2.3.5)$$

Le trasformazioni inverse si ottengono come al solito con il cambiamento $\vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$. Il fatto che l'oggetto che trasforma in modo covariante per trasformazioni di Lorentz sia il tensore di campo, comporta quindi che il campo elettrico e magnetico non trasformino separatamente, ma siano “mescolati” nella trasformazione di Lorentz.

Se consideriamo ad esempio il caso in cui in un dato sistema di riferimento S' si abbia $\vec{B}' = 0$, allora si ha $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$, $\vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}$, $\vec{B}_{\parallel} = 0$ e

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{\beta} \times \vec{E}' = \vec{\beta} \times (\gamma \vec{E}'_{\perp}) = \vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp} = \vec{\beta} \times \vec{E}. \quad (2.3.6)$$

È interessante notare che, nel limite $\beta \rightarrow 1$, la relazione tra i campi \vec{E} e \vec{B} è la stessa che si avrebbe in una onda elettromagnetica avente direzione di propagazione $\hat{\vec{n}} = \vec{\beta}$. Analogamente, nel caso in cui in un dato sistema di riferimento S' si abbia $\vec{E}' = 0$, negli altri sistemi di riferimento si ha $\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$, $\vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp}$, $\vec{E}_{\parallel} = 0$ e

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} = -\gamma \vec{\beta} \times \vec{B}' = -\vec{\beta} \times \vec{B}. \quad (2.3.7)$$

Esempio 2.3.1: — facoltativo —

Applicazione di Eq. (2.3.7) in fisica dei plasmi: mostrare che il campo magnetico evolve all'interno di un plasma seguendo il movimento delle particelle, come se le linee di campo del campo magnetico fossero vincolate a passare sempre attraverso le stesse particelle.

Soluzione: Se si approssima un plasma come un liquido avente densità di massa ρ_m e conducibilità σ infinita (conduttore perfetto), allora nel sistema di riferimento in cui il plasma è istantaneamente e localmente in quiete si ha schermaggio perfetto e non è presente campo elettrico (per le equazioni che si ottengono se non si effettua l'ipotesi $\sigma = \infty$ vedi [4] §7.7, [6] §63). Usando Eq. (2.3.7) nell'equazione dell'induzione si ha allora in un sistema di riferimento generico (in cui il plasma ha localmente una velocità $\vec{v}(\vec{r}, t)$)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.3.8)$$

Esplicitando le derivate a secondo membro ed usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ si ottiene

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (2.3.9)$$

Inoltre si può usare l'equazione di continuità della massa

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0 \Rightarrow \rho_m \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{1}{\rho_m} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho_m = 0, \quad (2.3.10)$$

per ottenere dopo alcune manipolazioni elementari

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho_m} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{B}}{\rho_m} = \left(\frac{\vec{B}}{\rho_m} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} . \quad (2.3.11)$$

Se ora consideriamo due particelle distanti $\delta\vec{r}$ all'interno del plasma e supponiamo che la velocità della prima al tempo t sia $\vec{v}(\vec{r}, t)$, allora la velocità allo stesso tempo della seconda è data da $\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) \simeq \vec{v}(\vec{r}, t) + (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t)$, quindi la distanza $\delta\vec{r}$ tra le due particelle soddisfa l'equazione

$$\frac{d}{dt} \delta\vec{r} = (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} , \quad (2.3.12)$$

che è identica all'equazione Eq. (2.3.11) soddisfatta da \vec{B}/ρ_m . In particolare se le due particelle si trovano su una stessa linea di campo, cioè $\vec{B} \parallel \delta\vec{r}$, allora le due particelle rimarranno sulla stessa linea di campo durante l'evoluzione temporale. Di conseguenza il campo magnetico evolve all'interno del plasma seguendo il movimento delle particelle, come se le linee di campo fossero vincolate a passare sempre attraverso le stesse particelle. In particolare il flusso magnetico attraverso un circuito chiuso che si muove insieme al fluido resta costante, risultato noto come teorema di Alfvén.

□ — fine parte facoltativa —

Utilizzando il tensore $F^{\mu\nu}$ è possibile non solo dedurre le regole di trasformazione dei campi elettrico e magnetico, ma anche costruire espressioni dei campi che risultino invarianti sotto trasformazioni di Lorentz: per ottenere espressioni invarianti di Lorentz è sufficiente contrarre indici fino ad arrivare ad una espressione senza più indici. Ovviamente contrazioni diverse porteranno ad espressioni diverse, ma si può mostrare che gli unici invarianti indipendenti che è possibile costruire sono (per maggiori dettagli vedi dopo o [7] §25, [2] §21.1 per un approccio diverso)

$$I_1 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} , \quad I_2 = \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \quad (2.3.13)$$

Dati due generici tensori antisimmetrici $A^{\mu\nu} = (\vec{p}, \vec{a})$ e $B^{\mu\nu} = (\vec{q}, \vec{b})$ (usando la notazione introdotta sotto Eq. (2.1.14), quindi ad esempio $A^{0i} = p^i$ e $A^{ij} = -\epsilon_{ijk} a^k$) si ha

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = A^{0i} B_{0i} + A^{i0} B_{i0} + A^{ij} B_{ij} = -2\vec{p} \cdot \vec{q} + \epsilon^{ijm} a_m \epsilon_{ijk} b^k = 2(\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{p} \cdot \vec{q}) \quad (2.3.14)$$

e ricordando che $F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})$, $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$, e $\tilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{B}, -\vec{E})$ si trovano quindi, in termini dei campi tridimensionali, le espressioni

$$I_1 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) , \quad I_2 = -4\vec{B} \cdot \vec{E} , \quad (2.3.15)$$

di cui la prima è uno scalare e la seconda uno pseudoscalare. Se in un sistema di riferimento si annulla il campo magnetico o il campo elettrico, allora si ha $I_2 = 0$ e questo significa che in ogni sistema di riferimento il campo elettrico e magnetico devono essere ortogonali, come era stato visto esplicitamente in precedenza. Una onda elettromagnetica corrisponde al caso $I_1 = I_2 = 0$: in tutti i sistemi di riferimento il campo elettrico e magnetico hanno la stessa intensità e sono ortogonali tra loro.

Mostreremo ora che $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ed $\vec{B}^2 - \vec{E}^2$ sono gli unici due invarianti indipendenti mostrando che i campi \vec{E} e \vec{B} (e quindi $F^{\mu\nu}$) possono essere ridotti ad una forma canonica che dipende solo da questi due invarianti. Si vuole far vedere che

- se $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ allora esiste un sistema di riferimento in cui i vettori \vec{E} e \vec{B} sono paralleli ed entrambi non nulli
- se $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 > 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ esiste un sistema di riferimento in cui $\vec{B} = 0$
- se $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 < 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ esiste un sistema di riferimento in cui $\vec{E} = 0$

nel caso $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ i campi sono invece ovviamente ortogonali e di modulo uguale in ogni sistema di riferimento.

Consideriamo inizialmente il caso $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, quindi in particolare $\vec{E} \neq 0$: tramite rotazioni tridimensionali ci si può ricondurre al caso in cui il campo elettrico è diretto lungo il verso positivo dell'asse \hat{x} ed il campo magnetico

è sul piano $z = 0$. Se consideriamo ora un boost $\vec{\beta} = \beta\hat{z}$ si ha $\vec{B}_\perp = \vec{B}$ e $\vec{E}_\perp = \vec{E}$, quindi usando le leggi di trasformazione Eq. (2.3.4) si trova

$$\begin{aligned} B'_x &= \gamma B_x ; & E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) \\ B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x) ; & E'_y &= \gamma\beta B_x \\ B'_z &= 0 ; & E'_z &= 0 . \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Dal fatto che $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ segue che $B_x \neq 0$ e quindi $B'_x \neq 0$, inoltre se supponiamo $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \geq 0$ (il caso $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 < 0$ si tratta in modo praticamente identico invertendo i ruoli di \vec{E} e \vec{B}) allora si ha $E'_x > 0$ (dato che $E_x > 0$ e $|\beta| < 1$) e la condizione $\vec{B}' \parallel \vec{E}'$ si può scrivere nella forma $B'_y/B'_x = E'_y/E'_x$. Questa equazione si può scrivere esplicitamente come

$$E_x B_y \beta^2 - (E_x^2 + \vec{B}^2) \beta + E_x B_y = 0 \quad (2.3.17)$$

o in modo più suggestivo, introducendo $W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ e $S = \frac{c}{4\pi}|\vec{E} \times \vec{B}|$, nella forma

$$\frac{S}{c}\beta^2 - 2W\beta + \frac{S}{c} = 0 . \quad (2.3.18)$$

Il discriminante di questa equazione di secondo grado è

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= W^2 - \frac{S^2}{c^2} = \frac{1}{64\pi^2} \left[(E^2 + B^2)^2 - 4|\vec{E} \times \vec{B}|^2 \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{64\pi^2} \left[(E^2 + B^2)^2 - 4E^2 B^2 \right] = \frac{1}{64\pi^2} (E^2 - B^2)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

e quindi l'equazione ammette le soluzioni reali

$$\beta = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - S^2/c^2}}{S/c} . \quad (2.3.20)$$

Poichè si è appena visto che $W \geq S/c$ la soluzione con il segno + è maggiore di 1 e non accettabile, mentre per quella con il segno - si ha $0 \leq \beta \leq 1$. Il caso $\beta = 1$ ovviamente non è accettabile ma si presenta solo quando $W = S/c$, che corrisponde al caso $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Siamo giunti quindi alla conclusione che se $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ esiste un sistema di riferimento in cui il campo elettrico ed il campo magnetico sono paralleli ed entrambi non nulli² (come segue ovviamente dall'invarianza di $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$).

I casi in cui $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ sono più semplici da trattare: basta ruotare le coordinate per fare in modo che il campo elettrico sia diretto lungo il verso positivo dell'asse \hat{y} , il campo magnetico lungo il verso positivo dell'asse \hat{z} ed effettuare un boost lungo \hat{x} imponendo che si annullino E'_y o B'_z secondo che $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ sia negativo o positivo.

Usando questo risultato si vede che il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ può sempre essere ridotto ad una delle due seguenti forme canoniche, di cui la prima vale nel caso $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ e la seconda in tutti gli altri casi:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.21)$$

infine nel secondo caso i valori E, B sono fissati univocamente dai valori di $\vec{E} \cdot \vec{B}$ e $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$.

Esercizio 2.3.1: Consideriamo la matrice associata alla trasformazione di Lorentz “standard”:

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.22)$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di questa matrice e discutere il loro eventuale significato fisico.

Esempio 2.3.2: (Potenziale vettore di un'onda piana) Supponiamo che in un sistema di riferimento inerziale S il campo elettrico di un'onda piana monocromatica nel vuoto sia $\vec{E} = (E_0 \sin(\omega t - kz), 0, 0)$, con $\omega = ck$. Questo campo corrisponde ad un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse \hat{z} e è polarizzata lungo \hat{x} , quindi il corrispondente campo magnetico è dato da $\vec{B} = (0, E_0 \sin(\omega t - kz), 0)$.

²Notiamo che esistono in effetti infiniti sistemi di riferimento in cui questa affermazione è valida: una volta che entrambi i campi sono paralleli all'asse \hat{x} , un boost lungo l'asse \hat{x} conserva la forma dei campi

1. Trovare un possibile quadri-potenziale vettore $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ nel sistema S e calcolarne la quadri-divergenza $\partial_\mu A^\mu$ e la divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.
2. Trovare un differente quadri-potenziale (sempre nel sistema S) e calcolarne la quadri-divergenza e la divergenza tridimensionale.
3. Riscrivere il quadripotenziale trovato nel primo punto in un sistema di riferimento S' che si muove con velocità $\vec{v} = (0, 0, \beta c)$ rispetto ad S .

Soluzione:

1. Ricordando che si ha $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, una possibile scelta è $A^\mu = (0, \frac{E_0}{k} \cos(\omega t - kz), 0, 0)$. Si verifica facilmente che con questa scelta il campo magnetico è (correttamente) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, E_0 \sin(\omega t - kz), 0)$, mentre $\partial_\mu A^\mu = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.
2. Un differente quadri-potenziale, sempre nel sistema S , è dato ad esempio da

$$A_{(2)}^\mu = \left(\frac{E_0}{k} \cos(\omega t - kz), \frac{E_0}{k} \cos(\omega t - kz), 0, \frac{E_0}{k} \cos(\omega t - kz) \right), \quad (2.3.23)$$

che si ottiene dal precedente con la trasformazione di gauge $A_{(2)}^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$ utilizzando la funzione $f = \frac{E_0}{k^2} \sin(\omega t - kz)$. Poichè sono collegati da una trasformazione di gauge i due quadripotenziali generano gli stessi campi elettrico e magnetico, mentre per le altre quantità si ha

$$\partial_\mu A_{(2)}^\mu = \partial_\mu A^\mu + \partial_\mu \partial^\mu f = 0 \quad (2.3.24)$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{(2)} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 f = E_0 \sin(\omega t - kz) \neq 0. \quad (2.3.25)$$

3. Per calcolare il quadripotenziale nel sistema S' occorre trasformare dal sistema di riferimento S al sistema S' sia il quadrvettore A^μ , sia il punto generico $x^\mu = (ct, x, y, z)$ in cui esso è calcolato. Utilizzando la matrice di trasformazione

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.3.26)$$

abbiamo $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ e $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$, per cui

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= y, & z' &= \gamma(z - \beta ct), & ct' &= \gamma(ct - \beta z) \\ A'^\mu &= \left(0, \frac{E_0}{k} \cos(\omega t - kz), 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Il quadripotenziale resta formalmente invariato, a parte il fatto fondamentale che occorre riscrivere il punto in cui viene calcolato in funzione delle variabili del sistema S' , usando le relazioni $z = \gamma(z' + \beta ct')$ e $ct = \gamma(ct' + \beta z')$ che si ottengono dalle precedenti semplicemente cambiando il segno di β . L'argomento del coseno nell'espressione di A'^μ diventa quindi

$$\omega\gamma(t' + \beta z'/c) - k\gamma(z' + \beta ct') = \omega't' - k'z' \quad (2.3.28)$$

dove

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad k' = \omega'/c, \quad (2.3.29)$$

che sono le ben note formule per l'effetto Doppler longitudinale. Possiamo infine ottenere il campo elettrico ed il campo magnetico nel sistema S' :

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= -\vec{\nabla}' A'^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} E_0 (\sin(\omega't' - k'z'), 0, 0) \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla}' \times \vec{A}' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} E_0 (0, \sin(\omega't' - k'z'), 0).\end{aligned}\quad (2.3.30)$$

□

Esempio 2.3.3: (*Il potenziale vettore di un solenoide*) Propedeutico alla discussione dell'effetto Aharonov-Bohm in meccanica quantistica.

1. Trovare un possibile quadripotenziale A^μ per descrivere il campo generato da un solenoide di altezza infinita, raggio a , n spire per unità di lunghezza, percorso da una corrente costante I . Calcolare la quadridivergenza $\partial_\mu A^\mu$ e la divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.
2. Si può trovare una trasformazione di gauge che annulli il potenziale vettore in ogni punto esterno al solenoide?

Si suggerisce di usare un sistema di coordinate (cartesiane o cilindriche) in cui l'asse z coincide con l'asse del solenoide.

Soluzione:

1. Poniamo a zero la componente temporale del quadripotenziale. Introducendo la notazione $B_z = \mu_0 n I$ (SI) = $4\pi n I / c$ (CGS) per indicare l'intensità del campo magnetico all'interno del solenoide, si ha (indicando con γ un percorso nel piano ortogonale all'asse \hat{z} e con $S(\gamma)$ l'area da esso delimitata)

$$\int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S(\gamma)} \vec{B} \cdot \hat{z} dS, \quad (2.3.31)$$

quindi, cercando una soluzione in simmetria cilindrica, l'unica componente non nulla è quella tangenziale A_ϕ e le linee di forza del potenziale vettore sono circonferenze con centro sull'asse z . Indicando con r la coordinata cilindrica radiale, si ha

$$A_\phi = \begin{cases} rB_z/2 & \text{per } r < a \\ a^2 B_z / 2r & \text{per } r > a \end{cases} \quad (2.3.32)$$

e quindi infine, in coordinate cartesiane

$$A^\mu = \begin{cases} \frac{B_z}{2}(0, -y, x, 0) & \text{per } r < a \\ \frac{a^2 B_z}{2(x^2+y^2)}(0, -y, x, 0) & \text{per } r > a \end{cases}. \quad (2.3.33)$$

È a questo punto semplice verificare che il campo magnetico associato a questo quadripotenziale è effettivamente

$$\vec{B} = \begin{cases} (0, 0, B_z) & \text{per } r < a \\ (0, 0, 0) & \text{per } r > a \end{cases} \quad (2.3.34)$$

e che $\partial_\mu A^\mu = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ in ogni punto dello spazio.

2. Anche se è possibile avere differenti potenziali vettori i cui rotori danno il campo magnetico del solenoide, il potenziale vettore non si può annullare in ogni punto esterno al solenoide perché la sua circuitazione lungo linea chiusa che racchiude il solenoide non può annullarsi, essendo uguale al flusso concatenato del campo magnetico, che è una quantità gauge invariante.

È interessante considerare la trasformazione di gauge $A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$, dove A^μ è il quadripotenziale trovato nel punto 1) e $\chi = \frac{a^2 B_z}{2} \arctan(x/y)$. Una tale trasformazione sembra infatti annullare il quadripotenziale all'esterno del solenoide, cosa che si è appena mostrato essere impossibile. Perchè questa trasformazione di gauge non è legittima? \square

Esempio 2.3.4: (Filo rettilineo carico) Sull'asse \hat{z} di un sistema di riferimento inerziale S si trova – in quiete – un filo uniformemente carico con densità lineare di carica λ_0 .

1. Scrivere una possibile forma del quadripotenziale nel sistema S .
2. Sia S' un altro sistema di riferimento inerziale, in moto con velocità $(0, 0, -\beta c)$ rispetto al sistema S . Trasformare il quadripotenziale da S ad S' ed utilizzarlo per ricavare il campo elettrico ed il campo magnetico in S' .

Soluzione:

1. La più semplice (ed ovvia) forma del qudripotenziale nel sistema S ha il potenziale elettrostatico del filo uniformemente carico come componente temporale, mentre la componente spaziale è nulla: in CGS

$$A^\mu = \left(-2\lambda_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2}, 0, 0, 0 \right) . \quad (2.3.35)$$

2. Per ottenere le grandezze nel sistema S' occorre utilizzare $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$ e $A'^\mu = \Lambda_\nu^\mu A^\nu$ con la matrice di trasformazione

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \quad (2.3.36)$$

Quindi $x' = x$, $y' = y$ e

$$A'^\mu = \left(-2\lambda' \ln \sqrt{x'^2 + y'^2}, 0, 0, -2\lambda'\beta \ln \sqrt{x'^2 + y'^2} \right) \quad (2.3.37)$$

con $\lambda' = \gamma\lambda_0$. Da questo quadripotenziale si ottengono quindi il campo elettrico ed il campo magnetico in un punto generico del sistema S' :

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{\nabla}' A'^0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} = \frac{2\lambda'}{x'^2 + y'^2}(x', y', 0) , \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla}' \times \vec{A}' = \frac{2\lambda'\beta}{x'^2 + y'^2}(x', -y', 0) \end{aligned} . \quad (2.3.38)$$

\square

2.4 Il campo generato da una carica in moto rettilineo uniforme

Vista la sua importanza pratica nelle applicazioni, in particolare per la perdita di energia per collisioni che sarà discussa in Cap. (13), in questa sezione si considererà in dettaglio il campo generato da una particella carica in moto rettilineo uniforme.

Per comodità definiamo come sistema S quello in cui una carica e si muove di moto rettilineo uniforme con legge oraria $x = \beta ct$, $y = 0$, $z = 0$; definiamo anche un sistema di riferimento S' solidale con la carica stessa (e ovviamente con $\hat{x} \parallel \hat{x}'$, etc...). L'obiettivo primario consiste nel

calcolare, in ogni punto (x, y, z) dello spazio al tempo t , i campi elettrici e magnetici prodotti dalla particella carica, studiandone le principali caratteristiche (intensità, tempi caratteristici...). Questo può essere fatto in due modi diversi: o scrivendo direttamente i campi nel sistema S' e trasformandoli con le regole di trasformazione dei campi, oppure trasformando la più semplice forma del quadripotenziale da S a S' e poi calcolando i campi.

Una volta ottenuta la forma dei campi prodotti dalla particella carica nel sistema del laboratorio S , un altro punto importante – che sarà fondamentale nel seguito – è stimare l'impulso acquisito da una carica spettatrice inizialmente in quiete, accelerata dal campo della particella in moto rettilineo uniforme. Questo permetterà di giustificare quantitativamente l'autoconsistenza di alcune ipotesi semplificatrici che saranno utilizzate in Cap. (13).

2.4.1 Calcolo diretto dei campi

Nel sistema di riferimento S' solidale con la particella di carica e , i campi nella posizione \vec{R}' sono dati dalle espressioni

$$\vec{E}' = e \frac{\vec{R}'}{R'^3}, \quad \vec{B}' = 0'. \quad (2.4.1)$$

Come si è visto in precedenza (Sez. (2.3) ed in particolare Eq. (2.3.6)) nel sistema S in cui la particella si muove con velocità \vec{v} sono presenti sia un campo elettrico che un campo magnetico, le cui componenti sono date da

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}. \quad (2.4.2)$$

Le coordinate della particella nei due sistemi di riferimento S ed S' sono legate dalle relazioni

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (2.4.3)$$

Esplicitamente si ha allora

$$R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2} = \gamma \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (2.4.4)$$

ed è conveniente introdurre R_* definito da $R' = \gamma R_*$, in modo da scrivere le componenti del campo elettrico in S nella forma

$$E_x = \frac{e(x - vt)}{\gamma^2 R_*^3}, \quad E_y = \frac{ey}{\gamma^2 R_*^3}, \quad E_z = \frac{ez}{\gamma^2 R_*^3}, \quad (2.4.5)$$

quindi in forma vettoriale

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{e \vec{R}_i}{R_*^3} \quad (2.4.6)$$

dove \vec{R}_i è la posizione del punto di osservazione rispetto alla posizione della particella:

$$\vec{R}_i = (x - vt, y, z). \quad (2.4.7)$$

Se chiamiamo θ l'angolo tra il vettore \vec{R}_i e la direzione del moto (asse \hat{x}), si ha allora chiaramente

$$(x - vt)^2 = R_i^2 \cos^2 \theta, \quad y^2 + z^2 = R_i^2 \sin^2 \theta \quad (2.4.8)$$

da cui

$$R_* = \sqrt{R_i^2 \cos^2 \theta + (1 - \beta^2) R_i^2 \sin^2 \theta} = R_i \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \quad (2.4.9)$$

e quindi infine

$$\vec{E} = \frac{e \vec{R}_i}{\gamma^2 R_i^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (2.4.10)$$

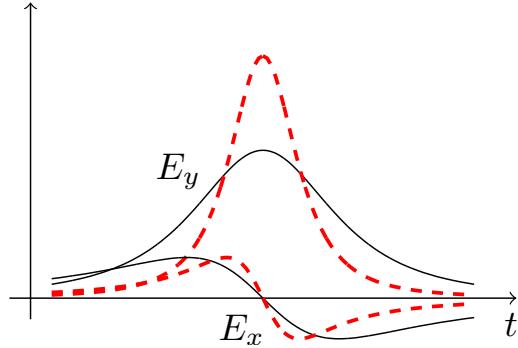


Figura 2.1: Andamento delle componenti E_x ed E_y del campo elettrico generato da una particella in moto rettilineo uniforme come viste da un osservatore avente parametro di impatto b per $\beta = 0.7$ (curva continua nera) e $\beta = 0.9$ (curva tratteggiata rossa) per $-2b/c \leq t \leq 2b/c$.

Calcoliamo ora la forma del campo vista al passare del tempo da un osservatore fisso nel punto $x = 0, y = b, z = 0$, cui corrisponde il vettore $\vec{R}_i = (-vt, b, 0)$. Se in questa posizione fosse presente una particella carica, b corrisponderebbe al “parametro di impatto” dell’urto, vedi Sez. (9.2). Il campo elettrico si scrive allora nella forma

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{evt}{\gamma^2 R_*^3} = -\frac{evt}{\gamma^2(v^2t^2 + b^2/\gamma^2)^{3/2}} = -\frac{e\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_y &= \frac{eb}{\gamma^2 R_*^3} = \frac{e\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

mentre per il campo magnetico si ha $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}$ con $\vec{v} = (v, 0, 0)$, quindi

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{v}{c} E_y = \frac{\gamma \beta e b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (2.4.12)$$

Un grafico degli andamenti delle componenti del campo elettrico in funzione del tempo è mostrato in Fig. (2.1) e si può notare che il campo elettrico è significativamente diverso da zero solo per tempi $|t| \lesssim b/(v\gamma)$, che il picco di E_y scala come $e\gamma/b^2$ mentre i picchi di E_x valgono sempre $\sqrt{\frac{4}{27}} e/b^2$.

2.4.2 Calcolo tramite il 4-potenziale

La più semplice (ed ovvia) forma del quadripotenziale nel sistema S' è chiaramente

$$A'^\mu = \left(\frac{e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, 0, 0, 0 \right). \quad (2.4.13)$$

Nel sistema S si ha $A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu$, dove la matrice di trasformazione è

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.14)$$

e ricordando 2.4.3 si trova subito

$$A^\mu = \left(\frac{\gamma e}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\beta\gamma e}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}, 0, 0 \right). \quad (2.4.15)$$

Con semplici derivate si ottengono quindi le espressioni

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e(x-vt)}{\gamma^2 [(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} , \\ E_y &= \frac{ey}{\gamma^2 [(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} , \\ E_z &= \frac{ez}{\gamma^2 [(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} , \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

che coincidono con le Eq. (2.4.6) ottenute nella sezione precedente. Per il campo magnetico si ottiene analogamente:

$$\begin{aligned} B_x &= 0, \quad B_y = \frac{-e\beta z}{\gamma^2 [(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} , \\ B_z &= \frac{e\beta y}{\gamma^2 [(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)]^{3/2}} , \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

consistentemente con la relazione generale $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}$ usata in precedenza.

2.4.3 Calcolo dell'impulso trasferito ad una carica inizialmente a riposo

Utilizzando il tempo caratteristico $\tau = \frac{b}{v\gamma}$, le espressioni precedentemente ottenute per il campo elettrico e magnetico generato dalla particella in moto rettilineo uniforme nel punto P di coordinate $(0, b, 0)$ possono essere riscritte nella forma

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{e}{b^2} \frac{t/\tau}{(1+t^2/\tau^2)^{3/2}} , \quad E_y = \frac{e}{b^2} \frac{\gamma}{(1+t^2/\tau^2)^{3/2}} , \quad E_z = 0 , \\ B_x &= 0 , \quad B_y = 0 , \quad B_z = \frac{e}{b^2} \frac{\beta\gamma}{(1+t^2/\tau^2)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Supponiamo ora che nel punto P in cui è calcolato il campo sia presente una particella di carica $-e$ (che nelle applicazioni sarà un elettrone), inizialmente ferma. Calcoliamo la variazione della sua quantità di moto dovuta al solo campo elettrico della particella in moto rettilineo uniforme, nell'ipotesi che il suo spostamento da P durante il passaggio della carica sia trascurabile. In questa approssimazione possiamo calcolare la variazione di impulso integrando in t le espressioni dei campi elettrici precedentemente ottenute, in quanto la particella rimane nella stessa posizione. In questa approssimazione si vede subito che la particella può acquisire un impulso solo lungo l'asse \hat{y} , infatti E_z è nullo mentre E_x è una funzione dispari del tempo, quindi il suo integrale nel tempo si annulla. Rimane quindi solo

$$\Delta p_y = -e \int_{-\infty}^{+\infty} E_y dt = -\frac{e^2 \gamma}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2/\tau^2)^{3/2}} dt = -\frac{e^2 \gamma \tau}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\xi^2)^{3/2}} d\xi . \quad (2.4.19)$$

Utilizzando il fatto che la primitiva della funzione integranda è $\xi / \sqrt{1+\xi^2}$ si ottiene

$$\Delta p_y = -\frac{2e^2 \gamma \tau}{b^2} = -\frac{2e^2}{bv} , \quad (2.4.20)$$

dove ricordiamo che v è la velocità della particella in moto rettilineo uniforme che genera i campi. Utilizzando il raggio classico dell'elettrone $r_e = e^2/(m_e c^2) \simeq 2.8$ fm questa espressione può essere riscritta nella forma $|\Delta p_y| = 2m_e c r_e / (b\beta)$ (dove il fattore β quello della particella in moto rettilineo uniforme).

Se $b \gg 2r_e/\beta$ si ha quindi $|\Delta p_y|/(m_e c) \ll 1$: l'elettrone rimane quindi non relativistico ed è giustificata autoconsistentemente l'ipotesi di aver trascurato l'effetto del campo magnetico nel calcolo dell'impulso. Visto che il tempo caratteristico dell'urto è τ , possiamo infine stimare di quanto si è spostato l'elettrone durante l'urto tramite

$$|\Delta y| \approx \frac{\tau |\Delta p_y|}{m_e} = \frac{2r_e}{\beta^2 \gamma} . \quad (2.4.21)$$

L'approssimazione impulsiva di elettrone praticamente fermo durante l'urto è giustificata se $|\Delta y| \ll b$, che diventa $b \gg \frac{2r_e}{\beta^2 \gamma}$, condizione facilmente verificata da particelle relativistiche e più debole di quella già usata per trascurare l'effetto del campo magnetico.

In questa situazione l'energia cinetica trasferita dalla particella (di carica unitaria) in moto veloce all'elettrone risulta essere

$$T_e = \frac{1}{2} m_e \beta_e^2 c^2 = \frac{2 \alpha \hbar c r_e}{b^2 \beta^2} . \quad (2.4.22)$$

2.5 Equazioni del moto di una carica in un campo elettromagnetico

Le equazioni del moto di una carica di carica e e massa m si scrivono nel formalismo tridimensionale come

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} , \quad (2.5.1)$$

dove $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ è l'impulso della particella. La generalizzazione covariante di questa equazione del moto dovrà ovviamente essere scritta in termini della quadrivelocità u^μ , del quadriimpulso $p^\mu = mu^\mu$ e del tensore di campo $F^{\mu\nu}$ e dovrà essere della forma $\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$, dove f^μ è la quadriforza. Poiché il tensore di campo è lineare nei campi, la quadriforza dovrà essere una funzione lineare della quadrivelocità e del tensore di campo. Esplicitamente si ha $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v})$ e di conseguenza il quadrivettore $F^{\mu\nu} u_\nu$ ha componenti

$$\begin{aligned} F^{0\nu} u_\nu &= F^{0i} u_i = \gamma \vec{E} \cdot \vec{v} \\ F^{i\nu} u_\nu &= F^{i0} u_0 + F^{ij} u_j = c\gamma E_i + \gamma \epsilon^{ijk} B_k v_j = c\gamma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)_i . \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Poiché $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$ e $dt = \gamma d\tau$, l'equazione del moto può quindi essere scritta in forma covariante come segue

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu . \quad (2.5.3)$$

Infatti le componenti spaziali riproducono l'equazione Eq. (2.5.1), mentre la componente temporale si scrive come $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v}$, che è l'espressione della conservazione dell'energia. Questa relazione si può ottenere moltiplicando Eq. (2.5.1) per \vec{v} e notando che da $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ segue $\mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2 \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$ e quindi $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$.

2.6 — paragrafo facoltativo — Il formalismo lagrangiano per il campo elettromagnetico

Un modo di ottenere le equazioni del moto di un punto materiale è imporre la stazionarietà della azione per variazioni $\delta \vec{x}(t)$ tali che $\delta \vec{x}(t_0) = \delta \vec{x}(t_1) = 0$, con la azione scritta nella forma

$$S[x(t), t] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) dt . \quad (2.6.1)$$

Nel caso di una teoria di campo in cui la variabile fondamentale sia il campo $\varphi_A(x)$ (con x indichiamo il quadrivettore posizione, con A un generico indice tensoriale) la azione si scrive nella forma

$$S[\varphi_A(x), x] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi_A(x), \partial_{\mu}\varphi_A(x), x) d^4x , \quad (2.6.2)$$

dove \mathcal{L} è la densità lagrangiana e Ω può essere una regione finita dello spaziotempo o tutto lo spaziotempo; nel secondo caso si deve anche imporre che i campi decadano all'infinito abbastanza rapidamente affinché l'integrale converga. Analogamente al caso unidimensionale si considerano variazioni dei campi che si annullano al bordo $\partial\Omega$ del dominio di integrazione, in modo da poter trascurare termini di superficie nelle integrazioni per parti³.

Affinchè le equazioni del moto ottenute variando S siano covarianti di Lorentz è sufficiente che S sia invariante di Lorentz. Dato che d^4x è invariante è sufficiente che \mathcal{L} sia invariante di Lorentz. Inoltre anche prima di scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange si può osservare che per variazioni dei campi che si annullano al bordo la variazione di S non cambia se si aggiunge alla densità lagrangiana una quadridivergenza $\partial_{\mu}\mathcal{N}^{\mu\nu_1\dots\nu_n}(\varphi_A(x), x)$, poichè la azione viene modificata solo per un termine che dipende dai valori dei campi al bordo.

Passiamo ora alla deduzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per la azione Eq. (2.6.2): per una variazione $\delta\varphi_A(x)$ si ha

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} \delta\varphi_A(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\varphi_A(x))} \delta\partial_{\mu}\varphi_A(x) \right) d^4x = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} \delta\varphi_A(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\varphi_A(x))} \partial_{\mu}\delta\varphi_A(x) \right) d^4x = \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\varphi_A(x))} \right) \delta\varphi_A(x) d^4x \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

e quindi, data la genericità di $\delta\varphi_A$, si trovano le equazioni di stazionarietà

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu}\varphi_A(x))} = 0 . \quad (2.6.4)$$

Notiamo esplicitamente che queste equazioni sono covarianti a vista nel caso in cui \mathcal{L} sia uno scalare. Osservazione importante sulla notazione: il simbolo ∂_{μ} che compare nel secondo termine delle equazioni di Eulero-Lagrange è una derivata totale rispetto a x^{μ} , in modo esattamente analogo al caso unidimensionale in cui compare d/dt . In più variabili non esiste tuttavia un segno convenzionale per la derivata totale (anche perché non è davvero “totale”: è totale rispetto alla coordinata x^{μ} con un singolo specifico valore di μ) quindi occorre ricordare la cosa. In pratica $\partial_{\mu}F(\varphi_A(x), \partial_{\nu}\varphi_A(x), x) = \partial_{\mu}F + \frac{\partial F}{\partial \phi_A} \partial_{\mu}\phi_A + \frac{\partial F}{\partial (\partial_{\nu}\phi_A)} \partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi_A$, dove la prima ∂_{μ} che compare a secondo membro è una derivata realmente parziale, ovvero ottenuta derivando solo la dipendenza esplicita di F da x^{μ} .

Nel caso elettromagnetico il campo fondamentale è A_{μ} e, dato che le equazioni del moto sono lineari nel tensore di campo, è ragionevole supporre che la densità lagrangiana sia quadratica nel tensore di campo. Si è visto in precedenza in Sez. (2.3) che esistono due soli invarianti indipendenti del campo elettromagnetico, entrambi quadratici: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Si vede semplicemente che il secondo di questi invarianti si può riscrivere come una divergenza quadridimensionale:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_{\mu}A_{\nu})(\partial_{\rho}A_{\sigma}) = \partial_{\mu}(2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_{\nu}(\partial_{\rho}A_{\sigma})) , \quad (2.6.5)$$

ed è quindi ragionevole attendersi che per la parte elettromagnetica della lagrangiana si abbia $\mathcal{L} \propto F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Questo ragionamento non è in realtà totalmente corretto, perché si è scritto $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

³Nel caso in cui nella densità lagrangiana compaiano derivate di ordine superiore al primo questo non è sufficiente e sono necessari dei termini di bordo lagrangiani per definire il problema in modo formalmente corretto, cosa che accade ad esempio in relatività generale (vedi [8] appendice B).

come derivata di una funzione sia dei campi sia delle loro derivate, tuttavia è facile verificare esplicitamente che le equazioni di Eulero-Lagrange associate alla densità di lagrangiana $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ sono identicamente soddisfatte da ogni campo A_μ regolare (per cui vale il teorema di Schwarz).

Useremo quindi

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.6.6)$$

dove la presenza di c è legata al fatto che $d^4x = cdtd^3x$ e gli altri fattori numerici sono una normalizzazione conveniente per il caso in cui sia presente anche materia. Le equazioni di campo omogenee sono soddisfatte automaticamente da $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e bisogna mostrare che la variazione di Eq. (2.6.6) produce le altre equazioni di campo, ovvero $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ (le equazioni disomogenee con $j^\mu = 0$). Per fare ciò è conveniente notare che

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2\partial_\alpha A_\beta \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} (\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) \quad (2.6.7)$$

quindi si ha $\partial\mathcal{L}/\partial A_\mu = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{8\pi c} \left(\eta^{\mu\gamma} \eta^{\nu\delta} (\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) + \partial_\alpha A_\beta \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} (\delta_\gamma^\mu \delta_\delta^\nu - \delta_\delta^\mu \delta_\gamma^\nu) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi c} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange della azione Eq. (2.6.6) sono quindi effettivamente $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$.

Nel caso in cui sia presente anche materia carica (ovvero una densità di corrente), è necessario aggiungere alla azione anche un termine di interazione tra campo elettromagnetico e cariche, dato dalla densità di lagrangiana

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{c^2} A_\mu j^\mu, \quad (2.6.9)$$

dove nuovamente una potenza di c a denominatore è conseguenza della normalizzazione $dx^0 = cdt$. Si ha ovviamente

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c^2} j^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0, \quad (2.6.10)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange per $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{int}$ diventano $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$, ovvero le equazioni di Maxwell non omogenee. Nel caso in cui la corrente sia associata al moto di una carica puntiforme di carica e che si muove lungo la traiettoria $s^\mu(\tau)$ con quadrivelocità $u^\mu(\tau) = \frac{ds^\mu}{d\tau}$ si può utilizzare l'espressione

$$j^\mu(x) = ec \int u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - s(\tau)) d\tau \quad (2.6.11)$$

per la quadricorrente. Le componenti spaziali e temporali di questo quadrivettore sono infatti le corrette espressioni per $e\rho$ e \vec{j} per una particella puntiforme:

$$\begin{aligned} j^0(\vec{r}, t) &= ec \int \delta(ct - s^0) \delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0))) ds^0 = ec\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= ec \int \frac{d\vec{s}}{ds^0} \delta(ct - s^0) \delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0))) ds^0 = e\dot{\vec{s}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)). \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

Il termine di interazione con il campo può essere quindi riscritto nel modo equivalente

$$S_{int} = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu(x) j^\mu(x) d^4x = -\frac{e}{c} \int d^4x \int d\tau A_\mu(x) u^\mu(\tau) \delta^4(x - s(\tau)) \quad (2.6.13)$$

e usando la δ per effettuare l'integrale in d^4x si ottiene la forma

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int A_\mu(s(\tau)) u^\mu(\tau) d\tau. \quad (2.6.14)$$

Con le sostituzioni $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ e $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ questa espressione si può riscrivere come

$$S_{int} = \int \left(-e\phi(\vec{s}(t)) + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{v}(t) \right) dt , \quad (2.6.15)$$

che è la forma nota dal corso di Meccanica Classica della lagrangiana di una particella in interazione con il campo elettromagnetico (vedi ad es. [9] §2.5). Nel caso di particelle puntiformi la azione completa è quindi data dalla somma del termine elettromagnetico S_{em} , del termine di interazione S_{int} e dell'usuale termine cinetico $S_{kin} = -mc^2 \int d\tau$ delle particelle.

Nella formulazione lagrangiana risulta chiaro il legame tra la conservazione della carica e l'invarianza di gauge: il termine di interazione tra la quadricorrente ed il quadripotenziale è proporzionale a $\int j_\mu A^\mu d^4x$ ed è l'unico termine della azione che non è a vista invariante di gauge. Effettuando una generica trasformazione di gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu f$, con f a supporto compatto, si vede che la lagrangiana è invariante di gauge se e solo se $\partial_\mu j^\mu = 0$, ovvero se la carica è conservata.

Il passaggio alla formulazione hamiltoniana presenta alcuni problemi legati al fatto che la densità di lagrangiana \mathcal{L}_{em} è singolare, cioè non esiste una relazione biunivoca tra le "velocità" e gli "impulsi coniugati". Le variabili "posizione" sono le componenti di A^μ ed i momenti coniugati si definiscono come al solito tramite (facendo attenzione ad indici covarianti e controvarianti)

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \dot{A}^\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial (\partial^0 A^\mu)} = -\frac{1}{4\pi c} F_{0\mu} . \quad (2.6.16)$$

È quindi subito evidente un problema: il momento coniugato alla variabile A^0 è identicamente nullo. Questo è una conseguenza del fatto che le variabili A^μ sono sovrabbondanti per la descrizione del sistema (a causa della invarianza di gauge) e la relazione $P_0 = 0$ dovrebbe essere interpretata come un vincolo per la consistenza della teoria. Per una introduzione alla trattazione generale di questo tipo di problemi si può vedere [10] §1, mentre per un approccio tramite gauge-fixing si può vedere ad esempio [11] §8.

2.7 Il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico

Se supponiamo di avere una distribuzione continua di carica ρ e di corrente \vec{j} (con $\vec{j} = \rho \vec{v}$), la forza di Lorentz per unità di volume è

$$\frac{d\vec{p}}{dtdV} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.7.1)$$

ed è naturale introdurre il quadrvettore G^μ (densità di forza di Lorentz) definito da

$$G^\mu = \frac{dp^\mu}{dtdV} = \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dtdV}, \frac{d\vec{p}}{dtdV} \right) , \quad (2.7.2)$$

che è un quadrvettore controvariante in quanto $dtdV$ è uno scalare di Lorentz. La componente G^0 è (a parte il fattore moltiplicativo $1/c$) data dalla variazione di energia cinetica per unità di tempo e di volume, cioè il lavoro fatto dal campo per unità di tempo e di volume. Esplicitamente si ha (ricordando che $d\mathcal{E} = \vec{v} \cdot d\vec{p}$)

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dtdV} = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{d\vec{p}}{dtdV} = \frac{1}{c} \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (2.7.3)$$

e ricordando che $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ si ottiene

$$G^\mu = \left(\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}, \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu , \quad (2.7.4)$$

che è la generalizzazione naturale del caso della carica singola Eq. (2.5.3).

Si mostrerà ora come sia possibile, utilizzando le equazioni di Maxwell, riscrivere l'espressione della desità di forza in modo che risulti la quadridivergenza di un tensore a due indici: usando le equazioni Eq. (2.1.16) si ha

$$\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - (\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} \right] \quad (2.7.5)$$

e il secondo termine può essere riscritto come (usando il fatto che tutti gli indici contratti sono muti)

$$(\partial^\rho F^{\mu\nu})F_{\rho\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\rho F^{\mu\nu})F_{\rho\nu} + \frac{1}{2}(\partial^\nu F^{\mu\rho})F_{\nu\rho} = \frac{1}{2}(\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\mu\rho})F_{\rho\nu} \quad (2.7.6)$$

che usando Eq. (2.1.24) diventa

$$(\partial^\rho F^{\mu\nu})F_{\rho\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu})F_{\rho\nu} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu F^{\nu\rho})F_{\rho\nu} . \quad (2.7.7)$$

Usando questa espressione nell'equazione di partenza si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu &= \frac{1}{4\pi}\left[\partial^\rho(F^{\mu\nu}F_{\rho\nu}) + \frac{1}{2}(\partial^\mu F^{\nu\rho})F_{\rho\nu}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\partial^\rho(F^{\mu\nu}F_{\rho\nu}) - \frac{1}{2}(\partial^\mu F^{\nu\rho})F_{\nu\rho}\right] = \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\partial^\rho(F^{\mu\nu}F_{\rho\nu}) - \frac{1}{4}\partial^\mu(F^{\nu\rho}F_{\nu\rho})\right] = \frac{1}{4\pi}\partial^\rho\left[F^{\mu\nu}F_{\rho\nu} - \frac{1}{4}\delta_\rho^\mu F^{\nu\alpha}F_{\nu\alpha}\right] . \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Se ora definiamo il tensore energia impulso del campo elettromagnetico come

$$T^{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi}\left[-F^{\mu\nu}F^\rho{}_\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}F^{\nu\alpha}F_{\nu\alpha}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[-F^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha}F^{\rho\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\rho}F^{\nu\alpha}F_{\nu\alpha}\right] , \quad (2.7.9)$$

allora si ha

$$\frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\nu = -\partial^\rho T^\mu{}_\rho = -\partial_\rho T^{\mu\rho} \quad (2.7.10)$$

ed infine

$$G^\mu = -\partial_\rho T^{\mu\rho} . \quad (2.7.11)$$

È semplice verificare che il tensore energia impulso così definito è simmetrico ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) ed a traccia nulla ($T^\mu{}_\mu = 0$) e che le sue componenti sono date da

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = W , \quad (2.7.12)$$

dove W è la densità di energia del campo,

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})_i = \frac{S_i}{c} , \quad (2.7.13)$$

dove $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}$ è il vettore di Poynting. Infine

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[-E_iE_j - B_iB_j + \frac{1}{2}\delta_{ij}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\right] = \sigma_{ij} , \quad (2.7.14)$$

dove il tensore tridimensionale σ_{ij} è noto come tensore degli sforzi di Maxwell. In termini delle componenti tridimensionali si ha quindi

$$\begin{aligned} T^{\mu\rho} &= \begin{pmatrix} W & \vec{S}/c \\ \vec{S}/c & \sigma_{ij} \end{pmatrix} , & T_{\mu\rho} &= \begin{pmatrix} W & -\vec{S}/c \\ -\vec{S}/c & \sigma_{ij} \end{pmatrix} , \\ T^\mu{}_\rho &= \begin{pmatrix} W & -\vec{S}/c \\ \vec{S}/c & -\sigma_{ij} \end{pmatrix} , & T_\mu{}^\rho &= \begin{pmatrix} W & \vec{S}/c \\ -\vec{S}/c & -\sigma_{ij} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

L'equazioni Eq. (2.7.11) non sono niente altro che le equazioni di continuità legate alla conservazione di energia ed impulso: si ha infatti

$$\frac{1}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dtdV} = G^0 = -\partial_\rho T^{0\rho} = -\partial_0 T^{00} - \partial_i T^{0i} = -\frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{c}\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (2.7.16)$$

quindi

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{d\mathcal{E}}{dtdV} = 0 ; \quad (2.7.17)$$

analogamente dalle altre componenti si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} + \partial_j \sigma_{ij} + \frac{dp_i}{dtdV} = 0 . \quad (2.7.18)$$

Poichè $d\mathcal{E}/(dtdV)$ è il lavoro fatto dal campo (ovvero l'energia trasferita dal campo alle cariche), l'equazione Eq. (2.7.17) si interpreta come l'equazione di continuità dell'energia, quindi \vec{S} è il vettore flusso di energia. In modo analogo $d\vec{p}/(dtdV)$ è l'impulso trasferito dal campo alle cariche nell'unità di tempo per unità di volume (ovvero la forza per unità di volume) e l'equazione Eq. (2.7.18) si interpreta come l'equazione di conservazione dell'impulso, in cui il tensore degli stress è un flusso di impulso: σ_{ij} è il flusso della componente i -esima dell'impulso che attraversa la superficie ortogonale alla direzione j . Come conseguenza della covarianza relativistica, il vettore di Poynting ha due intepretazioni equivalenti: \vec{S} è il vettore flusso di energia ed \vec{S}/c^2 è la densità di impulso.

Se si vuole calcolare l'energia trasferita alle cariche o la forza esercitata sulle cariche dal campo elettromagnetico basta integrare le equazioni Eq. (2.7.17)-(2.7.18) sul volume occupato dalle cariche e riscrivere gli integrali di volume delle divergenze come flussi (stando attenti ai segni in quanto è necessario usare le normali uscenti); si vede così che (in condizioni stazionarie!) l'energia assorbita dalle cariche è data dal flusso entrante del vettore di Poynting e la forza che agisce sulle cariche è data dal flusso entrante del tensore degli stress.

Usando le forme canoniche Eq. (2.3.21) del tensore di campo è semplice ottenere le seguenti forme canoniche per il tensore energia-impulso, di cui la prima è valida nel caso $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ (condizioni equivalenti a $W = |\vec{S}|/c$ e caratteristiche del campo di radiazione) mentre la seconda in tutti gli altri casi:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & W \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & W \end{pmatrix}, \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W \end{pmatrix}. \quad (2.7.19)$$

Consideriamo il campo di una onda piana monocromatica nella gauge di Lorenz: le equazioni del moto sono $\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0$ e la condizione di gauge si scrive $\partial_\mu A^\mu = 0$. Cerchiamo una soluzione di queste equazioni della forma di una onda piana monocromatica, quindi $A_\mu(x) = \mathcal{A}_\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha}$ con \mathcal{A}_μ quadrirettore costante complesso e k_μ quadrirettore costante reale (che in notazione tridimensionale diventa $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$). Dalle equazioni del moto segue $k_\mu k^\mu = 0$, quindi $\vec{k}^2 = \omega^2/c^2$, mentre la condizione di gauge si scrive $k_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$ (e quindi anche $k_\mu A^\mu(x) = k_\mu A^{*\mu}(x) = 0$). Fintanto che si lavora con le equazioni del moto, che sono lineari, si può considerare A_μ come vettore complesso, tuttavia il tensore energia-impulso è quadratico, quindi è necessario considerare esplicitamente la parte reale di A_μ ; è inoltre conveniente considerare i valori medi su un periodo dell'onda, in modo da semplificare le espressioni che si ottengono.

Il tensore di campo dell'onda monocromatica si scrive nella forma (scrivendo esplicitamente la parte reale)

$$F_{\mu\nu}(x) = \text{Re}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = \text{Re}\left(-ik_\mu A_\nu + ik_\nu A_\mu\right) = \Im\left(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu\right) \quad (2.7.20)$$

ed è immediato verificare (usando $k_\mu A^\mu = k_\mu A^{*\mu} = 0$) che per un'onda monocromatica si ha $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0$, che corrisponde al fatto che in un onda piana $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ (vedi Sez. (2.3)). Per il calcolo del tensore energia impulso serve quindi

$$\langle F^{\mu\nu} F^\rho{}_\nu \rangle = \left\langle \Im\left(k^\mu A^\nu - k^\nu A^\mu\right) \Im\left(k^\rho A_\nu - k_\nu A^\rho\right) \right\rangle = \frac{k^\mu k^\rho}{2} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle, \quad (2.7.21)$$

da cui si ottiene

$$\langle T^{\mu\rho} \rangle = -\frac{k^\mu k^\rho}{8\pi} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle. \quad (2.7.22)$$

Considerando la componente $T^{00} = W$ si ottiene $\langle W \rangle = -\frac{\omega^2}{8\pi c^2} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle$, che si sarebbe anche potuta ottenere esplicitamente da $W = \frac{1}{8\pi}(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$ usando $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ e

$$\begin{aligned} \langle |\vec{E}|^2 \rangle &= -\langle F_{0i} F^{0i} \rangle = -\left\langle \Im(k_0 A_i - k_i A_0) \Im(k^0 A^i - k^i A^0) \right\rangle = \\ &= -\left\langle k_0 k^0 \Im(A_i) \Im(A^i) - 2k_0 k^i \Im(A^0) \Im(A_i) + k_i k^i \Im(A_0) \Im(A^0) \right\rangle = \\ &= -k_0 k^0 \left\langle \Im(A_i) \Im(A^i) + \Im(A_0) \Im(A^0) \right\rangle = -\frac{\omega^2}{2c^2} \langle A^\mu A_\mu^* \rangle, \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

quindi il tensore energia impulso medio di un'onda monocromatica può essere scritto nella forma

$$\langle T^{\mu\rho} \rangle = \frac{\langle W \rangle c^2}{\omega^2} k^\mu k^\rho. \quad (2.7.24)$$

Se introduciamo il versore $\hat{n} = c\vec{k}/\omega$ di propagazione dell'onda ed il quadrivettore $n^\mu = (1, \hat{n})$ si può infine scrivere in modo compatto $\langle T^{\mu\rho} \rangle = \langle W \rangle n^\mu n^\rho$.

Esercizio 2.7.1: Verificare che per i tensori energia-impulso di 2.7.19 si ha effettivamente $T_\mu^\mu = 0$.

(Complemento “C”) Visto che il tensore energia impulso è legato alla conservazione di energia ed impulso è naturale aspettarsi che si sarebbe potuti arrivare ad esso anche studiando l'invarianza della lagrangiana per tralazioni temporali e spaziali. Questo è ovviamente possibile ed in questo modo si rivelano anche alcune ambiguità nella definizione del tensore legate alla conservazione del momento angolare. Per maggiori dettagli vedi [7] §32-33, [4] §12.10 e soprattutto [12] §4.9-4.10.

Capitolo 3

Campo di cariche in moto e irraggiamento

3.1 I potenziali ritardati

Si vuole ora determinare il quadripotenziale generato da una generica distribuzione di carica dipendente dal tempo, caratterizzata dalla quadricorrente j^μ . Nella gauge di Lorenz le equazioni da risolvere si scrivono nella forma

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \partial_\mu A^\mu = 0 , \quad (3.1.1)$$

dove le prime sono le equazioni di campo e le seconde la condizione della gauge di Lorenz. Per risolvere queste equazioni si risolveranno prima le equazioni di campo utilizzando la tecnica delle funzioni di Green ed a posteriori si verificherà che le soluzioni trovate soddisfano la condizione della gauge di Lorenz.

La funzione di Green G_R (dove R sta per ritardata) è definita dall'equazione

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \right) G_R(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t) \quad (3.1.2)$$

con la condizione al contorno $G_R(\vec{r}, t) = 0$ per $t < 0$ per ogni \vec{r} . La funzione di Green è il potenziale d'onda generato da un impulso di carica e la condizione al contorno precedente significa che una carica non produce un segnale prima di comparire. Per trovare l'espressione di G_R il modo più naturale è passare in trasformata di Fourier (per un modo diverso di procedere vedi [7] §62, per una deduzione che non usa esplicitamente le funzioni di Green vedi ad es. [13] §14). Si potrebbe usare sin dall'inizio una trasformata di Fourier quadridimensionale, tuttavia in questo modo diventa più difficile imporre le condizioni al contorno: nell'anttrasformata sono presenti delle ambiguità dovute alle singolarità ed è necessario trovare un cammino di integrazione appropriato (vedi ad es. [4] §12.11, per alcuni cenni ad una analisi più formale delle ambiguità vedi ad es. [14] §11). Per questo motivo appare più naturale usare dapprima una trasformata solo sulle \vec{r} , riducendo quindi l'equazione di partenza all'equazione ordinaria (vedi Sez. (A.1) per le convenzioni sulle trasformate di Fourier)

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \vec{k}^2 \right) \tilde{G}_R(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(t) . \quad (3.1.3)$$

Quindi $\tilde{G}_R(\vec{k}, t)$ deve essere della forma $A(k) \sin(ctk) + B(k) \cos(ctk)$, dove abbiamo introdotto la notazione $k = |\vec{k}|$, inoltre utilizzando le condizioni al contorno ed integrando sull'intervallo $[0^-, 0^+]$ si trova che si deve avere $\frac{1}{c^2} \partial_t \tilde{G}_R(\vec{k}, 0^+) = 1/(2\pi)^3$ ed integrando ancora una volta $\tilde{G}_R(\vec{k}, 0^+) = 0$. La funzione cercata è quindi

$$\tilde{G}_R(\vec{k}, t) = \frac{c}{(2\pi)^3} \frac{\sin(ctk)}{k} \Theta(t) , \quad (3.1.4)$$

dove $\Theta(t)$ è la funzione di Heaveside: $\Theta(t) = 1$ per $t \geq 0$ e $\Theta(t) = 0$ per $t < 0$.

— **parte facoltativa** — Che l'espressione in Eq. (3.1.4) sia la soluzione cercata può anche essere mostrato in modo più formale come segue: sia $f \in \mathcal{D}$ una funzione di test, allora si ha

$$\int f(t) \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + k^2 \right) \tilde{G}_R(\vec{k}, t) dt = \int \tilde{G}_R(\vec{k}, t) \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + k^2 \right) f(t) dt \quad (3.1.5)$$

ed utilizzando la forma esplicita di \tilde{G}_R trovata prima si ottiene, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int \tilde{G}_R(\vec{k}, t) \frac{1}{c^2} \partial_t^2 f(t) dt &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin(ctk)}{ck} \partial_t^2 f(t) dt = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \cos(ctk) \partial_t f(t) dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} f(0) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty ck \sin(ctk) f(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^3} f(0) - \int \tilde{G}_R(\vec{k}, t) k^2 f(t) dt \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

e quindi $\tilde{G}_R(\vec{k}, t)$ soddisfa Eq. (3.1.3).

— **fine parte facoltativa** —

Per calcolare $G_R(\vec{r}, t)$ è necessario antitrasformare Eq. (3.1.4):

$$\begin{aligned} G_R(\vec{r}, t) &= \frac{c \Theta(t)}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(ctk)}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k = \frac{c \Theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \sin(ctk) \int_{-1}^{+1} e^{ikr\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{c \Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk (e^{ictk} - e^{-ictk})(e^{-ikr} - e^{ikr}) = \\ &= \frac{c \Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk (e^{i(ct-r)k} + e^{-i(ct-r)k} - e^{i(ct+r)k} - e^{-i(ct+r)k}) = \\ &= \frac{c \Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{i(ct-r)k} - e^{i(ct+r)k}) = \\ &= \frac{c \Theta(t)}{4\pi r} (\delta(ct-r) - \delta(ct+r)) = \frac{c}{4\pi r} \delta(ct-r) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r/c), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

dove si è usato il fatto che $\int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$ (vedi Sez. (A.5)) e un caso molto semplice ($\delta(ax) = \delta(x)/a$) della regola per il cambio di variabile nelle δ

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (3.1.8)$$

dove le x_i sono tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

La soluzione delle equazioni di campo può a questo punto essere scritta immediatamente: la funzione di Green è la risposta ad una distribuzione di carica concentrata nello spazio e nel tempo, la soluzione è quindi la somma di tutte le sorgenti pesate con la funzione di Green centrata in quel punto:

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \int j^\mu(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' dt' = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3 r' dt' = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

ovvero in notazione tridimensionale

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Dalla prima delle Eq. (3.1.9), dato che sia A^μ che j^μ sono quadrvettori e l'elemento di volume quadridimensionale $d^3r'dt'$ è invariante, segue che la funzione di Green deve essere un invariante di Lorentz (almeno per trasformazioni di Lorentz proprie). È possibile scrivere G_R in una forma che renda questa invarianza più immediatamente visibile:

$$\begin{aligned} G_R(\vec{r}, t) &= \Theta(t) \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \delta(t - |\vec{r}|/c) = \Theta(t) \frac{1}{2\pi c} \frac{\delta(t - |\vec{r}|/c) + \delta(t + |\vec{r}|/c)}{2|\vec{r}|/c} = \\ &= \Theta(t) \frac{1}{2\pi c} \delta(t^2 - \vec{r}^2/c^2) = \frac{c}{2\pi} \Theta(t) \delta(c^2 t^2 - \vec{r}^2). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Resta da mostrare che i potenziali Eq. (3.1.10) soddisfano la condizione della gauge di Lorenz, cioè $\partial_t \phi/c + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Introducendo per semplicità la notazione $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{c} \int \frac{\partial_t \rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') d^3 r'. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') &= \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla} t' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'| = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'|, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

dove si è introdotta la notazione $\vec{\nabla}'$ per indicare le derivate rispetto alle coordinate di \vec{r}' . Notiamo a questo punto che

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (3.1.14)$$

dove la notazione $[\dots]_{t'}$ significa che la divergenza è presa a t' costante. Dalle ultime due equazioni si ha allora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} - \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \quad (3.1.15)$$

e quindi la divergenza di \vec{A} può essere scritta nella forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}', t') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' + \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} d^3 r'. \quad (3.1.16)$$

Il primo termine si annulla in quanto $\vec{j} = 0$ al bordo quindi si ottiene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\partial_{t'} \rho(\vec{r}', t') + [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} \right) d^3 r' = 0 \quad (3.1.17)$$

a causa dell'equazione di continuità.

— parte facoltativa —

La dimostrazione che i potenziali ritardati Eq. (3.1.9) soddisfano la condizione di Lorenz si semplifica utilizzando il formalismo covariante: si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \partial_\mu A^\mu(\vec{r}, t) &= \int j^\mu(\vec{r}', t') \partial_\mu G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' dt' = - \int j^\mu(\vec{r}', t') \partial'_\mu G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' dt' = \\ &= - \int \partial'_\mu (j^\mu(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' + \int (\partial'_\mu j^\mu(\vec{r}', t')) G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' dt'. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Il secondo integrale si annulla a causa dell'equazione di continuità, mentre per il primo si ha:

$$\begin{aligned} \int \partial'_\mu (j^\mu(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' &= \int \partial'_0 (j^0(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' + \\ &\quad + \int \partial'_i (j^i(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Il secondo di questi integrali si annulla a causa del teorema della divergenza tridimensionale (per ogni fissato valore di t' si ha $\vec{j} = 0$ al bordo), mentre il primo può essere riscritto come

$$\left(\int j^0(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' \right) \Big|_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} \quad (3.1.20)$$

e questa espressione si annulla a causa delle proprietà di G_R : a $t' = +\infty$ si annulla perché $G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ è nulla per $t - t' < 0$, a $t' = -\infty$ si annulla perché in questo caso per dati t e \vec{r} non esiste nessuna soluzione di $t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c = 0$ con $j^0(\vec{r}', t') \neq 0$ (assumendo che non esistano cariche che si muovono alla velocità della luce).

— fine parte facoltativa —

3.2 Richiami di radiazione di dipolo elettrico

Il punto di partenza è l'espressione del potenziale vettore in gauge di Lorenz generato da una distribuzione di carica, che nel sistema di Gauss è (il termine tra parentesi quadre, che ignoreremo nel seguito di questa sezione, è il fattore di conversione al sistema SI, vedi Sez. (A.3))

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \right] \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) d^3 r'. \quad (3.2.1)$$

Supponiamo ora r molto maggiore del raggio tipico della distribuzione di carica, in modo da poter usare $1/|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq 1/r$, supporremo inoltre che la velocità di variazione della densità di carica sia abbastanza piccola da poter trascurare gli effetti di ritardo e poter quindi usare $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c \simeq t - r/c$. Con queste approssimazioni l'espressione generale si riduce a quella della approssimazione di dipolo elettrico (per i termini di dipolo magnetico e quadrupolo elettrico vedi Sez. (3.3))

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) d^3 r' \quad (3.2.2)$$

e l'integrale a secondo membro può essere riscritto come segue:

$$\begin{aligned} \int j_i(\vec{r}', t - r/c) d^3 r' &= \int (j_k(\vec{r}', t - r/c) \partial'_k) r'_i d^3 r' = \\ &= \int \partial'_k (j_k(\vec{r}', t - r/c) r'_i) d^3 r' - \int r'_i \partial'_k j_k(\vec{r}', t - r/c) d^3 r'. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Il primo integrale si annulla in quanto $\vec{j} = 0$ al bordo della distribuzione di carica, quindi usando l'equazione di continuità si ottiene

$$\int \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) d^3 r' = - \int \vec{r}' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t - r/c)) d^3 r' = \partial_t \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t - r/c) d^3 r'. \quad (3.2.4)$$

Introducendo il momento di dipolo elettrico $\vec{p}(\vec{r}, t) = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t) d^3 r'$ si ottiene quindi

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc} \dot{\vec{p}}(t - r/c) \quad (3.2.5)$$

Il campo magnetico nella regione di radiazione ($kr \gg 1$) ha la forma

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{rc} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}}(t - r/c) = -\frac{1}{rc^2} \hat{\vec{n}} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \quad (3.2.6)$$

dove $\hat{\vec{n}} = \vec{r}/r$, si sono trascurati dei termini $\mathcal{O}(r^{-2})$ e dove abbiamo fatto uso della relazione di uso più generale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}', t - r/c) = -\frac{1}{c} \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{f}}(\vec{r}', t - r/c). \quad (3.2.7)$$

Per quanto riguarda il campo elettrico nella zona di radiazione, possiamo evitare di usare il potenziale scalare e usare $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$, da cui si ottiene (di nuovo trascurando termini $O(1/r^2)$)

$$\frac{1}{rc^3} \hat{n} \times [\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (3.2.8)$$

e quindi

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc^2} \hat{n} \times [\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)] = -\frac{1}{rc^2} \ddot{\vec{p}}_{\perp}(t - r/c) = -\hat{n} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (3.2.9)$$

dove

$$\ddot{\vec{p}}_{\perp} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}) = \ddot{\vec{p}} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \ddot{\vec{p}}) \quad (3.2.10)$$

è la componente del dipolo ortogonale alla linea di vista. Nel caso particolare $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ si ha quindi

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{k^2}{r} \vec{p}_{0\perp} e^{-i(\omega t - kr)} & (\omega = ck) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{k^2}{r} \hat{n} \times \vec{p}_{0\perp} e^{-i(\omega t - kr)} & (\hat{n} \times \vec{p}_0 = \hat{n} \times \vec{p}_{0\perp}) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Calcoliamo ora la potenza irraggiata: è necessario calcolare il flusso del vettore di Poynting, che nel caso della zona di radiazione si scrive come $\vec{S} = [4\pi c \epsilon_0] \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}$. Scegliamo coordinate polari con l'asse z diretto lungo $\ddot{\vec{p}}$ al tempo di interesse, quindi usando Eq. (3.2.9) ed chiamando θ l'angolo tra \hat{n} e $\ddot{\vec{p}}$ si ottiene $|\hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\vec{p}})| = |\ddot{\vec{p}}| \sin \theta$, da cui

$$P = \int \vec{S} \cdot \hat{n} r^2 d\cos \theta d\phi = \frac{1}{2c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d\cos \theta = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \left[\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right], \quad (3.2.12)$$

dove il fattore tra quadre dell'ultima espressione è il fattore necessario per converire il risultato nel sistema SI. Nel caso del dipolo oscillante $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ si deve mediare su un periodo il risultato precedente, oppure calcolare il flusso del vettore di Poynting mediato sul tempo $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle$, dove $\langle \cdot \rangle$ indica la media temporale. Nel caso di quantità quadratiche (come appunto il vettore di Poynting) la notazione complessa non può essere usata ciecamente ed occorre sostituire esplicitamente le parti reali dei campi, quindi $\vec{E} \rightarrow (\vec{E} + \vec{E}^*)/2$ ed analogamente per \vec{B} , ottenendo

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \langle \vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B} \rangle \quad (3.2.13)$$

dove le componenti in cui compaiono due volte i campi con la stessa frequenza ($\vec{E} \times \vec{B}$ e $\vec{E}^* \times \vec{B}^*$) si mediano a zero. Nel caso di un campo di radiazione si ha $\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$ e l'equazione precedente si riduce a

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}, \quad (3.2.14)$$

che differisce dal caso di campo reale istantaneo solo per un fattore 1/2. Esplicitamente abbiamo quindi (scegliendo l'asse z delle coordinate polari nella direzione di \vec{p}_0)

$$\langle P \rangle = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 d\cos \theta d\phi = \frac{c}{4} k^4 |\vec{p}_0|^2 \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d\cos \theta = \frac{c}{3} k^4 |\vec{p}_0|^2 \left[\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \right]. \quad (3.2.15)$$

Notiamo esplicitamente un fatto che è stato usato *en passant* nella dimostrazione precedente: dall'equazione di Maxwell (nel vuoto) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$ si deduce, per campi variabili nel tempo e nella zona di radiazione, che

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (3.2.16)$$

dove $\hat{\vec{n}}$ è il versore di propagazione dell'onda, di cui l'Eq. (3.2.9) è il caso particolare dell'irraggiamento di dipolo elettrico. Per dimostrare la relazione precedente si può usare il fatto che nel vuoto si può scegliere una gauge in cui il potenziale scalare è nullo (vedi Sez. (2.2)), unitamente al fatto che in un'onda che propaga lungo $\hat{\vec{n}}$ tutte le quantità dipendono da $t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}/c$. Si ha allora

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \left(t - \frac{1}{c} \hat{\vec{n}} \cdot \vec{r} \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = \hat{\vec{n}} \times \vec{E}(\vec{r}, t) . \quad (3.2.17)$$

3.3 Radiazione di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico

Partiamo nuovamente dall'espressione per il potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \right] \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV' . \quad (3.3.1)$$

Se si osserva il sistema da sufficientemente lontano ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$) si può sempre approssimare $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ con $1/r$, commettendo un errore di ordine a/r dove a è la dimensione tipica della distribuzione di carica. Consideriamo ora la dipendenza da \vec{r}' che compare nel tempo ritardato della corrente: al primo ordine si ha $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq |r| - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}'$, dove $\hat{\vec{n}} = \vec{r}/r$, quindi al primo ordine

$$\begin{aligned} \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) &\simeq \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \simeq \\ &\simeq \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}'}{c} \partial_{t'} \vec{j} (\vec{r}', t')|_{t'=t-r/c} . \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Il primo termine è il termine di dipolo elettrico che è stato usato in Sez. (3.2), il secondo termine è legato alla radiazione di dipolo magnetico e quadrupolo elettrico. Se supponiamo che la densità di corrente vari nel tempo con frequenza caratteristica ω allora il secondo termine è soppresso rispetto al primo di un fattore

$$\frac{a\omega}{c} \simeq \frac{a}{\lambda} \simeq \frac{v}{c} , \quad (3.3.3)$$

dove ricordiamo che a è la dimensione tipica della distribuzione di carica e si è indicata con λ la lunghezza d'onda caratteristica della radiazione emessa e con $v \simeq \omega a$ la velocità tipica delle cariche che irraggiano.

Vale la pena notare esplicitamente la profonda differenza tra lo sviluppo multipolare elettrostatico e lo sviluppo multipolare che si usa nel caso dell'irraggiamento. Nel caso elettrostatico i diversi multipoli generano campi che vanno a zero per r grande in modo sempre più rapido, corrispondendo quindi ad uno sviluppo nel parametro piccolo a/r . Nel caso dell'irraggiamento il campo irraggiato è sempre proporzionale ad $1/r$ (in quanto questa è l'unica forma radiale che in tre dimensioni è associata ad un flusso netto di energia all'infinito) ma i vari multipoli corrispondono ad ampiezze che hanno potenze via via crescenti di a/λ (o v/c come appena visto). I primi termini dello sviluppo in multipoli sono quindi quelli dominanti nel limite non relativistico.

È stato mostrato in Sez. (3.2) che il potenziale vettore nella approssimazione di dipolo elettrico può essere scritto nella forma

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc} \dot{\vec{p}}(t - r/c) , \quad (3.3.4)$$

dove si è introdotto il momento di dipolo elettrico $\vec{p}(t) = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t) dV'$. Passiamo ora ad analizzare le componenti di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico: usando la notazione $\partial'_k = \partial/\partial r'_k$ è semplice vedere che

$$\partial'_\ell \left[r'_i r'_k \partial_{t'} j_\ell(\vec{r}', t') \right] = r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t') + r'_i \partial_{t'} j_k(\vec{r}', t') + r'_i r'_k \partial_{t'} \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \right) , \quad (3.3.5)$$

da cui si ottiene, integrando su tutto il volume su cui è presente la carica ed usando l'equazione di continuità, la relazione

$$\begin{aligned} \int \left(r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t') + r'_i \partial_{t'} j_k(\vec{r}', t') \right) dV' &= - \int r'_i r'_k \partial_{t'} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')) dV' = \\ &= \partial_{t'}^2 \int r'_i r'_k \rho(\vec{r}', t') dV' = \frac{1}{3} \ddot{Q}_{ik}(t') + \frac{1}{3} \delta_{ik} \partial_{t'}^2 \int |\vec{r}'|^2 \rho(\vec{r}', t') dV' , \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

dove si sono introdotti i momenti di quadrupolo

$$Q_{ik}(t') = \int \left(3r'_i r'_k - \delta_{in} |\vec{r}'|^2 \right) \rho(\vec{r}', t') dV . \quad (3.3.7)$$

Il potenziale vettore corrispondente ai termini di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico può quindi essere scritto nella forma

$$A_i^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} n_k \int r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t')|_{t'=t-r/c} dV' \quad (3.3.8)$$

e scrivendo $r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t')$ come somma di una parte simmetrica per $k \leftrightarrow i$ ed una parte antisimmetrica si può usare Eq. (3.3.6), ottenendo

$$\begin{aligned} A_i^{(2)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2c^2 r} n_k \int \left(r'_k \partial_t j_i(\vec{r}', t - r/c) - r'_i \partial_t j_k(\vec{r}', t - r/c) \right) dV' + \\ &+ \frac{1}{6c^2 r} \ddot{Q}_{ik}(t - r/c) n_k + \frac{1}{6c^2 r} n_i \partial_t^2 \int |\vec{r}'|^2 \rho(\vec{r}', t - r/c) dV' . \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

A questo punto si può usare $\hat{\vec{n}} \times (\vec{r}' \times \partial_t \vec{j}) = \vec{r}' (\hat{\vec{n}} \cdot \partial_t \vec{j}) - \partial_t \vec{j} (\hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}')$ per riscrivere l'equazione precedente nella forma

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{cr} \dot{\vec{\mu}}(t - r/c) \times \hat{\vec{n}} + \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}}(t - r/c) + \\ &+ \frac{1}{6c^2 r} \vec{n} \partial_t^2 \int |\vec{r}'|^2 \rho(\vec{r}', t - r/c) dV' , \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

dove si è introdotta la notazione $(\vec{Q})_i = Q_{ik} n_k$ ed il momento di dipolo magnetico (nella definizione di $\vec{\mu}$ nel sistema SI non sarebbe presente c a denominatore)

$$\vec{\mu}(t) = \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t) dV' . \quad (3.3.11)$$

Il calcolo del campo magnetico nella zona di radiazione ($r \gg \lambda$) del potenziale vettore Eq. (3.3.10) può essere effettuato come segue: nel calcolare $\vec{B}^{(2)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t)$ si può evitare di derivare il prefattore $1/r$ ed i versori $\hat{\vec{n}}$, in quanto si otterrebbero termini di ordine $1/r^2$ importanti solo nella zona vicina, inoltre si può usare la relazione Eq. (3.2.7), da cui si vede in particolare che l'ultimo termine in Eq. (3.3.10) non contribuisce al campo nella zona di radiazione in quanto collineare con \vec{n} . Si ottiene quindi

$$\vec{B}^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \hat{\vec{n}} \times \left(\hat{\vec{n}} \times \ddot{\vec{\mu}}(t - r/c) \right) + \frac{1}{6c^3 r} \ddot{\vec{Q}}(t - r/c) \times \hat{\vec{n}} \quad (3.3.12)$$

ed il campo elettrico nella zona di radiazione può essere scritto come $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\hat{\vec{n}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$ (vedi Sez. (3.2)). Se a questa espressione aggiungiamo il termine di dipolo elettrico calcolato in Sez. (3.2) otteniamo per il campo magnetico in zona di radiazione l'espressione completa

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \times \hat{\vec{n}} + \frac{1}{c^2 r} \hat{\vec{n}} \times \left(\hat{\vec{n}} \times \ddot{\vec{\mu}}(t - r/c) \right) + \frac{1}{6c^3 r} \ddot{\vec{Q}}(t - r/c) \times \hat{\vec{n}} , \quad (3.3.13)$$

dove ricordiamo che $(\vec{Q})_i = Q_{ik}n_k$.

Calcoliamo ora la energia irraggiata nell'unità di tempo. Per un campo di radiazione il vettore di Poynting è dato da $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}|\vec{B}|^2\hat{n}$, quindi per calcolare la potenza irraggiata è necessario calcolare l'integrale su tutto l'angolo solido di $\frac{cr^2}{4\pi}|\vec{B}|^2$. È semplice mostrare che i termini di interferenza tra i contributi presenti in Eq. (3.3.13) si annullano quando integrati su tutto l'angolo solido: ad esempio per il termine di interferenza tra dipolo elettrico e magnetico si ottiene

$$(\ddot{\vec{p}} \times \hat{\vec{n}}) \cdot (\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \ddot{\vec{\mu}})) = -\ddot{\vec{\mu}} \cdot (\ddot{\vec{p}} \times \hat{\vec{n}}) \quad (3.3.14)$$

che si annulla a causa della presenza di un unico versore $\hat{\vec{n}}$.

Gli integrali angolari che rimangono possono essere convenientemente interpretati, a meno di un 4π , come medie sulle direzioni dei versori, per i quali si possono usare le seguenti relazioni

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \langle n_i n_j n_k n_\ell \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.3.15)$$

che possono essere giustificate usando argomenti di simmetria. Consideriamo il caso $\langle n_i n_j \rangle$: poichè stiamo mediando sulle direzioni dei versori il risultato deve essere un tensore a due indici invariante per rotazioni quindi deve essere proporzionale a δ_{ij} ; il fattore di proporzionalità è fissato dal fatto che $\langle \vec{n}^2 \rangle = 1$. Passiamo ora a $\langle n_i n_j n_k n_\ell \rangle$: nuovamente, poichè stiamo mediando sulle direzioni dei versori, il risultato deve essere scrivibile in termini di tensori invarianti sotto rotazioni, ovvero di δ di Kronecker; inoltre $\langle n_i n_j n_k n_\ell \rangle$ è simmetrico sotto scambi di i, j, k, ℓ e l'unica combinazione di δ di Kronecker completamente simmetrica che si riesce a scrivere è $\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}$. Il fattore di proporzionalità è nuovamente fissato imponendo che $\langle \vec{n}^2 \vec{n}^2 \rangle = 1$.

Indicando con \vec{g} un generico vettore, con T_{ij} un generico tensore simmetrico e con $(\vec{T})_i = T_{ij}n_j$ si trova quindi

$$\begin{aligned} \int |\vec{g} \times \hat{\vec{n}}|^2 d\Omega &= 4\pi \left(\vec{g}^2 \langle \vec{n}^2 \rangle - g_i g_j \langle n_i n_j \rangle \right) = 4\pi \frac{2}{3} |\vec{g}|^2 \\ \int |\vec{T} \times \hat{\vec{n}}|^2 d\Omega &= 4\pi \left(T_{ab} T_{bc} \langle n_a n_c \rangle - T_{ab} T_{cd} \langle n_a n_b n_c n_d \rangle \right) = \\ &= \frac{4\pi}{5} \text{tr}(T^2) - \frac{4\pi}{15} (\text{tr} T)^2, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

inoltre nel caso del momento di quadrupolo si ha per costruzione $\text{tr} Q = 0$. Usando queste espressioni nel caso del campo in Eq. (3.3.13) si trova subito l'espressione per la potenza irraggiata (i termini tra quadre sono i fattori di conversione necessari nel sistema SI)

$$P = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right] \frac{1}{180c^5} \sum_{ij} \ddot{Q}_{ij}^2 + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right] \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{\mu}}|^2. \quad (3.3.17)$$

Nel caso si considerino campi oscillanti sinusoidalmente, la media su un periodo della potenza irraggiata è, come al solito, la metà del risultato precedente.

3.4 I potenziali e i campi di Lienard-Wiechert

Supponiamo di avere una particella di carica e che si muove con legge oraria $\vec{s}(t)$ o, in notazione covariante, $s^\mu(\tau)$, dove τ è il tempo proprio della particella. In questo caso la densità di carica e la densità di corrente sono date da

$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = e\dot{\vec{s}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) \quad (3.4.1)$$

Non è difficile mostrare che la quadricorrente può essere scritta nella forma

$$j^\mu(x) = ec \int u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - s(\tau)) d\tau, \quad (3.4.2)$$

dove $u^\mu = ds^\mu/d\tau$ è la quadrivelocità della particella. Si ha infatti

$$\begin{aligned} j^0(\vec{r}, t) &= ec \int \delta(ct - s^0) \delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0))) ds^0 = ec \delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= ec \int \frac{d\vec{s}}{ds^0} \delta(ct - s^0) \delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0))) ds^0 = e \dot{\vec{s}}(t) \delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) . \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Per ottenere la forma dei potenziali in questo caso è conveniente non partire dai potenziali ritardati, ma fare un passo indietro, ovvero scrivere i potenziali direttamente in termini della funzione di Green ritardata e della densità di carica o della corrente: si ha quindi ad esempio

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3 r' dt' = \\ &= \int \frac{e \delta(\vec{r}' - \vec{s}(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3 r' dt' = \\ &= \int \frac{e}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{s}(t')|/c) dt' . \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Per effettuare l'ultimo integrale si deve usare le proprietà di trasformazione della δ sotto cambio di variabile:

$$\delta(f(t')) = \sum_{t'_i} \frac{\delta(t' - t'_i)}{|f'(t'_i)|} , \quad (3.4.5)$$

dove i t'_i sono tutte le soluzioni dell'equazione $f(t') = 0$. Nel nostro caso specifico

$$f(t') = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{c} - t , \quad f'(t') = 1 - \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t')) \cdot \dot{\vec{s}}(t')}{c|\vec{r} - \vec{s}(t')|} , \quad (3.4.6)$$

inoltre si ha $f'(t') > 0$ (quindi non serve considerare $|f'(t')|$) e l'equazione $f(t') = 0$ ha una unica soluzione (assumendo che tutte le cariche si muovano con velocità minore di c). Indicando con t_r la soluzione di $t = t' + |\vec{r} - \vec{s}(t')|/c$ si ha allora

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{e \delta(t' - t_r)}{|\vec{r} - \vec{s}(t')| - \frac{1}{c} (\vec{r} - \vec{s}(t')) \cdot \dot{\vec{s}}(t')} dt' = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{s}(t_r)| - \frac{1}{c} (\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \dot{\vec{s}}(t_r)} . \quad (3.4.7)$$

In letteratura è spesso usata la notazione $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$ e $\hat{\vec{n}} = \vec{R}/R$, quindi l'espressione precedente si scrive in modo più compatto

$$\phi(\vec{r}, t) = \left. \frac{e}{R(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})} \right|_{t_r} . \quad (3.4.8)$$

In modo identico si trova

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left. \frac{e \dot{\vec{s}}(t_r)/c}{|\vec{r} - \vec{s}(t_r)| - \frac{1}{c} (\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \dot{\vec{s}}(t_r)} \right. = \left. \frac{e \vec{\beta}}{R(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})} \right|_{t_r} . \quad (3.4.9)$$

Le espressioni in Eq. (3.4.7)-(3.4.9) sono note come potenziali di Lienard-Wiechert. Una espressione più compatta dei potenziali di Lienard-Wiecher si ottiene usando il formalismo quadridimensionale: è infatti semplice verificare che le componenti temporale e spaziali dell'espressione

$$A^\mu(x) = e \frac{u^\mu(\tau_r)}{(x - s(\tau_r))_\nu u^\nu(\tau_r)} \quad (3.4.10)$$

riproducono le espressioni precedenti. In questa espressione la traiettoria della particella è parametrizzata da $s^\mu(\tau)$ (dove τ è il tempo proprio) ed il tempo proprio ritardato è la soluzione di $(x - s(\tau))^2 = 0$ con $s^0(\tau_r) < x^0$, quindi $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$. Usando $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ si ha quindi

$$(x - s(\tau_r))_\nu u^\nu(\tau_r) = \gamma c R (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})|_{t_r} . \quad (3.4.11)$$

Un modo più diretto di arrivare a Eq. (3.4.10) usa la forma Eq. (3.1.11) della funzione di Green. Si ha infatti (ricordando che $x^0 = ct$, quindi $d^3xdt = d^4x/c$)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{2}{c} \int j^\mu(x') \Theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2) d^4x' = \\ &= 2e \int u^\mu(\tau) \delta^4(x' - s(\tau)) \Theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2) d^4x' d\tau = \\ &= 2e \int u^\mu(\tau) \Theta(x^0 - s^0(\tau)) \delta((x - s(\tau))^2) d\tau . \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Usiamo la regola di cambio di variabile della δ con

$$f(\tau) = (x - s(\tau))^2 , \quad \frac{df}{d\tau} = -2(x - s(\tau))^\mu u_\mu(\tau) . \quad (3.4.13)$$

In questo caso $f(\tau) = 0$ ha due soluzioni ed è da usare la soluzione τ_r tale che $s^0(\tau_r) < x^0$. Poichè $x - s(\tau_r)$ è di tipo luce, u^μ di tipo tempo e $x^0 - s^0(\tau_r) > 0$ si ha $df/d\tau < 0$ a τ_r , quindi si ottiene Eq. (3.4.10).

Per calcolare i campi corrispondenti ai potenziali di Lienard-Wiechert è conveniente usare l'espressione covariante Eq. (3.4.10) (per un metodo ancora più compatto vedi [4] §14.1, per il calcolo usando le espressioni tridimensionali vedi [15] §6.3). Per calcolare le derivate di $s(\tau_r)$ e $u^\mu(\tau_r)$, che dipendono implicitamente dal punto x , è necessario prima di tutto calcolare $\partial_\alpha \tau_r$, che si ottiene derivando la relazione $(x - s(\tau_r))^2 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \partial_\alpha (x - s(\tau_r))^2 = (x - s(\tau_r))_\mu \partial_\alpha (x - s(\tau_r))^\mu = \\ &= (x - s(\tau_r))_\mu (\delta_\alpha^\mu - u^\mu(\tau_r) \partial_\alpha \tau_r) = (x - s(\tau_r))_\alpha - (x - s(\tau_r))_\mu u^\mu(\tau_r) \partial_\alpha \tau_r \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

e quindi

$$\partial_\alpha \tau_r = \frac{(x - s(\tau_r))_\alpha}{(x - s(\tau_r))_\mu u^\mu(\tau_r)} . \quad (3.4.15)$$

Nelle prossime formule, per semplicità di notazione, si sottenderà la dipendenza di s , u (e $a^\mu = du^\mu/d\tau$) da τ_r . Si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \partial^\mu A^\nu &= \partial^\mu \left(\frac{u^\nu}{(x - s)u} \right) = \frac{a^\nu \partial^\mu \tau_r}{(x - s)u} - \frac{u^\nu}{((x - s)u)^2} \partial^\mu (xu - su) = \\ &= \frac{a^\nu (x - s)^\mu}{((x - s)u)^2} - \frac{u^\nu}{((x - s)u)^2} (u^\mu + ax \partial^\mu \tau_r - uu \partial^\mu \tau_r - sa \partial^\mu \tau_r) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

questa espressione può essere semplificata notando che $uu = c^2$ e che il termine $u^\mu u^\nu$, essendo simmetrico, non contribuisce a $F^{\mu\nu}$; quindi (\simeq significa che solo i termini che contribuiscono a $F^{\mu\nu}$ sono mostrati)

$$\frac{1}{e} \partial^\mu A^\nu \simeq \frac{a^\nu (x - s)^\mu}{((x - s)u)^2} - \frac{u^\nu (x - s)^\mu}{((x - s)u)^3} (x - s)a + c^2 \frac{u^\nu (x - s)^\mu}{((x - s)u)^3} . \quad (3.4.17)$$

Consideriamo dapprima l'ultimo termine, che corrisponde al caso di una carica in moto rettilineo uniforme con quadriveloceità u (in quanto è l'unico termine rimanente se $a = 0$). Il tensore di campo si scrive in questo caso

$$F^{\mu\nu} = ec^2 \frac{(x - s)^\mu u^\nu - (x - s)^\nu u^\mu}{(u_\alpha (x - s)^\alpha)^3} \Big|_{\tau_r} , \quad (a = 0) \quad (3.4.18)$$

ed usando $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$ e $u = \gamma(c, \vec{v})$ si trova

$$\vec{E} = \frac{e}{\gamma^2} \frac{(\vec{r} - \vec{s}) - |\vec{r} - \vec{s}| \vec{\beta}}{(|\vec{r} - \vec{s}| - (\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{\tau_r} , \quad (a = 0) . \quad (3.4.19)$$

che può essere scritto in modo più compatto introducendo le notazioni $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$ e $\hat{\vec{n}} = \vec{R}/R$:

$$\vec{E} = \frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r}, \quad (a = 0). \quad (3.4.20)$$

Per ottenere il campo $B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}$ si potrebbe procedere analogamente oppure notare che

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} = -\frac{ec^2}{(u_\alpha(x-s)^\alpha)^3}\epsilon_{ijk}(x-s)^j u^k \quad (3.4.21)$$

è uguale a (poichè $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$)

$$\epsilon_{ijk} \frac{(x-s)^j}{|\vec{r} - \vec{s}|} F^{k0} = -\frac{ec^2}{(u_\alpha(x-s)^\alpha)^3}\epsilon_{ijk} \frac{(x-s)^j}{|\vec{r} - \vec{s}|} (x-s)^0 u^k, \quad (3.4.22)$$

quindi

$$\vec{B} = \hat{\vec{n}} \times \vec{E} = -\frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta}}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \quad (a = 0). \quad (3.4.23)$$

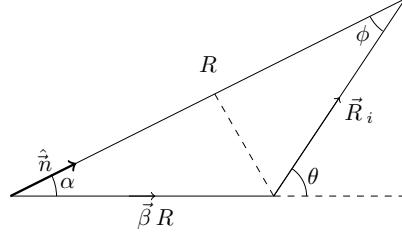


Figura 3.1: Relazione tra la posizione ritardata $R\hat{\vec{n}}$ e la posizione istantanea \vec{R}_i .

Questi campi coincidono con quelli calcolati in Sez. (2.4), tuttavia la loro forma è apparentemente diversa perché sono scritti in termini delle posizioni al tempo ritardato. Nel caso di un moto rettilineo uniforme è facile riscrivere le espressioni ottenute in funzione della posizione istantanea (indicata con \vec{R}_i in Eq. (2.4.10)): si ha infatti $\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{v}|\vec{r} - \vec{s}|/c = \vec{R}_i + \vec{\beta}R$, si hanno quindi le relazioni $\hat{\vec{n}} - \vec{\beta} = \vec{R}_i/R$ e

$$\hat{\vec{n}} \cdot \vec{R}_i = R(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}), \quad (3.4.24)$$

(quindi in particolare $\hat{\vec{n}} \cdot \vec{R}_i \geq 0$). Con riferimento a Fig. (3.1) si ha $R \sin \alpha = R_i \sin \theta$, quindi

$$\beta \sin \theta = \frac{\beta R \sin \alpha}{R_i} = \frac{R_i \sin \phi}{R_i} = \sin \phi \quad (3.4.25)$$

e dunque

$$R(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}) = \hat{\vec{n}} \cdot \vec{R}_i = R_i \cos \phi = R_i \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = R_i \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}. \quad (3.4.26)$$

Utilizzando queste relazioni è semplice vedere che Eq. (3.4.20) coincide con Eq. (2.4.10).

Passiamo ora ad analizzare la componente di radiazione del tensore di campo associato ai potenziali di Lienard-Wiechert, ovvero

$$F_{rad}^{\mu\nu} = e \frac{(x-s)^\mu a^\nu - (x-s)^\nu a^\mu}{((x-s)_\alpha u^\alpha)^2} - e \frac{(x-s)^\mu u^\nu - (x-s)^\nu u^\mu}{((x-s)_\alpha u^\alpha)^3} (x-s)_\rho a^\rho, \quad (3.4.27)$$

ricordando che l'espressione per la quadriaccelerazione è

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right), \quad (3.4.28)$$

dove \vec{a} è la accelerazione tridimensionale. Usando nuovamente $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$ e $u = \gamma(c, \vec{v})$ si trova per $E_i = -F^{0i}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad} &= -e \frac{|\vec{r} - \vec{s}| (\gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \vec{\beta} + \gamma^2 \vec{a}) - (\vec{r} - \vec{s}) \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \vec{a})}{(|\vec{r} - \vec{s}| \gamma c - \gamma (\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{v})^2} + \\ &+ e \frac{|\vec{r} - \vec{s}| \gamma \vec{v} - (\vec{r} - \vec{s}) \gamma c}{(|\vec{r} - \vec{s}| \gamma c - \gamma (\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{v})^3} (|\vec{r} - \vec{s}| \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \vec{a}) - \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{s}) \gamma^4 (\vec{\beta} \cdot \vec{a}) - (\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{a} \gamma^2) = \\ &= -\frac{e \gamma^2 (\vec{\beta} - \hat{\vec{n}}) (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) + \dot{\vec{\beta}}}{cR (1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^2} + \frac{e}{cR} \frac{\vec{\beta} - \hat{\vec{n}}}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^3} (\gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) (1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}) - \hat{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{\beta}}) = \\ &= \frac{e}{cR} \frac{1}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^3} (-(\vec{\beta} - \hat{\vec{n}}) (\hat{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}} (1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})) = \\ &= \frac{e}{cR} \frac{\hat{\vec{n}} \times ((\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

in cui nell'ultima espressione si è scritto esplicitamente (prima era stato sottointeso) che l'espressione deve essere valutata al tempo ritardato t_r ; procedendo in modo identico al caso senza accelerazione si trova nuovamente $\vec{B}_{rad} = \hat{\vec{n}} \times \vec{E}_{rad}$. Sommando a questo risultato Eq. (3.4.20) si ottiene l'espressione completa dei campi associati ai potenziali di Lienard-Wiechert:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} + \frac{e}{cR} \frac{\hat{\vec{n}} \times ((\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{\vec{n}} \times \vec{E} \Big|_{t_r}, \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

in cui si ricorda che $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$, $R = |\vec{R}|$, $\hat{\vec{n}} = \vec{R}/R$ e $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$.

Si vuole ora analizzare la relazione tra l'espressione per $\partial_\alpha \tau_r$ precedentemente ottenuta, che riportiamo qui per comodità

$$\partial_\alpha \tau_r = \frac{(x - s(\tau_r))_\alpha}{(x - s(\tau_r))_\mu u^\mu(\tau_r)}, \quad (3.4.31)$$

e le corrispondenti espressioni per le variabili tridimensionali associate. Ricordiamo che dalla definizione di τ_r si ha $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$, quindi usando $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ si ottiene

$$\partial_0 \tau_r = \frac{|\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|}{\gamma c [|\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)| - (\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)) \cdot \vec{\beta}(\tau_r)]}; \quad \partial_i \tau_r = \frac{(x - s(\tau_r))_i}{\gamma c [|\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)| - (\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)) \cdot \vec{\beta}(\tau_r)]}, \quad (3.4.32)$$

da cui si trovano per le derivate del tempo ritardato t_r (τ_r è il tempo proprio corrispondente a t_r) le seguenti espressioni, in cui tutte le quantità dipendenti dal tempo sono calcolate a t_r :

$$\frac{dt_r}{dt} = \frac{1}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}}; \quad \vec{\nabla} t_r = \frac{-\hat{\vec{n}}/c}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}}. \quad (3.4.33)$$

Queste stesse relazioni possono essere ottenute in modo un poco più laborioso lavorando sempre nel formalismo tridimensionale: da $t = t_r + R/c$ si ottiene

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt_r} \sqrt{(\vec{r} - \vec{s}(t_r))^2} = 1 - \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \vec{v}(t_r)}{R} = 1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}, \quad (3.4.34)$$

quindi

$$\frac{dt_r}{dt} = \frac{1}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}}. \quad (3.4.35)$$

Si hanno inoltre le relazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{R}}{\partial t_r} &= \frac{\partial}{\partial t_r} [\vec{r} - \vec{s}(t_r)] = -\vec{v}(t_r) , \\ \frac{\partial R}{\partial t_r} &= \frac{\partial}{\partial t_r} \sqrt{\vec{R}^2} = \hat{\vec{n}} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t_r} = -\hat{\vec{n}} \cdot \vec{v} , \\ \frac{dR}{dr^i} &= \frac{d}{dr^i} [c(t - t_r)] = -c \frac{dt_r}{dr^i} ,\end{aligned}\tag{3.4.36}$$

quindi, notando che $R = \sqrt{(\vec{r} - \vec{s}(t_r))^2}$ dipende dalla posizione \vec{r} sia esplicitamente che implicitamente (il tempo ritardato t_r dipende da \vec{r}), si trova usando i risultati precedenti:

$$-c \frac{dt_r}{dr^i} = \frac{dR}{dr^i} = \frac{\partial R}{\partial r^i} + \frac{\partial R}{\partial t_r} \frac{dt_r}{dr^i} = \frac{\partial}{\partial r^i} \sqrt{(\vec{r} - \vec{s}(t_r))^2} - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{v} \frac{dt_r}{dr^i} = n^i - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{v} \frac{dt_r}{dr^i} ,\tag{3.4.37}$$

da cui si ottiene infine

$$\vec{\nabla}_{t_r} = \frac{-\hat{\vec{n}}/c}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} .\tag{3.4.38}$$

3.5 La potenza irraggiata da una singola particella

Calcoliamo ora l'energia irraggiata da una particella accelerata nell'unità di tempo. Per fare ciò è prima di tutto necessario calcolare il vettore di Poynting \vec{S} : poiché $\vec{B}_{rad} = \hat{\vec{n}} \times \vec{E}_{rad}$ si ha

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{E}_{rad}) = \frac{c}{4\pi} E_{rad}^2 \hat{\vec{n}}\tag{3.5.1}$$

dove tutta l'espressione deve essere calcolata al tempo ritardato t_r . Per calcolare la potenza irraggiata è necessario calcolare il flusso del vettore di Poynting su una superficie chiusa, tuttavia l'integrale che si ottiene usando l'espressione generale Eq. (3.4.29) è piuttosto complicato, in quanto compaiono nell'integrando due vettori indipendenti: $\vec{\beta}$ e $\dot{\vec{\beta}}$. È quindi conveniente dapprima calcolare la potenza irraggiata nel sistema di quiete della particella, in cui β è istantaneamente nullo e poi estendere il risultato usando la covarianza relativistica.

Nel sistema di quiete istantanea della particella accelerata la componente di radiazione del campo elettrico si riduce a

$$\vec{E}_{rad}^{(nr)} = \frac{e}{cR} \hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{\beta}})\tag{3.5.2}$$

e, se si indica con θ l'angolo tra i vettori $\dot{\vec{\beta}}$ e \vec{n} , si ha

$$|\vec{E}_{rad}^{(nr)}| = \frac{ea \sin \theta}{c^2 R} , \quad a = |\vec{a}| .\tag{3.5.3}$$

La quantità di energia irraggiata per unità di tempo, data dal flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera di raggio R , è quindi data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{e^2 a^2}{2c^3} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3}\tag{3.5.4}$$

che è nota come formula di Larmor. Se si considera la forma esplicita del tensore energia-impulso del campo (o più semplicemente la distribuzione angolare della radiazione emessa) non è difficile verificare che nel caso non relativistico l'impulso irraggiato è nullo¹.

Per ottenere la generalizzazione relativistica della formula di Larmor è conveniente riscriverla nella forma

$$\begin{aligned}d\mathcal{E} &= \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} dt \\ d\vec{\mathcal{P}} &= 0 ,\end{aligned}\tag{3.5.5}$$

¹Una analisi molto accurata di alcuni dettagli può essere trovata in [12] §5.1, in cui si mostra esplicitamente che il quadriimpulso della radiazione emessa trasforma effettivamente come un quadrvettore.

dove $d\mathcal{E}$ e $d\vec{\mathcal{P}}$ sono rispettivamente l'energia e l'impulso irraggiati nell'intervallo di tempo dt nel sistema di quiete della particella. La generalizzazione covariante di queste espressioni è

$$d\mathcal{P}^\mu = -\frac{2e^2}{3c^5} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} u^\mu d\tau \quad (3.5.6)$$

infatti nel sistema di riferimento (localmente) in quiete abbiamo $u^\mu = (c, 0)$ e $du^\mu/d\tau = (0, \vec{a})$, quindi si ritrovano le equazioni precedenti (attenzione che una potenza di c è dovuta a $d\mathcal{P}^\mu = (d\mathcal{E}/c, d\vec{\mathcal{P}})$). D'altra parte se due quadrvettori sono uguali in un sistema di riferimento, dato che trasformano nello stesso modo, sono uguali in ogni sistema di riferimento, quindi quella precedente è l'unica espressione covariante che si riduce alla formula di Larmor nel limite non relativistico. Per determinare la potenza irraggiata basta quindi considerare la componente 0 di Eq. (3.5.6), cioè

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} \quad (3.5.7)$$

Notiamo che il “ t ” che compare in questa espressione è quello a cui è emessa la radiazione (cioè quello a cui sono calcolate le quadriaccelerazioni), quindi più propriamente andrebbe indicato con t_r . Questo si vedrà più esplicitamente in Sez. (3.8) considerando esplicitamente i casi di moto uniformemente accelerato e di moto circolare uniforme.

Utilizzando la formula esplicita

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) , \quad (3.5.8)$$

per la quadriaccelerazione si ottiene

$$\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} = -\gamma^4 a^2 - \frac{\gamma^6}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 \quad (3.5.9)$$

che utilizzando $(\vec{v} \times \vec{a})^2 = v^2 a^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2$ si riscrive come

$$\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} = -\gamma^6 a^2 + \frac{\gamma^6}{c^2} (\vec{v} \times \vec{a})^2 \quad (3.5.10)$$

e quindi la generalizzazione relativistica della formula di Larmor è

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left(a^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{a})^2 \right) . \quad (3.5.11)$$

Due casi particolari significativi sono il caso della accelerazione rettilinea (quindi $\vec{v} \parallel \vec{a}$) e quello del moto circolare uniforme ($\vec{v} \perp \vec{a}$):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \Big|_{lin} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 a^2 , \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} \Big|_{circ} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 a^2 . \quad (3.5.12)$$

3.6 Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (1)

Il punto di partenza per calcolare la distribuzione dell'energia irraggiata è ovviamente l'espressione dei campi elettrico e magnetico corrispondenti ai potenziali di Lienardt-Wiechert nella zona di radiazione:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{e}{cR} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Bigg|_{t_r} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{n} \times \vec{E} \Bigg|_{t_r} , \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

dove $\vec{s}(t)$ è la legge oraria della particella carica che irraggia, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$, $R = |\vec{R}|$, $\hat{\vec{n}} = \vec{R}/R$ e t_r è il tempo ritardato, definito dall'equazione $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$. Dal vettore di Poynting associato ai campi di radiazione si ottiene la seguente espressione per la distribuzione angolare dell'energia irraggiata \mathcal{E} :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 R^2 \Big|_{t_r} dt , \quad (3.6.2)$$

dove il raggio della sfera su cui si calcola il flusso deve essere quello calcolato al tempo ritardato. Notiamo che poichè in questa relazione compare un integrale su tutti i tempi, r deve essere abbastanza grande da essere in zona di radiazione per tutti i valori di t a cui viene emessa radiazione. Questo significa che il moto della particella deve essere tale che la radiazione venga emessa solo quando la particella è in una regione limitata di spazio, come accade per esempio in un processo di scattering, in cui per $t \rightarrow \pm\infty$ si ha $\dot{\vec{\beta}} \rightarrow 0$.

Per ottenere la distribuzione in frequenza è conveniente usare l'identità di Parseval per le trasformate di Fourier, ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.6.3)$$

dove la funzione $\tilde{f}(\omega)$ è definita dall'espressione

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt . \quad (3.6.4)$$

Se introduciamo per semplicità di notazione il vettore ausiliario $\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t)R|_{t_r}$ si ha allora

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega \quad (3.6.5)$$

e poichè il campo elettrico è una variabile reale si deve avere $\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, -\omega) = \tilde{\vec{C}}(\vec{r}, \omega)^*$ quindi l'intervallo di integrazione delle frequenze può essere ristretto al solo semiasse positivo:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = c \int_0^{+\infty} |\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega , \quad (3.6.6)$$

che corrisponde alla distribuzione in frequenza

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = c |\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, \omega)|^2 . \quad (3.6.7)$$

Per terminare serve ora scrivere in modo esplicito le componenti del vettore ausiliario $\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, \omega)$: dalla definizione segue che

$$\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, \omega) = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\hat{\vec{n}} \times ((\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right]_{t_r} dt \quad (3.6.8)$$

ed è conveniente cambiare la variabile di integrazione da t a t_r , usando il fatto che dalla definizione di tempo ritardato $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$ segue che

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 - \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \frac{d\vec{s}(t_r)}{dt_r}}{|\vec{r} - \vec{s}(t_r)|} = 1 - \hat{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{\beta}}|_{t_r} . \quad (3.6.9)$$

Si trova quindi (d'ora in poi, non essendoci più possibilità di confusione, indicheremo t_r semplicemente con t)

$$\tilde{\vec{C}}(\vec{r}, \omega) = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t+|\vec{r}-\vec{s}(t)|/c)} \frac{\hat{\vec{n}} \times ((\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} dt . \quad (3.6.10)$$

Questa forma può ancora essere semplificata usando $|\vec{s}(t)| \ll |\vec{r}|$ (ricordiamo quanto notato prima sul fatto che la particella irraggia solo in una regione limitata di spazio). Usando $|\vec{s}(t)| \ll |\vec{r}|$ si ha allora $\hat{\vec{n}} \simeq \vec{r}/|\vec{r}|$ e $|\vec{r} - \vec{s}(t)| \simeq |\vec{r}| - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)$, ottenendo quindi (a meno di una fase inessenziale visto il modulo quadro in Eq. (3.6.7)) l'espressione

$$\tilde{C}(\vec{r}, \omega) = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{\vec{n}} \times ((\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} dt . \quad (3.6.11)$$

Inserendo questo risultato in Eq. (3.6.7) si ottiene infine l'espressione dell'energia totale irraggiata per unità di angolo solido e di frequenza:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{\vec{n}} \times ((\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} dt \right|^2 . \quad (3.6.12)$$

In molti casi di utilità pratica risulta comodo notare che (ricordiamo che a questo punto $\hat{\vec{n}} \simeq \vec{r}/|\vec{r}|$ è indipendente da t)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{\vec{n}}(\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} \right) = \frac{\hat{\vec{n}}(\hat{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} + (\hat{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \frac{\hat{\vec{n}}(\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^2} = \\ &= \frac{(\hat{\vec{n}} - \vec{\beta})(\hat{\vec{n}} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})}{(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})^2} = \frac{\hat{\vec{n}} \times ((\hat{\vec{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} . \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

per riscrivere l'equazione Eq. (3.6.12) nella forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} \right) dt \right|^2 . \quad (3.6.14)$$

Nel caso in cui il moto della particella non ha singolarità (come ad es. accelerazioni istantanee) e non si ha emissione di radiazione per $t \rightarrow \pm\infty$ l'espressione Eq. (3.6.14) può essere integrata per parti procedendo come segue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} \right) dt &= \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon|t|} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} \right) dt = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon|t|} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} \frac{d}{dt} (i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c) - \epsilon|t|) dt = \\ &= -i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} (\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})) dt . \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

Eq. (3.6.14) può dunque essere riscritta come segue

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} (\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})) dt \right|^2 . \quad (3.6.16)$$

Poichè si è assunto che non si abbia irraggiamento per $t \rightarrow \pm\infty$, si può supporre di essere a distanza sufficientemente grande dalla particella da far sì che $\hat{\vec{n}}$ vari abbastanza lentamente da far uscire $\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \dots)$ dall'integrale ottenendo (ovviamente $|\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{a})|^2 = |\hat{\vec{n}} \times \vec{a}|^2$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \hat{\vec{n}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \vec{\beta} dt \right|^2 . \quad (3.6.17)$$

In questa forma non è più immediatamente evidente che nel caso $\dot{\vec{\beta}} = 0$ non si ha emissione di radiazione, tuttavia se si calcola l'integrale usando $\vec{s}(t) = c\vec{\beta}t$ (con $\vec{\beta}$ costante) si ottiene un risultato proporzionale a (vedi Sez. (A.5))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(1-\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})t} dt = 2\pi\delta(\omega(1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})) = 0 \quad (3.6.18)$$

in quanto $\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta} < 1$.

Per una particella puntiforme si ha $\vec{j}(\vec{r}, t) = e\vec{v}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t))$ e ricordando che per un campo di radiazione si ha $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{\vec{n}}$ si trova

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) &= \frac{e}{(2\pi)^4} \int \vec{v}(t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) d^3 r dt = \\ &= \frac{e}{(2\pi)^4} \int \vec{v}(t) e^{i\omega(it - \vec{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} dt, \end{aligned} \quad (3.6.19)$$

quindi Eq. (3.6.16) si può riscrivere nella forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{(2\pi)^6 \omega^2}{c^3} \left| \hat{\vec{n}} \times \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) \right|^2. \quad (3.6.20)$$

Questa espressione può essere scritta in modo leggermente diverso notando che l'equazione di continuità della carica $\partial_t \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$ diventa in trasformata $\vec{k} \cdot \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) = \omega \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)$ quindi

$$|\hat{\vec{n}} \times \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2 = |\tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2 - |\hat{\vec{n}} \cdot \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2 = |\tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2 - c^2 |\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)|^2. \quad (3.6.21)$$

Per ottenere la dipendenza dalla frequenza e dalla direzione della potenza “istantanea” (si preciserà meglio tra poco) emessa si può riscrivere $|\tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2$ usando una trasformata di Fourier solo sul tempo

$$\begin{aligned} |\tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\int \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, t) e^{i\omega t} dt \right]^* \cdot \left[\int \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, t') e^{i\omega t'} dt' \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, t)^* \cdot \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, t') e^{-i\omega(t-t')} dt dt'. \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

Introducendo ora $T = \frac{1}{2}(t + t')$ e $\tau = t - t'$ si vede facilmente che $dtdt' = dTd\tau$, quindi

$$|\tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dT \int \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, T + \tau/2)^* \cdot \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, T - \tau/2) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.6.23)$$

A causa del termine esponenziale oscillante ci si aspetta che l'integrale sia determinato principalmente dai valori assunti dall'integrando per $|\tau| \lesssim 1/\omega$, che è una scala di tempi tipicamente molto più piccola dei tempi tipici di osservazione macroscopici. Si può quindi intepretare T come un tempo macroscopico di emissione della radiazione (definito a meno di fattori dell'ordine di $1/\omega$) e solo in questo senso si può parlare di potenza istantanea emessa ad una certa frequenza. Le stesse manipolazioni si possono applicare in modo identico al termine $|\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)|^2$ ottenenendo quindi infine (usando $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{\vec{n}}$)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dT d\omega d\Omega} &= \frac{(2\pi)^4 \omega^2}{c^3} \int \left(\tilde{\vec{j}}(\vec{k}, T + \tau/2)^* \cdot \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, T - \tau/2) + \right. \\ &\quad \left. - c^2 \tilde{\rho}(\vec{k}, T + \tau/2)^* \tilde{\rho}(\vec{k}, T - \tau/2) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2 c^3} \int \left(\vec{j}(\vec{r}, T + \tau/2)^* \cdot \vec{j}(\vec{r}', T - \tau/2) + \right. \\ &\quad \left. - c^2 \rho(\vec{r}, T + \tau/2)^* \rho(\vec{r}', T - \tau/2) \right) e^{-i\omega(\tau - \hat{\vec{n}} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/c)} d\tau d\vec{r} d\vec{r}' . \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

3.7 — parte facoltativa — Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (2)

Nella sezione precedente si sono ottenute delle espressioni per la distribuzione angolare ed in frequenza della radiazione emessa da una carica in moto accelerato a partire dalla forma esplicita dai campi di radiazione di Lienard-Wiechert. In questa sezione si otterranno delle espressioni per l'energia irraggiata valide nel caso più generale in cui si abbia una distribuzione di carica $\rho(\vec{r}, t)$ ed una densità di corrente $\tilde{j}(\vec{r}, t)$, seguendo un approccio ispirato a [16]. Il vantaggio di questo approccio consiste nel fatto che, non usando esplicitamente le espressioni dei campi di Lienard-Wiechert, rende trasparente il fatto che le espressioni ottenute nella sezione precedente sono in realtà valide più in generale: ad esempio nel caso della radiazione Cherenkov si possono avere una, due o nessuna soluzione per l'equazione dei tempi ritardati, tuttavia il fatto di avere una unica soluzione (che è ovviamente fondamentale nella deduzione dei campi di Lienard-Wiechert) non entrerà in nessun modo nella trattazione di questa sezione.

Il punto di partenza sono ovviamente i potenziali ritardati ed il primo passo è riscrivere questi potenziali in una forma che risulterà più comoda da utilizzare: usando la relazione (vedi Sez. (A.5))

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)} d\omega \quad (3.7.1)$$

il potenziale scalare $\phi(\vec{r}, t)$ generato dalla distribuzione $\rho(\vec{r}, t)$ può essere riscritto come (vedi Sez. (A.1) per le convenzioni nelle trasformate di Fourier)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt' = \\ &= \int e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t') e^{i\omega t'} e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c} d\omega d^3 r' dt' = \\ &= \int e^{-i\omega t} \frac{e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) d\omega d^3 r' \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

e quindi

$$\tilde{\phi}(\vec{r}, \omega) = \int \frac{e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) d^3 r'. \quad (3.7.3)$$

In modo identico si ottiene

$$\tilde{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int \frac{e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tilde{j}(\vec{r}', \omega) d^3 r'. \quad (3.7.4)$$

Supponiamo ora che sia $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$, in modo da poter usare nell'esponenziale $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}'$, dove $\hat{\vec{n}} = \vec{r}/r$, mentre nel denominatore si può usare semplicemente $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r$; si ottiene nella zona di radiazione

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\vec{r}, \omega) &= \frac{e^{i\omega r/c}}{r} \int e^{-i\omega \hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}'/c} \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) d^3 r' \\ \tilde{A}(\vec{r}, \omega) &= \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \int e^{-i\omega \hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}'/c} \tilde{j}(\vec{r}', \omega) d^3 r'; \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

se introduciamo $\vec{k} = \hat{\vec{n}}\omega/c$ si ha allora

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\vec{r}, \omega) &= (2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{r} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) \\ \tilde{A}(\vec{r}, \omega) &= (2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \tilde{j}(\vec{k}, \omega). \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Se nel calcolo del campo magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ si considera solo il termine dominante in $1/r$ si trova

$$\tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) = (2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) = -i(2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \vec{k} \times \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega). \quad (3.7.7)$$

Per il calcolo del campo elettrico è conveniente notare che l'equazione della gauge di Lorenz $\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ diventa in trasformata di Fourier $i \frac{\omega}{c} (\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) - \hat{\vec{n}} \cdot \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega)) = 0$ e quindi si ha

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) = \hat{\vec{n}} \cdot \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega); \quad (3.7.8)$$

di conseguenza nella regione di radiazione si ha (usando $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ e trascu-
rando nuovamente termini aventi potenze più elevate di $1/r$)

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) &= i\vec{k}(\hat{\vec{n}} \cdot \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega)) - i\frac{\omega}{c} \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega) = i\frac{\omega}{c} \left(\hat{\vec{n}}(\hat{\vec{n}} \cdot \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega)) - \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega) \right) = \\ &= i\frac{\omega}{c} \hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega)) = -\hat{\vec{n}} \times (-i\vec{k} \times \hat{\vec{A}}(\vec{k}, \omega)) = -\hat{\vec{n}} \times \tilde{\vec{B}}(\vec{k}, \omega). \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

Usando queste espressioni si può calcolare l'energia totale emessa integrando il flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera su tutti i tempi:

$$\mathcal{E} = \int r^2 \hat{\vec{n}} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) d\Omega dt = \frac{c}{4\pi} \int r^2 \hat{\vec{n}} \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) d\Omega dt. \quad (3.7.10)$$

Usando $\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, -\omega) = \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega)^*$, $\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = -\hat{\vec{n}} \times \tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega)$ e $\hat{\vec{n}} \cdot \tilde{\vec{B}}(\vec{r}, t) = 0$ si trova inoltre

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \times \tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega') e^{-i(\omega+\omega')t} dt d\omega d\omega' = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + \omega') \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) \times \tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega') d\omega d\omega' = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega)^* \times \tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega) d\omega = \\ &= 2\pi \hat{\vec{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega = 4\pi \hat{\vec{n}} \int_0^{+\infty} |\tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

Rimettendo insieme tutti i pezzi si ha quindi

$$\mathcal{E} = c \int d\Omega \int_0^\infty d\omega r^2 |\tilde{\vec{B}}(\vec{r}, \omega)|^2 = \frac{(2\pi)^6}{c^3} \int d\Omega \int_0^\infty d\omega \omega^2 |\hat{\vec{n}} \times \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2, \quad (3.7.12)$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{(2\pi)^6 \omega^2}{c^3} |\hat{\vec{n}} \times \tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega)|^2, \quad (3.7.13)$$

che coincide con Eq. (3.6.20) trovata precedentemente. Le stesse manipolazioni usate nella sezione precedente portano quindi a Eq. (3.6.24) anche in questo approccio e si potrebbe ottenere la distribuzione in frequenza ed in angolo solido della potenza emessa da una particella puntiforme in moto generico senza utilizzare la forma esplicita dei campi di Lienard-Wiechert (vedi² ad es. [16]).

3.8 Il caso della accelerazione lineare ed il moto circolare uniforme

In questa sezione si tratteranno due casi di grande importanza pratica: il caso in cui sia presente una accelerazione lineare (ovvero $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$) ed il caso del moto circolare uniforme. Il punto di

²Eq. (3.6.24) coincide con Eq. (I.33) di [16].

partenza saranno sempre i campi di radiazione corrispondenti ai potenziali di Lienard-Wiechert, che riportiamo qui per comodità

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e}{cR} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \quad (3.8.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{n} \times \vec{E} \Big|_{t_r} ,$$

in cui si ricorda che $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$, $\vec{s}(t)$ è la legge oraria della particella carica, $R = |\vec{R}|$, $\hat{n} = \vec{R}/R$ ed il tempo ritardato t_r è definito dall'equazione $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$.

Partiamo dal caso della accelerazione lineare: in questo caso si ha $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} = 0$, quindi il vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ del campo di radiazione è diretto lungo \hat{n} e si ha

$$\vec{S} \cdot \hat{n} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 = \frac{e^2}{4\pi c R^2} \frac{|\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^6} , \quad (3.8.2)$$

in cui tutte le quantità sono calcolate al tempo t_r . Questa è dunque l'energia irraggiata per unità di tempo e di superficie nella direzione \hat{n} che viene rilevata da un osservatore al tempo t , corrispondente al tempo ritardato dato dalla relazione $t = t_r + |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$. Se si vuole calcolare l'energia irraggiata per unità di angolo solido dalla particella durante un intervallo di tempo $T_1 \leq t_r \leq T_2$ è necessario integrare l'espressione precedente ed effettuare un cambio di variabile:

$$\mathcal{E} = \int_{T_1+|\vec{r}-\vec{s}(T_1)|/c}^{T_2+|\vec{r}-\vec{s}(T_2)|/c} R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \Big|_{t_r} dt = \int_{t_r=T_1}^{t_r=T_2} R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \frac{dt}{dt_r} dt_r . \quad (3.8.3)$$

Usando il fatto che

$$\frac{dt}{dt_r} = \frac{d}{dt_r} \left(t_r + |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c \right) = 1 - \dot{\vec{s}}(t_r) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{s}(t_r)}{c|\vec{r} - \vec{s}(t_r)|} = 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} \quad (3.8.4)$$

si ottiene per la potenza irraggiata per unità di angolo solido l'espressione

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \frac{dt}{dt_r} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} = \frac{e^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{4\pi c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} , \quad (3.8.5)$$

dove si è indicato con θ l'angolo tra $\vec{\beta}$ e la direzione di osservazione \hat{n} .

Nel limite non relativistico si ritrova la nota dipendenza $\sin^2 \theta$ e la maggior parte della radiazione viene emessa a $\theta = \pi/2$. Nel limite ultrarelativistico, invece, quasi tutta la radiazione viene emessa ad un angolo $\theta \simeq 1/\gamma$, come si può capire dalla legge di aberrazione relativistica degli angoli:

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta_0}{\beta + \cos \theta_0} \quad (3.8.6)$$

da cui si vede che $\theta_0 \simeq \pi/2$ corrisponde a $\theta \simeq 1/\gamma$ nel limite $\gamma \gg 1$. Notando che per $\gamma \gg 1$ si ha $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$, per $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$ si trova

$$\frac{\sin^2 \bar{\theta}}{(1 - \beta \cos \bar{\theta})^5} \simeq \frac{1/\gamma^2}{\left(1 - (1 - \frac{1}{2\gamma^2})^2\right)^5} \simeq \gamma^8 . \quad (3.8.7)$$

Integrando la potenza irraggiata su tutto l'angolo solido si ottiene nuovamente l'espressione Eq. (3.5.12):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{e^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{2c} \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\cos \theta = \frac{2e^2 |\vec{a}|^2}{3c^3} \gamma^6 , \quad (3.8.8)$$

dove si è usato

$$\int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5} dx = \frac{4}{3} \gamma^6 ; \quad (3.8.9)$$

infatti con il cambio di variabile $y = 1 - \beta x$ si trova (dopo qualche passaggio)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{(1-\beta x)^5} dx &= \frac{1}{\beta^3} \int_{1+\beta}^{1-\beta} \frac{(1-\beta^2) - 2y + y^2}{y^5} dy = \\ &= \frac{1}{\beta^3} \left[\frac{\beta^2 - 1}{4y^4} + \frac{2}{3y^3} - \frac{1}{2y^2} \right]_{1+\beta}^{1-\beta} = \frac{4}{3(1-\beta^2)^3} = \frac{4}{3} \gamma^6 . \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

Ricordando che per un moto con $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ si ha

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv\gamma) = ma\gamma(1 + \beta^2\gamma^2) = ma\gamma^3 , \quad (3.8.11)$$

l'espressione per la potenza irraggiata può anche essere scritta nella forma equivalente

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{2e^2}{3c^3m^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 . \quad (3.8.12)$$

Questa espressione risulta particolarmente conveniente ad esempio se si vuole calcolare, in un acceleratore lineare, quale è il rapporto f_{rad} tra la potenza irraggiata e la potenza usata per aumentare la velocità della particella, che è un buon parametro per descrivere l'efficienza dell'acceleratore. Se indichiamo con \mathcal{E} l'energia irraggiata e con E l'energia della particella, si ha allora

$$f_{rad} = \frac{d\mathcal{E}/dt}{dE/dt} = \frac{\frac{2e^2}{3c^3m^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2}{\beta c \frac{dE}{dx}} . \quad (3.8.13)$$

Per semplificare questa espressione si può usare il fatto che da $E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$ si ottiene $E \frac{dE}{dt} = c^2 p \frac{dp}{dt}$ e quindi $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}$, dunque

$$f_{rad} = \frac{2}{3\beta} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \frac{dE/dx}{mc^2} = \frac{2}{3\beta} \frac{r_e dE/dx}{mc^2} , \quad (3.8.14)$$

dove si è introdotto $r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}$, quantità che per l'elettrone prende il nome di raggio classico dell'elettrone e vale approssimativamente 2.8 fm. Dall'equazione precedente si vede chè f_{rad} sarà piccolo fintantochè l'energia cinetica acquistata da una particella nella distanza r_e sarà molto più piccola della sua massa di riposo, condizione che è sempre verificata data la piccolezza di r_e .

Passiamo ora ad analizzare il caso del moto circolare uniforme. In questo caso la dipendenza angolare è un po' più complicata e per scrivere le espressioni in modo esplicito considereremo il caso in cui il piano della circonferenza sia il piano $\hat{y}\hat{z}$, la velocità sia diretta lungo l'asse \hat{z} e la accelerazione lungo \hat{y} , quindi $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$ e $\vec{a} = (0, a, 0)$ (vedi Fig. (3.2)); la direzione di osservazione \hat{n} sarà parametrizzata da $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, dove quindi θ è l'angolo tra \hat{n} e la velocità. Usando la stessa formula generale dedotta per il caso dell'accelerazione lineare, l'energia irraggiata per unità di tempo (ritardato) e per unità di angolo solido si scrive come

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \frac{dt}{dt_r} = R^2 \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) , \quad (3.8.15)$$

che nel caso specifico diventa

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5} . \quad (3.8.16)$$

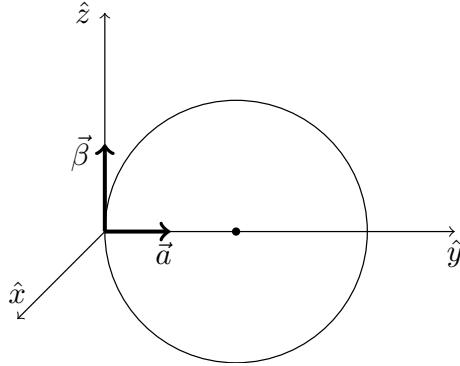


Figura 3.2: Geometria usata per il caso del moto circolare uniforme.

Usando la relazione $\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{q}) = \vec{w}(\vec{v} \cdot \vec{q}) - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{q}$ questa si può riscrivere come

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|(\hat{\vec{n}} - \vec{\beta})(\hat{\vec{n}} \cdot \vec{a}) - (1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})\vec{a}|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\vec{n}})^5} \quad (3.8.17)$$

e si ha

$$\begin{aligned} & |(\hat{\vec{n}} - \vec{\beta})(\hat{\vec{n}} \cdot \vec{a}) - (1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta})\vec{a}|^2 = \\ &= a^2(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2) \sin^2 \theta \sin^2 \phi + a^2(1 - \beta \cos \theta)^2 - 2a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi(1 - \beta \cos \theta) = \quad (3.8.18) \\ &= a^2(1 - \beta \cos \theta)^2 - \frac{1}{\gamma^2} a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \end{aligned}$$

quindi infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right). \quad (3.8.19)$$

Come nel caso della accelerazione lineare la maggior parte della radiazione viene emessa nel limite ultrarelativistico ad un angolo $\bar{\theta} \lesssim 1/\gamma$. Usando questo valore e $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ si ottiene $1 - \beta \cos \bar{\theta} \simeq 1/\gamma^2$ e quindi

$$\frac{1}{(1 - \beta \cos \bar{\theta})^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \bar{\theta} \sin^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \bar{\theta})^2} \right) \simeq \gamma^6 (1 - \sin^2 \phi) \quad (3.8.20)$$

mentre il corrispondente fattore per $\theta = 0$ vale $8\gamma^6$.

La potenza totale irraggiata si può ottenere integrando su tutto l'angolo solido:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt_r} &= \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \int \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right) d\phi d\cos \theta = \\ &= \frac{e^2 a^2}{2c^3} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \beta x)^3} \left(1 - \frac{1 - x^2}{2\gamma^2 (1 - \beta x)^2} \right) dx \end{aligned} \quad (3.8.21)$$

Usando il cambio di variabile $y = 1 - \beta x$ si ottiene

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \beta x)^3} dx = -\frac{1}{\beta} \int_{1+\beta}^{1-\beta} \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2\beta} \left[\frac{1}{y^2} \right]_{1+\beta}^{1-\beta} = 2\gamma^4 \quad (3.8.22)$$

mentre il secondo integrale è della forma Eq. (3.8.10). Si trova quindi infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^4, \quad (3.8.23)$$

compatibilmente con la Eq. (3.5.12) trovata in precedenza.

Se si considera una particella carica che si muove su una circonferenza di raggio ρ si ha allora $a = v^2/\rho$ e l'energia persa in un periodo $T = 2\pi\rho/v$ è data da

$$\Delta E = T \frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{4\pi e^2}{3\rho} \beta^3 \gamma^4 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{\rho} \right) \beta^3 mc^2 \gamma^4 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{\rho} \right) \beta^3 E \gamma^3 , \quad (3.8.24)$$

dove si è nuovamente indicato con $r_e = e^2/(mc^2)$ il raggio classico della particella e con E la sua energia. Poichè ad esempio per un elettrone si ha $r_e \simeq 2.8$ fm, il rapporto r_e/ρ è sempre molto più piccolo dell'unità, tuttavia il fattore γ^3 è potenzialmente in grado di bilanciarlo. Se si considera ad esempio un elettrone di energia $E \simeq 105$ GeV che si muove su una circonferenza di raggio 3 Km (dati approssimativamente corrispondenti ai valori di LEP-II), si ottiene

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{2.8 \text{ fm}}{3 \text{ Km}} \left(\frac{105 \text{ GeV}}{0.5 \text{ MeV}} \right)^3 \simeq 0.036 . \quad (3.8.25)$$

L'intensità spettrale della radiazione emessa da una particella carica in moto circolare uniforme ha una struttura peculiare, la cui caratteristica principale è il fatto di essere piccata ad una frequenza molto alta, nota come frequenza critica, che vale $\omega_c = \omega_0 \gamma^3$, dove ω_0 è la frequenza di rotazione. Per una deduzione completa dello spettro ed in particolare di questa relazione si rimanda a [7] §74 o [4] §14.6, tuttavia esiste un semplice argomento fisico [16] per spiegare almeno qualitativamente il valore di ω_c . Consideriamo una particella che si muove a velocità ultrarelativistica: si è notato in precedenza che l'angolo a cui viene emessa la maggior parte della radiazione è $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$. Se la particella si muove su una traiettoria di raggio R , una quantità di radiazione significativa verrà quindi emessa in direzione di un osservatore lontano solo per l'intervallo di tempo ritardato $\Delta t_r \simeq (R/c)\bar{\theta}$ (in cui si è approssimato $v \simeq c$ e stiamo trascurando fattori dell'ordine dell'unità). Questo è infatti il tempo ritardato in cui una quantità significativa di radiazione emessa è abbastanza “allineata” con l'osservatore da essere rivelata. Il corrispondente intervallo di tempo in cui viene l'osservatore rivela la radiazione è

$$\Delta t = t^{(1)} - t^{(2)} = t_r^{(1)} + \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{s}(t_r^{(1)})| - t_r^{(2)} - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{s}(t_r^{(2)})| \simeq (1 - \beta \cos \bar{\theta}) \Delta t_r . \quad (3.8.26)$$

Usando $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ e $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$ si trova allora

$$\Delta t \simeq \frac{R}{c\gamma^3} \quad (3.8.27)$$

che corrisponde ad una frequenza caratteristica $\frac{c}{R}\gamma^3 \simeq \omega_0 \gamma^3$.

Capitolo 4

Reazione di radiazione

Consideriamo una carica elettrica soggetta ad una forza esterna conservativa \vec{F}_{ext} non nulla. A causa della accelerazione la carica irraggerà e di conseguenza perderà energia, quindi l'equazione di moto $\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{ext}$ non descriverà correttamente la fisica del problema (almeno per tempi abbastanza grandi da fare in modo l'energia irraggiata sia una frazione significativa dell'energia iniziale), in quanto da questa equazione si deduce la conservazione dell'energia della particella. Per tenere conto della radiazione emessa si aggiunge nella equazione del moto un termine di forza \vec{F}_{rad} chiamato comunemente “reazione di radiazione”, anche se come si vedrà questa terminologia non è completamente appropriata.

La prima deduzione dell'espressione della reazione di radiazione che sarà presentata si basa sul principio di conservazione dell'energia, come esposta ad es. in [4] §16.1, per un modo diverso di procedere nel caso non relativistico vedi [7] §75. Si seguirà poi [7] §76 per la generalizzazione relativistica, quindi si presenterà una versione “efficace” dell'argomento Abraham-Lorentz (vedi [4] §16.3 per la procedura standard). Un modo ancora diverso di procedere è quello *a là* Dirac, vedi [12] §6-5. Per una discussione molto approfondita anche dal punto di vista storico vedi [17].

4.1 Argomento euristico non relativistico

Consideriamo in questa sezione il caso di particella in moto non relativistico. Per tenere conto della perdita di energia per irraggiamento \vec{F}_{rad} deve ovviamente essere una forza dissipativa ed un vincolo naturale da imporre è che il lavoro fatto da questa forza corrisponda alla perdita di energia data dalla formula di Larmor, ovvero

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2 dt. \quad (4.1.1)$$

Scrivendo $\dot{\vec{v}}^2$ come $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) - \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}}$ nel secondo membro si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}} dt; \quad (4.1.2)$$

nel caso di un moto periodico si ottiene quindi

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_{rad} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0. \quad (4.1.3)$$

Un buon candidato per \vec{F}_{rad} è quindi

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}}. \quad (4.1.4)$$

4.2 Problemi e limiti della formulazione

Il problema fondamentale dell'equazione

$$m(\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}}) = \vec{F}_{ext}, \quad \tau \equiv \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}, \quad (4.2.1)$$

è la presenza della derivata terza della posizione nell'equazione del moto, che richiede quindi una ulteriore condizione iniziale. Una condizione intuitivamente ragionevole che si potrebbe pensare di usare è

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{\vec{v}}(t) = 0, \quad (4.2.2)$$

tuttavia questa condizione non elimina soluzioni patologiche neppure nel caso $\vec{F}_{ext} = 0$, come mostra la "soluzione di fuga"

$$\dot{\vec{v}}_{ra}(t) = \vec{a}_0 e^{t/\tau}, \quad (4.2.3)$$

che soddisfa sia l'equazione del moto $\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}} = 0$ che la condizione in Eq. (4.2.2).

Un modo per escludere la soluzione di fuga Eq. (4.2.3) consiste nell'imporre la condizione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\vec{v}}(t) = 0. \quad (4.2.4)$$

Ovviamente questa condizione (come anche la precedente Eq. (4.2.2)) ha senso solo nel caso che la forza esterna agisca per un intervallo di tempo limitato. Questa condizione si può implementare passando dall'equazione differenziale Eq. (4.2.1) ad una versione integro-differenziale della stessa: si riscrive prima di tutto l'equazione nella forma

$$-\frac{d}{dt} \left(e^{-t/\tau} m \dot{\vec{v}}(t) \right) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \vec{F}_{ext}(t), \quad \vec{F}_{ext}(t) \equiv \vec{F}_{ext}(\vec{x}(t)) \quad (4.2.5)$$

che viene poi integrata usando Eq. (4.2.4):

$$m \dot{\vec{v}}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_t^\infty e^{-t'/\tau} \vec{F}_{ext}(t') dt', \quad (4.2.6)$$

che può essere riscritta, introducendo la variabile di integrazione $s = (t' - t)/\tau$, nella forma

$$m \dot{\vec{v}}(t) = \int_0^\infty e^{-s} \vec{F}_{ext}(t + \tau s) ds \quad (4.2.7)$$

Questa equazione presenta tuttavia dei problemi di causalità: se consideriamo una forza esterna del tipo $\vec{F}_{ext}(t) \equiv \vec{F}_0 \Theta(t)$, con $\vec{F}_0 = \text{costante}$, si ottiene

$$m \dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}_0 \int_0^\infty e^{-s} \Theta(t + \tau s) ds = \vec{F}_0 \int_{\max(0, -t/\tau)}^\infty e^{-s} ds = \begin{cases} \vec{F}_0 & \text{per } t > 0 \\ \vec{F}_0 e^{t/\tau} & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad (4.2.8)$$

ovvero la particella comincia ad accelerare prima della accensione della forza ("pre-accelerazione").

Un possibile approccio al termine di reazione di radiazione fa emergere l'equazione Eq. (4.2.1) sviluppando in serie un termine che contiene in realtà dei ritardi (vedi Sez. (4.4)). Ci si aspetta quindi che l'equazione stessa abbia senso solo nel limite in cui questo sviluppo è ragionevole, cosa che è vera quando la variazione relativa della accelerazione $\Delta \dot{v}/\dot{v}$ è piccola in un tempo caratteristico del sistema. Il tempo naturale per il ritardo è a/c (dove con a indichiamo come nella sezione precedente una dimensione tipica della particella), tuttavia dimensionalmente si vede emergere anche la scala temporale τ indicata in Eq. (4.2.1), che per particelle abbastanza piccole è la scala di tempo più grande disponibile. Appare quindi ragionevole supporre che il limite di validità dell'equazione Eq. (4.2.1) sia

$$1 \gg \frac{\dot{v}(t + \tau) - \dot{v}(t)}{\dot{v}(t)} \simeq \frac{\tau \ddot{v}(t)}{\dot{v}(t)} \quad (4.2.9)$$

quindi l'equazione ha senso solo quando il termine di reazione di radiazione è piccolo rispetto al termine dominante.

Per determinare quali sono i limiti di applicabilità nel caso in cui F_{ext} sia una forza di tipo elettromagnetico si può quindi procedere in modo perturbativo: dapprima si calcola la accelerazione dall'equazione del moto ottenuta trascurando completamente la reazione di radiazione, quindi si usa la forma di questa accelerazione per stimare l'intensità della reazione di radiazione. Consideriamo esplicitamente il caso in cui $\vec{F}_{ext} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ con $v \ll c$: se si trascura la reazione di radiazione si ha

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.2.10)$$

e quindi

$$\ddot{\vec{v}} = \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc}\dot{\vec{v}} \times \vec{B} + \frac{e}{mc}\vec{v} \times \dot{\vec{B}} \simeq \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\vec{E} \times \vec{B}, \quad (4.2.11)$$

in cui nell'ultima espressione si è sostituito a $\dot{\vec{v}}$ il valore dato dall'equazione del moto e si sono trascurati i termini lineari nella velocità (supposta piccola). Questa espressione può ora essere sostituita nella reazione di radiazione, ottenendo una equazione che non contiene più $\ddot{\vec{v}}$. Affinché si abbia $|\vec{F}_{rad}| \ll |\vec{F}_{ext}|$ devono quindi essere soddisfatte le relazioni

$$|\tau \dot{\vec{E}}| \ll |\vec{E}|, \quad \frac{e^2\tau}{mc}|\vec{E} \times \vec{B}| \ll e|\vec{E}|. \quad (4.2.12)$$

Per stimare l'ordine di grandezza di questi limiti usiamo $\dot{\vec{E}} \sim \omega E$, da cui si ottiene

$$\lambda \gg r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}, \quad B \ll \frac{m^2c^4}{e^3}. \quad (4.2.13)$$

Notiamo esplicitamente che ci si aspetta che una trattazione non quantistica fallisca ben prima del raggiungimento dei limiti in Eq. (4.2.13): per poter trascurare effetti di elettrodinamica quantistica la lunghezza d'onda tipica deve essere molto maggiore della lunghezza d'onda Compton $\lambda_C \equiv \frac{\hbar}{mc}$ e si ha

$$\lambda_C = \frac{\hbar c}{e^2}r_e \simeq 137r_e. \quad (4.2.14)$$

Analogamente, per poter trascurare effetti quantistici l'energia associata alla frequenza di ciclotrone $\omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$ deve essere molto più piccola di mc^2 , quindi $B \ll \frac{m^2c^3}{e\hbar}$ e di nuovo questo limite è circa 137 volte più grande del limite in Eq. (4.2.13).

4.3 — parte facoltativa — Generalizzazione relativistica

Considereremo in questa sezione la generalizzazione relativistica della reazione di radiazione Eq. (4.1.4), ovvero

$$m\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + F_{rad}^\mu \quad (4.3.1)$$

dove ora il punto indica la derivazione rispetto al tempo proprio e u^μ è la quadrivelocità.

Oltre al vincolo dinamico di riprodurre la relazione di Larmor, F_{rad}^μ deve ora soddisfare anche un vincolo cinematico, ovvero $u_\mu F_{rad}^\mu = 0$. Questo segue dal fatto che $u_\mu \dot{u}^\mu = 0$ (conseguenza di $u_\mu u^\mu = c^2$) e $u_\mu F_{ext}^\mu = 0$, dove questa condizione si ottiene in due modi diversi a seconda che F_{ext}^μ sia una forza di tipo elettromagnetico o indipendente dalla carica. In questo ultimo caso l'equazione del moto di una particella neutra è $m\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu$ e quindi la trasversalità di F_{ext}^μ segue dalla trasversalità di \dot{u}^μ . Nel caso in cui F_{ext} abbia origine elettromagnetica si ha $F_{ext}^\mu \propto F^{\mu\nu}u_\nu$, dove $F^{\mu\nu}$ è il tensore di campo, e quindi $u_\mu F_{ext}^\mu = 0$ a causa della antisimmetria di $F^{\mu\nu}$. La condizione di trasversalità delle forze non è niente altro che una condizione di consistenza tra le componenti spaziali e temporali dell'equazione del moto, necessaria per fare in modo che $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ rimanga valida durante il moto.

La scelta naturale per F_{rad}^μ sarebbe $\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{u}^\mu$, che è un quadrivettore le cui componenti spaziali si riducono a Eq. (4.1.4) nel limite non relativistico, tuttavia questo quadrivettore non rispetta la condizione di trasversalità, che significa che il limite non relativistico della componente temporale non è quello corretto. Si può allora aggiungere un termine del tipo Au^μ , che nel sistema di riferimento di quiete istantanea ha solo la componente temporale non nulla, per correggere questo difetto, dove A è una costante da determinarsi:

$$F_{rad}^\mu = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{u}^\mu + Au^\mu . \quad (4.3.2)$$

Imponendo $u_\mu F_{rad}^\mu = 0$ si ottiene (derivando $u_\mu \dot{u}^\mu = 0$ si trova $u_\mu \ddot{u}^\mu + \dot{u}_\mu \dot{u}^\mu = 0$)

$$c^2 A = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}u_\mu \ddot{u}^\mu = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{u}_\mu \dot{u}^\mu \quad (4.3.3)$$

e quindi

$$F_{rad}^\mu = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu \dot{u}_\nu \dot{u}^\nu\right) . \quad (4.3.4)$$

Questo è un quadrivettore che soddisfa il vincolo cinematico e che nel limite non relativistico si riduce al risultato corretto, quindi è la corretta (ed unica) generalizzazione relativistica di Eq. (4.1.4). Nel secondo termine di questa espressione si riconosce l'opposto del quadriimpulso irraggiato, dato da Eq. (3.5.6) e si pone quindi il problema di capire l'origine del primo termine, spesso chiamato termine di Schott. Si vede da questa espressione che la terminologia “reazione di radiazione” è impropria, in quanto ci sono anche altri contributi, legati all’energia accumulata nella regione di campo vicino. Un fatto curioso (che ha generato parecchia confusione) e che rende manifesto che ci sia altro oltre all’effetto di “rinculo dovuto all’emissione di radiazione” è che $F_{rad}^\mu = 0$ per una carica in moto relativistico uniformemente accelerato.

Verifichiamo l’ultima affermazione fatta, cioè che per una carica soggetta ad una accelerazione uniforme il termine di “reazione di radiazione” si annulla. Ricordiamo che in relatività ristretta si parla di accelerazione costante quando è costante (in modulo e verso) la accelerazione vista nel sistema di riferimento inerziale istantaneamente solidale al corpo accelerato. Tutte le quantità osservate in questo sistema di riferimento saranno indicate con un pedice S . Per riscrivere questa condizione in modo più esplicito partiamo dalla quadrivelocità, che in un sistema di riferimento generico si scrive $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$. Usando $d\gamma/dt = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2}\gamma^3$ si ottiene per la quadriaccelerazione l’espressione

$$a_\mu = \dot{u}_\mu = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \gamma^4 \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) , \quad (4.3.5)$$

quindi nel sistema inerziale solidale si ha

$$u_S^\mu = (c, 0) , \quad a_S^\mu = (0, \vec{a}_S) . \quad (4.3.6)$$

L’espressione generale di \dot{a}^μ è piuttosto complicata, tuttavia dall’espressione di a^μ , tenendo solo le derivate che non si annullano nel limite di velocità nulla, si vede abbastanza facilmente che

$$\dot{a}_S^\mu = \left(\frac{\vec{a}_S^2}{c}, \frac{d\vec{a}_S}{dt_S} \right) . \quad (4.3.7)$$

Consideriamo ora il quadrivettore $V^\mu = \dot{a}^\mu - \dot{a}_\nu u^\nu u^\mu/c^2$, che per costruzione ha componente temporale nulla nel sistema solidale al corpo accelerato. In particolare usando le formule precedenti si ha

$$V_S^\mu = \left(0, \frac{d\vec{a}_S}{dt_S} \right) . \quad (4.3.8)$$

Per un moto uniformemente accelerato si ha per definizione $d\vec{a}_S/dt_S = 0$, quindi $V_S^\mu = 0$. Poichè un quadrivettore nullo in un sistema di riferimento è nullo in ogni sistema di riferimento la condizione di accelerazione uniforme si può quindi scrivere $V^\mu = 0$, ovvero (usando analogamente a quanto fatto in precedenza $u_\mu \ddot{u}^\mu + \dot{u}_\mu \dot{u}^\mu = 0$)

$$\dot{a}^\mu + a_\nu a^\nu u^\mu/c^2 = 0 \quad (4.3.9)$$

che non è altro che $F_{rad}^\mu = 0$.

4.4 Limite puntiforme di una carica estesa (Abraham-Lorentz)

Se si considera una carica estesa è necessario considerare al tempo t non solo le forze esterne, ma anche le forze che agiscono sul punto \vec{r} della carica dovute al campo di radiazione generato dai punti \vec{r}' al tempo t_{ret} . Il risultato dipende ovviamente dalla forma della distribuzione di carica utilizzata ed il calcolo viene tipicamente svolto assumendo per semplicità la distribuzione corrispondente ad una distribuzione sferica di carica (vedi [4] §16.3). Solo alla fine si considera il limite in cui il raggio della carica tende a zero, in modo da riottenere il risultato Eq. (4.3.4) per una carica puntiforme.

Mentre i dettagli del calcolo risultano piuttosto complessi, le idee fisiche fondamentali ed il risultato finale si possono ottenere in modo abbastanza diretto. Consideriamo quindi una particella carica caratterizzata da una massa m , una carica e ed un raggio tipico a . Supponiamo di aver effettuato il calcolo completo della forza e di avere quindi ottenuto (per fissato valore di a) l'equazione del moto

$$m\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + F_{rad}^\mu \quad (4.4.1)$$

e procediamo ad analizzare la forma possibile di F_{rad}^μ . Questa è la forza totale dovuta alla radiazione generata dalla particella che agisce sulla particella stessa e deve poter essere scritta in termini di u^μ , \dot{u}^μ , \ddot{u}^μ e tutte le derivate di ordine superiore di u^μ , che sono le uniche variabili globali che caratterizzano la particella nel limite $a \rightarrow 0$.

Per tenere conto in modo sistematico della condizione di trasversalità delle forze è conveniente introdurre $P^{\mu\nu}$ definito da

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}. \quad (4.4.2)$$

È semplice verificare che $P^{\mu\nu}u_\nu = 0$ e che $P^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}P^{\rho\sigma} = P^{\mu\sigma}$, quindi P è il proiettore sull'iperpiano ortogonale alla quadrivelocità e di conseguenza si può scrivere

$$F_{rad}^\mu = P^{\mu\nu}G_\nu, \quad (4.4.3)$$

dove G_ν è un quadrivettore che non deve soddisfare nessun vincolo di trasversalità.

Se supponiamo che la dipendenza di G_μ da u^μ e tutte le sue derivate sia analitica, si può sviluppare G_μ , ottenendo

$$G_\mu = A\dot{u}_\mu + B\ddot{u}_\mu + C\dddot{u}_\mu + \dots + D\ddot{u}_\mu(\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu) + \dots, \quad (4.4.4)$$

dove il primo \dots indica termini lineari contenenti derivate di ordine superiore ed il secondo \dots indica termini contenenti potenze di grado più elevato di u_μ e delle sue derivate. Sono stati omessi sin dal principio i termini proporzionali a u^μ , che sono eliminati in modo banale dalla contrazione con il proiettore $P^{\mu\nu}$.

Passiamo ora ad analizzare i coefficienti A, B, C, D, \dots : poichè tutta la dipendenza da u_μ e dalle sue derivate è stata fattorizzata, i coefficienti possono dipendere solo dalle proprietà intrinseche della particella¹ (m , e ed a) e da costanti fondamentali (c). Questa dipendenza è in gran parte determinata dalla analisi dimensionale:

- $[A] = \text{massa}$, quindi A deve essere scrivibile in termini di m ed $e^2/(ac^2)$
- $[B] = \text{massa} \times \text{tempo}$, quindi dipende da ma/c e e^2/c^3
- $[C] = \text{massa} \times \text{tempo}^2$, quindi dipende da ma^2/c^2 e e^2a/c^4
- $[D] = \text{massa} \times \text{tempo}^2/\text{velocità}^2$, quindi dipende da ma^2/c^4 e e^2a/c^6

Risulta evidente che mano a mano che si procede con lo sviluppo si ottengono termini contenenti potenze via via più elevate del raggio a , che vogliamo però fare tendere a zero. Nel limite $a \rightarrow 0$ gli unici termini superstiti sono A e B , che devono essere scrivibili in termini di m , $e^2/(ac^2)$ ed e^2/c^3

¹Ovviamente una altra proprietà della particella è la sua forma, ma supporremo di considerare il limite $a \rightarrow 0$ a forma fissata.

rispettivamente. Chiaramente $e^2/(ac^2)$ diverge per $a \rightarrow 0$ e questo è ovviamente un problema, supponiamo per ora di avere a finito ma sufficientemente piccolo da poter trascurare tutti i termini tranne quelli moltiplicati per A e B .

Usando $G_\mu = A\dot{u}_\mu + B\ddot{u}_\mu$ si ottiene quindi

$$F_{rad}^\mu = P^{\mu\nu}G_\nu = A\dot{u}^\mu + B\left(\ddot{u}^\mu - \frac{1}{c^2}u^\mu\ddot{u}_\nu u^\nu\right) = A\dot{u}^\mu + B\left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu\right) \quad (4.4.5)$$

e l'equazione del moto può essere scritta nella forma

$$(m - A)\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + B\left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu\right). \quad (4.4.6)$$

Il termine A modifica quindi il valore della massa della particella carica e la sua interpretazione è la seguente: ad una carica ferma è associata una energia elettrostatica $\propto e^2/a$, che contribuisce alla inerzia della particella e deve essere tenuta in conto quando si vuole studiare il moto di una carica. Si può quindi pensare ad m come un termine di massa non elettromagnetico (presente anche per particelle neutre) ed a $-A$ come un termine di massa elettromagnetico (presente solo per particelle cariche). La separazione di questi due termini è ovviamente artificiale, in quanto non si può spostare una carica senza muovere il campo elettristatico ad essa associato, quindi l'unica quantità realmente osservabile è $m_R = m - A$, dove R stà per “rinormalizzata”, usando la terminologia tipica della teoria quantistica dei campi (m corrisponde in questa teminologia alla massa “nuda”). La massa rinormalizzata m_R deve essere tenuta fissa mentre si effettua il limite $a \rightarrow 0$, in quanto m_R sarà la massa fisicamente osservabile della particella puntiforme. Nel limite $a \rightarrow 0$ l'equazione del moto assume quindi la forma

$$m_R\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + b\frac{e^2}{c^3}\left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu\right), \quad (4.4.7)$$

dove b è una costante adimensionale universale (in linea di principio potrebbe ancora dipendere dalla forma della particella, considerato che si è usato il limite $a \rightarrow 0$ a forma costante, tuttavia appare ragionevole che nel limite $a \rightarrow 0$ il risultato diventi indipendente dalla forma).

Per fissare il valore di questa costante si può a questo punto imporre che la diminuzione di energia dovuta alla presenza del termine aggiuntivo bilanci l'energia irraggiata. Nel limite non relativistico le componenti spaziali del termine di reazione di radiazione si possono scrivere $b\frac{e^2}{c^3}\vec{\ddot{v}}$ e se consideriamo un campo di forze \vec{F}_{ext} che si annulla a grande distanza (quindi $\dot{\vec{v}} = 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$) il lavoro fatto dalla reazione di radiazione è

$$L_{rad} = b\frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{-\infty} \vec{\ddot{v}} \cdot \vec{v} dt = -b\frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{-\infty} \dot{\vec{v}}^2 dt \quad (4.4.8)$$

e quindi si deve avere $b = 2/3$.

Parte II

Indagine della materia con onde elettromagnetiche

Capitolo 5

Scattering e sezione d'urto per onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche interagiscono con le cariche elettriche, che possono essere libere, legate in atomi in atomi o molecole, o muoversi in correnti in circuiti macroscopici. La diffusione (scattering) di un'onda elettromagnetica è quindi dovuta all'irraggiamento delle cariche accelerate dal passaggio dell'onda e, al fine di descrivere il processo di diffusione, inizieremo quindi ricordando le leggi essenziali che governano l'irraggiamento.

5.1 Sezione d'urto per fenomeni ondulatori

Per indagare alcuni sistemi si ricorre spesso ad investire con onde – tipicamente elettromagnetiche e di caratteristiche note allo sperimentatore – un oggetto “bersaglio” di caratteristiche sconosciute. La misura dell'assorbimento della radiazione oppure la misura della radiazione diffusa ci forniscono le informazioni utili alla comprensione della struttura del bersaglio, vedi Fig. (5.1) per una schematizzazione della geometria del processo. Esempi ben noti di questa metodologia sono il radar, le radiografie a raggi X, la risonanza magnetica nucleare (NMR), etc...

Questa metodologia ha le sue basi negli studi realizzati a partire dalla fine del secolo XIX sulla generazione di onde elettromagnetiche e sulle interazioni di onde elettromagnetiche in circuiti elettrici, cariche libere o altri materiali. Molto è stato sviluppato per lo studio delle antenne, intese sia come generatori che come rivelatori di onde elettromagnetiche. Nel seguito considereremo il caso delle onde elettromagnetiche, ma gli argomenti utilizzati possono essere modificati facilmente per adattarli anche a casi diversi.

Come schematizzato in Fig. (5.1) un'onda incidente piana, polarizzata linearmente, momocromatica di frequenza angolare ω e di intensità nota (per esempio sia E_0 il valore massimo del campo elettrico) incide, nel vuoto, su un bersaglio. Le onde uscenti sono rivelate tramite dispositivi ricevitori (antenne). Le onde uscenti sono rivelate tipicamente (ma non sempre) a “grande distanza”, nella regione dei campi lontani (distanze molto grandi rispetti alla lunghezza d'onda). La progettazione e costruzione delle antenne è un tipico problema in cui aspetti teorici e sperimentali si fondono.

Esempio 5.1.1: *Un esempio notevole in cui i campi non sono rivelati in zona lontana è quello della risonanza magnetica nucleare: le frequenze tipiche usate vanno approssimativamente da 100MHz a 1000MHz, corrispondenti a lunghezze d'onda da 0.3m a 3m, mentre la dimensione tipica dello strumento è dell'ordine del metro.*

Nel seguito ci serviranno le espressioni dei campi elettrico e magnetico e soprattutto del vettore di Poynting dell'onda incidente. Con una scelta arbitraria del sistema di riferimento possiamo supporre che l'onda propaghi lungo la direzione \hat{z} e che la polarizzazione lineare del campo elettrico

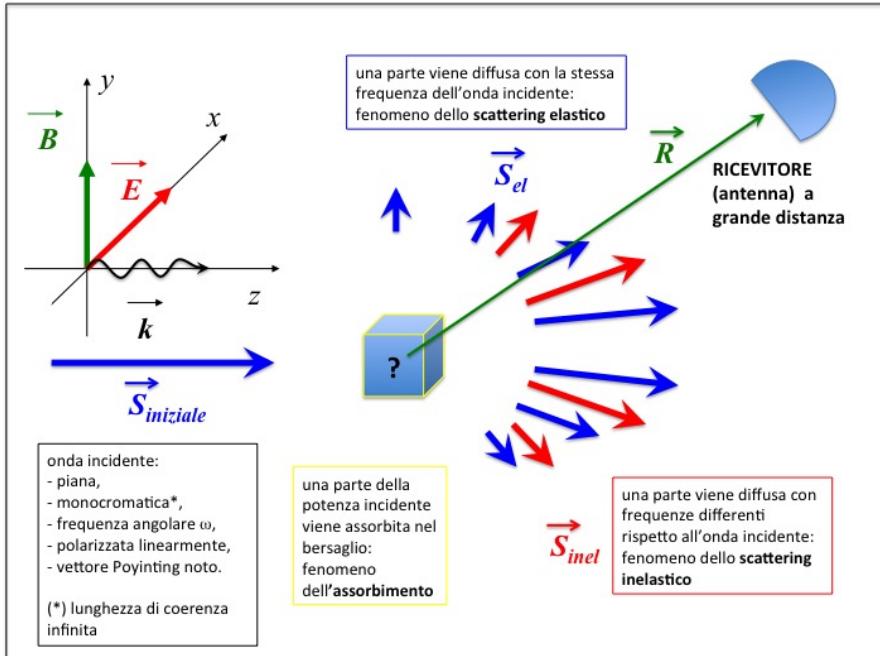


Figura 5.1: Schema di un tipico esperimento di scattering.

sia diretta lungo l'asse \hat{x} . Con queste convenzioni possiamo scrivere nel sistema SI il campo elettrico, magnetico ed il vettore di Poynting nella forma

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \hat{x} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{x} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E} = B_y \hat{y} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \hat{y} \\ \vec{S}_{in} &= \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = S_z \hat{z} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \hat{z} = \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kz) \hat{z}\end{aligned}\quad (5.1.1)$$

dove $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377\Omega$ è l'impedenza del vuoto. Utilizzando la notazione complessa si potrebbe scrivere $\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)})$, tuttavia quando si usa la notazione complessa è necessaria un poco di cura nella trattazione delle grandezze fisiche nonlineari nei campi come il vettore di Poynting e la densità di energia (vedi ad es. Sez. (3.2)).

Nota: ricordiamo che l'impedenza del vuoto è legata alla resistività superficiale di un materiale che assorbe senza riflettere le onde elettromagnetiche piane (vedi anche a fine Sez. (7.2)), cosa che è vera per molti materiali nella regione delle microonde 3GHz $\lesssim \nu \lesssim 300\text{GHz}$.

Ricordiamo che in generale la relazione tra la frequenza angolare ω e il numero d'onda k è nota come relazione di dispersione

$$\omega = \omega(k) \quad (5.1.2)$$

e nel caso di onde elettromagnetiche nel vuoto è data semplicemente da $\omega = ck$. Relazioni generali valide per tutte le onde monocromatiche, che legano la frequenza angolare ω , la frequenza ν , il periodo T , la lunghezza d'onda λ e il numero d'onda k sono

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi\nu, \quad \nu = \frac{1}{T} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda}.\end{aligned}\quad (5.1.3)$$

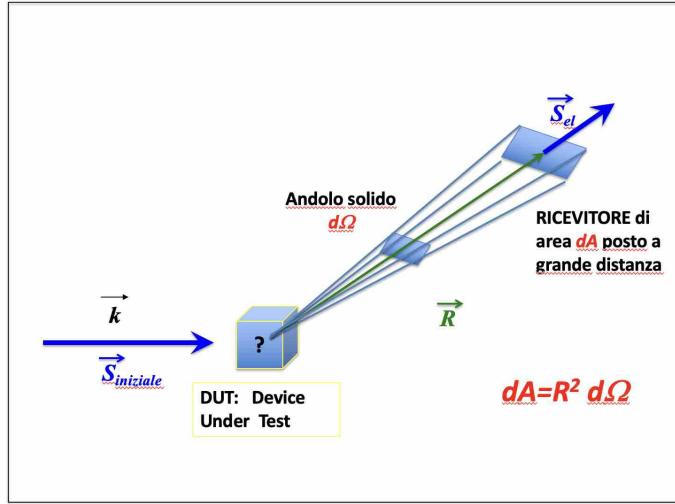


Figura 5.2: La geometria tipica di uno scattering elastico o anelastico.

Nel caso di una onda elettromagnetica nel vuoto si ha quindi anche $\lambda = cT$.

L'ipotesi di onda monocromatica significa che il campo elettromagnetico incidente è una funzione armonica ben determinata per ogni valore del tempo t , quindi ad esempio $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{x}$ come sopra. Se questa ipotesi non fosse vera, per esempio se avessimo

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{x} & \text{se } 0 \leq t - \frac{z}{c} \leq T_{coer} \\ 0 & \text{se } -\infty < t - \frac{z}{c} < 0 \text{ e } T_{coer} < t - \frac{z}{c} < +\infty \end{cases}, \quad (5.1.4)$$

che corrisponde ad un pacchetto d'onda avente tempo di coerenza finito, la risposta del sistema sarebbe diversa da quella che si avrebbe se sul sistema incidesse un'onda monocromatica. Nel limite in cui T_{coer} è molto più grande del tempo tipico τ dei transienti del sistema, le risposte del sistema ai due stimoli esterni sono circa uguali per $\tau \ll t \ll T_{coer}$. Un tempo di coerenza finito del pacchetto deve chiaramente essere tenuto presente nelle previsioni o interpretazioni teoriche.

A seconda di quello a cui si è interessati, possono essere introdotte per lo stesso sistema diverse definizioni di sezione d'urto, che passeremo ora ad elencare.

Per un'onda e.m. piana (o approssimabile come onda piana sul volume del bersaglio) si definisce sezione d'urto di assorbimento σ_{abs} il rapporto fra la potenza (mediata nel tempo) assorbita e non re-irradiata dal sistema ed il modulo del vettore di Poynting (mediato nel tempo) dell'onda incidente:

$$\sigma_{abs} = \frac{\langle P_{abs} \rangle}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|}. \quad (5.1.5)$$

Poichè il modulo del vettore di Poynting \vec{S}_{in} rappresenta il flusso di energia per unità di superficie trasversa all'onda e.m. incidente, σ_{abs} è una misura della capacità del bersaglio di assorbire (senza riemetterla) energia dall'onda incidente. Sia la potenza assorbita che il modulo del vettore di Poynting sono mediati nel tempo in quanto si assume di essere interessati a processi che avvengono su scale temporali molto più grandi di quelli del periodo dell'onda incidente.

Per un'onda e.m. piana si definisce sezione d'urto totale di scattering elastico (o semplicemente sezione d'urto totale elastica) il rapporto σ_{el} fra la potenza (mediata nel tempo) diffusa dal sistema alla stessa frequenza dell'onda incidente ed il modulo del vettore di Poynting (mediato nel tempo) dell'onda incidente. Quindi

$$\sigma_{el} = \frac{\langle P_{el} \rangle}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|}, \quad (5.1.6)$$

dove si è indicata con P_{el} la potenza emessa dal sistema alla stessa frequenza dell'onda incidente. Con tale definizione di σ_{el} si perde l'informazione sulla direzionalità della potenza diffusa, che è invece presente nella definizione di sezione d'urto differenziale elastica, che ha la forma

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{|\langle \vec{S}_{el}(r, \theta, \phi) \rangle|}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|}. \quad (5.1.7)$$

Questa definizione necessita di alcune precisazioni. Innanzitutto stiamo usando un sistema di coordinate polari centrato sul bersaglio ed avente l'asse \hat{z} diretto lungo la direzione di propagazione del fascio, quindi la dipendenza da ϕ è spesso banale (questo non è vero ad esempio per sistemi polarizzati). La diffusione elastica avviene perché il sistema, stimolato dalla radiazione incidente, contiene cariche elettriche accelerate o correnti variabili nel tempo, che irraggiano onde e.m. alla stessa frequenza dell'onda incidente. A grandi distanze il campo elettrico di radiazione varia come $1/r$ (dove r è la distanza del punto di osservazione dal sistema) ed è una funzione di θ e ϕ ; di conseguenza se indichiamo con \vec{S}_{el} il vettore di Poynting del campo irraggiato alla stessa frequenza dell'onda incidente avremo che esso tenderà a zero come $1/r^2$ e dipenderà in generale da θ e ϕ . La potenza (mediata sul tempo) irraggiata in un dato angolo solido è quindi data da (vedi Fig. (5.2))

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |\langle \vec{S}_{el}(r, \theta, \phi) \rangle| d\Omega \quad (5.1.8)$$

dove il limite per $r \rightarrow \infty$ serve per eliminare i contributi a \vec{S}_{el} dovuti ai campi vicini. Questa espressione, divisa per l'angolo solido, non è altro che il numeratore della definizione della sezione d'urto differenziale elastica. La sezione d'urto totale si ottiene a partire da quella differenziale semplicemente integrando su tutto l'angolo solido, quindi

$$\sigma_{el} = \int \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} d\Omega. \quad (5.1.9)$$

Un ultimo aspetto che necessita di essere commentato è l'identificazione di \vec{S}_{el} : mentre da un punto di vista teorico non è difficile separare il campo totale in un campo incidente ed in un campo generato (si vedranno in seguito svariati esempi), da un punto di vista pratico la cosa può risultare più complicata. In effetti la geometria "reale" che sottende gli esperimenti di scattering è leggermente più complicata di quella schematicamente rappresentata in Fig. (5.1): l'onda incidente non è una vera onda piana infinita in ogni direzione, ma nelle direzioni trasverse alla direzione di propagazione ha una estensione finita, che deve essere molto più grande della lunghezza d'onda e delle dimensioni del bersaglio per fare in modo che la approssimazione di onda piana sia valida. In una tale configurazione è possibile posizionare l'antenna/ricevitore in una zona sufficientemente lontana dal fascio da non essere influenzata da esso ed identificare così la componente di radiazione generata dal processo di scattering. Ovviamente questo processo di identificazione risulta più difficile se si è interessati allo scattering a piccoli angoli, poiché è necessario andare a distanze maggiori dal bersaglio. Un esempio particolarmente estremo di questo tipo di difficoltà è quello del cosiddetto "shadow scattering", ovvero lo scattering della luce nel limite di ottica geometrica (vedi Sez. (7.4)).

Passiamo ora a considerare il caso anelastico: per un'onda e.m. piana si definisce sezione d'urto di scattering inelastico ad una frequenza angolare ω_i il rapporto fra la potenza (mediata nel tempo) diffusa dal sistema alla frequenza ω_i ed il modulo del vettore di Poynting mediato nel tempo dell'onda incidente (supposta di frequenza $\omega \neq \omega_i$), quindi

$$\sigma_{\omega_i} = \frac{\langle P_{\omega_i} \rangle}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|}. \quad (5.1.10)$$

Anche in questo caso, procedendo analogamente al caso elastico, si può ovviamente introdurre una definizione differenziale, che tiene traccia della direzionalità del processo

$$\frac{d\sigma_{\omega_i}}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{|\langle \vec{S}_{\omega_i}(r, \theta, \phi) \rangle|}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|}, \quad (5.1.11)$$

dove \vec{S}_{ω_i} è il vettore di Poynting associato alla frequenza ω_i . Risulta qui in modo più evidente una difficoltà che era stata sottaciuta nel caso elastico: per dare un senso operativo a questa definizione è necessario selezionare la corretta componente in frequenza del segnale. Anche in questo caso la sezione d'urto totale si ottiene integrando su tutto l'angolo solido la sezione d'urto differenziale.

La diffusione inelastica avviene solo se il sistema, stimolato dalla radiazione incidente, ha moti accelerati di cariche o correnti variabili nel tempo che irraggiano onde e.m. con frequenze diverse rispetto alla frequenza dell'onda incidente. La diffusione inelastica avviene quindi solo in sistemi che presentino delle nonlinearità. Ad esempio si considererà nel seguito il caso dell'irraggiamento dovuto ad un elettrone legato elasticamente; se il potenziale legante non è puramente elastico ma esiste anche una componente anarmonica si ha anche irraggiamento a frequenze diverse da quella incidente (vedi ad es. [18] §1.4). Un esempio macroscopico si ha considerando una spira puramente resistiva in cui sia stato inserito un diodo ideale (resistenza nulla in polarizzazione diretta e resistenza infinita in polarizzazione inversa): si può dimostrare che vengono irradiate onde con tutte le frequenze multiple della frequenza dell'onda incidente, fino ad una frequenza massima di taglio che è il reciproco del tempo di attivazione del diodo (cioè il tempo che impiega il diodo a passare dalla polarizzazione diretta a quella inversa). Altro esempio tipico è quello dei campi super-intensi; in questo caso le sorgenti di nonlinearità sono due e precisamente la nonlinearità relativistica della relazione tra impulso e velocità ed il termine magnetico della forza di Lorentz, vedi ad es. [19] §2.1. Infine da un punto di vista quantistico si può avere una emissione ad una frequenza diversa da quella incidente considerando processi di ordine perturbativo più elevato del primo, in cui l'emissione dell'energia non avviene con una unica transizione (vedi ad es. [18] §3.1-3.2).

Sommando tutte le sezioni d'urto introdotte finora si ottiene la sezione d'urto totale (in contesti ottici chiamata anche di estinzione) σ_{tot} , che è una misura di quanta energia è stata sottratta dall'onda incidente in qualunque forma (cioè assorbita, riemessa in direzione diversa o ad una diversa frequenza). In formule

$$\sigma_{tot} = \sigma_{abs} + \sigma_{el} + \sum_{\omega_i \neq \omega} \sigma_{\omega_i}, \quad (5.1.12)$$

dove la somma di termini a secondo membro è operativamente una somma su tutti i processi che possono comportare una sottrazione di energia dall'onda incidente. Ovviamente lo scattering inelastico avviene tipicamente non con uno spettro discreto, come indicato dalla presenza della sommatoria nell'espressione precedente, ma con uno spettro continuo, nel qual caso occorre semplicemente sostituire la sommatoria sulle frequenze discrete con un integrale sulle frequenze continue.

Tutte le sezioni d'urto introdotte hanno come unità di misura quella di un'area:

$$[\sigma] = \frac{[P]}{[\vec{S}]} = \text{m}^2, \quad \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] = \frac{\text{m}^2}{\text{sr}}, \quad (5.1.13)$$

dove "sr" indica lo steradiane, ovvero l'unità di misura adimensionale usata in SI per gli angoli solidi. Poiché per un dato processo f la potenza sottratta al fascio da questo processo è $\langle P_f \rangle = \sigma_f |\langle \vec{S}_{in} \rangle|$, come notato in precedenza si può interpretare la sezione d'urto del processo f come una area efficace perpendicolare alla direzione dell'onda incidente, il cui flusso di energia viene rimosso dal processo f . La dizione "area efficace" è in effetti spesso usata in telecomunicazione o in testi di campi elettromagnetici.

Un concetto spesso associato a quello di sezione d'urto, ancorchè meno generale, è quello di ampiezza di scattering: nei casi elastico ed inelastico il campo generato dalla diffusione si può scrivere a grande distanza come il prodotto di una onda sferica uscente e di un termine che racchiude tutta la dinamica del processo, la ampiezza di scattering $\vec{f}(\theta, \phi)$. In notazione complessa abbiamo quindi

$$\vec{E}_f = \vec{f}(\theta, \phi) \frac{e^{-i(\omega_f t - k_f r)}}{r}, \quad (5.1.14)$$

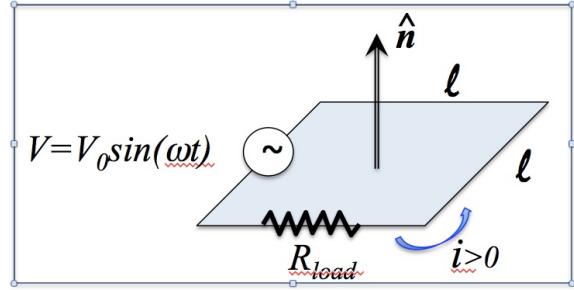


Figura 5.3: Schema di una spira resistiva con generatore di tensione alternata.

dove il pedice f indica un generico processo di diffusione (e il corrispondente stato finale di onda uscente), che può corrispondere sia al caso elastico che ad uno dei casi inelastici. Utilizzando la definizione di ampiezza di scattering ed il campo incidente $\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ si vede facilmente che le sezioni d’urto differenziali si possono scrivere nella forma

$$\frac{d\sigma_f}{d\Omega} = \frac{|\vec{f}(\theta, \phi)|^2}{|\vec{E}_0|^2}. \quad (5.1.15)$$

È bene notare esplicitamente che sia \vec{f} che \vec{E}_0 sono in generale vettori complessi che tengono conto delle fasi delle onde uscenti ed entranti. In questo contesto il simbolo $| |$ rappresenta sia il modulo del vettore che il modulo del numero complesso: operativamente per un vettore complesso $|\vec{v}|^2 = \vec{v}^* \cdot \vec{v}$. Torna talvolta utile notare che dato che la sezione d’urto è definita come il rapporto di due quantità quadratiche nei campi, i fattori 2 che compaiono nelle medie di quantità quadratiche quando si usa la notazione complessa (vedi Sez. (3.2)) si semplificano tra numeratore e denominatore.

5.2 Scattering su circuiti

5.2.1 La resistenza di radiazione di una spira quadrata resistiva

Un circuito in cui circola una corrente variabile nel tempo irraggia onde elettromagnetiche; in pratica si tratta di una antenna emettitrice. Nel semplice circuito in Fig. (5.3), composto da una spira quadrata di lato ℓ con in serie una resistenza “di carico” R_{load} ed un generatore di f.e.m. alternata, circolerà una corrente alternata $I(t)$. Non possiamo tuttavia scrivere nel caso generale semplicemente $I(t) = \frac{V_0 \sin(\omega t)}{R_{load}}$, perché gli effetti di irraggiamento potrebbero essere importanti. Possiamo tuttavia scrivere il bilancio energetico $VI = R_{load}I^2 + P_{irr}$, dove P_{irr} è la potenza irraggiata.

Nel caso particolare che stiamo considerando, nell’ipotesi $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg \ell$, l’irraggiamento avviene principalmente a causa del momento di dipolo magnetico della spira $\vec{\mu} = I(t)\ell^2 \hat{n}$ (nel caso in cui non sia vero che $\lambda \gg \ell$ serve considerare anche la dipendenza dalla posizione della corrente e nel limite $\lambda \ll \ell$ l’integrale che definisce in generale il momento di dipolo magnetico si annulla). La potenza irraggiata è quindi (vedi Sez. (3.3))

$$P_{irr} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^5} |\ddot{\mu}|^2 = \frac{\ell^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} \left(\frac{d^2 I}{dt^2} \right)^2 = \frac{\ell^4 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} I^2 \quad (5.2.1)$$

quindi proporzionale al quadrato della corrente elettrica. Possiamo allora definire una “resistenza di radiazione” (o “di irraggiamento”) pari a

$$R_{irr} = \frac{\ell^4 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^5}, \quad (5.2.2)$$

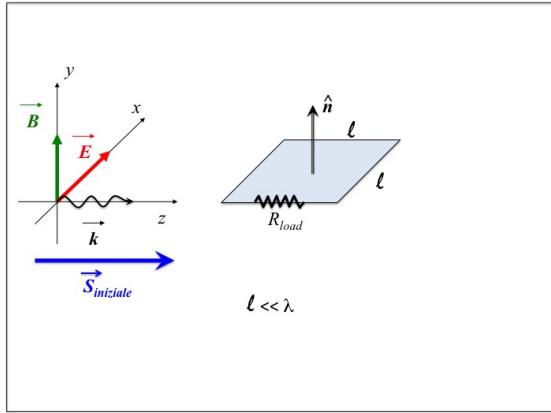


Figura 5.4: Schema per lo scattering di una onda piana su una spira resistiva.

in modo da poter scrivere $P_{irr} = R_{irr}I^2$. Come si vede dalla sua definizione, la resistenza di irraggiamento dipende dalla frequenza del generatore e possiamo anche riscriverla in funzione della lunghezza d'onda della radiazione emessa

$$R_{irr} = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^4 \frac{\ell^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{8}{3}\pi^3 Z_0 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^4 \simeq 31k\Omega \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^4. \quad (5.2.3)$$

Ad esempio se $\ell = 3\text{cm}$ e $\lambda = 30\text{cm}$ allora si trova $R_{irr} \simeq 3.1\Omega$. Notiamo infine esplicitamente che l'espressione per la resistenza di irraggiamento dipende dal tipo di circuito utilizzato, vedi esercizio seguente

Esercizio 5.2.1: dimostrare che se nel circuito in Fig. (5.3) si inserisce un condensatore piano, alla resistenza di irraggiamento precedentemente calcolata si deve aggiungere un termine $\frac{2}{3}\pi Z_0 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$, dove d è la distanza fra le armature del condensatore, dovuto all'irraggiamento di dipolo elettrico.

5.2.2 Onda elettromagnetica su spira quadrata resistiva

Consideriamo la situazione schematizzata in Fig. (5.4), in cui un'onda incidente piana, polarizzata linearmente, monocromatica di frequenza angolare ω e di intensità nota (sia E_0 il valore massimo del campo elettrico) incide, nel vuoto, su un bersaglio costituito da una spira quadrata resistiva di lato molto piccolo rispetto alla lunghezza dell'onda incidente. La resistenza della spira simula, per esempio, l'ingresso di un amplificatore, mentre supporremo siano trascurabili autoinduttanze e capacità, anche parassite.

Scegliendo convenientemente un sistema di assi cartesiani possiamo scrivere le espressioni per i campi elettrico e magnetico dell'onda e per il suo vettore di Poynting in SI nella forma

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_x \hat{x} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{x} \\ \vec{B} &= B_y \hat{y} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \hat{y} \\ \vec{S}_{in} &= \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kz) \hat{z}. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Sia $I(t)$ la corrente indotta nel circuito. L'ipotesi che il circuito abbia dimensioni caratteristiche piccole rispetto alla lunghezza d'onda ci permette di affermare che $I(t)$ è uniforme in ogni punto del circuito. Questa ipotesi, unita al fatto di poter trascurare autoinduttanza e capacità parassite, ha una implicazione importante: in questo circuito il momento di dipolo elettrico è nullo. Il momento di dipolo magnetico vale invece

$$\vec{\mu} = I(t)\ell^2 \hat{y}. \quad (5.2.5)$$

La forza elettromotrice $\mathcal{E}(t)$ si calcola utilizzando la legge di Faraday, supponendo il circuito posizionato nell'origine del sistema di coordinate:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= -\frac{d}{dt}\Phi(\vec{B}) = -\frac{d}{dt}\left(\int_{-\ell/2}^{\ell/2} B_y \cos(\omega t - kz)\ell dz\right) = \\ &= \omega\ell^2 B_y \sin(\omega t) \frac{\sin(k\ell/2)}{(k\ell/2)} \simeq \omega\ell^2 B_y \sin(\omega t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t),\end{aligned}\quad (5.2.6)$$

dove per semplificare il risultato si è usato il fatto che per ipotesi $k\ell/2 = \pi\ell/\lambda \ll 1$ e si è introdotta la notazione $\mathcal{E}_0 = \omega\ell^2 B_y$. Essendo il circuito lineare la corrente sarà una funzione armonica con la stessa frequenza della forza elettromotrice, per cui possiamo scrivere $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Per calcolare la corrente, possiamo effettuare un bilancio energetico, sommando la potenza dissipata nella resistenza di carico e la potenza irraggiata di dipolo magnetico, che riscriviamo tramite la resistenza di irraggiamento calcolata in precedenza (vedi Eq. (5.2.2)):

$$\mathcal{E}I = R_{load}I^2 + R_{irr}I^2, \quad (5.2.7)$$

da cui

$$\mathcal{E} = (R_{load} + R_{irr})I. \quad (5.2.8)$$

Poichè $\mathcal{E}(t)$ è nota, da questa espressione possiamo ottenere la corrente e quindi calcolare la potenza dissipata dalla resistenza di carico (corrispondente alla potenza assorbita di Sez. (5.1)) e da quella irraggiata (corrispondente alla potenza riemessa elasticamente di Sez. (5.1)):

$$\begin{aligned}P_{abs} &= R_{load}I^2 = \frac{R_{load}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \mathcal{E}^2 \\ P_{el} &= R_{irr}I^2 = \frac{R_{irr}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \mathcal{E}^2.\end{aligned}\quad (5.2.9)$$

Dall'espressione di P_{abs} si vede che per data geometria del circuito (e quindi data R_{irr}), la potenza trasferita al carico è massima quando la resistenza di carico vale $R_{load} = R_{irr}$. In modo duale, per data resistenza di carico R_{load} , la potenza irraggiata è massima quando la geometria del circuito è tale per cui $R_{irr} = R_{load}$. Notiamo inoltre che, poichè la resistenza di irraggiamento è sempre diversa da zero (a parte il caso banale di campi statici), non può esserci un assorbimento di potenza senza che ci sia anche una diffusione elastica. Questa è una situazione equivalente a quella che si osserva per la luce incidente su un ostacolo opaco ed è una conseguenza del teorema ottico, che lega la sezione d'urto totale alla ampiezza di scattering elastico in avanti (vedi Sez. (7.5)).

Dalle espressioni delle potenze assorbite e riemesse elasticamente possiamo ottenere i valori delle sezioni d'urto di assorbimento, di emissione elastica e totali: abbiamo $|\langle \vec{S}_{in} \rangle| = E_0^2/(2Z_0)$, quindi

$$\begin{aligned}\sigma_{abs} &= \frac{\langle P_{el} \rangle}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|} = \frac{2Z_0}{E_0} \frac{R_{load}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} = \frac{Z_0}{c^2 B_y^2} \frac{R_{load}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \omega^2 \ell^2 B_y^2 = \\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \ell^4 Z_0 \frac{R_{load}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \\ \sigma_{el} &= \frac{\langle P_{abs} \rangle}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \ell^4 Z_0 \frac{R_{irr}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \\ \sigma_{tot} &= \sigma_{abs} + \sigma_{el} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \ell^4 Z_0 \frac{1}{R_{load} + R_{irr}}.\end{aligned}\quad (5.2.10)$$

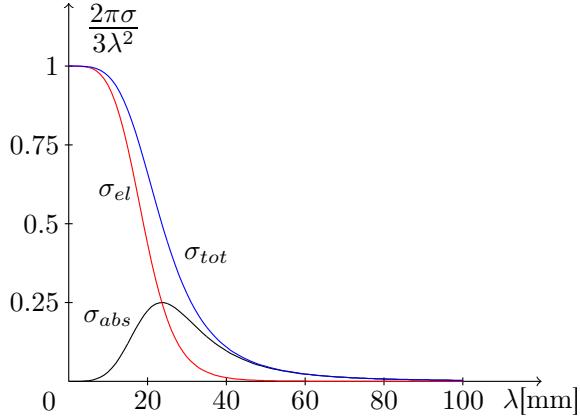


Figura 5.5: Andamento delle sezioni d'urto diviso λ^2 in funzione di λ per scattering su spira resistiva per $\ell = 1\text{mm}$ e $R_{load} = 0.1\Omega$ (quindi $\tilde{\lambda} \simeq 23.63\text{mm}$), vedi Eq. (5.2.12).

Usando l'espressione Eq. (5.2.3) della resistenza di irraggiamento queste espressioni si possono riscrivere nella forma equivalente

$$\begin{aligned}\sigma_{abs} &= \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \frac{R_{load}/R_{irr}}{(1 + R_{load}/R_{irr})^2} \\ \sigma_{el} &= \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \frac{1}{(1 + R_{load}/R_{irr})^2} \\ \sigma_{tot} &= \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \frac{1}{(1 + R_{load}/R_{irr})}.\end{aligned}\quad (5.2.11)$$

In particolare si vede che il massimo di σ_{abs} si ha quando la resistenza di carico è uguale alla resistenza di irraggiamento ed in tutti i casi la scala tipica per le sezioni d'urto quando $R_{load} \approx R_{irr}$ è quella di un quadrato di lato λ , vedi Fig. (5.5).

Esercizio 5.2.2: Mostrare che le sezioni d'urto in Eq. (5.2.11) possono essere riscritte esplicitando la dipendenza dalla lunghezza d'onda di R_{irr} come segue

$$\begin{aligned}\sigma_{abs} &= \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \tilde{\lambda}^4 \frac{\lambda^4}{(\lambda^4 + \tilde{\lambda}^4)^2} \\ \sigma_{el} &= \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \tilde{\lambda}^4 \frac{\tilde{\lambda}^4}{(\lambda^4 + \tilde{\lambda}^4)^2} \\ \sigma_{tot} &= \frac{3}{2\pi} \lambda^2 \tilde{\lambda}^4 \frac{1}{\lambda^4 + \tilde{\lambda}^4},\end{aligned}\quad (5.2.12)$$

dove $\tilde{\lambda}^4 = \frac{8\pi^3}{3} \frac{Z_0}{R_{load}} \ell^4$. Studiare graficamente l'andamento delle varie sezioni d'urto in funzione di λ utilizzando parametri diversi da quelli riportati in Fig. (5.5).

Esercizio 5.2.3: Riprendere l'esercizio Eserc. (5.2.1) aggiungendo in serie una induttanza schematizzabile come un solenoide di parametri geometrici noti. Verificare che nella resistenza di irraggiamento del circuito compare il termine aggiuntivo

$$R_{irr}^{(L)} = \frac{2}{3} \pi^5 N^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 Z_0, \quad (5.2.13)$$

dove a è il raggio del solenoide e N è il numero delle sue spire. Calcolare quindi la sezione d'urto elastica in funzione della frequenza.

Capitolo 6

Interazione di onde elettromagnetiche (fotoni) con atomi

6.1 Introduzione

In questo capitolo studieremo l'interazione della radiazione elettromagnetica con la materia microscopica (atomi e cariche elementari). Una trattazione completamente accurata di questi fenomeni richiederebbe l'uso dell'elettrodinamica quantistica (QED), che è argomento di corsi della magistrale. Per procedere utilizzeremo semplicemente la descrizione classica ondulatoria della luce, descrizione che risulta comunque una ottima approssimazione della realtà fintantoché la lunghezza d'onda della luce è molto maggiore della lunghezza d'onda Compton delle particelle coinvolte. Ad esempio per l'elettrone si ha $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \simeq 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$ e per confronto la luce visibile ha lunghezza d'onda approssimativamente compresa tra 400 e 700nm. Visto il contesto microscopico si utilizzerà tuttavia spesso la denominazione "fotone" per riferirsi all'onda elettromagnetica. Per un confronto tra la trattazione "ondulatoria" e quella "corpuscolare" delle sezioni d'urto che coinvolgono i fotoni si rimanda alla Parte (III).

Un fotone può interagire con un atomo tramite diversi processi fisici, tra cui i principali sono l'effetto fotoelettrico, lo scattering Rayleigh, lo scattering Compton e la produzione di coppie elettrone-positrone. Quale di questi processi risulti il principale responsabile dell'interazione dipende dall'energia del fotone e dal numero atomico dell'atomo; un grafico della sezione d'urto totale fotone-atomo è riportato in Fig. (6.1), in cui sono anche mostrati i contributi dei vari processi.

In questo capitolo si analizzeranno piuttosto in dettaglio i casi dello scattering Thomson e Rayleigh. Nello scattering Thomson si considera la diffusione di un'onda elettromagnetica su un bersaglio costituito da una singola particella puntiforme carica, che può essere libera o in uno stato legato. Lo scattering Rayleigh consiste invece nella diffusione di un'onda elettromagnetica da parte degli elettroni atomici (o per estensione da parte di un sistema di cariche legate) ed è quindi la naturale generalizzazione dello scattering Thomson. Una trattazione completa dello scattering Compton e della produzione di coppie richiederebbe strumenti molto più raffinati di quelli qui usabili (vedi ad es. [20] §86-87, §94) tuttavia alcuni degli aspetti caratteristici di questi processi possono essere spiegati semplicemente con argomenti cinematici. L'effetto fotoelettrico consiste nell'eccitazione di un elettrone ad uno stato legato o ad uno stato del continuo (caso in cui l'atomo si ionizza), di conseguenza una trattazione dell'effetto fotoelettrico richiede in modo fondamentale l'uso della meccanica quantistica, motivo per il quale non sarà considerato nel seguito (vedi ad es. [20] §56-57 o, per una trattazione semplificata, [21] §1.4).

Notiamo infine che se i fotoni sono sufficientemente energetici possono anche interagire direttamente con il nucleo. Un esempio di questo caso è la risonanza di dipolo gigante mostrata in Fig. (6.1) per il piombo ed il meccanismo fisico alla base di questo tipo di processo è il seguente: il fotone incide su un protone trasferendogli quantità di moto e, se la quantità di moto trasferita è

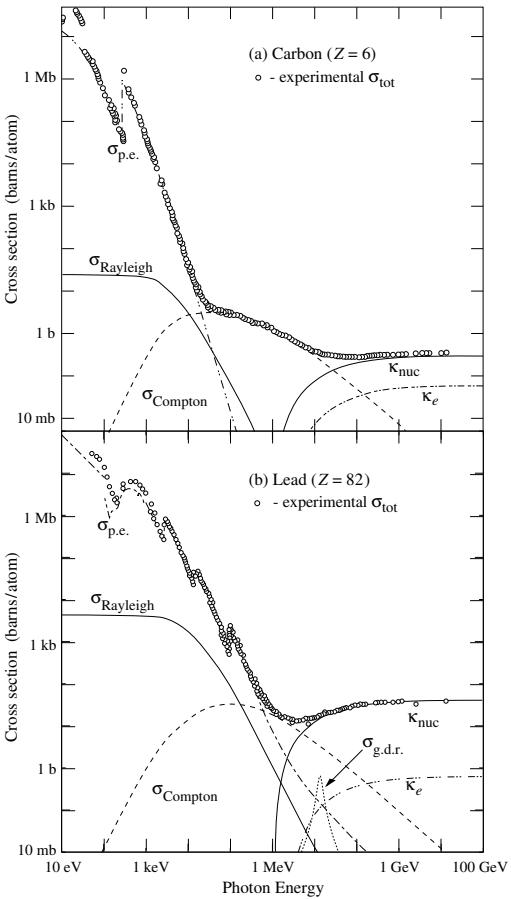


Figura 6.1: Sezione d’urto totale di un fotone incidente su un atomo di carbonio (alto) e piombo (basso) per diversi valori dell’energia del fotone.

Sono in particolare mostrati i contributi specifici dei vari processi:

$\sigma_{\text{p.e.}}$ effetto photoelettrico,
 σ_{Rayleigh} scattering Rayleigh sull’atomo,
 σ_{Compton} scattering Compton su elettrone,
 κ_{nuc} produzione di coppie su nucleo,
 κ_e produzione di coppie su elettrone,
 $\sigma_{\text{g.d.r.}}$ interazioni fotonucleari ed in particolare Giant Dipole Resonance.

Da [22] §33 “Passage of particles through matter”.

sufficiente, si eccita uno stato collettivo nucleare di tipo vibrazionale. L’energia di questo stato sarà $\hbar\omega_\lambda$ (dove $\lambda \in \mathbb{N}$ indica il tipo di vibrazione: dipolo, quadrupolo, ...) ed è ragionevole attendersi che la frequenza ω_λ possa essere collegata ai parametri tipici della materia nucleare, che sono i coefficienti della formula semiempirica di massa ed il parametro r_0 , vedi [23] Vol 2 §6A per il calcolo esplicito. Il risultato che si ottiene è che una energia tipica per il più basso livello vibrazionale dei nuclei pesanti è dell’ordine di 10 MeV.

6.2 Scattering Thomson

Consideriamo l’interazione di un’onda elettromagnetica monocromatica con un elettrone (non relativistico) legato in un potenziale armonico di frequenza caratteristica ω_0 . Supponiamo la lunghezza d’onda della radiazione incidente molto più grande della distanza tipica sulla quale si può muovere l’elettrone (che è dell’ordine di $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$) e considereremo per semplicità il caso di una onda elettromagnetica polarizzata linearmente; in queste condizioni il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ può essere approssimato come $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, in cui non è più presente alcuna dipendenza del campo elettrico dalla posizione \vec{r} .

L’equazione del moto dell’elettrone si scrive allora nella forma (dove indichiamo con e la carica dell’elettrone, quindi $e = -|e|$)

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\omega_0^2\vec{x} - \gamma\dot{\vec{x}} + m\tau\ddot{\vec{x}} + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.2.1)$$

dove oltre al termine armonico sono presenti anche un termine di attrito viscoso $-\gamma \ddot{\vec{x}}$ (che serve per modellizzare la presenza di altri canali di interazione che contribuiscono a far perdere energia all'elettrone senza produrre radiazione elettromagnetica di frequenza ω) ed il termine di reazione di radiazione (vedi Cap. (4)) $m\tau \ddot{\vec{x}}$, dove $\tau = \frac{2}{3} \frac{r_e}{c}$ e $r_e = e^2/(mc^2) \simeq 2.8 \text{ fm}$ è il raggio classico dell'elettrone, quindi $\tau \simeq 6 \times 10^{-24} \text{ s}$. Introducendo la notazione $\Gamma' = \gamma/m$ l'equazione del moto si riscrive nella forma

$$\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} + \Gamma' \dot{\vec{x}} - \tau \ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.2.2)$$

in cui valori tipici dei parametri sono $\Gamma' \lesssim 10^{10} \text{ Hz}$ e $\omega_0 \simeq 10^{14} \div 10^{16} \text{ Hz}$ (corrispondente alla zona dell'ultravioletto lontano, con energie dell'ordine della decina di eV). La soluzione stazionaria di questa equazione può essere cercata nella forma $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ ottenendo

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 - i\omega\Gamma' - i\tau\omega^3)\vec{x}_0 = \frac{e}{m} \vec{E} \quad (6.2.3)$$

e quindi infine (definendo $\Gamma = \tau\omega_0^2$)

$$\vec{x}_0 = \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}(\omega)}, \quad \Gamma_{tot}(\omega) = \Gamma' + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Gamma. \quad (6.2.4)$$

Dall'equazione Eq. (6.2.4), supponendo di avere una densità numerica di n elettroni non interagenti tra loro, è semplice ottenere una espressione per la dipendenza dalla frequenza della permittività dielettrica $\epsilon(\omega)$ (per maggiori dettagli vedi ad es. [4] §7.5 o [24] cap. III). Infatti ad ogni elettrone corrisponde una polarizzazione elementare $\vec{p} = e\vec{x}$, quindi si ha una polarizzazione per unità di volume $\vec{P} = n\vec{p}$. Il vettore di induzione \vec{D} è legato al campo elettrico ed alla polarizzazione del mezzo dalla relazione $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ e la permittività dielettrica è definita (per un mezzo isotropo) come $\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$, da cui si ottiene

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}(\omega)}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}, \quad (6.2.5)$$

dove ω_p è la frequenza di plasma del mezzo. Segue da principi generali di causalità che la funzione $\epsilon(\omega)$ come funzione di $\omega \in \mathbb{C}$ deve essere analitica nel semipiano $\Im(\omega) > 0$ (vedi ad es. [4] §7.10 o [25] §123), tuttavia questo è vero per l'espressione precedente solo nel limite $\tau \rightarrow 0$, ovvero nel limite in cui si trascura la reazione di radiazione: i punti singolari di $\epsilon(\omega)$ sono quei valori di ω in cui si annulla il denominatore e per $\tau = 0$ questi valori sono $\omega_{1,2} = -\frac{i}{2}\Gamma' \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\Gamma'/2)^2}$, quindi $\Im(\omega_{1,2}) < 0$ poiché $\Gamma' > 0$ e $\omega_0^2 > 0$. Nel caso in cui $\tau > 0$ si può mostrare che esiste una singolarità nel semipiano superiore di ω procedendo come segue: introduciamo la notazione $f(\omega) = i\tau\omega^3 + \omega^2 + i\omega\Gamma' - \omega_0^2$, in cui $f(\omega)$ è (a meno di un segno) il denominatore che compare in $\epsilon(\omega)$; allora si ha $f(iw) = \tau w^3 - w^2 - w\Gamma' - \omega_0^2$, quindi $f(iw)$ è una funzione reale per $w \in \mathbb{R}$ e si ha $f(0) = -\omega_0^2$ e $f(iw) \rightarrow +\infty$ per $w \rightarrow \infty$ nel caso $\tau > 0$. Di conseguenza esiste un $w_3 > 0$ tale che $\omega_3 = iw_3$ è un polo di $\epsilon(\omega)$ quando $\tau > 0$. Questo è dovuto al fatto che per frequenze comparabili con $1/\tau$ (come si vedrà in Sez. (4.2)), l'espressione usata per la reazione di radiazione ha diversi problemi, tra cui una violazione della causalità legata alla preaccelerazione.

Si vuole ora calcolare la sezione d'urto del processo di scattering in cui l'onda incidente fa oscillare l'elettrone, che poi riemette energia. Per fare ciò è prima di tutto necessario calcolare i vettori di Poynting della radiazione entrante (\vec{S}_{in}) ed uscente (\vec{S}_{out}). Come visto in Sez. (3.2), se si usa la notazione complessa per i campi elettromagnetici è necessario sostituire esplicitamente la parte reale $\vec{E} \rightarrow (\vec{E} + \vec{E}^*)/2$ e $\vec{B} \rightarrow (\vec{B} + \vec{B}^*)/2$ nella definizione del vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$, ottenendo per il vettore di Poynting mediato sul tempo

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \langle \vec{E} \cdot \vec{B}^* + \vec{E}^* \cdot \vec{B} \rangle, \quad (6.2.6)$$

che per un campo di radiazione ($\vec{B} = \hat{\vec{n}} \times \vec{E}$) si riduce a $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2 \hat{\vec{n}}$. Per la radiazione entrante si ha quindi semplicemente $\langle \vec{S}_{in} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 \hat{\vec{n}}$, dove $\hat{\vec{n}}$ è la direzione di propagazione della radiazione incidente.

Per calcolare il flusso di energia uscente è necessario usare le espressioni del campo elettrico di radiazione di dipolo Eq. (3.2.9) (vedi Sez. (3.4) per le espressioni complete dei campi) con accelerazione $\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$, dove \vec{x}_0 è dato da Eq. (6.2.4) e poichè siamo interessati al caso

stazionario è inutile tenere conto dell'effetto del ritardo. Si ottiene allora per il campo generato \vec{E}_s l'espressione (dove $\hat{\vec{n}}'$ è la direzione di osservazione)

$$\vec{E}_s(t) = \frac{e}{c^2 r} \hat{\vec{n}}' \times (\hat{\vec{n}}' \times \vec{a}) = -\frac{e\omega^2}{c^2 r} \hat{\vec{n}}' \times (\hat{\vec{n}}' \times \vec{x}_0) e^{-i\omega t_r}. \quad (6.2.7)$$

Se indichiamo ora con α l'angolo tra la direzione di polarizzazione del campo (che è anche la direzione di \vec{x}_0) e la direzione di osservazione $\hat{\vec{n}}'$ si ha allora

$$\langle \vec{S}_{out} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_s|^2 \hat{\vec{n}}' = \left(\frac{c}{8\pi} \right) \frac{e^2 \omega^4}{c^4 r^2} |\vec{x}_0|^2 (\sin^2 \alpha) \hat{\vec{n}}' \quad (6.2.8)$$

e quindi la sezione d'urto differenziale (elastica, in quanto la frequenza della radiazione incidente è uguale alla frequenza della radiazione uscente) è data nel caso di polarizzazione lineare da

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{r^2 |\langle \vec{S}_{out} \rangle|}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|} = \frac{e^2 \omega^4}{c^4} \frac{|\vec{x}_0|^2}{|\vec{E}_0|^2} \sin^2 \alpha = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} \sin^2 \alpha \quad (6.2.9)$$

dove si è usata la notazione $r_e = e^2/(mc^2)$ per il raggio classico dell'elettrone.

Se si è interessati non alla sezione d'urto elastica differenziale ma alla sezione d'urto elastica totale è necessario integrare la precedente espressione su tutto l'angolo solido (che equivale ad usare la formula di Larmor per la potenza totale irraggiata); usando un sistema di coordinate polari avente l'asse polare diretto lungo la direzione di \vec{x}_0 si ha allora

$$\int_0^\pi d\alpha \int_0^{2\pi} d\phi \sin^3 \alpha = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \alpha) |d\cos \alpha| = 2\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{8}{3}\pi \quad (6.2.10)$$

per arrivare a

$$\sigma_{el} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)}. \quad (6.2.11)$$

Il valore $\sigma_{th} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \simeq 0.7b$ è noto come sezione d'urto Thompson e corrisponde alla sezione d'urto di un onda elettromagnetica su un elettrone libero (ovvero $\omega_0 = 0$ e $\Gamma' = 0$) nel caso in cui $\omega \ll 1/\tau$. Nel caso generale l'andamento di σ_{el} con la frequenza è il seguente:

- per $\omega \ll \omega_0$ si ha $\sigma_{el} \simeq \sigma_{th}(\omega/\omega_0)^4$, in particolare $\sigma_{el} \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow 0$ (un elettrone legato in un campo statico non irraggia)
- per $\omega \simeq \omega_0$ è presente un picco di σ_{el} (risonanza)
- per $\omega_0 \ll \omega \ll 1/\tau$ si ha $\sigma_{el} \simeq \sigma_{th}$
- per $\omega \gg 1/\tau$ si ha $\sigma_{el} \simeq \frac{\sigma_{th}}{1 + \tau^2 \omega^2}$

La forma della risonanza per $\omega \simeq \omega_0$ dipende dal valore di $\Gamma_{tot}(\omega_0)$:

- nel caso in cui $\Gamma_{tot}(\omega_0) \gtrsim \omega_0$ (risonanza "larga") è necessario usare la forma completa Eq. (6.2.11), dove ricordiamo che $\Gamma_{tot}(\omega) = \Gamma' + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Gamma$ e $\Gamma = \tau \omega_0^2$
- nel caso in cui $\Gamma_{tot}(\omega_0) \ll \omega_0$ (risonanza "stretta") l'espressione Eq. (6.2.11) può essere semplificata come segue

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \sigma_{th} \frac{\omega^4}{(\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} \simeq \\ &\simeq \sigma_{th} \frac{\omega_0^4}{(\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2 + \omega_0^2 \Gamma_{tot}^2(\omega_0)} = \sigma_{th} \frac{\omega_0^2/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma_{tot}(\omega_0)/2)^2} \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

ottenendo quindi un profilo lorentziano (noto anche come profilo Breit-Wigner [26] §145 in meccanica quantistica).

Attenzione che potrebbe apparire che il termine di reazione di radiazione (caratterizzato dalla larghezza Γ) sia inutile, perché la regione $\omega \gtrsim 1/\tau$ non è investigabile sperimentalmente. Tuttavia non è così: la larghezza Γ è fondamentale, perché determina la larghezza e la altezza della curva di risonanza quando $\Gamma' = 0$:

$$\sigma_{el}(\omega = \omega_0, \Gamma' = 0) = \sigma_{th} \frac{\omega_0^4}{\tau^2 \Gamma_{tot}^2(\omega = \omega_0)} = \frac{\sigma_{th}}{\tau^2 \omega_0^2} \gg \sigma_{th}. \quad (6.2.13)$$

Consideriamo ora il caso che la radiazione incidente non sia polarizzata. Per ottenere la sezione d'urto differenziale in questo caso è necessario mediare su tutte le possibili polarizzazioni dell'onda incidente e ricordiamo che la direzione della polarizzazione entra in Eq. (6.2.9) tramite l'angolo α , che è l'angolo tra la direzione di osservazione \hat{n}' e la direzione della polarizzazione \hat{x}_0 . Per effettuare la media supponiamo che l'onda incidente propaghi lungo l'asse \hat{z} , quindi $\hat{n} = (0, 0, 1)$, e parametrizziamo il versore della direzione di osservazione tramite $\hat{n}' = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, dove quindi θ è l'angolo tra la direzione della luce incidente, \hat{n} , e la direzione di osservazione \hat{n}' ; la polarizzazione dell'onda indicente deve essere perpendicolare all'asse \hat{z} ed il suo versore si può quindi scrivere nella forma $\hat{x}_0 = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$. Usando queste espressioni si ha allora

$$\cos \alpha = \hat{x}_0 \cdot \hat{n}' = \sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi = \sin \theta \cos(\psi - \phi) \quad (6.2.14)$$

e quindi

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\psi - \phi). \quad (6.2.15)$$

Si deve mediare questa espressione sulle direzioni della polarizzazione, quindi è necessario considerare la media rispetto a ψ , che usando l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} \langle \sin^2 \alpha \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 \theta \cos^2(\psi - \phi)\right) d\psi = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

da cui si ottiene

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \Big|_{\text{non pol.}} = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \quad (6.2.17)$$

Ovviamente la media sulle polarizzazioni non cambia la sezione d'urto elastica integrata Eq. (6.2.11), che è indipendente dalla specifica orientazione della polarizzazione, come si vede esplicitamente effettuando l'integrale angolare usando coordinate polari con l'asse polare diretto lungo \hat{n} :

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \sin \theta = \pi \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = \frac{8}{3}\pi. \quad (6.2.18)$$

Un modo per calcolare $\langle \sin^2 \alpha \rangle$ senza effettuare il calcolo esplicito della media è il seguente: si ha

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = 1 - \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1 - \langle (\hat{x}_0 \cdot \hat{n}')^2 \rangle = 1 - \langle (\hat{x}_0)_i (\hat{x}_0)_j \rangle n'_i n'_j \quad (6.2.19)$$

e, se introduciamo la notazione $T_{ij} = \langle (x_0)_i (x_0)_j \rangle$, il tensore T_{ij} deve essere simmetrico per scambio $i \leftrightarrow j$, trasversale rispetto alla direzione di propagazione iniziale ($T_{ij} n_i = T_{ij} n_j = 0$) e deve soddisfare $T_{ii} = 1$. Inoltre, poiché si sta mediando sulle direzioni della polarizzazione, T_{ij} deve poter essere scrivibile in termini del solo versore \hat{n} . L'unica espressione che soddisfa questi requisiti è $T_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j)$ e quindi si ottiene

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = 1 - \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j) n'_i n'_j = \frac{1 + (\hat{n} \cdot \hat{n}')^2}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \quad (6.2.20)$$

Si è fino ad ora considerata solo la componente elastica della sezione d'urto, legata alla potenza irraggiata a frequenza ω ; passiamo ora ad analizzare la sezione d'urto totale, che è legata alla potenza totale sottratta all'onda incidente (indipendentemente dal fatto che questa venga poi riemessa con frequenza ω , riemessa con una frequenza diversa o assorbita dal bersaglio). Il punto di partenza è la potenza assorbita da una carica e in moto nel campo elettrico, che per un campo

reale si scrive come $e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{E}$. Nel caso specifico sia $\dot{\vec{x}}$ che \vec{E} sono scritti in termini di variabili complesse, quindi è necessario come al solito in questi casi considerare solo le componenti reali e mediare su un periodo dell'onda incidente:

$$P_{diss} = e \left\langle \left(\frac{\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}}^*}{2} \right) \left(\frac{\vec{E} + \vec{E}^*}{2} \right) \right\rangle . \quad (6.2.21)$$

Usando il fatto che $\dot{\vec{x}}$ e \vec{E} hanno la stessa dipendenza angolare $e^{-i\omega t}$ si ottiene subito (usando la forma esplicita (6.2.4) di \vec{x}_0)

$$\begin{aligned} P_{diss} &= \frac{e}{2} \operatorname{Re}(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{E}^*) = \frac{e}{2} \operatorname{Re} \left(-i\omega \frac{\frac{e}{m} \vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \Gamma_{tot}(\omega)} \cdot \vec{E}_0^* \right) = \\ &= \frac{e^2}{2m} |\vec{E}|^2 \operatorname{Re} \left(\frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \Gamma_{tot}(\omega)} \right) = \frac{e^2}{2m} |\vec{E}|^2 \frac{\omega^2 \Gamma_{tot}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} ; \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

per la sezione d'urto totale si trova quindi

$$\sigma_{tot} = \frac{P_{diss}}{\frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2} = 4\pi c r_e \frac{\omega^2 \Gamma_{tot}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} . \quad (6.2.23)$$

Dal confronto di questa equazione con Eq. (6.2.11) si ottiene quindi (ricordando che si era definito $\Gamma_{tot}(\omega) = \Gamma' + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Gamma$, $\Gamma(\omega) = \tau \omega_0^2$ e $\tau = \frac{2}{3} r_e / c$)

$$\frac{\sigma_{el}}{\sigma_{tot}} = \frac{2r_e}{3c} \frac{\omega^2}{\Gamma_{tot}(\omega)} = \frac{\tau \omega^2}{\Gamma' + \tau \omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{\Gamma'}{\tau \omega^2}} . \quad (6.2.24)$$

Come era ragionevole attendersi, se $\Gamma' = 0$ (ovvero $\gamma = 0$) tutto lo scattering è elastico, in quanto non è presente il termine dissipativo $-m\Gamma' \dot{\vec{x}}$ nelle equazioni del moto.

6.3 Stati risonanti e loro tempi di decadimento

Alla frequenza di risonanza $\omega = \omega_0$ le sezioni d'urto elastica e totale calcolate nella sezione precedente valgono (ricordando che $r_e = \frac{3}{2} \tau c$, $\Gamma_{tot}(\omega) = \Gamma' + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \Gamma$ e $\Gamma = \tau \omega_0^2$)

$$\begin{aligned} \sigma_{el}(\omega = \omega_0) &= \frac{8}{3} \pi r_e^2 \frac{\omega_0^4}{\omega_0^2 \Gamma_{tot}^2(\omega_0)} = \frac{6\pi c^2 \Gamma^2}{\omega^2 (\Gamma' + \Gamma)^2} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{\Gamma' + \Gamma} \right)^2 , \\ \sigma_{tot}(\omega = \omega_0) &= \frac{4\pi c r_e}{\Gamma_{tot}(\omega_0)} = 6\pi c^2 \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\Gamma_{tot}(\omega_0)} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma' + \Gamma} . \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Introducendo anche la sezione d'urto di assorbimento $\sigma_{abs} = \sigma_{tot} - \sigma_{el}$, abbiamo quindi in risonanza

$$\begin{aligned} \sigma_{el}(\omega = \omega_0) &= \frac{3\lambda_0}{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{\Gamma' + \Gamma} \right)^2 , \\ \sigma_{abs}(\omega = \omega_0) &= \frac{3\lambda_0}{2\pi} \frac{\Gamma \Gamma'}{(\Gamma' + \Gamma)^2} , \\ \sigma_{tot}(\omega = \omega_0) &= \frac{3\lambda_0}{2\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma' + \Gamma} . \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Definendo ora i rapporti di decadimento (branching fraction) elastici e di assorbimento come

$$B_{el} = \frac{\Gamma}{\Gamma' + \Gamma} , \quad B_{abs} = \frac{\Gamma'}{\Gamma' + \Gamma} \quad (6.3.3)$$

le espressioni precedenti possono essere riscritte nel modo seguente

$$\sigma_{el} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} B_{el}^2, \quad \sigma_{abs} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} B_{el} B_{abs}, \quad \sigma_{tot} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} B_{el}, \quad (6.3.4)$$

da cui si vede subito che

$$\sigma_{el} = B_{el} \sigma_{tot}, \quad \sigma_{abs} = B_{abs} \sigma_{tot}. \quad (6.3.5)$$

Il rapporto di decadimento associato ad un dato canale di decadimento (quello di emissione elastica o quello di assorbimento), specifica quindi la frazione di energia che viene emessa in quel canale. Si può dunque pensare che l'onda incidente ecciti il sistema, producendo uno stato metastabile "risonante", che poi decade riemettendo la sua energia "elasticamente" o "non elasticamente" con una probabilità pari ai corrispondenti rapporti di decadimento. Torna forse utile a questo punto ricordare che, nel modello dell'elettrone legato elasticamente, il termine dissipativo Γ' era stato introdotto per tener conto di possibili altri canali di emissione di energia diversi da quello elastico, quindi σ_{abs} corrisponde da un punto di vista fisico alla sezione d'urto anelastica.

La quantità $\Gamma_{tot}(\omega_0) = \Gamma' + \Gamma$ ha le dimensioni di un inverso di un tempo ed è chiamata larghezza totale di decadimento (Γ' e Γ sono quindi le larghezze parziali di decadimento). Per intuire il suo significato fisico consideriamo una situazione fisica leggermente diversa da quella considerata finora: invece di investire l'elettrone legato con un'onda elettromagnetica stazionaria, supponiamo che il passaggio dell'onda abbia eccitato il sistema, spostando l'elettone dalla sua posizione di equilibrio. Questa è una modellizzazione molto semplice dello stato risonante e l'equazione del moto dell'elettrone è la stessa che era stata studiata nella sezione precedente ma ora senza il termine forzante (cioè $\vec{E}_0 = 0$), quindi

$$\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} + \Gamma' \dot{\vec{x}} - \tau \ddot{\vec{x}} = 0. \quad (6.3.6)$$

Siamo ora interessati non alla soluzione stazionaria (che sarebbe banalmente $\vec{x} = 0$) ma al transiente, in modo da identificare il tempo caratteristico del processo di rilassamento.

Ricordando che per valori realistici dei parametri si ha $\Gamma' \ll \omega_0$ e $\Gamma = \omega_0^2 \tau \ll \omega_0$ è ragionevole attendersi che l'elettrone esegua un moto oscillante debolmente smorzato. Cerchiamo soluzioni debolmente smorzate della forma

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\Omega t - \gamma t/2} \quad (6.3.7)$$

con $\gamma \ll \Omega$, quindi si deve avere

$$\left(-i\Omega - \frac{\gamma}{2}\right)^2 + \omega_0^2 + \Gamma' \left(-i\Omega - \frac{\gamma}{2}\right) - \tau \left(-i\Omega - \frac{\gamma}{2}\right)^3 = 0. \quad (6.3.8)$$

Tenendo solo i fattori dominanti (per $\Omega \gg \gamma$) di ogni termine si ha

$$-\Omega^2 + i\Omega\gamma + \omega_0^2 - i\Gamma'\Omega - \Gamma' \frac{\gamma}{2} - i\tau\Omega^3 + i\frac{3}{2}\tau\Omega^2\gamma = 0 \quad (6.3.9)$$

e annullando separatamente la parte reale e la parte immaginaria troviamo

$$\begin{cases} -\Omega^2 + \omega_0^2 - \Gamma' \frac{\gamma}{2} = 0 \\ (1 + \frac{3}{2}\tau\Omega) \gamma - \Gamma' - \tau\Omega^2 = 0 \end{cases}, \quad (6.3.10)$$

da cui si trova, trascurando i termini piccoli, la soluzione

$$\Omega \simeq \omega_0, \quad \gamma \simeq \Gamma' + \tau\omega_0^2 = \Gamma' + \Gamma = \Gamma_{tot}(\omega_0). \quad (6.3.11)$$

Se consideriamo l'energia totale dell'elettrone, quadratica sia nelle velocità che nella posizione, si ha allora $E(t) \simeq E_0 e^{-\Gamma_{tot}(\omega_0)t}$, quindi la larghezza totale di uno stato risonante è il reciproco della sua vita media.

Nonostante la trattazione degli stati risonanti effettuata in questa sezione abbia coinvolto un sistema classico, molte delle relazioni trovate hanno in effetti validità più generale e sono vere

anche in un contesto quantistico (vedi ad es. [26] §134, [27] §13). In un tale contesto gli stati risonanti non sono altro che particelle instabili: esse possono essere prodotte in una reazione e poi decadere molto rapidamente, risultando quindi rivelabili solo indirettamente, studiando alcune caratteristiche cinematiche degli stati finali della reazione. **aggiungere puntatore**

Esercizio 6.3.1: Si osserva uno stato risonante del ^{57}Fe , che ha una vita media di circa 97.7ns e decade emettendo un fotone di energia circa 14.4KeV. Questo stato potrebbe essere una risonanza descrivibile con il modello dell'elettrone legato elasticamente? (suggerimento: quanto vale ω_0^2 ? Quanto varrebbe Γ ?)

Esercizio 6.3.2: Partendo dall'espressione della potenza dissipata dal temine viscoso $-m\Gamma'\dot{\vec{x}}$, che si può scrivere $\langle P_{abs} \rangle = \frac{m\Gamma'}{2} |\dot{\vec{x}}|^2$ in notazione complessa, mostrare che per un elettrone legato elasticamente si ha al picco della risonanza

$$\sigma_{abs} = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma'\Gamma}{(\Gamma' + \Gamma)^2}. \quad (6.3.12)$$

Esercizio 6.3.3: Si consideri un circuito RLC con $RC \ll L/R$.

- Supponiamo di collegare al circuito un generatore di tensione di pulsazione ω . Si calcoli la larghezza $\Delta\omega = \Gamma$ della curva di risonanza della corrente.
- Supponiamo invece di chiudere il circuito (senza generatori di tensione o di corrente) quando il condensatore è carico. Si calcoli il tempo τ necessario affinché l'energia del circuito (somma dell'energia magnetica nell'induttanza e di quella elettrica nel condensatore) si riduca di un fattore e .
- si verifichi che $\tau = 1/\Gamma$.

6.4 Scattering Rayleigh e fattori di forma

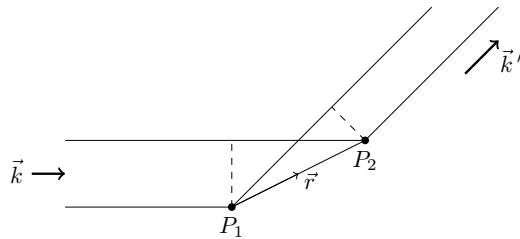


Figura 6.2: Le geometrie necessarie per il calcolo della differenza di cammino ottico nello scattering da due centri diffusori.

Considereremo ora il caso in cui la radiazione elettromagnetica incida non su un singolo elettrone ma su un atomo (scattering Rayleigh). In questo caso non basta considerare la potenza irraggiata da ogni singolo elettrone, è anche necessario tenere conto della possibile interferenza tra i campi generati dai vari elettroni. Si supporrà inoltre sempre che lo scattering sia elastico, ovvero avvenga senza cambi di frequenza, quindi $|\vec{k}| = |\vec{k}'| \equiv k$.

Partiamo dal caso in cui siano presenti solo due centri diffusori P_1 e P_2 , situati ad una distanza \vec{r} tra loro. Da Fig. (6.2) si vede subito che la differenza di cammino ottico percorso da due fotoni incidenti su P_1 e su P_2 è data da

$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell_2 = \vec{r} \cdot \frac{\vec{k}'}{k} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{k}' - \vec{k})}{k} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}}{k}, \quad (6.4.1)$$

in cui si è introdotta la notazione standard $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$. Un osservatore lontano vede quindi le onde elettromagnetiche generate da P_1 e da P_2 sfasate di $k\Delta\ell = \vec{r} \cdot \vec{q}$ e, assumendo che i due diffusori situati in P_1 ed in P_2 siano fisicamente indistinguibili, questo sfasamento sarà l'unica differenza tra i due campi. È a questo punto semplice generalizzare l'argomento precedente al caso in cui siano presenti N centri diffusori: il campo totale sarà della forma $\vec{E} = \vec{E}_1 e^{-i\phi_1} + \vec{E}_2 e^{-i\phi_2} + \dots$, dove si è indicato con \vec{E}_i il campo generato dall' i -esimo diffusore e con ϕ_i la sua fase; con un ragionamento identico al precedente si vede che la differenza di fase tra i diffusori “ i ” e “ j ” è data da $\phi_i - \phi_j = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{q}$, dove \vec{r}_i è la posizione del diffusore i -esimo. Supponendo tutti i diffusori identici e supponendo di osservare il sistema da molto lontano si ha approssimativamente $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \dots$, e quindi (a meno di una fase comune irrilevante) si ha $\vec{E} = \vec{E}_1 \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{r}_j \cdot \vec{q}}$.

Nel caso in cui sia presente una distribuzione continua $\rho(\vec{r})$ di centri diffusori (cariche) questa somma diventa naturalmente un integrale ed è uso comune definire il fattore di forma elettromagnetico come

$$F(\vec{q}) = \frac{\int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{r} \cdot \vec{q}} d^3 r}{\int \rho(\vec{r}) d^3 r}, \quad (6.4.2)$$

in cui il denominatore è semplicemente la carica totale. Per quanto appena visto il campo elettrico generato da una distribuzione $\rho(\vec{r})$ (con $\int \rho(\vec{r}) d^3 r = Q$) su cui incide radiazione elettromagnetica è il campo che sarebbe generato da un diffusore *puntiforme* di carica Q (che nella notazione precedente corrisponderebbe a $N\vec{E}_1$) moltiplicato per il fattore di forma $F(\vec{q})$ della distribuzione. Nel caso dello scattering Rayleigh si ha quindi

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}(\vec{q}) = \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}(\vec{q}) \Big|_e |ZF(\vec{q})|^2 \quad (6.4.3)$$

dove si è indicata con $d\sigma_{el}/d\Omega|_e$ la sezione d’urto su singolo elettrone. Misurando la sezione d’urto per diversi valori di \vec{q} si può ricostruire il fattore di forma (in realtà il modulo del fattore di forma) usando il quale si può risalire alla distribuzione di carica iniziale. Nel caso in cui la distribuzione di carica iniziale abbia simmetria sferica la dipendenza del fattore di forma da \vec{q} è in realtà una dipendenza da $q = |\vec{q}|$ (vedi dopo per un esempio esplicito) e dalla definizione $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ segue che (indicando con θ l’angolo di scattering, $\vec{k} \cdot \vec{k}' = k^2 \cos \theta$)

$$q^2 = (\vec{k}' - \vec{k})^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad q = 2k \sin \frac{\theta}{2}, \quad (6.4.4)$$

quindi la dipendenza da q comprende sia una dipendenza dalla frequenza $\omega = k/c$ della radiazione incidente sia una dipendenza dall’angolo di scattering; quantisticamente $\hbar\vec{q}$ è l’impulso trasferito dal fotone incidente all’atomo.

Dalla definizione di fattore di forma segue subito che $F(0) = 1$, che ha una semplice interpretazione fisica: nel limite $q \rightarrow 0$ (più precisamente $qa \ll 1$, dove a è una scala tipica del sistema) si sta indagando come reagisce il sistema a sollecitazioni aventi scale tipiche di lunghezza molto grandi, rispetto alle quali il sistema è approssimabile come un oggetto puntiforme di carica Q . Nel caso specifico dello scattering Rayleigh (fotone su atomo) questo significa che i fotoni non hanno abbastanza energia da risolvere la struttura atomica, che ha come scala di lunghezza tipica $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$, quindi un fotone è “poco energetico” se

$$E_\gamma = \hbar\omega = 2\pi \frac{\hbar c}{\lambda} \lesssim 2\pi \frac{\hbar c}{1 \text{ \AA}} \simeq 10 \text{ KeV}. \quad (6.4.5)$$

In questo caso la sezione d’urto Rayleigh si riduce quindi a Z^2 volte la sezione d’urto su singolo elettrone e di conseguenza

$$\frac{\sigma_{el}^{Pb}(q \lesssim 10 \text{ KeV})}{\sigma_{el}^C(q \lesssim 10 \text{ KeV})} \simeq \left(\frac{82}{6}\right)^2 \simeq 187, \quad (6.4.6)$$

che è in accordo con i dati mostrati in Fig. (6.1). Nel limite opposto $q \rightarrow \infty$ (più correttamente $qa \gg 1$) si sta analizzando la distribuzione di carica con una sonda sensibile alle piccolissime

distanza e ci si aspetta in generale di avere interferenza distruttiva tra i campi prodotti nei vari punti del sistema, cosa che segue formalmente dal lemma di Riemann-Lebesgue.

Se consideriamo una distribuzione di carica avente raggio caratteristico a e supponiamo che la radiazione incidente sia tale che $ak \ll 1$ (e di conseguenza $\vec{r} \cdot \vec{q} \ll 1$ per ogni angolo di scattering), allora si può sviluppare l'esponenziale che compare nella definizione del fattore di forma e si ottiene

$$\begin{aligned} \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{r} \cdot \vec{q}} d^3r &\simeq \int \rho(\vec{r}) \left(1 - i\vec{r} \cdot \vec{q} - \frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \vec{q})^2\right) d^3r = \\ &= \int \rho(\vec{r}) d^3r - i\vec{q} \cdot \int \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3r - \frac{q_j q_k}{2} \int \rho(\vec{r}) \left(r_j r_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right) d^3r - \frac{\vec{q}^2}{6} \int \vec{r}^2 \rho(\vec{r}) d^3r = \quad (6.4.7) \\ &= Q - i\vec{q} \cdot \vec{d} - \frac{1}{6} q_j Q_{jk} q_k - \frac{\vec{q}^2}{6} Q \langle \vec{r}^2 \rangle , \end{aligned}$$

dove si è introdotta la carica totale Q , il momento di dipolo \vec{d} , i momenti di quadrupolo Q_{jk} ed il raggio quadratico medio di carica $\langle \vec{r}^2 \rangle$. Per una distribuzione sferica di carica (o più in generale se i momenti di dipolo e quadrupolo si annullano) si ha allora

$$|F(\vec{q})|^2 = \left|1 - \frac{\vec{q}^2}{6} \langle \vec{r}^2 \rangle + o(\vec{q}^2)\right|^2 = 1 - \frac{\vec{q}^2}{3} \langle \vec{r}^2 \rangle + o(\vec{q}^2) \quad (6.4.8)$$

e dalla dipendenza della sezione d'urto da \vec{q} si può estrarre raggio quadratico medio di carica.

Analizziamo ora il caso specifico di una sfera di raggio a avente una distribuzione uniforme di carica e carica totale Q :

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi a^3} & \text{se } |\vec{r}| \leq a \\ 0 & \text{se } |\vec{r}| > a \end{cases} . \quad (6.4.9)$$

Per dato \vec{q} scegliamo coordinate polari (che indichiamo con θ' e ϕ') aventi l'asse polare diretto lungo \vec{q} , quindi il fattore di forma può essere calcolato come

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \frac{1}{Q} \int \rho(r) r^2 e^{-irq \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' d\phi' dr = \frac{2\pi}{Q} \int \rho(r) r^2 e^{-irq \cos \theta'} |d \cos \theta'| dr = \\ &= \frac{4\pi}{Q} \int \rho(r) r^2 \frac{\sin(rq)}{rq} dr = \frac{3}{a^3 q} \int_0^a r \sin(rq) dr = \quad (6.4.10) \\ &= \frac{3}{a^3 q} \left(-\frac{r}{q} \cos(rq) + \frac{1}{q^2} \sin(rq) \right)_0^a = 3 \left(\frac{\sin(aq)}{(aq)^3} - \frac{\cos(aq)}{(aq)^2} \right) , \end{aligned}$$

da cui si vede che, a causa della simmetria per rotazioni, si ha in effetti $F(\vec{q}) = F(q)$. Usando $\sin x \simeq x - x^3/6$ e $\cos x \simeq 1 - x^2/2$ si vede subito che $F(q) = 1 - (aq)^2/10$ per $aq \ll 1$ (consistenteamente con il fatto che $\langle \vec{r}^2 \rangle = 3a^2/5$), mentre si ha chiaramente $\lim_{aq \rightarrow \infty} F(q) \rightarrow 0$, per un grafico completo vedi Fig. (6.3).

Ricordando che $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, si vede quindi che se si considera un fotone molto energetico, $ak \gg 1$, esso sarà preferenzialmente diffuso in avanti, in quanto il fattore di forma è fortemente piccato per $aq \lesssim \pi$. Per l'angolo di emissione si avrà quindi

$$\sin \frac{\theta}{2} \lesssim \frac{\pi}{2ak} \ll 1 \Rightarrow \theta \lesssim \frac{\pi}{ak} \quad (6.4.11)$$

e di conseguenza una approssimazione un po' rozza ma efficace del fattore di forma per $ak \gg 1$ risulta essere

$$F(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta \leq 1/(ak) \\ 0 & \text{se } 1/(ak) < \theta \leq \pi \end{cases} . \quad (6.4.12)$$

Notiamo esplicitamente che questa forma approssimata di $F(\theta)$ è vera per qualunque distribuzione di carica avente raggio tipico a , in quanto si basa solo sui seguenti fatti due fatti: $F(0) = 1$ e, per θ fissato, $F(2k \sin(\theta/2))$ è una funzione rapidamente decrescente di k (alcuni metodi per stimare gli

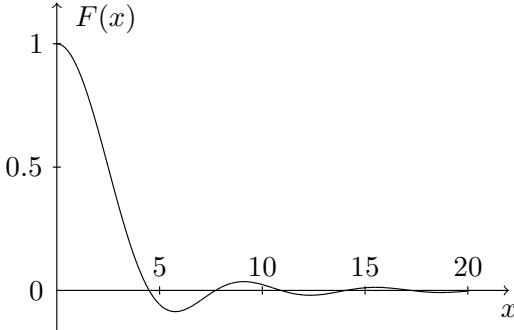


Figura 6.3: Fattore di forma di una sfera con densità di carica uniforme $F(x) = 3 \left(\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{\cos(x)}{x^2} \right)$, dove $x = aq = 2ak \sin(\theta/2)$.

andamenti delle trasformate di Fourier per grandi valori dell'argomento sono esposti ad es. in [21] §1.1). Nel caso di radiazione non polarizzata di alta frequenza la sezione d'urto Rayleigh risulta dunque con buona approssimazione essere (usando Eq. (6.2.17) con $\omega \gg \omega_0$)

$$\begin{aligned} \sigma_{el}(ak \gg 1) &= \int \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \Big|_e^{\text{non pol.}} |ZF(\theta)|^2 d\phi \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi Z^2 r_e^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \simeq \\ &\simeq \pi Z^2 r_e^2 \int_0^{1/ak} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \simeq \frac{\pi Z^2 r_e^2}{(ak)^2}, \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

che ben descrive l'andamento mostrato in Fig. (6.1) per $E_\gamma \gg 10 \text{ KeV}$ sia ad energia del fotone fissata in funzione del numero atomico, sia per numero atomico fissato in funzione dell'energia del fotone incidente.

6.5 Scattering Compton e produzione di coppie (considerazioni cinematiche)

Analizziamo ora la cinematica dello scattering Compton, in cui un fotone incide su un elettrone libero ed in quiete e viene diffuso con un cambio di frequenza: $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$. Usando unità naturali (quindi $c = 1$ e $\hbar = 1$) il quadriimpulso di un fotone si scrive nella forma $P = \omega(1, \hat{n})$, dove ω è la frequenza angolare e \hat{n} è la direzione di propagazione; la conservazione del quadriimpulso nel processo si può scrivere nella forma $P_{\gamma_1} - P_{\gamma_2} = P_{e_2} - P_{e_1}$ dove γ_1 è il fotone incidente (di frequenza angolare ω), e_1 è l'elettrone iniziale in quiete ed il fotone γ_2 ha frequenza ω' (ovviamente $\omega' < \omega$ per la conservazione dell'energia). Considerando il quadrato della precedente relazione, usando $P_{e_1} = (m, 0)$ e chiamando θ l'angolo di scattering del fotone si ottiene

$$-2\omega\omega'(1 - \cos \theta) = 2m^2 - 2mE_2 = 2m^2 - 2m(\omega + m - \omega') = -2m(\omega - \omega'), \quad (6.5.1)$$

dove m è la massa elettronica ed E_2 è l'energia dell'elettrone nello stato finale. Reintroducendo le unità fisiche si ha quindi

$$\omega - \omega' = \frac{\hbar\omega\omega'}{mc^2}(1 - \cos \theta), \quad (6.5.2)$$

da cui si vede che ci può essere un cambiamento significativo di frequenza solo se l'energia $\hbar\omega$ del fotone incidente è comparabile all'energia di riposo dell'elettrone mc^2 . Poiché l'energia di legame tipica di un elettrone atomico è molto più piccola della sua energia di riposo, l'approssimazione

di elettrone iniziale “fermo” è ragionevole anche per un elettrone atomico su cui incide un fotone di energia tipica mc^2 . Il modo standard in cui la relazione Eq. (6.5.2) viene di solito scritta è in funzione non delle frequenze ma delle lunghezze d’onda: è semplice verificare che in termini di $\lambda = 2\pi c/\omega$ si ha

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad (6.5.3)$$

dove $\lambda_c = \frac{h}{mc} \simeq 2.4 \times 10^{-12} \text{ m}$ è la lunghezza d’onda Compton dell’elettrone.

Passiamo ora al caso della produzione di coppie. Notiamo preliminarmente che un fotone nel vuoto non può produrre coppie, cioè il processo $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ è cinematicamente proibito, come si vede considerando il quadrato dell’equazione della conservazione del quadriimpulso: da $P_\gamma = P_+ + P_-$ si ottiene infatti $0 = (P_+ + P_-)^2 \geq 4m^2$ dove m è la massa dell’elettrone (che è uguale alla massa del positrone). La produzione di coppie può quindi avvenire solo se è presente una altra particella spettatrice (che deve essere carica, ma questo cinematicamente è irrilevante) che indicheremo genericamente con X . Il processo può quindi essere schematizzato come $\gamma + X \rightarrow e^+ + e^- + X$ ed i casi sperimentalmente più rilevanti sono quelli in cui X è un nucleo atomico o un elettrone.

Procediamo con il calcolo della soglia del processo (usando unità naturali), assumendo che lo spettatore X sia inizialmente fermo (si vedrà a posteriori che questa approssimazione è ragionevole, come nel caso dell’effetto Compton): si ha $P_\gamma + P_X = P_+ + P_- + P'_X$, in cui $P_X = (M_X, 0)$ è il quadriimpulso iniziale della particella X , P'_X il suo quadriimpulso finale e $P_\gamma = \omega(1, \hat{\vec{n}})$ il quadriimpulso del fotone. Considerando il quadrato di questa relazione otteniamo

$$2\omega M_X + M_X^2 = (P_+ + P_- + P'_X)^2 \geq (M_X + 2m)^2, \quad (6.5.4)$$

dove abbiamo nuovamente indicato con m la massa elettronica, quindi affinchè il processo possa avvenire si deve avere

$$\omega \geq 2m + 2\frac{m^2}{M_X} = 2m \left(1 + \frac{m}{M_X}\right), \quad (6.5.5)$$

dove il fatto che la soglia non sia esattamente $2m$ è ovviamente una conseguenza del fatto che anche alla particella X viene trasferita una certa quantità di energia. Nel caso in cui la produzione di coppia sia mediata da un nucleo si ha $M_X \gg m$, quindi la soglia del processo è con ottima approssimazione $E_\gamma \simeq 2m$, se invece lo spettatore è un elettrone si ha $M_X = m$ e la soglia è $E_\gamma = 4m$. In entrambi i casi il fotone è sufficientemente energetico da poter considerare con buona approssimazione lo spettatore X come inizialmente fermo.

Poiché un fotone deve essere piuttosto energetico per produrre coppie, l’impulso trasferito all’elettrone spettatore è sufficientemente grande da poter trascurare le interazioni con gli altri elettroni atomici. Nel caso in cui si consideri la produzione di coppie da parte degli Z elettroni atomici si ha dunque $\kappa_e \propto Z$, che spiega la differenza presente nel valore di κ_e in Fig. (6.1) tra il caso del carbonio e quello del piombo ($Z^{Pb}/Z^C \simeq 13.7$). Nel caso in cui la produzione di coppia sia invece mediata da un nucleo, l’impulso trasferito al nucleo è tipicamente solo una piccola parte dell’impulso iniziale, che non è in grado di risolvere la struttura nucleare (a meno che il fotone non abbia energie dell’ordine del TeV). Si ha quindi l’equivalente di uno scattering coerente, con $\kappa_{nuc} \propto Z^2$, analogamente al caso $q \rightarrow 0$ nello scattering Rayleigh.

Capitolo 7

**Alcuni argomenti di teoria della diffrazione

7.1 **Introduzione

In questa sezione si considereranno alcuni argomenti base di teoria della diffrazione, utilizzando però un approccio non molto ortodosso. La diffrazione viene di solito trattata come un problema al contorno per la teoria scalare (vedi ad es. [24] per un testo introduttivo di ottica), tuttavia questo approccio, ancorchè più diretto, nasconde parzialmente la profonda relazione tra la diffrazione e la più generale teoria dello scattering. L'approccio che si seguirà (parzialmente ispirato al testo [15]) è probabilmente meno versatile di quello classico, tuttavia presenta il vantaggio di mettere in evidenza le connessioni tra la teoria della diffrazione e l'irraggiamento elettromagnetico, oltre ad aggirare tutte le problematiche relative alle correttezza ed autoconsistenza delle condizioni al contorno usate. Un altro vantaggio è quello di utilizzare fin da principio una formulazione vettoriale (per un approccio “classico” alla diffrazione vettoriale vedi [4] §10.6-10.7).

“This pattern is generally explained in terms of the so-called Huygen’s principle, which tells us to consider each point on a wavefront as a new source of radiation and add the “radiation” from all of the new “sources” together. Physically this makes *no* sense at all. Light does not emit light; only accelerating charges emit light. Thus we will begin by throwing out Huygen’s principle completely; later we will see that it actually does give the right answer for the wrong reasons” ([15] §8.6).

7.2 **Polarizzabilità di uno schermo opaco

Consideriamo un’onda piana incidente ortogonalmente su una schermata sottile di materiale. Indichiamo con \vec{P}_0 la densità superficiale di polarizzazione indotta sul materiale dall’onda. In generale il valore di \vec{P}_0 è proporzionale alla polarizzazione dell’onda incidente \vec{E}_0 , con coefficiente dato dalla suscettività dielettrica. Nella presente sezione si vuole determinare la relazione tra \vec{P}_0 e \vec{E}_0 nel caso in cui lo schermo sia completamente opaco. Per fare ciò si calcolerà prima di tutto il campo elettrico generato da un piano con polarizzazione superficiale $\vec{P}_0 e^{-i\omega t}$ (corrispondente al campo incidente $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$), piano che supporremmo coincidere con il piano $z = 0$, quindi si determinerà la relazione tra \vec{P}_0 e \vec{E}_0 che garantisce interferenza distruttiva per $z > 0$.

Per il calcolo del campo generato si possono seguire due approcci diversi: il primo approccio è “costruttivo” e consiste nel sommare i contributi del campo di radiazione di tutti i dipoli oscillati, l’altra approccio è invece più macroscopico e riduce il problema alla soluzione delle equazioni di Maxwell aventi come sorgente una densità di corrente oscillante su un piano.

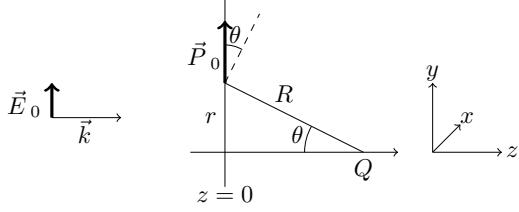


Figura 7.1: Le geometria necessaria per la Sez. (7.2).

Partiamo con il primo approccio: indicando con \vec{E}_{gen} il campo generato dalla polarizzazione piano si ha in generale, usando Eq. (3.2.11),

$$\vec{E}_{gen}(Q) = k^2 e^{-i\omega t} \int_{\Sigma} \vec{P}_{0\perp} \frac{e^{ikR}}{R} d\Sigma \quad (7.2.1)$$

ed è necessario prima di tutto calcolare $\vec{P}_{0\perp}$. Usando le convenzioni in Fig. (7.1) si ha $\vec{P}_0 = P_0(0, 1, 0)$, se si introducono coordinate polari sul piano Σ e si indica con ϕ il corrispondente angolo polare si ha inoltre $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, quindi $\hat{n} \cdot \vec{P}_0 = P_0 \sin \theta \sin \phi$ e di conseguenza

$$\vec{P}_{0\perp} = \vec{P}_0 - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{P}_0) = (-P_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi, P_0 - P_0 \sin^2 \theta \sin^2 \phi, -P_0 \sin \theta \cos \theta \sin \phi). \quad (7.2.2)$$

Poichè è necessario integrare su tutto il piano e l'angolo ϕ compare solo in $\vec{P}_{0\perp}$ si può usare

$$\int_0^{2\pi} \vec{P}_{0\perp} d\phi = (0, 2\pi P_0 - \pi P_0 \sin^2 \theta, 0) = (0, \pi P_0 + \pi P_0 \cos^2 \theta, 0) \quad (7.2.3)$$

e limitarsi nel seguito a considerare solo la componente \hat{y} . Resta quindi da calcolare

$$E_{gen}(Q) = k^2 \pi P_0 e^{-i\omega t} \int_0^\infty (1 + \cos^2 \theta) \frac{e^{ikR}}{R} r dr = k^2 \pi P_0 e^{-i\omega t} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{e^{ikR}}{R} r dr \quad (7.2.4)$$

dove si è usato $R \cos \theta = z$. Questa espressione può essere semplificata passando alla variabile indipendente R ($R^2 = r^2 + z^2$, $R dR = r dr$):

$$E_{gen} = k^2 \pi P_0 e^{-i\omega t} \int_z^\infty \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{ikR} dR. \quad (7.2.5)$$

Consideriamo dapprima il primo termine dell'integrale: se la lamina non fosse infinita ma fosse un disco di raggio L molto grande si otterebbe

$$\int_z^{\sqrt{z^2+L^2}} e^{ikR} dR = \frac{1}{ik} (e^{ik\sqrt{z^2+L^2}} - e^{ikz}) \simeq \frac{e^{ikL} - e^{ikz}}{ik} \quad (7.2.6)$$

inoltre, poichè $kL \gg 1$, il primo termine è molto sensibile ai dettagli del bordo della lamina e, assumendo che esistano delle piccole imperfezioni della scala della lunghezza d'onda della luce, si media a zero¹. Si può quindi usare

$$\int_z^\infty e^{ikR} dR \simeq -\frac{e^{ikz}}{ik}. \quad (7.2.7)$$

¹Da un punto di vista più formale si può mostrare procedendo analogamente a quanto fatto in Sez. (A.5) che il termine e^{ikL}/ik ha per $L \rightarrow \infty$ supporto solo nel punto $k = 0$, ma in questo contesto k è fisso e diverso da zero.

Il secondo termine nell'integrale che definisce E_{gen} non può essere svolto in forma chiusa, tuttavia siamo interessati al campo nella regione di radiazione $kz \gg 1$ (altrimenti servirebbe anche la componente vicina del campo di dipolo), quindi l'integrale può essere sviluppato come segue:

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \frac{e^{ikR}}{R^2} dR &= \frac{1}{R^2} \frac{e^{ikR}}{ik} \Big|_z^\infty + \int_z^\infty \frac{2}{R^3} \frac{e^{ikR}}{ik} dR = \\ &= -\frac{e^{ikz}}{ikz^2} + \frac{2}{R^3} \frac{e^{ikR}}{(ik)^2} \Big|_z^\infty + \int_z^\infty \frac{6}{R^4} \frac{e^{ikR}}{(ik)^2} dR = \\ &= -\frac{e^{ikz}}{ikz^2} - 2 \frac{e^{ikz}}{(ik)^2 z^3} + \dots \simeq -\frac{e^{ikz}}{ikz^2}. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Rimettendo insieme i pezzi e ripristinando i vettori si ottiene quindi

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = 2\pi ik \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)} \quad (7.2.9)$$

dove si è introdotto il valore assoluto di z in quanto in tutta la deduzione z è sempre stata la distanza dallo schermo e non la coordinata della direzione ortogonale.

Nel secondo approccio si usa il fatto che una polarizzazione oscillante \vec{P} genera una densità di corrente $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ quindi si riconduce il problema alla soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di una densità di corrente $-i\omega \vec{P}_0 e^{-i\omega t}$ sul piano $z = 0$ e densità di carica nulla. Come nell'approccio precedente supponiamo \vec{P}_0 orientato lungo l'asse \hat{y} e siamo in cerca di soluzioni che siano onde uscenti (nell'approccio precedente questo era automatico poiché derivava dalla forma del campo di radiazione che a sua volta derivava dai potenziali ritardati, ora questa condizione deve essere imposta come condizione al contorno). Data la geometria piana del sistema la parte oscillante sarà quindi del tipo $e^{-i(\omega t - k|z|)}$, come in effetti era stato ottenuto in precedenza. Dalle equazioni di Maxwell segue (integrando su piccole superfici o volumi come si fa di solito) che il campo \vec{E} è continuo in $z = 0$, che le componenti B_y e B_z del campo magnetico sono continue mentre per la componente B_x si ha $B_x(z = 0^+) - B_x(z = 0^-) = \frac{4\pi}{c} j_y$. Utilizzando la relazione valida in zona di radiazione $\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$ abbiamo allora che il campo deve essere della forma

$$\begin{cases} B_x(z > 0) = -\alpha e^{-i(\omega t - kz)} \\ E_y(z > 0) = \alpha e^{-i(\omega t - kz)} \end{cases} \quad \begin{cases} B_x(z < 0) = \beta e^{-i(\omega t + kz)} \\ E_y(z > 0) = \beta e^{-i(\omega t + kz)} \end{cases} \quad (7.2.10)$$

da cui si vede che affinchè \vec{E} sia continuo si deve avere $\alpha = \beta$ e quindi usando $j_y = -i\omega P_0 e^{-i\omega t}$ si trova $\alpha = 2\pi ik P_0$ e nuovamente

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 2\pi ik \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)}. \quad (7.2.11)$$

Notiamo che in questo caso a questa soluzione possiamo aggiungere a piacere una qualunque onda piana e si otterrebbe ancora una soluzione. Quella riportata sopra è la componente della soluzione che dipende esplicitamente dalla presenza della corrente, ovvero quello che in precedenza era stato indicato con \vec{E}_{gen} .

Il campo totale è quindi dato da

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{in}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + 2\pi ik \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)} \quad (7.2.12)$$

e se si vuole che per $z > 0$ non sia presente campo si deve imporre

$$\vec{P}_0 = -\frac{\vec{E}_0}{2\pi ik}. \quad (7.2.13)$$

Utilizzando Eq. (7.2.13) si può ora anche calcolare il campo per $z < 0$ (ovvero dal lato illuminato della lamina), ottenendo l'espressione completa

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} (e^{ikz} - e^{-ikz}) & \text{per } z < 0 \\ 0 & \text{per } z > 0 \end{cases} \quad (7.2.14)$$

quindi il campo si annulla vicino allo schermo sia per z positivi che per z negativi: una lastra opaca si comporta quindi come una lastra metallica.

Nel caso appena trattato non c'è dissipazione (in quanto il campo elettrico totale si annulla nella regione dove è presente la corrente) e il corpo opaco si comporta come uno specchio. Se si vuole costruire l'analogo di un corpo opaco che assorbe tutta la radiazione incidente si possono usare due piani di corrente invece di una sola. Si è appena visto che una densità superficiale di corrente $\vec{j}_0 e^{-i\omega t}$ nel piano $z = 0$ produce il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{2\pi}{c} \vec{j}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)}$ ed è facile vedere con una traslazione che il campo generato da una corrente superficiale nel piano $z = z_0$ sarebbe $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{2\pi}{c} \vec{j}_0 e^{-i(\omega t - k|z - z_0|)}$. Supponiamo quindi di avere sul piano $z = 0$ la densità di corrente superficiale $\vec{j}_0^{(a)}$ e sul piano $z = z_0$ la densità di corrente $\vec{j}_0^{(b)}$. Se su questo sistema incide un'onda piana il campo elettrico totale è quindi

$$\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - \frac{2\pi}{c} \vec{j}_0^{(a)} e^{-i(\omega t - k|z|)} - \frac{2\pi}{c} \vec{j}_0^{(b)} e^{-i(\omega t - k|z - z_0|)} . \quad (7.2.15)$$

Se vogliamo che per $z < 0$ sia presente solo il campo dell'onda incidente dobbiamo imporre

$$\vec{j}_0^{(a)} + e^{ikz_0} \vec{j}_0^{(b)} = 0 , \quad (7.2.16)$$

inoltre se vogliamo che per $z > z_0$ non sia presente nessun campo dobbiamo imporre

$$\vec{E}_0 - \frac{2\pi}{c} \vec{j}_0^{(a)} - \frac{2\pi}{c} e^{-ikz_0} \vec{j}_0^{(b)} = 0 , \quad (7.2.17)$$

da cui si ottiene

$$\vec{j}_0^{(a)} = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{1 - e^{-2ikz_0}} \vec{E}_0 , \quad \vec{j}_0^{(b)} = -\frac{c}{2\pi} \frac{e^{-ikz_0}}{1 - e^{-2ikz_0}} \vec{E}_0 . \quad (7.2.18)$$

La corrente $\vec{j}_0^{(b)}$ non dissipava energia in quanto in $z = z_0$ il campo elettrico si annulla, mentre la potenza media dissipata dalla corrente $\vec{j}_0^{(a)}$ è

$$\langle P_{diss} \rangle = \frac{1}{2} \langle \text{Re}(\vec{j}_0^{(a)} \cdot \vec{E}_0^*) \rangle = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_0|^2 \text{Re} \left(\frac{1}{1 - e^{-2ikz_0}} \right) = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 , \quad (7.2.19)$$

che bilancia il flusso entrante del vettore di Poynting. Se vogliamo che la relazione tra $\vec{j}_0^{(a)}$ e \vec{E}_0 sia reale dobbiamo scegliere $e^{-2ikz_0} = -1$, da cui si trova $z_0 = \frac{\lambda}{4}(1 + 2n)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Questo caso corrisponde ad una resistività superficiale $4\pi/c$, che in MKS diventa (usando le regole di conversione di Sez. (A.3))

$$\frac{4\pi}{c} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377\Omega . \quad (7.2.20)$$

7.3 **Diffrazione da una apertura

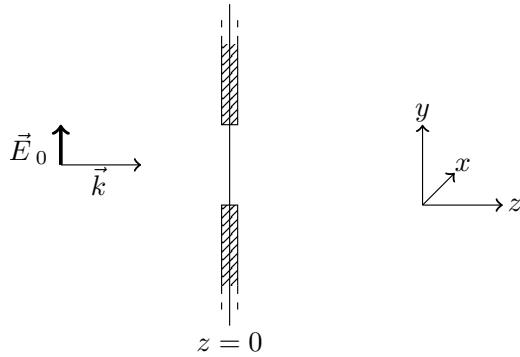


Figura 7.2: Le geometrie necessarie per studiare la diffrazione da una apertura.

Consideriamo uno schermo opaco (coincidente con il piano $z = 0$) con una apertura di forma generica, su cui incide perpendicolarmente l'onda piana $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$. Il campo elettrico complessivo sarà dato da $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{in} + \vec{E}_{gen}^{sch}$, dove \vec{E}_{gen}^{sch} è il campo generato dai dipoli oscillanti indotti sullo schermo.

Usando la densità superficiale di polarizzazione in Eq. (7.2.13) (in realtà questo non è rigorosamente vero: si stanno trascurando le correnti microscopiche presenti al bordo dell'apertura)

è quindi possibile ottenere \vec{E}_{gen}^{sch} per integrazione. Un modo più comodo di procedere è usare il principio di sovrapposizione lineare. Supponiamo di avere un pezzo di lamina avente esattamente la forma dell'apertura sullo schermo, ed indichiamo con \vec{E}_{gen}^{ap} il campo che questo pezzo di lamina genererebbe quando incide su di esso il campo \vec{E}_{in} . Il campo a destra della lamina si può allora scrivere come

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = (\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}^{sch}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t)) - \vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) \stackrel{z \geq 0}{=} -\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) \quad (7.3.1)$$

dove si è usato il fatto che $\vec{E}_{gen}^{sch}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t)$ è il campo generato dalla lamina completa (senza apertura), che scherma completamente il campo incidente essendo la lamina opaca. Il fatto che il campo generato da un ostacolo piano sia uguale (a meno di una fase globale) al campo generato da una lamina piana con un foro della stessa forma dell'ostacolo è noto come principio di Babinet. Per ottenere il campo per $z > 0$ basta dunque calcolare $\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t)$, che richiede di integrare la polarizzazione sullo spazio corrispondente alla apertura dello schermo. Tutto quindi funziona "come se" la apertura irraggiasse, a parte un segno meno di differenza (Huygens).

Esplicitamente, usando Eq. (7.2.13) e Eq. (3.2.11), si ottiene per il campo diffratto l'espressione (Σ' è la apertura e \vec{r}' la coordinata dei punti dell'apertura)

$$\vec{E}_{diff} = -\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) = -\frac{ik e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{\Sigma'} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \vec{E}_{0\perp} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Sigma' \quad (7.3.2)$$

dove $\hat{\vec{n}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ e

$$\vec{E}_{0\perp} = -\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{E}_0) = \vec{E}_0 - \hat{\vec{n}}(\hat{\vec{n}} \cdot \vec{E}_0). \quad (7.3.3)$$

Nel caso in cui la distanza di osservazione sia maggiore del raggio tipico dell'apertura (limite Fraunhofer², $r' \ll r$) l'espressione precedente può essere notevolmente semplificata usando

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}; \quad \hat{\vec{n}} \simeq \frac{\vec{r}}{r}, \quad (7.3.4)$$

ottenendo quindi (introducendo la notazione $\vec{k} = k\hat{\vec{n}}$)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{diff} = -\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) &= -\frac{ik e^{-i(\omega t - kr)}}{2\pi r} \vec{E}_{0\perp} \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d\Sigma' = \\ &= \frac{ik e^{-i(\omega t - kr)}}{2\pi r} \hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{E}_0) \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d\Sigma' \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Indichiamo con $F(\vec{k})$ l'integrale rimanente in Eq. (7.3.5), la cui forma specifica dipende ovviamente dai dettagli della forma dell'apertura. Nel caso di una apertura di dimensioni tipiche D molto maggiori della lunghezza d'onda, tuttavia, l'integrale sarà fortemente oscillante e tenderà ad annullarsi in tutti casi in cui k_x o k_y sono non nulli. Formalmente (vedi Sez. (A.5))

$$\begin{aligned} F(\vec{k}) &= \int_{\Sigma'} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \\ &= (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) = \frac{(2\pi)^2}{k^2} \delta(n_x) \delta(n_y) \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

e quindi nel limite $kD \rightarrow \infty$ si avrà solo diffrazione in avanti.

Calcoliamo ora il flusso di energia diffratta (vedi Eq. (3.2.14)) nel caso della diffrazione Fraunhofer Eq. (7.3.5). Si ha

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{ck^2}{32\pi^3 r^2} |\vec{E}_0|^2 \sin^2 \theta |F(\vec{k})|^2 \hat{\vec{n}}, \quad (7.3.7)$$

²Normalmente il limite di Fraunhofer è definito come il caso in cui sia la sorgente sia il punto di osservazione sono molto distanti dalla apertura. Dato che noi abbiamo considerato dal principio il caso di diffrazione generata da un'onda piana, la condizione sulla sorgente è automaticamente soddisfatta.

dove θ è l'angolo tra \vec{E}_0 (che si è sempre supposto giacere sul piano $z = 0$) e $\hat{\vec{n}}$. La potenza totale diffratta si ottiene integrando il flusso di $\langle \vec{S} \rangle$ su una emisfera posizionata sul lato $z > 0$ dello schermo:

$$P_{diff} = \frac{ck^2}{32\pi^3} |\vec{E}_0|^2 \int_{z>0} \sin^2 \theta |F(\vec{k})|^2 d\Omega \quad (7.3.8)$$

Nel caso di apertura grande rispetto a λ si può usare Eq. (7.3.6)³:

$$\int_{z>0} \sin^2 \theta |F(\vec{k})|^2 d\Omega \simeq \frac{(2\pi)^2}{k^2} \int_{z>0} \delta(n_x) \delta(n_y) F(\vec{k})^* \sin^2 \theta d\Omega = \frac{(2\pi)^2}{k^2} F(k \hat{\vec{z}})^* = \frac{(2\pi)^2 A}{k^2}, \quad (7.3.9)$$

dove A è l'area della apertura sullo schermo, ottenendo quindi per la potenza diffratta l'espressione

$$P_{diff} = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 A \quad (\text{caso } kD \gg 1). \quad (7.3.10)$$

D'altra parte la potenza incidente da $z = -\infty$ sull'area A ottenuta trascurando effetti diffrettivi si ottiene semplicemente usando $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ ed il risultato è $\frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 A$, come ci si sarebbe dovuti aspettare in vista del fatto che il limite $kD \rightarrow \infty$ corrisponde al limite dell'ottica geometrica.

7.4 **Diffrazione da un ostacolo

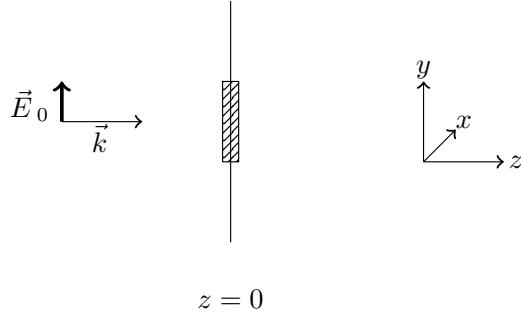


Figura 7.3: Le geometria necessaria per studiare la diffrazione da un ostacolo.

In questa sezione si considera il caso duale di quello analizzato nella sezione precedente, ovvero una onda elettromagnetica piana che incide ortogonalmente su un bersaglio piano opaco. Il campo totale sarà quindi dato dalla somma del campo incidente $\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ e del campo generato dalla polarizzazione del bersaglio, dunque (usando Eq. (7.3.2) con il segno modificato)

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + \frac{ik e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{\Sigma'} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \vec{E}_{0\perp} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Sigma'; \quad (7.4.1)$$

il secondo termine corrisponde alla luce diffratta e sarà nel seguito indicato con \vec{E}_s . Nel limite di Fraunhofer l'espressione precedente si semplifica in (vedi Eq. (7.3.5))

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - \frac{ik e^{-i(\omega t - kr)}}{2\pi r} \hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{E}_0) \int_{\Sigma'} e^{-ik|\vec{r}' - \vec{r}|} d\Sigma' \quad (7.4.2)$$

³In realtà usando semplicemente Eq. (7.3.6) si otterebbe una δ^2 che non è ben definita, nell'equazione seguente si utilizzerà il metodo più comunemente usato di regolarizzazione: in $|F|^2$ solo un F viene scritto come δ . Per un metodo diverso di procedere vedi Sez. (A.5).

e quindi, per grandi distanze dall'ostacolo, \vec{E}_s si può scrivere come il prodotto di una onda sferica uscente e di un temine che racchiude tutta la dinamica del processo diffattivo, la ampiezza di scattering $\vec{f}(\vec{k})$:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \vec{f}(\vec{k}); \quad \vec{f}(\vec{k}) = -\frac{ik}{2\pi} \hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{E}_0) \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} d\Sigma' \quad (7.4.3)$$

Analogamente al caso trattato nella sezione precedente, la potenza diffattiva si calcola come l'integrale del flusso del vettore di Poynting associato a \vec{E}_s , solo che in questo caso l'integrale deve essere esteso ad una superficie chiusa e non ad una emisfera. È conveniente usare come superficie di integrazione Σ una sfera, per fare in modo che la normale uscente alla superficie $\hat{\vec{n}}_\Sigma$ coincida con il versore $\hat{\vec{n}} = \vec{r}/r$ che compare nella espressione dei campi ed abbiamo dunque (vedi Eq. (3.2.13))

$$P_s = \frac{c}{16\pi} \int_{\Sigma} (\vec{E}_s \times \vec{B}_s^* + \vec{E}_s^* \times \vec{B}_s) \cdot \hat{\vec{n}}_\Sigma d\Sigma = \frac{c}{8\pi} \int_{\Sigma} |\vec{f}(\vec{k})|^2 d\Omega \quad (7.4.4)$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido. Oltre alla potenza diffattiva si può anche calcolare la potenza assorbita P_{abs} , data dal flusso entrante (quindi il segno meno nella seguente equazione, dato che $\hat{\vec{n}}_\Sigma$ è la normale uscente) del vettore di Poynting associato a \vec{E}_{tot} su una superficie che contiene l'ostacolo:

$$P_{abs} = -\frac{c}{16\pi} \int_{\Sigma} (\vec{E}_{tot} \times \vec{B}_{tot}^* + \vec{E}_{tot}^* \times \vec{B}_{tot}) \cdot \hat{\vec{n}}_\Sigma d\Sigma. \quad (7.4.5)$$

La potenza dissipata (nel senso di sottratta al fascio incidente) nel processo di scattering è dunque $P_{diss} = P_{abs} + P_s$ che, notando che il flusso su una superficie chiusa del vettore di Poynting di \vec{E}_{in} è nullo, può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} P_{diss} &= -\frac{c}{16\pi} \int_{\Sigma} (\vec{E}_{in} \times \vec{B}_s^* + \vec{E}_{in}^* \times \vec{B}_s + \vec{E}_s \times \vec{B}_{in}^* + \vec{E}_s^* \times \vec{B}_{in}) \cdot \hat{\vec{n}}_\Sigma d\Sigma = \\ &= -\frac{c}{8\pi} \text{Re} \int_{\Sigma} (\vec{E}_{in} \times \vec{B}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{B}_{in}^*) \cdot \hat{\vec{n}}_\Sigma d\Sigma \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Se si normalizzano le potenze P_s, P_{abs}, P_{diss} con il la densità di flusso di energia incidente (cioè $c|\vec{E}_0|^2/(8\pi)$), si ottengono la sezione d'urto di diffrazione (o scattering) σ_s , la sezione d'urto di assorbimento σ_{ass} e la sezione d'urto totale (o di estinzione) σ_{tot} .

Se consideriamo il caso in cui le dimensioni tipiche D dell'ostacolo sono molto maggiori della lunghezza d'onda incidente si ha

$$\int_{\Sigma} |\vec{f}(\vec{k})|^2 d\Omega = \frac{k^2}{(2\pi)^2} |\vec{E}_0|^2 \int_{\Sigma} \sin^2 \theta F(\vec{k}) \frac{(2\pi)^2}{k^2} \delta(n_x) \delta(n_y) d\Sigma = 2|\vec{E}_0|^2 F(k \hat{z}) = 2|\vec{E}_0|^2 A, \quad (7.4.7)$$

dove θ è l'angolo tra \vec{E}_0 e $\hat{\vec{n}}$, si è usata Eq. (7.3.6) e si è indicata con A è l'area dell'ostacolo. Il fattore 2 è dovuto al fatto che si sta integrando su tutto l'angolo solido e le $\delta(n_x)\delta(n_y)$ selezionano sia $k \hat{z}$ che $-k \hat{z}$, inoltre $F(k \hat{z}) = F(-k \hat{z}) = A$. Si è notato in precedenza che un ostacolo opaco corrisponde in elettromagnetismo classico ad un ostacolo perfettamente riflettente; il termine $-k \hat{z}$ corrisponde alla luce riflessa. Se l'ostacolo fosse “perfettamente assorbente”, invece di riflettente, si otterebbe il risultato $|\vec{E}_0|^2 A$. La potenza diffattiva è quindi per un ostacolo perfettamente riflettente data da

$$P_s = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_0|^2 A \quad (\text{caso } Dk \gg 1) \quad (7.4.8)$$

e dunque $\sigma_s = 2A$, mentre nel caso di ostacolo perfettamente assorbente si troverebbe $\sigma_s = A$.

Il calcolo di P_{diss} non risulta completamente elementare neppure nel limite di ottica geometrica $kD \rightarrow \infty$, in quanto negli integrandi sono presenti dei termini rapidamente oscillanti $e^{ik(z-r)}$. Per procedere sarebbe necessario utilizzare la approssimazione di fase stazionaria bidimensionale, vedi [28] §A.III, A.XII per un caso analogo. Per il calcolo di P_{abs} si può invece procedere come

segue: dato che oltre all'ostacolo non sono presenti altre sorgenti di radiazione elettromagnetica, in Eq. (7.4.5) si può scegliere come superficie Σ la superficie dell'ostacolo, inoltre si è visto in precedenza (vedi Eq. (7.2.14)) che il campo totale si annulla da entrambi i lati della lastra opaca, quindi si ottiene $P_{abs} = 0$, $\sigma_{abs} = 0$. Nel caso invece di ostacolo totalmente assorbente si otterebbe $P_{abs} = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 A$, quindi $\sigma_{abs} = A$. Di conseguenza la sezione d'urto di estinzione (che è quella necessaria per calcolare la perdita di energia del fascio incidente) è data, nel limite di ottica geometrica, da $\sigma_{tot} = 2A$ sia nel caso di ostacolo riflettente che di ostacolo assorbente.

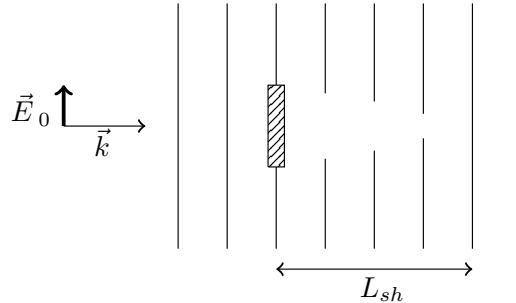


Figura 7.4: Andamento qualitativo dei fronti d'onda dietro l'ostacolo.

Può apparire strano che nel limite di ottica geometrica $Dk \rightarrow \infty$ la sezione d'urto totale risulti essere data dal doppio $2A$ dell'area dell'ostacolo e non dall'area A , come sarebbe a prima vista naturale attendesi. È quindi interessante analizzare in dettaglio la cosa.

Notiamo innanzitutto che il risultato $\sigma_{tot} = 2A$ è quello che è naturale attendersi usando il principio di Babinet: un ostacolo piano genera lo stesso campo diffratto di una lastra con un foro della stessa forma dell'ostacolo. Se si accetta il fatto che un foro in una lastra abbia nel limite di ottica geometrica sezione d'urto $\sigma_{tot} = A$, si deve allora anche accettare il fatto che un ostacolo piano, oltre a riflettere tutta la luce che gli incide sopra, generi un campo di diffrazione analogo a quello del foro; la sua sezione d'urto totale è quindi $\sigma_{tot} = A + A = 2A$.

Cerchiamo ora di capire dove la applicazione intuitiva dell'ottica geometrica fallisce nel calcolo della sezione d'urto totale. Il limite di ottica geometrica richiede $\lambda \ll D$ mentre il calcolo della sezione d'urto totale richiede di essere ad una distanza r dall'ostacolo molto maggiore di *tutte* le lunghezze caratteristiche, che a prima vista sembrerebbero essere solo D e λ , mentre in realtà esiste anche una altra scala di lunghezza.

L'andamento qualitativo dei fronti d'onda dietro un ostacolo è mostrato in Fig. (7.4): subito dietro l'ostacolo è presente una zona d'ombra, in cui il campo è molto piccolo, zona d'ombra che si stringe allontanandosi dall'ostacolo fino a scomparire ad una distanza L_{sh} da esso. Per ogni valore λ piccolo ma finito la funzione $F(\vec{k})$ non è esattamente una δ di Dirac e le componenti k_x, k_y dell'onda diffratta sono piccole ma non nulle, aventi valore tipico $\sim 1/D$ (vedi le espressioni esplicite in Sez. (A.5)). Di conseguenza la zona d'ombra dietro l'ostacolo può in prima approssimazione essere rappresentata come un cono di apertura angolare $\simeq (Dk)^{-1}$ e la lunghezza L_{sh} è quindi dell'ordine di $L_{sh} \simeq D^2/\lambda$. A questo punto si vede che il limite $\lambda/D \ll 1$ ed il limite $r \gg \lambda, D, L_{sh}$ confliggono, in quanto L_{sh} diverge quando λ diventa piccola.

Se si vuole calcolare la sezione d'urto totale vera e propria è allora necessario calcolare il flusso del vettore di Poynting per un dato valore di λ usando una distanza $r(\lambda) \gg D, L_{sh}$, quindi mandare $Dk \rightarrow 0$ cambiando di volta in volta $r(\lambda)$ e rimanendo sempre al di fuori della zona d'ombra (ovvero, in pratica, sempre fuori dalla regione di validità dell'ottica geometrica in senso stretto); in questo modo si ottiene il risultato dedotto in precedenza $\sigma_s = 2A$.

Poichè si ha tipicamente $D, \lambda \ll L_{sh}$, in alcuni casi può avere senso dal punto di vista sperimentale calcolare il flusso di energia attraverso una sfera di raggio $D, \lambda \ll L_{sh}$, nel qual caso il risultato dipende dalla risoluzione angolare dello strumento usato: se lo strumento è abbastanza preciso da risolvere angoli dell'ordine di λ/D (e quindi distinguere il campo diffratto dal campo incidente) si ottiene ancora $\sigma_{tot} = 2A$, altrimenti si trova il risultato "intuitivo" $\sigma_{tot} \simeq A$. Per una discussione teorica di queste problematiche vedi [29], per alcuni risultati sperimentali che mostrano il passaggio della sezione d'urto sperimentale da A a $2A$ allontanandosi dall'ostacolo vedi [30, 31].

Si è appena visto che nel limite $Dk \rightarrow \infty$ si ha $\sigma_{tot} = 2A$ e quindi $P_{diss} = \frac{cA}{4\pi} |\vec{E}_0|^2$; usando l'espressione esplicita della ampiezza di scattering in Eq. (7.4.3) ed il fatto che $F(\hat{k}) = A$ è allora semplice verificare che

$$P_{diss} = \frac{c}{2k} \text{Im} [\vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(k\hat{z})] \quad (7.4.9)$$

dove $\vec{f}(k \hat{\vec{z}})$ è la ampiezza di scattering in avanti, o, in termini della sezione d'urto totale

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \frac{\text{Im}[\vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(k \hat{\vec{z}})]}{|\vec{E}_0|^2}. \quad (7.4.10)$$

La relazione Eq. (7.4.9) è nota come teorema ottico ed è in realtà valida in contesti molto più generali ed indipendentemente dal limite $Dk \rightarrow \infty$.

7.5 **Il teorema ottico

Un metodo molto istruttivo per dimostrare il teorema ottico nella forma Eq. (7.4.9) è quello presentato in [32] §4.2. Consideriamo una superficie di osservazione \mathcal{A} avente dimensione tipica d molto più grande della lunghezza d'onda, in modo da essere nel limite di ottica geometrica ($d \gg \lambda$). Se calcoliamo la potenza incidente su \mathcal{A} quando è posta a grande distanza dietro l'ostacolo nella direzione del fascio ($\hat{\vec{z}}$) ed ortogonale ad esso, il risultato che si dovrà ottenere è

$$P_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 - P_{diss}, \quad (7.5.1)$$

in quanto P_{diss} è la potenza che è stata sottratta dal fascio di densità di potenza $\frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2$. Passiamo ora al calcolo esplicito: poichè si può supporre che le dimensioni tipiche d della superficie di osservazione siano molto più piccole della sua distanza dall'ostacolo ($d \ll z$), si ha su di esso

$$r = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} \simeq z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (\text{su } \mathcal{A}) \quad (7.5.2)$$

inoltre, sempre perché $d \ll z$, consideriamo $\vec{f}(\vec{k}) \simeq \vec{f}(k \hat{\vec{z}})$, quindi l'espressione del campo incidente su \mathcal{A} può essere semplificata in

$$\vec{E}_{tot} \simeq \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + \vec{f}(k \hat{\vec{z}}) e^{-i(\omega t - kz)} \frac{e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}}}{z} \quad (\text{su } \mathcal{A}) \quad (7.5.3)$$

da cui si ottiene

$$|\vec{E}_{tot}|^2 \simeq |\vec{E}_0|^2 + \frac{2}{z} \text{Re} \left(\vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(k \hat{\vec{z}}) e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}} \right). \quad (7.5.4)$$

Supponiamo la superficie di osservazione abbastanza grande da fare in modo che sul suo bordo si abbia $k(x^2 + y^2)/z \gg 1$, cioè $kd^2/z \gg 1$. Supponiamo quindi che

$$\sqrt{z\lambda} \ll d \ll z. \quad (7.5.5)$$

Allora quando si integra la funzione fortemente oscillante a secondo membro della formula per $|\vec{E}_{tot}|^2$ si può approssimare la regione di integrazione con tutto il piano \mathbb{R}^2 . Usando⁴

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ikx^2}{2z}} dx = \sqrt{\frac{2\pi iz}{k}} \quad (7.5.6)$$

si ottiene allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} |\vec{E}_{tot}|^2 &= \mathcal{A} |\vec{E}_0|^2 + \frac{2}{z} \text{Re} \left(\vec{E}_0^* \vec{f}(k \hat{\vec{z}}) \frac{2\pi iz}{k} \right) = \\ &= \mathcal{A} |\vec{E}_0|^2 - \frac{4\pi}{k} \text{Im} [\vec{E}_0^* \vec{f}(k \hat{\vec{z}})] \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

e dal confronto con Eq. (7.5.1) si ottiene subito il teorema ottico.

⁴Questa relazione può essere intuitivamente giustificata usando $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ con $a = -\frac{ik}{2z}$, per una discussione più precisa, in particolare per la determinazione del ramo della radice da usare, vedi Sez. (A.6).

Notiamo esplicitamente che in nessun punto della dimostrazione del teorema ottico si è usata la forma esplicita della ampiezza di scattering. Gli unici ingredienti essenziali sono stati: il fatto di poter scrivere il campo totale nella forma

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + \vec{f}(\vec{k}) \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \quad (7.5.8)$$

ed il fatto che $\vec{f}(\vec{k})$ non fosse singolare per $\vec{k} \simeq k\hat{z}$ (che ad esempio non è vero per lo scattering Coulombiano). L'altra ipotesi fondamentale che sta alla base della deduzione è per certi versi ovvia ed è stata assunta implicitamente scrivendo Eq. (7.5.1), ma è importante esplicitarla: si è ipotizzato che se energia è stata sottratta al fascio allora questa energia deve essere stata o diffusa o assorbita. Si è in sostanza assunto che il fascio non possa scomparire spontaneamente, ma solo essere “deviato” dall’interazione con l’ostacolo. Si capisce quindi che la dimostrazione resta valida anche nel caso più generale trattato nella prossima sezione (ovvero ostacoli non piani), in meccanica quantistica (in cui il ruolo del campo elettrico è svolto dalla funzione d’onda, la ampiezza di scattering è uno scalare e l’equivalente della conservazione dell’energia è l’unitarietà dell’evoluzione) ed in generale per ogni fenomeno ondulatorio.

7.6 **Diffrazione da un insieme discreto di punti e fattore di forma

Considereremo in questa sezione il caso in cui un’onda piana incide su un insieme discreto di centri diffusori, che in generale non saranno tutti distribuiti su uno stesso fronte d’onda, come era invece il caso nelle sezioni precedenti.

Supporremo questi centri diffusori posizionati nei punti \vec{r}_i , con $i \in 1, \dots, N$, inoltre considereremo solo il caso in cui questi diffusori non abbiano direzioni privilegiate, in modo da poter usare la relazione più semplice possibile tra la polarizzazione del diffusore ed il campo elettrico: $\vec{p}_i(t) = \chi \vec{E}(\vec{r}_i, t)$. Considereremo inoltre solo il caso in cui il campo totale generato dai diffusori sia molto più piccolo del campo incidente \vec{E}_{in} , in modo da poter usare $\vec{p}_i(t) = \chi \vec{E}_{in}(\vec{r}_i, t)$ (approssimazione di Born, vedi Sez. (7.7) per un caso che va oltre questa approssimazione). Supponiamo che il campo incidente sia una onda piana con vettore d’onda \vec{k} , quindi

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (7.6.1)$$

di conseguenza i valori del parametro \vec{p}_0 che entra nella forma dei campi di dipolo elettrico Eq. (3.2.11) saranno dati, per i vari centri diffusori, da

$$\vec{p}_0^{(i)} = \chi \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \quad (7.6.2)$$

ed il campo elettrico generato di scrive come

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = -\chi k^2 \sum_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \hat{\vec{n}}_i \times (\hat{\vec{n}}_i \times \vec{E}_0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} e^{-i\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}_i|/c)}, \quad (7.6.3)$$

dove $\hat{\vec{n}}_i = (\vec{r} - \vec{r}_i)/|\vec{r} - \vec{r}_i|$. Se supponiamo ora che per ogni i si abbia $r_i \ll r$ si può procedere come nel caso del limite di Fraunhofer della diffrazione, ovvero utilizzare le semplificazioni

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \simeq \frac{1}{r}, \quad \hat{\vec{n}}_i \simeq \hat{\vec{n}} \equiv \frac{\vec{r}}{r}, \quad e^{i\omega|\vec{r} - \vec{r}_i|/c} \simeq e^{i\omega r/c} \exp\left(-i\frac{\omega}{c} \hat{\vec{n}} \cdot \vec{r}_i\right). \quad (7.6.4)$$

Se inoltre introduciamo la notazione $\vec{k}' = k\hat{\vec{n}}$ per il vettore d’onda dell’onda diffusa e $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ per la variazione di vettore d’onda, allora il campo generato si può scrivere nella forma

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = -\chi \frac{k^2 e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{E}_0) \sum_i e^{-i\vec{r}_i \cdot \vec{q}}. \quad (7.6.5)$$

Si vede dunque che la differenza tra il caso di un singolo o di molti centri diffusori è la presenza del fattore di forma

$$F(\vec{q}) = \sum_i e^{-i\vec{r}_i \cdot \vec{q}}, \quad (7.6.6)$$

una forma semplificata del quale era già comparsa in precedenza (vedi Eq. (7.3.5) e Eq. (7.4.3)). Nel caso usato in precedenza tutti i punti (ad esempio) della lastra opaca erano disposti su un piano perpendicolare a quello del vettore d'onda del campo incidente, quindi l'espressione del fattore di forma era più semplice e compariva solo il vettore d'onda dell'onda uscente. Nel caso in cui invece di una distribuzione discreta di punti si abbia una distribuzione continua, $F(\vec{q})$ non è altro che la trasformata di Fourier della distribuzione (a meno di un fattore $(2\pi)^3$). A grande distanza il vettore di Poynting associato al campo generato è quindi dato da (vedi Eq. (3.2.14))

$$\langle \vec{S}_{gen} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_{gen}^{(0)}|^2 \hat{\vec{n}} = \frac{\chi^2 k^4}{r^2} |\hat{\vec{n}} \times \vec{E}_0|^2 |F(\vec{q})|^2 \hat{\vec{n}} = |F(\vec{q})|^2 \langle \vec{S}_{ss} \rangle \quad (7.6.7)$$

dove \vec{S}_{ss} è il vettore di Poynting che corrisponde ad un singolo centro diffusore posto nell'origine; anche in questo caso tutta l'informazione sulla distribuzione dei centri diffusori è contenuta nel fattore di forma.

Considereremo ora in dettaglio due casi estremi: il caso di un gas e quello di un cristallo. Questi due casi sono estremi nel seguente senso: sui tempi scala di una osservazione tipica le particelle di un gas hanno posizioni casuali, quindi è ragionevole attendersi che ci saranno grossi effetti di interferenza distruttiva (scattering incoerente). Un cristallo rappresenta invece il caso opposto: i centri diffusori sono disposti in modo molto regolare ed è quindi naturale aspettarsi, almeno in alcune condizioni, degli effetti di risonanza (scattering coerente).

7.6.1 Caso di un gas

Consideriamo il caso di un gas perfetto (quindi le posizioni delle varie particelle sono statisticamente indipendenti) confinato in un recipiente di spigoli L_x , L_y e L_z (con $V = L_x L_y L_z$). Se indichiamo con $p(\vec{r}_i)$ la probabilità che una particella si trovi nel punto \vec{r}_i , è necessario studiare

$$\langle |F(\vec{q})|^2 \rangle \equiv \int |F(\vec{q})|^2 p(\vec{r}_1) \cdots p(\vec{r}_N) d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N. \quad (7.6.8)$$

Esplicitamente il modulo quadro del fattore di forma è dato da

$$|F(\vec{q})|^2 = \left(\sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \right) \left(\sum_i e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \right) = N + \sum_{i \neq j} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \quad (7.6.9)$$

e quindi si deve calcolare

$$\langle e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \rangle = \frac{1}{V^2} \int_V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} d\vec{r}_i \int_V e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} d\vec{r}_j \quad (7.6.10)$$

Scrivendo gli integrali in coordinate cartesiane, con estremi di integrazione da $-L_i/2$ a $L_i/2$ si ottengono delle espressioni del tipo di

$$\frac{1}{L_x} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{iq_x x} dx = \frac{e^{iq_x L_x/2} - e^{-iq_x L_x/2}}{i L_x q_x} = \frac{\sin(q_x L_x/2)}{q_x L_x/2} \quad (7.6.11)$$

quindi

$$\langle e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \rangle = \prod_{m=x,y,z} \left(\frac{\sin(q_m L_m/2)}{q_m L_m/2} \right)^2 \quad (7.6.12)$$

ed infine

$$|F(\vec{q})|^2 = N + N(N-1) \prod_{m=x,y,z} \left(\frac{\sin(q_m L_m / 2)}{q_m L_m / 2} \right)^2. \quad (7.6.13)$$

A questo punto si possono considerare diversi casi. Supponiamo che per dato valore di \vec{q} si abbia $q_m L_m \gg 1$; questo significa che il volume tipico associato a \vec{q} è molto più piccolo del volume totale disponibile. Di conseguenza i segnali provenienti da tutti i centri diffusori saranno incoerenti e ci si aspetta interferenza distruttiva tra di loro. In questo caso si ha infatti $|F(\vec{q})|^2 \simeq N$ e da Eq. (7.6.7) si vede che l'energia irraggiata sarà N volte quella che sarebbe irraggiata nel caso di un singolo centro diffusore: nel caso non ci sia coerenza di fase il flusso di energia ottenuto sommando le ampiezze è semplicemente la somma dei singoli flussi di energia.

Si può anche considerare il limite opposto, ovvero $q_m L_m \ll 1$: questo significa che il volume disponibile è molto più piccolo del volume tipico associato a \vec{q} , di conseguenza tutti i diffusori reagiranno approssimativamente allo stesso segnale e saranno in fase. Questo si manifesta nel fatto che $|F(\vec{q})|^2 \simeq N^2$, che è l'andamento tipico per la diffusione coerente. È interessante notare che, indipendentemente dai valori di L_x , L_y ed L_z , esiste sempre un caso in cui si ha diffusione coerente, ovvero $\vec{q} \simeq 0$, corrispondente al caso della diffusione in avanti.

7.6.2 Caso di un cristallo

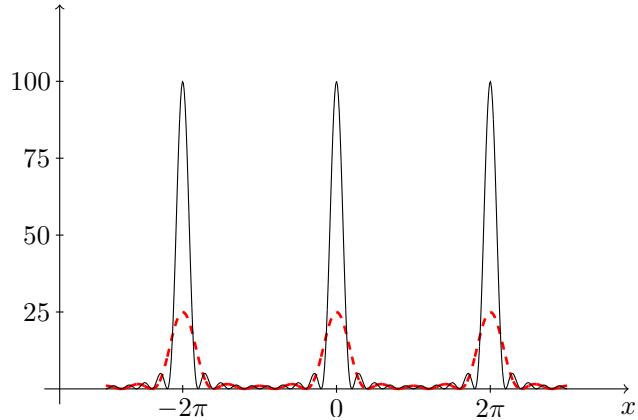


Figura 7.5: Grafico della funzione $\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$ per $N = 5$ (linea rossa tratteggiata) e 10 (linea continua nera).

Passiamo ora ad analizzare il caso di un cristallo: se indichiamo con \vec{a}_i i vettori che caratterizzano la cella fondamentale del reticolo, le posizioni dei centri diffusori saranno date da

$$\vec{r}_{\vec{m}} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 \quad (7.6.14)$$

con $m_i \in \{1, \dots, N_i\}$. Di conseguenza il modulo quadro del fattore di forma si scrive

$$\begin{aligned} |F(\vec{q})|^2 &= \sum_{\vec{n}, \vec{\ell}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_{\vec{n}} - \vec{r}_{\vec{\ell}})} = \\ &= \left(\sum_{n_1} e^{in_1 \vec{q} \cdot \vec{a}_1} \right) \left(\sum_{n_2} e^{in_2 \vec{q} \cdot \vec{a}_2} \right) \left(\sum_{n_3} e^{in_3 \vec{q} \cdot \vec{a}_3} \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{\ell_1} e^{-i\ell_1 \vec{q} \cdot \vec{a}_1} \right) \left(\sum_{\ell_2} e^{-i\ell_2 \vec{q} \cdot \vec{a}_2} \right) \left(\sum_{\ell_3} e^{-i\ell_3 \vec{q} \cdot \vec{a}_3} \right). \end{aligned} \quad (7.6.15)$$

Tutte queste sommatorie sono del tipo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{in\alpha} &= \frac{e^{i\alpha} - e^{i(N+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\alpha} e^{i\frac{N}{2}\alpha}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}} \left(\frac{e^{-i\frac{N}{2}\alpha} - e^{i\frac{N}{2}\alpha}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}} \right) = \\ &= e^{i(N+1)\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} \end{aligned} \quad (7.6.16)$$

e si ottiene quindi (con $\alpha_j = \vec{q} \cdot \vec{a}_j$)

$$|F(\vec{q})|^2 = \prod_{j=x,y,z} \left(\frac{\sin(N_j \alpha_j / 2)}{\sin(\alpha_j / 2)} \right)^2. \quad (7.6.17)$$

Per capire l'andamento di $F(\vec{q})$ è necessario studiare l'andamento dei fattori che sono moltiplicati in Eq. (7.6.17). Il grafico della funzione

$$g(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 \quad (7.6.18)$$

è riportato in Fig. (7.5) e la sua caratteristica principale sono i picchi $\simeq N^2$ in corrispondenza dei multipli interi di 2π . Questo andamento è facilmente spiegabile, in quanto se $x = 2\pi m + \delta$ con $|\delta| \ll 1/N$ si ha

$$\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 = \left(\frac{\sin(Nm\pi + N\delta/2)}{\sin(m\pi + \delta/2)} \right)^2 \simeq \left(\frac{N\delta/2}{\delta/2} \right)^2 = N^2. \quad (7.6.19)$$

Quando $\delta \simeq (2j+1)\pi/N$ (con $j \ll N$) il numeratore ha un massimo, ma il denominatore è ancora molto piccolo, quindi si ha

$$\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 = \left(\frac{\sin[(2j+1)\pi/2]}{\sin[(2j+1)\pi/(2N)]} \right)^2 \simeq \left(\frac{1}{(2j+1)\pi/(2N)} \right)^2 = \frac{4N^2}{(2j+1)^2\pi^2} \quad (7.6.20)$$

e questi valori corrispondono ai picchi secondari che si vedono in Fig. (7.5). Bisogna tuttavia notare che già per $j = 1$ la ampiezza della funzione si è ridotta a circa 0.045 volte la ampiezza al picco. Riassumendo: la funzione $g(x)$ ha dei picchi in corrispondenza dei multipli interi di 2π , inoltre questi picchi hanno valore al massimo $\simeq N^2$ e larghezza $\simeq \pi/N$.

Usando queste informazioni nel fattore di forma del cristallo Eq. (7.6.17), si vede che la luce difrattata sarà concentrata nelle direzioni caratterizzate dalle condizioni

$$\vec{q} \cdot \vec{a}_j = 2\pi n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}. \quad (7.6.21)$$

Queste sono note come condizioni di von Laue e sono alla base dell'introduzione del reticolo reciproco in fisica dello stato solido (vedi ad es. [33] §5, 6). Se consideriamo ora per semplicità il caso di un reticolo ortorombico, in cui i vettori di base della cella fondamentale sono ortogonalni, sviluppando \vec{q} sulla base di $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ si vede subito che la condizione di von Laue si può riscrivere più esplicitamente come

$$\vec{k}' - \vec{k} = 2\pi \left(n_1 \frac{\vec{a}_1}{a_1^2} + n_2 \frac{\vec{a}_2}{a_2^2} + n_3 \frac{\vec{a}_3}{a_3^2} \right). \quad (7.6.22)$$

Se consideriamo ora il quadrato di questa equazione si ottiene (indicando con θ l'angolo di deflessione della luce, $\vec{k} \cdot \vec{k}' = k^2 \cos \theta$)

$$2k^2(1 - \cos \theta) = 4\pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right) \quad (7.6.23)$$

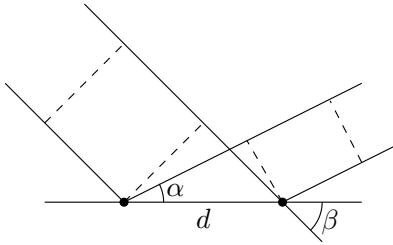


Figura 7.6: Schema elementare per lo scattering coerente.

ed usando $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ e $k = 2\pi/\lambda$ si trova la relazione di Bragg che lega l'angolo di deflessione alla lunghezza d'onda

$$2 \sin(\theta/2) = \lambda \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}} \quad (7.6.24)$$

Un modo elementare di chiarire la relazione di von Laue è studiare il caso dello scattering di un'onda piana da parte di due centri diffusori posti a distanza d uno dall'altro, vedi Fig. (7.6). Stiamo considerando il limite di Fraunhofer, quindi i vettori d'onda uscenti sono disegnati paralleli in figura. Trascurando i dettagli della polarizzazione, ci si può aspettare che si abbia interferenza costruttiva tra le due onde diffuse nel caso in cui la differenza di cammino ottico sia un multiplo intero di λ . Esplicitamente la differenza tra i cammini ottici è data da

$$\Delta = d(\cos \alpha - \cos \beta) \quad (7.6.25)$$

quindi la condizione di interferenza costruttiva è

$$m\lambda = d(\cos \alpha - \cos \beta), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (7.6.26)$$

Se continuiamo ad usare la notazione $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ per la differenza tra il vettore d'onda diffuso e quello incidente ed introduciamo il vettore \vec{d} che caratterizza la separazione tra i due centri diffusori, si ha allora

$$\vec{q} \cdot \vec{d} = kd(\cos \alpha - \cos \beta) = \frac{2\pi d}{\lambda}(\cos \alpha - \cos \beta) \quad (7.6.27)$$

e la condizione Eq. (7.6.26) diventa $\vec{q} \cdot \vec{d} = 2\pi m$, ovvero il caso unidimensionale della condizione di von Laue Eq. (7.6.21).

7.7 **Oltre la approssimazione di Born: la rifrazione

Considereremo nuovamente il caso della diffusione su un insieme discreto di punti. Nella sezione precedente è stata usata fin da principio la approssimazione di Born, in cui si approssima la polarizzazione del diffusore in posizione \vec{r}_i con

$$\vec{p}_i(t) = \chi \vec{E}(\vec{r}_i, t) \simeq \chi \vec{E}_{in}(\vec{r}_i, t), \quad (7.7.1)$$

dove \vec{E}_{in} è il campo incidente ed \vec{E} è il campo totale (cioè la somma del campo incidente e del campo irraggiato dai diffusori), quindi il campo generato può essere direttamente scritto nella forma Eq. (7.6.3).

Nel caso generale non si riesce a scrivere direttamente l'espressione per il campo generato dai diffusori in funzione di \vec{E}_{in} , ma solo una equazione integrale per il campo totale. Usando

Eq. (3.2.9), indicando con $\vec{p}(\vec{r}_i, t)$ la polarizzazione in posizione \vec{r}_i e con $\hat{\vec{n}}_i$ il versore della direzione $\vec{r} - \vec{r}_i$, il campo generato dai diffusori si scrive infatti nella forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) &= \sum_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2 c^2} \hat{\vec{n}}_i \times [\hat{\vec{n}}_i \times \ddot{\vec{p}}(\vec{r}_i, t - |\vec{r}_i - \vec{r}|/c)] = \\ &= \sum_i \frac{\chi}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2 c^2} \hat{\vec{n}}_i \times [\hat{\vec{n}}_i \times \ddot{\vec{E}}(\vec{r}_i, t - |\vec{r}_i - \vec{r}|/c)] .\end{aligned}\quad (7.7.2)$$

D'altra parte il campo totale \vec{E} è la somma del campo incidente e del campo generato quindi si ha la seguente equazione di consistenza per il campo totale

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{in}(\vec{r}, t) + \sum_i \frac{\chi}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2 c^2} \hat{\vec{n}}_i \times [\hat{\vec{n}}_i \times \ddot{\vec{E}}(\vec{r}_i, t - |\vec{r}_i - \vec{r}|/c)] , \quad (7.7.3)$$

che è l'analogo in questo contesto dell'equazione di Lippmann-Schwinger per lo scattering in meccanica quantistica (vedi ad esempio [26] §130 o [34] §7.1).

In generale l'equazione Eq. (7.7.3) non può essere risolta esattamente, tuttavia analizzeremo ora un caso in cui ciò è possibile, ovvero il caso in cui un'onda piana incide su un dielettrico⁵. Utilizzando la formulazione dell'elettromagnetismo per i corpi macroscopici la soluzione di questo problema è ben nota: al di fuori del dielettrico il campo elettrico ha due componenti, l'onda incidente e l'onda riflessa, aventi uguale frequenza ma versi di propagazione differenti, all'interno del dielettrico è presente l'onda rifratta, che ha la stessa frequenza dell'onda incidente ma diversa lunghezza d'onda; le ampiezze di tutte queste componenti sono infine legate dalle formule di Fresnel (vedi ad es. [24] §3, [6] §86). Vedremo che a queste stesse conclusioni si arriva risolvendo l'equazione Eq. (7.7.3), inoltre il fatto che la somma dei campi generati dai dipoli oscillanti all'interno di un mezzo cancelli esattamente il campo incidente e generi il campo rifratto è un risultato spesso noto come teorema di estinzione di Ewald-Oseen.

Supporremo per semplicità che l'incidenza sia normale (per il caso generale vedi [28] §2.4, dove viene però seguito un procedimento leggermente diverso rispetto a quello qui adottato), sceglieremo convenzionalmente l'asse \hat{z} come verso di propagazione dell'onda incidente e supporremo che il dielettrico sia presente per $z \geq 0$. Per cominciare, calcoliamo il campo generato dal dielettrico nell'ipotesi che all'interno di esso la densità di polarizzazione abbia la forma $\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$; inoltre, vista la simmetria del problema, appare naturale supporre che la polarizzazione dipenda solo dalla variabile z , quindi $\vec{P}_0(\vec{r})$ è in realtà $\vec{P}_0(z)$. Si era visto in precedenza (vedi Eq. (7.2.9)) che il campo generato da una lastra piana di polarizzazione in posizione $z = z'$ e con polarizzazione diretta lungo il piano è dato da

$$\vec{E}_{gen}^{(z')}(\vec{r}, t) = 2\pi ik\vec{P}_0(z')e^{-i(\omega t - k|z - z'|)} , \quad (7.7.4)$$

(in realtà questo risultato era stato visto solo per il caso $z' = 0$, ma la generalizzazione della dimostrazione è immediata), quindi il campo generato dalla distribuzione $\vec{P}_0(z')e^{-i\omega t}$ si scrive come

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = 2\pi ik \int_0^\infty \vec{P}_0(z')e^{-i(\omega t - k|z - z'|)} dz' = 2\pi ik e^{-i\omega t} \int_0^\infty \vec{P}_0(z')e^{ik|z - z'|} dz' . \quad (7.7.5)$$

Consideriamo ora il caso particolare in cui la densità di polarizzazione abbia la distribuzione $\vec{P}_0(z') = \vec{P}_0 e^{i\tilde{k}z'}$, dove \vec{P}_0 è un vettore costante e \tilde{k} un parametro da determinarsi più avanti. Per calcolare il campo \vec{E}_{gen} è a questo punto conveniente distinguere i due casi $z > 0$ e $z < 0$. Per $z < 0$ si ha

$$\vec{E}_{gen}(z < 0) = 2\pi ik e^{-i\omega t} \int_0^\infty \vec{P}_0 e^{i\tilde{k}} e^{-ik(z - z')} dz' , \quad (7.7.6)$$

⁵In realtà non risolveremo direttamente l'equazione integrale, piuttosto introdurremo un ansatz per la forma della polarizzazione e ripercorreremo i passi che sono stati fatti per dedurre l'equazione integrale, ottenendo delle relazioni di consistenza ad essa equivalenti che fisseranno la forma dei campi.

inoltre

$$\int_0^L e^{i(k+\tilde{k})z'} e^{-ikz} dz' = e^{-ikz} \frac{e^{i(k+\tilde{k})L} - 1}{i(k + \tilde{k})} \simeq \frac{i}{k + \tilde{k}} e^{-ikz}, \quad (7.7.7)$$

dove nell'ultimo passaggio si è trascurato, nel limite $L \rightarrow \infty$, il termine fortemente oscillante $e^{i(k+\tilde{k})L}$, analogamente a quanto fatto in Sez. (7.2). Si ha quindi

$$\vec{E}_{gen}(z < 0) = -2\pi \frac{k}{k + \tilde{k}} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t + kz)}. \quad (7.7.8)$$

Analogamente per $z > 0$ è necessario considerare l'integrale (in cui di nuovo si trascurano termini fortemente oscillanti)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\tilde{k}z'} e^{ik|z-z'|} dz' &= \int_0^z e^{ikz} e^{i(\tilde{k}-k)z'} dz' + \int_z^\infty e^{-ikz} e^{i(k+\tilde{k})z'} dz' \simeq \\ &\simeq e^{ikz} \frac{e^{i(\tilde{k}-k)z} - 1}{i(\tilde{k}-k)} - e^{-ikz} \frac{e^{i(k+\tilde{k})z}}{i(k+\tilde{k})} = \frac{e^{i\tilde{k}z} - e^{ikz}}{i(\tilde{k}-k)} - \frac{e^{ikz}}{i(k+\tilde{k})} = \\ &= \frac{i}{\tilde{k}-k} e^{ikz} - 2i \frac{k}{\tilde{k}^2 - k^2} e^{i\tilde{k}z}, \end{aligned} \quad (7.7.9)$$

quindi il campo generato per $z > 0$ vale

$$\vec{E}_{gen}(z > 0) = -2\pi \frac{k}{\tilde{k}-k} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + 4\pi \frac{k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}z)}. \quad (7.7.10)$$

Sommendo ai due contributi in Eq. (7.7.6) e Eq. (7.7.10) il campo incidente otteniamo quindi il campo totale nella forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - 2\pi \frac{k}{k+\tilde{k}} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t + kz)} & \text{per } z < 0 \\ \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - 2\pi \frac{k}{\tilde{k}-k} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + 4\pi \frac{k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}z)} & \text{per } z > 0 \end{cases}. \quad (7.7.11)$$

Per arrivare a queste espressioni si è usato il fatto che la densità di polarizzazione avesse per $z > 0$ un andamento della forma $\vec{P}(\vec{r}, t) \propto e^{i\tilde{k}z}$, tuttavia dalla definizione di suscettività dielettrica si ha $\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$, quindi per consistenza si deve imporre che per $z > 0$ si abbia $\vec{E}(\vec{r}, t) \propto e^{i\tilde{k}z}$. Di conseguenza i termini proporzionali a e^{ikz} in Eq. (7.7.11) devono cancellarsi per $z > 0$, quindi

$$\vec{E}_0 = 2\pi \frac{k}{\tilde{k}-k} \vec{P}_0 \quad (7.7.12)$$

e

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}z)} = \frac{4\pi k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \chi \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{per } z > 0. \quad (7.7.13)$$

Da questa equazione si ottiene $4\pi k^2 \chi = \tilde{k}^2 - k^2$ e dunque

$$\tilde{k} = k \sqrt{1 + 4\pi \chi} \equiv kn, \quad (7.7.14)$$

in cui il segno della radice è stato fissato per continuità con il caso $\chi = 0$ (caso in cui non c'è dielettrico, non c'è campo generato e quindi $\tilde{k} = k$) e si è usata la definizione $n = \sqrt{1 + 4\pi \chi}$ dell'indice di rifrazione. Le due equazioni Eq. (7.7.12) e Eq. (7.7.14) sono le relazioni tra i parametri dell'onda incidente (\vec{E}_0 e k) ed i parametri \vec{P}_0 e \tilde{k} che erano stati usati nell'ansatz adoperato per la densità di polarizzazione del dielettrico; inserendo questi valori in Eq. (7.7.11) si ottiene quindi infine

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - \frac{n-1}{n+1} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t + kz)} & \text{per } z < 0 \\ \frac{2}{n+1} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - nkz)} & \text{per } z > 0 \end{cases}, \quad (7.7.15)$$

compatibilmente con le formule di Fresnel nel caso di incidenza normale.

Parte III

Indagine della materia con particelle

Capitolo 8

**Richiami di cinematica relativistica

8.1 **Decadimento $1 \rightarrow 2 + 3$

Analizzeremo in questa sezione la cinematica del decadimento in due corpi, in cui una particella di massa M decade in due particelle di massa m_1 e m_2 . Se indichiamo con P il quadriimpulso della particella M , allora si ha

$$P = p_1 + p_2 \quad (8.1.1)$$

dove p_1 e p_2 sono i quadriimpulsi di m_1 e m_2 rispettivamente.

Consideriamo dapprima il decadimento come visto nel sistema di riferimento del centro di massa: riscrivendo l'equazione di conservazione del quadriimpulso nella forma $P - p_1 = p_2$ e considerandone il quadrato, si trova

$$M^2 + m_1^2 - 2Pp_1 = m_2^2 \quad (8.1.2)$$

poichè nel sistema del centro di massa si ha $P = (M, \vec{0})$, si ottiene $Pp_1 = ME_1^c$, da cui la prima delle due equazioni seguenti:

$$E_1^c = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} , \quad E_2^c = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} . \quad (8.1.3)$$

Considerando il quadrato di $P - p_2 = p_1$ si ottiene la seconda.

Consideriamo ora il decadimento come visto da un sistema di riferimento in cui la particella che decade ha una velocità \vec{V} (che chiameremo sistema del laboratorio). Si è appena visto che $Pp_1 = ME_1^c$, dove l'apice c indica che la quantità è considerata nel sistema di riferimento del centro di massa e E_1^c è data dalla prima delle equazioni Eq. (8.1.3). Nel sistema di riferimento del laboratorio si ha

$$P = M\gamma(1, \vec{V}) , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (8.1.4)$$

quindi si ottiene

$$E_1^c = \frac{E_1 - \vec{p}_1 \cdot \vec{V}}{\sqrt{1 - V^2}} , \quad (8.1.5)$$

cui si sarebbe potuti arrivare anche con una trasformazione di Lorentz. Utilizzando questa espressione si può studiare la relazione che intercorre tra l'energia di m_1 e l'angolo da essa formato con la velocità \vec{V} . Per fare ciò si può riscrivere l'equazione precedente (usando $|\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$ e $\vec{p}_1 \cdot \vec{V} = |\vec{p}_1|V \cos \theta_1$) nella forma

$$\cos \theta_1 = \frac{E_1 - E_1^c \sqrt{1 - V^2}}{V \sqrt{E_1^2 - m_1^2}} \quad (8.1.6)$$

da cui, prendendo il quadrato, si ottiene un'equazione di secondo grado in E_1 :

$$E_1^2(1 - V^2 \cos^2 \theta_1) - 2E_1 E_1^c \sqrt{1 - V^2} + (E_1^c)^2(1 - V^2) + m_1^2 V^2 \cos^2 \theta_1 = 0 . \quad (8.1.7)$$

Questa equazione lega l'energia E_1 della particella di massa m_1 al suo angolo di uscita θ_1 , entrambi misurati nel sistema del laboratorio. Il discriminante di questa equazione è

$$\begin{aligned} \Delta &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[(E_1^c)^2(1 - V^2) - m_1^2(1 - V^2 \cos^2 \theta_1) \right] = \\ &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[(E_1^c)^2(1 - V^2) - m_1^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2(1 - \cos^2 \theta_1) \right] = \\ &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[|\vec{p}_1^c|^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2 \sin^2 \theta_1 \right] \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

dove \vec{p}_1^c è l'impulso della particella di massa m_1 nel sistema del centro di massa. L'equazione Eq. (8.1.7) è della forma $aE_1^2 - bE_1 + c = 0$ con $a, b, c > 0$, quindi per ogni valore di $\cos^2 \theta_1$ per il quale $\Delta > 0$ si hanno due valori corrispondenti dell'energia. Affinché si abbia $\Delta \geq 0$ per ogni valore di θ_1 si deve avere (ricordando che $\vec{v} = \vec{p}/E$)

$$0 \leq |\vec{p}_1^c|^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2 = |\vec{p}_1^c|^2 - (E_1^c)^2 V^2 \Rightarrow V \leq |\vec{v}_1^c| . \quad (8.1.9)$$

Se questa condizione non è soddisfatta esiste un angolo massimo $\theta_1^{max} < \pi$ dato da

$$\sin \theta_1^{max} = \frac{|\vec{p}_1^c| \sqrt{1 - V^2}}{m_1 V} . \quad (8.1.10)$$

Chiaramente $\lim_{V \rightarrow 1} \theta_1^{max} = 0$, cioè per V grande il decadimento avviene in un cono sempre più stretto lungo la velocità \vec{V} .

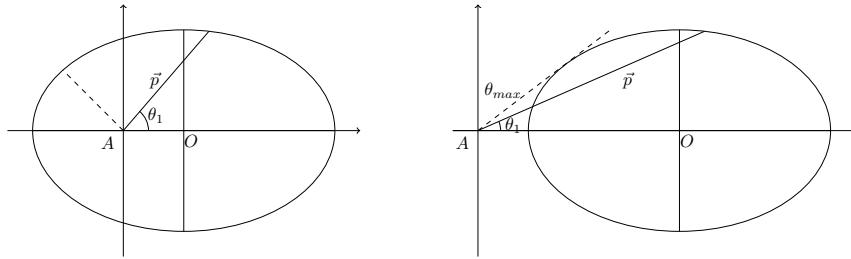


Figura 8.1: Rappresentazione grafica dell'equazione Eq. (8.1.12), con la velocità \vec{V} diretta nel verso positivo dell'asse x : a sinistra è mostrato il caso $V < v_1$, a destra il caso $V > v_1$.

Per chiarire questo comportamento si può analizzare esplicitamente il passaggio dal sistema di riferimento del centro di massa a quello del laboratorio: indichiamo con p_1^c e E_1^c il modulo dell'impulso e l'energia della particella 1 nel sistema del centro di massa e sia θ_1^c l'angolo formato nel sistema del centro di massa dalla direzione di emissione della particella con la direzione della velocità \vec{V} . Se supponiamo per semplicità che la velocità \vec{V} sia diretta lungo il verso positivo dell'asse x , nel sistema del centro di massa le componenti x e y dell'impulso sono $p_1^c \cos \theta_1^c$ e $p_1^c \sin \theta_1^c$. Effettuando il cambiamento di sistema di riferimento ottentiamo per le componenti dell'impulso nel sistema del laboratorio le espressioni

$$p_x = \frac{p_1^c \cos \theta_1^c + E_1^c V}{\sqrt{1 - V^2}} , \quad p_y = p_1^c \sin \theta_1^c \quad (8.1.11)$$

ed eliminando la dipendenza da θ_1^c si ottiene

$$p_y^2 + (p_x \sqrt{1 - V^2} - E_1^c V)^2 = (p_1^c)^2 . \quad (8.1.12)$$

Se si interpretano p_x e p_y come coordinate del piano questa equazione rappresenta una ellisse di semiassi $p_1^c/\sqrt{1-V^2}$ e p_1^c il cui centro O è stato spostato lungo il semiasse maggiore ad una distanza $E_1^c V/\sqrt{1-V^2}$ dal punto $\vec{p} = 0$ (punto A in figura). Il punto A risulta essere ancora all'interno dell'ellisse se è soddisfatta la condizione

$$\frac{E_1^c V}{\sqrt{1-V^2}} < \frac{p_1^c}{\sqrt{1-V^2}} \Rightarrow V < v_1^c. \quad (8.1.13)$$

In Fig. (8.1) sono mostrati i due casi $V < v_1^c$ e $V > v_1^c$:

$V < v_1^c$ per ogni valore di θ_1 esiste un unico valore di \vec{p} che soddisfa l'equazione Eq. (8.1.12). Per ogni valore di $\cos^2 \theta_1$ esistono quindi due soluzioni di Eq. (8.1.7), corrispondenti agli angoli θ_1 e $\pi - \theta_1$.

$V > v_1^c$ per valori di θ_1 sufficientemente piccoli esistono due soluzioni di Eq. (8.1.12) e Eq. (8.1.7). Esiste un angolo massimo θ_1^{max} che corrisponde ad un vettore \vec{p} tangente all'ellisse.

Passiamo infine a studiare la distribuzione angolare delle particelle, assumendo che nel sistema del centro di massa la distribuzione sia isotropa (questo è vedo ad esempio per i decadimenti di particelle di spin 0, come i pioni). Il numero di particelle emesse nell'angolo solido $d\sigma^c = 2\pi \sin \theta_1^c d\theta_1^c$ (c'è chiaramente invarianza per rotazioni in ϕ quindi si può semplicemente integrare $d\phi$ tra 0 e 2π) è quindi

$$dN = \frac{1}{4\pi} d\sigma^c = \frac{1}{2} |\cos \theta_1^c| \quad (8.1.14)$$

L'energia della particella m_1 è data da

$$E_1 = \frac{E_1^c + \vec{p}_1^c \cdot \vec{V}}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{E_1^c + |\vec{p}_1^c| V \cos \theta_1^c}{\sqrt{1-V^2}}, \quad (8.1.15)$$

dove E_1^c è la costante data dall'equazione Eq. (8.1.3) e $|\vec{p}_1^c| = \sqrt{(E_1^c)^2 - m_1^2}$, quindi

$$\frac{E_1^c - |\vec{p}_1^c| V}{\sqrt{1-V^2}} \leq E_1 \leq \frac{E_1^c + |\vec{p}_1^c| V}{\sqrt{1-V^2}} \quad (8.1.16)$$

Differenziando l'energia E_1 rispetto a θ_1^c si ottiene

$$dE_1 = \frac{|\vec{p}_1^c| V}{\sqrt{1-V^2}} d\cos \theta_1^c \quad (8.1.17)$$

e sostituendo questa espressione per $d\cos \theta_1^c$ in Eq. (8.1.14) si ottiene la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema del laboratorio

$$dN = \frac{1}{2V|\vec{p}_1^c|} \sqrt{1-V^2} dE_1 \quad (8.1.18)$$

da cui si vede che la distribuzione dei prodotti di decadimento è isotropa in energia nel sistema del laboratorio, con l'energia che assume valori nell'intervallo Eq. (8.1.16). Nel sistema di riferimento del centro di massa la distribuzione in energia è invece $dN = \delta(E - E_1^c) dE$.

8.1.1 **La relazione $p_{apb} \geq m_a m_b$

Dimostreremo ora la diseguaglianza $p_{apb} \geq m_a m_b$, in cui l'uguaglianza vale solo quando le particelle a e b sono relativamente ferme.

Consideriamo dapprima il caso in cui almeno una delle due masse sia non nulla, supponiamo $m_a > 0$, allora, poiché p_{apb} è invariante, si può effettuare il calcolo nel sistema di riferimento in cui m_a è ferma, quindi

$$p_{apb} = m_a E_b \quad (8.1.19)$$

e poichè $E_b \geq m_b$ e l'uguaglianza vale solo quando m_b è ferma abbiamo ottenuto il risultato voluto. Nel caso in cui $m_a = m_b = 0$, si ha $p_a = E_a(1, \hat{n})$ e $p_b = E_b(1, \hat{m})$, con \hat{n} e \hat{m} versori, e quindi

$$p_a p_b = E_a E_b (1 - \cos \theta) \geq 0 \quad (8.1.20)$$

e l'uguaglianza vale solo per $\theta = 0$, cioè per due particelle che si muovono a velocità c nella stessa direzione.

Una semplice applicazione di questa diseguaglianza si ha nel calcolo dell'energia massima di un prodotto di decadimento: consideriamo una particella di massa M che decade da ferma in n particelle di massa m_1, \dots, m_n . Quale è l'energia massima che può avere la particella di massa m_i ? Per rispondere a questa domanda è conveniente riscrivere la conservazione del quadriimpulso nella forma

$$P - p_i = p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n \quad (8.1.21)$$

e considerare i quadrati di entrambi i membri. Per quanto riguarda il primo membro si ha, poichè si è supposto la particella di massa M ferma,

$$(P - p_i)^2 = M^2 + m_i^2 - 2ME_i, \quad (8.1.22)$$

dove E_i è l'energia della particella i -esima. Per quanto riguarda il secondo membro si ha, usando la diseguaglianza appena mostrata,

$$(p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n)^2 \geq (m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n)^2 \quad (8.1.23)$$

e l'uguaglianza è soddisfatta solo se tutte le particelle diverse dalla i -esima hanno identiche velocità. Quindi

$$E_i \leq \frac{M^2 + m_i^2 - (m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n)^2}{2M} \quad (8.1.24)$$

e dal confronto con l'equazione Eq. (8.1.3) si vede che l'energia massima della particella i -esima è la stessa energia che si avrebbe nel decadimento a due particelle di massa $\tilde{m}_1 = m_i$ e $\tilde{m}_2 = m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n$.

8.2 Scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$

Considereremo in questa sezione la collisione di due particelle di massa m_1 e m_2 . Indichiamo con p_1 e p_2 i quadriimpulsi delle particelle incidenti e con p'_1 e p'_2 quelli delle particelle uscenti. Si hanno allora le relazioni

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p'_1^2 = m_1^2, \\ p_2^2 &= p'_2^2 = m_2^2, \\ p_1 + p_2 &= p'_1 + p'_2. \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

È conveniente riscrivere l'equazione della conservazione dei quadriimpulsi in due modi differenti

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 - p'_1 &= p'_2 \\ p_1 + p_2 - p'_2 &= p'_1, \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

da cui si ottengono, considerando i quadrati di queste due equazioni ed usando i vincoli cinematici, le relazioni

$$m_1^2 + p_1 p_2 - p_1 p'_1 - p_2 p'_1 = 0 \quad (8.2.3)$$

$$m_2^2 + p_1 p_2 - p_1 p'_2 - p_2 p'_2 = 0. \quad (8.2.4)$$

Chiamiamo sistema del laboratorio (che sarà indicato da una apice L) il sistema in cui la particella di massa m_2 è ferma prima dell'urto. Si ha allora $p_2^L = (m_2, \vec{0})$, $p_1^L = (E_1^L, \vec{p}_1^L)$ e quindi

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= E_1^L m_2 , \\ p'_1 p_2 &= E_1'^L m_2 , \\ p_2 p'_2 &= E_2'^L m_2 , \\ p_1 p'_1 &= E_1^L E_1'^L - \vec{p}_1^L \vec{p}_1'^L = E_1^L E_1'^L - |\vec{p}_1^L| |\vec{p}_1'^L| \cos \theta_1^L , \\ p_1 p'_2 &= E_1^L E_2'^L - \vec{p}_1^L \vec{p}_2'^L = E_1^L E_2'^L - |\vec{p}_1^L| |\vec{p}_2'^L| \cos \theta_2^L , \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

dove θ_1^L e θ_2^L sono gli angoli di scattering delle particelle 1 e 2 nel sistema di riferimento del laboratorio. Utilizzando queste espressioni nelle equazioni Eq. (8.2.3)-(8.2.4) si ottengono le relazioni

$$\cos \theta_1^L = \frac{E_1'^L (E_1^L + m_2) - E_1^L m_2 - m_1^2}{|\vec{p}_1^L| |\vec{p}_1'^L|} , \quad (8.2.6)$$

$$\cos \theta_2^L = \frac{(E_1^L + m_2) (E_2'^L - m_2)}{|\vec{p}_1^L| |\vec{p}_2'^L|} , \quad (8.2.7)$$

che legano gli angoli di scattering alle energie delle particelle entranti e uscenti. La seconda di queste equazioni può essere semplicemente invertita, ottendo $E_2'^L$ in funzione di E_1^L e θ_2^L :

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1^L|^2 |\vec{p}_2'^L|^2 \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2'^L - m_2)^2 \\ (E_1^L)^2 - m_1^2)(E_2'^L)^2 - m_2^2) \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2'^L - m_2)^2 \\ (E_1^L)^2 - m_1^2)(E_2'^L + m_2) \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2'^L - m_2) \\ E_2'^L \left[(E_1^L + m_2)^2 - (E_1^L)^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L \right] &= m_2 (E_1^L + m_2)^2 + m_2 (E_1^L)^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

e quindi

$$E_2'^L = m_2 \frac{(E_1^L + m_2)^2 + (E_1^L)^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L}{(E_1^L + m_2)^2 - (E_1^L)^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L} . \quad (8.2.9)$$

Analizziamo ora la possibilità che θ_1^L e θ_2^L possano avere un limite massimo: per fare ciò è conveniente ricondursi al caso del decadimento in due corpi, pensando lo scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ come $1 + 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1' + 2'$ dove 3 è uno stato intermedio di quadriimpulso $P^L = (m_2 + E_1^L, \vec{p}_1^L)$. In questo modo il problema degli angoli di uscita per lo scattering si riduce all'analogo problema per il decadimento di una particella di massa e velocità

$$M^2 \equiv P^L P^L = (m_2 + E_1^L)^2 - |\vec{p}_1^L|^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L , \quad \vec{V} = \frac{\vec{p}_1^L}{m_2 + E_1^L} \quad (8.2.10)$$

L'eventuale angolo limite della i -esima particella di questo problema è stato calcolato in precedenza ed è (vedi Eq. (8.1.10))

$$\sin \theta_i^{L \max} = \frac{|\vec{p}_i^c| \sqrt{1 - V^2}}{m_i V} , \quad (8.2.11)$$

che usando

$$\sqrt{1 - V^2} = \frac{MV}{|\vec{p}_1^L|} \quad (8.2.12)$$

si può riscrivere come

$$\sin \theta_i^{L \ max} = \frac{M |\vec{p}_i^c|}{m_i |\vec{p}_1^L|} . \quad (8.2.13)$$

Utilizzando le formule Eq. (8.1.3) per l'energia nel centro di massa otteniamo

$$\begin{aligned} E_1^c &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} = \frac{m_1^2 + m_2 E_1^L}{M} \\ E_2^c &= \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} = \frac{m_2(m_2 + E_1^L)}{M}, \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

da cui possiamo calcolare i moduli degli impulsi nel centro di massa

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1^c| &= \frac{1}{M} \sqrt{(m_1^2 + m_2 E_1^L)^2 - m_1^2 M^2} = \frac{1}{M} \sqrt{m_2^2 (E_1^L)^2 - m_1^2 m_2^2} = \frac{m_2}{M} |\vec{p}_1^L| \\ |\vec{p}_2^c| &= |\vec{p}_1^c|. \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

Sostituendo in Eq. (8.2.13) otteniamo infine

$$\sin \theta_1^{L\ max} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \sin \theta_2^{L\ max} = 1, \quad (8.2.16)$$

quindi un angolo limite esiste solo per la particella incidente m_1 se essa è più pesante di m_2 .

Consideriamo ora lo scattering nel sistema del centro di massa: in questo caso si ha

$$E_1^c = E'_1^c \quad E_2^c = E'_2^c, \quad |\vec{p}_1^c| = |\vec{p}_2^c| = |\vec{p}'_1^c| = |\vec{p}'_2^c| \equiv p_0 \quad (8.2.17)$$

dove E_1^c , E_2^c e p_0 sono dati dalle equazioni Eq. (8.2.14)-(8.2.15). Lo scattering nel sistema del centro di massa è quindi completamente determinato dall'energia totale M e dall'angolo di scattering, cioè l'angolo tra \vec{p}_1^c e \vec{p}'_1^c , che indicheremo con χ . Può risultare conveniente esprimere in funzione dell'angolo χ anche le energie finali nel sistema di riferimento del laboratorio, ad esempio per trovare i valori limite delle energie trasferite. Per fare ciò è conveniente usare nuovamente l'equazione Eq. (8.2.3), scrivendo però $p_1 p'_1$ usando le variabili del sistema del centro di massa:

$$p_1 p'_1 = E_1^c E'_1^c - \vec{p}_1^c \cdot \vec{p}'_1^c = E_1^{c2} - |\vec{p}_1^c|^2 \cos \chi = p_0^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2 \quad (8.2.18)$$

ed ottenendo quindi

$$E'_1^L - E_1^L = -\frac{p_0^2}{m_2} (1 - \cos \chi). \quad (8.2.19)$$

Per terminare si deve esprimere p_0 in termini di quantità del sistema del laboratorio usando l'Eq. (8.2.15) cioè (esplicitando M e scrivendo $|\vec{p}_1^L|$ in termini dell'energia)

$$p_0^2 = \frac{m_2^2 (E_1^{L2} - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} \quad (8.2.20)$$

e quindi

$$E'_1^L = E_1^L - \frac{m_2 (E_1^{L2} - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} (1 - \cos \chi) \quad (8.2.21)$$

Usando $E_1^L + m_2 = E'_1^L + E'_2^L$ si ottiene anche

$$E'_2^L = m_2 + \frac{m_2 (E_1^{L2} - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} (1 - \cos \chi) \quad (8.2.22)$$

Il secondo termine di queste equazioni rappresenta l'energia trasferita dalla prima particella (m_1) alla seconda (m_2) che era inizialmente a riposo.

Se indichiamo con \vec{v}_1^L la velocità con cui la prima particella incide nel sistema del laboratorio ed usiamo le relazioni $E = m\gamma$ e $\gamma^2 - 1 = v^2\gamma^2$, il trasferimento massimo di energia si ha per $\chi = -\pi$ e la particella 2 nello stato finale ha quindi il massimo valore dell'energia cinetica:

$$T_2^{max} = \frac{2m_2 m_1^2 (v_1^L \gamma_1^L)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L}. \quad (8.2.23)$$

Nel caso in cui la particella incidente sia molto più pesante della particella bersaglio ($m_1 \gg m_2$) e l'energia trasferita dalla particella 1 alla particella 2 si molto più piccola dell'energia iniziale della particella 1 (condizione che usando le formule precedenti si vede corrispondere a $m_1 m_2 \gamma_1^L \ll m_1^2$) la formula dell'energia massima trasferita può essere semplificata in

$$T_2^{max} \simeq 2m_2(v_1^L \gamma_1^L)^2. \quad (8.2.24)$$

Questa relazione può essere ottenuta direttamente con un semplice argomento. Infatti, nel caso in cui $m_1 \gg m_2$ ed in cui nell'urto solo una piccola percentuale di energia cinetica venga trasferita alla particella 2, si può schematizzare il processo d'urto corrispondente al massimo trasferimento di energia nel seguente modo:

- nel sistema di riferimento S' in cui m_1 è inizialmente ferma, la particella m_2 ha velocità $-\vec{v}_1^L$
- in S' , dopo l'urto la particella m_1 sarà all'incirca ferma e la particelle m_2 avrà all'incirca velocità \vec{v}_1^L .

Questo significa che dopo l'urto le particelle avranno nel sistema di riferimento del laboratorio velocità

$$\vec{v}'_1^L \simeq \vec{v}_1^L, \quad \vec{v}'_2^L \simeq \frac{2\vec{v}_1^L}{1 + (v_1^L)^2}. \quad (8.2.25)$$

Ovviamente queste espressioni sono approssimate e possono essere usate solo nel caso in cui l'energia iniziale della particella 1 sia molto maggiore dell'energia finale della particella 2, in quanto si sta trascurando la perdita di energia della particella 1 nell'urto. Usando questa espressione per \vec{v}'_2^L si ottiene quindi

$$\gamma'_2^L \simeq \frac{1 + (v_1^L)^2}{1 - (v_1^L)^2}, \quad T_2^{max} \simeq m_2(\gamma'_2^L - 1) \simeq 2m_2(v_1^L \gamma_1^L)^2. \quad (8.2.26)$$

Invece di usare la composizione delle velocità, per ottenere i risultati nel laboratorio a partire da quelli nel sistema S' si può chiaramente usare una trasformazione di Lorentz per arrivare allo stesso risultato.

8.2.1 Invarianti relativistici e variabili di Mandelstam

Sempre nello scattering, elastico o anelastico, di due particelle in due particelle $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ si possono identificare tre grandezze fisiche invarianti relativisticamente, di cui solo due linearmente indipendenti, che risultano essere molto utili.

La prima grandezza, identificata di solito dalla variabile s , è l'energia nel centro di massa al quadrato:

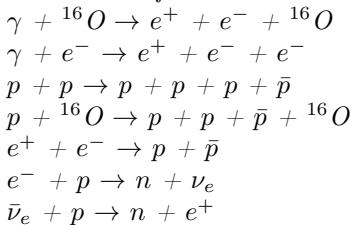
$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 \quad (8.2.27)$$

(per la conservazione del 4-impulso, si veda 8.2.1).

s trova il suo utilizzo più frequente nel calcolo delle energie di soglia per processi anelastici. Si noti che si ha sempre $s > 0$

Esercizio 8.2.1:

Calcolare l'energia di soglia nel laboratorio per le seguenti reazioni, in cui la seconda particella è inizialmente ferma:



La seconda grandezza, identificata di solito dalla variabile t , è il 4-impulso trasferito al quadrato:

$$t \equiv (p_1 - p'_1)^2 = (p'_2 - p_2)^2. \quad (8.2.28)$$

t è la grandezza fisica **determinante** negli scattering elastici, caratterizzati da $m_1 = m'_1$ e $m_2 = m'_2$, per i quali si ha sempre

$$t = -2|\vec{p}_{cm}|^2(1 - \cos\chi) = -4|\vec{p}_{cm}|^2 \sin^2(\chi/2) \quad (8.2.29)$$

dove χ è l'angolo di scattering nel centro di massa: come avrete già notato si ha sempre $t < 0$. La variabile t , nell'interpretazione quantistica dello scattering elastico, non è altro che la variabile $-\vec{q}^2$ del fattore di forma, e quindi si può affermare che in uno scattering elastico si osserva una interazione fra le due particelle a distanze

$$\approx \frac{\hbar c}{\sqrt{-t}} \quad (8.2.30)$$

Nello scattering elastico è anche importante calcolare il valore di t per cui il suo modulo è massimo, che risulta essere

$$t_{MAX} = -4|\vec{p}_{cm}|^2 \quad (8.2.31)$$

con

$$|\vec{p}_{cm}|^2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + s^2}{4s} \quad (8.2.32)$$

Esercizio 8.2.2: Elettroni di energia 10 GeV incidono su un protone inizialmente a riposo. Calcolare l'energia cinetica del protone e l'angolo di scattering dell'elettrone nel sistema del laboratorio per i seguenti valori del 4-impulso trasferito t : i) $t = -0.01 \text{ GeV}^2$, ii) $t = -0.1 \text{ GeV}^2$, iii) $t = -1 \text{ GeV}^2$.

L'ultima grandezza, identificata di solito dalla variabile u , è

$$u \equiv (p_1 - p'_2)^2 = (p'_1 - p_2)^2. \quad (8.2.33)$$

E' una grandezza utile in elettrodinamica per mettere in relazione le sezioni d'urto di processi in cui si 'scambiano' le particelle, come per esempio $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ e $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$. La variabile u non è particolarmente rilevante nell'ambito del corso di Fisica3, se non per effettuare utili esercizi per migliorare la confidenza con i calcoli di relatività speciale.

Esercizio 8.2.3: Dimostrare che

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m'_1{}^2 + m'_2{}^2 \quad (8.2.34)$$

Capitolo 9

Scattering e sezioni d'urto di particelle

9.1 Introduzione

La maggior parte delle informazioni sulle interazioni fondamentali e sui costituenti della materia microscopica sono ottenute dagli urti fra particelle. L'obiettivo di questo capitolo è di illustrare questa metodologia, discutere alcuni risultati fondamentali di fisica ottenuti usandola, ed insegnare come essa si possa applicare alla risoluzione di vari problemi.

In un processo di urto si misurano – tipicamente – le quantità di moto nello stato iniziale e finale delle particelle, che in questi due stati sono considerate come particelle libere che effettuano classicamente un moto rettilineo uniforme. Non si misura, invece, nessuna grandezza fisica all'interno della regione in cui le particelle interagiscono, che per questo motivo viene spesso chiamata “regione di interazione”.

Esistono varie classificazioni dei processi d'urto, che si differenziano tra loro per il fatto di evidenziare un particolare aspetto piuttosto che un altro del processo, oppure anche il modo di studiare il processo stesso. Si parla quindi ad esempio di urti elastici/anelastici, esotermici/endotermici, studiati in modalità esclusiva oppure inclusiva. Passiamo ora rapidamente in rassegna queste classificazioni.

Un urto fra due particelle a e b (che caratterizzano lo stato iniziale) si dice elastico se nello stato finale ritroviamo le stesse particelle a e b . Questo usualmente si scrive come:

$$a + b \rightarrow a + b . \quad (9.1.1)$$

Viceversa un urto tra le due particelle a e b nello stato iniziale si dice anelastico se non è elastico. In un urto anelastico, oltre a cambiare la natura delle particelle, può anche cambiare il numero di particelle, quindi la situazione anelastica più generica si può scrivere nella forma

$$a + b \rightarrow p_1 + \cdots p_n , \quad (9.1.2)$$

dove p_1, \dots, p_n rappresentano le particelle dello stato finale.

Una classificazione di diversa natura si basa sul Q -valore della reazione (classificazione che resta valida anche per i processi di decadimento). I processi di urto si dicono esotermici se il Q -valore (vedi Sez. (B.6)) della reazione è positivo, quindi l'energia cinetica delle particelle nello stato finale è minore dell'energia cinetica delle particelle iniziali. I processi endotermici sono invece quelli con Q -valore negativo e per essi è quasi sempre fondamentale determinare l'energia di soglia necessaria affinché il processo stesso possa avvenire. Ricordiamo che, per urti endotermici, l'energia di soglia è sempre maggiore o uguale a $|Q|$ (vedi Esemp. (B.6.5) per la formula esplicita).

L'ultima classificazione che introduciamo non dipende dal tipo di processo, ma solamente dal metodo di osservazione, e si applica anche ai processi di decadimento. Nel metodo di osservazione

esclusivo sono misurate tutte le componenti delle quantità di moto di tutte le particelle dello stato finale. Nel metodo inclusivo sono invece misurate solo alcune componenti delle quantità di moto di tutto o solo di alcune particelle nello stato finale. La scelta di studiare un processo in modo inclusivo è tipicamente motivata da esigenze specifiche, in particolare dipende spesso dalla difficoltà o impossibilità di misurare alcuni impulsi nello stato finale.

Presenteremo ora alcuni esempi di processi d'urto legati a vari contesti fisici; può essere un utile esercizio calcolare le energie di soglia per i vari esempi riportati. Poiché in tali calcoli è spesso necessario conoscere le masse atomiche, mentre rimandiamo all'appendice B per i dettagli, qui ricordiamo solo che:

- l'energia di legame degli elettroni è trascurabile quindi

$$M_{A,Z}^{atomo} \simeq M_{A,Z}^{nucleo} + Zm_e; \quad (9.1.3)$$

- si definisce una quantità Δ (difetto di massa) tale che

$$M_{A,Z}^{atomo} = \Delta_{A,Z} + Am_u \quad (9.1.4)$$

con $m_u = 931,49 MeV$ (unità di massa atomica);

- i valori di Δ si possono trovare nel sito <https://www.nndc.bnl.gov/wallet/wall47.pdf>.

Esempio 9.1.1: Reazioni in acceleratori o collisori.

$$p + p \rightarrow \begin{cases} p + p & (i) \\ p + p + p + \bar{p} & (ii) \\ H + \dots & (iii) \end{cases} \quad (9.1.5)$$

I casi (i) e (ii) sono tipiche reazioni su bersaglio fisso (di cui la prima elastica e la seconda inelastica), mentre la reazione (iii) è la reazione inelastica di produzione del bosone di Higgs a LHC. Le reazioni (ii) e (iii) sono tipicamente studiate in modo inclusivo, misurando solo l'antiproton (ii) oppure solo il bosone di Higgs (iii). Infine una reazione inclusiva come la (iii) si può anche scrivere nella forma $p+p \rightarrow H+X$, dove X indica un generico insieme di particelle (potenzialmente moltissime) che non vengono identificate e misurate.

$$e^- + p \rightarrow \begin{cases} e^- + p & (i) \\ e^- + p + \gamma & (ii) \\ e^- + p + \pi^0 & (iii) \\ e^- + X & (iv) \end{cases} \quad (9.1.6)$$

Reazioni a bersaglio fisso, tipicamente su idrogeno liquido ma anche su materiali solidi contenenti molti atomi di idrogeno. (i) reazione elastica, usabile per misurare la distribuzione di carica elettrica all'interno del protone tramite la misura del suo fattore di forma (vedi Sez. (6.4) e Sez. (7.6)); (ii) reazione in cui l'elettrone, accelerato dall'interazione elettromagnetica con il protone, irraggia un fotone; (iii) reazione in cui viene prodotto un pione neutro ($m_{\pi^0} \simeq 135 MeV/c^2$); (iv) generica reazione inelastica in cui vengono prodotte molte particelle.

$$e^- + e^+ \rightarrow \begin{cases} e^- + e^+ & (i) \\ \mu^- + \mu^+ & (ii) \\ \pi^- + \pi^+ & (iii) \\ K^+ + K^- & (iv) \end{cases} \quad (9.1.7)$$

Queste sono le reazioni più semplici che possono avvenire agli anelli di accumulazione elettron-positrone, ordinate partendo dalla reazione elastica (i) a quelle che richiedono energie di soglia via via più elevate ($m_{\mu^\pm} \simeq 106 MeV/c^2$, $m_{\pi^\pm} \simeq 139 MeV/c^2$, $m_{K^\pm} \simeq 494 MeV/c^2$).

Esempio 9.1.2: Esempi di reazioni prodotte in atmosfera dai raggi cosmici. produzione di neutroni nell'atmosfera ($Q \simeq -10.5\text{MeV}$):



Produzione del ${}^{14}\text{C}$, reazione fondamentale per datazioni in archeologia o beni culturali ($Q \simeq 0.6\text{MeV}$):



Attivazione atmosferica di ${}^{39}\text{Ar}$, isotopo radiattivo a lunga vita media ($Q \simeq -9.9\text{MeV}$):



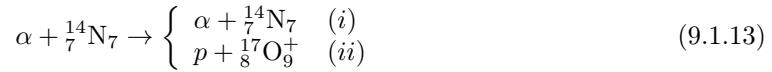
Esempio 9.1.3: Esempi di reazioni nelle stelle o nei plasmi: fusione di due protoni con produzione di un nucleo di deuterio ($Q \simeq 0.42\text{MeV}$)



Fusione di due nuclei di deuterio (deutoni) in una particella α ($Q \simeq 23.8\text{MeV}$)



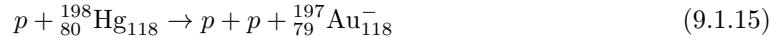
Esempio 9.1.4: Esempi di reazioni nucleari che avvengono in laboratorio o nei reattori:



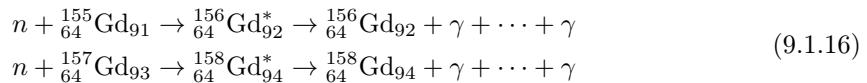
Entrambe queste reazioni sono state studiate per la prima volta da Rutherford. La prima (reazione elastica) ha portato nel 1908-1913 alla scoperta del nucleo atomico ed alla misura dei raggi nucleari; la seconda ($Q \simeq -1.19\text{MeV}$) è stata la prima trasmutazione nucleare prodotta in laboratorio dall'uomo nel 1918.



Reazione esotermica, consistente nella fissione del nucleo atomico dell'Uranio da parte di neutroni termici (cioè di energia cinetica dell'ordine di $\frac{1}{40}\text{eV}$), che avviene tipicamente in un reattore. Poichè i neutroni prodotti possono a loro volta innescare altre reazioni dello stesso tipo, per prevedere il comportamento di un reattore occorre conoscere (cioè aver misurato sperimentalmente con buona accuratezza) la funzione di distribuzione degli impulsi dei neutroni prodotti, vedi Sez. **aggiungi puntatore**.



reazione di produzione dell'Oro a partire dal Mercurio, talvolta nota come "reazione degli alchimisti" ($Q \simeq -7.3\text{MeV}$). Per esercizio si può calcolare quanto costerebbe produrre 1g di Oro se tale reazione avvenisse nel 100% delle collisioni e se per ogni reazione si spendesse una energia pari al solo Q -valore della reazione (entrambe ipotesi comunque estremamente ottimistiche). Si può inoltre cercare di capire se sia possibile produrre Oro con lo stesso meccanismo usando altri isotopi del Mercurio come bersagli.



Cattura di neutroni termici su Gadolinio, per la prima reazione si ha $Q \simeq 8.5\text{MeV}$, mentre per la seconda si ha $Q \simeq 7.9\text{MeV}$. Sono reazioni che avvengono con altissima probabilità, che permettono di effettuare una delle migliori schermature per neutroni. Le corrispondenti sezioni d'urto (vedi Sez. (9.2)) sono rispettivamente $\sigma \simeq 61\text{Kb}$ e $\sigma \simeq 254\text{Kb}$.

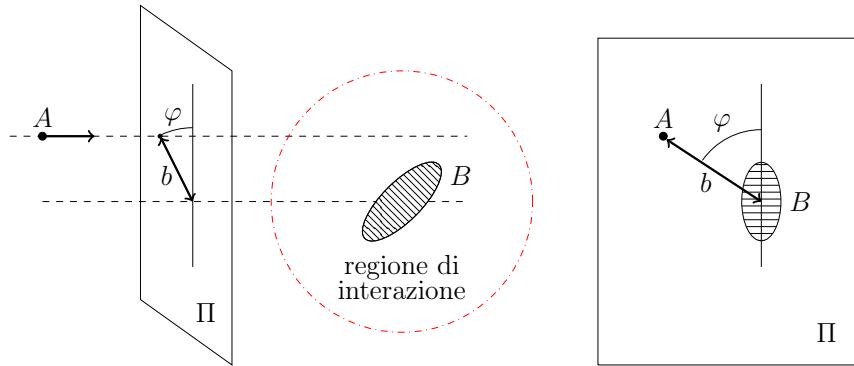


Figura 9.1: Definizione del parametro d’impatto b per un urto tra il proiettile puntiforme A ed il bersaglio B . Nota che la traiettoria del proiettile e la retta ad essa parallela passante per il centro di massa del bersaglio non sono in genere entrambe disposte sul piano della pagina, cosa che comporta l’esistenza di un angolo φ non banale nella proiezione sul piano Π perpendicolare alla direzione di volo del proiettile.

9.2 Sezioni d’urto

Un processo di urto può produrre differenti stati finali con differenti probabilità e, in modo analogo a quanto fatto per gli urti di onde su un bersaglio, per ogni reazione si può definire una sezione d’urto. Anche per gli urti fra particelle la sezione d’urto rappresenta l’area efficace in cui si produce un certo stato finale.

Nei vari testi possono essere utilizzate differenti definizioni di sezione d’urto, comunque tutte equivalenti fra di loro, che dipendono dalla situazione che l’autore desidera trattare. Noi discuteremo le definizioni di sezione d’urto che si applicano nelle seguenti quattro situazioni di interesse fisico

- singolo proiettile su singolo bersaglio
- flusso di particelle su un unico bersaglio
- due flussi di particelle che si scontrano
- flusso di particelle su un insieme di bersagli fissi

mostrando come portino tutte al medesimo risultato.

9.2.1 Singolo proiettile su singolo bersaglio

Consideriamo un processo in cui una particella puntiforme A (il proiettile) urta un bersaglio B , inizialmente a riposo, per produrre uno stato finale generico f , quindi $A + B \rightarrow f$. Assumiamo che il proiettile si muova di moto rettilineo uniforme prima di entrare nella regione di interazione (ciò comporta la assunzione implicita che il potenziale di interazione tra A e B sia a corto raggio, cioè sia esattamente nullo fuori della regione di interazione). Costruiamo due rette, tratteggiate in Fig. (9.1): la prima è la traiettoria imperturbata del proiettile, la seconda è la retta parallela alla prima passante per il centro di massa del bersaglio. Si definisce parametro di impatto b la distanza fra la retta su cui si muove il proiettile prima di entrare nella regione di interazione e il centro di massa del bersaglio. Tale distanza è ovviamente anche la distanza fra le due rette tratteggiate in Fig. (9.1).

Consideriamo adesso un piano Π , perpendicolare al moto del proiettile prima che questo entri nella regione di interazione. Per i processi nei quali lo stato finale è univocamente determinato dallo stato iniziale, chiamiamo Σ_f il luogo geometrico dei punti del piano Π attraversando i quali

il proiettile produce lo stato finale f . Si definisce sezione d'urto σ_f del processo $A + B \rightarrow f$ l'area di Σ_f . Come si era fatto per i fenomeni ondulatori (vedi Sez. (5.1)), si definisce la sezione d'urto totale σ_{tot} come la somma di tutte le sezioni d'urto dei processi possibili

$$\sigma_{tot} = \sum_f \sigma_f . \quad (9.2.1)$$

L'unità di misura più usata per le sezioni d'urto è il barn

$$1\text{b} = 100\text{fm}^2 = 10^{-28}\text{m}^2 . \quad (9.2.2)$$

Nel piano Π perpendicolare alla direzione di volo iniziale di A si può definire un angolo φ rispetto ad una direzione specificata in qualche modo. Nel caso in cui il bersaglio abbia una qualche direzione privilegiata (ad es. nel caso di bersaglio polarizzato) è ovviamente conveniente utilizzare questa direzione per definire l'angolo φ , che può altrimenti essere definito in modo arbitrario. La sezione d'urto σ_f può quindi essere scritta usando coordinate polari su Π come:

$$\sigma_f = \int_{\Sigma_f} b \, db \, d\varphi . \quad (9.2.3)$$

Per finire vediamo cosa succede nel caso in cui tra il proiettile A ed il bersaglio B agisca una forza non a corto raggio, quindi ad esempio sia presente un potenziale $V(\vec{r})$ che non sia costante per $r > r_0$, dove r_0 è una qualche distanza caratteristica. Se consideriamo come stati finali in cui la reazione è avvenuta quelli in cui il proiettile è stato deviato dalla sua traiettoria rettilinea uniforme allora la sezione d'urto σ_f risulta essere infinita, indipendentemente da quanto rapidamente la forza tra il proiettile ed il bersaglio si annulla a grande distanza. Questa è una caratteristica fondamentale delle sezioni d'urto classiche, che risulta falsa per le sezioni d'urto ondulatorie (si sono visti esempi in Sez. (5.1) di sezioni d'urto totali finite) ed in particolare in meccanica quantistica: quantisticamente è sufficiente che il potenziale si annulli all'infinito più rapidamente di r^{-2} per fare in modo che σ_{tot} sia finita (vedi ad esempio [26], §124).

Esempio 9.2.1: *Freccia contro bersaglio: se una freccia viene lanciata (con moto approssimativamente rettilineo uniforme) contro un bersaglio piano di raggio R disposto perpendicolarmente alla direzione della freccia, e lo stato finale è quello in cui la freccia è conficcata nel bersaglio, allora $\sigma_f = \pi R^2$*

Esempio 9.2.2: *Goccia d'acqua in caduta verticale su un tetto. Consideriamo una goccia d'acqua in caduta verticale su un tetto di area A ed inclinato di un angolo α rispetto all'orizzonte. Se lo stato finale è quello in cui la goccia urta il tetto si ha $\sigma_f = A \cos \alpha$.*

Esempio 9.2.3: *Luce su pallone da calcio. Consideriamo un fotone nella frequenza del visibile che incide su un pallone da calcio. Vi sono due stati finali: f_{abs} è lo stato in cui il fotone ha colpito una parte nera ed è stato assorbito, mentre f_{diff} è lo stato finale in cui il fotone colpisce una parte bianca e viene diffuso. Abbiamo quindi due sezioni d'urto, σ_{abs} e σ_{diff} , che corrispondono rispettivamente alla proiezione delle aree nere e delle aree bianche sul piano Π (quindi alla superficie delle aree nere e bianche che si potrebbe estrarre da una fotografia). Ovviamente $\sigma_{tot} = \sigma_{abs} + \sigma_{diff} = \pi R^2$, dove R è il raggio del pallone.*

9.2.2 Flusso di proiettili su singolo bersaglio

Consideriamo la situazione in cui su un unico bersaglio B incidano dei proiettili A tutti con la stessa velocità \vec{v}_A e con una concentrazione n_A (numero di proiettili per unità di volume).

Definiamo la densità di corrente di particelle $\vec{j}_A = n_A \vec{v}_A$ (che viene anche chiamata rateo di fluenza o densità di flusso di particelle), che ha unità di misura $[\vec{j}_A] = \frac{1}{\text{m}^2\text{s}}$ e quantifica il numero di particelle che attraversano una unità di superficie nell'unità di tempo. Se i proiettili avessero tutti una stessa carica q_A la densità di particelle \vec{j}_A così definita non sarebbe altro che la densità di corrente elettrica divisa per la singola carica q_A .

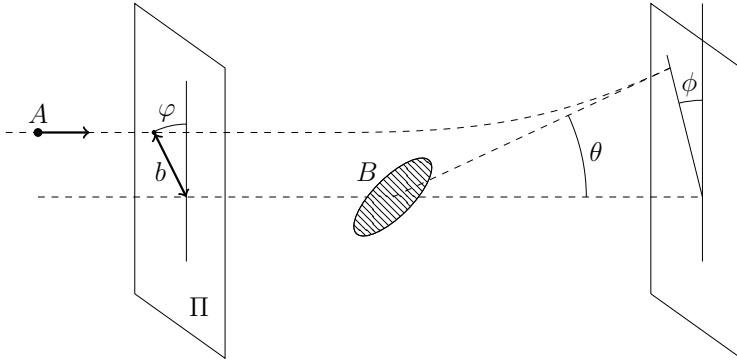


Figura 9.2: Geometria necessaria per la sezione d’urto differenziale. L’angolo solido di uscita $d\Omega$ è parametrizzato dalla coppia di angoli θ e ϕ , mentre φ è l’angolo di ingresso nel piano Π (vedi anche Fig. (9.1)).

Avendo un flusso costante di particelle che incide sul bersaglio, la quantità fisica che ha senso studiare è $\frac{dN_f}{dt}$, cioè il numero di eventi con stato finale f che si verificano nell’unità di tempo. Ricordando che σ_f è stata definita come l’area della superficie Σ_f sul piano Π attraversata dai proiettili che effettuano una reazione giungendo nello stato finale f , si vede subito che il numero di particelle del fascio incidente che producono lo stato finale f nell’unità di tempo è $\sigma_f |\vec{j}_A|$, da cui si ottiene la definizione equivalente di sezione d’urto

$$\sigma_f = \frac{dN_f/dt}{|\vec{j}_A|} . \quad (9.2.4)$$

Ovviamente in questo argomento è sottesa l’ipotesi che i proiettili non interagiscano tra loro, quindi urti diversi sono completamente indipendenti l’uno dall’altro.

Utilizzando questa definizione si può facilmente mostrare la consistenza della definizione corpuscolare della sezione d’urto con la definizione ondulatoria data in precedenza, vedi Sez. (5.1). Supponiamo infatti che i proiettili A siano fotoni monocromatici, e consideriamo un processo elastico, come ad esempio $\gamma + p \rightarrow \gamma + p$. Dal punto di vista corpuscolare N_f è il numero di fotoni diffusi e poichè un fotone di frequenza angolare ω ha energia $\hbar\omega$, l’energia diffusa è $N_f \hbar\omega$ e quindi $\hbar\omega \frac{dN_f}{dt}$ è la potenza diffusa elasticamente, corrispondente dal punto di vista ondulatorio a $\langle P_{el} \rangle$. In modo analogo $\vec{j}_A \hbar\omega$ è l’energia per unità di superficie e per unità di tempo, che corrisponde a $|\langle \vec{S}_{in} \rangle|$ dal punto di vista ondulatorio. Abbiamo quindi

$$\sigma_{el} = \frac{dN_f/dt}{|\vec{j}_A|} = \frac{(dN_f/dt)\hbar\omega}{|\vec{j}_A|\hbar\omega} = \frac{\langle P_{el} \rangle}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|} , \quad (9.2.5)$$

che mostra la consistenza dei due approcci.

Nel caso di flusso incidente su singolo bersaglio ha senso introdurre anche la sezione d’urto differenziale, in modo del tutto analogo con quanto fatto nel caso delle sezioni d’urto per processi ondulatori. Indichiamo con $d\Omega$ un angolo solido e con dN_f il numero di particelle deflesse che lo attraversano in un tempo dt . Utilizzando la parametrizzazione tramite il parametro d’impatto b e l’angolo φ introdotti in Fig. (9.1) si ha allora

$$dN_f = b db d\varphi |\vec{j}_A| dt , \quad (9.2.6)$$

dove b e φ dipendono implicitamente da $d\Omega$ (b e φ devono essere infatti scelti per fare in modo che a tempi grandi la particella deflessa attraversi $d\Omega$). Il rapporto tra il numero di particelle deflesse per unità di tempo e di angolo solido e la densità corrente di particelle incidente definisce la sezione

d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma_f}{d\Omega} = \frac{\frac{dN_f}{dt d\Omega}}{|\vec{j}_A|} = \frac{b db d\varphi}{d\Omega}. \quad (9.2.7)$$

Per riscrivere questa espressione in modo più trasparente conviene parametrizzare l'angolo solido di uscita di una particella tramite la coppia di angoli θ e ϕ , vedi Fig. (9.2). L'angolo di scattering θ è definito nel piano identificato dalla traiettoria asintotica del proiettile per $t \rightarrow \infty$ e dalla retta passante per il centro di massa del bersaglio e parallela alla traiettoria del proiettile per $t \rightarrow -\infty$; il rimanente angolo ϕ è definito nel piano ortogonale alla direzione di moto iniziale del proiettile e, come l'angolo φ introdotto in Fig. (9.1), può essere misurato rispetto ad una direzione preferenziale del bersaglio (nel caso esista) o rispetto ad una direzione arbitraria scelta convenzionalmente. Questa parametrizzazione corrisponde ad una particolare scelta di coordinate sferiche, in cui l'asse z è parallelo alla direzione di moto delle particelle incidenti e passa per il centro di massa del bersaglio. Abbiamo quindi semplicemente $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

Nel caso particolarmente importante in cui la traiettoria del proiettile si svolge in un piano e c'è invarianza cilindrica (cosa che avviene ad esempio nel caso in cui la deflessione sia dovuta ad un potenziale centrale) si può scegliere $\varphi = \phi$. Inoltre l'unica dipendenza rimanente è quella di b dall'angolo di scattering θ , che è legato al parametro di impatto b dalla traiettoria della particella. La sezione d'urto differenziale si può quindi riscrivere nella forma semplificata

$$\frac{d\sigma_f}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|, \quad (9.2.8)$$

dove è stato inserito un valore assoluto in quanto tipicamente $b(\theta)$ è una funzione decrescente (grandi parametri d'impatto corrispondono a piccoli angoli di scattering). Si vede quindi che l'ingrediente fondamentale necessario per calcolare la sezione d'urto differenziale è la funzione $b(\theta)$, che si ottiene integrando le equazioni del moto.

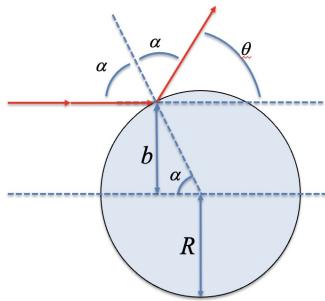


Figura 9.3: La geometria necessaria nell'esempio 9.2.4.

Esempio 9.2.4: Si calcoli la sezione d'urto (differenziale e totale) per un punto materiale che rimbalzi elasticamente su una sfera rigida, di massa infinita e di raggio R , seguendo le leggi della riflessione (angolo di riflessione uguale all'angolo di incidenza). Si calcoli inoltre il valore medio dell'impulso trasferito dal punto materiale (massa m e modulo della velocità iniziale \vec{V}_0) alla sfera rigida.

Soluzione: È necessario determinare la relazione fra angolo di scattering θ e parametro di impatto b . Con riferimento a Fig. (9.3), si vede facilmente che l'angolo di riflessione α e l'angolo di scattering θ verificano le due relazioni geometriche $2\alpha + \theta = \pi$ e $\sin \alpha = b/R$, con i limiti $0 < b < R$, da cui $b = R \cos \frac{\theta}{2}$. Sostituendo nell'equazione Eq. (9.2.8) si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R^2}{4} \quad (9.2.9)$$

Integrando sull'angolo solido si trova la sezione d'urto totale $\sigma = \pi R^2$, che è l'area del cerchio massimo, risultato facilmente intuibile dato che non vi è scattering se non nella regione $0 < b < R$. L'impulso trasferito in funzione dell'angolo di scattering è

$$\Delta \vec{p} = (mV_0 \sin \theta \cos \phi, mV_0 \sin \theta \sin \phi, mV_0(1 - \cos \theta)) \quad (9.2.10)$$

ed il suo valore medio (mediato sommando sugli stati finali, ognuno pesato con la sua probabilità legata alla sezione d'urto)

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \frac{\int mV_0 \sin \theta \cos \phi \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = 0 \\ \Delta p_y &= \frac{\int mV_0 \sin \theta \sin \phi \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = 0 \\ \Delta p_z &= \frac{\int mV_0(1 - \cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = \frac{mV_0 \int (1 - \cos \theta) \frac{R^2}{4} d\cos \theta d\phi}{\pi R^2} = mV_0 \end{aligned} \quad (9.2.11)$$

che, per una coincidenza, è uguale al valore che si avrebbe per una collisione totalmente anelastica su un bersaglio fisso. \square

Questo esempio ci mostra una caratteristica molto importante: in uno scattering il valore medio di una grandezza fisica $f(\theta, \phi)$, che dipende dagli angoli di scattering, si può calcolare utilizzando la sezione d'urto come peso per il calcolo della media

$$\langle f \rangle = \frac{\int f \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}. \quad (9.2.12)$$

9.2.3 Due flussi di particelle che si scontrano

Consideriamo la situazione in cui la reazione $a + b \rightarrow f$ avviene in una regione di volume ΔV (piccolo e tendente a zero) in cui le particelle a con concentrazione n_a si muovono con velocità \vec{v}_a nel sistema di riferimento di quiete delle particelle b , che hanno concentrazione n_b . Sono situazioni che si realizzano, per esempio nei plasmi (e quindi nelle stelle) o nei processi chimici.

Sia $\frac{dN_f}{dt}$ il numero di eventi per unità di tempo nello stato finale f . Esso è pari al numero totale di bersagli $n_b \Delta V$ moltiplicato il numero di eventi per unità di tempo nel caso di un singolo bersaglio, quantità fornita da Eq. (9.2.4), per cui

$$\frac{dN_f}{dt} = n_b \Delta V j_a \sigma_f \quad (9.2.13)$$

Dividendo per il volume e ricordando la definizione della densità di corrente j_a data in Sez. (9.2.2), l'equazione (9.2.13) fornisce $\frac{dn_f}{dt}$, numero di eventi per unità di tempo per unità di volume:

$$\frac{dn_f}{dt} = \frac{1}{\Delta V} \frac{dN_f}{dt} = n_a n_b v_a^{in-b} \sigma_f \quad (9.2.14)$$

dove v_a^{in-b} è il modulo della velocità di a nel sistema in cui b è in quiete.

In un contesto non relativistico Eq. (9.2.14) può essere ovviamente riscritta come

$$\frac{dn_f}{dt} = n_a n_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b| \sigma_f \quad (\text{non rel o } \vec{v}_a \parallel \vec{v}_b) \quad (9.2.15)$$

tuttavia questa espressione è valida anche in un contesto relativistico, in un qualunque sistema di riferimento in cui le velocità \vec{v}_a e \vec{v}_b siano collineari, indicando con n_a ed n_b le concentrazioni delle particelle a e b in questo sistema di riferimento.

Dimostriamo questa proprietà tramite una trasformazione di Lorentz, ipotizzando per semplicità che nel laboratorio le velocità siano dirette lungo l'asse x del un sistema di riferimento:

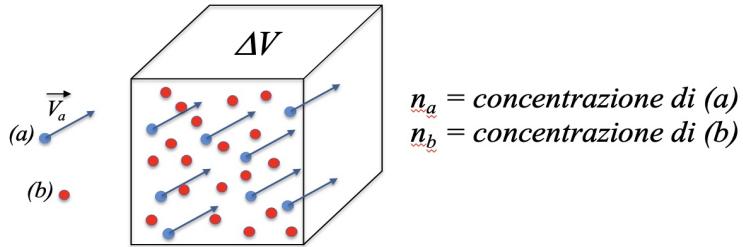


Figura 9.4: **non richiamata?**

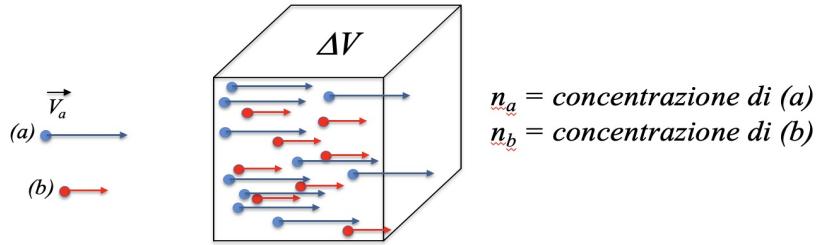


Figura 9.5: **non richiamata?**

$\vec{v}_a = (v_a, 0, 0)$ e $\vec{v}_b = (v_b, 0, 0)$. Indichiamo con n_a^0 e n_b^0 le concentrazioni proprie, cioè la concentrazione di a nel sistema di riferimento in cui $\vec{v}_a = 0$ e la concentrazione di b nel sistema di riferimento in cui $\vec{v}_b = 0$. Poiché il problema è relativistico e le velocità collineari, il modulo della velocità di a nel sistema di quiete delle particelle b è

$$v_a^{in-b} = \frac{|v_a - v_b|}{1 - v_a v_b}. \quad (9.2.16)$$

A causa della contrazione relativistica la concentrazione delle particelle a nel sistema di quiete delle particelle b è (usiamo $c = 1$ per semplicità)

$$n_a^{in-b} = n_a^0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v_a^{in-b})^2}} = n_a^0 \frac{1}{\sqrt{1 - v_a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - v_b^2}} (1 - v_a v_b). \quad (9.2.17)$$

Sostituendo Eq. (9.2.16) e (9.2.17) nell'equazione (9.2.14) (che ricordiamo era stata ricavata nel sistema di quiete di b e dove si deve quindi porre $n_b = n_b^0$), otteniamo il risultato cercato:

$$\frac{dn_f}{dt} = \frac{n_a^0}{\sqrt{1 - v_a^2}} \frac{1 - v_a v_b}{\sqrt{1 - v_b^2}} n_b^0 \frac{|v_a - v_b|}{1 - v_a v_b} \sigma_f = n_a n_b |v_a - v_b| \sigma_f. \quad (9.2.18)$$

Nel caso generale in cui \vec{v}_a e \vec{v}_b non sono collineari è più semplice seguire una strada meno diretta. Il punto di partenza è di nuovo ovviamente Eq. (9.2.14), che riscriviamo nel sistema di riposo delle particelle b (chiamato nel seguito sistema del laboratorio) nella forma

$$dN_f = \sigma_f v_r n_a n_b dV dt, \quad (9.2.19)$$

dove v_r è il modulo della velocità relativa delle particelle, definita come la velocità delle particelle a nel sistema di quiete di b . Notiamo innanzitutto che σ_f è una quantità invariante di Lorentz, in quanto questa definizione assume di essere in uno specifico sistema di riferimento.

Appare naturale supporre che in ogni sistema di riferimento sussista una relazione della forma

$$dN_f = K_f n_a n_b dV dt \quad (9.2.20)$$

dove K_f è una funzione da determinarsi, che nel sistema del laboratorio deve ridursi a $\sigma_f v_r$. Notiamo inoltre che dN_f , il numero di particelle che ha effettuato la reazione, deve essere un invariante relativistico e che $dV dt$ è pure invariante, in quanto le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni ortogonali dello spazio quadridimensionale.

Da Eq. (9.2.20) segue allora che anche $K_f n_a n_b$ debba essere invariante. Le densità trasformano con l'inverso della contrazione di Lorentz, cioè si ha in generale

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{n_0 E}{m} \quad (9.2.21)$$

dove abbiamo indicato con E l'energia di una particella, con m la sua massa e con n_0 la densità di riposo. Segue allora che $K_f E_1 E_2$ debba pure essere invariante.

Vediamo ora di ottenere una forma esplicita di K_f : è conveniente notare che, poiché $p_a p_b$ è un invariante, pure la seguente espressione è invariante

$$Y_f = K_f \frac{E_a E_b}{p_a p_b} = K_f \frac{E_a E_b}{E_a E_b - \vec{p}_a \vec{p}_b} . \quad (9.2.22)$$

Inoltre nel sistema di riferimento del laboratorio si ha $K_f = \sigma_f v_r$, $E_b = m_b$ e $\vec{p}_b = 0$, quindi $Y_f = \sigma_f v_r$ in ogni sistema di riferimento, quindi

$$K_f = \sigma_f v_r \frac{p_a p_b}{E_a E_b} . \quad (9.2.23)$$

Dobbiamo ora scrivere v_r in funzione delle due velocità \vec{v}_a e \vec{v}_b : usando il fatto che $p_a p_b$ è un invariante e che nel sistema del laboratorio si ha $p_a p_b = E_a^L m_b = m_a m_b \gamma_r$ (dove γ_r è il fattore γ associato alla velocità relativa v_r) si ottiene

$$v_r = \sqrt{1 - \frac{m_a^2 m_b^2}{(p_a p_b)^2}} \quad (9.2.24)$$

da cui, scrivendo esplicitamente $p_a = m_a \gamma_a(1, \vec{v}_a)$ ed analogamente per p_b , si trova

$$\begin{aligned} K_f &= \sigma_f \frac{\sqrt{(p_a p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}}{E_a E_b} = \\ &= \frac{\sigma m_a m_b}{E_a E_b \sqrt{(1 - v_a^2)(1 - v_b^2)}} \sqrt{(1 - \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b)^2 - (1 - v_a^2)(1 - v_b^2)} = \\ &= \sigma \sqrt{(1 - \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b)^2 - (1 - v_a^2)(1 - v_b^2)} = \sigma \sqrt{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2} , \end{aligned} \quad (9.2.25)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'identità:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2 &= v_a^2 + v_b^2 - 2\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b - (\epsilon_{ijk} v_a^j v_b^k)(\epsilon_{ilm} v_a^l v_b^m) = \\ &= v_a^2 + v_b^2 - 2\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b - (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) v_a^j v_b^k v_a^l v_b^m = \\ &= v_a^2 + v_b^2 - 2\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b - v_a^2 v_b^2 + (\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b)^2 = \\ &= (1 - \vec{v}_a \cdot \vec{v}_b)^2 - (1 - v_a^2)(1 - v_b^2) . \end{aligned} \quad (9.2.26)$$

Rimettendo insieme i pezzi si ottiene infine l'espressione

$$dN_f = \sigma_f \sqrt{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2} n_a n_b dV dt , \quad (9.2.27)$$

che è la generalizzazione cercata: Eq. (9.2.27) è invariante per costruzione e si riduce alla espressione corretta Eq. (9.2.19) nel sistema del laboratorio, quindi è l'espressione corretta in ogni sistema di riferimento.

La sezione d'urto, essendo definita passando in un sistema di riferimento specifico (quello in cui b è fermo), è un invariante relativistico, quindi può essere funzione solo del modulo v_r della velocità relativa tra a e b (definita come la velocità di a nel sistema in cui b è fermo) quindi

$$\sigma_f = \sigma_f(v_r) . \quad (9.2.28)$$

Accade in molti contesti fisici, per esempio nella fisica dei plasmi o in chimica, che le velocità relative non siano tutte uguali, in quanto le velocità dei reagenti a e b sono distribuite secondo una certa distribuzione di probabilità (tipicamente à la Boltzmann) che può dipendere ad esempio dalle masse dei reagenti e dalla temperatura. Indicheremo con $P_a(v_a)$ e $P_b(v_b)$ queste distribuzioni (assumendo isotropia), che devono quidi soddisfare le relazioni

$$\int P_i(v_i) d^3 v_i = 1 , \quad \text{con } i = a, b . \quad (9.2.29)$$

In questo caso l'equazione (9.2.15) (che si riferisce al caso non relativistico) va modificata nel modo seguente:

$$\frac{dn_f}{dt} = \int n_a n_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b| \sigma_f(|\vec{v}_a - \vec{v}_b|) P_a(v_a) P_b(v_b) d^3 v_a d^3 v_b . \quad (9.2.30)$$

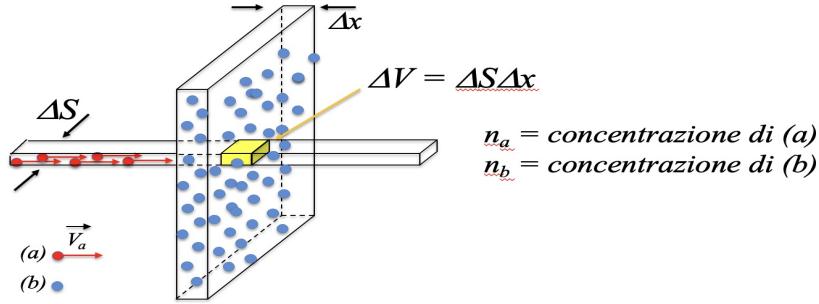
Il caso relativistico può trattarsi in modo analogo, ottenendo

$$\frac{dn_f}{dt} = \int n_a n_b \sqrt{(\vec{v}_a - \vec{v}_b)^2 - (\vec{v}_a \times \vec{v}_b)^2} \sigma_f(v_r) P_a(v_a) P_b(v_b) d^3 v_a d^3 v_b , \quad (9.2.31)$$

dove v_r è il modulo della velocità relativa tra \vec{v}_a e \vec{v}_b (vedi Eq. (9.2.24)).

9.2.4 Flusso di particelle su bersaglio fisso

Una delle situazioni più frequenti è quella in cui un fascio di proiettili (*a*) incide su una lamina di spessore Δx che contiene i bersagli (*b*).



Il fascio di proiettili ha una densità di flusso $\vec{j}_a = n_a \vec{V}_a$ ed una sezione ΔS , per cui il flusso di proiettili vale

$$\Phi_a = |\vec{j}_a| \Delta S \quad (9.2.32)$$

Il numero di eventi per unità di tempo nel volume ΔV indicato in figura si ottiene a partire dall'equazione (9.2.13): $\frac{dN_f}{dt} = n_b \Delta V j_a \sigma_f = n_b \Delta S \Delta x j_a \sigma_f$

che si può riscrivere come

$$\frac{dN_f}{dt} = \Phi_a n_s \sigma_f = \Phi_a P_f \quad (9.2.33)$$

dove

$$n_s = n_b \Delta x \quad (9.2.34)$$

è la densità superficiale dei bersagli, e

$$P_f = n_s \sigma_f \quad (9.2.35)$$

è la probabilità per un singolo proiettile di diprodurre lo stato finale *f*.

Qui emerge subito un problema: possono esistere valori per i quali si otterrebbe una probabilità maggiore del 100% ! Inoltre dobbiamo tenere presente che possono esserci differenti stati finali e che la probabilità di interazione totale è la somma di tutte le probabilità:

$$P_{tot} = \sum P_f = \sum n_s \sigma_f = n_s \sigma_{tot} \quad (9.2.36)$$

In definitiva la relazione (9.2.33) è utilizzabile solo nel limite di "lamina sottile"

$$P_{tot} = n_b \Delta x \sigma_{tot} \ll 1 \quad (9.2.37)$$

quindi se

$$\Delta x \ll l \quad (9.2.38)$$

dove abbiamo definito

$$l \equiv \frac{1}{n_b \sigma_{tot}} \quad (9.2.39)$$

come la "lunghezza di estinzione" del fascio di proiettili.

Nel caso in cui la lamina non sia sottile, occorre suddividere la lamina in tanti piccoli spessori di lunghezza dx , per ognuno dei quali la probabilità infinitesima di interazione (in un qualsiasi stato finale) è molto minore di 1 e vale

$$dP_{int} = \frac{dx}{l} \quad (9.2.40)$$

Sia $P(x)$ la probabilità di non avere interagito dopo avere attraversato uno spessore finito x , con $P(0) = 1$. Si ha:

$$P(x + dx) = P(x)(1 - dP_{int}) = P(x)\left(1 - \frac{dx}{l}\right) \quad (9.2.41)$$

per cui

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{P}{l} \quad (9.2.42)$$

la cui soluzione è un decremento esponenziale della probabilità di non interagire:

$$P(x) = e^{-x/l} \quad (9.2.43)$$

Il numero **medio** di proiettili che nell'unità di tempo escono senza avere interagito nello spessore Δx risulta quindi essere

$$\Phi_a(x) = \Phi_a(0)e^{-\Delta x/l} \quad (9.2.44)$$

ed il numero di eventi per unità di tempo nello stato finale f in tutto lo spessore Δx è

$$\frac{dN_f}{dt} = \Phi_a(0) \frac{\sigma_f}{\sigma_{tot}} (1 - e^{-\Delta x/l}) \quad (9.2.45)$$

che si riduce a

$$\frac{dN_f}{dt} \approx \Phi_a(0) \sigma_f n_b \Delta x = \Phi_a(0) \sigma_f n_s \quad (9.2.46)$$

per lamine sottili.

Nota Uno degli stati finali possibili è lo scattering elastico, in cui possono avvenire anche deflessioni ad angoli così piccoli da lasciare quasi inalterato l'impulso (in modulo e direzione) della particella incidente, che resta - per così dire - "utilizzabile" per ulteriori interazioni. In base alla situazione sperimentale dividiamo la sezione d'urto elastica in due parti: quella che rimuove la particella dal fascio ($\sigma_{el,out}$) e quella che non lo rimuove ($\sigma_{el,in}$). Nel calcolo del coefficiente di attenuazione (equazione 9.2.39) è rilevante solo la prima, e la sezione d'urto totale deve essere sostituita da una "sezione d'urto d'estinzione":

$$\sigma_{tot} \rightarrow \sigma_{estinzione} \equiv \sigma_{el,out} + \Sigma_{inelastic} \sigma_f \quad (9.2.47)$$

Nota importante È frequente la situazione in cui si debba calcolare la concentrazione dei bersagli, per cui ricordiamo che per una sostanza monomolecolare, di massa totale M contenuta in un volume V e di densità di massa ρ , composta da molecole di peso atomico A , la densità di volume (n) delle molecole vale

$$n = \frac{1}{V} \frac{M}{M_{mole}} N_{Av} = N_{Av} \frac{\rho}{M_{mole}} \quad (9.2.48)$$

dove $N_{Av} \approx 6 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro e M_{mole} è la massa di una mole della sostanza considerata, pari al suo peso molecolare A espresso in grammi.

9.3 Esempi

In questa parte riportiamo importanti dati sperimentali sulle sezioni d'urto fra le più comuni particelle e la materia stabile. Tali dati sono spesso parametrizzabili con formule analitiche, predette o meno dalla teoria, oppure espressi solo in forma tabellare o grafica. Utilizzando tali dati si possono effettuare moltissimi esercizi, analitici o numerici tramite programmi al calcolatore, di simulazione di situazioni pratiche, come per esempio progettare una schermatura che blocchi al 99.9% l'energia trasportata da fotoni di 2MeV , etc.... Il calcolo di molte di queste sezioni d'urto richiede conoscenze a livello del I anno della laurea magistrale, ma alcune caratteristiche dei dati possono essere comprese anche con le conoscenze attualmente in vostro possesso, come già detto nel capitolo 6, nella parte inerente le sezioni d'urto di fotoni su atomi. In quella sezione abbiamo evidenziato le possibilità di interpretazione dei risultati sperimentali tramite il modello ondulatorio delle onde elettromagnetiche; in questo capitolo si forniranno alcuni esempi e applicazioni del formalismo introdotto.

9.3.1 Sezione d'urto di un fotone su elettrone libero (interazione elettromagnetica)

Si tratta dello scattering **Thomson** (a basse energie) e dello scattering **Compton** (a energie maggiori), già introdotti nel capitolo 6.2.

In quel contesto, però, l'elettrone (bersaglio) veniva considerato legato all'interno di un atomo. Nel caso in cui l'elettrone sia libero, la sezione d'urto differenziale Thomson (eq 6.2.9 e 6.2.17,) si riduce a:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \simeq r_e^2 \sin^2 \alpha \quad (9.3.1)$$

nel caso di luce polarizzata linearmente e dove α è l'angolo fra direzione della polarizzazione e direzione del fotone uscente, oppure

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \simeq r_e^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (9.3.2)$$

nel caso di luce non polarizzata e dove θ è l'angolo fra direzione del fotone entrante e direzione del fotone uscente.

La sezione d'urto totale Thomson, ottenibile integrando una qualunque delle due equazioni 9.3.1 o 9.3.2 su tutto l'angolo solido, risulta indipendente dall'energia:

$$\sigma_{el} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \approx 0.66b \quad (9.3.3)$$

Esercizio 9.3.1: Dimostrare che per lo scattering Thomson su elettrone libero il valore medio di p_z (componente della quantità di moto finale del fotone lungo la direzione del fotone incidente) è nullo. Calcolare il valore medio di p_z^2 [Risposta: $2/5$ moltiplicato il quadrato della quantità di moto iniziale del fotone]

Esercizio 9.3.2: Un fascio di fotoni, ognuno di energia pari a 2eV , ha intensità 1mW e incide perpendicolarmente su un piano in cui si trovano 10^6 elettroni (liberi) per cm^2 e su cui effettuano uno scattering Thomson. Calcolare la pressione sullo strato di elettroni. Cosa cambierebbe se la densità superficiale fosse di 10^{16} elettroni per cm^2 ?

Per quanto riguarda la sezione d'urto differenziale Compton, come già detto essa può essere calcolata solo nell'ambito dell'elettrodinamica quanto-relativistica (QED). Indicando con ω l'energia del fotone incidente, con ω' l'energia del fotone uscente e con θ l'angolo di scattering del fotone, per un fotone non polarizzato si ha:

$$\frac{d\sigma_{Compton}}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right) \quad (9.3.4)$$

Esercizio 9.3.3: Dimostrare che la sezione d'urto differenziale Compton (9.3.4) si riduce a basse energie alla sezione d'urto Thomson.

Esercizio 9.3.4: Calcolare l'energia del fotone e l'energia cinetica dell'elettrone nello stato finale di uno scattering Compton. [Risposte:]

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} \quad (9.3.5)$$

$$T_e = \omega \frac{\omega(1 - \cos\theta)}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \quad (9.3.6)$$

da cui l'energia massima dell'elettrone è $T_e^{MAX} = \frac{2\omega^2}{m+2\omega}$

Esercizio 9.3.5: "C" Utilizzate l'espressione per la sezione d'urto differenziale Compton per produrre - tramite computer - il grafico di $\frac{d\sigma_{Compton}}{d\Omega}$. Effettuare una integrazione numerica e disegnare il grafico di $\sigma_{Compton}$. Effettuare una integrazione numerica per calcolare l'energia media del fotone nello stato finale.

9.3.2 Sezioni d'urto per fotoni su atomo (interazione elettromagnetica)

I fotoni effettuano solamente interazioni elettromagnetiche. L'interazione di fotoni su atomi sono particolarmente importanti. A titolo di esempio le relative sezioni d'urto su Carbonio e su Piombo sono già state riportate nella figura Fig. (6.1) in funzione dell'energia del fotone nell'intervallo 10eV-100GeV, mentre le sezioni d'urto conosciute ed altre importanti informazioni sono per esempio consultabili nel database del NIST (National Institute of Standards and Technology):

<https://www.nist.gov/pml/xcom-photon-cross-sections-database> .

Indicando con A un atomo neutro e con N un nucleo atomico si possono avere diverse reazioni, vedi anche Cap. (6) e si consulti la già citata figura Fig. (6.1).

Lo scattering Rayleigh

$$\gamma + A \rightarrow \gamma + A , \quad (9.3.7)$$

consiste in un urto elastico sugli elettroni atomici, approssimabili (per energia sufficientemente bassa del fotone) come una unica distribuzione di carica (scattering coerente). La sezione d'urto Rayleigh è ricavabile nel modello ondulatorio classico della luce. Come mostrato nel capitolo 6, è proporzionale a Z^2 nella parte piatta (vedere i dati su C e Pb) fino a circa 1KeV, mentre per energie maggiori decresce come $1/E^2$ come è previsto dal "fattore di forma" atomico.

Nell'effetto fotoelettrico

$$\gamma + A \rightarrow e^- + A^+ , \quad (9.3.8)$$

un fotone di energia E_γ viene completamente assorbito ionizzando l'atomo, i.e. espellendo uno dei suoi elettroni. Definendo E_{lev} come il valore assoluto dell'energia del livello dell'elettrone espulso, quest'ultimo viene emesso con una energia cinetica pari a

$$E_\gamma - E_{lev} \quad (9.3.9)$$

Quindi l'energia di soglia dell'effetto fotoelettrico è pari all'energia di [prima] ionizzazione dell'atomo, quantità indicata spesso con I , che non è altro che il più piccolo fra i valori E_{lev} . La sezione d'urto (con valutazioni possibili con la meccanica quantistica) decresce come

$$(E_\gamma - E_{lev})^{-3.5} \quad (9.3.10)$$

per ognuno degli elettroni atomici; l'intervallo in energia in cui il fotoelettrico è l'effetto ampiamente predominante è quindi definito dai valori minimo e massimo di E_{lev} : per il Carbonio da pochi eV fino a 10keV e per il Piombo fino a circa 500keV. Poichè un atomo contiene Z elettroni, nelle figure sono visibili alcuni tipici picchi dell'effetto fotoelettrico. L'elettrone viene preferenzialmente emesso nella direzione di polarizzazione del fotone incidente, quindi perpendicolarmente alla direzione di volo del fotone incidente.

L'effetto Compton (su atomo)

$$\gamma + A \rightarrow \gamma + e^- + A^+, \quad (9.3.11)$$

avviene - tipicamente - per energie del fotone $E \gtrsim m_e c^2 \simeq 0.511\text{MeV}$, corrispondenti ad una lunghezza d'onda della luce minore o dell'ordine della lunghezza d'onda Compton dell'elettrone $h/(m_e c) \simeq 2.4 \times 10^{-12}\text{m}$. Poichè $m_e c^2 \gg I$ (I è l'energia di ionizzazione dell'atomo), l'elettrone in questo caso può essere considerato con ottima approssimazione un elettrone libero, mentre la parte restante dell'atomo agisce da spettatore.

È l'effetto principale per energie del fotone incidente dell'ordine del MeV. La sezione d'urto Compton su un atomo è la somma delle sezioni d'urto su tutti gli elettroni atomici, quindi è proporzionale al numero atomico Z . Questo è confermato da una osservazione della figura Fig. (6.1), dove si nota che il valore massimo della sezione d'urto Compton su Carbonio è circa 4b, quindi 6 volte il valore predetto a basse energie (eq 9.3.3). Per il Piombo ($Z = 82$) la teoria prevede un valore di 54b, pienamente compatibile con il dato sperimentale.

Notiamo infine un aspetto peculiare del comportamento in funzione dell'energia della sezione d'urto Compton su un atomo (in cui l'elettrone è in uno stato legato) rispetto ad un elettrone realmente libero: nel secondo caso a basse energie non vi è dipendenza dall'energia e si ha un valore costante di 0.66b, mentre nel primo caso a basse energie la sezione d'urto tende a zero. Questo comportamento dipende dal fatto che a basse energie non si riesce a trasferire all'elettrone una energia sufficiente a estrarlo dall'atomo. Nel seguente esercizio (di tipo "C") viene implementato un modellino molto naif per spiegare i dati sperimentali.

Esercizio 9.3.6: "C"

Per uno scattering Compton con fotoni non polarizzati a basse energie si approssimi la sezione d'urto differenziale con quella Thomson (eq. 9.3.2). Si calcoli la sezione d'urto totale su un elettrone atomico integrando sugli angoli per i quali viene trasferita all'elettrone una energia maggiore del suo potenziale di ionizzazione I . Produrre il grafico per $I = 1\text{eV}$ e $I = 10\text{keV}$

Soluzione: $-1 < \cos\theta < 1 - \frac{m_e I}{\omega(\omega-I)} \equiv 1 - K(\omega)$ con una soglia in energia pari a $\omega > \frac{I+\sqrt{I^2+2m_e I}}{2}$.

Integrando sull'angolo solido si ottiene $\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_e^2 (1 - \frac{3}{4} K(\omega) + \frac{3}{8} K^2(\omega) - \frac{1}{8} K^3(\omega))$.

La creazione di una coppia elettrone-positrone su nucleo

$$\gamma + N \rightarrow e^- + e^+ + N, \quad (9.3.12)$$

è una reazione che può avvenire solo se il fotone ha energia $E \gtrsim 2m_e \simeq 1.02\text{MeV}$, con il nucleo che assorbe una quantità di energia tipicamente trascurabile e una quantità significativa dell'impulso, in modo da rendere possibile il processo. È un utile esercizio calcolare l'energia e l'impulso trasferiti al nucleo da un fotone esattamente in soglia alla reazione. La sezione d'urto è proporzionale a Z^2 (confrontare i dati su C e Pb), il suo calcolo è "abbastanza" semplice con la meccanica quantistica relativistica.

La creazione di coppie **può avvenire anche su un elettrone**, $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$, ma in questo caso l'energia di soglia è più alta, risultando $4m_e \simeq 2.04\text{MeV}$; inoltre la sezione d'urto su un atomo è la somma delle sezioni d'urto su tutti gli elettroni e quindi proporzionale a Z .

Come corollario, abbiamo quindi che per ogni atomo $\sigma(k_e) = \frac{1}{Z}\sigma(k_{nuc})$

Esercizio 9.3.7: *Fotoni di 1keV (raggi X) incidono perpendicolarmente su una pellicola di grafite (densità $\rho = 2.26\text{g/cm}^3$). Calcolare la probabilità che un fotone attraversi la pellicola nei due casi: i) spessore $\Delta x = 0.1\mu\text{m} = 100\text{nm} = 10^{-5}\text{cm}$; ii) spessore $\Delta x = 10\mu\text{m} = 10^{-3}\text{cm}$.*

Risposta. Fotoni di 1keV hanno (si consulti un database) una sezione d'urto totale $\sigma_{tot} = 44.1\text{kb}$, praticamente tutta dovuta all'effetto fotoelettrico.

Per spessori sottili la probabilità di interagire è data dalla formula $P_{int} = n_s\sigma_{TOT} = n_C\Delta x\sigma_{TOT} = \frac{\rho_C N_{Av} M_C}{\Delta} x\sigma_{TOT} = \frac{\Delta x}{l}$, dove $l = \frac{M_C}{\rho_C N_{Av} \sigma_{TOT}} \approx 2\mu\text{m}$ è la "lunghezza di estinzione" o, anche, di "attenuazione".

Nel caso (i) abbiamo $P_{int} = \frac{\Delta x}{l} \approx 5\%$, che si può praticamente considerare «100%. Quindi la probabilità di passare è circa del 95%.

Nel caso (ii) otterremmo $P_{int} \approx 5$ (»1), che implicherebbe che nessun fotone attraversi lo spessore. Tuttavia lo spessore non è più sottile e quindi $P(x)$, la probabilità di non avere interagito e quindi di passare lo spessore Δx , vale $P(\Delta x) = e^{-\frac{\Delta x}{l}} \approx 6.7 \cdot 10^{-3} = 0.67\%$.

Esercizio 9.3.8: *Fotoni di energia 1MeV incidono perpendicolarmente su una lastra di Piombo di spessore Δx . Si osserva che su $N_{in} = 10000$ fotoni, $N_{out} = 9000$ attraversano il Piombo senza interagire. Calcolare lo spessore del Piombo.*

Risposta. Dal database si evince una sezione d'urto totale $\sigma = 24.4\text{b}$ (di cui circa 17 di effetto Compton e 7 fotoelettrico). Poiché solo il 10% dei fotoni interagiscono, si può considerare lo spessore sottile e scrivere $\sigma n \Delta x = \frac{N_{in} - N_{out}}{N_{in}} \approx 10\%$, da cui $\Delta x = \frac{10\%}{\sigma n} = \frac{10\%}{\sigma \frac{\rho N_{Av}}{M_{mole}}} \approx 1.24\text{mm}$ (dati utilizzati: densità del Pb 11.34g/cm^3 , peso atomico medio del Pb 206).

Notare che l'errore su Δx è binomiale: indicando con $p = \frac{N_{in}}{N_{out}}$ si ha $\frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N_{in}}} \approx 0.3\%$

Esercizio 9.3.9: *Fotoni (raggi X) di energia 10keV entrano in un grande spessore di acqua. All'ingresso la loro fluenza (definita come il numero di particelle per unità di superficie integrate nel tempo) è data $\phi(0) = 10^9/\text{cm}^2$. Calcolare l'energia rilasciata per unità di massa di acqua, grandezza che viene chiamata "dose" ed espressa in "Gray" (1 Gy = 1J/kg).*

Nota: fornire la risposta in funzione della profondità di penetrazione (x).

Nota: l'interazione dominante è l'effetto fotoelettrico; esso produce elettroni di energia molto bassa, tale che essi si fermano dopo aver percorso un tratto molto minore della lunghezza di attenuazione del fascio di fotoni.

Traccia della soluzione. La probabilità di interazione per unità di lunghezza è $\frac{dP}{dx} = n\sigma_{tot} = \frac{\rho_{acqua} N_{Av}}{M_{acqua}} \equiv \frac{1}{l} \equiv \mu \equiv \rho_{acqua} \tilde{\mu}$, dove abbiamo anche definito il coefficiente di assorbimento $\tilde{\mu} = \frac{N_{Av} \sigma_{tot}}{M_{acqua}}$ che è uno dei dati direttamente ottenibili dal database. Nel caso specifico (fotoni da 10keV in acqua) si ha $M_{acqua} = 18\text{g}$; consultando il database si trova $\tilde{\mu} = 5.3\text{cm}^2/\text{g}$, da cui $l = \frac{1}{\rho_{acqua} \tilde{\mu}} = 1.9\text{mm}$. La fluenza in funzione della profondità risulta essere $\phi(x) = \phi(0)e^{-x/l}$.

Ad una profondità x il numero di fotoni che interagiscono per unità di volume è $\frac{dN}{dV} = \frac{d^2N}{dAdx} = -\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{\phi(0)}{l} e^{-x/l}$, da cui otteniamo la dose in funzione della profondità: $D(x) = \frac{E_\gamma}{\rho_{acqua}} \frac{dN}{dV} =$

$\frac{E_\gamma}{\rho_{acqua}} \frac{\phi(0)}{l} e^{-x/l} = \tilde{\mu} E_\gamma \phi(0) e^{-x/l}$. La dose ha un andamento esponenzialmente decrescente, con il massimo in $x = 0$: $D(0) = \tilde{\mu} E_\gamma \phi(0) \approx 8.5 \cdot 10^{-3} = 8.5 \text{ mGy}$ (milliGray).

Nota: per utilizzi radiografici si utilizzano fotoni di energia superiore, per esempio una energia di 46 keV , per la quale si ha un coefficiente di assorbimento in acqua o tessuto muscolare $\tilde{\mu} \approx 0.22 \text{ cm}^2/\text{g}$, in modo da avere una migliore discriminazione con il tessuto osseo ($\tilde{\mu} \approx 0.69 \text{ cm}^2/\text{g}$).

9.3.3 La sezione d'urto protone-protone (interazione forte)

I protoni (come tutte le altre particelle denominate "adroni": i nuclei, il neutrone, il pion, il K, ed altre) effettuano, in aggiunta alle interazioni elettromagnetiche ed alle interazioni deboli, l'interazione "forte", che è caratterizzata da un raggio di azione ("regione di interazione") $\sim 1 \text{ fm}$ e che in questa regione ha una sezione d'urto decisamente superiore a quella delle forze elettromagnetiche e deboli. In figura ?? sono riportate le sezioni d'urto, elastica e totale, della reazione protone-protone in funzione dell'energia (\sqrt{s}) nel centro di massa nell'intervallo $2m_p - 10^5 \text{ GeV}$, oppure della quantità di moto di un protone nel sistema in cui l'altro sia inizialmente a riposo.

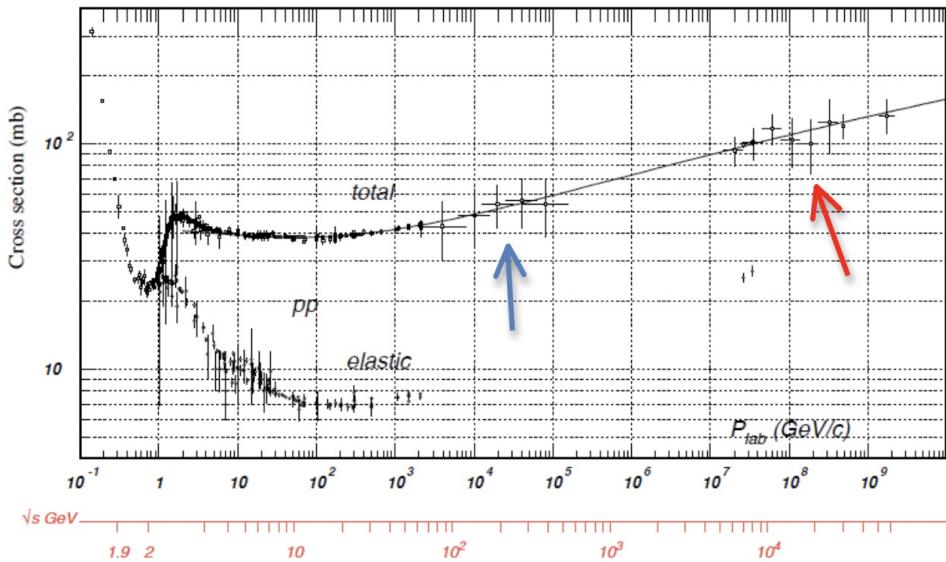


Figura 9.6: Sezione d'urto protone-protone in funzione dell'energia

Si nota che la sezione d'urto è puramente elastica fino a $\sqrt{s} \sim 2.01 \text{ GeV}$ (energia di soglia del processo $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$); per energie maggiori la sezione d'urto elastica diminuisce (ma non si azzera mai, vedi il "teorema ottico") mentre quella totale aumenta in quanto si possono realizzare un numero sempre crescente di processi inelastici. I gruppi di dati indicati dalle frecce sono quelli del SpS (Cern), Tevatron (Fermilab) ed LHC (Cern). Valori tipici delle sezioni d'urto forti sono $\sim 40 \text{ mb}$, che come ordine di grandezza è proprio $\pi(1 \text{ fm})^2$.

9.3.4 La sezione d'urto e^+e^- in adroni (interazione elettrodebole)

In figura ?? è riportata la sezione d'urto della reazione $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$ in funzione dell'energia (\sqrt{s}) nel centro di massa.

Si nota una decrescita come $1/s$ e si notano, a $\sim 1 \text{ GeV}$, $\sim 3 \text{ GeV}$, $\sim 30 \text{ GeV}$, $\sim 90 \text{ GeV}$ dei picchi anche molto rilevanti: si tratta di RISONANZE, con un comportamento del tutto simile alle risonanze di fotoni su atomi. Questo fenomeno è legato alla proprietà ONDULATORIA delle

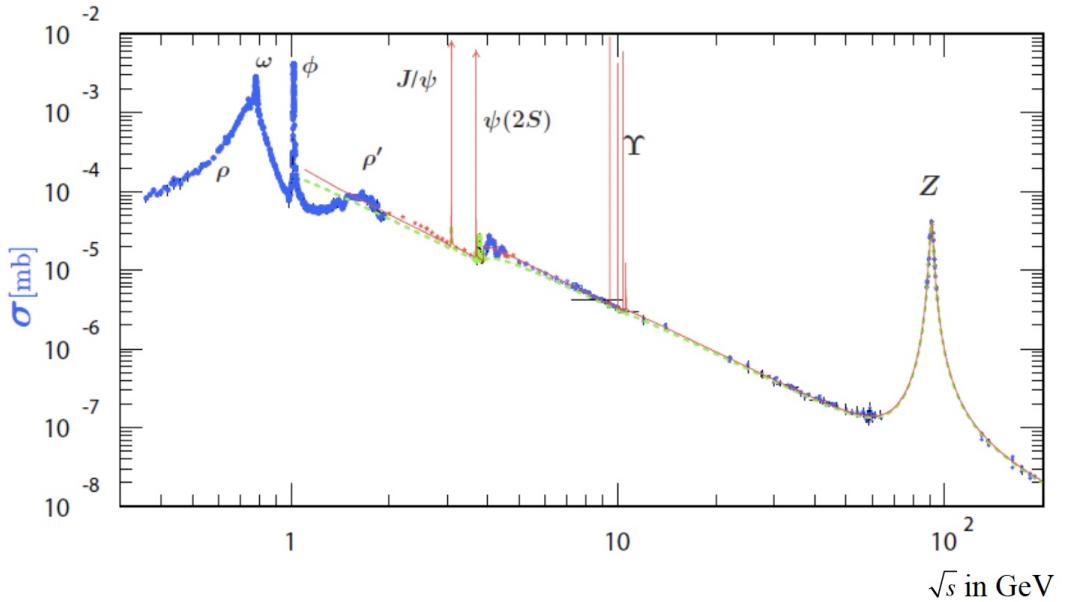


Figura 9.7: Sezione d'urto elettrone-positrone in adroni in funzione dell'energia

particelle, ed in definitiva al dualismo onda-corpuscolo.

Nella regione centrale, compresa fra 5 e 50GeV , si può effettuare un fit, ottenendo come risultato $\sigma \approx \frac{400\text{nb}\cdot\text{GeV}^2}{s}$.

Per quanto riguarda le risonanze osservate, possiamo dire che l'espressione della sezione d'urto in funzione dell'energia in prossimità di una risonanza di massa M_R è sempre esprimibile con una funzione di Breit-Wigner, ma con le seguenti modifiche o considerazioni:

- la frequenza angolare si sostituisce con l'energia nel centro di massa $\omega \rightarrow \frac{\sqrt{s}}{\hbar}$ e $\omega_0 \rightarrow \frac{M_R}{\hbar}$;
- la larghezza totale ha una dipendenza da \sqrt{s} definita dalla dinamica del processo, che in ultima analisi è l'argomento dell'indagine sperimentale;
- si dovranno effettuare le dovute modifiche per considerare il momento angolare intrinseco (spin) delle particelle nello stato iniziale e finale, ed i loro stati di polarizzazione.

L'interazione elettrone-positrone ha sia una componente elettromagnetica, responsabile della decrescita della sezione d'urto come $1/s$, sia una componente debole, che contribuisce per esempio alle proprietà della risonanza Z_0 e di altri importanti effetti (predicibili teoricamente e verificati sperimentalmente). Per questi motivi si parla di interazione elettrodebole.

Per esercizio: cercare altri stati risonanti in pdg.lbl.gov

9.3.5 La sezione d'urto di neutrini e antineutrini su singolo nucleone (interazione debole)

Il neutrino (e la sua antiparticella, l'antineutrino) non effettuano interazioni forti o elettromagnetiche, ma solo interazioni "deboli", così chiamate per i valori straordinariamente piccoli (rispetto a quelli delle interazioni elettromagnetiche) delle sezioni d'urto che li coinvolgono.

Ricordiamo che i neutrini hanno masse che sono praticamente trascurabili in quasi tutte le situazioni che si presentano in questo corso, e che si presentano in tre specie: elettronici (ν_e , $\bar{\nu}_e$), muonici (ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$), e tauonici (ν_τ , $\bar{\nu}_\tau$).

Inoltre le interazioni di neutrini su un qualunque bersaglio possono essere di due tipi: di "corrente carica" (CC) o di "corrente neutra" (NC).

Nell'interazione CC il neutrino si trasforma nel leptone carico della propria specie:

$$\begin{aligned}\nu_e + b &\rightarrow e^- + X, \bar{\nu}_e + b \rightarrow e^+ + X, \\ \nu_\mu + b &\rightarrow \mu^- + X, \bar{\nu}_\mu + b \rightarrow \mu^+ + X, \\ \nu_\tau + b &\rightarrow \tau^- + X, \bar{\nu}_\tau + b \rightarrow \tau^+ + X,\end{aligned}$$

con b bersaglio e X un qualunque stato finale accessibile.

Nell'interazione NC il neutrino resta invariato, ma il bersaglio può cambiare la propria natura (naturalmente rispettando tutte le leggi di conservazione note):

$$\begin{aligned}\nu_e + b &\rightarrow \nu_e + X, \bar{\nu}_e + b \rightarrow \bar{\nu}_e + X, \\ \nu_\mu + b &\rightarrow \nu_\mu + X, \bar{\nu}_\mu + b \rightarrow \bar{\nu}_\mu + X, \\ \nu_\tau + b &\rightarrow \nu_\tau + X, \bar{\nu}_\tau + b \rightarrow \bar{\nu}_\tau + X,\end{aligned}$$

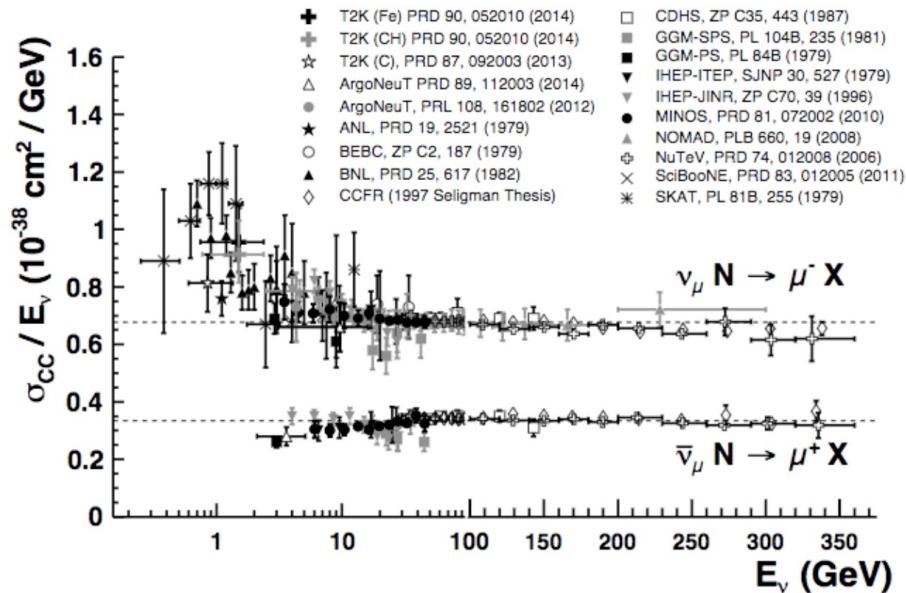


Figura 9.8: Sezione d'urto (CC) neutrino o antineutrino su singolo nucleone in funzione dell'energia

Le sezioni d'urto totali cariche (CC) per neutrini o antineutrini su un singolo nucleone sono - a grandi energie - linearmente proporzionali all'energia del neutrino nel sistema in cui il nucleone è a riposo. Per questo motivo nella figura ?? le sezioni d'urto totali cariche (CC) per neutrini o antineutrini di tipo μ sono divise per la propria energia e tale quantità è riportata in ordinata. L'energia dei neutrini è riportata in ascissa, dove si noti il cambio di scala (da logaritmica a lineare) a 100GeV .

Ad alte energie la sezione d'urto CC di neutrini su nucleoni è doppia rispetto a quella degli antineutrini:

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu N}^{CC} &\approx 7 \cdot 10^{-39} \text{ cm}^2 \cdot E_\nu(\text{GeV}) \\ \sigma_{\bar{\nu} N}^{CC} &\approx 3.5 \cdot 10^{-39} \text{ cm}^2 \cdot E_{\bar{\nu}}(\text{GeV})\end{aligned}\tag{9.3.13}$$

Le sezioni d'urto NC sono in genere minori, ma non trascurabili, rispetto alle CC.

Esercizio 9.3.10: Calcolare la probabilità che un neutrino di energia 1GeV interagisca attraversando la Terra lungo un suo diametro.

Risposta. Ad 1GeV la sezione d'urto è $\sigma_{\nu N} \approx 10^{-38} \text{ cm}^2 = 10 \text{ fb}$. Poichè la densità Terra vale 5.5 g/cm^3 , ricordando che la massa del protone vale $1g/N_{Av} = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$, si ricava la concentrazione dei nucleoni $n_{\text{nucleoni}} = \frac{\rho N_{Av}}{1g} \approx 3.3 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-3}$. Quindi, ricordando che il raggio terrestre vale $R = 6378 \text{ km}$, la probabilità di interagire vale $P = 2R n_{\text{nucleoni}} \sigma_{\nu N} \approx 4.2 \cdot 10^{-5}$: la Terra è uno "spessore sottile" per un neutrino!

9.4 La sezione d'urto Rutherford

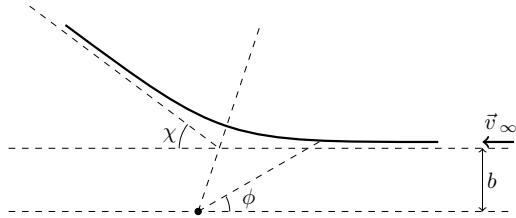


Figura 9.9: La geometria della sezione d'urto Rutherford.

Consideriamo il caso in cui un fascio di particelle puntiformi (non interagenti tra loro) di massa μ incida su un centro diffusore fisso che interagisce con le particelle con un campo centrale. La sezione d'urto differenziale di diffusione si definisce come il numero di particelle che vengono deflesse di un certo angolo solido nell'unità di tempo per unità di densità di corrente incidente, quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{J} \frac{dN(\Omega)}{dt}, \quad (9.4.1)$$

dove $N(\Omega)d\Omega$ è il numero di particelle che vengono diffuse nell'angolo solido $d\Omega$ intorno ad Ω e J è il valore della densità di corrente di particelle incidente (numero di particelle per unità di superficie per unità di tempo).

Il problema ha ovviamente una simmetria cilindrica, in cui l'asse è l'asse del fascio, e per il calcolo della sezione d'urto risulta conveniente fare uso del parametro di impatto b (vedi Fig. (9.9)). Supponiamo infatti di conoscere la relazione che intercorre tra il valore l'angolo di scattering χ ed il valore del parametro di impatto b , sia essa $b(\chi)$. Il numero di particelle che verranno deflesse con angolo compreso tra χ e $\chi + d\chi$ è allora il numero di particelle che incidono con parametro di impatto compreso tra $b(\chi)$ e $b(\chi) + |db(\chi)|$ e questo numero è (usando la simmetria cilindrica)

$$N(\Omega) d\Omega = 2\pi b |db| J t = J t 2\pi b(\chi) \left| \frac{db(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (9.4.2)$$

A causa della simmetria cilindrica è conveniente scrivere l'elemento di angolo solido nella forma $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ e quindi si ottiene infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (9.4.3)$$

Per procedere oltre è necessario trovare la relazione tra il parametro d'impatto b e l'angolo di scattering χ , che ovviamente dipende dalla forma specifica del potenziale di interazione. Nel caso dell'interazione Coulombiana $U(r) = \frac{e_1 e_2}{r}$ si riesce a scrivere la relazione $b(\chi)$ in forma chiusa e si può procedere in diversi modi (vedi ad es. [35] §18-19, [36] §11.6, [37] §2.2).

Se indichiamo con v_∞ il valore assoluto della velocità delle particelle del fascio quando sono lontane dal bersaglio, allora la conservazione del momento angolare assiale assume la forma

$$L_z = \mu r^2 \dot{\phi} = \mu v_\infty b, \quad (9.4.4)$$

dove ϕ è l'angolo tra l'asse del fascio e la posizione della particella (vedi Fig. (9.9)). Se identifichiamo il piano di scattering mostrato in Fig. (9.9) con il piano xy , allora l'impulso ha inizialmente componente nulla lungo la direzione \hat{y} , quindi si ha

$$p_y = \Delta p_y = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt , \quad (9.4.5)$$

dove F_y è la componente y della forza. Dalla conservazione del momento angolare assiale si ha inoltre $dt = \frac{r^2}{v_\infty b} d\phi$, quindi (usando il fatto che l'urto è elastico, quindi il modulo dell'impulso è lo stesso prima e dopo l'urto)

$$\mu v_\infty \sin \chi = \frac{1}{v_\infty b} \int_0^{\pi - \chi} F_y r^2 d\phi . \quad (9.4.6)$$

Dalla forma esplicita di \vec{F} si ha allora

$$\mu v_\infty \sin \chi = \frac{e_1 e_2}{v_\infty b} \int_0^{\pi - \chi} \sin \phi d\phi = \frac{e_1 e_2}{v_\infty b} (1 + \cos \chi) , \quad (9.4.7)$$

che usando $\sin \chi = 2 \sin(\chi/2) \cos(\chi/2)$ e $\cos(\chi) = 2 \cos^2(\chi/2) - 1$ si può scrivere come

$$b = \frac{e_1 e_2}{\mu v_\infty^2} \frac{1}{\tan(\chi/2)} \quad (9.4.8)$$

La derivata del parametro di impatto rispetto all'angolo di scattering è quindi data da

$$\frac{db}{d\chi} = -\frac{e_1 e_2}{2 \mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2(\chi/2)} \quad (9.4.9)$$

ed abbiamo tutti gli ingredienti da usare nell'espressione Eq. (9.4.3), quindi si ottiene infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e_1 e_2}{2 \mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)} \quad (9.4.10)$$

che è la forma standard della sezione d'urto Rutherford. Un modo diverso di riscrivere questa sezione d'urto usa l'impulso trasferito $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$, dove \vec{p} e \vec{p}' sono gli impulsi prima e dopo l'urto. Poichè l'urto è elastico si ha $p = p'$, quindi

$$q^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2 = 2p^2(1 - \cos \chi) = 4p^2 \sin^2(\chi/2) \quad (9.4.11)$$

e poichè si ha ovviamente $p = \mu v_\infty$ si può scrivere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2 \mu e_1 e_2}{q^2} \right)^2 . \quad (9.4.12)$$

Riscriviamo adesso le equazioni 9.4.8 e 9.4.10 nel caso una particella di carica ze e massa m su un nucleo atomico di carica Ze , ipotizzando che il nucleo bersaglio sia così pesante da essere considerato fisso: in questo caso l'angolo χ coincide con quello che su bersaglio fisso abbiamo chiamato angolo di scattering θ .

Eq. 9.4.8 diventa

$$b = \frac{z Z e^2}{m v_\infty^2} \frac{1}{\tan(\theta/2)} = \frac{d}{2} \cot(\theta/2) \quad (9.4.13)$$

con

$$d \equiv z Z \frac{\alpha \hbar c}{T} = z Z \frac{1.44 MeV \cdot fm}{T} \quad (9.4.14)$$

dove

$$T = \frac{mv_\infty^2}{2} \quad (9.4.15)$$

Nell'ipotesi in cui proiettile e bersaglio hanno entrambi imensioni trascurabili e cariche concordi di segno, la grandezza d rappresenta la minima distanza fra di loro nel caso di urto a parametro di impatto nullo ($b = 0$). E' inoltre importante notare che il parametro di impatto b non è una grandezza fisica che sia - di solito - possibile misurare direttamente, mentre l'angolo di scattering lo è : le relazioni 9.4.8 o 9.4.14 sono quindi importanti per 'ricostruire' il valore di b dalla misura di θ .

Esercizio 9.4.1: *Dimostrare che d è effettivamente la distanza minima fra proiettile e bersaglio, quest'ultimo assunto di massa infinita, nell'ipotesi in cui entrambi hanno cariche concordi e dimensioni trascurabili, nel caso di urto a parametro di impatto nullo ($b = 0$).*

Eq. 9.4.10 diventa una delle espressioni più note ed utilizzate della sezione d'urto Rutherford :

$$\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} = \frac{(zZ\alpha\hbar c)^2}{16T^2 \sin^4(\theta/2)} = \frac{d^2}{16} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (9.4.16)$$

Notiamo che la sezione d'urto totale di uno scattering Rutherford diverge a causa del comportamento a piccoli angoli θ , i.e. a grandi parametri di impatto (ricordare le relazioni 9.4.8 o 9.4.14):

$$\sigma_{Ruth}^{tot} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi \rightarrow \infty \quad (9.4.17)$$

Tuttavia, quando si considera l'urto di particelle cariche veloci con nuclei di massa molto grande, tali nuclei sono all'interno di materia elettricamente neutra, per esempio all'interno di atomi. Quindi la particella veloce sentirà la forza di Coulomb solo a distanze dal nucleo inferiori al raggio atomico a (tipicamente $a \sim 0.5 \text{ \AA}$) per cui possiamo scrivere che $b < a$ e, utilizzando l'equazione 9.4.13 si può calcolare l'angolo minimo di deflessione θ_{min} :

$$\theta_{min} = 2 \arctan \frac{d}{2a} \approx \frac{d}{a} \quad (9.4.18)$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $d \ll a$.

La presenza di un angolo minimo rende finito l'integrale 9.4.17:

$$\sigma_{Ruth}^{tot} = \int_{\theta_{min}}^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi \approx \pi a^2 \quad (9.4.19)$$

Esercizio 9.4.2: *Scrivere l'eq. 9.4.12 nelle stesse ipotesi effettuate per la trascrizione dell'equazione 9.4.10*

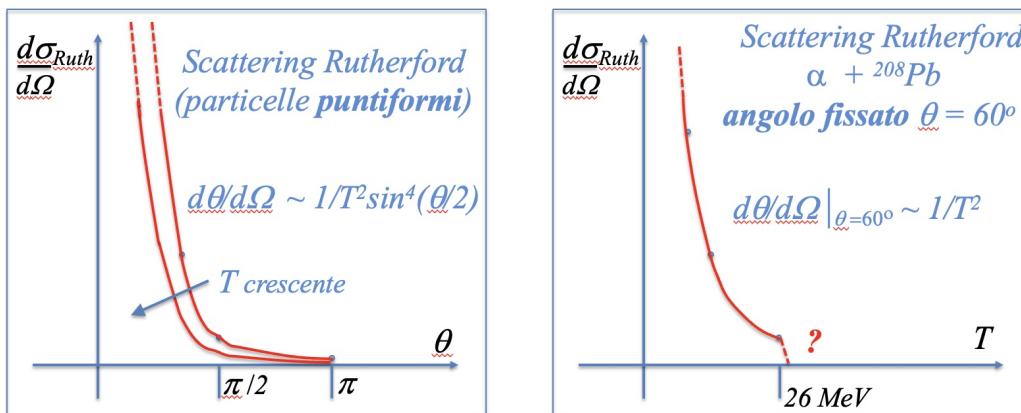
Esercizio 9.4.3: *Per una particella α di energia cinetica 10 MeV che incide su un atomo di Argon (di massa molto grande rispetto alla particella) si calcoli l'angolo minimo di deflessione ed il valore medio dell'impulso trasferito.*

9.4.1 Misura dei raggi nucleari tramite lo scattering Rutherford

Lo scattering Rutherford è stato fondamentale per comprendere la natura interna dell'atomo ed in particolare per la misura dei raggi dei nuclei (di solito indicati con R_A , dove A è il peso atomico). Anticipiamo che i raggi nucleari, oltre che avere aperto la finestra sulle interazioni forti, hanno un impatto importante sugli effetti che derivano dallo scattering Rutherford e dalla sua estensione relativistica, lo scattering Mott: il multiplo scattering, la bremsstrahlung (radiazione di frenamento) e la perdita di energia per collisioni.

Ricordiamo che un esperimento di scattering Rutherford si realizza inviando una dopo l'altra un certo numero di particelle α di energia cinetica nota perpendicolarmente ad una lamina sottile di bersagli, per esempio una lamina sottile di Piombo. Ogni particella attraversa un certo numero di atomi di Piombo, ma - se la lamina è sufficientemente sottile - nella maggior parte dei casi l'angolo di scattering sarà prevalentemente dovuto all'urto con solo un nucleo.

Ad ogni "evento" (i.e. passaggio di una particella) l'angolo di scattering θ viene misurato e il numero di eventi per angolo solido in funzione di θ viene riportato in una tabella e/o in un grafico. Poiché siamo nella situazione "Flusso di particelle su bersaglio fisso", possiamo utilizzare quanto già detto per risalire alla sezione d'urto differenziale dal numero di eventi per angolo solido, e quindi produrre un grafico come quello nella figura di sinistra.



L'esperimento può essere anche realizzato mettendo un rivelatore ad un unico angolo (per esempio 60 gradi nel caso del più famoso esperimento realizzato da Rutherford) e variando l'energia cinetica (T) delle particelle α incidenti. La dipendenza da T è come indicato nella figura di destra, dove si nota che esiste un valore dell'energia cinetica (26 MeV) oltre il quale i dati sperimentali non verificano più la previsione teorica.

L'interpretazione, verificata poi con molti altri esperimenti, è che la particella α ed il nucleo di Piombo abbiano una estensione spaziale e che **quando arrivano a "toccarsi" si manifesta una interazione di nuovo tipo**, diversa da quella elettromagnetica ma molto più forte: l'**interazione forte**.

È quindi importante saper calcolare la minima distanza, che qui indichiamo con x , raggiunta fra due particelle in uno scattering Rutherford in funzione delle grandezze fisiche misurabili: l'energia cinetica del proiettile e l'angolo di scattering.

Utilizziamo la conservazione dell'energia e del momento angolare fra lo stato iniziale e l'istante in cui si raggiunge la minima distanza con velocità di modulo V_m :

$$mV_\infty b = mV_m x \Rightarrow V_m = \frac{b}{x} V_\infty \quad (9.4.20)$$

$$\frac{1}{2}mV_\infty^2 = \frac{1}{2}mV_m^2 + \frac{zZ\alpha\hbar c}{x} \quad (9.4.21)$$

da cui

$$\frac{1}{2}mV_\infty^2 = \frac{1}{2}mV_m^2 + \frac{zZ\alpha\hbar c}{x}. \quad (9.4.22)$$

Ricordando le equazioni 9.4.13, 9.4.14 e 9.4.15 otteniamo

$$T = T \frac{b^2}{x^2} + \frac{zZ\alpha\hbar c}{x} \Rightarrow T = T \frac{b^2}{x^2} + T \frac{d}{x} \Rightarrow x^2 - d \cdot x - \frac{d^2}{4} \cotan^2 \frac{\theta}{2} = 0 \quad (9.4.23)$$

(anche esprimibile come

$$x^2 - d \cdot x - b^2 = 0 \quad) \quad (9.4.24)$$

da cui

$$x = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right). \quad (9.4.25)$$

Notiamo che nei casi particolari $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ si ha, rispettivamente $x \rightarrow \infty$ e $x = d$, come prevedibile.

I raggi nucleari ed il modello a "goccia" dei nuclei

Le osservazioni sperimentali nello scattering Rutherford dimostrano che il nucleo atomico ha una dimensione finita e che la somma dei raggi dei due nuclei è uguale alla distanza di minimo avvicinamento in uno scattering Rutherford per la quale cessano di valere le previsioni della legge di Coulomb. Quindi, sempre indicando con x la grandezza data dall'eq. ??, si ha, nel caso particolare della reazione elastica $\alpha + {}^{208}Pb$ in cui si osserva la cessazione della validità del solo elettromagnetismo a $T = 26MeV$ e $\theta = 60^\circ$:

$$R_{He} + R_{Pb} = x = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right) = \frac{9.1fm}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin 30^\circ} \right) \approx 13.6fm. \quad (9.4.26)$$

Con una serie di esperimenti Rutherford è possibile misurare a due a due le somme dei vari raggi nucleari e quindi si è riusciti a misurarli.

I risultati sperimentali fittano molto bene con il cosiddetto **modello a goccia** dei nuclei, che prevede per i nuclei di numero atomico $A > 4$ un raggio R_A

$$R_A \approx r_0 + r_{skin} \approx \left(1.25A^{1/3} + 2.0 \right) fm. \quad (9.4.27)$$

Nel caso dei singolo nucleone (protone o neutrone) il raggio è semplicemente

$$R_A \approx r_0 \approx 1.25fm. \quad (9.4.28)$$

Una breve spiegazione sul modello a goccia e sull'energia di legame (usualmente detta **B = Binding Energy**) dei nuclei si trova nell'appendice B, di cui consigliamo la lettura.

Qui rimarchiamo un risultato fondamentale: la sola interazione coulombiana non può confinare in uno spazio così ristretto Z protoni. Occorre quindi ipotizzare l'**esistenza di una nuova forza "forte" fra due nucleoni qualsiasi** che:

- a distanze dell'ordine di $1 \sim fm$ sia attrattiva e di modulo superiore a quella coulombiana, pur andando velocemente a zero per distanze maggiori;

- l'energia potenziale di tale forza sia in gradi di bilanciare l'energia dovuta alla repulsione elettrostatica fra due protoni posti a distanza $2r_0 \approx 2.5\text{fm}$:

$$-U_{forte} > \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2r_0} = \frac{\alpha\hbar c}{2r_0} \approx 0.6\text{MeV} \quad (9.4.29)$$

Esercizio 9.4.4: Per la reazione elastica $\alpha + {}^{208}\text{Pb}$ verificare la compatibilità del risultato 9.4.26 con la previsione del modello a goccia 9.4.27.

Risposta. L'accordo è ottimo:

$$R_{He} + R_{Pb} \approx (1.25\sqrt[3]{4} + 2.0) \text{ fm} + (1.25\sqrt[3]{208} + 2.0) \text{ fm} \approx 13.4 \text{ fm}. \quad (9.4.30)$$

Precisazione importante. Come sapete ogni grandezza fisica è una entità misurabile definita tramite uno strumento di misura riproducibile. Nel caso dei raggi nucleari vi sono [almeno] due strumenti di misura:

- lo scattering Rutherford (appena descritto);
- lo scattering Mott (vedi apposita sezione) di elettroni veloci su nuclei accoppiato al formalismo dei fattori di forma vedi capitolo 6

I due metodi danno risultati apparentemente differenti, in quanto Rutherford misura il raggio esterno di tutta la materia nucleare (protoni e neutroni), mentre Mott misura il raggio quadratico medio delle cariche elettriche in un nucleo.

Anche nel caso dei **raggi atomici** (vedi appendice B) vi sono metodi diversi di misura:

- tramite la misura con raggi X della distanza fra i centri di due atomi nei legami ionici ("raggio ionico");
- tramite la misura con raggi X della distanza fra i centri di due atomi nei legami covalenti ("raggio covalente");
- tramite lo scattering Rayleigh o l'urto elastico di elettroni veloci su atomi ed il formalismo dei fattori di forma ("raggio quadratico medio").

Un modello utilizzato per spiegare i dati sul raggio quadratico medio della distribuzione degli elettroni all'interno di un atomo è il modello di Thomas-Fermi, che predice

$$R_{atomo} \approx \frac{1.4a_0}{Z^{1/3}} \quad (9.4.31)$$

con

$$a_0 \approx 0.53A^o \quad (9.4.32)$$

9.4.2 Esercizi sulla sezione d'urto Rutherford

Esercizio 9.4.5: Calcolare l'energia cinetica minima T_{min} che un protone deve avere per "toccare" un nucleo di ${}^{12}\text{C}$ per i seguenti tre valori diversi dell'angolo di scattering: i) $\theta = \pi$, ii) $\theta = \pi/3$, iii) $\theta = 100\text{mr}$. (Per semplificare si può approssimare il nucleo di carbonio come molto pesante)

Risposta. Da eq. 9.4.14 otteniamo $d \approx \frac{8.64\text{fm}}{T}$, mentre utilizzando l'eq. 9.4.27 e 9.4.28 la somma dei raggi del protone e del nucleo di Carbonio risulta essere $R_p + R_C \approx 6.11\text{fm}$. La distanza di minimo avvicinamento è data dall'eq. 9.4.25, per cui la condizione per il contatto risulta essere $R_p + R_C > \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \theta/2}\right)$. Sostituendo i valori numerici trovati si ottiene $T > 0.707\text{MeV} \left(1 + \frac{1}{\sin \theta/2}\right)$, quindi: i) $T > 1.41\text{MeV}$, ii) $T > 2.12\text{MeV}$, iii) $T > 14.9\text{MeV}$.

Esercizio 9.4.6: Si calcoli la probabilità di avere un angolo di scattering superiore a 10mrad per particelle α di energia $T = 52\text{MeV}$ che incidono perpendicolarmente su una lamina di spessore

$10\mu m$ di ^{208}Pb . Effettuare la stessa valutazione per $T = 13MeV$.

[Risposte: Per $T = 52MeV$ la sezione d'urto è $\sim 6.2kb$ e la probabilità vale $\sim 20\%$. Per $T = 13MeV$ la sezione d'urto è $\sim 56kb$ e la probabilità vale ~ 18 , i.e. non si può definire una probabilità ma un numero medio di collisioni con angolo superiore a $10mrad$ (purchè la particella non defletta troppo da una linea retta durante l'attraversamento della lamina).

Esercizio 9.4.7: Particelle α di energia cinetica $30MeV$ incidono perpendicolarmente su una lamina di ^{208}Pb . Si fornisca una stima dello spessore massimo della lamina affinchè la probabilità di singola particella di effettuare due scattering, entrambi con deflessione superiore ad 1 grado, sia minore del 1%.

Esercizio 9.4.8: (di tipo "c")

Avendo ipotizzato un semplice modello per cui in meccanica classica l'interazione forte fra due nuclei avviene se si trovano a contatto, calcolare la sezione d'urto forte per l'urto $p + ^{198}_{80}Hg_{118}$ in funzione dell'energia T del protone incidente.

Risposta. La sezione d'urto richiesta è, per definizione, pari a $\sigma_{forte} = \pi\tilde{b}^2$, dove \tilde{b} è quel valore del parametro di impatto per cui il protone tocca il nucleo di Mercurio. Il valore di \tilde{b} si ricava direttamente dall'eq. 9.4.24, dove si deve porre che la distanza x di massimo avvicinamento sia $x = R_p + R_{Hg}$. Quindi $(R_p + R_{Hg})^2 - d \cdot (R_p + R_{Hg}) - \tilde{b}^2 = 0$, da cui

$$\begin{aligned}\sigma_{forte} &= \pi((R_p + R_{Hg})^2 - d \cdot (R_p + R_{Hg})) = \pi(R_p + R_{Hg})^2 \left(1 - \frac{zZ\alpha\hbar c}{T(R_p + R_{Hg})}\right) = \\ &= \pi(R_p + R_{Hg})^2 \left(1 - \frac{T_{min}}{T}\right), \text{ avendo definito } T_{min} = \frac{zZ\alpha\hbar c}{(R_p + R_{Hg})} \text{ come l'energia cinetica "di soglia",} \\ &\text{i.e. quella minima afinchè nella condizione più favorevole (}b = 0\text{) il protone tocchi il nucleo. Notare come per }T \rightarrow \infty\text{ la sezione d'urto diventi correttamente } \pi(R_p + R_{Hg})^2,\text{ in quanto il moto del protone è praticamente una linea retta.}\end{aligned}$$

Esercizio 9.4.9: (di tipo "c")

Particelle α di energia cinetica $T = 100MeV$ incidono perpendicolarmente su una lamina di atomi di ^{208}Pb . Nell'urto su un singolo atomo si possono distinguere due casi: (i) la distanza minima fra il centro della particella ed il nucleo è compresa fra la somma dei raggi ed il raggio atomico del Pb; (ii) la distanza minima fra il centro della particella ed il nucleo è inferiore alla somma dei raggi. Nel caso (ii) si supponga - per semplicità - che tutta la quantità di moto della particella α venga trasferita al nucleo. Si calcoli la pressione che un fascio di queste particelle di flusso $j_\alpha = 10^8 cm^{-2}s^{-1}$ esercita su una lamina di Piombo di spessore $\delta = 1\mu m$. Nota: il raggio atomico del Pb vale $a \approx 20pm$.

Risposta.

Dall'eq. 9.4.14 ricaviamo $d \approx 2.2fm$; la somma dei raggi vale $R_{sum} = R_\alpha + R_{Pb} \approx 13.5fm$. Il valore limite \tilde{b} del parametro di impatto fra il caso (i) ed il caso (ii) si ricava tramite l'eq. 9.4.24: $\tilde{b} = \sqrt{R_{sum}(R_{sum} - d)} \approx 12.4fm$.

La densità superficiale dei bersagli è $n_s = \frac{\rho_{Pb}N_{Av}}{M_{mole}e_Pb}\delta \approx 3.3 \cdot 10^{18} cm^{-2}$ e, indicando con $\Delta P_{//}$ la quantità di moto trasferita al nucleo in un singolo urto, la pressione cercata è: $P = j_\alpha \int \Delta P_{//} n_s d\sigma$.

Nel caso (ii) si ha $\Delta P_{//} = mV_\infty = \sqrt{2mT} = \sqrt{2 \cdot 3728 MeV/c^2 \cdot 100 MeV} \approx 860 MeV/c = 4.6 \cdot 10^{-19} kg \cdot m/s$, mentre nel caso (i) si ha $\Delta P_{//} = mV_\infty(1 - \cos\theta) = mV_\infty \frac{2d^2}{4b^2 + d^2}$.

Possiamo quindi concludere il calcolo: $P = P_i + P_{ii} \approx 9 \cdot 10^{-12} Pa$ con:

$$P_i = n_s j_\alpha \int_b^a mV_\infty \frac{2d^2}{4b^2 + d^2} 2\pi b db = \frac{\pi}{2} n_s j_\alpha mV_\infty \ln \frac{a^2 + d^2/4}{b^2 + d^2/4} \approx 1.7 \cdot 10^{-12} Pa;$$

$$P_{ii} = n_s j_\alpha \int_0^{\tilde{b}} mV_\infty 2\pi b db = \pi \tilde{b}^2 n_s j_\alpha mV_\infty \approx 7.3 \cdot 10^{-12} Pa.$$

9.5 Sezione d'urto Mott

Un modo molto importante di sondare la materia nucleare o i singoli adroni (per esempio un protone isolato, ma anche neutroni, pioni, etc...) è quello di misurare la sezione d'urto elastica fra uno di loro ed elettroni di alta energia. Potete pensare ad un esempio pratico come lo scattering elastico



Da un punto di vista puramente classico (i.e. ignorando totalmente la meccanica quantistica) si nota che quando l'elettrone attraversa il nucleo, poiché la forza è proporzionale alla carica interna alla traiettoria dell'elettrone, la deflessione sia minore rispetto a quanto previsto da uno scattering su un nucleo di carica Ze che fosse puntiforme.

Ricordando che l'angolo di scattering aumenta al diminuire del parametro di impatto, la sezione d'urto differenziale $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ all'aumentare dell'angolo di scattering θ sarà minore di quella su nucleo puntiforme. Confrontando la previsione teorica con i dati sperimentali, si misura la distribuzione della carica elettrica all'interno del nucleo. Ipotizzando che la carica elettrica sia, più o meno, distribuita come la massa nucleare (assunzione non scontata, ma in prima istanza ragionevole) si può quindi avere una misura del raggio nucleare, che - come già detto - può differire leggermente dalla misura ottenuta in un esperimento Rutherford con particelle α .

Da un punto di vista quantistico si considera l'elettrone come un'onda di DeBroglie che interagisce elettromagneticamente con le cariche contenute nel nucleo. In questo schema, la sezione d'urto differenziale su un nucleo di spin nullo è legata (vedi ref ...) a quella su una singola carica puntiforme priva di spin (denominata **sezione d'urto Mott**) dalla relazione:

$$\frac{d\sigma_Z}{d\Omega} = Z^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} |F(\theta)|^2 \quad (9.5.2)$$

dove F è il fattore di forma elettromagnetico del nucleo. Anche con questa interpretazione si ottiene la misura del raggio nucleare; ricordiamo infine che per definizione $F(0) = 1$.

Esercizio 9.5.1: Quesito veloce: $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}$ è la sezione d'urto su un singolo protone puntiforme? [rispondere SI o NO]

Il calcolo della sezione d'urto Mott può essere realizzato tramite l'elettrodinamica quantistica. Nel sistema di riferimento in cui il bersaglio è inizialmente fermo e di massa molto grande, se l'elettrone si muove con quantità di moto $\vec{p} = m_e \vec{\beta} c \gamma$, essa risulta essere:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{(\alpha \hbar c)^2}{4 \beta^2 e^2 \vec{p}^2 \sin^4(\theta/2)} (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)) \quad (9.5.3)$$

e per completezza forniamo anche la relazione fra parametro di impatto e angolo di scattering ottenibile tramite il calcolo di meccanica classica relativistica per elettroni su nuclei:

$$b = \frac{Z \alpha \hbar c}{\beta c |\vec{p}|} \cot(\theta/2) \quad (9.5.4)$$

Nota: per l'esame non studiate queste espressioni a memoria, nel caso vi saranno fornite da uno dei docenti; è tuttavia consigliato di ricordare la forte dipendenza angolare $1/\sin^4((\theta/2))$ identica a quella della sezione d'urto Rutherford.

Esercizio 9.5.2: Produrre (a mano o con il computer) il grafico della sezione d'urto Mott in funzione dell'angolo di scattering per elettroni di energia 100MeV su Piombo, prestando particolare cura alla regione in prossimità di $\theta = \pi$.

Esercizio 9.5.3: Dimostrare che nel caso $\beta \ll 1$ la sezione d'urto Mott tende alla sezione d'urto Rutherford.

Esercizio 9.5.4: Calcolare i limiti sull'angolo di scattering per elettroni di energia 10GeV su Piombo. [Utilizzare i valori del raggio atomico secondo Thomas-Fermi, ed il valore del modello a goccia per il raggio nucleare]

Importanti applicazioni della sezione d'urto Mott sono inerenti le interazioni delle particelle cariche con la materia stabile: la perdita di energia per collisioni (ref...), il multiplo scattering coulombiano (re...) e la radiazione di frenamento (ref..), discusse nei capitoli finali di questi appunti.

9.5.1 Espressione della sezione d'urto Mott con le variabili di Mandelstam

Riprendendo l'espressione 9.5.3 per bersagli fermi e molto pesanti, notiamo che in funzione dell'angolo di scattering θ nel laboratorio si ha

$$t = -2p^2(1 - \cos \theta) = -4p^2 \sin^2(\theta/2) \quad (9.5.5)$$

dove p è la quantità di moto dell'elettrone incidente. Ovviamente

$$t_{MAX} = -4p^2 \quad (9.5.6)$$

per cui troviamo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{(\alpha\hbar c)^2}{4\beta^2 c^2 p^2 \sin^4 \theta / 2} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta / 2) = \frac{(\alpha\hbar c)^2}{4\beta^2 c^2 p^2} \frac{1 - \beta^2 \frac{t}{t_{MAX}}}{\frac{t^2}{16p^4 c^4}} = \frac{4(\alpha\hbar c)^2 p^2 c^4}{\beta^2 c^2 t^2} \left(1 - \beta^2 \frac{t}{t_{MAX}} \right) \quad (9.5.7)$$

Integrando sull'angolo azimutale abbiamo

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos \theta} \right)_{Mott} = \frac{8\pi(\alpha\hbar c)^2 p^2 c^4}{\beta^2 c^2 t^2} \left(1 - \beta^2 \frac{t}{t_{MAX}} \right) \quad (9.5.8)$$

da cui

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\cos \theta} \right)_{Mott} \frac{d\cos \theta}{dt} = \frac{8\pi(\alpha\hbar c)^2 p^2 c^4}{\beta^2 c^2 t^2} \left(1 - \beta^2 \frac{t}{t_{MAX}} \right) \frac{1}{2p^2 c^2} \quad (9.5.9)$$

per concludere

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{Mott} = \frac{4\pi(\alpha\hbar c)^2}{\beta^2 t^2} \left(1 - \beta^2 \frac{t}{t_{MAX}} \right) \quad (9.5.10)$$

Capitolo 10

Decadimenti

10.1 I decadimenti spontanei

Si definisce **decadimento** la trasmutazione spontanea di una particella P (nucleo, atomo, ...) in N particelle libere: $P \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_N$.

I decadimenti si possono praticamente sempre catalogare in uno dei seguenti tre gruppi:

- le transizioni elettroniche atomiche (per esempio nell'atomo di idrogeno la transizione fra lo stato $2p$ e lo stato $1s$ con emissione di un fotone di circa 10.2eV);
- i decadimenti nucleari (per esempio il decadimento $^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$);
- i decadimenti di particelle elementari (per esempio $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$).

Si definisce **larghezza totale** (o semplicemente “**larghezza**”, indicata normalmente con la lettera Γ , la **probabilità che la particella ha di decadere nell’unità di tempo**. Si definisce **vita media**, indicata normalmente con la lettera τ , il **reciproco della larghezza**: $\tau = 1/\Gamma$.

Alcune note importanti:

- praticamente, per quasi tutti i decadimenti, la probabilità di decadimento nell’unità di tempo non dipende dal tempo, quindi se una particella non è decaduta ad un tempo t , la probabilità che decada fra t e $t + dt$ (con dt infinitesimo) è $dP = \Gamma dt$;
- per definizione l’unità di misura della larghezza è il reciproco dell’unità di tempo, quindi $[\Gamma] = \text{s}^{-1}$;
- per definizione l’unità di misura della vita media è l’unità di tempo, quindi $[\tau] = \text{s}$;
- la larghezza può anche essere espressa in unità di energia, tipicamente in eV, semplicemente moltiplicando per \hbar : questo conviene quando si interpreti una particella come un stato risonante.

Legge del decadimento esponenziale

Desideriamo trovare $P(t)$, la probabilità che una particella non sia ancora decaduta al tempo $t > 0$; per definizione $P(0) = 1$. La probabilità di non essere decaduta al tempo $t + dt$ è uguale al prodotto $P(t)$ della probabilità di non essere decaduta al tempo t moltiplicata la probabilità di non decadere fra t e $t + dt$, che vale $1 - \Gamma dt$. In definitiva: $P(t + dt) = P(t)(1 - \Gamma dt)$ con $P(0) = 1$, la cui soluzione è la legge del decadimento esponenziale :

$$P(t) = e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau} \quad (10.1.1)$$

Si evince che la “vita media” è il tempo in cui la probabilità di “sopravvivenza” della particella si riduce di un fattore e .

Nel caso in cui al tempo $t = 0$ si abbiano N_0 (con $N_0 \gg 1$) particelle metastabili **instabili?** identiche, il numero *medio* di “sopravvissuti” al tempo t è

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 2^{-t/T_{1/2}} \quad (10.1.2)$$

dove abbiamo definito il “**tempo di dimezzamento**”

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 0.693\tau \quad (10.1.3)$$

Definizione di “attività” di un materiale radioattivo

L’**attività** A di un materiale radioattivo è il numero di decadimenti nell’unità di tempo di uno specifico radionuclide in un campione:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| \quad (10.1.4)$$

Note:

- L’attività si esprime in “Bequerel” (Bq), definito come il numero di disintegrazioni per unità di tempo, e quindi in s^{-1} ;
- si intende che vengono contati solo i decadimenti primari dello “specifico radionuclide” indicato: non sono contate le eventuali disintegrazioni secondarie, che avvengono nel caso in cui uno o più prodotti di decadimento siano a loro volta instabili;
- se il campione al tempo $t = 0$ contiene N_0 particelle metastabili **instabili?** identiche, allora si ha $A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \frac{N_0}{\tau} e^{-t/\tau}$.

Larghezze parziali e Branching Fractions

Nel caso in cui una particella possa decadere in più stati finali diversi, per ogni stato finale f si definisce una grandezza Γ_f denominata “**larghezza parziale**” come la **probabilità per unità di tempo di decadere nello stato f** . Quindi la larghezza totale è la somma delle larghezze parziali di tutti i possibili stati finali:

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f \quad (10.1.5)$$

per cui la vita media risulta determinata dalla somma di tutte le larghezze parziali:

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\sum_f \Gamma_f} \quad (10.1.6)$$

Importante: notate che NON si definiscono “vite medie parziali”: **la vita media è unica**.

Nel caso in cui una particella possa decadere in più stati finali diversi, per ogni stato finale f si definisce il “**rappporto di decadimento**” (in inglese “Branching Fraction”):

$$B_f = \frac{\Gamma_f}{\Gamma} . \quad (10.1.7)$$

B_f rappresenta la probabilità che ha la particella di decadere nello stato finale f , per cui sommando su **tutti gli stati finali**:

$$\sum_f B_f = 1 . \quad (10.1.8)$$

Per una generica reazione la somma delle masse nello stato iniziale può essere maggiore o minore della somma delle masse dei prodotti nello stato finale. Si definisce Q -valore la differenza fra la somma delle masse nello stato iniziale e la somma delle masse dei prodotti nello stato finale, moltiplicata per c^2 :

$$Q = \sum_{\text{iniziali}} m_i c^2 - \sum_{\text{finali}} m_f c^2 . \quad (10.1.9)$$

In generale

$Q > 0$: la reazione produce energia (processo esotermico);

$Q < 0$: la reazione assorbe energia (processo endotermico) ed è necessaria una certa energia di soglia per innescare il processo; l'energia di soglia è sempre maggiore o uguale a $|Q|$.

Per un decadimento

$Q > 0$: il decadimento è spontaneo;

$Q < 0$: il decadimento è vietato.

10.2 **Decadimenti nucleari: generalità ed esempi

Le principali proprietà nucleari sono riportate nelle tabelle “nuclear wallet cards” reperibili al sito

<https://www.nndc.bnl.gov/wallet/wall47.pdf> .

di cui riportiamo le prime righe in Fig. (B.6).

Nuclear Wallet Cards						
Nuclide	Z	E1	A	Δ	T%, Γ , or	
				(MeV)	Abundance	Decay Mode
0 n	1			8.071	10.183 m 17	β^-
1 H	1	1/2+		7.289	99.9985% 70	
	2	1+		13.136	0.0115% 70	
	3	1/2+		14.950	12.32 y 2	β^-
	4	2-		24.6	n	
	5	(1/2+)		32.89	5.7 MeV 21	2n
	6	(2-)		41.9	1.6 MeV 4	n
	7	(1/2+)		47.9	29×10^{-23} y 7	
2 He	3	1/2+		14.931	0.000134% 3	
	4	0+		2.425	99.99986% 3	
	5	3/2-		11.23	0.60 MeV 2	α , n
	6	0+		17.592	801 ms 10	β^-
	7	(3/2)-		26.067	150 keV 20	n
	8	0+		31.609	119.1 ms 12	β^- , β -n 16%
	9	1/2+		39.78	n	
	10	0+		48.81	300 keV 200	n

Figura 10.1: Prime righe delle nuclear wallet cards.

I vari isotopi sono elencati in ordine di Z crescente e, successivamente, di A crescente e le varie colonne hanno i seguenti significati:

colonna 1 vengono riportati il numero atomico Z , il simbolo dell'elemento chimico ed il suo peso atomico A

colonna 2 J è lo spin (momento angolare intrinseco) del nucleo in unità di \hbar mentre π è la sua parità intrinseca.

colonna 3 l'eccesso di massa $\Delta_{A,Z}$ dell'atomo neutro corrispondente

colonna 4 si distinguono vari casi a seconda della stabilità del nucleo

...% : percentuale in natura (abbondanza) tipicamente per gli isotopi stabili

$T_{1/2}$: “tempo di dimezzamento” (purchè misurabile direttamente in s=secondi, m=minuti, h=ore, y=anni) per isotopi instabili

Γ : “larghezza totale” (se $T_{1/2}$ non misurabile direttamente) per isotopi instabili.

colonna 5 modo di decadimento (per i soli nuclei instabili). È il modo (o i modi principali) di decadimento.

Elenchiamo di seguito i principali modi di decadimento:

β^- : decadimento β^- , corrispondente a ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z+1}^A Y_{N-1}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, dove $\bar{\nu}_e$ è un antineutrino elettronico ed è importante notare che l'atomo finale Y è ionizzato positivamente (decadimento debole, cioè dovuto alla “interazione debole”). Il decadimento β^- del nucleo corrisponde al processo “microscopico” $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

ε : indica sia un decadimento β^+ , corrispondente a ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z-1}^A Y_{N+1}^- + e^+ + \nu_e$, dove e^+ è un positrone (stessa massa di un elettrone ma carica opposta) e ν_e è un neutrino elettronico (decadimento debole), che il caso della cattura elettronica (EC), corrispondente a ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z-1}^A Y_{N+1}^- + \nu_e$ (decadimento debole). Il decadimento β^+ del nucleo corrisponde al processo “microscopico” $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$, che non può avvenire per un protone isolato ma può essere consentito all'interno di un nucleo a causa dell'energia di legame nucleare (vedi Esemp. (B.6.2)), mentre il processo EC corrisponde al processo “microscopico” $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$.

IT : transizione isomerica, cioè decadimento γ da stato eccitato nucleare, corrispondente a ${}_Z^A X_N^* \rightarrow {}_Z^A X_N$ (decadimento elettromagnetico)

n : decadimento neutronico, corrispondente a ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_Z^A Y_{N-1}^- + n$ (decadimento forte)

p : decadimento protonico, corrispondente a ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z-1}^A Y_N^- + p$ (decadimento forte)

α : decadimento α , corrispondente a ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z-2}^A Y_{N-2}^- + \alpha$, dove con il simbolo α si indica un nucleo di ${}_{\frac{1}{2}}^4 He_2$

SF : fissione spontanea, cioè separazione del nucleo in due o più elementi; usualmente vi sono molti stati finali possibili

$2\beta^-$: decadimento doppio β^- , corrispondente a ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z+2}^A Y_{N-2}^{++} + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$. In pratica questo decadimento è identificabile sperimentalmente solo se è vietato ogni altro decadimento. Questo canale di decadimento costituisce un banco di prova fondamentale per testare sperimentalmente la possibilità che il neutrino sia una particella di Majorana tramite la ricerca del decadimento $2\beta 0\nu$: ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z+2}^A Y_{N-2}^{++} + 2e^-$.

3α : triplo decadimento α

$\beta - p$: decadimento β^- con successivo decadimento protonico

$\beta - n$: decadimento β^- con successivo decadimento neutronico

$\beta - \alpha$: decadimento β^- con successivo decadimento α

εp : EC o β^+ con successivo decadimento protonico

εn : EC o β^+ con successivo decadimento neutronico

εSF : EC o β^+ con successiva fissione spontanea.

Passiamo ora ad analizzare alcuni esempi specifici, usando per semplicità unità naturali ($c = 1$).

Esempio 10.2.1: calcolo del Q -valore nel decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e . \quad (10.2.1)$$

Soluzione: Il neutrone libero (i. e. isolato e fuori da un nucleo) è instabile e la sua vita media è di circa 15 minuti, corrispondente ad un tempo di dimezzamento di circa 10 minuti. Per calcolare il Q -valore del processo usiamo il fatto che la massa del $\bar{\nu}_e$ è ad oggi sperimentalmente compatibile con zero ($\lesssim 1.1$ eV) e comunque molto piccola rispetto a m_e , quindi usando la definizione Eq. (B.1.6) dell'eccesso di massa abbiamo

$$\begin{aligned} Q &= m_n - (m_p + m_e + m_{\bar{\nu}}) \simeq m_n - M_{1,1}^{atom} = \\ &= m_u + \Delta_{1,0} - (m_u + \Delta_{1,1}) \approx (8.071 - 7.289)\text{MeV} = 782\text{KeV} . \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

Per fortuna l'energia di legame “forte” impedisce il decadimento del neutrone in molti nuclei, come per esempio nel nucleo di deuterio. \square

Esempio 10.2.2: calcolare il Q -valore del decadimento β^+ dell'elemento $^{22}_{11}\text{Na}_{11}$.

Soluzione: Il protone è stabile, infatti il Q -valore dell'ipotetico decadimento $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ è negativo

$$m_p - m_n - m_e \approx -1.804\text{MeV}.$$

In generale per il decadimento β^+ dato da $^A_Z\text{X} \rightarrow ^{A-1}_{Z-1}\text{Y}_N^- + e^+ + \nu_e$ si ha

$$Q \simeq \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z-1} - 2m_e. \quad (10.2.3)$$

poichè la massa dello ione Y^- è molto ben approssimabile (trascorrendo l'energia di legame dell'elettrone) con la somma della massa dell'atomo neutro Y e della massa elettronica m_e . Ad esempio per il decadimento $^{22}_{11}\text{Na}_{11} \rightarrow ^{22}_{10}\text{Ne}_{12}^- + e^+ + \nu$ il Q -valore è dato da

$$Q \simeq \Delta_{22,11} - \Delta_{22,10} - 2m_e \approx -5.181\text{MeV} - (-8.024 - 1.022)\text{MeV} = 1.821\text{MeV}. \quad (10.2.4)$$

\square

Esempio 10.2.3: calcolare il Q -valore per una cattura elettronica (decadimento EC).

Soluzione: Per la cattura elettronica $^A_Z\text{X}_N \rightarrow ^{A-1}_{Z-1}\text{Y}_{N+1} + \nu_e$ si ha (in questo caso si trascura la differenza tra le due energie di legame elettroniche, non le energie di legame elettroniche)

$$Q \simeq \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z-1} \quad (10.2.5)$$

Nei casi in cui sia il decadimento β^+ che la cattura elettronica sono possibili, viene preferito il decadimento β^+ rispetto alla cattura elettronica. Possiamo dire che entrambi i processi hanno la stessa “dinamica” elementare, ma che nel caso di cattura elettronica la probabilità che un elettrone sia in prossimità del nucleo ne riduce la probabilità rispetto al β^+ . Una trattazione quantitativamente accurata di questo argomento richiede l'utilizzo della meccanica quantistica ed in particolare della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo (la cosiddetta “regola d'oro” di Fermi). \square

Esempio 10.2.4: calcolare il Q -valore del processo (Hg e Au indicano gli atomi)

$$p + ^{198}_{80}\text{Hg}_{118} \rightarrow p + p + ^{197}_{79}\text{Au}_{118}^-, \quad (10.2.6)$$

nota come reazione degli alchimisti. Dare una stima della energia di soglia nel sistema in cui il Mercurio è inizialmente fermo (sistema del laboratorio).

Soluzione:

$$\begin{aligned} Q &\simeq (m_p + M_{198,80}^{atom}) - (m_p + M_{1,1}^{atom} + M_{197,79}^{atom}) = \\ &= 198m_u + \Delta_{198,80} - (m_u + \Delta_{1,1} + 197m_u + \Delta_{197,79}) \approx \\ &\approx -30.95\text{MeV} - (7.29 - 31.14)\text{MeV} = -7.10\text{MeV}, \end{aligned} \quad (10.2.7)$$

quindi (poichè il Mercurio è molto più pesante del protone e $|Q| \ll m_p$ si può trascurare in prima approssimazione l'energia di rinculo del Mercurio ed usare $-Q$ come energia di soglia, vedi anche Esemp. (B.6.5) ed esercizi a fine sezione) ci si aspetta una energia di soglia di circa 7.1MeV. Questo calcolo è esatto dal punto di vista cinematico ma non considera la dinamica del problema: non abbiamo tenuto conto che la reazione è una reazione forte, che avviene solo quando i nuclei vengono a contatto, quindi nel caso specifico quando sono ad una distanza (vedi Eq. (B.3.1))

$$d = r_{Hg} + r_p \approx (1.25 \times 198^{1/3} + 2 + 1.25)\text{fm} \approx 10.5\text{fm}. \quad (10.2.8)$$

Questa distanza può essere raggiunta solo se nel sistema del laboratorio il protone ha una energia cinetica sufficiente a vincere la repulsione coulombiana fra i nuclei. Consideriamo per semplicità un urto centrale e utilizzando le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto non

relativistiche, in quanto $|Q| \ll m_p$ e in prima battuta ci possiamo aspettare che il protone resti non relativistico anche con il nuovo calcolo. L'energia minima del protone per cui può avvenire la reazione è quella per la quale il protone e il mercurio arrivano ad essere relativamente fermi ad una distanza d , quindi indicando con v_0 la velocità iniziale del protone, con T la sua energia cinetica e con v_{CM} la velocità del centro di massa, dobbiamo avere

$$\begin{cases} m_p v_0 = (m_p + m_{Hg}) v_{CM} \\ T \geq \frac{1}{2} (m_p + m_{Hg}) v_{CM}^2 + \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \end{cases} . \quad (10.2.9)$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda otteniamo che deve essere

$$T \geq \frac{1}{2} \frac{m_p^2}{m_p + m_{Hg}} v_0^2 + \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{m_p}{m_p + m_{Hg}} T + \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad (10.2.10)$$

da cui si trova

$$T \geq \left(1 + \frac{m_p}{m_{Hg}}\right) \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \approx 13.5 \text{ MeV}. \quad (10.2.11)$$

Come ultima nota dobbiamo evidenziare che il calcolo dell'energia di soglia effettuato inizialmente trascurando la repulsione coulombiana diventa corretto in ambito quantistico, poiché il protone può "passare sotto la barriera" per effetto tunnel (si veda il corso di Meccanica Quantistica), pur se con bassa probabilità. \square

Esempio 10.2.5: esplicitare la relazione tra il Q -valore e l'energia di soglia per un generico processo in cui due particelle di massa m_1 e m_2 (di cui m_2 ferma nel laboratorio) producono un numero arbitrario di particelle finali $m_f^{(1)}, \dots, m_f^{(n)}$:

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_f^{(1)} + \dots + m_f^{(n)}. \quad (10.2.12)$$

Soluzione: Assumiamo che il Q -valore sia negativo e che quindi il processo necessiti di una energia di soglia non nulla. Effettueremo il calcolo utilizzando la relatività ristretta, in modo da non dover prestare attenzione al fatto che le energie in gioco non possano essere troppo grandi; incidentalmente questo non comporta un aggravio di calcoli o complicazioni di principio. Indicando con E_{cm} l'energia calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo subito, utilizzando gli stati finali, che

$$E_{cm}^2 \geq \left(\sum_f m_f \right)^2 \quad (10.2.13)$$

in quanto l'energia di ogni particella è maggiore o uguale alla sua massa a riposo e l'impulso totale nel sistema del centro di massa è nullo. Poiché E_{cm} si conserva ed è un invariante, può essere calcolata anche nel sistema del laboratorio, in cui m_1 è in moto e m_2 è ferma:

$$E_{cm}^2 = (E_1 + m_2)^2 - \vec{p}_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1, \quad (10.2.14)$$

dove E_1 e \vec{p}_1 sono rispettivamente l'energia e l'impulso nel sistema del laboratorio della particella di massa m_1 . Da queste relazioni troviamo subito l'energia di soglia

$$E_1 \geq \frac{\left(\sum_f m_f\right)^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} \quad (10.2.15)$$

e risulta conveniente isolare il contributo cinetico a E_1 , definendo $E_1 = m_1 + T_1$. In questo modo si ottiene

$$T_1 \geq \frac{\left(\sum_f m_f\right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} = \frac{\sum_f m_f + m_1 + m_2}{2m_2} |Q|. \quad (10.2.16)$$

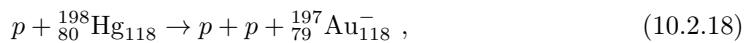
Sostituendo $\sum_f m_f = m_1 + m_2 + |Q|$ otteniamo infine

$$T_1 \geq \left(1 + \frac{2m_1 + |Q|}{2m_2}\right) |Q|. \quad (10.2.17)$$

Una conseguenza immediata di questa relazione è il fatto che se la massa m_2 della particella ferma nel laboratorio è molto più grande della particella m_1 e del Q -valore allora l'energia di soglia è con buona approssimazione data da $|Q|$. \square

Esercizio 10.2.1:

- calcolare il Q -valore del processo $D + D \rightarrow \alpha + \gamma$ (reazione di fusione nucleare) dove α e D indicano rispettivamente i nuclei di Elio e di Deuterio ($^2_1\text{H}_1$). Dare una stima della energia di soglia nel sistema in cui uno dei nuclei di Deuterio ha energia cinetica trascurabile.
- calcolare il Q -valore e l'energia cinetica dei prodotti della reazione $n + ^{10}\text{B} \rightarrow ^4\text{He} + ^7\text{Li}$ in cui il neutrone è “termico” (energia cinetica $\approx 0.025\text{eV}$) ed il Boro è inizialmente fermo.
- Calcolare l'energia di soglia nel laboratorio



nel caso in cui il protone sia fermo e il mercurio è in moto.

La seconda reazione è spesso indicata come $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ ed è una delle reazioni più importanti per la cattura dei neutroni in quanto avviene con grande probabilità (formalmente è caratterizzata da una grande sezione d'urto, vedi prossime sezioni **aggiungi puntatore**).

Esempio 10.2.6: Decadimenti del $^{64}_{29}\text{Cu}$ (decadimenti deboli):

- $^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow ^{64}_{28}\text{Ni}^- + e^+ + \nu_e$ con $B = 61.5\%$, $Q = 674\text{keV}$;
- $^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow ^{64}_{30}\text{Zn}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ con $B = 38.5\%$, $Q = 579\text{keV}$.

Il tempo di vita de Rame 64 è $\tau_{^{64}\text{Cu}} \approx 12\text{h}$. Questo valore ed il fatto che possa decadere sia β^+ che β^- lo rendono un potente strumento di diagnostica e terapia medica.

Esercizio 10.2.2: Esercizio “C”

Determinare, in funzione del tempo t , la concentrazione di un isotopo radioattivo a vita media “breve” prodotto nel decadimento di un isotopo a vita “molto lunga” ed di cui sia nota la concentrazione a $t = 0$. Si verifichi il risultato trovato ricercando, nei libri (as es. [36]) o su internet, le informazioni relative alla parola chiave “equilibrio secolare”.

Complemento: la cinematica del decadimento beta e la massa del neutrino elettronico

Dimostriamo che in un decadimento β^- del tipo $^A_Z X_N \rightarrow ^{A-1}_{Z+1} X_{N-1}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ tutta l'energia prodotta (Q – valore) viene ripartita fra l'elettrone ed il neutrino.

Infatti, nel sistema in cui X decade a riposo, l'energia cinetica T di ogni singolo prodotto non può sicuramente essere superiore a Q :

$$T_Y < Q, \quad T_e < Q, \quad T_{\bar{\nu}} < Q.$$

Poichè l'antineutrino ha massa trascurabile, dai limiti sulle energie cinetiche si ricava che le quantità di moto del neutrino e dell'elettrone sono limitate come segue:

$$|\vec{p}_e| = \sqrt{E_e^2 - m_e^2} = \sqrt{(T_e + m_e)^2 - m_e^2} < \sqrt{Q^2 + 2m_e Q} \quad (10.2.19)$$

$$|\vec{p}_{\bar{\nu}}| < Q \quad (10.2.20)$$

La quantità di moto del nucleo Y deve quindi sicuramente verificare

$$|\vec{p}_Y| < |\vec{p}_e| + |\vec{p}_{\bar{\nu}}| < Q + \sqrt{Q^2 + 2m_e Q} \quad (10.2.21)$$

Notiamo che Q MeV, quindi è circa 3 ordini di grandezza inferiore alla massa del nucleo Y . Allora l'energia trasferita al nucleo Y ha un limite superiore pari a:

$$T_Y = \frac{T_Y^2}{2M_Y} < \frac{(Q + \sqrt{Q^2 + 2m_e Q})^2}{2M_Y} \quad (10.2.22)$$

che implica che

$$T_Y \ll Q \quad (10.2.23)$$

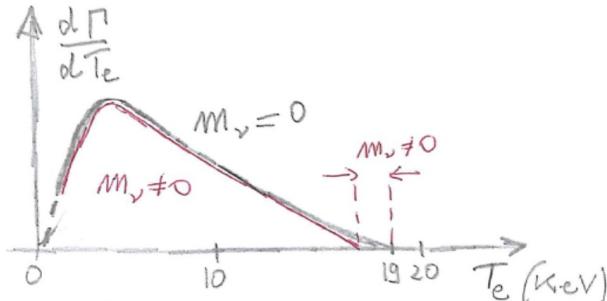
con

$$O\left(\frac{T_Y}{Q}\right) < 10^{-3} \quad (10.2.24)$$

Quindi in un decadimento β^- (ma anche β^+) si può scrivere che

$$T_e + T_{\bar{\nu}} \cong Q \quad (10.2.25)$$

In qualunque decadimento β , poiché l'antineutrino ha una sezione d'urto così piccola da sfuggire ad una rivelazione diretta ed il nucleo Y ha una energia così piccola da non essere rivelabile, si misura solamente l'energia T_e o la quantità di moto dell'elettrone (o del positrone) prodotto.



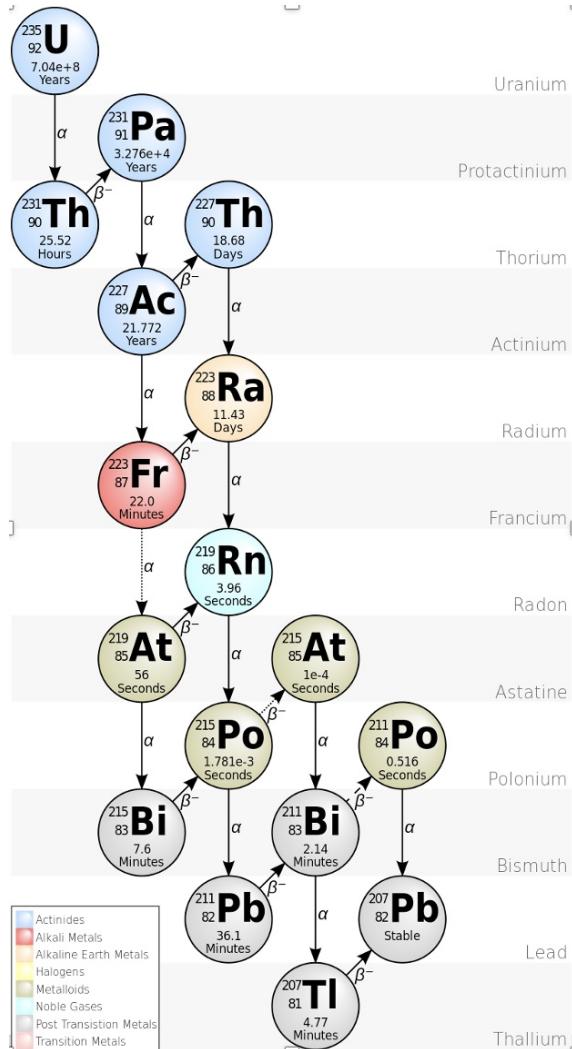
Il limite superiore di T_e , chiamato "testa dello spettro", ed è pari a

$$Q - m_{\bar{\nu}} \quad (10.2.26)$$

Lo spettro in energia dell'elettrone viene usualmente riportato in un grafico come quello in figura: tanto più il Q -valore è piccolo, tanto migliore sarà il limite superiore (o, in caso fortunato, la misura) della massa dell'antineutrino. I limiti più stringenti derivano dal decadimento del Tritium (3H) che ha un Q -valore di soli 19KeV e che ha permesso di stabilire che la massa dell'antineutrino elettronico è minore di 0.8eV. [ref PDG2022]

Nota: il limite sulla massa del neutrino elettronico è minore di 480eV. [ref PDG2022]

Esempio 10.2.7: Catene di decadimenti con Uranio235 come "capostipite"



Decadimenti γ

I **decadimenti γ** sono transizioni fra uno degli stati eccitati di un nucleo ed uno stato di energia inferiore. La transizione comporta l'emissione di un fotone, la cui energia tipica è nell'intervallo **10keV-10MeV**. Ricordiamo che, per motivi storici, fin 100 keV-1 MeV la radiazione elettromagnetica veniva classificata come "raggi X", mentre per energie superiori come "raggi gamma". Ad oggi tale classificazione è sostanzialmente in disuso, e vengono chiamati raggi X quelli emessi da elettroni accelerati, e raggi γ i fotoni prodotti nei decadimenti nucleari.

Un decadimento γ ha normalmente tempi caratteristici di circa $10^{-12}s$, ma talvolta tale decadimento avviene in tempi notevolmente superiori, addirittura anche minuti o giorni. Questi nuclei eccitati sono chiamati "isomeri nucleari" e il loro decadimento "transizione isomerica". Le motivazioni di queste vite medie molto lunghe sono legate agli spin nucleari e/o ad un basso Q-valore del decadimento.

Lo stato fondamentale si identifica col simbolo ${}^A_Z X_N$, mentre gli stati eccitati si indicano con ${}^A_Z X_N^*$, ${}^A_Z X_N^{**}$ etc....

Quindi un decadimento gamma si scrive, tipicamente, in una delle forme ${}^A_Z X_N^* \rightarrow {}^A_Z X_N + \gamma$, ${}^A_Z X_N^{**} \rightarrow {}^A_Z X_N^* + \gamma$, ${}^A_Z X_N^{**} \rightarrow {}^A_Z X_N + \gamma$, etc...

Possiamo solo accennare, senza approfondire, che si producono nuclei in uno stato eccitato con i seguenti meccanismi:

- nell'urto fra nuclei (o di p,n su nuclei);
- con raggi X di opportuna energia che investano un nucleo nello stato fondamentale;
- nei decadimenti α , β^- , β^+ , EC, perchè tali transizioni producono (con elevatissima probabilità) un nucleo eccitato nello stato finale. Le probabilità di transizione nei vari stati finali eccitati sono state misurate nel corso di un secolo di lavoro sperimentale per la stragrande maggioranza dei nuclei conosciuti.

Esempi di decadimenti di particelle sub-nucleari

Esempio 10.2.8: Decadimenti del mesone π^0 (decadimenti elettromagnetici):

- $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ con $B = 99.988\% = 0.99988$;
- $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$ con $B = 1.17\% = 0.0117$;
- $\pi^0 \rightarrow e^+e^-e^+e^-$ con $B = 3.3 \cdot 10^{-5}$.

Ricordiamo che $m_{\pi^0} = 134.98\text{MeV}$, $\tau_{\pi^0} \approx 8.5 \cdot 10^{-17}\text{s}$, $\Gamma_{\pi^0} = \frac{\hbar}{\tau} \approx 7.7\text{eV}$.
Il π^0 è una delle rarissime particelle di cui si siano misurate direttamente, in esperimenti diversi, sia la vita media (Atherton et al. nel 1985), sia la larghezza tramite l'effetto Primakoff (Bellettini et al. nel 1965-1970).

Esempio 10.2.9: Decadimenti del mesone π^+ (decadimenti deboli):

- $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ con $B = 99.82\% = 0.9982$;
- $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e$ con $B = 1.2 \cdot 10^{-4}$;
- $\pi^+ \rightarrow \pi^0e^+\nu_e$ con $B \approx 10^{-8}$.

Ricordiamo che $m_{\pi^+} = 139.57\text{MeV}$, $\tau_{\pi^+} = 26.3\text{ns}$.

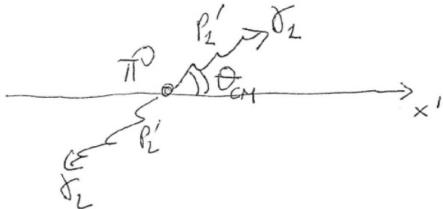
Esempio 10.2.10: Decadimenti del mesone "charmato" D^+ (1870MeV) (decadimenti deboli):

- $D^+(1870\text{MeV}) \rightarrow K^+K^-\pi^+$ con $B = 0.05\%$;
- $D^+(1870\text{MeV}) \rightarrow K^+K^-\pi^+$ con $B = 0.05\%$;
- $D^+(1870\text{MeV}) \rightarrow K^+K^-\pi^+$ con $B = 0.05\%$;
- $D^+(1870\text{MeV}) \rightarrow K^+K^-\pi^+$ con $B = 0.05\%$;
- e tanti altri (vedere sul PDG).

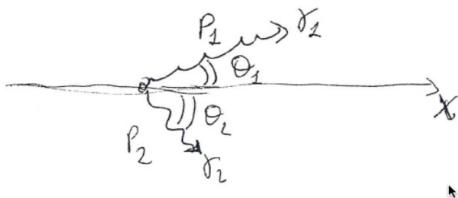
Ricordiamo che $m_{D^+(1870\text{MeV})} = 1869.66\text{MeV}$, $\tau_{D^+(1868\text{MeV})} = 1.033 \pm 0.005\text{ps}$.

Esercizi sui decadimenti relativistici a due corpi

Esercizio. Calcolare la distribuzione in energia e le distribuzioni angolari dei fotoni nel decadimento in volo del pione neutro.



O'x'y'z': sistema del pionne neutro



Oxyz : sistema del laboratorio

Avendo definito le variabili come in figura, un π^0 (la cui massa viene indicata con $m = 134.96\text{MeV}$) si muove nel laboratorio lungo l'asse x con velocità β .

Nel sistema $O'x'y'z'$ del π^0 i quadrimpulsi dei due fotoni prodotti si possono scrivere come:

$$P'_1 = \left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2} \cos\theta_{CM}, \frac{m}{2} \sin\theta_{CM}, 0 \right), \quad (10.2.27)$$

$$P'_2 = \left(\frac{m}{2}, -\frac{m}{2} \cos\theta_{CM}, -\frac{m}{2} \sin\theta_{CM}, 0 \right). \quad (10.2.28)$$

Poichè il π^0 è una particella priva di momento angolare intrinseco, nel sistema in cui esso è a riposo non vi sono direzioni privilegiate e la distribuzione dei fotoni prodotti è isotropa:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_{CM}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \quad (10.2.29)$$

Integrando l'equazione precedente sull'angolo azimutale, si ottiene

$$\frac{d\Gamma}{dcos\theta_{CM}} = \frac{\Gamma}{2}. \quad (10.2.30)$$

Nel sistema $Oxyz$ del laboratorio i quadrimpulsi dei due fotoni prodotti si possono invece scrivere come:

$$P_1 = (E_1, P_{1x} = E_1 \cos\theta_1, P_{1y} = E_1 \sin\theta_1, 0), \quad (10.2.31)$$

$$P_2 = (E_2, P_{2x} = E_2 \cos\theta_2, P_{2y} = E_2 \sin\theta_2, 0) \quad (10.2.32)$$

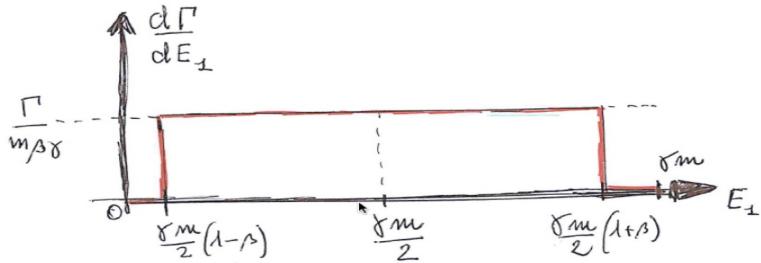
e sono legati a quelli nel sistema del π^0 dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} E_1 = \gamma \frac{m}{2} (1 + \beta \cos\theta_{CM}) \\ P_{1x} = E_1 \cos\theta_1 = \gamma \frac{m}{2} (\beta + \cos\theta_{CM}) \\ P_{1y} = E_1 \sin\theta_1 = \frac{m}{2} \sin\theta_{CM} \end{cases} \quad (10.2.33)$$

$$\begin{cases} E_2 = \gamma \frac{m}{2} (1 - \beta \cos\theta_{CM}) \\ P_{2x} = E_2 \cos\theta_2 = \gamma \frac{m}{2} (\beta - \cos\theta_{CM}) \\ P_{2y} = E_2 \sin\theta_2 = -\frac{m}{2} \sin\theta_{CM} \end{cases} \quad (10.2.34)$$

Da queste relazioni possiamo ricavare la distribuzione di E_1 :

$$\frac{d\Gamma}{dE_1} = \frac{d\Gamma}{dcos\theta_{CM}} \frac{dcos\theta_{CM}}{dE_1} = \frac{\Gamma}{2} \frac{2}{m\beta\gamma} = \frac{\Gamma}{m\beta\gamma} \quad (10.2.35)$$



che, vedi figura, è piatta entro i limiti:

$$\gamma \frac{m}{2}(1 - \beta) < E_1 < \gamma \frac{m}{2}(1 + \beta) \quad (10.2.36)$$

Notiamo che integrando la distribuzione (10.2.35) nei limiti (10.2.36) si ottiene proprio la larghezza totale Γ .

Per quanto riguarda la distribuzione angolare di uno dei fotoni nel sistema del laboratorio, da (10.2.33) e (10.2.34) ricaviamo:

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{P_{1x}}{E_1} = \frac{\beta + \cos\theta_{CM}}{1 + \beta \cos\theta_{CM}} \\ \sin\theta_1 = \frac{P_{1y}}{E_1} = \frac{\sin\theta_{CM}}{\gamma(1 + \beta \cos\theta_{CM})} \end{cases} \quad (10.2.37)$$

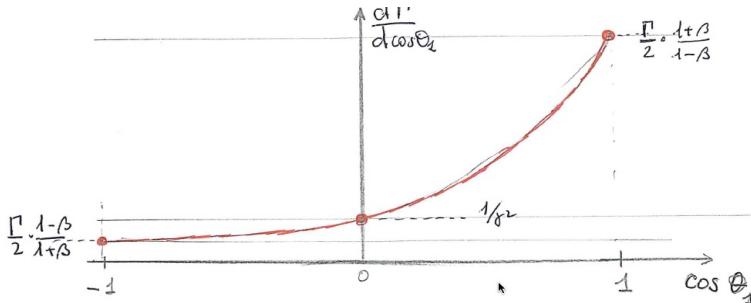
$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{P_{2x}}{E_2} = \frac{\beta - \cos\theta_{CM}}{1 - \beta \cos\theta_{CM}} \\ \sin\theta_2 = \frac{P_{2y}}{E_2} = \frac{-\sin\theta_{CM}}{\gamma(1 - \beta \cos\theta_{CM})} \end{cases} \quad (10.2.38)$$

$$\cos\theta_{CM} = \frac{-\beta + \cos\theta_1}{1 - \beta \cos\theta_1} \quad (10.2.39)$$

Utilizzando (10.2.30) e (10.2.39) possiamo trovare la distribuzione richiesta:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dcos\theta_1} &= \frac{d\Gamma}{dcos\theta_{CM}} \frac{dcos\theta_{CM}}{dcos\theta_1} = \frac{\Gamma}{2} \frac{1 - \beta \cos\theta_1 - (-\beta)(-\beta + \cos\theta_1)}{(1 - \beta \cos\theta_1)^2} \Rightarrow \\ \frac{d\Gamma}{dcos\theta_1} &= \frac{\Gamma}{2\gamma^2} \frac{1}{(1 - \beta \cos\theta_1)^2} \end{aligned} \quad (10.2.40)$$

La distribuzione è riportata in figura, dove si nota che sono preferiti angoli piccoli.



Come prova, possiamo verificare che l'integrale di (10.2.40) è proprio la larghezza totale:

$$\int_{-1}^1 \frac{d\Gamma}{dcos\theta_1} dcos\theta_1 = \int_{-1}^1 \frac{\Gamma}{2\gamma^2} \frac{1}{(1 - \beta \cos\theta_1)^2} dcos\theta_1 = \frac{\Gamma}{2\gamma^2} \left[\frac{1}{\beta(1 - \beta \cos\theta_1)} \right]_{-1}^1 = \Gamma$$

Concludiamo l'esercizio calcolando la dipendenza (non la distribuzione) dell'angolo compreso fra i due fotoni nel laboratorio in funzione dell'angolo di un fotone nel centro di massa, discutendo il risultato ottenuto.

$$\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\gamma(1+\beta\cos\theta_{CM})} \frac{\beta - \cos\theta_{CM}}{1-\beta\cos\theta_{CM}} - \frac{-\sin\theta_{CM}}{\gamma(1-\beta\cos\theta_{CM})} \frac{\beta - \cos\theta_{CM}}{1-\beta\cos\theta_{CM}} = \frac{2\beta\sin\theta_{CM}}{\gamma(1-\beta^2\cos^2\theta_{CM})}$$

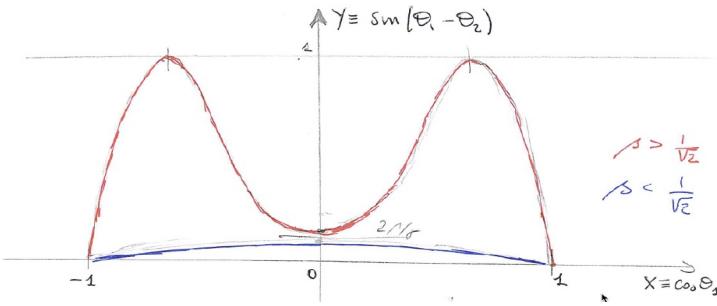
Definendo

$$y = \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad x = \cos\theta_{CM} \quad (10.2.41)$$

si ha la funzione

$$y = \frac{2\beta\sqrt{1-x^2}}{\gamma(1-\beta^2x^2)} \quad (10.2.42)$$

rappresentata in figura.



Notiamo che:

- se $\beta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'è solo un massimo in $x = 0$, che vale $\frac{2\beta}{\gamma}$;
- se $\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il massimo (che vale $y = 1$) si raggiunge per $x = \pm\sqrt{2\beta^2 - 1}/\beta$, mentre c'è un minimo in $x = 0$ che vale $\frac{2\beta}{\gamma}$, per cui è facile vedere che nel caso ultrarelativistico l'angolo minimo fra i due fotoni è sempre superiore a $\frac{\pi}{2}$.

Esercizio. Calcolare la distribuzione in energia dei neutrini prodotti nel decadimento in volo del pion carico.

Si tratta del decadimento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ in cui $m_\pi = 139.57 MeV$, $m_\mu = 105.66 MeV$, $m_{\nu_\mu} < 0.19 MeV \approx 0$ [PDG 2022].

Ipotizziamo che il pion si muova con un fattore di Lorentz $\gamma = 100$, cioè con una energia $E_\pi \approx 14 GeV$.

Definiamo, come nell'esercizio precedente, due sistemi di riferimento: il sistema $O'x'y'z'$ del π^+ ed il sistema $Oxyz$ del laboratorio.

Nel sistema $O'x'y'z'$ i quadrimpulsi del pion e del neutrino si possono scrivere come:

$$P'_\mu = (\sqrt{P_{CM}^2 + m_\mu^2}, P_{CM}\cos\theta_{CM}, P_{CM}\sin\theta_{CM}, 0), \quad (10.2.43)$$

$$P'_2 = (P_{CM}, -P_{CM}\cos\theta_{CM}, -P_{CM}\sin\theta_{CM}, 0). \quad (10.2.44)$$

con

$$P_{CM} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \approx 30 MeV \quad (10.2.45)$$

Nota: la relazione

Anche il π^+ è una particella priva di momento angolare intrinseco, quindi nel sistema in cui esso è a riposo non vi sono direzioni privilegiate e la distribuzione di uno dei suoi prodotti di

decadimento è isotropa:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_{CM}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \quad (10.2.46)$$

che integrata sull'angolo azimutale diventa

$$\frac{d\Gamma}{dcos\theta_{CM}} = \frac{\Gamma}{2}. \quad (10.2.47)$$

Tramite una trasformazione di Lorentz sul quadrimpulso di ref. (10.2.44) si trova l'energia del neutrino nel laboratorio in funzione dell'angolo nel centro di massa:

$$E_\nu^{LAB} = \gamma P_{CM}(1 - \beta cos\theta_{CM}) \quad (10.2.48)$$

La distribuzione di E_ν^{LAB} risulta essere piatta entro i limiti calcolabili da (10.2.48)

$$\frac{d\Gamma}{dE_\nu^{LAB}} = \frac{d\Gamma}{dcos\theta_{CM}} \frac{dcos\theta_{CM}}{E_\nu^{LAB}} = \frac{\Gamma}{2P_{CM}\beta\gamma} \quad (10.2.49)$$

entro i limiti:

$$0 \approx \gamma P_{CM}(1 - \beta) < E_\nu^{LAB} < \gamma P_{CM}(1 + \beta) \approx 6.2 GeV \quad (10.2.50)$$

In modo analogo possiamo procedere per il muone:

$$E_\mu^{LAB} = \gamma(\sqrt{P_{CM}^2 + m_\mu^2} + \beta P_{CM}cos\theta_{CM}) \quad (10.2.51)$$

i cui limiti sono

$$7.8 GeV \approx \gamma(\sqrt{P_{CM}^2 + m_\mu^2} - \beta P_{CM}) < E_\mu^{LAB} < \gamma(\sqrt{P_{CM}^2 + m_\mu^2} + \beta P_{CM}) \approx 14 GeV \quad (10.2.52)$$

con distribuzione piatta

$$\frac{d\Gamma}{dE_\mu^{LAB}} = \frac{d\Gamma}{dcos\theta_{CM}} \frac{dcos\theta_{CM}}{E_\mu^{LAB}} = \frac{\Gamma}{2P_{CM}\beta\gamma} \quad (10.2.53)$$

10.3 **Probabilità di transizione e spazio delle fasi

In questa sezione si useranno alcuni risultati basilari ma non elementari di meccanica quantistica (per la cui dimostrazione si rimanda ad altri corsi) per giustificare l'introduzione del cosiddetto "spazio delle fasi", sia non-relativistico che relativistico.

Prima di addentrarsi nel vivo del problema è necessario discutere alcune premesse sulle normalizzazioni degli stati del continuo ed alcuni argomenti a ciò collegati e, per avere un miglior controllo dei vari passaggi, è conveniente considerare un sistema finito racchiuso in una scatola cubica di lato L , con condizioni periodiche al contorno. Una normalizzazione conveniente per le autofunzioni dell'operatore impulso è in questo caso

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}, \quad (10.3.1)$$

normalizzazione che corrisponde ad una particella nel volume L^3 , infatti

$$\int \psi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) d^3r = \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} , \quad (10.3.2)$$

dove $\delta_{\vec{p}, \vec{p}'} = 1$ se $\vec{p} = \vec{p}'$ e zero altrimenti. Inoltre se il volume è abbastanza grande ($L \gg \hbar/p, \hbar/p'$) si ha anche, usando i risultati di Sez. (A.5)

$$\begin{aligned} \int \psi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) d^3r &\simeq \frac{1}{L^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i \frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}}{\hbar}} d^3r = \\ &= \frac{1}{L^3} (2\pi)^3 \delta^3 \left(\frac{\vec{p}' - \vec{p}}{\hbar} \right) = \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^3 \delta^3 (\vec{p}' - \vec{p}) . \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

La corrente di probabilità associata a $\psi_{\vec{p}}(\vec{r})$ è data da

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi_{\vec{p}}(\vec{r})^* - \psi_{\vec{p}}(\vec{r})^* \vec{\nabla} \psi_{\vec{p}}(\vec{r}) \right) = \frac{\vec{p}}{mL^3} = \frac{\vec{v}}{L^3} , \quad (10.3.4)$$

che è quindi uguale al prodotto della densità $1/L^3$ e della velocità. Infine, poichè le componenti dell'impulso possono assumere solo i valori discreti

$$p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i , n_i \in \mathbb{Z} , \quad (10.3.5)$$

la densità degli stati vale

$$d^3 n_{\vec{p}} = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 d^3 p . \quad (10.3.6)$$

Che questa sia la corretta relazione tra normalizzazione della funzione d'onda e densità degli stati si vede dal fatto che usando Eq. (10.3.1) e Eq. (10.3.6) risulta soddisfatta la relazione di completezza

$$\int d^3 n_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = 1 , \quad (10.3.7)$$

infatti dato uno stato $|f\rangle$ con funzione d'onda $\langle \vec{r}|f\rangle = f(\vec{r})$ si ha

$$\langle \vec{p}|f\rangle = \int d^3 r \langle \vec{p}|\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \int f(\vec{r}) e^{-i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \tilde{f}(\vec{p}/\hbar) \quad (10.3.8)$$

dove \tilde{f} è la trasformata di Fourier di f , quindi

$$\begin{aligned} \int d^3 n_{\vec{p}} \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | f \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \tilde{f}(\vec{p}/\hbar) d^3 p = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{f}(\vec{k}) d^3 k = f(r) = \langle \vec{r} | f \rangle , \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

dove nel penultimo passaggio si è usato il teorema di inversione per la trasformata di Fourier. Affinchè questa relazione rimanga soddisfatta, eventuali cambi di normalizzazione devono essere effettuati modificando contemporaneamente la normalizzazione di $|\vec{p}\rangle$ e la densità degli stati $d^3 n_{\vec{p}}$, secondo la regola

$$\begin{aligned} |\vec{p}\rangle &\rightarrow N |\vec{p}\rangle \\ d^3 n_{\vec{p}} &\rightarrow \frac{1}{N^2} d^3 n_{\vec{p}} . \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

È un risultato fondamentale in meccanica quantistica che la probabilità di transizione per unità di tempo dallo stato i allo stato f si può scrivere nella forma

$$\frac{dP_{fi}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) , \quad (10.3.11)$$

dove T è un operatore che può essere costruito a partire dalla hamiltoniana in rappresentazione dell'interazione (vedi ad es. [20] §72, [38] §4.4) e che al primo ordine in teoria delle perturbazioni coincide con essa. L'espressione precedente è quindi una generalizzazione valida a tutti gli ordini della teoria perturbativa della regola d'oro di Fermi valida al primo ordine. A causa della invarianza per traslazioni conviene inoltre definire un altro operatore M i cui elementi di matrice sono dati da

$$T_{fi} = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) M_{fi} . \quad (10.3.12)$$

Per un sistema di particelle interagenti questa ridefinizione corrisponde in rappresentazione di Schrodinger a scrivere la hamiltoniana in termini di variabili del centro di massa e variabili del moto relativo: a causa della invarianza per traslazioni la hamiltoniana dipende dalle variabili del centro di massa solo attraverso un termine cinetico, che non è quindi presente nella hamiltoniana di interazione. Il fattore $(2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)$ proviene dal prodotto scalare delle funzioni d'onda delle variabili associate al centro di massa, mentre M è il corrispettivo di T per la hamiltoniana di interazione che coinvolge le coordinate relative.

Per procedere oltre è necessario riscrivere $|T_{fi}|^2$ in termini di M_{fi} e per procedere in modo formalmente corretto sarebbe necessario utilizzare pacchetti d'onda invece di onde piane (vedi [38] §4.5), tuttavia un modo più semplice è utilizzare il sistema finito di lato L introdotto all'inizio di questa sezione. Confrontando le due espressioni per $\int \psi_{\vec{p}} \psi_{\vec{p}'} d^3r$ scritte in precedenza si ottiene

$$\left((2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) \right)^2 \simeq (L^3 \delta_{\vec{P}_f, \vec{P}_i})^2 = L^3 L^3 \delta_{\vec{P}_f, \vec{P}_i} \simeq L^3 (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) , \quad (10.3.13)$$

che è il modo fisicamente sensato di intepretare il quadrato di una δ di Dirac su un volume finito. Siamo quindi arrivati a

$$\frac{d\mathcal{P}_{fi}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) L^3 |M_{fi}|^2 \quad (10.3.14)$$

e se sappiamo che lo stato finale è composto da N_f particelle ma non siamo interessati ai dettagli cinematici di queste particelle si può sommare su tutti gli stati finali che consideriamo equivalenti, pesando ogni particella con la sua densità degli stati ed ottenendo

$$\frac{d\mathcal{P}_i}{dt} = \sum_f \frac{d\mathcal{P}_{fi}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \int 2\pi \delta(E_f - E_i) (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) L^3 |M_{fi}|^2 \prod_{a=1}^{N_f} \frac{L^3 d^3 p_a}{(2\pi\hbar)^3} . \quad (10.3.15)$$

Vediamo ora quale è la dipendenza dal lato L di questo risultato: nel quadrato dell'elemento di matrice $|M_{fi}|^2$ entrano i quadrati di N_f funzioni d'onda per lo stato finale ed ognuna ha il suo fattore di normalizzazione $1/\sqrt{L^3}$, quindi tutte queste potenze di L cancellano il termine $\prod_{a=1}^{N_f} L^3$ che proviene dalle densità degli stati. Nel caso in cui lo stato iniziale sia composto da una singola particella (decadimento) lo stato iniziale contribuisce a $|M_{fi}|^2$ con un $1/L^3$, che cancella il termine L^3 presente in $d\mathcal{P}_i/dt$ ed il risultato risulta quindi indipendente da L . Nel caso in cui lo stato iniziale sia composto da due particelle (scattering), allo stato iniziale è associato un fattore $1/L^6$ in $|M_{fi}|^2$ e quindi $d\mathcal{P}_i/dt \propto L^{-3}$; la dipendenza da L si cancella tuttavia quando si considera la sezione d'urto σ (vedi Sez. (??)), in quanto per il calcolo di σ si deve dividere $d\mathcal{P}_i/dt$ per la corrente incidente j che a sua volta ha un fattore L^{-3} . Poichè alla fine tutte le potenze di L si semplificano sempre, esse possono direttamente essere sottointese nelle espressioni, tuttavia tenerle esplicite può essere utile per verificare la loro effettiva cancellazione.

Data l'espressione di $d\mathcal{P}_i/dt$ risulta naturale introdurre l'elemento di spazio delle fasi non relativistico a N corpi tramite la definizione¹

$$d\Phi_N^{(NR)} = \delta(E_f - E_i) \delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \prod_{a=1}^N d^3 p_a . \quad (10.3.16)$$

¹Sopprimiamo per semplicità di notazione le potenze di 2π e \hbar , che contribuiscono solo con termini costanti e sono irrilevanti nel presente contesto in cui comunque non conosciamo la forma specifica di M_{fi} .

Si vede subito che $d\Phi_N^{(NR)}$ è invariante per rotazioni ma non per trasformazioni di Lorentz, come naturale attendersi da una quantità ottenuta usando le convenzioni non relativistiche. Per ottenere una espressione relativisticamente invariante è conveniente fare un passo indietro e ritornare alla normalizzazione degli stati. Per quanto notato in precedenza (cancellazione dei fattori L) si può sopprimere L usando Eq. (10.3.10) con $N = L^{3/2}$, quindi il calcolo precedente è a tutti gli effetti equivalente al calcolo effettuato usando la normalizzazione “standard” degli stati dello spettro continuo

$$\langle \vec{p}_1 | \vec{p} \rangle = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}) , \quad (10.3.17)$$

normalizzazione che non è invariante di Lorentz.

Si è però visto in Sez. (10.6) che $\frac{d^3 p}{2E}$ è invariante di Lorentz e di conseguenza $2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p})$ è invariante di Lorentz, poiché la relazione

$$f(\vec{p}_1) = \int \frac{d^3 p}{2E} 2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}) f(p) \quad (10.3.18)$$

deve essere valida in ogni sistema di riferimento.

L'invarianza di $2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p})$ (con $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$) può anche mostrata direttamente usando la generalizzazione per le δ di Dirac multidimensionali delle proprietà usate nella sezione precedente:

$$\delta^3(\vec{F}(\vec{x})) = \sum_{\vec{x}_i \text{ t.c. } \vec{F}(\vec{x}_i)=0} \frac{\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|J(\vec{x}_i)|} , \quad (10.3.19)$$

dove J è lo Jacobiano di \vec{F} . Per il caso specifico della trasformazione di Lorenz dell'impulso si era visto nella sezione precedente che $J = \det \frac{\partial(p_1, p_2, p_3)}{\partial(p'_1, p'_2, p'_3)} = E/E'$ quindi si ottiene

$$2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}) = 2E \frac{\delta^3(\vec{p}'_1 - \vec{p}')}{E/E'} = 2E'\delta^3(\vec{p}'_1 - \vec{p}') . \quad (10.3.20)$$

In un contesto relativistico è quindi conveniente usare la normalizzazione invariante

$$\langle \vec{p}_1 | \vec{p} \rangle = (2\pi\hbar)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}) , \quad (10.3.21)$$

e le espressioni corrispondenti si ottengono dalle precedenti usando Eq. (10.3.10) con $N = \sqrt{2E}$. Si arriva quindi allo spazio delle fasi ad N particelle relativistico, definito (nuovamente a meno di fattori costanti) da

$$d\Phi_N = \delta^4(P_f - P_i) \prod_a^N \frac{d^3 p_a}{2E_a} \quad (10.3.22)$$

dove $E_a = \sqrt{\vec{p}_a^2 + m_a^2}$ è l'energia della a -esima particella e P_f e P_i sono i quadriimpulsi finale ed iniziale. Poiché le trasformazioni di Lorentz hanno valore assoluto dello Jacobiano uguale ad uno, $\delta^4(P_f - P_i)$ è invariante e di conseguenza $d\Phi_N$ è invariante. Usando in ordine inverso le manipolazioni di Sez. (10.6) si può infine riscrivere lo spazio delle fasi relativistico nella forma

$$d\Phi_N = \delta^4(P_f - P_i) \prod_a^N \delta(p_a^2 - m_a^2) \Theta(p_a^0) d^4 p_a . \quad (10.3.23)$$

È importante per concludere notare che le due espressioni con convenzioni non relativistiche e relativistiche per dP_i/dt portano esattamente alle stesse conclusioni fisiche e che le differenze nelle due espressioni sono dovute esclusivamente all'introduzione, nel caso relativistico, di fattori convenzionali che rendono il risultato covariante a vista termine per termine.

10.4 **Spazio delle fasi

Parte 4.3 " Lo spazio delle fasi "

Versione del 19 novembre 2021

4.3.1 Lo spazio delle fasi di n particelle nello stato finale

Sia

$$a \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad (eq.1)$$

il processo di decadimento di una particella "a" in uno stato finale $|f\rangle$ con n particelle $p_1 \dots p_n$. Questo processo è caratterizzato da Γ , la larghezza di decadimento, definita come la probabilità del decadimento (1) per unità di tempo.

Nota: Γ è quindi da considerarsi una "larghezza parziale".

Sia

$$a + b \rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad (eq.2)$$

il processo di urto di una particella "a" su una particella "b", che dà luogo alla produzione di n particelle nello stato finale.

Questo processo è caratterizzato da σ , la sua sezione d'urto.

Denominiamo con $P_1 \dots P_n$ i quadrimpulsi delle particelle nello stato finale.

P_{in} è il quadrimpulso iniziale:

$P_{in} = P_a$ nel caso di un decadimento (1),

$P_{in} = P_a + P_b$ nel caso di un urto (2).

Ricordiamo che $s = P_{in}^2$ con \sqrt{s} energia nel centro del massa. Ricordiamo che nello stato finale le particelle sono da considerarsi libere e non più interagenti.

Il numero di osservabili indipendenti nello stato finale (i.e. il numero di grandezze fisiche indipendenti che posso misurare) è pari a $3n-4$, in quanto vi sono:

- n quadrimpulsi $\Rightarrow 4n$ variabili;

- n vincoli dovuti alla massa di ogni singola particella: $m_i^2 = P_{0i}^2 - \vec{P}_i^2$ per la particella i -esima, avendo definito $P_i = (P_{0i}, \vec{P}_i)$;

- 4 vincoli per la conservazione impulso-energia: $P_{in} = \sum P_i$.

Per ogni insieme di valori negli intervalli $[P_1, P_1+dP_1], \dots, [P_n, P_n+dP_n]$ dei quadrimpulsi nello stato finale si avrà una data probabilità di misurare una larghezza di decadimento (oppure una sezione d'urto) che dipende dai quadrimpulsi stessi.

Se tutti i quadrimpulsi fossero indipendenti, potrei scrivere:

$$d\Gamma = F_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4 P_1 \dots d^4 P_n \quad \text{e}$$

$$\Gamma = \int d\Gamma = \int F_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4 P_1 \dots d^4 P_n ,$$

con $F_{dec}(P_1, \dots, P_n)$ probabilità di misurare una larghezza $d\Gamma$ in un intorno di P_1, \dots, P_n .

Questa funzione contiene tutte le informazioni sulla dinamica del processo ed è calcolata - quando possibile - tramite le teorie delle interazioni fra particelle.

NOTA: $F_{dec}(P_1, \dots, P_n)$ **dipende anche** dall'energia nel centro di massa (i.e. la massa della particella che decade), dalle masse di tutte le particelle nello stato finale ed eventualmente dagli spin.

I vincoli riducono il numero di variabili indipendenti e quindi le relazioni precedenti devono essere scritte inserendo i vincoli, tramite funzioni δ di Dirac, nel modo seguente:

$$d\Gamma = F_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4 P_1 \delta(P_{01}^2 - \vec{P}_1^2 - m_1^2) \vartheta(P_{01}) \dots d^4 P_n \delta(P_{0n}^2 - \vec{P}_n^2 - m_n^2) \vartheta(P_{0n}) \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.3)$$

$$\Gamma = \int F_{dec}(P_1, \dots, P_n) d^4 P_1 \delta(P_{01}^2 - \vec{P}_1^2 - m_1^2) \vartheta(P_{01}) \dots d^4 P_n \delta(P_{0n}^2 - \vec{P}_n^2 - m_n^2) \vartheta(P_{0n}) \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.4)$$

Per n particelle finali si definisce l'elemento infinitesimo dello **spazio delle fasi** (limitatamente alle variabili "quadrimpulsi") come

$$dL_p = d^4 P_1 \delta(P_{01}^2 - \vec{P}_1^2 - m_1^2) \vartheta(P_{01}) \dots d^4 P_n \delta(P_{0n}^2 - \vec{P}_n^2 - m_n^2) \vartheta(P_{0n}) \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.5)$$

per cui

$$\Gamma = \int F_{dec}(P_1, \dots, P_n) dL_p . \quad (eq.6)$$

I termini $\vartheta(P_0)$ nella (3) sono introdotti per esprimere che solo le soluzioni positive $(P_0 = \pm\sqrt{\vec{P}^2 + m^2} = \pm E)$ dell'equazione ottenuta ponendo a zero l'argomento delle funzioni $\delta(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2)$ hanno un significato fisico.

Procediamo adesso ad una **semplificazione** dell'espressione (5). Ricordando la proprietà della funzione δ :

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|[f'(x)]_{x=x_j}|} \quad (eq.7)$$

con x_j soluzioni di $f(x) = 0$, si ha:

$$d^4P \delta(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2) \vartheta(P_0) = d^4P \vartheta(P_0) \left[\frac{\delta(P_o - E)}{|[2P_o]_{P_o=E}|} + \frac{\delta(P_o + E)}{|[2P_o]_{P_o=-E}|} \right] = d^4P \frac{\delta(P_o - E)}{2E} = \frac{d^3\vec{P}}{2E} \quad (eq.8).$$

Inserendo la eq.8 nella eq.5 otteniamo l'espressione standard per lo spazio delle fasi (parte dei tri-impulsi) per n particelle:

$$dL_p = \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3\vec{P}_n}{2E_n} \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.9)$$

Per un decadimento possiamo quindi concludere:

$$d\Gamma = F_{dec}(P_1, \dots, P_n) dL_p = F_{dec}(P_1, \dots, P_n) \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3\vec{P}_n}{2E_n} \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.10)$$

e per un urto, analogamente:

$$d\sigma = F_{coll}(P_1, \dots, P_n) dL_p = F_{coll}(P_1, \dots, P_n) \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3\vec{P}_n}{2E_n} \delta^4(P_{in} - \sum P_i) \quad (eq.11)$$

NOTA: $F_{dec}(P_1, \dots, P_n)$ **dipende anche** dall'energia nel centro di massa, dalle masse di tutte le particelle, sia nello stato iniziale che nello stato finale, ed eventualmente dagli spin.

Distribuzioni inclusive.

Nel caso in cui nello stato finale:

- (i) non sia possibile misurare un certo numero di grandezze nello stato finale, *oppure*
- (ii) non siamo interessati a misurare alcune grandezze nello stato finale,

allora le equazioni (10) ed (11) devono essere integrate sulle variabili non misurate e si avrà una distribuzione "**inclusiva**".

Se si misurano misurare tutte le grandezze nello stato finale si parla invece di reazione "**esclusiva**".

Alcuni **eempi** di reazioni inclusive sono inerenti le seguenti situazioni sperimentali:

- il processo di **fotoproduzione di coppie e^+e^- su nuclei**, in cui siamo interessati solo al modulo degli impulsi dell'elettrone e del positrone nello stato finale;
- la **produzione del bosone di Higgs** ad LHC, in cui nell'urto ad altissima energia protone-protone si producono centinaia di particelle: in questo caso le variabili interessanti sono il modulo dell'impulso e l'angolo di emissione del bosone di Higgs;
- la produzione di π^\pm nell'urto protone-nucleo (reazioni $p+A \rightarrow \pi^- + X$, $p+A \rightarrow \pi^+ + X$);
- un **decadimento beta con (anti-)neutrini** nello stato finale, in cui si può misurare solo il tri-impulso di particelle cariche, non essendo il neutrino praticamente osservabile in questa situazione sperimentale.

4.3.2 Nota sulle funzioni di distribuzione

Notiamo subito che la quantita' $\frac{d^3\vec{P}}{2E}$ e' un invariante relativistico.

Questo risulta direttamente dall'eq.8 : $d^4P\delta(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2)\vartheta(P_0) = \frac{d^3\vec{P}}{2E}$. I termini d^4P e $\delta(P_0^2 - \vec{P}^2 - m^2)$ sono evidenti invarianti relativistici; il termine $\vartheta(P_0)$ è invariante in quanto ogni trasformazione di Lorentz mantiene il segno dell'energia.

Alternativamente, si può anche dimostrarne l'invarianza nel caso particolare di impulso diretto lungo l'asse x e per una trasformazione di Lorentz proprio nella direzione x :

$$\begin{aligned} \frac{d^3\vec{P}'}{2E'} &= \frac{dP'_x dP'_y dP'_z}{2E'_x} = \frac{\gamma d(P_x + \beta E) dP_y dP_z}{2\gamma(E + \beta P_x)} = \frac{\left[dP_x + \beta d\sqrt{P_x^2 + P_z^2 + P_z^2 + m^2} \right] dP_y dP_z}{2(E + \beta P_x)} = \\ &= \frac{\left(dP_x + \beta \frac{2P_x dP_x}{2\sqrt{P_x^2 + P_z^2 + P_z^2 + m^2}} \right) dP_y dP_z}{2(E + \beta P_x)} = \frac{dP_x dP_y dP_z}{2E} \quad \text{q.v.d.} \end{aligned}$$

Se misuriamo in un sistema di riferimento la funzione di distribuzione dell'impulso (tridimensionale) di una particella, i.e. il numero di eventi dn nell'elemento di volume nello spazio degli impulsi $dn = f(\vec{P})d^3\vec{P}$, in un secondo sistema di riferimento si misura lo stesso numero di eventi $dn = f'(\vec{P}')d^3\vec{P}' = f(\vec{P})d^3\vec{P}$.

La relazione fra le due funzioni di distribuzione si determina utilizzando la proprietà di invarianza della quantita' $\frac{d^3\vec{P}}{2E}$:

$$\frac{E' f'(\vec{P}')d^3\vec{P}'}{E'} = \frac{E f(\vec{P})d^3\vec{P}}{E} \quad \text{da cui} \quad f'(\vec{P}') = \frac{E}{E'} f(\vec{P}) \quad (\text{eq.12})$$

4.3.3 Lo spazio delle fasi a due corpi e le conseguenze sulla dipendenza della sezione d'urto di alcuni processi dall'energia.

Consideriamo il caso $n=2$, in cui le due particelle nello stato finale hanno masse m_1 ed m_2 . Sia \sqrt{s} l'energia nel centro di massa, dove il tri-impulso totale è nullo.

Indichiamo con \vec{P}_1 e \vec{P}_2 i tri-impulsi dei prodotti nello stato finale e con E_1 ed E_2 le loro energie. Lo spazio delle fasi si scrive, dall'*eq.9*:

$$\begin{aligned} dL_p &= \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{P}_2}{2E_2} \delta^4(P_{in} - \sum P_i) = \frac{d^3\vec{P}_1}{2E_1} \frac{d^3\vec{P}_2}{2E_2} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) \\ &= \frac{d^3\vec{P}_1}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) \end{aligned} \quad (\text{eq.13})$$

Si ha $P_1 = |\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = P_{cm}$, con

$$P_{cm} = \sqrt{\frac{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)}{4s}} \quad (\text{eq.14})$$

$$\text{perchè } \sqrt{s} = \sqrt{P_{cm}^2 + m_1^2} + \sqrt{P_{cm}^2 + m_2^2} . \quad (\text{eq.15})$$

Proseguendo i calcoli nell'*equazione (13)* troviamo l'espressione finale:

$$\begin{aligned} dL_p &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{P_1^2 + m_1^2} - \sqrt{P_1^2 + m_2^2}) = \\ &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \frac{\delta(P_1 - P_{cm})}{\left[\frac{d}{dP_1} \left(\sqrt{s} - \sqrt{P_1^2 + m_1^2} - \sqrt{P_1^2 + m_2^2} \right) \right]_{P_1=P_{cm}}} = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \frac{\delta(P_1 - P_{cm})}{\left[\frac{P_1}{E_1} + \frac{P_1}{E_2} \right]_{P_1=P_{cm}}} = \\ &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \frac{\delta(P_1 - P_{cm})}{P_{cm} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}} = \frac{P_{cm} d\Omega_1}{4\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (\text{eq.16})$$

Quindi l'espressione per la sezione d'urto in un processo a due corpi è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = F_{coll}(\Omega_1) \frac{P_{cm}}{4\sqrt{s}} \quad (\text{eq.17})$$

mentre il decadimento di una particella di massa M in due corpi si esprime con

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_1} = F_{dec}(\Omega_1) \frac{P_{cm}}{4M} \quad (eq.18)$$

Attenzione! Ripetiamo che le funzioni F_{dec} e F_{coll} dipendono anche dall'energia nel centro di massa, dalle cariche e dalle masse delle particelle coinvolte, nonchè dalle orientazioni dei loro momenti angolari (spin).

Consideriamo adesso un processo di annichilazione di un **elettrone e di un positrone** in due particelle di massa m uguale e carica opposta (creazione di coppia particella-antiparticella). Se elettrone e positrone hanno energie E uguali ma impulsi opposti si ha $\sqrt{s} = 2E$.

Desideriamo valutare la dipendenza della sezione d'urto totale dall'energia nel centro di massa dovuta al solo spazio delle fasi: per tale scopo ipotizziamo che $F_{coll}(s, \vartheta, \phi, \dots)$ non dipenda da s e da Ω :

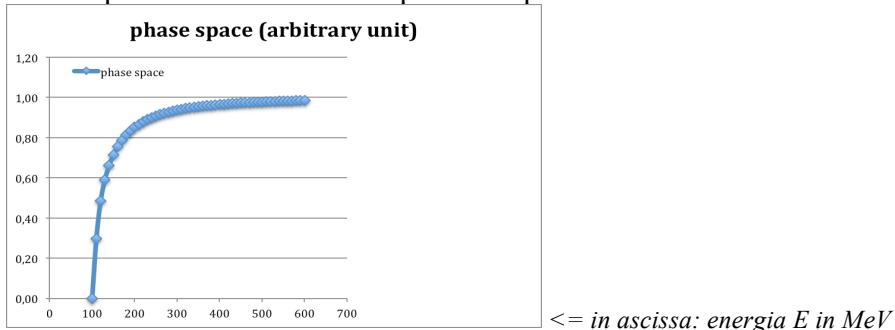
Utilizzando l'*eq.14* troviamo $P_{cm} = \sqrt{\frac{s}{4} - m^2}$, mentre utilizzando l'*eq.17*:

$$\sigma = \int F_{coll} \frac{P_{cm}}{4\sqrt{s}} d\Omega = \frac{\pi F_{coll}}{\sqrt{s}} \sqrt{\frac{s}{4} - m^2} = \frac{\pi F_{coll}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} = \frac{\pi F_{coll}}{2} \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \quad (eq.19a)$$

e, definendo β come la velocità della particella di massa m nel sistema del centro di massa:

$$\sigma = \frac{\pi F_{coll}}{2} \beta \quad (eq.19b)$$

La dipendenza dello spazio delle fasi (il fattore sotto la radice quadrata nell'espressione 19a) e' qui riportato in funzione dell'energia E (in MeV) per la creazione di una coppia particella-antiparticella di massa 105 MeV (muoni). Si noti come lo spazio delle fasi sia inizialmente nullo e cresca fino a raggiungere il suo valore massimo per energie circa 5 volte superiori alle masse delle particelle prodotte.



Esercizio (*Confronto con dati sperimentali*)

Cercare i dati sperimentalni (predetti anche dalla teoria elettrodebole!) delle sezioni d'urto per le reazioni $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ e $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ vicino alla soglia di reazione ed osservare la loro dipendenza da β .

Esercizio (Confronto con dati sperimentalni)

Calcolare le larghezze dei decadimenti $\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e$, $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$ se F_{dec} costante e confrontare il risultato ottenuto con i dati sperimentalni. Perché si può essere a priori sicuri che F_{dec} non dipende dagli angoli, mentre il confronto del nostro calcolo con i dati sperimentalni ci dice che F_{dec} deve dipendere dalle masse (e quasi certamente da altri parametri!) delle particelle coinvolte?

4.3.4 Lo spazio delle fasi a tre corpi ed il metodo della massa invariante per la ricerca di particelle instabili.

Consideriamo il caso $n=3$, in cui le tre particelle nello stato finale hanno masse m_1 , m_2 ed m_3 . Sia \sqrt{s} l'energia nel centro di massa, dove il tri-impulso totale è nullo.

Indichiamo con \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 i tri-impulsi nel centro di massa dei prodotti nello stato finale e con E_1 , E_2 ed E_3 le loro energie, sempre nel centro di massa.

Il numero di variabili indipendenti nello stato finale è pari a $3n-4 = 5$.

Nel sistema del centro di massa i tri-impulsi delle tre particelle giacciono tutti su un piano (che nel caso del decadimento di una particella in tre corpi si chiama **piano di decadimento**).

Possiamo dare l'orientazione di questo piano con tre angoli (per esempio gli "angoli di Eulero", spiegati nei testi di geometria, meccanica razionale, ed anche su wikipedia) denominati α , β , γ . Alternativamente, si può vedere il problema definendo α e β come gli angoli che forniscono la direzione di una delle tre particelle, mentre γ è l'angolo di rotazione del piano di decadimento attorno alla direzione della particelle scelta. Gli angoli α , β , γ possono essere usati come 3 delle 5 variabili indipendenti e si può scrivere l'elemento infinitesimo di una parte dello spazio delle fasi come:

$$d\alpha d(\cos\beta) d\gamma \quad (eq. 19c)$$

Restano da scegliere le ultime due variabili che completano la definizione dello stato finale a tre corpi. Le scelte possibili sono più di una, ma quella principalmente utilizzata (per esempio dal "Particle Data Group" <http://www-pdg.lbl.gov/2015/reviews/rpp2015-rev-kinematics.pdf>) è:

$$s_{12} = (P_1 + P_2)^2 = (P_{in} - P_3)^2 = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}E_3 \quad (eq. 20a)$$

$$s_{23} = (P_2 + P_3)^2 = (P_{in} - P_1)^2 = s + m_1^2 - 2\sqrt{s}E_1 \quad (eq.20b)$$

Il significato fisico di s_{12} è chiaro: si tratta del quadrato della massa invariante del sistema composto dalle particelle 1 e 2. I suoi limiti sono:

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (\sqrt{s} - m_3)^2 \quad (eq.21a)$$

Analogamente s_{23} è il quadrato della massa invariante del sistema composto dalle particelle 2 e 3, con i limiti

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \leq (\sqrt{s} - m_1)^2 \quad (eq.21b)$$

Se infine definiamo

$$s_{13} = (P_1 + P_3)^2 = (P_{in} - P_2)^2 = s + m_2^2 - 2\sqrt{s}E_2 \quad \text{con } (m_1 + m_3)^2 \leq s_{13} \leq (\sqrt{s} - m_2)^2 \quad (eq.21c)$$

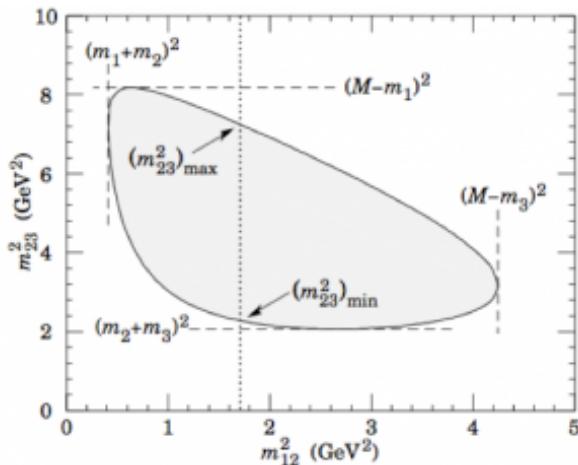
notiamo che si ha

$$s_{12} + s_{13} + s_{23} = 3s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2\sqrt{s}(E_1 + E_2 + E_3) = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \quad (eq.22)$$

da cui possiamo ricavare gli ulteriori limiti:

$$m_1^2 + m_3^2 + 2m_2\sqrt{s} < s_{12} + s_{23} < s + m_2^2 - 2m_1m_3 \quad (eq.23)$$

che ci aiutano a definire la porzione permessa del piano $s_{12} - s_{23}$, che viene chiamato "**Dalitz plot**". Nella figura seguente è indicata la regione permessa per queste variabili.



Resta infine da appurare se lo spazio delle fasi dipenda o meno dalle variabili che abbiamo scelto. Se svilupperemo i calcoli nell'equazione (9), troveremmo (non

dimostrato in questi appunti, ma lasciato come eventuale approfondimento volontario) che

$$dL_p = \frac{1}{32s} ds_{12} ds_{23} d\alpha d(\cos\beta) d\gamma \quad (eq.24)$$

Questo risultato e' **notevole**: lo spazio delle fasi a tre corpi e' popolato uniformemente (si dice essere "piatto") se utilizziamo le 5 variabili che abbiamo individuato. Naturalmente lo spazio delle fasi e' "piatto" anche se utilizziamo le variabili E_1 ed E_3 : questo a causa della linearità delle relazioni (20a) e (20b).

Esercizio "c": Dimostrare l'eq. (24) partire dall'eq. (9)

Esercizio "c": Ricavare i contorni del Dalitz plot. Nota: il caso generale è molto complicato, può essere sufficiente studiare casi particolari, come per esempio masse uguali per le tre particelle, oppure due masse nulle, etc...

Nota importante. La larghezza di decadimento a tre corpi si può quindi esprimere come:

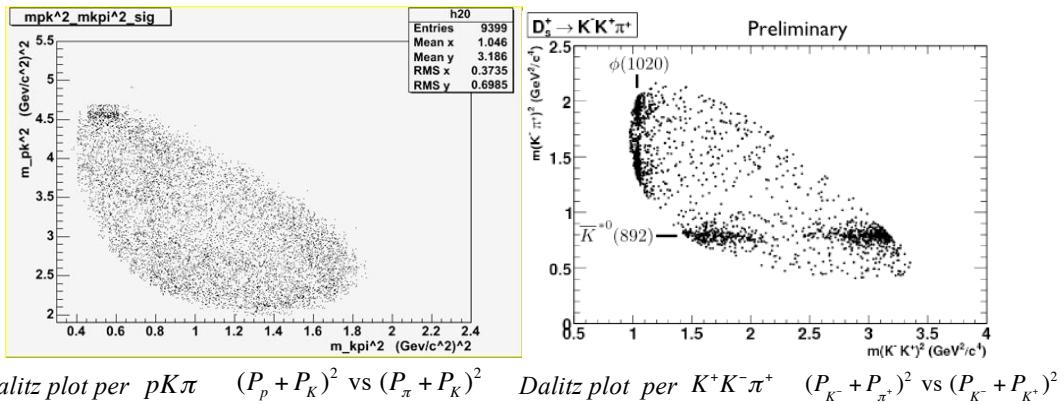
$$\Gamma = \int F_{dec}(s_{12}, s_{23}, \alpha, \beta, \gamma) dL_p \quad (eq.24b)$$

Nel caso in cui non vi sia una direzione privilegiata nello stato iniziale, per esempio per il decadimento di una particella priva di momento angolare ("spin"), la funzione f_{dec} dipende soltanto da s_{12} e s_{23} . E' quindi possibile integrare sugli angoli ottenendo

$$d\Gamma = F_{dec}(s_{12}, s_{23}) \frac{ds_{12} ds_{23}}{32s} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^1 d(\cos\beta) \int_0^{2\pi} d\gamma = \frac{\pi^2}{4s} F_{dec}(s_{12}, s_{23}) ds_{12} ds_{23} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{d^2\Gamma}{ds_{12} ds_{23}} = \frac{\pi^2}{4s} f_{dec}(s_{12}, s_{23}) \quad (eq.24c)$$

Un esempio di Dalitz plot popolato in modo abbastanza uniforme è visibile nella figura seguente di sinistra, dove le tre particelle nello stato finale sono un protone, un mesone π (massa 139.6 MeV) ed un mesone K (massa 493.7 MeV)



Tuttavia esistono, come si vede nella figura di destra, delle situazioni in cui il Dalitz plot appare principalmente popolato in regioni in cui la variabile s_{12} oppure la variabile s_{23} hanno un valore fortemente preferito. Questo corrisponde a decadimenti a tre corpi, in cui due delle particelle osservate sono in realtà particelle prodotte nel decadimento di una particella a vita media molto breve. Nella figura sopra a destra si ha, per esempio, evidenza delle particelle $\phi(1020 \text{ MeV})$ e $K^*(892 \text{ MeV})$.

Il metodo di identificare le particelle instabili tramite un picco nella massa invariante dei loro prodotti di decadimento è fondamentale in fisica delle particelle ed è appunto denominato "**tecnica della massa invariante**". Notiamo che questo metodo può essere utilizzato anche in stati finali con più di tre particelle.

4.3.5 Esempio: il decadimento $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$.

Terminiamo con un **esempio importantissimo** in fisica delle particelle: il decadimento del muone in un positrone, un antineutrino di tipo $\mu\nu$ ed un neutrino di tipo e :

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \quad (\text{eq.25})$$

Il muone ha massa 105.7 MeV , i due neutrini hanno massa trascurabile (inferiore ad 0.6 eV per il neutrino elettronico, inferiore a 200 KeV per il neutrino muonico), ed il positrone ha una massa (511 KeV) trascurabile: trascurare queste masse è una approssimazione abbastanza buona, se ci limitiamo alla sola valutazione dello spazio delle fasi e non desideriamo valutare gli effetti dovuti alle forze responsabili del decadimento. Porremo quindi uguali a zero le masse dei prodotti di decadimento e pertanto le equazioni (20), (21) e (23) si scrivono, con $\sqrt{s} = M = 105.7 \text{ MeV}$:

$$s_{12} = M^2 - 2ME_3 \quad (\text{eq.26a})$$

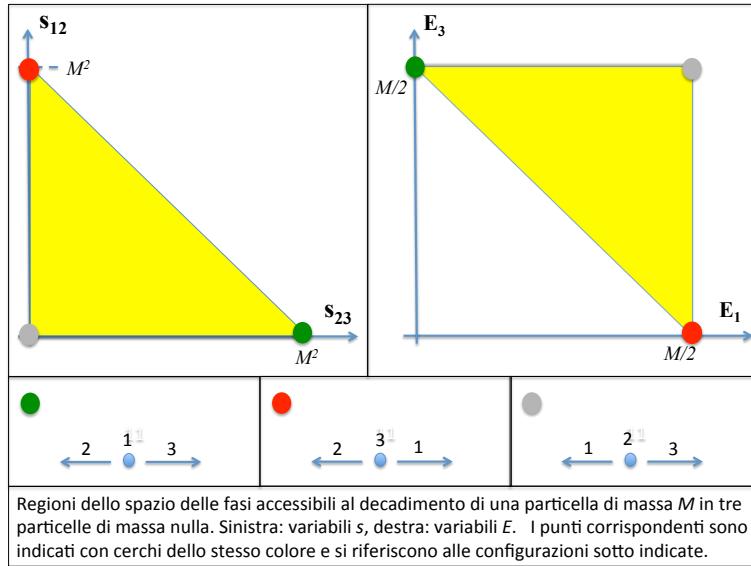
$$s_{23} = M^2 - 2ME_1 \quad (\text{eq.26b})$$

$$0 \leq s_{12} \leq M^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq E_3 \leq M/2 \quad (\text{eq.26c})$$

$$0 \leq s_{23} \leq M^2 \Rightarrow 0 \leq E_1 \leq M/2 \quad (eq.26d)$$

$$0 < s_{12} + s_{23} < M^2 \Rightarrow M/2 \leq E_1 + E_3 \leq M \quad (eq.26e)$$

Nella figura, in cui la particella 1 è il positrone, sono indicate le zone accessibili dello spazio delle fasi.



Poichè i due neutrini non sono rivelabili, se non in rivelatori estremamente massivi e comunque con una probabilità risibile, l'unica variabile osservabile sarà l'energia E_1 del positrone, che è direttamente correlata alla massa invariante del sistema composto dai due neutrini secondo l'eq. (26b).

Calcoliamo la funzione di distribuzione di E_1 a partire dalla equazione (24c) ed ipotizzando che F_{dec} sia una costante:

$$d\Gamma = F_{dec} \frac{\pi^2}{4s} ds_{12} ds_{23} = F_{dec} \pi^2 dE_1 dE_3 \quad (eq.27)$$

Integrando su E_3 si ottiene:

$$d\Gamma = F_{dec} \pi^2 dE_1 \int_{M/2-E_1}^{M/2} dE_3 = F_{dec} \pi^2 E_1 dE_1 \quad (eq.28)$$

da cui si ottiene la distribuzione di E_1 , sempre considerando solo l'effetto dello spazio delle fasi:

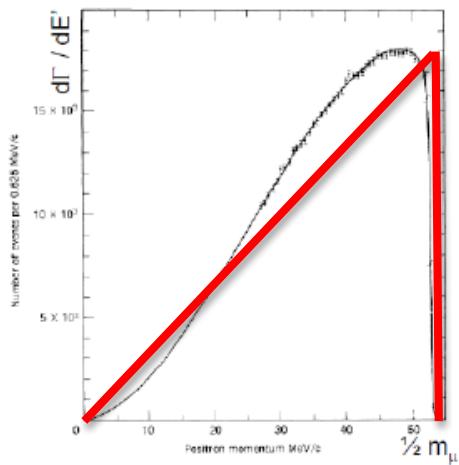
$$\frac{d\Gamma}{dE_1} = F_{dec} \pi^2 E_1 \quad (eq.29)$$

Notiamo che il valore medio di E_1 e' esattamente $1/3$, come e' ragionevole nel caso di una totale simmetria delle tre particelle prodotte nel decadimento :

$$\langle E \rangle_1 = \frac{\int_0^{M/2} \left(\frac{d\Gamma}{dE_1} \right) E_1 dE_1}{\int_0^{M/2} \left(\frac{d\Gamma}{dE_1} \right) dE_1} = \frac{\int_0^{M/2} E_1^2 dE_1}{\int_0^{M/2} E_1 dE_1} = \frac{M}{3} \quad (eq.30)$$

Confronto con i dati sperimentali

La distribuzione del'eq. (29) e' riportata in rosso nella figura seguente, dove e' sovrapposta ad una curva nera che rappresenta i dati sperimentali veri. Questi ultimi differiscono dalla nostra semplice previsione a causa della dinamica delle interazioni elettrodeboli.



Nota (non oggetto del programma del corso): i dati sperimentalni (curva nera) sono ben parametrizzati dalla distribuzione :

$$\frac{d\Gamma}{dE_1} = \begin{cases} \text{cost } E_1^2 (3M - 4E_1) & 0 < E_1 < M/2 \\ 0 & E_1 > M/2 \end{cases} \quad (eq.31)$$

$$\text{con il valore medio } \langle E \rangle_1 = \frac{\int_0^{M/2} E_1^3 (3M - 4E_1) dE_1}{\int_0^{M/2} E_1^2 (3M - 4E_1) dE_1} = \frac{7}{20} M \quad (eq.32)$$

10.5 **Spazio delle fasi a 2 e 3 corpi

In questa sezione calcoleremo gli integrali dello spazio delle fasi relativistico introdotto nella sezione precedente per il caso di 2 e 3 particelle nello stato finale. Questo calcolo risulta utile poiché corrisponde (sempre a parte fattori di proporzionalità) ad effettuare il calcolo di $d\mathcal{P}_i/dt$ nell'ipotesi di $|M_{fi}|^2$ costante, identificando così quelle caratteristiche del processo che dipendono solo dalla cinematica e, specularmente, ottenendo risultati utili ad identificare gli aspetti legati alla dinamica sottostante.

Partiamo dal caso dello spazio delle fasi a due corpi: dato che $d\Phi_N$ è invariante di Lorentz si possono effettuare i calcoli nel sistema di riferimento del centro di massa. Si ha allora

$$\begin{aligned} \int d\Phi_2 &= \int \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^2 p_2}{2E_2} = \\ &= \int \frac{1}{4E_1 E_2(\vec{p}_1)} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2(\vec{p}_1)) d^3 p_1, \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

dove si è integrato in $d^3 p_2$ usando $\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ e si è introdotta la notazione $E_2(\vec{p}_1) = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_2^2}$. Per poter effettuare l'ultimo integrale rimanente è necessario calcolare il valore di $|\vec{p}_1|$ che annulla l'argomento della δ ; questo è ovviamente l'imposto della particella 1 nel centro di massa, che si può calcolare usando Eq. (8.1.3):

$$\begin{aligned} p_{1c}^2 &= E_{1c}^2 - m_1^2 = \frac{s^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 + 2s(m_1^2 - m_2^2)}{4s} - m_1^2 = \\ &= \frac{s^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2)}{4s} = \frac{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)}{4s}. \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

Utilizzando la proprietà della δ per cambio di variabili si ottiene allora (usando anche $p_{1c} = p_{2c}$)

$$\int d\Phi_2 = \int \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2(\vec{p}_1)} \frac{\delta(p_1 - p_{1c})}{\frac{p_{1c}}{E_{1c}} + \frac{p_{1c}}{E_{2c}(\vec{p}_1)}} = \int \frac{p_{1c} d\Omega_1}{4(E_{1c} + E_{2c})} = \frac{\pi p_{1c}}{\sqrt{s}}. \quad (10.5.3)$$

Assumendo che $|M_{fi}|^2$ non abbia un andamento troppo brusco alla soglia, la presenza di p_{1c} nell'espressione di Φ_2 determina un andamento caratteristico in $d\mathcal{P}_i/dt$ per valori dell'energia nel centro di massa vicino alla soglia della reazione: se consideriamo ad esempio il caso in cui le due particelle finali abbiano massa $m_1 = m_2 = m$, allora $p_{1c}^2 = (s - 4m^2)/4$, la soglia corrisponde al valore $s = 4m^2$ dell'energia nel centro di massa e lo spazio delle fasi a due corpi assume la forma

$$\int d\Phi_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}. \quad (10.5.4)$$

Ad esempio la sezione d'urto elettromagnetica $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ si può scrivere nella forma (vedi ad es. [20] §81 problema 8)

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{QED} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{s} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \quad (10.5.5)$$

dove $m_\mu \simeq 105.66$ MeV è la massa del muone e poiché $m_e \ll m_\mu$ si è usato $m_e \simeq 0$. Si vede che l'andamento per $s \simeq 4m_\mu^2$ è dominato dall'andamento a radice dello spazio delle fasi.

Passiamo ora ad analizzare il caso di un decadimento in tre corpi: il punto di partenza è

$$\int d\Phi_3 = \int \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \frac{d^3 p_3}{2E_3} \quad (10.5.6)$$

e di nuovo il calcolo può essere effettuato nel sistema del centro di massa. Effettuando l'integrale su $d^3 p_3$ si arriva a

$$\int d\Phi_3 = \int \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)) \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \frac{1}{2E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}, \quad (10.5.7)$$

dove si è introdotta la notazione $E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + m_3^2}$. Si vogliono ora effettuare gli integrali angolari: consideriamo per il momento fisso \vec{p}_1 ed introduciamo per $d^3 p_2$ un sistema di coordinate polari avente asse polare diretto lungo \vec{p}_1 . La funzione E_3 dipende chiaramente da $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta$ ma non dall'angolo ϕ , inoltre si ha

$$\frac{dE_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{d\cos\theta} = \frac{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}{E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)} \quad (10.5.8)$$

quindi effettuando l'integrazione in $d\cos\theta$ usando le regole di trasformazione della delta (e quella banale in $d\phi$) si ottiene

$$\int d\Phi_3 = \frac{2\pi}{8} \int \frac{E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|} \frac{d^3 p_1 |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2|}{E_1 E_2 E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)} = \frac{\pi}{4} \int \frac{|\vec{p}_2| d^3 p_1 d|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| E_1 E_2} . \quad (10.5.9)$$

A questo punto l'integrandi non dipende in modo esplicito dalla direzione di \vec{p}_1 , quindi il corrispondente integrale angolare è banale e si trova infine (poichè $|\vec{p}| d|\vec{p}| = EdE$)

$$\int d\Phi_3 = \pi^2 \int \frac{|\vec{p}_1||\vec{p}_2| d|\vec{p}_1| d|\vec{p}_2|}{E_1 E_2} = \pi^2 \int dE_1 dE_2 . \quad (10.5.10)$$

Lo spazio delle fasi è quindi uniforme nelle variabili E_1 e E_2 (le energie delle particelle 1 e 2 nel sistema di riferimento del centro di massa) all'interno del dominio fisico. Eventuali non-uniformità nella distibuzione sperimentale sono quindi da imputare interamente al fattore dinamico $|M_{fi}|^2$.

Il bordo del dominio fisico nelle variabili E_1 , E_2 si determina dalla δ in Eq. (10.5.7): si deve avere

$$\sqrt{s} - E_1 - E_2 - \sqrt{m_3^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} = 0 , \quad (10.5.11)$$

ovvero

$$(\sqrt{s} - E_1 - E_2)^2 = m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 + E_1^2 + E_2^2 + 2\sqrt{E_1^2 - m_1^2}\sqrt{E_2^2 - m_2^2} \cos\theta , \quad (10.5.12)$$

che può essere riscritta nella forma

$$-2\sqrt{E_1^2 - m_1^2}\sqrt{E_2^2 - m_2^2} \cos\theta = m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 - s + 2\sqrt{s}(E_1 + E_2) - 2E_1 E_2 ; \quad (10.5.13)$$

il dominio fisico è quindi determinato nel piano (E_1, E_2) dalla relazione

$$4(E_1^2 - m_1^2)(E_2^2 - m_2^2) \geq (m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 - s + 2\sqrt{s}(E_1 + E_2) - 2E_1 E_2)^2 . \quad (10.5.14)$$

Variabili che sono spesso usate nei decadimenti a 3 corpi sono le masse invarianti di coppie di particelle:

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2 , \quad s_{13} = (p_1 + p_3)^2 = (P - p_2)^2 . \quad (10.5.15)$$

Queste variabili (e la similmente definita s_{12}) sono l'analogo delle variabili di Mandelstam per il caso di un decadimento a tre corpi e tutte le relazioni ottenute in Sez. (??) usando s, t, u hanno degli analoghi in s_{12}, s_{13}, s_{23} . Si hanno quindi in particolare le relazioni

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)^2 &\leq s_{12} \leq (\sqrt{s} - m_3)^2 \\ (m_1 + m_3)^2 &\leq s_{13} \leq (\sqrt{s} - m_2)^2 \\ (m_2 + m_3)^2 &\leq s_{23} \leq (\sqrt{s} - m_1)^2 , \end{aligned} \quad (10.5.16)$$

la relazione $s + t + u = h$ diventa $s_{12} + s_{13} + s_{23} = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ e la disuguaglianza di Kibble Eq. (??) è semplicemente Eq. (10.5.14) riscritta in termini di s_{12}, s_{13} ed s_{23} .

Probabilmente la caratteristica più importante di queste variabili è che mantengono l'uniformità dello spazio delle fasi che era stata dedotta in precedenza per le energie nel sistema di riferimento del centro di massa E_1, E_2 . Nel centro di massa si ha infatti

$$s_{23} = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}E_1 , \quad s_{13} = s + m_2^2 - 2\sqrt{s}E_2 , \quad (10.5.17)$$

quindi

$$ds_{23} ds_{13} = 4s dE_1 dE_2 \quad (10.5.18)$$

e

$$\int d\Phi_3 = \frac{\pi^2}{4s} \int ds_{23} ds_{13} . \quad (10.5.19)$$

10.6 **Trasformazione delle funzioni di distribuzione

Consideriamo dapprima la trasformazione della funzione di distribuzione nello spazio dei momenti, definita dalla relazione

$$dN = f(\vec{p}) d^3 p \quad d^3 p = dp_x dp_y dp_z . \quad (10.6.1)$$

Il numero di particelle dN è un invariante, quindi per determinare la legge di trasformazione di $f(\vec{p})$ basterà studiare come trasforma $d^3 p$. Per fare ciò si potrebbero usare direttamente le leggi per la trasformazione dell'impulso sotto una trasformazione di Lorentz ma è più istruttivo utilizzare un metodo indiretto: indichiamo con $\bar{f}(p)$ la funzione di distribuzione nello spazio dei quadriimpulsi:

$$dN = \bar{f}(p) d^4 p \quad d^4 p = dp_t dp_x dp_y dp_z . \quad (10.6.2)$$

Poichè dN è un invariante e $d^4 p$ è invariante (le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni ortogonali nello spazio dei quadriettori) ne segue che $\bar{f}(p)$ è un invariante, cioè $\bar{f}(p) = \bar{f}'(p')$ (dove l'apice indica le quantità calcolate in un diverso sistema di riferimento). Poichè anche p^2 è invariante si può considerare l'identità

$$\bar{f}(p) \delta(p^2 - m^2) d^4 p = \bar{f}'(p') \delta(p'^2 - m^2) d^4 p' . \quad (10.6.3)$$

Se a questo punto si integra il primo membro in dp_t tra 0 e ∞ , anche nel secondo membro di deve integrare p'_t tra 0 e ∞ poichè p è un vettore di tipo tempo e quindi nessuna trasformazione di Lorentz propria può cambiare il segno di p_t . Quindi

$$\int_0^\infty \bar{f}(p) \delta(p^2 - m^2) d^3 p dp_t = \int_0^\infty \bar{f}'(p') \delta(p'^2 - m^2) d^3 p' dp'_t . \quad (10.6.4)$$

A questo punto si usa la seguente proprietà della distribuzione δ

$$\delta(F(x)) = \sum_{x_i \text{ t.c. } F(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{dF}{dx}(x_i) \right|} , \quad (10.6.5)$$

con nel caso specifico

$$F(p_t) = p_t^2 - \vec{p}^2 - m^2, \quad p_t|_i = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E , \quad \left| \frac{dF}{dp_t}(p_t|_i) \right| = 2E , \quad (10.6.6)$$

ottenendo quindi

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p_t + E) + \delta(p_t - E)}{2E} , \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} . \quad (10.6.7)$$

Utilizzando questa espressione in Eq. (10.6.4) solo $\delta(p_t - E)$ contribuisce (pochè $p_t \geq 0$ ed $E \geq 0$) e si ottiene

$$\bar{f}(E, \vec{p}) \frac{d^3 p}{E} = \bar{f}'(E', \vec{p}') \frac{d^3 p'}{E'} , \quad (10.6.8)$$

e poichè si era già mostrato che \bar{f} è invariante si trova infine

$$\frac{d^3 p}{E} = \frac{d^3 p'}{E'} , \quad (10.6.9)$$

che è la formula cercata per la trasformazione dell'elemento di volume tridimensionale nello spazio degli impulsi. A questo punto basta riscrivere la Eq. (10.6.1) come

$$dN = f(\vec{p}) E \frac{d^3 p}{E} \quad (10.6.10)$$

ed usare l'invarianza di dN e Eq. (10.6.9) per ottenere la legge di trasformazione di $f(\vec{p})$

$$f'(\vec{p}') = \frac{E}{E'} f(\vec{p}) \quad (10.6.11)$$

Per completezza riportiamo anche la dimostrazione esplicita con la trasformazione di Lorentz della relazione Eq. (10.6.9): dato che sotto rotazioni si ha chiaramente $d^3p = d^3p'$ ci si può limitare a considerare il boost "standard" nella direzione 1:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + \beta p'_1) \\ p_1 &= \gamma(p'_1 + \beta E') \\ p_2 &= p'_2 \\ p_3 &= p'_3 \end{aligned} \quad (10.6.12)$$

e si ha $d^3p = |J|d^3p'$, dove lo jacobiano è dato da

$$J = \det \frac{\partial(p_1, p_2, p_3)}{\partial(p'_1, p'_2, p'_3)} = \det \begin{vmatrix} \gamma + \gamma\beta \frac{\partial E'}{\partial p'_1} & \frac{\partial E'}{\partial p'_2} & \frac{\partial E'}{\partial p'_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \gamma + \gamma\beta \frac{\partial E'}{\partial p'_1} = \gamma + \gamma\beta \frac{p'_1}{E'} = \frac{E}{E'}, \quad (10.6.13)$$

da cui Eq. (10.6.9).

Consideriamo ora la funzione di distribuzione congiunta delle posizioni e degli impusi:

$$dN = f(\vec{r}, \vec{p}) d^3p dV. \quad (10.6.14)$$

Nuovamente dN è invariante ed analizziamo come cambia dV . Consideriamo tre sistemi di riferimento: uno in cui le particelle sono a riposo (in cui l'elemento di volume è dV_0) ed altri due in moto con velocità \vec{v} e \vec{v}' rispetto a questo. A causa della contrazione di Lorentz si ha allora per gli elementi di volume la relazione

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2} \quad dV' = dV_0 \sqrt{1 - v'^2} \quad (10.6.15)$$

da cui si ottiene subito

$$EdV = E'dV'. \quad (10.6.16)$$

Moltiplicando questa relazione per Eq. (10.6.9) si ottiene subito l'invarianza di $d^3p dV$ e quindi l'invarianza della funzione di distribuzione congiunta

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = f'(\vec{r}', \vec{p}'), \quad (10.6.17)$$

che è il punto di partenza per lo studio della teoria cinetica relativistica (vedi ad es. [39]).

10.7 Effetto Mossbauer e applicazioni

L'effetto Mossbauer si basa su un particolare decadimento γ , che ricordiamo essere delle transizioni fra uno degli stati eccitati di un nucleo ed uno stato di energia inferiore con l'emissione di un fotone di energia tipica nell'intervallo 10keV-10MeV. Ricordiamo che, per motivi storici, fino a ≈ 1 MeV la radiazione elettromagnetica sarebbe classificata come "raggi X", mentre per energie superiori come "raggi gamma".

Lo stato fondamentale si identifica col simbolo ${}_Z^A X_N$, mentre gli stati eccitati si indicano con ${}_Z^A X_N^*$, ${}_Z^A X_N^{**}$, etc Quindi un decadimento gamma si scrive, tipicamente, in una delle forme

$${}_Z^A X_N^* \rightarrow {}_Z^A X_N + \gamma, \quad {}_Z^A X_N^{**} \rightarrow {}_Z^A X_N^* + \gamma, \quad {}_Z^A X_N^{**} \rightarrow {}_Z^A X_N + \gamma \quad (10.7.1)$$

Ricordiamo che si producono nuclei in uno stato eccitato con i seguenti meccanismi:

- nell'urto fra nuclei (o di p,n su nuclei);
- con raggi X di opportuna energia che investano un nucleo nello stato fondamentale;

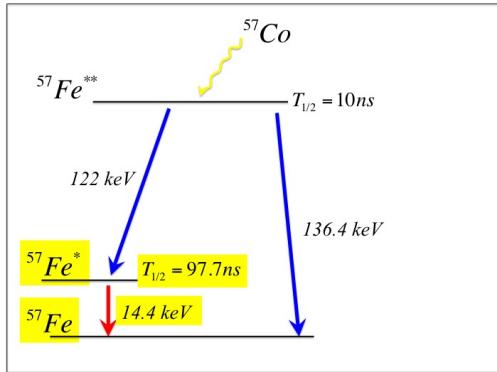


Figura 10.2: Catena di decadimento del ^{57}Co

- nei decadimenti α , β^- , β^+ , EC, perché tali transizioni producono (con elevatissima probabilità) un nucleo eccitato nello stato finale. Le probabilità di transizione nei vari stati finali eccitati sono state misurate nel corso di un secolo di lavoro sperimentale per la stragrande maggioranza dei nuclei conosciuti.

Esempio 10.7.1: (*utilizzato nell'effetto Mossbauer*) il decadimento $^{57}\text{Co} \rightarrow ^{57}\text{Fe}^{**} + \nu_e$ avviene per cattura elettronica, con un rapporto di decadimento del 99.8% e con un tempo di dimezzamento di 272 giorni. Consultando le apposite tabelle troviamo l'energia del neutrino uscente:

$$\Delta(^{57}\text{Co}) - \Delta(^{57}\text{Fe}^{**}) \simeq -59.34\text{MeV} - (-60.05\text{MeV}) = 711\text{keV} \quad (10.7.2)$$

Ricordiamo che gli stati eccitati sono degli stati risonanti, proprio come le “risonanze” nei modelli atomici con gli elettroni legati elasticamente. Le larghezze di questi stati sono molto piccole rispetto alle differenze di energia (E_0) fra due stati; la loro vita media ha valori molto variabili, tipicamente $\sim\text{ns}$, anche se in taluni casi si possono trovare valori sensibilmente inferiori o superiori.

Nota: per i calcoli occorre considerare che le particelle accelerate (e che poi irraggiano) sono nucleoni, che non sempre hanno una carica elettrica (il neutrone è neutro), ma che hanno un momento magnetico. Il risultato non sarà quindi la sezione d’urto risonante su elettrone, ma un suo analogo parametrizzabile con una curva Breit-Wigner o Lorenziana.

Riprendendo l’esempio precedente, il $^{57}\text{Fe}^{**}$ decade (vedi Fig. (10.2)) con un tempo di dimezzamento di circa 10ns nei modi seguenti:

$$^{57}\text{Fe}^{**} \rightarrow \begin{cases} ^{57}\text{Fe} + \gamma(136.4)\text{keV} & B = 15\% \\ ^{57}\text{Fe}^* + \gamma(122.0)\text{keV} & B = 85\% \end{cases} \quad (10.7.3)$$

Infine si ha la transizione $^{57}\text{Fe}^* \rightarrow ^{57}\text{Fe} + \gamma(14.4\text{keV})$ di nostro maggior interesse, che avviene con $T_{1/2} \simeq 97.7\text{ns}$ fra stati con:

- una differenza di energia (uguale al Q -valore): $E_0 = Q \simeq 14.4\text{keV}$
- una larghezza $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar \ln 2}{T_{1/2}} \simeq 4.6 \times 10^{-9}\text{eV}$

quindi $\frac{\Gamma}{E_0} \simeq 3.2 \times 10^{-13}$, valore veramente piccolo!

I fotoni emessi nel decadimento di un nucleo libero inizialmente a riposo **non hanno nel sistema del laboratorio l’energia E_0 ma un valore minore** perché il rinculo del nucleo richiede energia. Indichiamo con $M - E_0$ la massa dello stato fondamentale del nucleo, con M la massa dello stato eccitato e con E_γ l’energia del fotone nel laboratorio.

Il modulo della quantità di moto del fotone P_γ (nota: la quantità di moto del fotone è uguale opposta a quella del nucleo di massa M) nel centro di massa è pari all'energia del fotone: $E_\gamma = P_\gamma$. Scriviamo la conservazione dell'energia: $M = \sqrt{(E - E_0)^2 + E_\gamma^2}$, da cui otteniamo

$$\Delta E_\gamma = E_0 - \frac{E_0^2}{2M} . \quad (10.7.4)$$

Risulta pertanto che l'energia persa vale

$$\Delta E_\gamma = -\frac{E_0^2}{2M} \quad (10.7.5)$$

per cui

$$\frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} = -\frac{E_0}{2M} . \quad (10.7.6)$$

Riprendendo il nostro esempio per il decadimento del $^{57}\text{Fe}^*$ notiamo che

$$|\Delta E_\gamma| = \frac{E_0^2}{2M} \simeq 1.9\text{meV} \quad (10.7.7)$$

in quanto

$$M = 57M_{\text{u.m.a.}} + \Delta(^{57}\text{Fe}^{**}) \simeq 53.09\text{GeV} + (-60.06\text{MeV}) = 53.15\text{GeV} . \quad (10.7.8)$$

Quindi abbiamo

$$\left| \frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} \right| = \frac{E_0}{2M} \simeq \frac{14.4\text{keV}}{53.15\text{GeV}} \simeq 1.3 \cdot 10^{-7} \quad (10.7.9)$$

che è decisamente maggiore di $|\Gamma/E_\gamma| \simeq 3.2 \cdot 10^{-13}$.

Una conseguenza importantissima è la seguente: se un fotone viene emesso da un singolo nucleo di $^{57}\text{Fe}^*$ e poi incide su un nucleo di ^{57}Fe , il fotone *non* potrà effettuare uno scattering risonante sul ^{57}Fe , i.e. non potrà farlo transire a $^{57}\text{Fe}^*$, come schematicamente riportato in nel lato sinistro di Fig. (10.3).

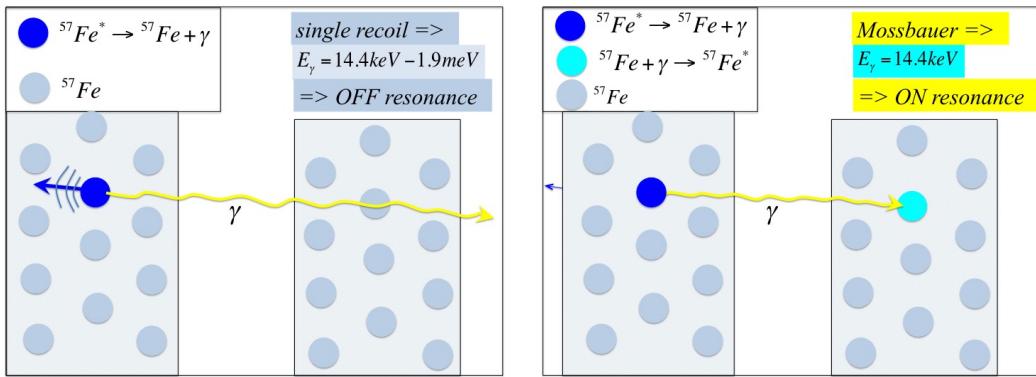


Figura 10.3: A sinistra: schematizzazione di un decadimento senza rieccitazione. A destra: schematizzazione di un decadimento con rieccitazione, resa possibile dall'effetto Mossbauer

L'effetto Mossbauer

In alcuni materiali cristallini il nucleo che effettua un decadimento può, in determinate situazioni e con una certa probabilità, non essere considerato isolato ma connesso agli altri nuclei del cristallo a tal punto che la quantità di moto del fotone emesso viene assorbita da tutto il cristallo.

Di conseguenza nella formula $\Delta E_\gamma = -\frac{E_0^2}{2M}$ si deve inserire la massa di tutti gli atomi del cristallo che assorbono la quantità di moto (tipicamente $\gg 10^{10}$ atomi) e quindi si riesce a fare tendere a zero l'energia di rinculo del nucleo, o perlomeno a renderla trascurabile rispetto alla larghezza di riga: $|\Delta E_\gamma| = \frac{E_0^2}{2M} \ll \Gamma$. Questo effetto di rinculo coerente si chiama effetto Mossbauer ed al suo scopritore è stato attribuito il premio Nobel per la fisica nel 1961.

La probabilità che in un cristallo si verifichi un rinculo coerente (Mossbauer) in un decadimento γ è data un fattore (detto di Deby-Waller o di Lamb-Mossbauer) che si può approssimare come (vedi ad es. [40] cap.2-4)

$$f = e^{-E_{recoil}/E_{phonon}} \quad (10.7.10)$$

dove $E_{recoil} = \frac{E_0^2}{2M}$ è l'energia di rinculo che avrebbe il nucleo se non ci fosse l'effetto Mossbauer e E_{phonon} è una costante tipica del cristallo dipendente dalla temperatura (che nel limite di bassa temperatura è legata alla temperatura di Debye), tipicamente alcuni meV.

Nel nostro esempio si ha $E_{recoil} = \frac{E_0^2}{2M} = \approx 1.9 \text{ meV} \approx E_{phonon}$, quindi la probabilità di avere l'effetto Mossbauer è rilevante. Di conseguenza se all'interno di un cristallo un fotone viene emesso da un singolo nucleo di $^{57}\text{Fe}^*$ e poi incide su un nucleo di ^{57}Fe , il fotone potrà effettuare uno scattering risonante sul ^{57}Fe e farlo transire a $^{57}\text{Fe}^*$, come rappresentato nel lato destro di Fig. (10.3).

Tuttavia occorre che vi sia un “effetto Mossbauer” anche nell’assorbimento del fotone. Al riguardo, indichiamo che un aspetto da non trascurare è la necessità di operare spesso a basse temperature per limitare l’allargamento per l’effetto Doppler dovuto all’agitazione termica dei nuclei.

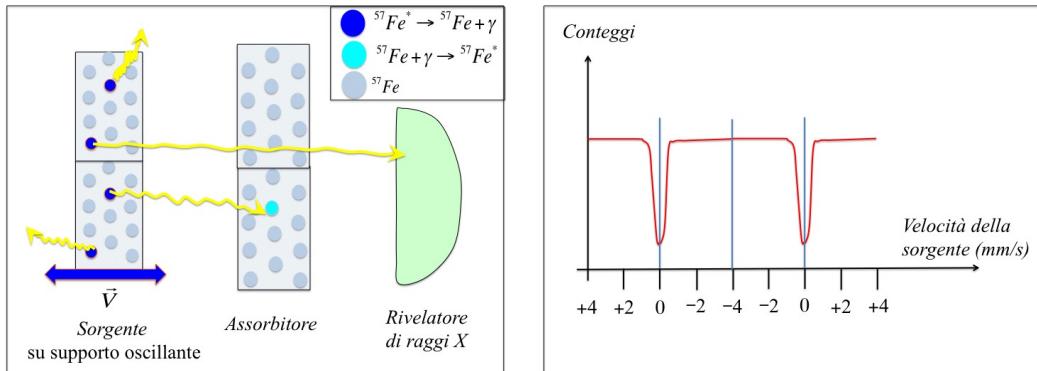


Figura 10.4: A sinistra: apparato base per un esperimento Mossbauer. A destra: andamento dei conteggi per unità di tempo con la velocità della sorgente.

Uno schema di base per un esperimento Mossbauer è riportato nel lato sinistro di Fig. (10.4): atomi di ^{57}Co sono impiantati in un cristallo (denominato “sorgente”) e generano atomi di $^{57}\text{Fe}^{**}$. Alcuni di questi atomi decadono in $^{57}\text{Fe}^*$, nel cui successivo decadimento si producono i fotoni di energia 14.4 keV per i quali è elevata la probabilità di avere l’effetto Mossbauer. La sorgente è posizionata su un supporto oscillante in cui la velocità $v = \beta c$ viene variata in modo continuo e periodico. L’energia del fotone emesso in direzione parallela alla velocità varia quindi per effetto Doppler e vale (supponendo $\beta \ll 1$, come accade in tutti i casi reali)

$$E_\gamma = \gamma(1 + \beta)E_0 \approx (1 + \beta)E_0 \quad (10.7.11)$$

dove E_0 è l’energia del fotone quando $\beta = 0$ e su ha effetto Mossbauer in emissione. Un “rivelatore” di raggi X (scintillatore o a stato solido o a gas) è posizionato in modo da contare il numero di fotoni nella direzione della velocità della sorgente. Fra la sorgente ed il rivelatore vi è un “assorbitore” di ^{57}Fe

Quando la velocità della sorgente verifica

$$\beta c \gg \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{E_0} c \approx \frac{1}{2} \times 3.2 \times 10^{-13} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.05 \text{ mm/s} \quad (10.7.12)$$

l'effetto Doppler sposta l'energia del fotone fuori dalla regione della risonanza e quindi si ha un massimo del numero di conteggi nel rivelatore. Quando la velocità della sorgente è nulla l'assorbimento è massimo e si ha un minimo nel numero di conteggi. Questo andamento è quello riportato nel lato destro di Fig. (10.4).

Il numero di fotoni assorbiti risulta proporzionale alla sezione d'urto per una risonanza "stretta", che abbiamo visto essere ben approssimabile con una Lorenziana: sostituendo Eq. (10.7.11) abbiamo

$$\sigma = \sigma_0 \frac{E_0^2 / 4}{(E_\gamma - E_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \approx \frac{\sigma_0}{4\beta^2 + (\Gamma/E_0)^2} \quad (10.7.13)$$

Le misure sperimentali permettono di misurare la larghezza della risonanza: la velocità della sorgente per cui si ha un numero di conteggi pari alla metà fra minimo e massimo è proprio

$$v_{1/2} = \beta_{1/2} c = \frac{\Gamma}{2E_0} c \approx 0.05 \text{ mm/s} \quad (10.7.14)$$

Nota: è opportuno ricordare che nel caso del ^{57}Fe le particelle accelerate dai fotoni incidenti sono dei nucleoni, che poi irraggiano per interazione di dipolo magnetico: di conseguenza la modellizzazione per la larghezza Γ è differente dal caso del modello dell'elettrone legato elasticamente. Si può tuttavia mostrare (vedi ad es. [26] §123 o [27] §16.2) che nel caso di sezione d'urto elastica che avviene con momento angolare $\hbar\ell$ si ha

$$\sigma_{\ell,\max} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) = \frac{(2\ell + 1)}{\pi} \lambda^2 \quad (10.7.15)$$

quindi nel caso specifico si ha, usando $\ell = 1$, (**mi pare mancasse un due nell'equazione seguente**)

$$\sigma_{\text{picco}} = \frac{3}{\pi} \lambda_0^2 = 12\pi \left(\frac{\hbar c}{E_\gamma} \right)^2, \quad (10.7.16)$$

identica al caso dell'elettrone legato elasticamente.

Nota Se si effettua l'esperimento precedente per i fotoni emessi senza l'effetto Mossbauer in emissione, si può avere comunque una transizione a ^{57}Fe nell'assorbitore se vi è un effetto Mossbauer in ricezione e se la velocità della sorgente verifica

$$v = \beta c = \frac{1}{2} \frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} c \approx 20 \text{ m/s.} \quad (10.7.17)$$

Esercizio 10.7.1: Calcolare la sezione d'urto al picco e valutare la lunghezza di attenuazione in Ferro nel caso dell'effetto Mossbauer partendo da $\sigma_{\text{picco}} = 12\pi \left(\frac{\hbar c}{E_\gamma} \right)^2$. **modificato anche qui un 2 a moltiplicare**

L'esperimento di Pound e Rebka (schema concettuale)

Nell'esperimento di Pound e Rebka [41] si è per la prima volta verificato lo spostamento della frequenza dei fotoni dovuto al campo gravitazionale terrestre.

Lo schema concettuale dell'esperimento è riportato nel lato sinistro di Fig. (10.5): si tratta – in pratica – di ruotare un esperimento Mossbauer in modo da misurare fotoni (con effetto, appunto Mossbauer) che si muovono parallelamente al campo gravitazionale terrestre.

La relatività generale prevede infatti che se un fotone di energia iniziale E_0 scende di una quota h nel campo gravitazionale terrestre, la sua energia diventa (vedi ad es. [7] §88 o [1] §3.5)

$$E' = E_0 + \Delta E = E_0 + \frac{gh}{c^2} E_0, \quad (10.7.18)$$

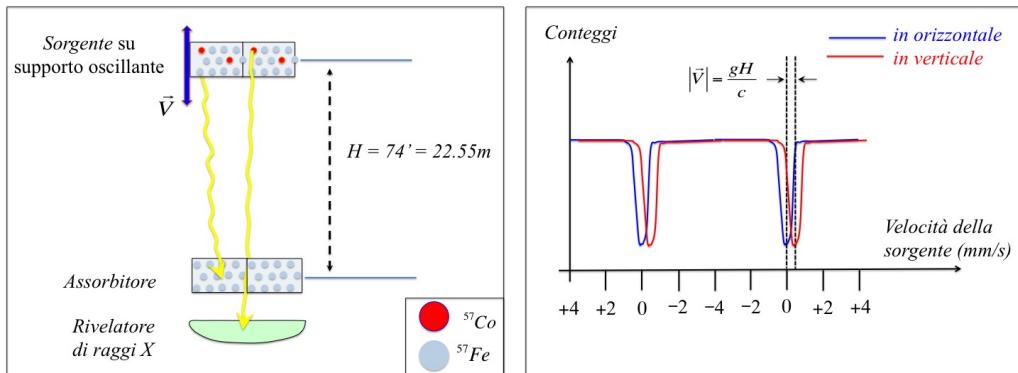


Figura 10.5: A sinistra: schema base dell'esperimento di Pound e Rebka. A destra: andamento dei conteggi per unità di tempo con la velocità della sorgente.

con $\Delta E/E_0 = \frac{gh}{c^2} \simeq 2.5 \times 10^{-15}$, che risulta essere circa 130 volte inferiore alla larghezza della risonanza: $\Gamma/E_0 \simeq 3.2 \cdot 10^{-13}$

Con accuratezza e statistica sufficienti è stato possibile effettuare la misura, osservando la differenza fra la posizione del minimo della curva, come riportato nel lato destro di Fig. (10.5), per l'apparato disposto orizzontalmente o verticalmente.

Parte IV

Interazioni delle particelle cariche con la materia ordinaria

Capitolo 11

**Radiazione Cherenkov

11.1 **Introduzione

L'effetto Cherenkov consiste nell'emissione di onde elettromagnetiche da parte di una particella carica che si muove in un mezzo con una velocità v superiore a quella della luce in tale mezzo: $v = \beta c > v_{luce} = \frac{c}{n}$, dove n è la parte reale dell'indice di rifrazione. L'emissione è dovuta all'irraggiamento coerente dei dipoli elettrici (che sono accelerati!) messi in oscillazione nel mezzo dal campo elettromagnetico generato dalla particella (che NON è accelerata, ma che si muove di moto rettilineo uniforme).

La radiazione Cherenkov è in pratica un'onda d'urto simile a quella della scia di un motoscafo o a quella sonora generata da un aereo che supera il muro del suono. Infatti, l'angolo di emissione della radiazione Cherenkov si può derivare dal principio di Huygens, come schematizzato in Figura 11.1.

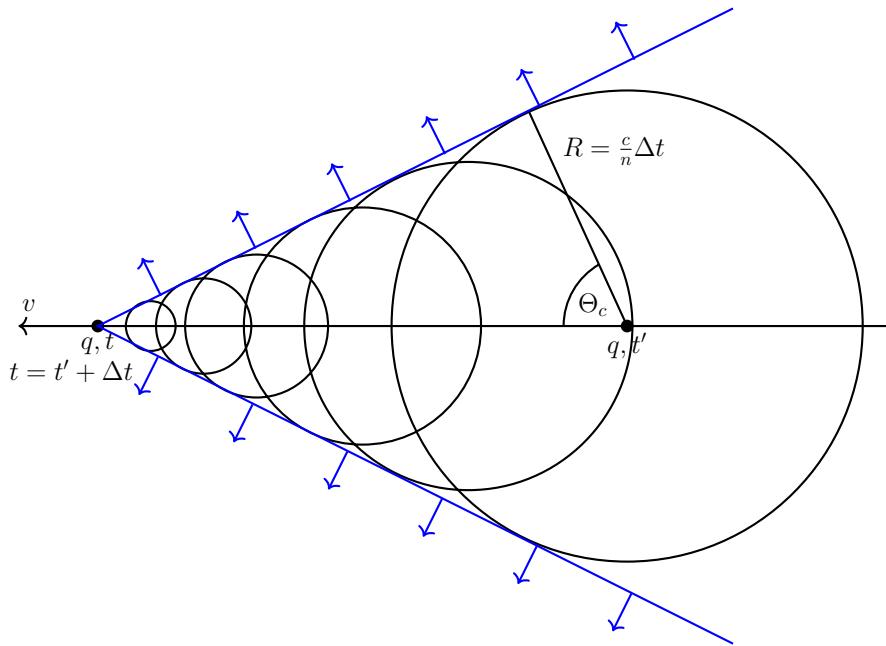


Figura 11.1: Radiazione Cherenkov sviluppata sull'inviluppo di superfici sferiche.

La particella carica q si muove di moto uniforme con velocità $v = \beta c$. Dalla posizione in cui si trova la particella al tempo t' si propaga una perturbazione elettromagnetica con un fronte d'onda

sferico, che dopo un tempo Δt ha un raggio $R = \frac{c}{n} \Delta t$.

Da tutte le posizioni occupate dalla particella fra il tempo t' ed il tempo $t = t' + \Delta t$ si propagano perturbazioni sferiche analoghe, che al tempo t avranno un raggio intermedio fra $R = \frac{c}{n} \Delta t$ ed $R = 0$ (per quella originata al tempo t).

Di conseguenza la perturbazione elettromagnetica si sviluppa su un fronte che è l'inviluppo di tutte le superfici sferiche precedenti. Tale superficie è una superficie conica con un angolo di apertura il cui seno vale $\frac{1}{\beta n}$. La perturbazione, che a questo punto ha tutte le caratteristiche di un'onda d'urto, si propaga perpendicolarmente al fronte d'onda e quindi con un angolo tale che

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n} \Rightarrow \beta = \frac{1}{n \cdot \cos \vartheta}, \quad (11.1.1)$$

ovvero **misurare l'angolo Cherenkov vuol dire misurare la velocità di una particella carica.**

L'indice di rifrazione varia con la frequenza $n = n(\omega)$, per cui l'emissione avviene a tutte le frequenze per cui $\frac{1}{\beta} < n(\omega)$ ed i fotoni sono emessi fra:

- un angolo nullo, corrispondente in Figura 11.2 ad un valore ω_2 per cui $\beta n(\omega_2) = 1$
- angolo massimo $\cos \vartheta_{MAX} = \frac{1}{\beta n(\bar{\omega})}$, corrispondente in Figura 11.2 al valore $\bar{\omega}$ per cui la parte reale dell'indice di rifrazione è massima.

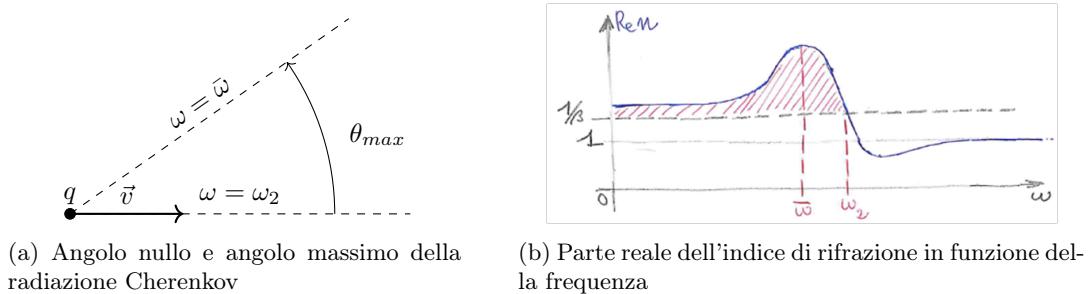


Figura 11.2: Relazione fra angolo e frequenza di emissione

Si consideri ora una particella di carica $q = ze$ che attraversa uno spessore infinitesimo dx di un materiale con indice di rifrazione $n(\omega)$, come schematizzato in Figura 11.3.

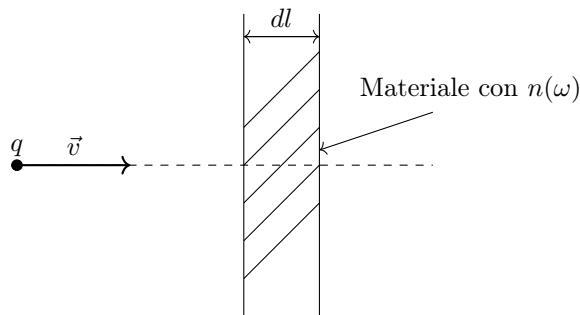


Figura 11.3: Particella carica che si muova con velocità \vec{v} e attraversa un materiale di spessore dx con indice di rifrazione $n(\omega)$

Il numero di fotoni Cherenkov emessi per unità di energia $E_\gamma = \hbar\omega$ è dato dalla formula di Frank-Tamm in equazione (11.1.2), che verrà calcolata con due modi differenti nelle sezioni 11.4 e 11.5.

$$\frac{d^2N_\gamma}{dE_\gamma dx} = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2 \vartheta_C \quad \text{formula di Frank-Tamm (11.1.2)}$$

Utilizzando l'indice di rifrazione questa si scrive:

$$\frac{d^2N_\gamma}{dE_\gamma dx} = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad (11.1.3)$$

Ripensando a

$$\frac{\alpha}{\hbar e} = \frac{1}{137} \cdot \frac{1}{197} \text{MeV}^{-1} \text{fm}^{-1} = \frac{10^{-6} 10^{13}}{137 \cdot 197} \frac{\text{fotoni}}{\text{eV cm}} = \frac{370 \text{ fotoni}}{\text{eV cm}},$$

si nota che la dipendenza di E_γ è completamente contenuta in $n(\omega)$.

Il numero totale di fotoni emessi per unità di lunghezza per effetto Cherenkov su tutte le frequenze risulta quindi:

$$\frac{dN_\gamma}{dx} = \int_{E_1}^{E_2} \frac{d^2N_\gamma}{dE_\gamma dx} dE_\gamma = \int_{E_1}^{E_2} z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) dE_\gamma, \quad (11.1.4)$$

mentre l'energia totale persa per unità di lunghezza per effetto Cherenkov è pertanto

$$\frac{\Delta E_{\text{Cher}}}{dx} = \int_{E_1}^{E_2} E_\gamma \frac{d^2N_\gamma}{dE_\gamma dx} dE_\gamma = \int_{E_1}^{E_2} E_\gamma z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) dE_\gamma. \quad (11.1.5)$$

11.2 **Richiami di elettromagnetismo nei mezzi

Le equazioni di Maxwell nei mezzi si scrivono nella forma¹ (vedi ad es. [4] §6.6 per una deduzione microscopica e [6] §6, §29, §75 per un approccio più macroscopico)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho_{ext} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

dove ρ_{ext} e \vec{j}_{ext} denotano la densità di carica libera e di corrente di conduzione, indicate con il pericolo “ext” per distinguerle dalle densità di carica e di corrente dovute ad effetti di polarizzazione del mezzo. I campi ausiliari $\vec{D}(\vec{r}, t)$ e $\vec{H}(\vec{r}, t)$ sono legati al campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ed al campo magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dalle relazioni (valide nel limite di campi deboli, materiali isotropi ed a riposo²)

$$\tilde{\vec{D}}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega), \quad \tilde{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \tilde{\vec{H}}(\vec{k}, \omega), \quad (11.2.2)$$

dove \vec{k} è il vettore d'onda e ω è la frequenza angolare dei campi, ϵ è la permittività dielettrica e μ è la permeabilità magnetica. Le relazioni precedenti sono talvolta chiamate relazioni costitutive.

I campi \vec{D} e \vec{H} possono anche essere descritti introducendo la densità di polarizzazione elettrica $\vec{P}(\vec{r}, t)$ ed il vettore $\vec{M}(\vec{r}, t)$ (che nel limite quasi-statico è la densità di magnetizzazione³) tramite le quali si scrivono come

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi \vec{P}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}, t) + 4\pi \vec{M}(\vec{r}, t). \quad (11.2.3)$$

¹Vedi Sez. (A.3) per le equazioni nel sistema di unità di misura SI.

²Vedi [6] §76 per le relazioni che legano i campi \vec{E} , \vec{B} ed i campi \vec{D} , \vec{H} per il caso di un mezzo non a riposo.

³Vedi [6] §79 per i limiti della interpretazione di \vec{M} come densità di magnetizzazione.

In questo caso, al posto della permittività dielettrica e della permeabilità magnetica si introducono la suscettività dielettrica χ_e e la suscettività magnetica χ_m tramite le relazioni (nuovamente valide nel limite di campi deboli, materiali isotropi ed a riposo)

$$\tilde{P}(\vec{k}, \omega) = \chi_e(\vec{k}, \omega) \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega), \quad \tilde{M}(\vec{k}, \omega) = \chi_m(\vec{k}, \omega) \tilde{\vec{H}}(\vec{k}, \omega), \quad (11.2.4)$$

da cui si vede che la suscettività dielettrica è legata alla permittività dielettrica da $\chi_e = (\epsilon - 1)/(4\pi)$ e che la suscettività magnetica è legata alla permeabilità magnetica da $\chi_m = (\mu - 1)/(4\pi)$. La densità di carica di polarizzazione $\rho_{ind}(\vec{r}, t)$ e la densità di corrente di magnetizzazione $\vec{j}_{ind}(\vec{r}, t)$ indotte dai campi nel mezzo si possono infine scrivere in termini delle polarizzazioni tramite

$$\rho_{ind} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad \vec{j}_{ind} = c\vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (11.2.5)$$

come si vede dal fatto che usando Eq. (11.2.3) in Eq. (11.2.1) si ottengono le equazioni valide nel vuoto quando sono presenti la densità di carica $\rho_{ext} + \rho_{ind}$ e la densità di corrente $\vec{j}_{ext} + \vec{j}_{ind}$.

Un mezzo in cui i valori di $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ sono indipendenti dal valore della frequenza ω è detto un mezzo non dispersivo, mentre un mezzo in cui ϵ e μ sono reali è detto mezzo non dissipativo. La dispersività e la dissipatività, per come sono state definite, sembrano due proprietà indipendenti, tuttavia è possibile mostrare che non è così: un mezzo dispersivo deve essere dissipativo ed un mezzo dissipativo deve essere dispersivo, vedi ad es. [4] §7.10, [25] §123, [6] §82.

Poichè le equazioni di Maxwell senza sorgenti sono rimaste identiche al caso del vuoto, si possono ancora scrivere il campo elettrico ed il campo magnetico in termini del potenziale scalare e del potenziale vettore esattamente come nel vuoto:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (11.2.6)$$

Poichè le relazioni che legano il campo elettrico \vec{E} ed il campo magnetico \vec{B} ai vettori \vec{D} , \vec{H} sono lineari per le trasformate di Fourier dei campi, è conveniente scrivere tutto quello che appare in Eq. (11.2.1) in trasformata e si useranno le convenzioni in Sez. (A.1); ad esempio

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k d\omega, \quad \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 r dt. \quad (11.2.7)$$

Utilizzando queste stesse convenzioni di segni e π nelle trasformate di Fourier anche per $\tilde{\rho}_{ext}$, $\tilde{\vec{j}}_{ext}$ e $\tilde{\vec{B}}$ le prime due equazioni di Eq. (11.2.1) diventano

$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ i\vec{k} \times \tilde{\vec{B}} &= \frac{4\pi}{c} \mu \tilde{\vec{j}}_{ext} - i\frac{\omega}{c} \mu \epsilon \tilde{\vec{E}} \end{aligned} \quad (11.2.8)$$

ed usando anche $\tilde{\vec{A}}$ si trova

$$\tilde{\vec{B}} = i\vec{k} \times \tilde{\vec{A}}, \quad \tilde{\vec{E}} = -i\vec{k} \tilde{\phi} + i\frac{\omega}{c} \tilde{\vec{A}}. \quad (11.2.9)$$

Arriviamo quindi alle equazioni

$$\begin{aligned} k^2 \tilde{\phi} - \frac{\omega}{c} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{A}} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ -\vec{k}(\vec{k} \cdot \tilde{\vec{A}}) + k^2 \tilde{\vec{A}} + \mu \epsilon \frac{\omega}{c} \vec{k} \tilde{\phi} - \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\vec{A}} &= \mu \frac{4\pi}{c} \tilde{\vec{j}}_{ext}, \end{aligned} \quad (11.2.10)$$

che corrispondono nel vuoto, cioè quando $\epsilon = \mu = 1$, a Eq. (2.1.5). Per semplificare queste equazioni è conveniente usare la scelta di gauge

$$\vec{k} \cdot \tilde{\vec{A}} - \mu \epsilon \frac{\omega}{c} \tilde{\phi} = 0, \quad (11.2.11)$$

che è l'equivalente della gauge di Lorenz nel caso dell'elettromagnetismo nei mezzi, ottenendo infine

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\phi} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ \left(k^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{A} &= \mu \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_{ext} . \end{aligned} \quad (11.2.12)$$

Nel caso in cui nel mezzo non siano presenti cariche e correnti esterne si vede che le equazioni precedenti ammettono soluzione non nulla solo nel caso in cui sia verificata la relazione

$$\omega^2 \mu\epsilon = c^2 k^2 , \quad (11.2.13)$$

che è l'equivalente nel mezzo della relazione $\omega = ck$ valida per le onde elettromagnetiche nel vuoto. Tuttavia in generale ϵ e μ sono numeri complessi (vedi ad es. l'espressione Eq. (6.2.5) ottenuta con il modello dell'elettrone legato elasticamente) ed un'onda piana monocromatica nel senso proprio del termine (cioè con ω e \vec{k} reali) non è soluzione delle equazioni del moto. In generale si definisce l'indice di rifrazione complesso tramite l'equazione

$$n(\omega) = \sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)} , \quad (11.2.14)$$

la parte reale di questo numero è l'indice di rifrazione propriamente detto, mentre la sua parte immaginaria viene spesso chiamata indice di assorbimento (vedi dopo per la relazione tra le parti immaginarie di $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ e la dissipazione). Nel caso di dissipazione trascurabile (o comunque debole), da Eq. (11.2.13) segue che una onda piana è soluzione delle equazioni nel mezzo e propaga con velocità di fase $\omega/k = c/n(\omega)$.

Notiamo esplicitamente che alla velocità di fase non è associata una trasmissione di informazione, in quanto è relativa ad una onda piana che si estende già da $t = -\infty$ a $t = +\infty$; di conseguenza la velocità di fase può essere maggiore di c . Nel caso di dispersione debole ed in cui si considerino pacchetti d'onda la velocità più ragionevole da usare è la velocità di gruppo $\partial\omega/\partial k$, tuttavia vicino alle risonanze (cioè quando si ha dispersione forte) anche questa velocità può risultare maggiore di c . Per una discussione delle varie definizioni di velocità che si possono utilizzare per un'onda in un mezzo dispersivo vedi [4] §7.11, [24] §22 e soprattutto [42].

Quando $\rho_{ext} = 0$ e $\vec{j}_{ext} = 0$ si può eliminare il potenziale scalare usando la libertà di gauge residua di Eq. (11.2.11), in analogia con quanto si era fatto nel caso del vuoto, vedi Sez. (2.2). Dalla condizione di gauge e da $\tilde{\phi} = 0$ segue allora che $\vec{k} \cdot \tilde{A} = 0$; da Eq. (11.2.9) segue allora anche $\vec{k} \cdot \tilde{\vec{B}} = \vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}} = 0$ e $\tilde{\vec{B}} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \tilde{\vec{E}}$. Se si considera il quadrato di questa ultima equazione si ottiene infine $\tilde{\vec{B}}^2 = \mu\epsilon \tilde{\vec{E}}^2$. Essendo queste relazioni invarianti di gauge, esse sono valide per ogni scelta di gauge, infatti si sarebbero anche potute ottenere a partire dalle equazioni di Maxwell scritte in termini di \vec{E} e \vec{B} , senza effettuare il passaggio ai potenziali.

Nel vuoto il flusso di energia è dato dal vettore di Poynting $\vec{S}_v = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$, dove il pedice v è stato usato per indicare che questa espressione è vera nel vuoto. Supponiamo ora di considerare il caso in cui un campo elettrico \vec{E} ed un campo magnetico \vec{B} siano presenti all'esterno di un dielettrico; il flusso di energia nella direzione ortogonale alla superficie del dielettrico deve essere continuo (si suppongono trascurabili i meccanismi di trasmissione dell'energia nel mezzo diversi dalla propagazione di onde elettromagnetiche, quali ad esempio la propagazione di onde sonore) e dall'espressione di \vec{S}_v segue che alla componente normale del flusso di energia contribuiscono le componenti del campo elettrico e magnetico nel piano della superficie. D'altra parte da Eq. (11.2.1) segue (integrandolo lungo un percorso infinitesimo che attraversa il bordo del dielettrico ed usando il teorema di Stokes) che le componenti parallele alla superficie di \vec{E} e di \vec{H} sono continue al bordo di un dielettrico, inoltre nel vuoto $\vec{H} = \vec{B}$, quindi il vettore di Poynting nel mezzo è dato da⁴

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} . \quad (11.2.15)$$

⁴Per come è stata dedotta, questa è l'espressione del flusso di energia elettromagnetica nel mezzo. La relazione di questa espressione con la densità di impulso del campo elettromagnetico nel mezzo presenta invece, rispetto al caso del vuoto, alcune sottigliezze, vedi [43].

Usando le equazioni di Maxwell Eq. (11.2.1) si ottiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j}_{ext} - \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (11.2.16)$$

e se non fosse presente dispersione (e quindi $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \mu \vec{B}(\vec{r}, t)$ con ϵ e μ costanti) questa equazione potrebbe essere riscritta nella forma del teorema di Poynting

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi} \left[\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right] \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j}_{ext} \quad (\text{caso non dispersivo}) \quad (11.2.17)$$

in cui $\frac{1}{8\pi} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right)$ può essere interpretata come la densità di energia del campo nel mezzo.

Nel caso di un mezzo dispersivo una simile interpretazione non è in generale possibile⁵, tuttavia l'espressione in Eq. (11.2.16) può essere usata per calcolare l'energia dissipata: consideriamo ad esempio il caso in cui \vec{E} e \vec{B} siano campi stazionari monocromatici e $\vec{j}_{ext} = 0$. Considerando la media su un periodo di Eq. (11.2.16) si ottiene un flusso costante di energia che viene immesso nel sistema dalle sorgenti che mantengono i campi e, poichè si è in una condizione stazionaria, l'energia dissipata per unità di tempo e di volume è quindi data da

$$Q = -\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{1}{4\pi} \left\langle \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\rangle, \quad (11.2.18)$$

che nel caso di una campo monocromatica con andamento $e^{-i\omega t}$ diventa (come al solito è necessario considerare esplicitamente le parti reali dei campi in quanto l'espressione precedente è quadratica)

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} \left[(\epsilon^*(\omega) - \epsilon(\omega)) |\tilde{\vec{E}}|^2 + (\mu^*(\omega) - \mu(\omega)) |\tilde{\vec{H}}|^2 \right] = \frac{\omega}{8\pi} \left(\Im \epsilon(\omega) |\tilde{\vec{E}}|^2 + \Im \mu(\omega) |\tilde{\vec{H}}|^2 \right), \quad (11.2.19)$$

da cui si vede in un mezzo dissipativo si deve avere $\omega \Im \epsilon(\omega) > 0$ e $\omega \Im \mu(\omega) > 0$. Queste proprietà generali di $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ sono necessarie per determinare l'andamento asintotico di alcune espressioni integrali che compariranno in Sez. (11.5), vedi Sez. (A.7) per i dettagli matematici.

Terminiamo questa sezione notando che è possibile effettuare un cambio di variabili per ricondurre le equazioni d'onda del campo elettromagnetico nel mezzo a quelle nel vuoto: introducendo le variabili primarie

$$\begin{aligned} c = c' \sqrt{\mu(\omega) \epsilon(\omega)}, \quad \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\phi}'(\vec{k}, \omega) / \sqrt{\epsilon(\omega)}, \quad \tilde{\vec{A}}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\vec{A}}'(\vec{k}, \omega) \sqrt{\mu(\omega)}, \\ \tilde{\rho}_{ext}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\rho}'_{ext}(\vec{k}, \omega) \sqrt{\epsilon(\omega)}, \quad \tilde{\vec{j}}_{ext}(\vec{k}, \omega) = \tilde{\vec{j}}'_{ext}(\vec{k}, \omega) \sqrt{\epsilon(\omega)}, \end{aligned} \quad (11.2.20)$$

si vede infatti senza difficoltà che le equazioni Eq. (11.2.11) e Eq. (11.2.12) si riducono per le variabili primarie alla forma

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c'} \frac{\partial \phi'}{\partial t} &= 0 \\ \left(\frac{1}{(c')^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \phi' &= 4\pi \tilde{\rho}'_{ext} \\ \left(\frac{1}{(c')^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A}' &= \frac{4\pi}{c'} \tilde{\vec{j}}'_{ext}, \end{aligned} \quad (11.2.21)$$

che sono, a parte la ridefinizione $c \rightarrow c'$, l'equazione per la gauge di Lorenz nel vuoto e le equazioni d'onda nel vuoto.

⁵Vedi [4] §6.8 o [6] §80 per le espressioni della densità di energia che si possono ottenere nel caso di dispersione debole.

11.3 **Radiazione Cherenkov nel caso senza dispersione

In questa sezione considereremo solamente il caso ideale di un mezzo non dispersivo e non dissipativo, quindi con ϵ, μ reali ed indipendenti da ω . Supponiamo che una particella di carica e si muova con velocità costante \vec{v} nel mezzo. Con il cambio di variabili Eq. (11.2.20) ci si riduce a studiare un problema che è l'analogo nel mezzo del problema la cui soluzione sono i potenziali di Lienard-Wiechert ottenuti in Sez. (3.4), tuttavia rispetto a questo caso è presente una notevole differenza. Nel vuoto la velocità che compare nelle equazioni di campo è c ; dal fatto che tutte le particelle cariche si muovono con velocità minore di c segue allora che, per dati t ed \vec{r} , esiste sempre una unica coppia di valori t' e \vec{r}' che soddisfano l'equazione per il tempo ritardato $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ con $t - t' > 0$. Nel caso del mezzo l'equazione per il tempo ritardato diventa $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c'$, dove $c' = c/n$ è la velocità di fase della luce nel mezzo, che può essere minore di c ; in questo caso vedremo ora che si possono avere diverse possibilità.

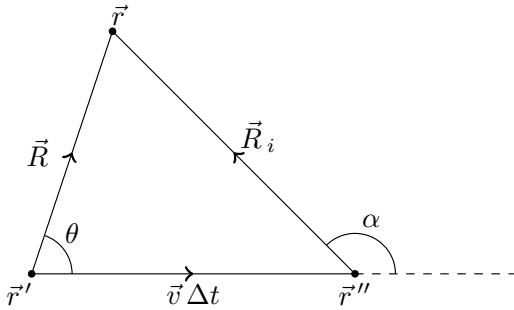


Figura 11.4: Figura per il calcolo del tempo ritardato; la posizione \vec{r}'' è la posizione dove si trova la particella che al tempo t' era in \vec{r}' all'istante di tempo $t = t' + \Delta t$.

Introduciamo per semplicità le notazioni $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $\Delta t = t - t'$, allora l'equazione per il tempo ritardato si può scrivere nella forma compatta $R = c'\Delta t$ e si ha in generale $\vec{R} = \vec{v}\Delta t + \vec{R}_i$, dove il vettore \vec{R}_i (mostrato in figura Fig. (11.4)) è la posizione del punto di osservazione relativamente alla posizione istantanea della particella. Se consideriamo il quadrato di questa equazione vettoriale ed usiamo la condizione $R = c'\Delta t$ otteniamo l'equazione di secondo grado in $\Delta t/R_i$

$$(c'^2 - v^2) \left(\frac{\Delta t}{R_i} \right)^2 - 2v \cos \alpha \frac{\Delta t}{R_i} - 1 = 0 , \quad (11.3.1)$$

dove α è l'angolo tra la velocità \vec{v} ed il vettore \vec{R}_i , vedi Fig. (11.4). È ovvio che l'equazione debba essere nella variabile $\Delta t/R_i$ e non Δt in quanto riscalando sia \vec{R} che Δt l'equazione del tempo ritardato rimane invariante ed il vettore \vec{R}_i viene rscalato della stessa quantità. Affinchè l'equazione Eq. (11.3.1) ammetta soluzioni è necessario che il suo discriminante sia positivo, quindi

$$c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha \geq 0 , \quad (11.3.2)$$

inoltre si deve imporre che Δt sia positivo, in modo da selezionare il tempo ritardato.

Nel caso $v < c'$ il discriminante è sempre positivo per qualunque valore dell'angolo α e le due soluzioni sono

$$\frac{\Delta t}{R_i} = \frac{v \cos \alpha \pm \sqrt{c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha}}{c'^2 - v^2} \quad (11.3.3)$$

inoltre si ha $c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha > v^2 \cos^2 \alpha$, quindi solo una delle due soluzioni è accettabile come tempo ritardato. Questo caso è quello che si presenta nel vuoto, in cui $c' = c$ e $v < c$.

Supponiamo ora che si abbia $v > c'$; in questo caso il comportamento dipende dall'angolo e si devono distinguere le seguenti possibilità ($c'/v < 1$):

$|\sin \alpha| > c'/v$: il discriminante è negativo e non si hanno soluzioni

$|\sin \alpha| = c'/v$: il discriminante è nullo e si ha una soluzione degenera

$|\sin \alpha| < c'/v$: il discriminante è positivo e si hanno due soluzioni distinte

Poichè $v > c'$ si ha $c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha < v^2 \cos^2 \alpha$ e $c'^2 - v^2 < 0$, quindi nel terzo caso si hanno due soluzioni con $\Delta t < 0$ se $\cos \alpha > 0$, che non sono accettabili in quanto non “ritardate”, e due soluzioni con $\Delta t > 0$ se $\cos \alpha < 0$ (il caso $\cos \alpha = 0$ non può presentarsi in quanto altrimenti si avrebbe $|\sin \alpha| = 1$ ma $|\sin \alpha| < c'/v < 1$ nel terzo caso). La regione in cui si hanno soluzioni accettabili e quindi potenziali ritardati non nulli è quella caratterizzata da

$$\cos \alpha < 0, \quad |\sin \alpha| \leq \frac{c'}{v} = \frac{1}{\beta n} \quad (11.3.4)$$

(dove $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ è l’indice di rifrazione) e consiste in una superficie semiconica avente come vertice la posizione istantanea della particella carica ed apertura angolare $2 \arcsin[1/(\beta n)]$.

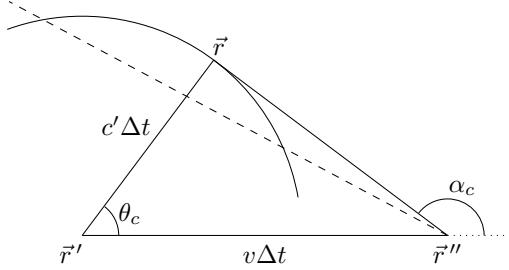


Figura 11.5: Determinazione geometrica dell’angolo critico Cherenkov.

La presenza di queste tre possibilità nel caso $c'/v < 1$ si può spiegare qualitativamente nel modo seguente: se, per dati t' e \vec{r}' , le quantità t e \vec{r} soddisfano l’equazione $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c'$, allora anche tutti i vettori sulla superficie della sfera di raggio $R = c'\Delta t$ centrata in \vec{r}' soddisfano la stessa equazione. Questo significa che per valori dell’angolo α abbastanza vicini a π si avranno due soluzioni dell’equazione Eq. (11.3.1), corrispondenti ai punti in cui la linea tratteggiata interseca la circonferenza di raggio $c'\Delta t$ centrata in \vec{r}' in Fig. (11.5). Il valore critico dell’angolo α_c , per cui è presente una unica soluzione due volte degenera, corrisponde al caso di una retta tangente alla circonferenza, mentre per $|\alpha| < \alpha_c$ la retta non interseca la circonferenza e non si hanno soluzioni. I valori critici degli angoli α e θ sono a questo punto facili da determinare geometricamente tramite le equazioni

$$v\Delta t \sin(\pi - \alpha_c) = c'\Delta t, \quad v\Delta t \cos \theta_c = c'\Delta t, \quad (11.3.5)$$

ottenendo quindi

$$\sin \alpha_c = \frac{1}{\beta n}, \quad \cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}, \quad (11.3.6)$$

dove $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ è l’indice di rifrazione del mezzo.

Si può ora calcolare la forma esplicita del potenziale scalare e del potenziale vettore associati ad una particella in moto uniforme nel mezzo partendo dai potenziali ritardati. Le espressioni generali che si ottengono sono praticamente identiche a quelle dedotte in Sez. (3.4), con un paio di differenze:

$$\phi'(\vec{r}, t) = \sum_i \frac{e'}{R|1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c'|} \Big|_{t_r^{(i)}}, \quad \vec{A}'(\vec{r}, t) = \sum_i \frac{e' \vec{v}}{Rc'|1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c'|} \Big|_{t_r^{(i)}}, \quad (11.3.7)$$

dove come al solito $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $\hat{\vec{n}} = \vec{R}/R$. La prima differenza consiste nel fatto che si deve sommare sui tempi ritardati, in quanto si è appena visto che in alcuni casi si hanno due soluzioni

dell'equazione che definisce il tempo ritardato. La seconda differenza è la presenza dei valori assoluti nel denominatore delle precedenti espressioni; questi originano dal fatto che nella regola di trasformazione della δ di Dirac compare il modulo dello Jacobiano. In Sez. (3.4) i valori assoluti non erano stati scritti poiché si era mostrato che non erano necessari quando $v < c'$. È conveniente scrivere i potenziali in termini della posizione istantanea della particella carica, quindi usiamo nuovamente $\vec{R} = \vec{v}\Delta t + \vec{R}_i$, da cui si ottiene (usando $R = c'\Delta t$)

$$1 - \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \vec{v}}{c'} = 1 - \frac{(\vec{v}\Delta t + \vec{R}_i) \cdot \vec{v}}{c'R} = 1 - \frac{v^2}{c'^2} - \frac{R_i v \cos \alpha}{c'^2 \Delta t}. \quad (11.3.8)$$

Usando le espressioni esplicite Eq. (11.3.3) si ha quindi

$$R \left(1 - \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \vec{v}}{c'} \right) = c'\Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c'^2} - \frac{R_i v \cos \alpha}{c'^2 \Delta t} \right) = \pm R_i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c'^2} \sin^2 \alpha} \quad (11.3.9)$$

da cui si vede che, per $v > c'$, i potenziali nella regione caratterizzata da $|\sin \alpha| < c'/v$, $\cos \alpha < 0$ (chiamata cono Cherenkov) sono dati da (usando $\phi = \phi'/\sqrt{\epsilon}$, $A = A'\sqrt{\mu}$ ed $e' = e/\sqrt{\epsilon}$, vedi Eq. (11.2.20))

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\epsilon R_i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c'^2} \sin^2 \alpha}}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu\epsilon \frac{\vec{v}}{c} \phi(\vec{r}, t), \quad (11.3.10)$$

dove il fattore 2 (che non comparirebbe per $v < c'$) è dovuto alla somma sui due tempi ritardati, la dipendenza temporale è nascosta nella definizione di R_i e α e si vede che i potenziali sono singolari sul cono Cherenkov.

Per calcolare i campi supponiamo a questo punto che la particella carica si stia muovendo lungo l'asse \hat{x} con legge oraria $\vec{s}(t) = vt\hat{x}$; si ha $R_i^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2$ e $R_i^2 \sin^2 \alpha = y^2 + z^2$ e quindi

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{2e}{\epsilon R_*} , \quad A_1(\vec{r}, t) = \mu\epsilon \frac{v}{c} \phi(\vec{r}, t) , \quad A_2 = A_3 = 0 , \\ R_* &= \sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c'^2}\right)(y^2 + z^2)} . \end{aligned} \quad (11.3.11)$$

Il campo elettrico ed il campo magnetico possono a questo punto essere calcolati semplicemente, ottenendo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{2e\vec{R}_i}{\epsilon R_*^3} \left(1 - \frac{v^2}{c'^2}\right), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (11.3.12)$$

ed è evidente la analogia di questo campo elettrico con il campo di una carica in moto uniforme nel vuoto Eq. (2.4.6), da cui l'espressione precedente si differenzia per la presenza di un ϵ a denominatore, per il fattore 2, per la sostituzione $c \rightarrow c'$ e per il fatto di essere definita solo all'interno del cono Cherenkov $x < vt$ e $(x - vt)^2 > \left(\frac{v^2}{c'^2} - 1\right)(y^2 + z^2)$.

Il campo elettrico è diretto lungo \vec{R}_i , cioè lungo la retta che congiunge il punto di osservazione alla posizione istantanea della carica, mentre il campo magnetico si avvolge in cerchi attorno alla direzione della velocità \vec{v} . Il vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi\mu} \vec{E} \times \vec{B}$ diventa singolare sul cono Cherenkov (come anche i campi) e nei punti vicini al cono punta in direzione ortogonale alla superficie del cono. È quindi ragionevole attendersi che il moto attraverso un mezzo uniforme di una carica con velocità costante e superiore alla velocità di fase della luce nel mezzo ($v > c'$) determini la produzione di radiazione (radiazione Cherenkov) che propaga come una onda d'urto nel mezzo. Tuttavia nella trattazione che si è seguita fino ad ora è presente una singolarità spuria dei campi sul cono Cherenkov, indotta dall'aver trascurato la dispersione, che impedisce di calcolare l'energia irraggiata.

11.4 **Deduzione della formula di Frank-Tamm

In questa sezione si presenterà una deduzione della formula di Frank-Tamm, cioè dell'espressione che descrive la perdita di energia per unità di lunghezza e di frequenza per effetto Cherenkov di una particella che si muove con velocità costante in un mezzo. Si utilizzerà come punto di partenza l'espressione Eq. (3.6.24) per l'energia irraggiata per angolo solido, per unità di frequenza e per unità di tempo, che riportiamo qui per comodità

$$\frac{d\mathcal{E}}{dT d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2 c^3} \int \left(\vec{j}(\vec{r}, T + \tau/2)^* \cdot \vec{j}(\vec{r}', T - \tau/2) + \right. \\ \left. - c^2 \rho(\vec{r}, T + \tau/2)^* \rho(\vec{r}', T - \tau/2) \right) e^{-i\omega(\tau - \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/c)} d\tau d\vec{r} d\vec{r}' . \quad (11.4.1)$$

Usando Eq. (11.2.20) le equazioni del moto si riducono al caso del vuoto, vediamo ora cosa succede ai campi se si usano sistematicamente queste sostituzioni:

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{B}} &= i\vec{k} \times \tilde{\vec{A}} = \sqrt{\mu(\omega)} i\vec{k} \times \tilde{\vec{A}'} = \sqrt{\mu(\omega)} \tilde{\vec{B}'} \\ \tilde{\vec{E}} &= -i\vec{k} \tilde{\phi} + i\frac{\omega}{c} \tilde{\vec{A}} = -i\vec{k} \frac{\tilde{\phi}'}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} + i\frac{\omega}{c' \sqrt{\mu(\omega) \epsilon(\omega)}} \tilde{\vec{A}'} \sqrt{\mu(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} \tilde{\vec{E}'} \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

ed il vettore di Poynting medio diventa (trascurando la dissipazione, quindi $\epsilon(\omega), \mu(\omega) \in \mathbb{R}$)

$$\langle \tilde{\vec{S}} \rangle = \frac{c}{16\pi} \langle \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* + \tilde{\vec{E}}^* \times \tilde{\vec{H}} \rangle = \frac{c'}{16\pi} \langle \tilde{\vec{E}'} \times (\tilde{\vec{B}'})^* + (\tilde{\vec{E}'})^* \times \tilde{\vec{B}'} \rangle = \langle \tilde{\vec{S}'_v} \rangle , \quad (11.4.3)$$

quindi se si usano sistematicamente le variabili "primate" e si usano le formule valide per il vuoto si ottiene il corretto valore del vettore di Poynting nel mezzo e quindi il corretto valore dell'energia irraggiata.

Consideriamo quindi l'equivalente "primato" di Eq. (11.4.1) ed usiamo le espressioni della densità di carica e della densità di corrente corrispondenti ad una particella in moto con velocità \vec{v} costante:

$$\rho'_{ext}(\vec{r}, t) = e' \delta(\vec{r} - \vec{v}t) , \quad \vec{j}'_{ext}(\vec{r}, t) = \vec{v} \rho'_{ext}(\vec{r}, t) . \quad (11.4.4)$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dT d\omega d\Omega} &= \frac{\omega^2 (e')^2 (v^2 - (c')^2)}{(2\pi)^2 (c')^3} \int \delta(\vec{r} - \vec{v}T - \vec{v}\tau/2) \delta(\vec{r}' - \vec{v}T + \vec{v}\tau/2) \times \\ &\quad \times e^{-i\omega[\tau - \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/c']} d^3 r d^3 r' d\tau = \\ &= \frac{\omega^2 (e')^2}{(2\pi)^2 c'} \left(\frac{v^2}{(c')^2} - 1 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau(\omega - \omega \hat{n} \cdot \vec{v}/c')} d\tau = \\ &= \frac{\omega^2 (e')^2}{2\pi c'} \left(\frac{v^2}{(c')^2} - 1 \right) \delta(\omega - \omega \hat{n} \cdot \vec{v}/c') , \end{aligned} \quad (11.4.5)$$

mentre la perdita per unità di percorso è data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega d\Omega} = \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dT d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2 (e')^2}{2\pi v c'} \left(\frac{v^2}{(c')^2} - 1 \right) \delta(\omega - \omega \hat{n} \cdot \vec{v}/c') , \quad (11.4.6)$$

che riscrivendo le variabili "primate" in termini delle originali usando Eq. (11.2.20) diventa

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega d\Omega} &= \frac{\omega^2 e^2 n(\omega)}{2\pi v c \epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \delta(\omega - \omega n(\omega) \hat{n} \cdot \vec{\beta}) = \\ &= \frac{\omega e^2 n(\omega)}{2\pi v c \epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \delta(1 - n(\omega) \hat{n} \cdot \vec{\beta}) . \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

Da questa espressione si vede che si ha emissione di radiazione di frequenza ω solo nelle direzioni $\hat{\vec{n}}$ per le quali si ha $n(\omega)\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta} = 1$; se indichiamo con θ l'angolo tra la direzione della particella e la direzione di emissione della radiazione si ha allora $\cos\theta = \frac{1}{n(\omega)\beta}$, che non è nient'altro che l'equazione del cono Cherenkov ottenuta nella sezione precedente per il caso senza dispersione. Affinchè questa equazione ammetta soluzioni deve ovviamente essere soddisfatta la condizione $n(\omega)\beta \geq 1$, ovvero la particella carica deve avere velocità superiore alla velocità di fase della luce nel mezzo.

Il prossimo passo è calcolare la perdita totale di energia per unità di lunghezza e per unità di frequenza, che si ottiene integrando l'equazione precedente su tutte le direzioni. Si ha quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega} = \frac{e^2}{2\pi vc} \int d\Omega \frac{\omega n(\omega)}{\epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \delta(1 - n(\omega)\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}) . \quad (11.4.8)$$

ed usando

$$\int \delta(1 - n(\omega)\hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}) d\Omega = \int \delta(1 - n(\omega)\beta \cos\theta) d\phi d\cos\theta = \frac{2\pi}{n(\omega)\beta} \Theta(n(\omega)\beta - 1) \quad (11.4.9)$$

(dove $\Theta(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $\Theta(x) = 0$ se $x < 0$) si trova

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega} &= \frac{e^2}{c^2 \beta^2} \frac{\omega}{\epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \Theta(n(\omega)\beta - 1) = \\ &= \frac{\mu(\omega)e^2\omega}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) \Theta(n(\omega)\beta - 1) \end{aligned} \quad (11.4.10)$$

Questa è la formula di Frank-Tamm, che di solito viene scritta in forma integrale (in modo da non dover scrivere esplicitamente la funzione Θ) e senza il $\mu(\omega)$ a moltiplicare, in quanto per praticamente tutti i materiali non ferromagnetici $\mu(\omega) \simeq 1$ è una ottima approssimazione.

Ricordando che l'energia di un fotone di frequenza ω è data da $E_\gamma = \hbar\omega$, la formula di Frank-Tamm può essere riscritta come il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e per unità di energia (dei fotoni):

$$\frac{dN}{dx dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{d\mathcal{E}}{dx dE_\gamma} = \frac{1}{\hbar^2 \omega} \frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega} = \mu(E_\gamma/\hbar) \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2(E_\gamma/\hbar)\beta^2}\right) , \quad (11.4.11)$$

dove α è la costante di struttura fine e $\frac{\alpha}{\hbar c} \simeq 370 \frac{1}{\text{eV cm}}$. Per ottenere il numero totale di fotoni emessi (l'energia totale emessa) è necessario integrare l'espressione precedente su tutti i valori di E_γ (di ω) per i quali si ha $n(E_\gamma)\beta \geq 1$ ($n(\omega)\beta \geq 1$).

11.5 **Deduzione alla Fermi della formula di Frank-Tamm

In questa sezione si dedurrà la formula di Frank-Tamm calcolando esplicitamente l'energia irraggiata per unità di tempo da una particella che si muove con velocità costante in un mezzo seguendo l'approccio di [44]. L'idea dell'approccio è la seguente: si calcola l'energia che attraversa nell'unità di tempo un cilindro di raggio a con asse coincidente con la traiettoria della particella, quindi si effettua il limite $a \rightarrow \infty$ in modo da selezionare la componente di radiazione; in questo modo si ottiene l'energia irraggiata per unità di tempo della particella. Per poter applicare questo metodo è ovviamente necessario supporre il mezzo non dissipativo, quindi $\epsilon(\omega), \mu(\omega) \in \mathbb{R}$, altrimenti si otterrebbe sempre un risultato nullo nel limite $a \rightarrow \infty$.

È prima di tutto necessario calcolare il campo elettrico ed il campo magnetico generati dalla particella, partendo dalle equazioni Eq. (11.2.12), che riportiamo qui per praticità

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \mu(\omega)\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\phi} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ \left(k^2 - \mu(\omega)\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\vec{A}} &= \mu \frac{4\pi}{c} \tilde{\vec{j}}_{ext} , \end{aligned} \quad (11.5.1)$$

dove le trasformate sono definite usando le convenzioni Eq. (11.2.7) e la densità di carica e la densità di corrente associate ad una particella in moto con velocità \vec{v} costante sono date da

$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}\rho(\vec{r}, t). \quad (11.5.2)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e\delta(\vec{r} - \vec{v}t)e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} d^3r dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int ee^{i(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})t} dt = \frac{e}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}) \end{aligned} \quad (11.5.3)$$

e $\tilde{\vec{j}}(\vec{k}, \omega) = \vec{v}\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)$; usando queste espressioni in Eq. (11.5.1) si ottengono le trasformate dei potenziali⁶:

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) = \frac{e}{2\pi^2\epsilon(\omega)} \left(\frac{\delta(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\mu(\omega)} \right), \quad \tilde{A}(\vec{r}, t) = \epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\vec{v}}{c}\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega), \quad (11.5.4)$$

da cui si trovano le trasformate dei campi:

$$\tilde{\vec{B}}(\vec{k}, \omega) = i\epsilon(\omega)\mu(\omega)\vec{k} \times \frac{\vec{v}}{c}\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega), \quad \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = i \left(\epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{\omega\vec{v}}{c^2} - \vec{k} \right) \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega). \quad (11.5.5)$$

Supponiamo ora per semplicità che la velocità della particella sia diretta lungo l'asse x , quindi $\vec{v} = v\hat{x}$, e calcoliamo la dipendenza da ω del campo elettrico nel punto di coordinate $a\hat{y}$ (per semplicità di notazione scriveremo d'ora in poi semplicemente ϵ invece di $\epsilon(\omega)$ ed analogamente per μ):

$$\tilde{\vec{E}}(a; \omega) = \int \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{iak_2} d^3k = \frac{ie}{2\pi^2\epsilon} \int e^{iak_2} \left(\epsilon\mu\frac{\omega\vec{v}}{c^2} - \vec{k} \right) \frac{\delta(\omega - \vec{k}\cdot\vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu} d^3k. \quad (11.5.6)$$

Partiamo dalla componente x :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(a; \omega) &= \frac{ie}{2\pi^2\epsilon} \int e^{iak_2} \left(\epsilon\mu\frac{\omega v}{c^2} - k_1 \right) \frac{\delta(\omega - vk_1)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu} d^3k = \\ &= \frac{ie}{2\pi^2\epsilon} \frac{\omega}{v^2} (\epsilon\mu\beta^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iak_2} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_2^2 + k_3^2 + \Lambda} dk_3, \end{aligned} \quad (11.5.7)$$

dove

$$\Lambda = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu; \quad (11.5.8)$$

usando il fatto che $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ si vede subito che l'integrale in dk_3 da come risultato $\pi/\sqrt{\Lambda + k_2^2}$, quindi si ottiene

$$\tilde{E}_1(a; \omega) = \frac{ie}{2\pi\epsilon} \frac{\omega}{v^2} (\epsilon\mu\beta^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iak_2}}{\sqrt{\Lambda + k_2^2}} dk_2. \quad (11.5.9)$$

Per $\tilde{E}_2(a; \omega)$ si ottiene analogamente

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(a; \omega) &= -\frac{ie}{2\pi^2\epsilon} \int e^{iak_2} k_2 \frac{\delta(\omega - vk_1)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu} d^3k = \\ &= -\frac{ie}{2\pi^2\epsilon v} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 e^{iak_2} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_2^2 + k_3^2 + \Lambda} dk_3 = \\ &= -\frac{ie}{2\pi\epsilon v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_2 e^{iak_2}}{\sqrt{\Lambda + k_2^2}} dk_2, \end{aligned} \quad (11.5.10)$$

⁶È immediato verificare che questi potenziali soddisfano la condizione di gauge Eq. (11.2.11) che è necessaria per la validità delle equazioni Eq. (11.5.1).

mentre è semplice vedere che $\tilde{E}_3(a; \omega) = 0$. Passiamo ora al campo magnetico: poichè $\vec{v} = v \hat{x}$ si ha ovviamente $\tilde{B}_1(a; \omega) = 0$, $\tilde{B}_2(a; \omega)$ si annulla analogamente ad \tilde{E}_3 ed infine si ha

$$\begin{aligned}\tilde{B}_3(a; \omega) &= -\frac{ie\mu v}{2\pi^2 c} \int \frac{k_2 e^{iak_2} \delta(\omega - k_1 v)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu} d^3 k = \\ &= -\frac{ie\mu}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 e^{iak_2} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k_3^2 + \Lambda} dk_3 = \\ &= -\frac{ie\mu}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_2 e^{iak_2}}{\sqrt{k^2 + \Lambda}} dk_2 = \epsilon \mu \beta \tilde{E}_2(a, \omega).\end{aligned}\quad (11.5.11)$$

Introduciamo inoltre per semplicità le notazioni

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau, \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau \quad (11.5.12)$$

per rappresentare gli integrali che compaiono nelle espressioni di \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 e \tilde{B}_3 . Questi integrali non sono esprimibili tramite trascendenti elementari e sono legati alle funzioni di Bessel modificate K_0 e K_1 , tuttavia questo fatto non sarà usato nel seguito.

Passiamo ora al calcolo del flusso di energia attraverso un cilindro di raggio a : data la simmetria cilindrica del problema è sufficiente calcolare la componente lungo \hat{y} del vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ nei punti con coordinate $(x, a, 0)$, che è data da

$$S_2(x, a, 0, t) = -\frac{c}{4\pi} E_1(x, a, 0, t) H_3(x, a, 0, t) \quad (11.5.13)$$

e quindi l'energia che attraversa il cilindro nell'unità di tempo al tempo t_0 è

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t_0) = -2\pi a \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x, a, 0, t_0) H_3(x, a, 0, t_0) dx. \quad (11.5.14)$$

Dato che la particella si muove con velocità costante v lungo l'asse \hat{x} , si ha

$$E_1(x, a, 0, t_0) = E_1(0, a, 0, t_0 - x/v) \quad (11.5.15)$$

ed analogamente per H_3 , quindi la perdita di energia per unità di tempo è costante nel tempo e può essere riscritta nella forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{cv a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(0, a, 0, t) H_3(0, a, 0, t) dt, \quad (11.5.16)$$

che può essere riscritta, usando il teorema di Parsefall ed il fatto che i campi sono reali, nella forma

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= -cv a \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_1(a; \omega) \tilde{H}_3^*(a; \omega) d\omega = \\ &= -2\pi cv a \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[\tilde{E}_1(a; \omega) \tilde{H}_3^*(a; \omega)] d\omega.\end{aligned}\quad (11.5.17)$$

Usando le espressioni precedentemente trovate per i campi si ha quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_0^\infty \frac{e^2 \omega a}{2\pi v \epsilon} (\epsilon \mu \beta^2 - 1) \operatorname{Re}[\mathcal{K}_0(a, \Lambda) \mathcal{K}_1^*(a, \Lambda)] d\omega, \quad (11.5.18)$$

dove parte della dipendenza da ω dell'integrando è nascosta dentro Λ , vedi Eq. (11.5.8).

Per procedere oltre è necessario conoscere gli sviluppi asintotici degli integrali $\mathcal{K}_0(a, \Lambda)$ e $\mathcal{K}_1(a, \Lambda)$ quando $a \rightarrow \infty$. È mostrato in Sez. (A.7) che se $\Lambda > 0$ si hanno gli andamenti asintotici (con $0 < \lambda = \sqrt{\Lambda}$)

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{a\lambda}} e^{-a\lambda}, \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq i \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{a}} e^{-a\lambda} \quad (11.5.19)$$

mentre se $\Lambda < 0$ si hanno gli andamenti ($0 < \lambda = \sqrt{-\Lambda}$)

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{a\lambda}}e^{ia\lambda}, \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\pi\lambda}{a}}e^{ia\lambda}. \quad (11.5.20)$$

Si vede quindi che se $\Lambda > 0$ le funzioni \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_1 vanno a zero esponenzialmente al crescere di a , quindi per i valori di ω per i quali $\Lambda > 0$ (ovvero per i quali $v < c/n(\omega)$ ricordando Eq. (11.5.8)) non si ha emissione di radiazione. Si può quindi limitare l'integrale alle sole frequenze per le quali si abbia $\Lambda < 0$, nel qual caso si ha (per a grande)

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda)\mathcal{K}_1^*(a; \Lambda) \simeq \frac{2\pi}{a}, \quad (11.5.21)$$

quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{v \geq c/n(\omega)} \frac{e^2 \omega}{v \epsilon} (\epsilon \mu \beta^2 - 1) d\omega \quad (11.5.22)$$

ed infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{v \geq c/n(\omega)} \frac{e^2 \omega \mu(\omega)}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2}\right) d\omega, \quad (11.5.23)$$

che è la formula di Frank-Tamm.

11.6 **Rivelatori Cherenkov

Un rivelatore Cherenkov è un dispositivo in grado di rivelare i fotoni Cherenkov. Esso consiste in un sistema ottico ed in uno (o più) rivelatori per fotoni (PD= Photon Detector).

Poichè:

- i PD (Fotomoltiplicatori, Silicon Photomultipliers, Gaseous Chambers, ...) sono in grado di rivelare fotoni solo in un determinato intervallo di energia e con una certa efficienza (dipendente dalla energia dei fotoni),
- l'ottica (specchi, lenti, collimatori, materiali interposti, ..) ha una efficienza minore del 100% e questa comporta una perdita di fotoni,

il numero di fotoni Cherenkov rivelabili è ovviamente inferiore al numero di fotoni prodotti.

Indicando con $P(E_\gamma)$ la probabilità che un fotone generato per effetto Cherenkov sia rivelato, il numero di fotoni osservati è dato da:

$$\frac{dN_\gamma^{\text{rivelati}}}{dx} = \int_{E_1}^{E_2} z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(E_\gamma)}\right) P(E_\gamma) dE_\gamma \quad (11.6.1)$$

Un esempio di $P(E_\gamma)$ è riportato in Figura 11.6.

Solitamente un PD riesce a rivelare fotoni nel visibile o nel vicino ultravioletto, con una banda passante che è dell'ordine dell'elettronvolt, e con efficienze massime $\sim 30\%$.

11.6.1 Classificazione dei rivelatori

I rivelatori Cherenkov più comuni si classificano in:

- rivelatori Cherenkov a soglia: misurano il numero di fotoni, ma non l'angolo;
- rivelatori Cherenkov di tipo RICH o DIRC: misurano il numero di fotoni ed anche l'angolo.

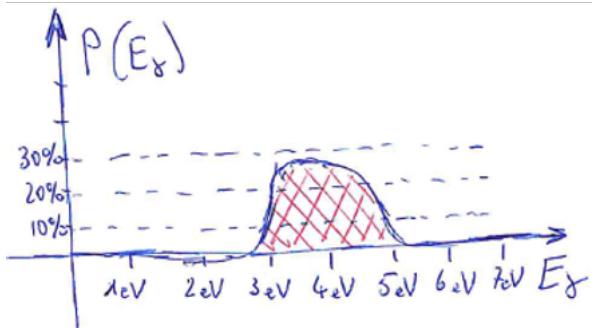


Figura 11.6: Distribuzione di probabilità $P(E_\gamma)$ della rivelazione di un fotone Cherenkov

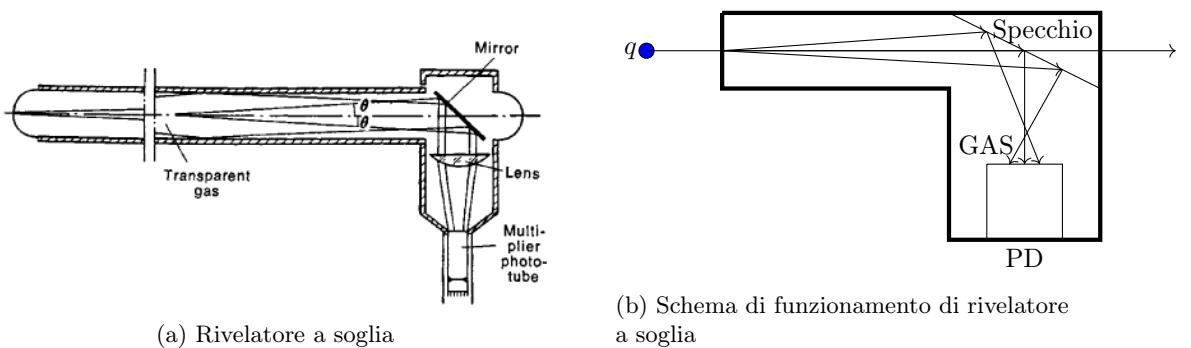


Figura 11.7: Esempio di rivelatore Cherenkov a soglia con un gas come mezzo radiante

A soglia Un rivelatore Cherenkov a soglia (Figura 11.7) fornisce in pratica solo una risposta binaria:

- YES se $\beta > \frac{1}{n}$;
- NO se $\beta < \frac{1}{n}$

NON si misura l'angolo, ma solamente il numero di fotoni.

Usualmente il mezzo radiante è un gas, magari anche a pressioni elevate, in modo da avere indici di rifrazione compresi fra 1.001 e 1.01 ed essere adatti a particelle ultrarelativistiche.

Ring Imaging Cherenkov (RICH) Misurano l'angolo Cherenkov (θ_C). L'indice di rifrazione è tale (di solito $n < 1.1$) per cui la luce, che subisce una rifrazione uscendo dal radiatore, comunque esce nella stessa direzione della particella incidente. La luce viaggia su superfici coniche e viene osservata su un piano equipaggiato con dei PD. Si osservano degli anelli Cherenkov, intersezioni della superficie conica con il piano dei rivelatori. Uno schema di funzionamento è riportato in Figura 11.8, mentre in Figura 11.9 è riportato lo schema e l'output del rivelatore RICH1 dell'esperimento LHCb al CERN.

Detection of Internaly Reflected Cherenkov light (DIRC) Funzionano come un RICH, misurando l'angolo Cherenkov (θ_C). L'indice di rifrazione è tale (di solito $n > 1.4$) per cui la luce viene riflessa internamente internamente uscendo dai lati del radiatore. Anche in questo caso si osservano gli anelli Cherenkov, su un piano laterale che contiene i rivelatori.

Per evitare una eventuale ulteriore riflessione all'uscita del radiatore, lo spazio laterale è usualmente riempito con un mezzo avente un indice di rifrazione non troppo differente da quello del radiatore, per esempio con acqua distillata che ha $n = 1.33$. Uno schema di funzionamento è

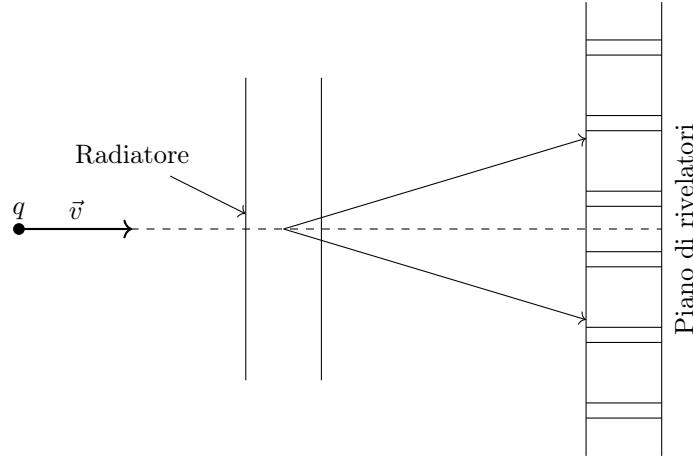
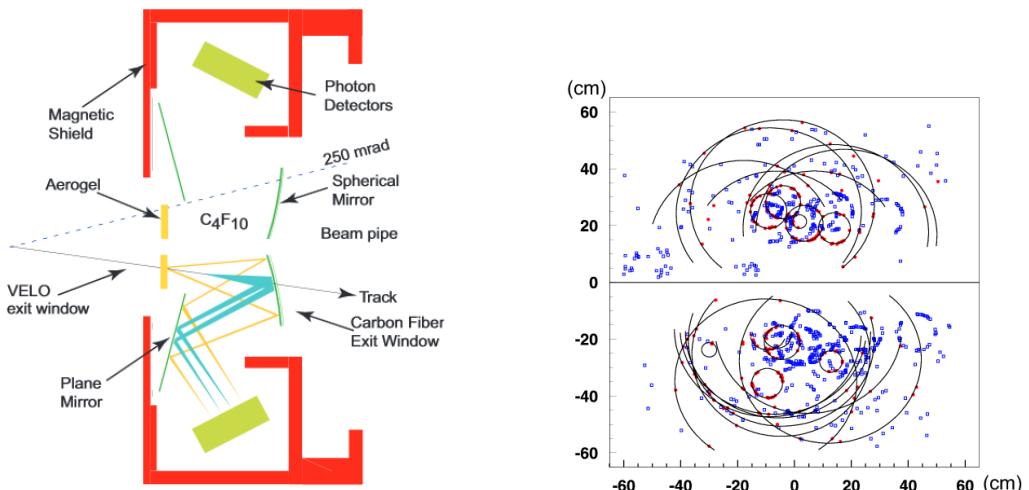


Figura 11.8: Schema funzionamento rilevatore RICH



(a) Rivelatore RICH1 con un aerogel ($n \sim 1.025$) come mezzo radiante
(b) Output dei PD nel RICH1 con la ricostruzione di anelli Cherenkov

Figura 11.9: Rivelatore RICH1 dell'esperimento LHCb al CERN

riportato in Figura 11.10, mentre in Figura 11.11 si può osservare lo schema del rivelatore DIRC all'esperimento BaBar a SLAC.

11.6.2 Particle Identification

I rivelatori Cherenkov contribuiscono in modo determinante a risolvere il problema della misura della massa m di una particella.

Questo problema viene denominato "particle identification [problem]" proprio perché la misura della massa permette di identificare il tipo di particella che ha attraversato il rivelatore.

Occorre chiarire che, per la misura della massa di una particella, occorre comunque misurarne la quantità di moto \vec{p} .

Per esempio ad energie non relativistiche si può utilizzare uno spettrometro di massa in cui sia la quantità di moto che l'energia cinetica T della particella carica (tipicamente uno ione) sono misurate molto bene, da cui $m = \frac{p^2}{2T}$.

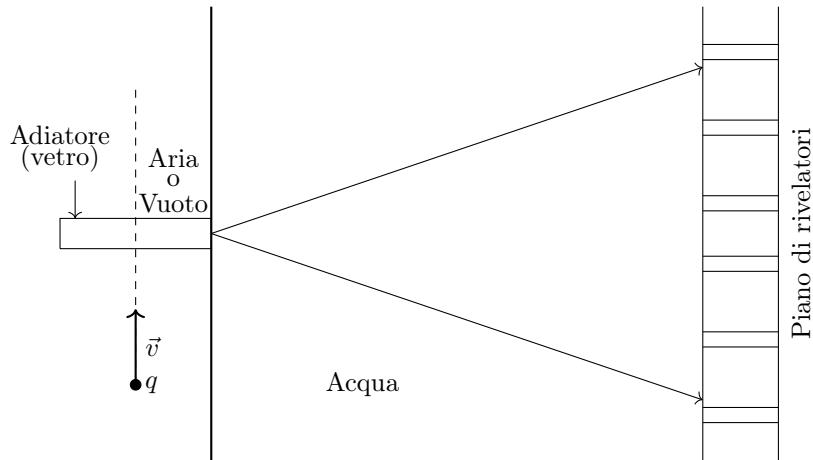
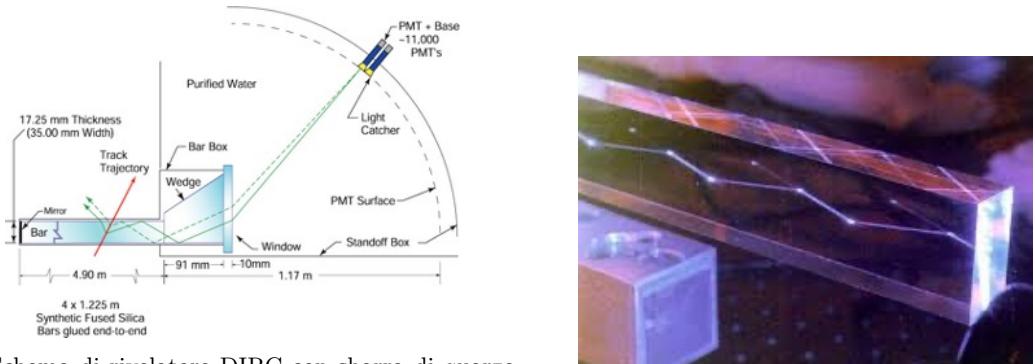


Figura 11.10: Schema rivelatore DIRC



(a) Schema di rivelatore DIRC con sbarra di quarzo come mezzo radiante ed acqua come adattatore

(b) riflessione totale di un fascio laser nella sbarra

Figura 11.11: Esperimento BaBar a SLAC

Ad alte energie, o in tutte le molteplici situazioni in cui la misura diretta dell'energia non è realizzabile con la precisione necessaria, si può invece misurare $p \equiv |\vec{p}|$ con uno spettrometro magnetico e la velocità β con un rivelatore Cherenkov.

Dalla relazione $p = m\beta\gamma$ si determina la massa della particella $m = p \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$.

In pratica, utilizzando RICH o in DIRC, si riportano in un piano le misure di p in ascissa e di $\sin \vartheta_C$ in ordinata. Poiché

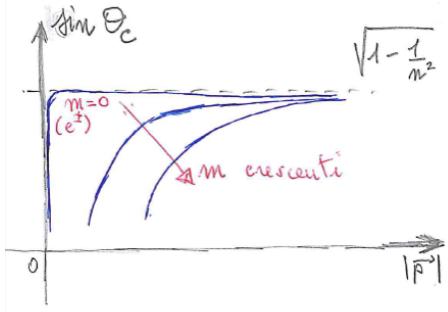
$$\cos \vartheta_C = \frac{1}{\beta n} = \frac{E}{pn} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{pn} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}},$$

si ha

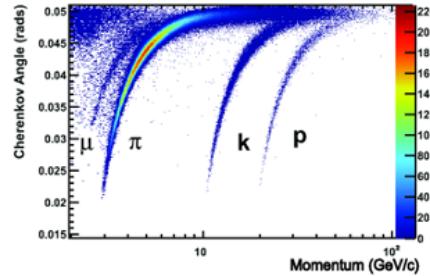
$$\sin \vartheta_C = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 - \frac{m^2}{p^2}} \quad (11.6.2)$$

Le caratteristiche di queste curve sono riportate in Figura 11.12

Poiché le masse delle particelle cariche, stabili o con vita media e velocità sufficiente ad attraversare un contatore Cherenkov, sono in numero limitato, spesso ci possiamo limitare a fornire un limite, superiore o inferiore alla massa utilizzando un Cherenkov a soglia.



(a) Andamento di Eq. (11.6.2)



(b) Dati reali

Figura 11.12: Angolo Cherenkov in funzione dell'impulso per la Particle Identification

In questi casi dalla relazione

$$\beta n = \frac{p}{E} n = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} n > 1$$

e dalla risposta (YES / NO) del Cherenkov a soglia si può porre un limite sulla massa:

$$\text{"YES"} \Rightarrow m < p\sqrt{n^2 - 1} \quad \text{"NO"} \Rightarrow m > p\sqrt{n^2 - 1}$$

Per esempio, l'indice di rifrazione del Cherenkov che ha prodotto i dati sperimentali riportati in Figura 11.12 risulta essere $n \sim 1.00125$.

11.6.3 Alcune situazioni in cui si utilizzano rivelatori Cherenkov

- Rivelazioni di muoni o elettroni prodotti nelle interazioni dei neutrini, per esempio nella misura delle oscillazioni dei neutrini (Figura 11.13).
- Identificazione di particelle in fasci secondari, per esempio nella scoperta dell'antiproton (Figura 11.14a) o nella ricerca di decadimenti rari dei mesoni K
- Discriminazione $\pi/K/p$ a collisori e^+e^- (Figura 11.14b) oppure pp , per esempio nella misura della violazione di CP nei quark pesanti (charm, bottom)

Esempio 11.6.1: un fascio di particelle positive, contenente solamente π^+ e p (protoni), è stato selezionato tramite un sistema di campi magnetici e di collimatori con un impulso di modulo compreso fra $p - \Delta p$ e $p + \Delta p$.

Progettare un sistema - basato esclusivamente su contatori Cherenkov a soglia - che sia in grado di rivelare il passaggio di un π^+ oppure di un protone nei due casi:

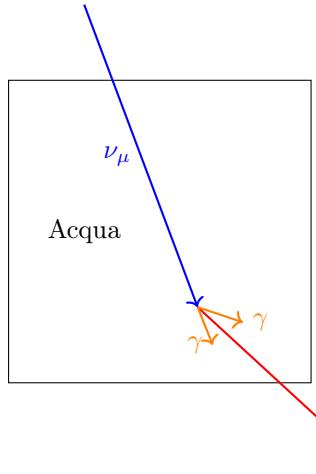
- $p = 4\text{GeV}/c, \Delta p = 0;$
- $p = 1.190\text{GeV}/c, \Delta p = 24\text{MeV}/c.$

Verificare che esistano dei materiali che possano essere utilizzati come mezzi radiatori, controllandone indice di rifrazione e trasparenza.

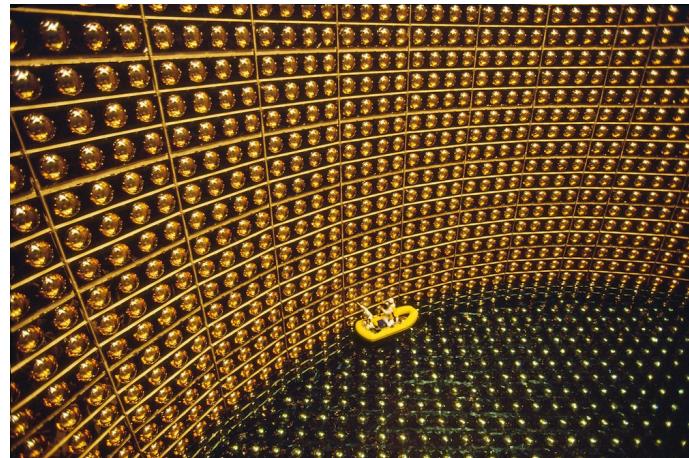
Soluzione: un contatore Cherenkov a soglia dà un segnale positivo se $n > \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}}$.

Avremo quindi dei segnali positivi se l'indice di rifrazione verifica:

- $\begin{cases} n > 1.0006 & \text{per un } \pi^+ \\ n > 1.027 & \text{per un } p \end{cases}$

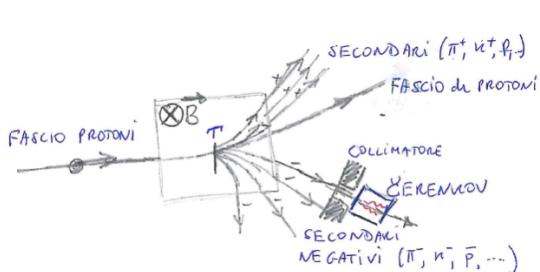


(a) Schema rivelatore di muoni

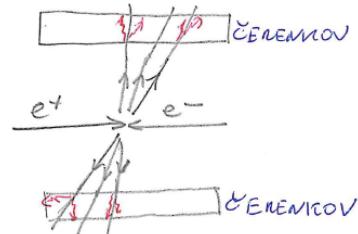


(b) Esperimento kamiokande (JPN)

Figura 11.13: Un possibile utilizzo di rivelatori Cherenkov per lo studio di interazioni dei neutrini



(a) Schema dell'apparato usato al Bevatron per la scoperta dell'antiproton



(b) Schema di un possibile utilizzo di rivelatori Cherenkov in un collider per discriminazione $\pi/K/p$

Figura 11.14: Possibili utilizzi di rivelatori Cherenkov in acceleratori

$$ii. \begin{cases} n > 1.0066 - 10072 & \text{per un } \pi^+ \\ n > 1.2637 - 1.2834 & \text{per un } p \end{cases}$$

Si possono inserire sul fascio prima un primo contatore Cherenkov a soglia che dia segnale solo per i pioni e poi un secondo contatore Cherenkov a soglia che dia segnale anche per i protoni, in modo da avere una identificazione positiva per entrambi. Quindi:

caso i) primo contatore $6 \cdot 10^{-4} < n - 1 < 0.027$, secondo contatore $0.027 < n - 1$.

Si può utilizzare come mezzo radiante un gas a TPN per il primo ed un quarzo per il secondo.

caso ii) primo contatore $7.2 \cdot 10^{-3} < n - 1 < 0.2637$, secondo contatore $0.2834 < n - 1$. Si può utilizzare come mezzo radiante un "silica aerogel" per il primo ed un quarzo per il secondo.

11.7 **Esercizi riassuntivi

Esercizio 11.7.1: Calcolare l'angolo di emissione, il numero totale di fotoni emessi e l'energia persa per il solo effetto Cherenkov da un elettrone che viaggi, con velocità prossima a quella della luce, in un materiale (solido) di spessore 1 cm in cui l'indice di rifrazione sia $n = 1.5$ per $E_\gamma < 10 \text{ eV}$ e $n = 1$ per $E_\gamma > 10 \text{ eV}$.

$$\cos \vartheta_C = \frac{1}{\beta n} = \frac{1}{1.5} \Rightarrow \vartheta_C \approx 48^\circ$$

$$N_\gamma = \int_0^{10\text{eV}} \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) dE_\gamma \Delta x = 370 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1} \left(1 - \frac{1}{2.25}\right) 10 \text{ eV} \cdot 1 \text{ cm} \approx 2050$$

$$\Delta E_{Cher} = \int_0^{10\text{eV}} E_\gamma \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) dE_\gamma \Delta x = \left[\frac{E_\gamma^2}{2} \right]_0^{10\text{eV}} \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \Delta x \simeq 10.2 \text{ keV}$$

Esercizio 11.7.2: Calcolare l'energia massima persa per unità di lunghezza per il solo effetto Cherenkov da un elettrone che viaggi, con velocità prossima a quella della luce, in un materiale solido in cui l'indice di rifrazione sia tale per cui per vi sia emissione Cherenkov solo per $E_\gamma < 10 \text{ eV}$.

$$\frac{dE_{Cher}}{dx} < \int_0^{10\text{eV}} E_\gamma \frac{\alpha}{\hbar c} dE_\gamma = \left[\frac{E_\gamma^2}{2} \right]_0^{10\text{eV}} \frac{\alpha}{\hbar c} \simeq 18.5 \text{ keV cm}^{-1}$$

Nota: vedremo che questa energia è trascurabile rispetto alla energia persa per collisioni.

Esercizio 11.7.3: Calcolare il numero totale di fotoni emessi e l'energia persa per il solo effetto Cherenkov da un elettrone che viaggi, con velocità prossima a quella della luce, in un materiale (gassoso) di spessore 1 cm in cui l'indice di rifrazione sia $n = 1.001$ per $E_\gamma < 10 \text{ eV}$ e $n = 1$ per $E_\gamma > 10 \text{ eV}$.

$$N_\gamma = \int_0^{E_2=10\text{eV}} \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) dE_\gamma \Delta x \approx 2(n-1) \frac{\alpha}{\hbar c} E_2 \Delta x \simeq 7.4$$

$$\Delta E_{Cher} = \int_0^{E_2=10\text{eV}} E_\gamma \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) dE_\gamma \Delta x \approx 37 \text{ eV}$$

Esercizio 11.7.4: Un elettrone viaggia, con velocità prossima a quella della luce, in un materiale (solido) di spessore 1 cm in cui l'indice di rifrazione è $n = 1.5$ per $E_\gamma < 10 \text{ eV}$ e $n = 1$ per $E_\gamma > 10 \text{ eV}$ [vedi esercizio precedente]. Calcolare il numero di fotoni rivelati da un PD che abbia una efficienza di rivelazione di un singolo fotone pari al 30% fra 3 e 5 eV, e nulla per le energie al fuori di questo intervallo.

$$N_\gamma^{rivelati} = \int_0^{10\text{eV}} \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) P(E_\gamma) dE_\gamma \Delta x \quad (11.7.1)$$

$$= 30\% \int_{5\text{eV}}^{5\text{eV}} \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) dE_\gamma \Delta x \quad (11.7.2)$$

$$= 0.3 \cdot 370 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1} \left(1 - \frac{1}{2.25}\right) 2 \text{ eV} \cdot 1 \text{ cm} \quad (11.7.3)$$

$$\simeq 123 \quad (11.7.4)$$

Esercizio 11.7.5: Una particella di carica unitaria con $\beta = 0.999$ attraversa una regione gassosa con indice di rifrazione $n = 1.005$ equipaggiata con un rivelatore per fotoni. Si ha

$$P(E_\gamma) = \begin{cases} 30\% & \text{per } 2 \text{ eV} < E_\gamma < 4 \text{ eV} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Calcolare la lunghezza del mezzo radiante in modo che si rivelino 100 fotoni. [Risposta: 56 cm]

Esercizio 11.7.6: Una particella di carica unitaria con $\beta = 0.999$ attraversa perpendicolarmente una lastra di quarzo con indice di rifrazione $n = 1.5$; i fotoni emesi sono raccolti da un rivelatore per fotoni con

$$P(E_\gamma) = \begin{cases} 30\% & \text{per } 2 \text{ eV} < E_\gamma < 4 \text{ eV} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Calcolare lo spessore della lastra in modo che si rivelino 100 fotoni. [Risposta: 8 mm]

Esercizio 11.7.7: Calcolare per quali valori dell'indice di rifrazione n del mezzo radiante un rivelatore funzioni come RICH o DIRC se attraversato perpendicolarmente da una particella carica di velocità β . Si esamini in particolare il caso $\beta = 1$.

Esercizio 11.7.8: Calcolare la quantità di moto minima affinché un Cherenkov a soglia con $n = 1.01$ (radiatore realizzato con un gas compresso) oppure $n = 1.33$ (radiatore realizzato con acqua) fornisca un segnale per:

i) elettroni

ii) π^+

iii) K^+

iv) protoni

Risposta per	$n = 1.01$	$n = 1.33$
elettroni	3.6 MeV/c	0.6 MeV/c
π^+	985 MeV/c	160 MeV/c
K^+	3.5 GeV/c	560 MeV/c
protoni	6.6 GeV/c	1070 MeV/c

Capitolo 12

**Radiazione di frenamento (Bremsstrahlung)

12.1 **Introduzione

In questo capitolo si tratterà la cosiddetta radiazione di frenamento o Bremsstrahlung¹, che è la radiazione elettromagnetica emessa da una particella di massa M e carica $q = ze$ in conseguenza della accelerazione dovuta agli urti con i nuclei - di carica Ze - del mezzo come schematizzato in Figura 12.1 (si veda al proposito la sezione "scattering multiplo" 14). Gli urti con gli elettroni,

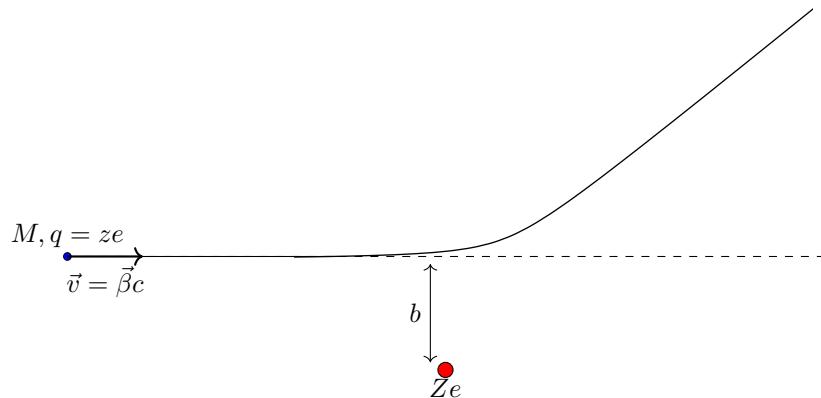


Figura 12.1: Esempio di scattering di particella carica su un nucleo di carica Ze

più leggeri dei nuclei di tre o più ordini di grandezza, comportano accelerazioni molto minori e possono pertanto essere trascurati ai fini del calcolo della radiazione di frenamento. È bene notare fin da subito che, poichè la radiazione viene emessa a causa della accelerazione dovuta ai singoli

¹dal tedesco *bremsen*: frenare e *Strahlung*: radiazione, si ottiene la composizione linguistica Bremsstrahlung. Nota: la s è doppia in quanto una proviene da *bremsen* e l'altra da *Strahlung*. Inoltre la B maiuscola è necessaria sempre in quanto in tedesco tutti i sostantivi si scrivono con la lettera maiuscola.

urti di tipo coulombiano, in condizioni ordinarie l'effetto del mezzo sui campi elettromagnetici è praticamente trascurabile².

Questa interazione coulombiana, per ogni urto su un singolo nucleo, provoca una accelerazione della particella che quindi irraggerà, da qui "radiazione di frenamento".

Poichè la forza di Coulomb dipende dalla carica elettrica, l'accelerazione è inversamente proporzionale alla massa M della particella. L'energia irraggiata è quindi inversamente proporzionale al quadrato della massa M . Questo ha una implicazione molto importante, cioè che la radiazione di frenamento risulta essere un effetto:

- importantissimo per elettroni (e positroni) purchè la loro energia sia superiore ad una certa *energia critica* E_c il cui valore dipende dal materiale attraversato;
- trascurabile per le altre particelle più pesanti (π, K, p, \dots).

La radiazione di frenamento avviene in modo indipendente su ogni nucleo: la radiazione viene pertanto emessa in numerosi processi incoerenti.

Nel sistema del laboratorio la radiazione sarà emessa:

- proporzionalmente al quadrato dell'angolo fra accelerazione (media) e direzione di osservazione nel caso NON relativistico (Figura 12.2, sinistra);
- in direzione in avanti (con angolo $\sim 1/\gamma$ rispetto alla velocità) nel caso ultrarelativistico, come mostrato in Figura 12.2 a destra (questo si può dimostrare effettuando la trasformazione dal sistema in cui la carica è ferma al sistema del laboratorio);
- con deflessione della traiettoria della particella incidente che sono - nella maggior parte dei casi - piccole rispetto agli angoli di emissione della radiazione.

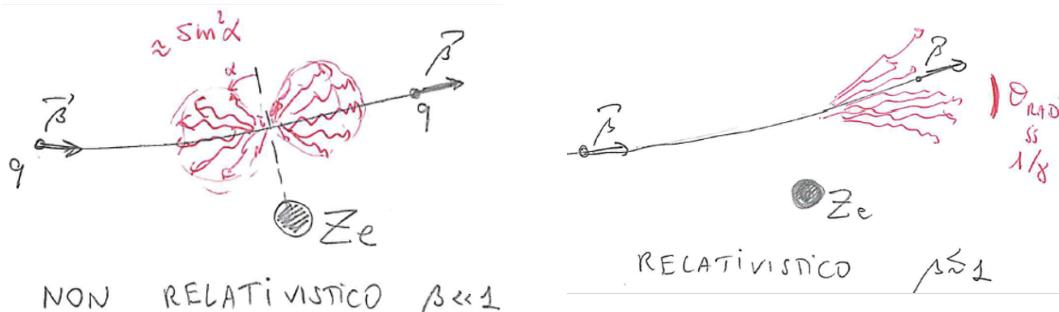


Figura 12.2: Direzione di emissione di radiazione emessa nei due casi

Obiettivi del capitolo

Si consideri un elettrone che attraversa un materiale. In questa sezione si tratterà:

- l'energia per unità di lunghezza $\frac{dE_{rad}}{dx}$ che viene irraggiata;
- la distribuzione in energia dei fotoni emessi $\frac{d^2N_\gamma}{dE_\gamma dx}$ per unità di lunghezza;
- l'energia minima "critica" E_c per cui l'energia dell'elettrone si attenua, per il solo effetto della bremsstrahlung, con una legge esponenziale $E = E_0 e^{-x/X_0}$ (dove x è il percorso nel materiale);

²Per elettroni con energie dell'ordine di TeV o PeV il ruolo del mezzo diventa importante e si ha una soppressione della radiazione di frenamento nota come effetto Landau-Pomeranchuk-Migdal.

- il valore della costante X_0 detta "lunghezza di radiazione" (caratteristica di ogni materiale).

Per esercizio riprendiamo lo scattering Mott e dimostriamo che la deflessione coulombiana è praticamente sempre inferiore all'angolo di emissione della radiazione.

L'angolo di scattering è legato al parametro di impatto:

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = zZ\alpha \frac{\hbar c}{|\vec{p}| \vec{V} | b} \approx zZ\alpha \frac{\hbar c}{Mc^2 \gamma} \cdot \frac{1}{b},$$

per cui il parametro di impatto corrispondente ad una deflessione pari all'angolo di emissione della radiazione è

$$b_{\text{rad}} \approx 2zZ\alpha \frac{\hbar c}{Mc^2 \gamma} \cdot \frac{1}{\vartheta_{\text{rad}}} \sim 2zZ\alpha \frac{\hbar c}{Mc^2} \approx zZ \frac{2.9 \text{ MeV fm}}{Mc^2}. \quad (12.1.1)$$

Per la particella carica più leggera (l'elettrone) si ha

$$b_{\text{rad}} \sim 2Z\alpha \frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx Z \cdot 5.6 \text{ fb}.$$

Chiamando a il raggio atomico, questo valore verifica

$$b_{\text{rad}} \sim Z \cdot 5.6 \text{ fb} \ll \frac{1.4a_o}{Z^{1/3}} \equiv a$$

per qualunque nucleo e quindi la probabilità di avere una deflessione maggiore dell'angolo di radiazione nell'attraversare un atomo è

$$\left(\frac{b_{\text{rad}}}{a} \right)^2 = \left(\frac{b_{\text{rad}}}{1.4a_o/Z^{1/3}} \right)^2 \sim \left(\frac{Z \cdot 5.6 \text{ fb}}{1.4a_o/Z^{1/3}} \right)^2 = 5.7 \cdot 10^{-9} Z^{8/3}. \quad (12.1.2)$$

Nel caso peggiore, quello dell'Uranio, si ha $\left(\frac{b_{\text{rad}}}{a} \right)^2 \sim 10^{-3}$.

Possiamo concludere che la deflessione coulombiana è sempre piccola e che l'approssimazione di traiettoria rettilinea è corretta.

Nota: la valutazione della deflessione dopo multiple interazioni è trattata successivamente nella sezione del multiplo scattering.

Nota: per effettuare il calcolo si potrebbe procedere come nel Landau II, dove viene prima calcolato $\vec{r}'(t')$ per il moto, e poi l'integrale

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_o c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t'+r/c - \hat{r}'/c)}}{r} \frac{\hat{n} \wedge ((\hat{n} - \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} dt'. \quad (12.1.3)$$

Noi seguiremo invece la discussione del libro di Jackson.

12.1.1 Energia irraggiata e sezione d'urto d'irraggiamento

Per calcolare l'energia totale irraggiata occorre determinare, per un singolo urto coulombiano sul nucleo, la fondamentale funzione $I_\omega(b)$ che si definisce come "energia irraggiata per unità di frequenza in funzione del parametro di impatto"

Si ha $[I_\omega] = \text{J Hz}^{-1} = \text{Js}$

Per l'attraversamento di un tratto di lunghezza Δx da parte della nostra particella, l'energia irraggiata totale si ottiene moltiplicando il numero medio di interazioni (ricordiamo che se tale numero fosse molto minore di 1, esso rappresenterebbe la probabilità di interazione) per il valore medio della funzione $I_\omega(b)$, ed integrando sulle frequenze.

Il numero medio di interazioni è

$$n_s \sigma_{\text{irragg}} = n \Delta x \int 2\pi b db$$

dove n è la concentrazione dei nuclei.

Il valore medio richiesto vale

$$\frac{\int I_\omega(b) 2\pi b db}{\int 2\pi b db} = \frac{\int I_\omega(b) 2\pi b db}{\sigma_{\text{irragg}}}.$$

Allora

$$E_{\text{irr}} = n \Delta x \iint I_\omega(b) 2\pi b db d\omega$$

Si definisce poi una importante grandezza

$$\chi_\omega \equiv \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 2\pi I_\omega b db.$$

χ_ω si chiama "irraggiamento efficace per intervallo di frequenza" (vedi Landau II) " oppure "sezione d'urto di irraggiamento" (vedi Jackson). Si ha $[\chi_\omega] = \frac{J}{Hz} m^2$.

Con questa definizione la perdita di energia per radiazione si scrive:

$$E_{\text{irr}} = n \Delta x \int \chi_\omega d\omega = n_s \int \chi_\omega d\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_{\text{irr}}}{d\omega} = n_s \chi_\omega$$

Possiamo quindi affermare che la "sezione d'urto di irraggiamento" è quella grandezza che moltiplicata per il numero di nuclei per unità di superficie fornisce l'energia irraggiata per intervallo di frequenza

Per unità di percorso nel materiale si ha

$$\frac{dE_{\text{irr}}}{dx} = n \int \chi_\omega d\omega.$$

Il ruolo della sezione d'urto di irraggiamento è importantissimo. A parte fornire direttamente l'energia persa per unità di percorso e di frequenza (come detto sopra) fornisce velocemente anche anche la distribuzione del numero di fotoni, infatti si ha

$$\frac{dN_\gamma}{d\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dE_{\text{irr}}}{d\omega} = n_s \frac{\chi_\omega}{\hbar\omega}.$$

Nota importante: Per una trasformazione di Lorenz parallela alla direzione della particella n_S è un invariante, mentre ω e E_{irr} trasformano nello stesso modo, quindi $\chi_\omega = \frac{1}{n_S} \frac{dE_{\text{irr}}}{d\omega}$ è invariante e si può scrivere $\chi_\omega \approx \chi'_{\omega'}$. Per una discussione più approfondita si consulti il libro di Jackson. Quindi se è noto l'irraggiamento efficace in un sistema di riferimento, in un altro sistema si può determinarlo senza effettuare calcoli ex-novo, risulta essere sufficiente la sola trasformazione di Lorenz delle frequenze.

Una trattazione quantitativamente precisa della radiazione di frenamento richiederebbe strumenti molto più raffinati di quelli che è qui possibile usare (vedi ad es. [20] §92-93), quindi ci si limiterà in pratica ad argomenti semi-quantitativi. Il punto di partenza è l'espressione Eq. (3.6.12) dell'energia irraggiata per unità di angolo solido ($d\Omega$) e di frequenza ($d\omega$) da una particella di carica ze che si muove nel vuoto con legge oraria $s(t)$, che riportiamo qui per convenienza

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} dt \right|^2. \quad (12.1.4)$$

12.2 **Il caso non relativistico

Consideriamo inizialmente il caso non relativistico, nel qual caso l'espressione generale si può semplificare notevolmente:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} \simeq \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta}) dt \right|^2. \quad (12.2.1)$$

Una particella carica di velocità v ($\ll c$) che urti contro un atomo di raggio caratteristico a , subirà una deviazione significativa solo se il parametro di impatto risulta essere $b \lesssim a$, nel qual caso il tempo caratteristico dell'urto sarà dato da $\tau \simeq b/v$. $d\mathcal{E}/(d\Omega d\omega)$ risulta essere molto soppressa se $\omega\tau \gg 1$, in quanto si ha interferenza distruttiva tra le varie componenti in frequenza di $\dot{\beta}$, che ha frequenza tipica $1/\tau$, mentre nel caso $\omega\tau \ll 1$ si ha

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} \Big|_{\omega\tau \ll 1} \simeq \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\beta}) dt \right|^2 = \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c^3} |\hat{n} \times \Delta\vec{v}|^2, \quad (12.2.2)$$

dove abbiamo indicato con $\Delta\vec{v}$ il cambio di velocità della particella dovuto all'urto. Se indichiamo con θ l'angolo tra $\Delta\vec{v}$ e \hat{n} si avrà allora in prima approssimazione

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} \simeq \begin{cases} \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c^3} |\Delta\vec{v}|^2 \sin^2 \theta & \omega\tau \lesssim 1 \\ 0 & \omega\tau \gtrsim 1 \end{cases} \quad (12.2.3)$$

ed integrando su tutto l'angolo solido si ottiene (usando $\int_0^\pi \sin^2 \theta d\cos \theta = 4/3$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \simeq \begin{cases} \frac{2(ze)^2}{3\pi c^3} |\Delta\vec{v}|^2 & \omega\tau \lesssim 1 \\ 0 & \omega\tau \gtrsim 1 \end{cases}. \quad (12.2.4)$$

Passiamo ora al calcolo di $\Delta\vec{v}$ nel caso di un urto coulombiano. Il calcolo potrebbe essere effettuato in modo esatto notando che in un urto elastico si ha $|\Delta\vec{v}| = 2v \sin(\chi/2)$ (dove χ è l'angolo di scattering) ed usando la relazione Eq. (9.4.8) tra il parametro di impatto b e l'angolo di scattering χ , tuttavia nella maggior parte dei casi la particella incidente subirà solo una piccola deflessione, quindi si possono usare delle espressioni approssimate che corrispondono al caso di piccolo χ . Approssimando il moto della particella con un moto rettilineo uniforme di parametro di impatto b , indicando con \vec{p} l'impulso della particella e con \vec{E} il campo elettrico coulombiano si ha allora

$$|\Delta\vec{p}| \simeq ze \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dt \simeq \frac{ze}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dx = \frac{ze}{2\pi bv} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi b |\vec{E}_\perp| dx = \frac{2zZe^2}{bv}, \quad (12.2.5)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema di Gauss e si è indicata con Ze la carica del nucleo. Indicando con M la massa della particella incidente si ha quindi infine

$$|\Delta\vec{v}| \simeq \frac{2zZe^2}{bMv}. \quad (12.2.6)$$

Usando questo risultato in Eq. (12.2.4) si ottiene per l'energia emessa per unità di frequenza da una particella che collide con parametro d'impatto b l'espressione (ricordando che $\tau \simeq b/v$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \simeq \begin{cases} \frac{8(ze)^2(zZe^2)^2}{3\pi c^3} \frac{1}{(bMv)^2} & \omega \lesssim v/b \\ 0 & \omega \gtrsim v/b \end{cases} \quad (12.2.7)$$

che dovrà essere integrata in $2\pi b db$ e moltiplicata per la densità di corrente incidente se si vuole calcolare l'energia persa per unità di frequenza nell'unità di tempo, quindi si introduce

$$\chi_\omega \equiv \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} db = \frac{16}{3} \frac{(ze)^2(zZe^2)^2}{M^2 v^2 c^3} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{1}{b} db \quad (12.2.8)$$

che è nota come sezione d'urto di irraggiamento (nonostante non abbia le unità di misura di una sezione d'urto: $[\chi_\omega] = \frac{\text{J}}{\text{Hz} \cdot \text{m}^2}$).

inserire disegno 1 adattato

Serve quindi determinare i limiti integrazione del parametro d'impatto b . L'estremo superiore b_{max} deve sicuramente essere minore del raggio atomico a , tuttavia per ottenere un risultato non nullo si deve anche avere $b \lesssim v/\omega$ (vedi le espressioni precedenti), condizione che è generalmente più restrittiva per piccole velocità, quindi si può usare $b_{max} = v/\omega$. L'estremo inferiore deve sicuramente essere maggiore del raggio nucleare, tuttavia nel limite non relativistico il principio di indeterminazione impone un limite più stringente: da $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$ e $\Delta p \lesssim Mv$ se ne deriva $\Delta x \gtrsim \hbar/(Mv)$, quindi $b_{min} = \hbar/(Mv)$ ($b_{min} \gtrsim 1 \text{ fm}$ se $Mv \lesssim 200 \text{ MeV}/c$).

Fino ad ora si è schematizzato il problema calcolando l'energia irraggiata da una particella che percorre una legge oraria equivalente a quella di uno scattering coulombiano senza irraggiamento. È evidente che in questo modo non stiamo conservando l'energia totale, ma questa approssimazione è giustificata fintanto che l'energia irraggiata è molto minore dell'energia cinetica della particella; in particolare stiamo assumendo che tutti i fotoni emessi abbiano energia molto minore dell'energia cinetica della particella. Un modo per migliorare l'accordo con i dati sperimentali per frequenze non "molto piccole" consiste nel sostituire nelle espressioni di b_{min} e b_{max} la velocità v con una velocità effettiva $\langle v \rangle$, ottenuta mediando la velocità della particella prima e dopo l'emissione di un fotone di enegia $\hbar\omega$:

$$v \rightarrow \langle v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2M}}(\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}) , \quad (12.2.9)$$

dove abbiamo indicato con E l'energia cinetica della particella. Usando quindi

$$b_{max} = \frac{\langle v \rangle}{\omega} , \quad b_{min} = \frac{\hbar}{M\langle v \rangle} \quad (12.2.10)$$

si trova

$$\chi_\omega = \frac{16}{3} \frac{(ze)^2(zZe^2)^2}{MEc^3} \log \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}} \right) \quad (12.2.11)$$

dove λ (che nel caso specifico varrebbe 1) è un parametro che dipende dai dettagli di b_{min} e b_{max} ; con un calcolo più preciso si otterebbe $\lambda = 2$ e nel seguito useremo questo valore. Si può notare che, a causa della sostituzione $v \rightarrow \langle v \rangle$, questa espressione si annulla per $E = \hbar\omega$, compatibilmente con la conservazione dell'energia.

La sezione d'urto di irraggiamento χ_m può essere convertita in una sezione d'urto per produzione di fotoni: $\chi_\omega d\omega$ è l'energia irraggiata a frequenza ω nell'unità di tempo da una corrente incidente unitaria di particelle (1particella/(m²s)) e questa stessa quantità può essere riscritta nella forma $E_\gamma \frac{d\sigma}{dE_\gamma} dE_\gamma$, dove $E_\gamma = \hbar\omega$ e $(d\sigma/dE_\gamma)dE_\gamma$ è il numero di fotoni di energia E_γ prodotti nell'unità di tempo dalla corrente incidente unitaria di particelle. Poiché $[d\sigma/dE_\gamma] = \text{m}^2/\text{J}$, σ ha le corrette unità di misura di una sezione d'urto e si ha

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{E_\gamma} \frac{d\omega}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{\hbar^2\omega} = \frac{16}{3} \frac{1}{\hbar c} \frac{(ze)^2}{Mc^2} \frac{(zZe^2)^2}{E} \frac{1}{\hbar\omega} \log \left(\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}} \right) , \quad (12.2.12)$$

da cui si vede che per $\hbar\omega \ll E$ si ha il tipico andamento $d\sigma/dE_\gamma \propto 1/(\hbar\omega)$.

Supponiamo ora che il mezzo considerato abbia una densità numerica n (atomi/m³), allora l'energia persa in radiazione di frenamento da un fascio di densità di corrente unitaria attraversando uno spessore dx sarà data da

$$d\mathcal{E} = ndx \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi b db \int_0^{E/\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} d\omega = ndx \int_0^{E/\hbar} \chi_\omega d\omega , \quad (12.2.13)$$

dove E/\hbar è la massima frequenza possibile per un fotone prodotto da una particella incidente di energia cinetica E , quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} n \frac{(ze)^2(zZe^2)^2}{MEc^3} \int_0^{E/\hbar} \log \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}} \right) d\omega . \quad (12.2.14)$$

L'integrale può essere riscritto usando la variabile $x = \hbar\omega/E$, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^{E/\hbar} \log\left(\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}}\right) d\omega &= \frac{E}{\hbar} \int_0^1 \log\left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right) dx = \\ &= \frac{E}{\hbar} \left(\int_0^1 \log(1 + \sqrt{1-x}) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \log(x) dx \right), \end{aligned} \quad (12.2.15)$$

inoltre integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1 + \sqrt{1-x}) dx &= x \log(1 + \sqrt{1-x})|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x} + 1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} - 1 + x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2} = -\sqrt{1-x}|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (12.2.16)$$

e analogamente $\int_0^1 \log(x) dx = -1$, quindi infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} n \frac{(ze)^2}{Mc^2} \frac{(zZe^2)^2}{\hbar c} \quad (12.2.17)$$

è l'energia media persa per unità di lunghezza da una particella di massa M e carica ze nell'attraversare un mezzo di numero atomico Z e densità numerica n nella approssimazione non relativistica. La densità numerica del mezzo può essere riscritta come $n = \frac{N_A \rho}{A(g)}$, dove $N_A \simeq 6.02 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro, ρ è la densità di massa del materiale ed $A(g)$ il suo peso atomico espresso in grammi; l'espressione precedente si può quindi riscrivere nella forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} \frac{N_A}{A(g)} \frac{z^4 Z^2}{Mc^2} \alpha r_e^2 (m_e c^2)^2, \quad (12.2.18)$$

dove $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$ è la costante di struttura fine, $m_e c^2 \simeq 0.51 \text{ MeV}$ è l'energia di riposo di un elettrone e $r_e = e^2/(m_e c^2) \simeq 2.8 \text{ fm}$ è il raggio classico dell'elettrone. Se consideriamo ad esempio il caso di un elettrone ($z = 1$) che attraversa del piombo ($A(g) \simeq 207 \text{ g}$, $Z = 82$, $\rho = 11.35 \text{ g/cm}^3$) si ottiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \simeq 29.74 \frac{\text{KeV}}{\text{g/cm}^2} \quad (12.2.19)$$

e quindi $\frac{d\mathcal{E}}{dx} \simeq 338 \text{ KeV/cm}$.

12.3 **Il caso relativistico e la lunghezza di radiazione

Se indichiamo con S il sistema di riferimento in cui il nucleo è fermo e la particella incidente di massa M ha velocità iniziale \vec{v} , per studiare il caso relativistico è conveniente partire dal sistema S' in cui la particella di massa M è ferma ed il nucleo si muove con velocità $-\vec{v}$. Se si suppone nuovamente che in un singolo urto solo una piccola percentuale dell'energia cinetica iniziale venga convertita in radiazione, allora per descrivere l'irraggiamento dovuto alla accelerazione della particella di massa M si possono usare le espressioni nonrelativistiche usate nella sezione precedente. In particolare si arriva ad una espressione equivalente alla Eq. (12.2.8), in cui si può approssimare $v \simeq c$,

$$\chi'_{\omega'} = \frac{16}{3} \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{M^2 c^5} \int_{b'_{min}}^{b'_{max}} \frac{1}{b'} db' \quad (12.3.1)$$

e dove con gli apici si sono indicate le variabili nel sistema di riferimento S' .

Rispetto al caso non relativistico gli estremi di integrazione sono tuttavia diversi: esiste ancora un cut-off sulle frequenze a $\omega'/\tau \lesssim 1$, dove τ è il tempo caratteristico della collisione, però nel

caso relativistico si ha $\tau = b/(v\gamma)$ (vedi Sez. (2.4)), quindi si deve avere $b \lesssim \frac{v\gamma}{\omega'}$ **fig 2 adattata?** oltre alla ovvia condizione $b \lesssim a$, dove a è il raggio atomico, che può essere ben approssimato dall'espressione (vedi ad es. [26] §70) $a \simeq 1.4a_0/Z^{1/3}$, **nella parte di thomas-fermi abbiamo scritto 1.6 invece di 1.4** con $a_0 = \hbar^2/(m_e c^2)$ il raggio di Bohr. Per capire quale di queste due espressioni sia da usare per b'_{max} si può procedere come segue: nel sistema S quasi tutta la radiazione viene emessa ad un angolo (rispetto alla velocità della particella di massa M) $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$, quindi la corrispondente frequenza in S' sarà approssimativamente $\omega' \simeq \gamma\omega(1 - \beta \cos \bar{\theta})$, che usando $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ diventa $\omega' \simeq \frac{\omega}{\gamma}$. Dalla conservazione dell'energia segue che $\omega \leq (\gamma - 1)Mc^2/\hbar$, quindi $\omega' \lesssim Mc^2/\hbar$ e

$$\frac{v\gamma/\omega'}{a} \gtrsim \frac{\gamma\hbar}{aMc} = \frac{\gamma Z^{1/3}}{1.4} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{m_e}{M} \simeq \frac{Z^{1/3}\gamma}{192} \frac{m_e}{M}, \quad (12.3.2)$$

da cui si vede che per γ sufficientemente grandi si ha sempre $v\gamma/\omega' \gtrsim a$ e quindi il corretto estremo superiore da usare è $b'_{max} = a$ (in questa condizione si parla di "schermaggio completo"). Questo è particolarmente vero per il caso degli elettroni ($M = m_e$) per i quali energie dell'ordine delle decine di MeV sono sufficienti a rendere l'estremo destro dell'equazione precedente maggiore di uno.

Per quanto riguarda b'_{min} , usando il principio di indeterminazione in modo analogo a come fatto nel caso non relativistico si otterebbe $b \gtrsim \Delta x = \frac{\hbar}{Mc\gamma}$ tuttavia questa stima risulta eccessivamente piccola. Poichè $\tau = b/(c\gamma)$ è il tempo caratteristico dell'urto, il campo elettrico agisce in modo significativo ad un dato istante su una regione di estensione lineare b/γ e questa non può essere molto più piccola di Δx , altrimenti ci sarebbero cancellazioni dovute all'interferenza. Si deve quindi imporre $b/\gamma \gtrsim \Delta x$ da cui segue $b'_{min} = \frac{\hbar}{Mc}$ esattamente come nel caso non relativistico. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \chi'_{\omega'} &= \frac{16}{3} \frac{(ze)^2(zZe^2)^2}{M^2 c^5} \log\left(\frac{aMc}{\hbar}\right) = \\ &= \frac{16}{3} z^4 Z^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{m_e^2}{M^2} \hbar \log\left(1.4 \frac{\hbar c}{e^2 m_e} \frac{M}{Z^{1/3}} Z^{-1/3}\right) = \\ &= \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \hbar \log\left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e}\right), \end{aligned} \quad (12.3.3)$$

dove nuovamente si sono usate la costante di struttura fine $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$ ed il raggio classico dell'elettrone $r_e = e^2/(m_e c^2)$.

È ora necessario legare $\chi'_{\omega'}$ nel sistema S' a χ_{ω} nel sistema S ed a questo fine si deve ricordare la definizione Eq. (12.2.8): b è una distanza nel piano trasverso alla velocità ed è quindi invariante, all'energia totale emessa nel sistema non relativistico S' , $d\mathcal{E}'$, non è associato un irraggiamento di impulso quindi $d\mathcal{E} = \gamma d\mathcal{E}'$ (vedi ad esempio Sez. (3.5) per un argomento analogo), inoltre si è visto prima che nel limite ultrarelativistico si ha $\omega' \simeq \omega/\gamma$, quindi si ha $\chi_{\omega} \simeq \chi'_{\omega'}$.

Se si considera nuovamente un mezzo con densità numerica n ($= \rho N_A/A(g)$) si ottiene per l'energia persa in radiazione di frenamento per unità di lunghezza nel limite ultrarelativistico l'espressione

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \int_0^{E/\hbar} n \chi_{\omega} d\omega = \frac{16}{3} \frac{\rho N_A}{A(g)} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \log\left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e}\right) E, \quad (12.3.4)$$

in cui nuovamente E è l'energia cinetica della particella. Poichè $\frac{dE}{dx} + \frac{d\mathcal{E}}{dx} = 0$ si ottiene allora per l'energia cinetica in funzione dello spessore attraversato x l'equazione

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0} \quad (12.3.5)$$

che ha soluzione $E(x) = E(x=0)e^{-x/X_0}$, dove la lunghezza di radiazione X_0 è data dall'espressione

$$X_0 = \frac{1}{\frac{16}{3} \frac{\rho N_A}{A(g)} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 \log\left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e}\right)}. \quad (12.3.6)$$

materiale	X_0 Eq. (12.3.6) [cm]	X_0 PDG [cm]	Z	A	ρ [g/cm ³]
C (grafite)	17.67	19.32	42.70	6	12.0
Si	7.68	9.37	21.82	14	28.1
Pb	0.39	0.56	6.37	82	207.2

Tabella 12.1: Confronto tra i valori della lunghezza di radiazione elettronica X_0 ottenuti usando Eq. (12.3.6) ed i dati sperimentali riportati sul Particle Data Group [22].

Questa espressione è stata ottenuta con diverse approssimazioni e rappresenta quindi un valore ragionevole ma non necessariamente molto preciso, come si può vedere dal confronto in Tab. (12.1) con i dati riportati sul Particle Data Group (spesso viene riportato non il valore X_0 in cm ma il valore ρX_0 in g/cm²). Le lunghezze di radiazione sono tipicamente tabulate solo per il caso degli elettroni, in quanto già per la seconda particella carica più leggera (il muone, di massa $m_\mu \simeq 105$ MeV) si ha $X_0^{(\mu)} \simeq 4 \times 10^4 X_0^{(e)}$, quindi il meccanismo di perdita di energia per irraggiamento è per un muone molto meno importante che per un elettrone.

Analogamente al caso non relativistico si può introdurre una sezione d'urto per produzione di fotoni da parte di una particella di massa M che collide con un nucleo, ottenendo

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{E_\gamma} \frac{d\omega}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{\hbar^2 \omega} = \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e} \right) \frac{1}{E_\gamma} = \frac{A(g)}{\rho N_A X_0} \frac{1}{E_\gamma}, \quad (12.3.7)$$

che ha ancora la caratteristica dipendenza $\frac{d\sigma}{dE_\gamma} \propto 1/E_\gamma$. **dire prima esplicitamente che a screening attivo $\chi_\omega = \frac{\hbar}{nX_0}$**

12.4 **Formula di Tsai

Il nostro modello fornisce dei valori che non sono in pieno accordo con i dati sperimentali.

Notare come gli spessori di materiale (ed anche la lunghezza di radiazione) siano spesso espressi in g/cm² in modo da essere indipendenti dallo stato (gas con differenti pressioni, liquido, solido, ...) del materiale attraversato. Il modello più semplice della lunghezza di radiazione è dato da

$$\rho X_0 = \frac{1}{\frac{16}{3} \frac{N_{Av}}{M_A} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\ln \frac{192}{Z^{1/3}} \right)} \quad (12.4.1)$$

dove M_A è la massa della grammo-molecola.

Esistono modelli più precisi, basati su calcoli numerici che forniscono le correzioni necessarie. Il modello più accreditato conduce alla formula di Tsai:

$$\rho X_0 = \frac{1}{4 \frac{N_{Av}}{M_A} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\ln \frac{184}{Z^{1/3}} - f(Z) + L/Z \right)} \quad (12.4.2)$$

in cui $f(Z)$ ed L sono correzioni riportate in apposite tabelle.

Nota sulla relazione fra X_0 e la produzione di coppie e^+e^- da fotoni La sezione d'urto del processo $\gamma + Pb(\text{nucleo}) \rightarrow e^+ + e^- + Pb(\text{nucleo})$ vale $\sigma \sim 40$ b per una energia del fotone incidente di 1 GeV. La probabilità di questo processo per unità di lunghezza è

$$\frac{dP}{dx} = n\sigma = \frac{\rho N_{Av}}{M_A} \sigma \approx \frac{1}{0.76 \text{ cm}}.$$

Quindi un fotone da 10 MeV percorre in media 7.6 mm prima di produrre una coppia. In modo equivalente, un fascio di fotoni da 10 MeV si attenua nel Piombo con una legge esponenziale con

una lunghezza di attenuazione di 7.6 mm, che è solo del 30% superiore alla lunghezza di radiazione del Piombo (5.6 mm).

Il fatto che i due valori (7.6 e 5.6 mm) siano molto simili non è accidentale, ma deriva da una sostanziale equivalenza dei processi fondamentali che li producono e che sono riportati in modo simbolico in Figura 12.3.



Figura 12.3: Differenza fra i processi fondamentali che generano due diverse lunghezze di attenuazione

12.5 **Emissione di radiazione elettromagnetica nei decadimenti β

Si considererà in questa sezione l'emissione di radiazione elettromagnetica associata ad un decadimento β (effetto noto anche con il nome di “inner Bremsstrahlung”). In un generico decadimento β si ha ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z+1}^A X_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e$, quindi un elettrone viene espulso dal nucleo e durante questo processo viene emessa radiazione elettromagnetica.

Consideriamo dapprima il caso non relativistico, in cui il Q -valore della reazione

$$Q = M({}_Z^A X_N)c^2 - M({}_{Z+1}^A X_{N-1})c^2 - m_e c^2 \quad (12.5.1)$$

(dove abbiamo indicato con M le masse nucleari, con m_e la massa elettronica ed approssimato $m_\nu \simeq 0$) è molto minore di $m_e c^2$. Poiché il Q -valore quantifica l'energia cinetica disponibile ai prodotti di decadimento, se $Q \ll m_e c^2$ in particolare il moto dell'elettrone sarà non relativistico. In queste condizioni si può applicare Eq. (12.2.4) (con $z = 1$) per calcolare l'energia persa nel decadimento per unità di frequenza e per ottenere l'energia totale irraggiata serve integrare questa espressione sulle frequenze fino a $\omega_{max} \simeq Q/\hbar$. In Eq. (12.2.4) τ è ora il tempo tipico in cui avviene il decadimento (*non* il tempo di decadimento), che dal principio di indeterminazione ci si aspetta essere dell'ordine di \hbar/Q , quindi l'energia totale irraggiata è

$$\mathcal{E} = \int_0^{Q/\hbar} \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} |\Delta \vec{v}|^2 d\omega = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} |\Delta \vec{v}|^2 \frac{Q}{\hbar}. \quad (12.5.2)$$

La frazione dell'energia disponibile che viene emessa in radiazione elettromagnetica durante un decadimento beta nonrelativistico è quindi

$$\frac{\mathcal{E}}{Q} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} |\Delta \vec{v}|^2 \lesssim \frac{2}{3\pi} \alpha \simeq 1.5 \times 10^{-3}, \quad (12.5.3)$$

dove si è usato il valore della costante di struttura fina $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \simeq 1/137$.

Nel caso relativistico si può usare Eq. (3.6.14), che riportiamo qui per comodità

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right) dt \right|^2, \quad (12.5.4)$$

ed useremo il limite di “emissione istantanea”

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \vec{v} & t \geq 0 \end{cases}, \quad (12.5.5)$$

che corrisponde ad approssimare $\tau \simeq 0$. Poichè in questo limite tutte le frequenze sono piccole rispetto alla frequenza caratteristica $1/\tau$ si può approssimare $e^{i\omega(t-\hat{\vec{n}} \cdot \vec{s}(t)/c)} \simeq 1$ (un modo più formale di procedere che conduce al solito risultato consiste nell’usare la relazione $f'(t) = (\Delta f)\delta(t)$ per la derivata di una funzione in un punto di discontinuità), quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \frac{\hat{\vec{n}} \times (\hat{\vec{n}} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{\beta}} \right|^2 = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}, \quad (12.5.6)$$

dove abbiamo indicato con θ l’angolo tra $\hat{\vec{n}}$ e $\vec{\beta}$.

Per calcolare l’energia totale emessa in questo caso dobbiamo prima di tutto integrare su tutto l’angolo solido; a tal fine si può usare il fatto che

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} d\cos \theta = \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right), \quad (12.5.7)$$

che segue da

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^2} dx \stackrel{(y=\beta x)}{=} \frac{1}{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{(1 - y)^2} dy - \frac{1}{\beta^3} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{y^2}{(1 - y)^2} dy \quad (12.5.8)$$

notando che

$$\frac{y^2}{(1 - y)^2} = \frac{1}{(1 - y)^2} + 1 - \frac{2}{1 - y} \quad (12.5.9)$$

ed usando integrali elementari. Si ottiene quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{1}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right) \quad (12.5.10)$$

ed infine

$$\mathcal{E} = \int_0^{Q/\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} d\omega = \frac{1}{\pi \hbar c} \left(\frac{1}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right) Q. \quad (12.5.11)$$

Usando lo sviluppo $\log(1 + x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$ si vede che il limite non relativistico di questa espressione coincide con il risultato trovato in precedenza, mentre nel limite ultrarelativistico si può approssimare $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ ottenendo

$$\mathcal{E} \simeq \frac{1}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} (\log(4\gamma^2) - 2) Q \simeq \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} (\log(\gamma) - 0.307) Q, \quad (12.5.12)$$

in cui $m_e c^2 \gamma \lesssim Q$. Si vede quindi che anche usando $\gamma \simeq 20$, che corrisponde ad un Q -valore di circa 10 MeV, si ottiene $\mathcal{E}/Q \simeq 1.2 \times 10^{-2}$ e l’energia irraggiata è sempre una piccola frazione dell’energia totale disponibile.

12.6 **Sciame elettromagnetici

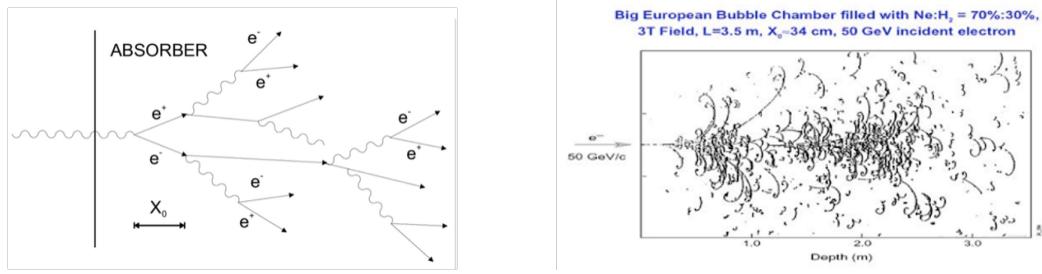
Quando un elettrone di alta energia attraversa del materiale, se i fotoni prodotti per bremsstrahlung hanno energia molto maggiore della energia di soglia per la produzione di coppie e^+e^- , i.e. $E_{e^+e^-} \simeq 1.02$ MeV :

- il loro cammino libero medio è circa del 30% superiore ad \mathbf{X}_o (lunghezza di radiazione in quel materiale);

- il loro cammino libero medio è molto minore ad X_0 e vengono subito assorbiti per effetto Compton e/o fotoelettrico.

I fotoni di alta energia producono coppie e^+e^- che, a loro volta, possono produrre per bremsstrahlung altri fotoni. Questo processo di "moltiplicazione" genera uno "sciam elettromagnetico" e prosegue finché l'energia degli elettroni/positroni non scende al di sotto dell'energia critica.

I grafici (o tabelle) delle sezioni d'urto fotone-atomo e la formula $\frac{d^2N_\gamma}{dx d\omega} = \frac{1}{\omega X_0}$ permettono di esprimere quantitativamente tramite metodi numerici (tipicamente metodi di simulazione Monte-Carlo) i parametri rilevanti di uno sciam elettromagnetico, che può essere prodotto da un elettrone o da un fotone di altissima energia, tipicamente molto maggiore del GeV. In Figura 12.4 sono riportati due esempi di sciami, in particolare, uno schema e una "fotografia". La grande perdita di



(a) Rappresentazione schematica di uno sciam indotto da un fotone

(b) Sciam indotto da un elettrone di 50 GeV nella camera a bolla "BEPC" al CERN

Figura 12.4: Rappresentazione e fotografia di sciami: si noti che nella figura di destra solo le tracce cariche di elettroni e positroni sono fotografate, e che sono curve in quanto l'apparato era posto in un campo magnetico.

energia per irraggiamento da parte di elettroni e positroni permette di effettuare una discriminazione fra queste particelle e gli adroni o i muoni (più pesanti) ed è uno strumento fondamentale negli esperimenti di fisica delle alte energie. Inoltre, si possono costruire rivelatori, detti calorimetri, che misurano l'energia totale degli elettroni in modo indipendente dalla misura tramite la misura dell'impulso negli spettrometri magnetici .

12.7 **Esercizi riassuntivi

Quanti fotoni sono (in media) prodotti nella bremsstrahlung? Riprendiamo queste due relazioni trovate in precedenza per l'attraversamento di uno spessore Δx di materiale:

$$\frac{dN_\gamma}{d\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dE_{irr}}{d\omega} = n_S \frac{\chi_\omega}{\hbar\omega} = n \Delta x \frac{\chi_\omega}{\hbar\omega} \quad \text{dove} \quad \chi_\omega = \frac{\hbar}{nX_0} \quad (12.7.1)$$

Il numero medio di fotoni per intervallo di frequenza sarà quindi

$$\frac{dN_\gamma}{d\omega} = n \Delta x \frac{\chi_\omega}{\hbar\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{\Delta x}{X_0}, \quad (12.7.2)$$

dove bisogna stare attenti che $0 < \omega < \frac{E}{\hbar}$. L'andamento è rappresentato schematicamente in Figura 12.5. Se si utilizza questa relazione per un elettrone che si muove in un mezzo per un tratto che non è piccolo rispetto a X_0 , occorre ricordare che $E = E(x)$ il massimo valore dell'energia irraggiata diminuisce e quindi questa variazione va considerata quando si integra in dx .

Esercizio 12.7.1: Calcolare il numero medio di fotoni emessi in 0.56 mm di Piombo $X_0/10$) da parte di un elettrone di 1 GeV nei tre intervalli di energia:

i) $2 \text{ eV} < E_\gamma < 5 \text{ eV} \quad [N_\gamma = \frac{\Delta x}{X_0} \ln \frac{\omega_2}{\omega_1} \approx 0.09]$

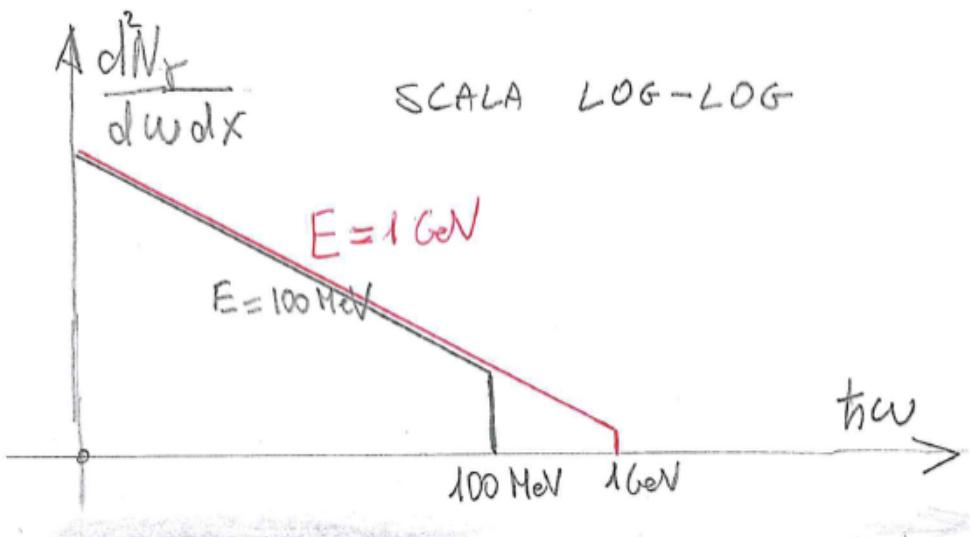


Figura 12.5: Numero medio di fotoni per intervallo di frequenza e lunghezza

- ii) $1 \text{ eV} < E_\gamma < 1 \text{ MeV}$ [= 1.38]
- iii) $1 \text{ MeV} < E_\gamma < 1 \text{ GeV}$ [= 0.69]

Questo esercizio ci insegna che nelle frequenze ottiche ($\sim \text{eV}$) il numero di fotoni emessi è molto minore di quelli emessi per radiazione Cerenkov. Nel Piombo questi fotoni sono immediatamente assorbiti per effetto fotoelettrico, ma se il mezzo radiante fosse un cristallo ($\text{CsI}, \text{PbWO}_4, \dots$) essi potrebbero essere rivelati da un fotorivelatore: in ogni caso i fotoni nel visibile sono quasi tutti emessi per radiazione Cerenkov.

Esercizio 12.7.2: Calcolare il numero medio di fotoni di energia superiore ad 1 MeV emessi (direttamente) da parte di un elettrone di energia 1 GeV che incide su uno spessore molto grande di Piombo.

Capitolo 13

**Perdita di energia per collisioni

Considereremo in questa sezione un diverso meccanismo di perdita di energia che agisce sulle particelle cariche che attraversano la materia, la cosiddetta perdita di energia per collisioni: nell'attraversare un mezzo una particella collide con i costituenti elementari del mezzo (elettroni e nuclei) e trasferisce loro energia. Gli urti con i nuclei erano i più importanti nel caso della radiazione di frenamento, in quanto ad essi corrispondevano accelerazioni maggiori del proiettile e quindi una maggiore energia irraggiata, tuttavia nel caso trattato in questa sezione sono più importanti gli urti con gli elettroni, poiché negli scattering nucleari non si ha praticamente trasferimento di energia dal proiettile al bersaglio. Anche in questa sezione, come in quella precedente, ci si limiterà ad argomenti semiquantitativi.

13.1 **Calcolo à la Bohr

Consideriamo una particella di massa M e carica ze che incide a velocità \vec{v} contro un elettrone che considereremo come praticamente fermo. Questo significa le espressioni che si otterranno saranno valide fintantochè $|\vec{v}|$ è maggiore della velocità tipica di un elettrone all'interno di un atomo¹, che vale approssimativamente

$$\frac{\hbar}{am_e} \simeq \frac{\hbar Z^{1/3}}{1.4a_0 m_e} \simeq \frac{c}{1.4} \frac{e^2}{\hbar c} Z^{1/3} \simeq \frac{c}{192} Z^{1/3}, \quad (13.1.1)$$

dove si è usato $a \simeq 1.4a_0 Z^{-1/3}$, con $a_0 = \hbar^2/(e^2 m_e)$ il raggio di Bohr (vedi ad es. [26] §70). Procedendo analogamente a come si è fatto nella sezione precedente si può approssimare il moto della particella con un moto rettilineo uniforme di parametro di impatto b e velocità \vec{v} . Considerando il limite di “urto rapido”, in cui l’elettrone si muove poco durante l’urto, l’impulso $\Delta\vec{p}_e$ trasferito all’elettrone può essere calcolato come

$$|\Delta\vec{p}_e| \simeq e \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dt \simeq \frac{e}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dx = \frac{e}{2\pi bv} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi b |\vec{E}_\perp| dx = \frac{2ze^2}{bv}, \quad (13.1.2)$$

dove nell’ultimo passaggio si è usato il teorema di Gauss ed il fatto che la particella incidente ha carica ze . L’energia trasferita all’elettrone in un urto con parametro di impatto b sarà quindi data da

$$T(b) = \frac{|\Delta\vec{p}_e|^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{b^2v^2m_e} = \frac{2z^2}{b^2v^2} \left(\frac{e^2}{m_ec^2} \right)^2 m_e c^4 = \frac{2z^2 r_e^2 m_e c^2}{b^2 \beta^2}. \quad (13.1.3)$$

Notiamo esplicitamente che la perdita di energia per collisioni è anche spesso chiamata perdita di energia per ionizzazione, tuttavia solo gli urti corrispondenti a valori di $T(b)$ maggiori del potenziale

¹Un interessante argomento per capire cosa succede nel limite opposto in cui la particella incidente abbia velocità molto piccola è presentato in [45].

di ionizzazione producono elettroni liberi, mentre energia può essere persa anche portando un atomo ad un livello eccitato, che poi decade emettendo fotoni.

Per calcolare l'energia media persa per unità di lunghezza in un mezzo con densità numerica di elettroni $n_e = \frac{\rho N_A Z}{A(g)}$ (dove come al solito ρ è la densità di massa, $N_A \simeq 6 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro, Z il numero atomico ed $A(g)$ il peso atomico espresso in grammi) si deve quindi calcolare

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} n_e T(b) 2\pi b db = \frac{\rho N_A Z}{A(g)} \frac{4\pi z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \log \frac{b_{max}}{b_{min}} \equiv \frac{\rho Z z^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \log \frac{b_{max}}{b_{min}}, \quad (13.1.4)$$

dove si è introdotta la notazione

$$K = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \simeq 0.3 \text{ MeV cm}^2. \quad (13.1.5)$$

Come nel caso della radiazione di frenamento si presenta il problema della scelta dei limiti di integrazione e discuteremo tre possibili scelte.

- Dall'espressione di $T(b)$ si vede che $b \propto 1/\sqrt{T(b)}$, quindi un possibile modo di imporre limiti su b è usare dei limiti su $T(b)$: l'energia massima trasferibile vale approssimativamente $T_{max} \approx 2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2$ (vedi Eq. (8.2.24) in Sez. (8.2)) mentre chiamiamo I il valore minimo di $T(b)$ per il quale si può avere perdita di energia (per ionizzazione o per eccitazione elettronica). Con questa scelta si ha $\log(b_{max}/b_{min}) = \frac{1}{2} \log(T_{max}/I)$ e quindi

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Z z^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \frac{1}{2} \log \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{I}. \quad (13.1.6)$$

- Una altra possibilità è fissare b_{min} usando T_{max} come nel punto precedente (quindi $b_{min} = zr_e/(\gamma\beta^2)$), ma usare per b_{max} il vincolo che l'elettrone "si muova poco" sulla scala di tempi $\Delta t = b/(v\gamma)$ caratteristica dell'urto (vedi Sez. (2.4)). Si può quindi imporre $\omega_e \Delta t \ll 1$ dove ω_e è una frequenza tipica dell'atomo, quindi $b_{max} = \frac{v\gamma}{\omega_e}$. Una ulteriore giustificazione di $\omega_e \Delta t \ll 1$ segue dal fatto che se questa condizione non fosse soddisfatta si sarebbe nel limite adiabatico, in cui non ci sono transizioni quantistiche e non potrebbe quindi essere assorbita energia da parte degli elettroni. Si trova quindi in questo caso

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Z z^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \log \frac{\beta^3 \gamma^2 c}{zr_e \omega_e}. \quad (13.1.7)$$

- Si può infine usare $b_{max} = \frac{v\gamma}{\omega_e}$ come nel punto precedente e fissare b_{min} con il principio di indeterminazione: nel sistema di riferimento in cui la particella incidente è ferma, l'elettrone ha un impulso $m_e v \gamma$ ed il parametro d'impatto deve quindi soddisfare $b \gtrsim b_{min} = \frac{\hbar}{m_e v \gamma}$. Si ottiene quindi

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Z z^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \log \frac{\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{\hbar \omega_e}. \quad (13.1.8)$$

Se si usa $\hbar \omega_e = I/2$ si vede che questo risultato è esattamente la metà di quello ottenuto nel caso 1).

13.2 **La formula di Bethe-Bloch

Un calcolo più accurato porterebbe alla seguente espressione (nota come formula di Bethe-Bloch) per l'energia media persa per unità di lunghezza da una particella di massa M e carica ze a causa delle collisioni:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Z z^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2 T_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta)}{2} \right], \quad T_{max} = \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{1 + 2\frac{m_e \gamma}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2}, \quad (13.2.1)$$

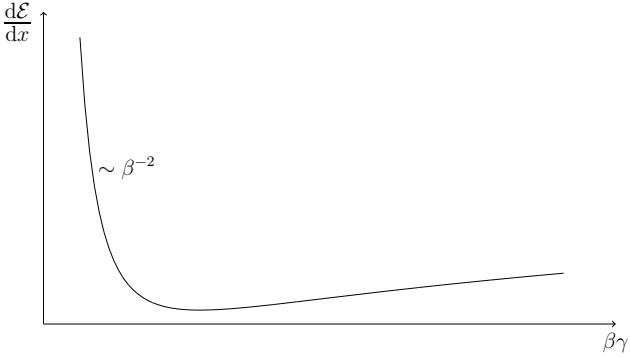


Figura 13.1: Andamento qualitativo della funzione $\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ in Eq. (13.2.2).

dove T_{max} è l'espressione completa per il massimo trasferimento di energia cinetica (vedi Eq. (8.2.23) in Sez. (8.2)), I è una energia di eccitazione media dell'atomo (vedi ad es. [20] §82 per la definizione precisa o [26] §149 per l'analogico non relativistico) e la funzione δ rappresenta un termine correttivo noto come effetto densità (vedi ad es. [44], [4] §13.3 o [6] §114). Usando $I = 2\hbar\omega_e$ questa espressione si riduce a quella del caso 3) nei casi in cui è lecito trascurare l'effetto densità, la correzione $-\beta^2$ e si ha $m_e\gamma \ll M$. Una approssimazione più maneggevole di Eq. (13.2.1) ma ancora ragionevolmente accurata è quindi

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Zz^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \log \frac{2\beta^2\gamma^2 m_e c^2}{I}, \quad (13.2.2)$$

in cui per l'energia di eccitazione media si ha approssimativamente

$$I \approx 16Z^{0.9} \text{ eV}. \quad (13.2.3)$$

Un grafico qualitativo di questa espressione in funzione di $\beta\gamma$ è mostrato in Fig. (13.1): esso presenta un minimo per $\beta\gamma \simeq 3.5$ (punto noto come minimum ionization point), oltre il quale l'andamento è logaritmico e sotto il quale si ha una crescita $\propto \beta^{-2}$. Ricordando che $K \simeq 0.3 \text{ MeV cm}^2$ ed usando $Z/A \simeq 1/2$, al minimo si ha quindi approssimativamente

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right|_{min} &\simeq z^2 0.15 \frac{\text{MeV cm}^2}{g} \left(\log(0.765 \times 10^6) - 0.9 \log Z \right) \simeq \\ &\simeq z^2 (2.03 - 0.135 \log Z) \frac{\text{MeV cm}^2}{g}, \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

da cui si ottengono, per alcuni casi di esempio, i valori riportati in Tab. (13.1). Una misura congiunta dell'impulso di una particella e della sua perdita di energia per collisioni può essere usata per discriminare il tipo di particella, infatti l'andamento di $d\mathcal{E}/dx$ in funzione dell'impulso presenta una dipendenza dalla massa piuttosto caratteristica, vedi Fig. (13.2). A parità di impulso, maggiore di quello corrispondente al minimum ionization point, la perdita di energia per collisioni dipende dalla massa secondo la relazione

$$\left. \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right|_{M_1} - \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right|_{M_2} \simeq \frac{Zz^2 K}{A(g)} 2 \log \frac{M_2}{M_1}. \quad (13.2.5)$$

Data la dipendenza non banale del membro di destra di Eq. (13.2.2) dall'energia cinetica E (implicita nella dipendenza da β e γ) non è possibile ottenere una espressione analitica per la dipendenza dell'energia E dallo spessore di materiale attraversato; è tuttavia possibile calcolare numericamente, ad esempio, lo spessore medio che una particella di energia iniziale E_i attraverserà prima di

fermarsi (range), stimando numericamente l'integrale

$$R = \int_0^R dx = \int_{E_i}^0 \frac{dx}{dE} dE = \int_0^{E_i} \frac{1}{d\mathcal{E}/dx} dE . \quad (13.2.6)$$

materiale	Z	Eq. (13.2.4) [MeVcm ² /g]	PDG [MeVcm ² /g]
C (grafite)	6	1.79	1.742
Si	14	1.67	1.664
Pb	82	1.44	1.122

Tabella 13.1: Confronto tra i valori al minimo di $\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx}$ calcolati usando Eq. (13.2.4) con $z = 1$ ed i valori sperimentali riportati sul Particle Data Group [22].

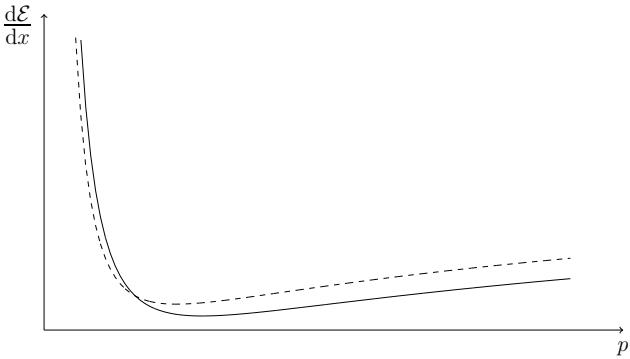


Figura 13.2: Andamento di $\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ in funzione dell'impulso $p = Mv\gamma$ della particella incidente per due valori diversi di M . La massa corrispondente alla linea continua è più grande di quella corrispondente alla linea tratteggiata.

Per particelle ultrarelativistiche, la perdita di energia per unità di lunghezza dovuta alla radiazione di frenamento è lineare nell'energia cinetica E mentre la perdita di energia dovuta alle collisioni cresce logaritmicamente con E ; è quindi evidente che per valori sufficientemente grandi di E dominerà la perdita di energia dovuta alla radiazione di frenamento. D'altro canto per piccole velocità la perdita di energia per irraggiamento diventa piccola (per poi tendere ad una costante nel limite non relativistico) ed è irrilevante rispetto a quella dovuta alle collisioni, che cresce come β^{-2} . Si chiama energia critica il valore dell'energia per il quale i due contributi sono uguali. Riscriviamo qui per comodità le espressioni trovate in precedenza:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}^{rad}}{dx} &= \frac{\rho N_A}{A(g)} \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e} \right) E \\ \frac{d\mathcal{E}^{coll}}{dx} &= \frac{\rho N_A}{A(g)} 4\pi Z z^2 \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \log \left(\frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{I} \right) \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

e stimiamo l'energia critica di un elettrone nel piombo (quindi $z = 1$, $M = m_e$ e $Z = 82$). Approssimando $\beta \simeq 1$ ed usando $E = m_e c^2 (\gamma - 1)$ si ottiene

$$\frac{16}{3} Z \alpha \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \right) (\gamma - 1) \simeq 4\pi \log \left(\frac{2\gamma^2 m_e c^2}{I} \right) \quad (13.2.8)$$

che usando Eq. (13.2.3) diventa $12.09(\gamma - 1) \simeq 89.20 + 25.13 \log \gamma$ e che ha soluzione $\gamma \simeq 13.84$ (oltre ad una soluzione spuria con $\gamma < 1$), quindi $E_c \simeq 7.07$ MeV. Una formula empirica che ben riproduce i dati sperimentali per le energie critiche degli elettroni nei vari materiali è $E_c \simeq \frac{610 \text{ MeV}}{Z+1.24}$ (vedi [22] §33.4.4), da cui si ottiene nel caso del piombo $E_c \simeq 7.33$ MeV.

13.3 **Bethe-Bloch

Parte 6.3 Perdita di energia per collisioni (Bethe-Bloch)

Versione del 17 gennaio 2022

Introduzione

Consideriamo una particella, di carica $q=ze$ e massa M , in moto veloce attraverso la materia e studiamone l'interazione coulombiana con gli elettroni (atomici, molecolari o liberi) che in essa sono presenti. Durante il suo percorso essa trasferirà energia agli elettroni, producendo la **ionizzazione** degli atomi o molecole (nel caso di materiale cristallino si parla di passaggio di elettroni dalla banda di valenza a quella di conduzione), oppure la eccitazione (atomica o molecolare) con seguente emissione di fotoni di **scintillazione**.

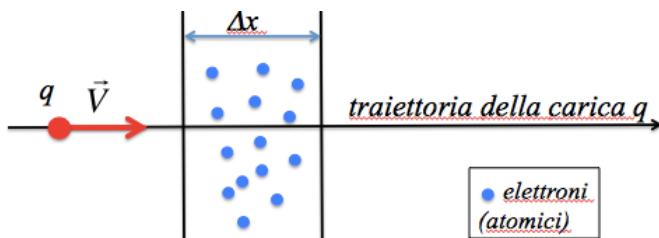
L'energia così persa per unità di percorso si chiama "**energia persa per collisioni**".

Poichè il numero di collisioni, anche per percorsi estremamente piccoli, è molto elevato, il fenomeno viene descritto statisticamente e - di norma - si riassume nel

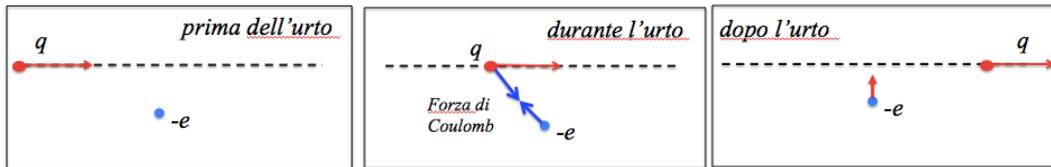
valore medio dell'energia persa per collisioni, usualmente indicato come $\frac{dE_{coll}}{dx}$.

Le fluttuazioni dell'energia persa per collisioni si chiamano "**fluttuazioni di Landau**" e non sono oggetto del corso di *Fisica III*. Qui possiamo solo anticipare che questo effetto può essere rilevante, soprattutto per piccoli spessori.

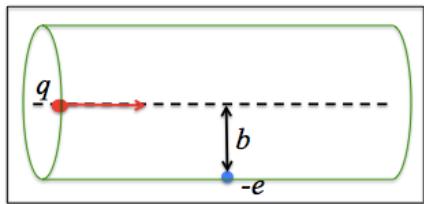
Ipotizziamo che l'energia della particella sia **molto maggiore dell'energia di legame degli elettroni** con il restante materiale: questa ipotesi ci permette di considerare ogni urto come un **urto su un elettrone libero ed inizialmente fermo**. L'ipotesi di "**moto veloce**" ci permette di approssimare il **moto della particella con una linea retta** e di considerare ogni urto **come istantaneo**.



Per un singolo urto definiamo nel modo usuale il parametro di impatto (b). Nella approssimazione in cui in un singolo urto l'energia persa sia trascurabile rispetto all'energia della particella, l'impulso (praticamente istantaneo) della forza che la carica in moto esercita sull'elettrone non ha componente parallela alla traiettoria della particella, ma solo perpendicolare: $\Delta p_{\perp} \neq 0$, $\Delta p_{\parallel} = 0$. Inoltre questa ipotesi ci permette di trattare il moto della particella come un **moto (rettilineo) uniforme**.



6.3.1 Calcolo dell'energia media persa per collisioni nel modello di Bohr (1915)



Utilizzando il teorema dell'impulso e applicando la legge di Gauss per il campo elettrico ad un cilindro il cui asse sia parallelo alla traiettoria della particella e passante per la posizione dell'elettrone, abbiamo:

$$|\Delta p_{\perp}| = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{\perp}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |-eE_{\perp}| dt = \frac{e}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_{\perp}| dx = \frac{e}{2\pi b V} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi b |E_{\perp}| dx = \frac{ze^2}{2\pi \epsilon_0 b V}$$

L'energia trasferita ad un elettrone, per un urto con parametro di impatto b , è

$$T(b) = \frac{|\Delta p_{\perp}|^2}{2m_e} = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 m_e \epsilon_0^2 V^2 b^2} = \frac{z^2 (4\pi \epsilon_0 m_e c^2 r_e)^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0^2 \beta^2 c^2 b^2} \Rightarrow T(b) = 2z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{b^2}$$

L'energia **media** trasmessa nelle collisioni in un tratto Δx si ottiene moltiplicando $T(b)$

per la concentrazione degli elettroni $n_e = \rho \frac{Z}{M_A} N_A = \rho \frac{Z}{A \cdot 1g} N_A$ ed integrando sul

volume $\Delta T_{coll} = \int_{b_{min}}^{b_{MAX}} \int_0^{\Delta x} T(b) 2\pi b db dx$, per cui

$$\langle \frac{dE_{coll}}{dx} \rangle = n_e \int_{b_{min}}^{b_{MAX}} T(b) 2\pi b db = 4\pi n_e z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} r_e^2 \int_{b_{min}}^{b_{MAX}} \frac{db}{b} \Rightarrow$$

$$\langle \frac{dE_{coll}}{dx} \rangle = 4\pi n_e z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} r_e^2 \ln \frac{b_{MAX}}{b_{min}} \text{ in inglese "collision stopping power"}$$

dove b_{MAX} e b_{min} vengono definiti dal modello.

Nel modello di Bohr si chiede che la durata dell'urto $\tau \sim \frac{b}{\gamma V}$ sia minore del periodo di

rotazione dell'elettrone atomico $\tau < T_e \sim \frac{1}{\omega_e}$, per cui $b_{MAX} = \frac{\gamma V}{\omega_e} = \frac{\gamma \beta c}{\omega_e}$. Notiamo come il parametro di impatto massimo possa avere valori anche superiori al raggio atomico, questo perchè l'interazione con gli elettroni può avvenire anche se la particella passa esternamente all'atomo.

Per valutare b_{min} riprendiamo la relazione $T(b) = 2z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{b^2}$. Poichè l'energia cinetica massima trasferibile ad un elettrone inizialmente fermo è $T_{MAX} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$, abbiamo

$$b_{min} = \sqrt{2z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{T_{MAX}}} = \frac{zr_e}{\beta^2 \gamma}.$$

Quindi $\langle \frac{dE_{coll}}{dx} \rangle = 4\pi n_e z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} r_e^2 \ln \frac{\beta^3 \gamma^2 c}{zr_e \omega_e}$ **(formula di Bohr)**

che si può esprimere in $\frac{MeV \cdot cm^2}{g}$: $\langle \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} \rangle = z^2 \frac{Z}{A \cdot 1g} N_A \frac{4\pi m_e c^2}{\beta^2} r_e^2 \ln \frac{\beta^3 \gamma^2 c}{zr_e \omega_e} \Rightarrow$

$$\langle \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} \rangle = z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \ln \frac{\beta^3 \gamma^2 c}{zr_e \omega_e} \quad \text{con} \quad K = N_A \frac{4\pi m_e c^2 r_e^2}{1g} = 0.307 \frac{MeV \cdot cm^2}{g}.$$

6.3.2 Formula di Bethe-Bloch

In alternativa al modello di Bohr vi sono i calcoli di Bethe-Bloch e l'integrazione di Fermi, discussa in un suo bellissimo libro che viene soprannominato "il Fermino".

Il calcolo di Bethe-Bloch (la cui trattazione completa si può trovare nel Landau IV) consiste nel sommare due termini per l'energia cinetica media trasferita (T_e) ad un singolo elettrone atomico. Il **primo termine** considera le perdite di energia nella regione $T_{MAX} > T_e > T_{libero}$, dove T_{MAX} è l'energia massima trasferibile ad un elettrone inizialmente fermo, mentre T_{libero} è una energia arbitraria, ma molto minore della massa dell'elettrone ($0.5 MeV$) e molto maggiore dell'energia di ionizzazione delle molecole del materiale attraversato ($\sim eV$). I limiti

$m_e > T_{\text{libero}^*} > \text{en.ionizzazione}$ servono per poter considerare il primo termine come l'urto effettivo su un elettrone libero, e per poter effettuare il calcolo del **secondo termine**, che copre la regione $T_{\text{libero}^*} > T_e > T_{\min}$, con una approssimazione ragionevole che sintetizzi l'effetto della eccitazione delle molecole/atomi del materiale con un singolo parametro.

Procediamo adesso al calcolo del primo termine, che è stato discusso in data 11 novembre 2021 come applicazione della sezione d'urto Mott per l'urto di una

$$\text{particella di massa } M \text{ e carica } ze \text{ su un elettrone libero: } \frac{d\sigma}{dt} = 4\pi z^2 \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2}{\beta^2 t^2} \left(1 - \frac{\beta^2 t}{t_{\max}}\right).$$

A noi serve esprimere la sezione d'urto Mott in funzione di T_e , in modo da poter calcolare l'energia media trasferita in un singolo urto all'elettrone:

$$\langle T_e \rangle = \frac{\int_{T_{\text{libero}^*}}^{T_{\max}} T_e \left(\frac{d\sigma}{dT_e} \right) dT_e}{\sigma_{\text{coll}}}, \text{ avendo definito } \sigma_{\text{coll}} = \int_{T_{\text{libero}^*}}^{T_{\max}} \left(\frac{d\sigma}{dT_e} \right) dT_e \text{ e } \left(\frac{d\sigma}{dT_e} \right) = \left(\frac{d\sigma}{dt} \right) \left| \frac{dt}{dT_e} \right|.$$

Indichiamo i 4-impulsi dell'elettrone nello stato iniziale e finale con $p_e = \begin{pmatrix} m_e, & \vec{0} \end{pmatrix}$ e

$$p_e' = \begin{pmatrix} E', & \vec{p}_e \end{pmatrix}; \text{ si ha } t = (p_e' - p_e)^2 = m_e^2 c^4 + m_e^2 c^4 - 2E' m_e c^2 = -2m_e c^2 T_e, \text{ quindi:}$$

$$T_e = \frac{-t}{2m_e c^2}, \quad \left| \frac{dt}{dT_e} \right| = 2m_e c^2. \text{ Ricordando che } m_e c^2 = \frac{\alpha \hbar c}{r_e} \text{ possiamo calcolare}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT_e} \right) = \left(\frac{d\sigma}{dt} \right) \left| \frac{dt}{dT_e} \right| = 4\pi z^2 \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2}{\beta^2 (2m_e c^2 T_e)^2} \left(1 - \frac{-\beta^2 2m_e c^2 T_e}{-2m_e c^2 T_{\max}} \right) 2m_e c^2, \text{ da cui}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dT_e} \right) = \frac{2\pi z^2 m_e c^2 r_e^2}{\beta^2 T_e^2} \left(1 - \beta^2 \frac{T_e}{T_{\max}} \right).$$

L'energia massima trasferibile ad un elettrone in un singolo urto è calcolabile tramite la

$$\text{conservazione del 4-impulso e vale } T_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2 \frac{m_e}{M} \gamma + \left(\frac{m_e}{M} \right)^2}. \text{ Nel caso di particelle}$$

diverse, e quindi molto più pesanti, dell'elettrone si ha $T_{\max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$.

Il valore medio dell'energia trasferita è quindi

$$\begin{aligned} \langle T_e \rangle &= \frac{1}{\sigma_{\text{coll}}} \int_{T_{\text{libero}^*}}^{T_{\max}} T_e \left(\frac{d\sigma}{dT_e} \right) dT_e = \frac{1}{\sigma_{\text{coll}}} \frac{2\pi z^2 m_e c^2 r_e^2}{\beta^2 T_e^2} \left(\ln \frac{T_{\max}}{T_{\text{libero}^*}} - \beta^2 \frac{T_{\max} - T_{\text{libero}^*}}{T_{\max}} \right) \Rightarrow \\ \langle T_e \rangle &\approx \frac{1}{\sigma_{\text{coll}}} \frac{2\pi z^2 m_e c^2 r_e^2}{\beta^2 T_e^2} \left(\ln \frac{T_{\max}}{T_{\text{libero}^*}} - \beta^2 \right) \end{aligned}$$

Calcoliamo l'energia persa in uno spessore Δx moltiplicando lo spessore per la concentrazione degli elettroni, per la sezione d'urto e per l'energia media persa in un

singolo urto: $\Delta E_{coll} = n_e \sigma_{coll} \Delta x < T_e > = n_e \Delta x \frac{2\pi z^2 m_e c^2 r_e^2}{\beta^2} \left(\ln \frac{T_{MAX}}{T_{libero}} - \beta^2 \right)$. Procedendo come

nel caso della formula di Bohr otteniamo $< \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} > \Big|_{parte1} = \frac{1}{2} z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \frac{T_{MAX}}{T_{libero}} - \beta^2 \right)$.

Il calcolo del secondo termine fornirebbe un risultato analogo nella forma

$$< \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} > \Big|_{parte2} = \frac{1}{2} z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \frac{T_{libero}}{T_{min}} - \beta^2 \right), \text{ dove Landau-IV stima}$$

$$T_{min} \approx I^2 / (2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2), \text{ con } I \text{ energia media di eccitazione dell'atomo .}$$

Sommando i due termini si ottiene

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} > = < \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} > \Big|_{parte1} + < \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} > \Big|_{parte1} = \frac{1}{2} z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \frac{T_{MAX}}{T_{min}} - 2\beta^2 \right) = \\ &= z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \sqrt{\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{MAX}}{I^2}} - \beta^2 \right). \end{aligned}$$

Se introduciamo il termine $\delta/2$, introdotto da E.Fermi come correzione di densità, otteniamo la formula di Bethe-Bloch che fitta bene i dati sperimentali ed è diversa dalla formula di Bohr nella parte logaritmica:

$$< \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} > = z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \sqrt{\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{MAX}}{I^2}} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right) \text{ (formula di Bethe-Bloch)}$$

Notiamo che $T_{MAX} \rightarrow 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ per particelle cariche più pesanti dell'elettrone e purchè $\gamma \ll M/m_e$: queste condizioni sono piuttosto frequenti, per le quali la formula di Bethe-Bloch diventa

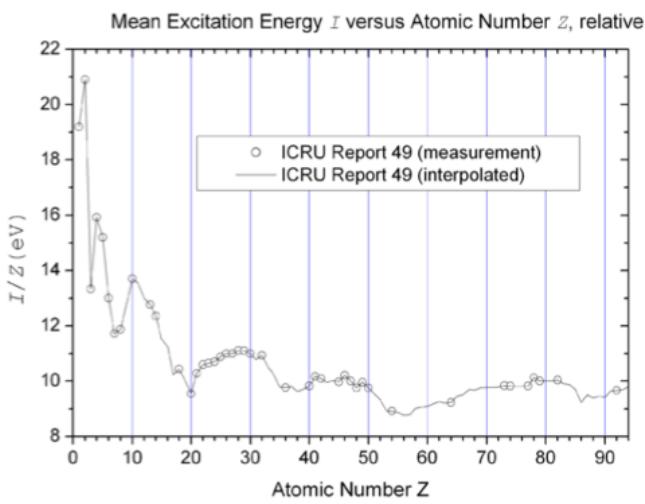
$$< \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} > \xrightarrow{\gamma \ll M/m_e} z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right)$$

che è abbastanza simile a quella di Bohr ponendo $I = zr_e \omega_e / c$.

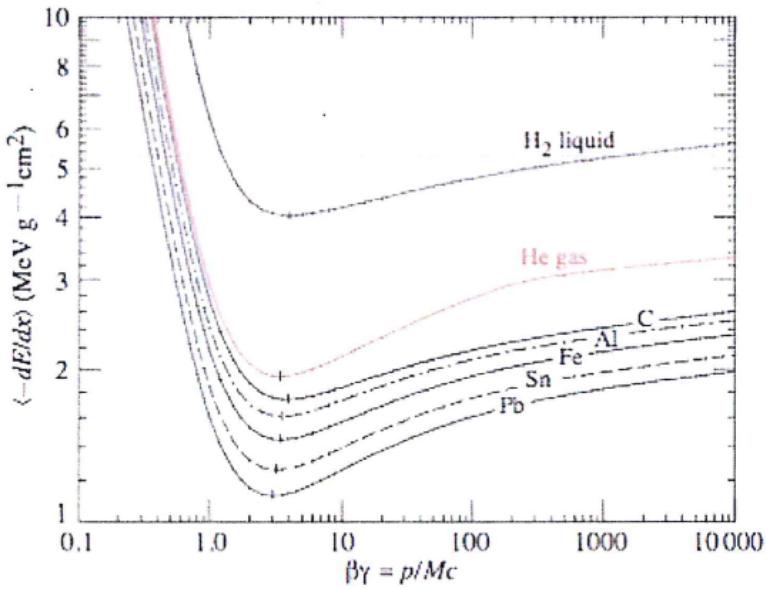
L'energia potenziale media di eccitazione è approssimabile per $Z \gg I$ nella forma

$I \approx (10 \text{ eV}) \cdot Z$; i suoi valori sono tabulati e reperibili nei database (per esempio il PDG).

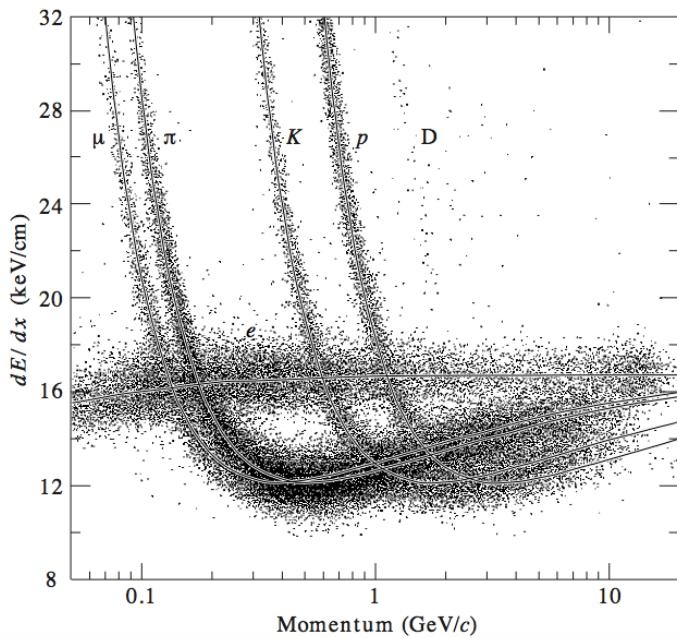
Nella figura seguente viene riportato il valore di I in funzione di I/Z : si nota che l'approssimazione è molto buona (entro il 5%) per $Z > 15$, mentre è decisamente poco precisa per $Z < 15$.



La curva che descrive la perdita media di energia per collisioni è riportata in funzione di $\beta\gamma = \frac{|\vec{p}|}{M}$ nella figura seguente per diversi materiali.



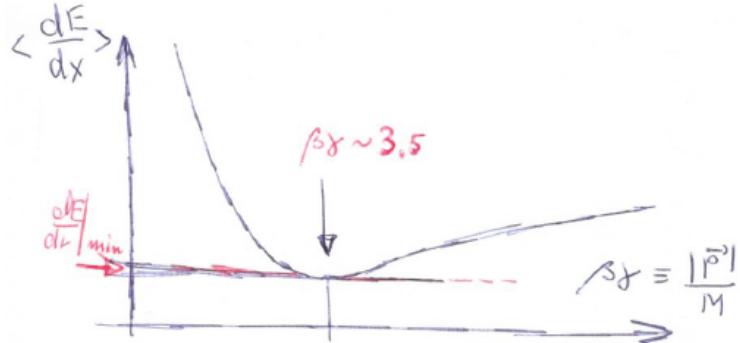
In questa figura la perdita di energia (punti = dati sperimentali, linee = fit ai dati) è riportata in funzione dell'impulso per un stesso spessore di materiale per diverse particelle.



Le curve mostrano una dipendenza $\sim 1/\beta^2$ per piccole velocità: questo effetto sarà determinante per il "**picco di Bragg**" come discusso nel capitolo "applicazioni".

Inoltre si nota che si ha un minimo per $\beta\gamma \sim 3.5$: le particelle con quantità di moto $|\vec{p}| \sim 3.5Mc$ si dicono "al minimo di ionizzazione", caratterizzato da un valore

compreso (ad eccezione dell'idrogeno) fra $1.1 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$ e $2 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$.



Se imponiamo $\beta\gamma = 3.5$, $z=1$, $I \approx (10eV) \cdot Z$ e $\delta=0$ nella formula

$\langle \frac{1}{\rho} \frac{dE_{coll}}{dx} \rangle = z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right)$, possiamo verificare su alcuni materiali le previsioni di Bethe-Bloch. Il risultato è molto buono, come risulta dalla seguente tabella.

materiale	minimo dE/dx (modello)	minimo dE/dx (dati)
Piombo	1.06 MeV/g/cm ²	1.12 MeV/g/cm ²
Silicio	1.60 MeV/g/cm ²	1.60 MeV/g/cm ²
Grafito	1.73 MeV/g/cm ²	1.75 MeV/g/cm ²
Argon	1.56 MeV/g/cm ²	1.49 MeV/g/cm ²

6.3.3 Applicazioni della formula di Bethe-Bloch

L'energia persa per collisioni può provocare nei materiali vari effetti:

- **ionizzazione** del materiale: produzione di coppie elettroni-ione (nei gas) o di coppie elettroni-lacune (nei semiconduttori): queste cariche libere possono essere rivelate come segnali elettrici;
- fotoni di **scintillazione**, che possono essere rivelati tramite appositi rivelatori (fotomoltiplicatori, SiPM, ..);
- **riscaldamento** del materiale (tramite fotoni di bassa energia, fononi, ...).

Tipicamente solo una frazione dell'energia persa va in fotoni di scintillazione o in elettroni liberi. Ogni materiale ha un suo valore medio del numero di fotoni o di elettroni per unità di energia persa in collisioni. Questi valori sono usualmente reperibili sul web. A titolo di esempio forniamo due valori significativi per materiali molto utilizzati:

- 277 coppie elettrone-lacuna per ogni keV di energia in Silicio;
- 40 fotoni (UV 9.68eV) e 38 coppie ione-elettrone per ogni keV di energia in Argon

Esercizio

Calcolare l'energia persa e valutare il numero di coppie elettrone-lacuna/ione o di fotoni di scintillazione prodotti da un protone al minimo di ionizzazione che attraversi:

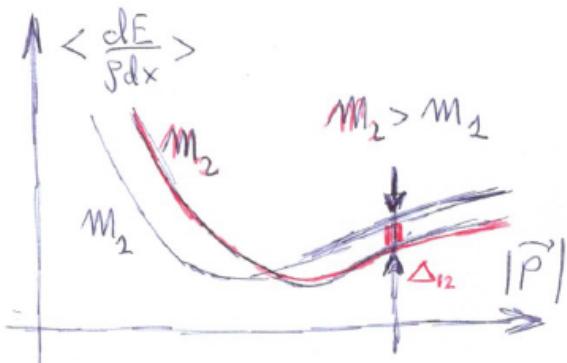
- i) 300 μm di Silicio,
- ii) 10 cm di Argon gassoso a TPN.

Risposte:

- i) 111 keV; 31000 coppie elettrone-lacuna ($4.9 fC$) ;
- ii) 27 keV; 1020 coppie elettrone-ione e 1080 fotoni UV.

La discriminazione di particelle tramite dE/dx

La misura simultanea della quantità di moto e della perdita di energia per collisioni fornisce una indicazione importante sulla natura della particella e contribuisce a risolvere il problema dell'identificazione delle particelle.



Per $\beta\gamma > 3.5$ la differenza Δ_{I2} fra la perdita di ionizzazione di un particella di massa m_1 ed una di massa m_2 , entrambe di carica unitaria, si può stimare dalla formula di

$$\text{Bethe-Bloch con } \beta \sim 1 : \frac{1}{\rho} \frac{dE_{1,2}}{dx} \approx \frac{Z}{A} K \left(\ln \frac{2m_e \vec{p}^2}{Im_{1,2}^2} - 1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

$$\text{Quindi } \Delta_{I2} = \frac{Z}{A} K \left(\ln \frac{2m_e \vec{p}^2}{Im_1^2} - 1 - \frac{\delta}{2} \right) - \frac{Z}{A} K \left(\ln \frac{2m_e \vec{p}^2}{Im_2^2} - 1 - \frac{\delta}{2} \right) = 2 \frac{Z}{A} K \ln \frac{m_2}{m_1}$$

Vediamo i valori numerici per particelle che attraversino del Silicio e confrontiamoli con il valore di **1.6 MeV cm²/g** del minimo di ionizzazione.

$$\Rightarrow \text{caso } \pi^+ \text{ vs } p: \Delta_{I2} = 2 \frac{Z}{A} K \ln \frac{m_p}{m_\pi} \approx 0.58 \frac{MeV}{g/cm^2};$$

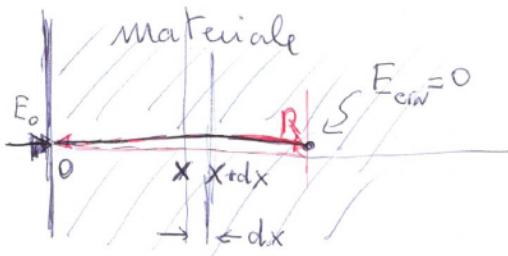
$$\Rightarrow \text{caso } \pi^+ \text{ vs } K^+: \quad \Delta_{12} = 2 \frac{Z}{A} K \ln \frac{m_K}{m_\pi} \approx 0.39 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}.$$

6.3.4 Il percorso residuo ("range")

Spesso si è interessati al **percorso** che una particella carica effettua in un materiale molto spesso prima di arrestarsi ed alla **energia rilasciata per unità di percorso**. Questo tema è particolarmente rilevante in molte applicazioni, come per esempio le **schermatore** di apparati che producono particelle cariche (per esempio acceleratori di particelle) e la terapia con fasci di adroni ("**adroterapia**").

Consideriamo una particella carica di energia cinetica iniziale E_o e quantità di moto

$$p_o = \sqrt{(E_o + M)^2 - M^2} \quad \text{che si muove lungo un asse } x \text{ e che entri in un materiale in } x=0.$$



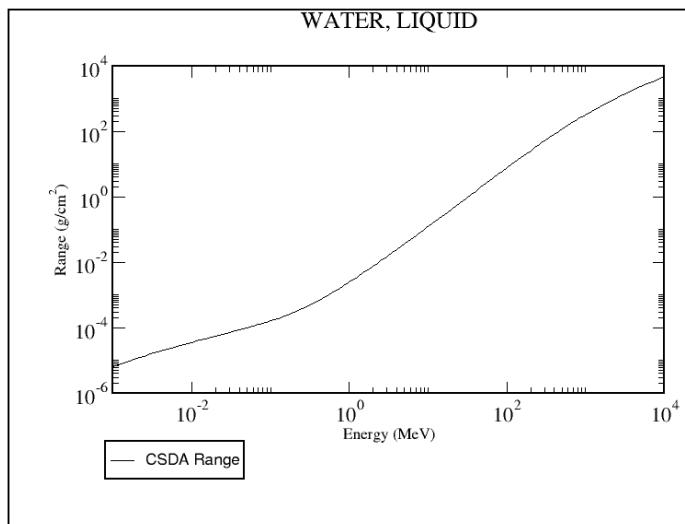
La perdita di energia provoca il rallentamento della particella che avrà una energia $E(x)$ dopo aver percorso un tratto x e che *si fermerà* dopo aver percorso un tratto R , definito come "**percorso residuo**" o "**Range**".

Il **Range** si può calcolare sapendo l'energia cinetica iniziale e la funzione che fornisce la "**perdita di energia unità di percorso**" (in inglese: "**stopping power**"):

$$R(E_o) = \int_0^R dx = \int_0^{E_o} \frac{dx}{dE} dE = \int_0^{E_o} \frac{dE}{(dE/dx)}$$

↑ ↑
range stopping power

Poichè lo "stopping power" dipende dalla energia, l'integrale di cui sopra viene effettuato in forma numerica e presentato in forma grafica, come per esempio nella figura seguente che riporta il "range" di protoni in acqua.



Nota importante

Lo stopping power che viene **utilizzato per il calcolo del range** è lo **"stopping power totale"**, che è la somma degli stopping power dovuta a tutti gli effetti che provocano la perdita di energia a particelle cariche che attraversano la materia.

$(dE / dx)_{totale} = (dE / dx)_{collisioni} + (dE / dx)_{radiazione} + (dE / dx)_{nucleare}$, dove:

$(dE / dx)_{collisioni}$ **"Collision stopping power"** è dovuto alla perdita di energia per collisioni (Bethe-Bloch);

$(dE / dx)_{radiazione}$ **"Radiative stopping power"** è dovuto alla perdita di energia per irraggiamento (Tsai) ed è **rilevante solo per elettroni o positroni**;

$(dE / dx)_{nucleare}$ **"Nuclear stopping power"** è dovuto alla perdita di energia per urti elastici dovuti all'interazione forte su nuclei ed è **rilevante solo per adroni**.

Range e stopping power si possono **reperire sul web**, per esempio all'indirizzo:

<https://www.nist.gov/pml/stopping-power-range-tables-electrons-protons-and-helium-ions> dove per elettroni, protoni e particelle di energia a fino a 10 GeV si trovano, sia in forma grafica che tabulata, le grandezze riportate di seguito in lingua inglese.

Per valutare il range per energie superiori a 10 GeV è invece prima necessario integrare lo stopping power fra 10 GeV e l'energia iniziale.

Significance of Calculated Quantities

Collision stopping power: average rate of energy loss per unit path length, due to Coulomb collisions that result in the ionization and excitation of atoms. For heavy charged particles, the collision stopping power is often called *electronic stopping power*.

Density-effect correction: enters into the formula for the collision stopping power and takes into account the reduction of the collision stopping power due to the polarization of the medium by the incident electron.

Radiative stopping power: average rate of energy loss per unit path length due to collisions with atoms and atomic electrons in which bremsstrahlung quanta are emitted. Important only for electrons.

Nuclear stopping power: average rate of energy loss per unit path length due to the transfer of energy to recoiling atoms in elastic collisions. Important only for heavy charged particles.

Total stopping power: for electrons, the sum of the collision and radiative stopping powers; for protons and helium ions, the sum of collision and nuclear stopping powers.

CSDA range: a very close approximation to the average path length traveled by a charged particle as it slows down to rest, calculated in the continuous-slowing-down approximation. In this approximation, the rate of energy loss at every point along the track is assumed to be equal to the total stopping power. Energy-loss fluctuations are neglected. The CSDA range is obtained by integrating the reciprocal of the total stopping power with respect to energy.

Projected range: average value of the depth to which a charged particle will penetrate in the course of slowing down to rest. This depth is measured along the initial direction of the particle.

Detour factor: ratio of the projected range to the CSDA range. As the result of multiple scattering, the trajectory of the particle is wiggly rather than straight, and the detour factor is always smaller than unity.

Radiation yield: average fraction of the initial kinetic energy of an electron that is converted to bremsstrahlung energy as a particle slows down to rest, calculated in the continuous-slowing-down approximation. Important only for electrons.

Esercizio

Utilizzando i database su internet, valutare il range di:

- i) elettroni da 3.5 MeV su Silicio
- ii) elettroni da 100 MeV su Piombo
- iii) elettroni di 1 GeV su tessuto muscolare striato
- iv) protoni da 100 MeV in acqua
- v) protoni da 5 MeV in aria

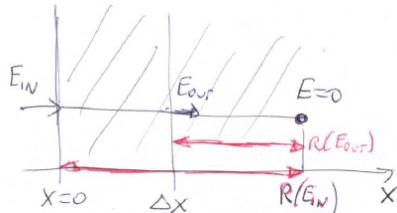
Nota: le energie indicate sono quelle cinetiche.

Il calcolo dell'energia residua dopo uno spessore di materiale

Un problema tipico è quello di calcolare l'energia cinetica residua dopo l'attraversamento di uno spessore Δx di materiale. Questo problema può essere risolto semplicemente se è nota, in forma grafica o tabellare, la funzione $R(E)$.

Se l'energia della particella all'ingresso del materiale vale E_o e la sua energia dopo lo

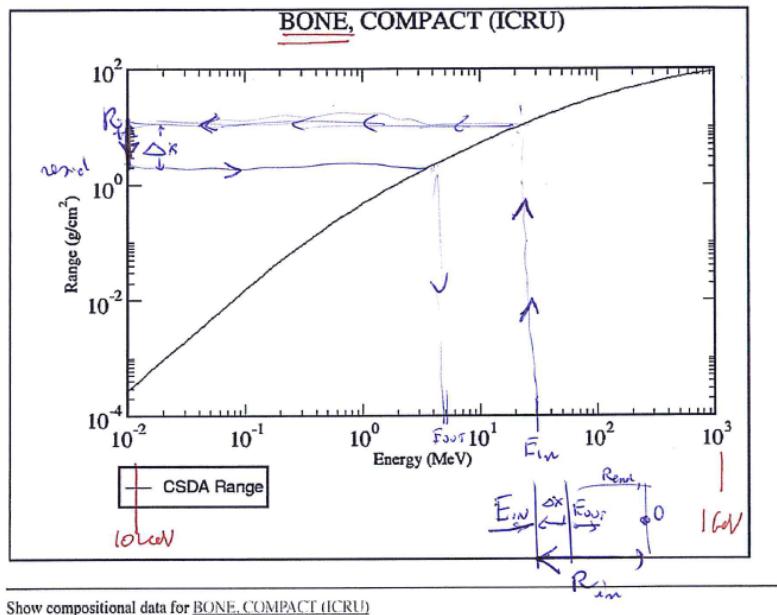
$$\text{spessore } \Delta x \text{ vale } E_{out}, \text{ si ha la ovvia relazione } R(E_o) = R(E_{out}) + \Delta x.$$



Allora è sufficiente procedere con i seguenti passi in sequenza, come mostrato in forma grafica nella figura seguente, inerente elettroni di 30 MeV su tessuto osseo:

- 1) determinare $R(E_o)$ dalla curva/tabella range-energia;
- 2) calcolare $R(E_{out}) = R(E_o) - \Delta x$;
- 3) determinare E_{out} dalla curva/tabella range-energia.

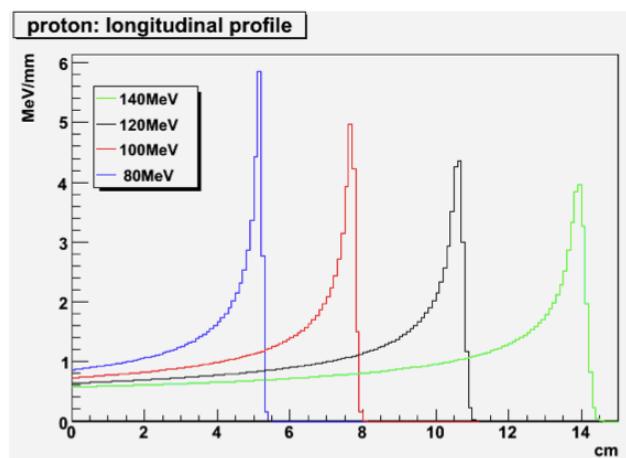
ESTAR : Stopping Power and Range Tables for Electrons



I rilasci di energia nel materiale ed il "picco di Bragg"

Quando una particella carica è rallentata in un materiale fino ad arrestarsi, la distribuzione dell'energia depositata nel materiale lungo la traiettoria ha una caratteristica molto importante, che deriva dalla forma dello stopping power in funzione dell'energia.

Se la particella entra nel materiale con una energia superiore a quella del "minimo di ionizzazione" ($\beta\gamma > 3.5$), l'energia depositata per unità di lunghezza decresce e parimenti decresce l'energia della particella finché non si raggiunge il minimo. Proseguendo nel materiale la particella continua a perdere energia, ma la perdita per unità di lunghezza aumenta come β^{-2} e quindi in prossimità del punto di arresto si avrà un massimo, chiamato "**picco di Bragg**". Se la particella avesse inizialmente una energia minore ($\beta\gamma < 3.5$) a quella del "minimo di ionizzazione", il minimo dell'energia depositata non sarebbe visibile. È questo il caso della figura seguente, in cui sono riportati, per diversi valori dell'energia cinetica iniziale, i profili di energia depositata in acqua (materiale di cui è maggiormente composto il corpo umano) da protoni: il picco di Bragg è chiaramente visibile,



Capitolo 14

**Scattering coulombiano multiplo

Nei due capitoli precedenti si è calcolata la perdita di energia per unità di lunghezza di una particella di massa M e carica ze che si muove in un mezzo, in questa sezione studieremo l'angolo di deflessione della particella rispetto alla sua traiettoria originale indotto dagli urti con i costituenti del mezzo. Ai fini di questo calcolo gli urti con gli elettroni saranno ovviamente trascurabili rispetto agli urti con i nuclei, che producono deflessioni medie molto maggiori.

Iniziamo con il definire i dettagli di quello che si vuole studiare: supponiamo di avere una particella che inizialmente si muove lungo l'asse \hat{z} e che a causa di un urto viene deflessa lungo una traiettoria di versore $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. L'angolo di deflessione è quello che è stato indicato con θ e che è compreso tra 0 e π , tuttavia può in alcuni casi essere conveniente considerare anche gli angoli di deflessione della traiettoria proiettata sui piani $\hat{x}\hat{z}$ e $\hat{y}\hat{z}$, che indicheremo rispettivamente con θ_x e θ_y , che sono definiti in $[-\pi, \pi]$ e che sono legati a θ e ϕ dalle relazioni

$$\begin{aligned} \sin \theta_x &= \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta}}, & \cos \theta_x &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta}} \\ \sin \theta_y &= \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta}}, & \cos \theta_y &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta}}. \end{aligned} \quad (14.0.1)$$

A causa della simmetria cilindrica attorno all'asse \hat{z} del problema si avrà in media (media sugli urti) $\langle \theta_x \rangle = \langle \theta_y \rangle = 0$, mentre si ha $\langle \theta \rangle > 0$ per costruzione poiché $0 \leq \theta \leq \pi$.

Studieremo solo il caso in cui l'angolo di deflessione dovuto ad un singolo urto è molto piccolo $\theta \ll 1$, poichè questo è il caso tipico se la particella incidente ha energia sufficientemente grande. In questo caso anche θ_x e θ_y sono molto piccoli e si ha semplicemente $\theta_x \simeq \theta \cos \phi$ e $\theta_y \simeq \theta \sin \phi$, da cui segue in particolare

$$\theta^2 \simeq \theta_x^2 + \theta_y^2. \quad (14.0.2)$$

A causa della simmetria cilindrica si ha $\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_y^2 \rangle$ e quindi $\langle \theta^2 \rangle = 2\langle \theta_x^2 \rangle$.

Supponiamo ora che ci siano stati due urti, che la direzione di moto della particella iniziale prima del primo urto fosse \hat{n}_0 , per poi diventare \hat{n}_1 dopo il primo urto ed infine \hat{n}_2 dopo il secondo. Se indichiamo con Θ l'angolo di deflessione totale e con $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$ i due angoli di deflessione dei singoli urti si hanno allora le relazioni

$$\cos \Theta = \hat{n}_0 \cdot \hat{n}_2, \quad \cos \theta^{(1)} = \hat{n}_0 \cdot \hat{n}_1, \quad \cos \theta^{(2)} = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2, \quad (14.0.3)$$

inoltre si ha inoltre la semplice relazione algebrica

$$\hat{n}_0 \cdot (\hat{n}_2 - \hat{n}_0) = (\hat{n}_0 - \hat{n}_1) \cdot (\hat{n}_2 - \hat{n}_1) + \hat{n}_1 \cdot (\hat{n}_2 - \hat{n}_1) + \hat{n}_0 \cdot (\hat{n}_1 - \hat{n}_0). \quad (14.0.4)$$

Nel limite di piccoli angoli di deflessione tutti i termini a secondo membro sono genericamente dello stesso ordine (quadratico negli angoli di deflessione), in quanto $|\hat{n}_1 - \hat{n}_0| \approx \sin \theta^{(1)}$, $|\hat{n}_2 - \hat{n}_1| \approx \sin \theta^{(2)}$ e $\hat{n}_1 - \hat{n}_0$ e $\hat{n}_2 - \hat{n}_1$ possono essere approssimativamente paralleli. Tuttavia questo non è

più vero se si effettua la media sugli urti: usando la simmetria cilindrica del problema si vede che $\langle \hat{n}_1 - \hat{n}_0 \rangle$ (media sulle direzioni di uscita \hat{n}_1) è diretto lungo \hat{n}_0 (con verso discorde) e intensità $(1 - \cos \theta^{(1)})$. Supponendo che due urti consecutivi siano indipendenti si vede quindi che il primo termine a secondo membro può essere trascurato, ottenendo infine $\langle \Theta^2 \rangle = \langle (\theta^{(1)})^2 \rangle + \langle (\theta^{(2)})^2 \rangle$, relazione che può essere semplicemente generalizzata al caso di N urti:

$$\langle \Theta^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle (\theta^{(i)})^2 \rangle . \quad (14.0.5)$$

Nel limite $\theta \ll 1$ la sezione d'urto Rutherford per collisione di una particella di carica ze su di un nucleo di carica Ze si riduce alla forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{4p^2v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \simeq \frac{\ell^2}{\theta^4} \quad (14.0.6)$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\ell = \frac{2zZr_e(m_ec^2)}{pv} , \quad (14.0.7)$$

e $r_e = e^2/(m_ec^2)$ è il raggio classico dell'elettrone. Con lo stesso livello di approssimazione abbiamo anche la seguente relazione tra il parametro di impatto e l'angolo di scattering

$$b = \frac{zZe^2}{vp} \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \simeq \frac{\ell}{\theta} . \quad (14.0.8)$$

Ad ogni singolo urto si può associare la deflessione quadratica media

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\sigma_{ms}} , \quad \sigma_{ms} = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega , \quad (14.0.9)$$

dove σ_{ms} è una sezione d'urto effettiva di multiplo scattering. La sezione d'urto totale coulombiana che si otterrebbe usando $\theta_{min} = 0$ è divergente, tuttavia in questo modo non si terrebbe conto del fatto che gli elettroni schermano la carica nucleare quando il parametro di impatto è più grande del raggio atomico, effetto che pone un cut-off sui piccoli angoli. Poiché stiamo considerando solo gli scattering a piccolo angolo si può approssimare $d\Omega \simeq 2\pi\theta d\theta$ e quindi si ha

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \simeq 2\pi \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\ell^2}{\theta} d\theta = 2\pi\ell^2 \log \frac{\theta_{max}}{\theta_{min}} . \quad (14.0.10)$$

Si è appena visto che $b \simeq \ell/\theta$ e si può quindi usare $\theta_{max}/\theta_{min} \simeq b_{max}/b_{min}$, con $b_{max} \simeq a \simeq 1.4 \frac{\hbar^2}{m_e^2} Z^{-1/3}$ raggio atomico e $b_{min} \simeq r_0 A^{1/3}$ (con $r_0 \simeq 1.4$ fm) raggio nucleare, ottenendo l'espressione

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{2\pi\ell^2}{\sigma_{ms}} \log \left(\frac{1.4 \times 0.53 \times 10^{-10} Z^{-1/3}}{1.4 \times 10^{-15} A^{1/3}} \right) \simeq \frac{4\pi\ell^2}{\sigma_{ms}} \log \left(\frac{205}{Z^{1/3}} \right) , \quad (14.0.11)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $A \simeq 2Z$.

Se supponiamo ora che la particella attraversi uno spessore L di un materiale con densità numerica n , usando la relazione Eq. (14.0.5) abbiamo per l'angolo di deflessione totale Θ la relazione

$$\langle \Theta^2 \rangle = N_{urti} \langle \theta^2 \rangle = nL\sigma_{ms} \langle \theta^2 \rangle = nL4\pi\ell^2 \log \left(\frac{205}{Z^{1/3}} \right) , \quad (14.0.12)$$

che scritta più esplicitamente ed usando $n = \rho N_A / A(g)$ diventa

$$\langle \Theta^2 \rangle = 16\pi L \frac{\rho N_A}{A(g)} z^2 Z^2 \frac{r_e^2 (m_e c^2)^2}{(pv)^2} \log \left(\frac{205}{Z^{1/3}} \right) . \quad (14.0.13)$$

Ricordando l'equazione per la lunghezza di radiazione elettronica trovata in precedenza, Eq. (12.3.6) con $M = m_e$,

$$\frac{1}{X_0^{(e)}} = \frac{16}{3} \frac{\rho N_A}{A(g)} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \right), \quad (14.0.14)$$

si vede che si ha approssimativamente

$$\langle \Theta^2 \rangle \simeq \frac{3\pi(m_e c^2)^2}{\alpha} z^2 \frac{L}{X_0^{(e)}} \frac{1}{(pv)^2} \quad (14.0.15)$$

da cui si ottiene

$$\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} \simeq 13 \text{ MeV} \frac{z}{pv} \sqrt{\frac{2L}{X_0^{(e)}}}. \quad (14.0.16)$$

L'espressione completa che si otterrebbe con calcoli più accurati è ([22] §33.3)

$$\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} \simeq 13.6 \text{ MeV} \frac{z}{pv} \sqrt{\frac{2L}{X_0^{(e)}}} \left[1 + 0.038 \log \left(\frac{z^2 L}{X_0^{(e)} \beta^2} \right) \right]. \quad (14.0.17)$$

Come nel caso di un singolo urto, si possono introdurre le proiezioni dell'angolo di deflessione totale Θ sui due piani $\hat{x}\hat{z}$ e $\hat{y}\hat{z}$, che indicheremo con Θ_x e Θ_y , ed analogamente al caso di un singolo urto si hanno le relazioni

$$\langle \Theta_x \rangle = \langle \Theta_y \rangle = 0, \quad \langle \Theta_x^2 \rangle = \langle \Theta_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \Theta^2 \rangle \equiv \theta_0^2. \quad (14.0.18)$$

Se $\theta_0 \ll \pi$ la funzione di distribuzione di Θ_x (che è uguale a quella di Θ_y) può essere approssimata da una distribuzione gaussiana

$$P(\Theta_x) \simeq \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Theta_x^2}{2\theta_0^2}}, \quad (14.0.19)$$

che soddisfa i "requisiti base" (ovviamente si ha $-\pi \leq \Theta_x \leq \pi$, ma se $\theta_0 \ll \pi$ si commette solo un piccolo errore estendendo Θ_x a tutto l'asse reale)

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta_x) d\Theta_x = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x P(\Theta_x) d\Theta_x = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x^2 P(\Theta_x) d\Theta_x = \theta_0^2, \quad (14.0.20)$$

in cui l'ultima equazione segue dalla relazione generale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \left(\sqrt{\pi} a^{-1/2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \quad (14.0.21)$$

usando $a = 1/(2\theta_0^2)$. Utilizzando le regole di trasformazione delle funzioni di distribuzione si può inoltre mostrare che la funzione di distribuzione di Θ è della forma (in cui si assume $0 \leq \Theta < \infty$)

$$\mathcal{P}(\Theta) \simeq \frac{\Theta}{\theta_0^2} e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}}. \quad (14.0.22)$$

Questa distribuzione soddisfa i requisiti base

$$\int_0^{\infty} \mathcal{P}(\Theta) d\Theta = \int_0^{\infty} \frac{\Theta}{\theta_0^2} e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}} d\Theta = -\int_0^{\infty} \frac{d}{d\Theta} \left(e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}} \right) d\Theta = 1 \quad (14.0.23)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Theta^2 \mathcal{P}(\Theta) d\Theta &\stackrel{(\Theta=\theta_0 x)}{=} \theta_0^2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx \stackrel{(x^2=2y)}{=} 2\theta_0^2 \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \\ &= 2\theta_0^2 (-ye^{-y})_0^{\infty} + 2\theta_0^2 \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 2\theta_0^2; \end{aligned} \quad (14.0.24)$$

usando Eq. (14.0.21) si ha inoltre

$$\int_0^\infty \Theta \mathcal{P}(\Theta) d\Theta \stackrel{(\Theta=\theta_0 x)}{=} \frac{\theta_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \theta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} . \quad (14.0.25)$$

Per arrivare a Eq. (14.0.22) si può prima di tutto calcolare la funzione di distribuzione della variabile $X = \Theta_x^2$ a partire da Eq. (14.0.19), ottenendo

$$P_X(X) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{X}} e^{-\frac{X}{2\theta_0^2}} , \quad (14.0.26)$$

in cui un fattore $\times 2$ è dovuto al fatto che due diversi valori di Θ_x danno lo stesso valore di X . A questo punto possiamo calcolare la funzione di distribuzione della variabile $Z = X + Y$, dove $Z = \Theta^2$ e $Y = \Theta_y^2$. Usando il fatto che X e Y hanno la stessa funzione di distribuzione si trova

$$P_Z(Z) = \int_0^Z P_X(X) P_X(Z-X) dX = \frac{1}{2\pi\theta_0^2} e^{-\frac{Z}{2\theta_0^2}} \int_0^Z \frac{1}{\sqrt{X(Z-X)}} dX \quad (14.0.27)$$

e con il cambio di variabile $X = Z\xi^2$ si ha

$$\int_0^Z \frac{1}{\sqrt{X(Z-X)}} dX = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 2 \arcsin \xi|_0^1 = \pi , \quad (14.0.28)$$

quindi

$$P_Z(Z) = \frac{1}{2\theta_0^2} e^{-\frac{Z}{2\theta_0^2}} , \quad (14.0.29)$$

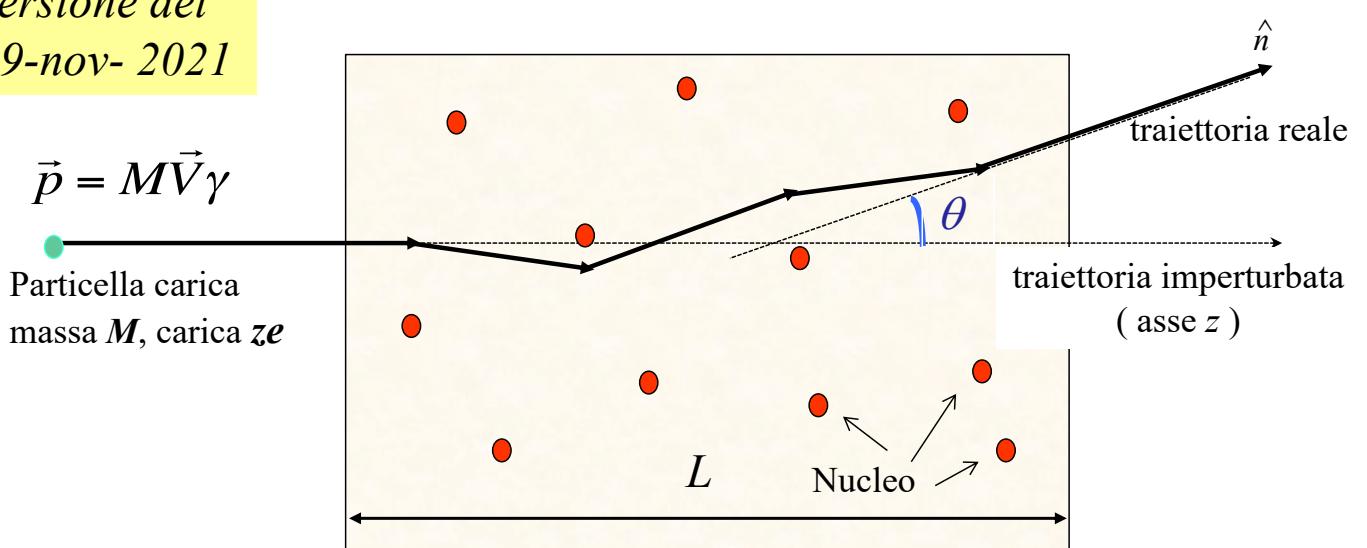
che per $\theta_0 = 1$ non è altro che una distribuzione χ^2 con due gradi di libertà. Passando ora alla variabile $\Theta = \sqrt{Z}$ si ottiene infine

$$\mathcal{P}(\Theta) \simeq \frac{\Theta}{\theta_0^2} e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}} . \quad (14.0.30)$$

6.4 Lo scattering multiplo coulombiano

A.A. 2021-22 Fisica 3 (versione 20 novembre 2021)

versione del
19-nov- 2021



Multiplo scattering: deflessione di una particella veloce (massa M , carica ze) in un mezzo di spessore L . È dovuta ad interazioni multiple ed elastiche nei campi coulombiani dei nuclei (ognuno di carica Ze).

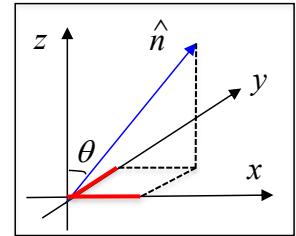
definizioni degli angoli ed ipotesi

θ angolo rispetto all'asse z : $0 < \theta << 1$

θ_x (in rosso in figura) proiezione di θ su x

θ_y (in rosso in figura) proiezione di θ su y

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \phi \\ \sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \vartheta \cos \phi \\ \vartheta \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vartheta^2 = \vartheta_x^2 + \vartheta_y^2$$



Ipotesi: $\theta << 1$ (piccole deflessioni per una particella veloce)

Ipotesi: distribuzione gaussiana per θ_x e θ_y con r.m.s. θ_0 ($<< 1$, parametro da calcolare utilizzando il modello basato sullo scattering Rutherford) (*). **Nota:** la condizione $\theta_0 << 1$ permetterà nel seguito di approssimare i limiti di integrazione su θ_x e θ_y con $-\infty$ e $+\infty$.

$$\frac{dP}{d\vartheta_x} = \frac{1}{\vartheta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\vartheta_x^2}{2\vartheta_0^2}}$$

$$\frac{dP}{d\vartheta_y} = \frac{1}{\vartheta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\vartheta_y^2}{2\vartheta_0^2}}$$

→

$$\langle \vartheta_x \rangle = \langle \vartheta_y \rangle = 0$$

$$\sqrt{\langle \vartheta_x^2 \rangle} = \sqrt{\langle \vartheta_y^2 \rangle} = \vartheta_0$$

(*) Per “grandi” angoli ($\sim 2\%$ dei casi) occorre invece utilizzare la **distribuzione di Molière.** 2

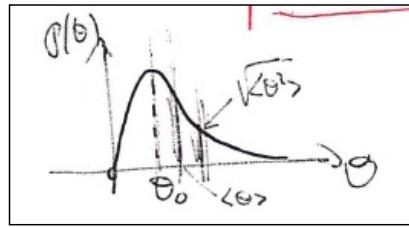
distribuzione dell'angolo di scattering multiplo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\vartheta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\vartheta_x^2}{2\vartheta_0^2}} \frac{1}{\vartheta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\vartheta_y^2}{2\vartheta_0^2}} d\vartheta_x d\vartheta_y = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\vartheta_0^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}} \vartheta d\vartheta d\phi = \int_0^{\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta_0^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}} d\vartheta$$

da cui

$$P(\vartheta) = \frac{\vartheta}{\vartheta_0^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}}$$

Notiamo che:



$$\langle \vartheta \rangle = \int_0^{\infty} \vartheta P(\vartheta) d\vartheta = \int_0^{\infty} \frac{\vartheta^2}{\vartheta_0^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}} d\vartheta = \vartheta_0 \int_0^{\infty} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \frac{\vartheta_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \vartheta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \int_0^{\infty} \vartheta^2 P(\vartheta) d\vartheta = \int_0^{\infty} \frac{\vartheta^3}{\vartheta_0^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}} d\vartheta = \int_0^{\infty} \frac{\vartheta^2}{\vartheta_0^2} e^{-\frac{\vartheta^2}{2\vartheta_0^2}} d\frac{\vartheta^2}{2} = 2\vartheta_0^2 \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = 2\vartheta_0^2$$

$$\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = \sqrt{\langle \vartheta_x^2 \rangle + \langle \vartheta_y^2 \rangle} = \vartheta_0 \sqrt{2}$$

$$\sigma_{\vartheta} = \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle - \langle \vartheta \rangle^2} = \vartheta_0 \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} = 0.65\vartheta_0$$

questo è rilevante per la dispersione finale

angolo quadratico medio per singolo urto

Nota: questo calcolo è stato effettuato il 12nov2021 come applicazione della sezione d'urto Mott

Dalla sezione d'urto **Mott** :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZ\alpha\hbar c}{2PV} \right)^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \approx \left(\frac{zZ\alpha\hbar c}{2PV} \right)^2 \frac{1}{\frac{\vartheta^4}{16}} = \left(\frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV} \right)^2 \frac{1}{\vartheta^4} \Rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\ell^2}{\vartheta^4} \quad \text{con} \quad \ell = \frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV}$$

L'angolo quadratico medio per un urto è:

$$\langle \vartheta_{urto}^2 \rangle = \frac{\int_{\vartheta_{min}}^{\vartheta_{max}} \vartheta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int_{\vartheta_{min}}^{\vartheta_{max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\int_{\vartheta_{min}}^{\vartheta_{max}} \vartheta^2 \frac{\ell^2}{\vartheta^4} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{\sigma_{ms}} = \frac{2\pi\ell^2}{\sigma_{ms}} \ln \frac{\vartheta_{max}}{\vartheta_{min}} \quad \text{con} \quad \sigma_{ms} = \int_{\vartheta_{min}}^{\vartheta_{max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega .$$

Utilizzando la relazione

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{zZ\alpha\hbar c}{PV} \frac{1}{b} \Rightarrow \vartheta \approx \frac{\ell}{b} \quad \text{con} \quad b_{min} = R_{nucleo} = r_0 A^{1/3}$$

$$b_{max} = R_{atomo} = 1.4 a_0 Z^{-1/3}$$

ed anche $A \sim 2Z$:

$$\ln \frac{\vartheta_{max}}{\vartheta_{min}} = \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} = \ln \frac{1.4 a_0 Z^{-1/3}}{r_0 A^{1/3}} = \ln \frac{1.4 \cdot 0.53 \cdot 10^5 fm}{1.4 fm (ZA)^{1/3}} \approx \ln \frac{5.3 \cdot 10^4}{\sqrt[3]{2} Z^{2/3}} = 2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}}$$

$$\langle \vartheta_{urto}^2 \rangle \approx \frac{4\pi\ell^2}{\sigma_{ms}} \ln \frac{205}{Z^{1/3}}$$

angolo quadratico medio

L'angolo quadratico medio si ottiene sommando in quadratura su tutti gli urti :

$$\langle \vartheta^2 \rangle = N_{urti} \langle \vartheta_{urto}^2 \rangle = nL\sigma_{ms} \langle \vartheta_{urto}^2 \rangle = 4\pi nL\ell^2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}} .$$

Ricordando la definizione di

lunghezza di radiazione data dalla

formula di Tsai (che approssimiamo):

$$X_0 = \frac{1}{4Z^2n\alpha r_e^2 \left[\ln \frac{184}{Z^{1/3}} - f(Z) + \frac{L}{Z} \right]} \approx \frac{1}{4Z^2n\alpha r_e^2 \ln \frac{184}{Z^{1/3}}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} &= \sqrt{\frac{X_0}{X_0} 4\pi n L \ell^2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}}} = \ell \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{4\pi n \ln \frac{205}{Z^{1/3}}}{4Z^2 n \alpha r_e^2 \ln \frac{184}{Z^{1/3}}}} \approx \ell \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{\pi}{Z^2 \alpha r_e^2}} \Rightarrow \\ \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} &= \frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV} \frac{1}{r_e} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{\pi}{Z^2 \alpha}} = \frac{2z m_e c^2}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cong z\sqrt{2} \frac{14.6 MeV}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \end{aligned}$$

Un calcolo più preciso darebbe il valore del PDG:

$$\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = z\sqrt{2} \frac{13.6 MeV}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

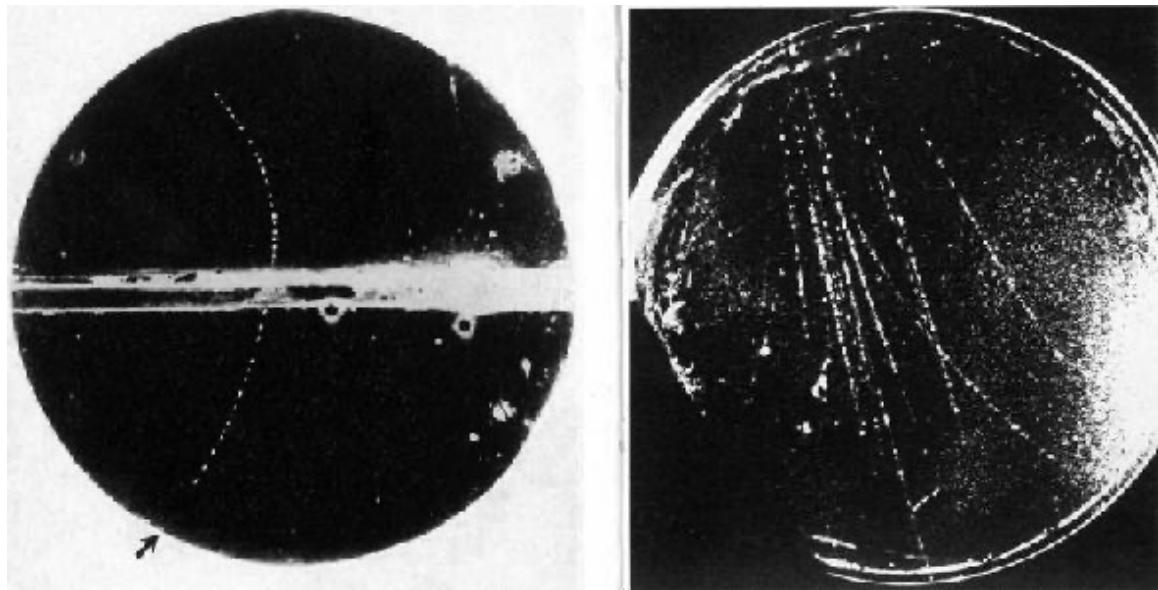
$$\vartheta_0 = z \frac{13.6 MeV}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}}$$

Capitolo 15

**Esempi finali

15.1 **La scoperta del positrone

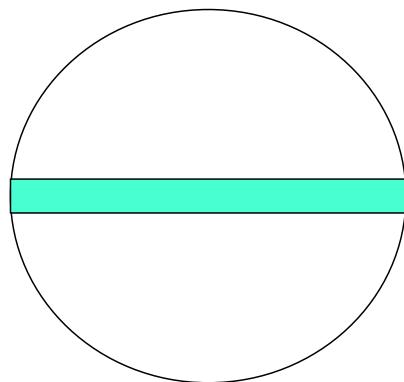
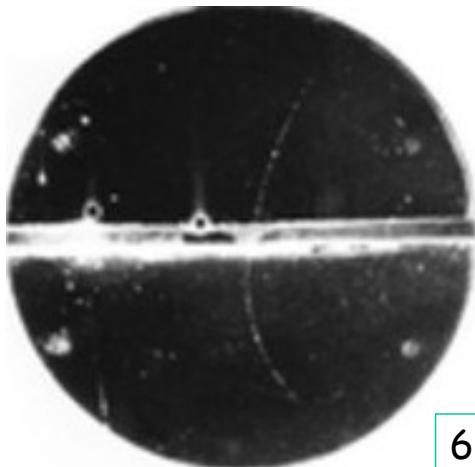
Fisica 3 - A.A. 2021-2
parte 6.5 (versione 20 novembre 2021)
Osservazione del positrone (Anderson, 1932)



Creazione di coppia e^+e^-



Osservazione del positrone (Anderson, 1932)



6 mm Pb $\sim 1 X_0$

BxR (in alto = in ingresso) = 0.210 Tesla-m
BxR (in basso = in uscita) = 0.075 Tesla-m

$$P(MeV/c) = qBR = 300 \cdot B(Tesla) \cdot R(metri)$$
$$P(\text{ingresso}) = 63 MeV/c$$
$$P(\text{uscita}) = 22.5 MeV/c$$

Ipotesi protone: non relativistico \Rightarrow energia cinetica = $P^2 / 2M_p = 2.1 MeV$
 \Rightarrow non puo' passare il Piombo \Rightarrow non e' protone

Ipotesi positrone: ultrarelativistico \Rightarrow perde circa 7 MeV per ionizzazione e l'energia si riduce di un fattore 1/e per irraggiamento \Rightarrow compatibile con energia di uscita 22.5 MeV \Rightarrow e' un positrone

15.2 **La scoperta dell'antiprotone

Observation of Antiprotons*

OWEN CHAMBERLAIN, EMILIO SEGRÈ, CLYDE WIEGAND,
AND THOMAS YPSILANTIS

*Radiation Laboratory, Department of Physics, University of
California, Berkeley, California*

(Received October 24, 1955)

ONE of the striking features of Dirac's theory of the electron was the appearance of solutions to his equations which required the existence of an anti-particle, later identified as the positron.

The extension of the Dirac theory to the proton requires the existence of an antiproton, a particle which bears to the proton the same relationship as the positron to the electron. However, until experimental proof of the existence of the antiproton was obtained, it might be questioned whether a proton is a Dirac particle in the same sense as is the electron. For instance, the anomalous magnetic moment of the proton indicates that the simple Dirac equation does not give a complete description of the proton.

The experimental demonstration of the existence of antiprotons was thus one of the objects considered in the planning of the Bevatron. The minimum laboratory kinetic energy for the formation of an antiproton in a nucleon-nucleon collision is 5.6 Bev. If the target nucleon is in a nucleus and has some momentum, the

TABLE I. Characteristics of components of the apparatus.

S ₁ , S ₂	Plastic scintillator counters 2.25 in. diameter by 0.62 in. thick.
C ₁	Čerenkov counter of fluorochemical O-75, (CsF ₁₀ O); $\mu D = 1.276$; $\rho = 1.76 \text{ g cm}^{-3}$. Diameter 3 in.; thickness 2 in.
C ₂	Čerenkov counter of fused quartz; $\mu D = 1.458$; $\rho = 2.2 \text{ g cm}^{-3}$. Diameter 2.38 in.; length 2.5 in.
Q ₁ , Q ₂	Quadrupole focusing magnets: Focal length 119 in.; aperture 4 in.
M ₁ , M ₂	Deflecting magnets 60 in. long. Aperture 12 in. by 4 in. $B \approx 13,700$ gauss.

threshold is lowered. Assuming a Fermi energy of 25 Mev, one may calculate that the threshold for formation of a proton-antiproton pair is approximately 4.3 Bev. Another, two-step process that has been considered by Feldman¹ has an even lower threshold.

There have been several experimental events²⁻⁴ recorded in cosmic-ray investigations which might be due to antiprotons, although no sure conclusion can be drawn from them at present.

With this background of information we have performed an experiment directed to the production and detection of the antiproton. It is based upon the determination of the mass of negative particles originating at the Bevatron target. This determination depends on the simultaneous measurement of their momentum and velocity. Since the antiprotons must be selected from a heavy background of pions it has been necessary to measure the velocity by more than one method. To date, sixty antiprotons have been detected.

Figure 1 shows a schematic diagram of the apparatus. The Bevatron proton beam impinges on a copper target and negative particles scattered in the forward direction with momentum 1.19 Bev/c describe an orbit as shown in the figure. These particles are deflected 21° by the field of the Bevatron, and an additional 32° by magnet M₁. With the aid of the quadrupole focusing magnet Q₁ (consisting of 3 consecutive quadrupole magnets) these particles are brought to a focus at counter S₁, the first scintillation counter. After passing through counter S₁, the particles are again focused (by Q₂), and deflected (by M₂) through an additional angle of 34°, so that they are again brought to a focus at counter S₂.

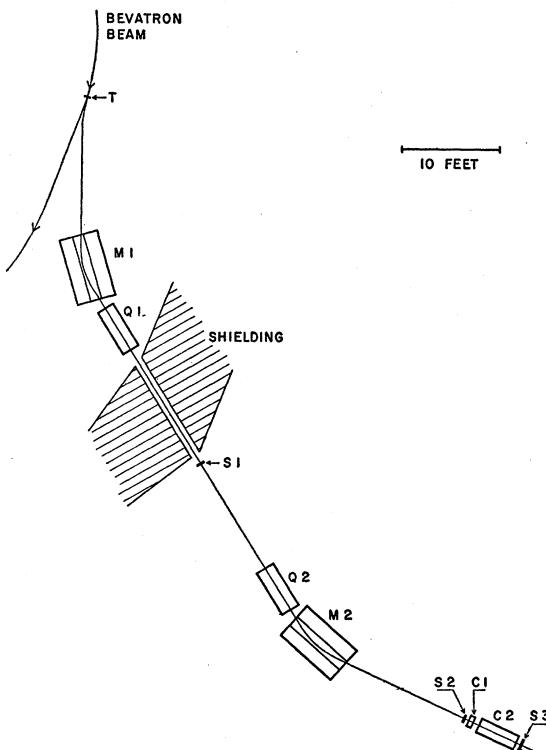


FIG. 1. Diagram of experimental arrangement.
For details see Table I.

The particles focused at S₂ all have the same momentum within 2 percent.

Counters S₁, S₂, and S₃ are ordinary scintillation counters. Counters C₁ and C₂ are Čerenkov counters. Proton-mass particles of momentum 1.19 Bev/c incident on counter S₂ have $v/c = \beta = 0.78$. Ionization energy loss in traversing counters S₂, C₁, and C₂ reduces the average velocity of such particles to $\beta = 0.765$. Counter C₁ detects all charged particles for which $\beta > 0.79$. C₂ is a Čerenkov counter of special design that counts only particles in a narrow velocity interval, $0.75 < \beta < 0.78$. This counter will be described in a separate publication. In principle, it is similar to

some of the counters described by Marshall.⁵ The requirement that a particle be counted in this counter represents one of the determinations of velocity of the particle.

The velocity of the particles counted has also been determined by another method, namely by observing the time of flight between counters S_1 and S_2 , separated by 40 ft. On the basis of time-of-flight measurement the separation of π^- mesons from proton-mass particles is quite feasible. Mesons of momentum 1.19 Bev/c have $\beta=0.99$, while for proton-mass particles of the same momentum $\beta=0.78$. Their respective flight times over the 40-ft distance between S_1 and S_2 are 40 and 51 millimicroseconds.

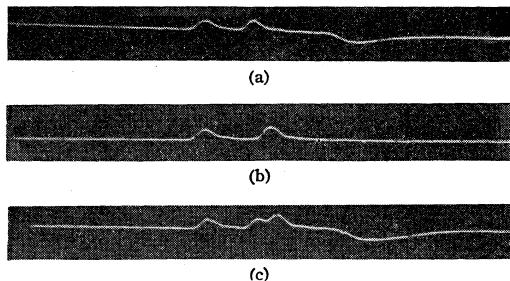


FIG. 2. Oscilloscope traces showing from left to right pulses from S_1 , S_2 , and C_1 . (a) meson, (b) antiproton, (c) accidental event.

The beam that traverses the apparatus consists overwhelmingly of π^- mesons. One of the main difficulties of the experiment has been the selection of a very few antiprotons from the huge pion background. This has been accomplished by requiring counters S_1 , S_2 , C_2 , and S_3 to count in coincidence. Coincidence counts in S_1 and S_2 indicate that a particle of momentum 1.19 Bev/c has traversed the system with a flight time of approximately 51 millimicroseconds. The further requirement of a coincidence in C_2 establishes that the particle had a velocity in the interval $0.75 < \beta < 0.78$. The latter requirement of a count in C_2 represents a measure of the velocity of the particle which is essentially independent of the cruder electronic time-of-flight measurement. Finally, a coincident count in counter S_3 was required in order to insure that the particle traversed the quartz radiator in C_2 along the axis and suffered no large-angle scattering.

As outlined thus far, the apparatus has some shortcomings in the determination of velocity. In the first place, accidental coincidences of S_1 and S_2 cause some mesons to count, even though a single meson would be completely excluded because its flight time would be too short. Secondly, the Čerenkov counter C_2 could be actuated by a meson (for which $\beta=0.99$) if the meson suffered a nuclear scattering in the radiator of the counter. About 3 percent of the mesons, which ideally should not be detected in C_2 , are counted in this

manner. Both of these deficiencies have been eliminated by the insertion of the guard counter C_1 , which records all particles of $\beta>0.79$. A pulse from C_1 indicates a particle (meson) moving too fast to be an antiproton of the selected momentum and indicates that this event should be rejected. In Table I, the characteristics of the components of the apparatus are summarized.

The pulses from counters S_1 , S_2 , and C_1 were displayed on an oscilloscope trace and photographically recorded. From the separation of pulses from S_1 and S_2 the flight time of the particle could be measured with an accuracy of 1 millimicrosecond, and the pulse in the guard counter C_1 could be measured. Figure 2 shows three oscilloscope traces, with the pulses from S_1 , S_2 , and C_1 appearing in that order. The first trace (a) shows the pulses due to a meson passing through the system. It was recorded while the electronic circuits were adjusted for meson time of flight for calibration purposes. The second trace, Fig. 2(b), shows the pulses resulting from an antiproton. The separation of pulses from S_1 and S_2 indicates the correct antiproton time of

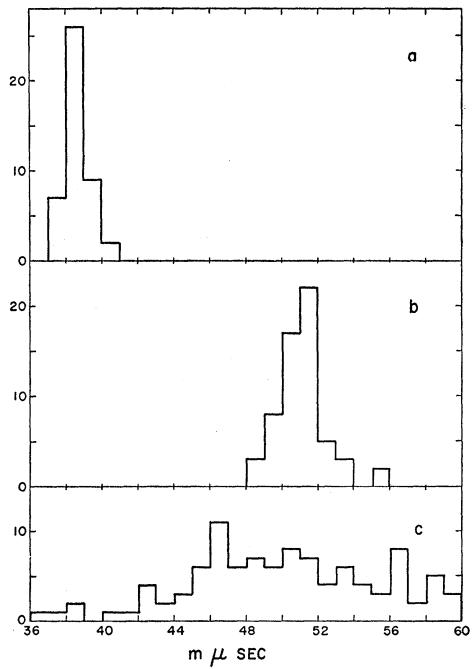


FIG. 3. (a) Histogram of meson flight times used for calibration. (b) Histogram of antiproton flight times. (c) Apparent flight times of a representative group of accidental coincidences. Times of flight are in units of 10^{-9} sec. The ordinates show the number of events in each 10^{-10} -sec intervals.

flight, and the absence of the C_1 pulse shows that no meson passed through C_1 . The third trace, Fig. 2(c), shows the accidental coincidence of two mesons with a difference of time such as to register in the electronic circuits. Either the presence of a pulse from C_2 or the presence of multiple pulses from S_1 or S_2 would be

sufficient to identify the trace as due to one or more mesons.

An over-all test of the apparatus was obtained by changing the position of the target in the Bevatron, inverting the magnetic fields in $M1$, $M2$, $Q1$, and $Q2$, and detecting positive protons.

Each oscilloscope sweep of the type shown in Fig. 2 can be used to make an approximate mass measurement for each particle, since the magnetic fields determine the momentum of the particle and the separation of pulses $S1$ and $S2$ determine the time of flight. For protons of our selected momentum the mass is measured to about 10 percent, using this method only.

The observed times of flight for antiprotons are made more meaningful by the fact that the electronic gate time is considerably longer than the spread of observed antiproton flight times. The electronic equipment accepts events that are within ± 6 millimicroseconds of the right flight time for antiprotons, while the actual antiproton traces recorded show a grouping of flight times to ± 1 or 2 millimicroseconds. Figure 3(a) shows a histogram of meson flight times; Fig. 3(b) shows a similar histogram of antiproton flight times. Accidental coincidences account for many of the sweeps (about $\frac{2}{3}$ of the sweeps) during the runs designed to detect antiprotons. A histogram of the apparent flight times of accidental coincidences is shown in Fig. 3(c). It will be noticed that the accidental coincidences do not show the close grouping of flight times characteristic of the antiproton or meson flight times.

Mass measurement.—A further test of the equipment has been made by adjusting the system for particles of

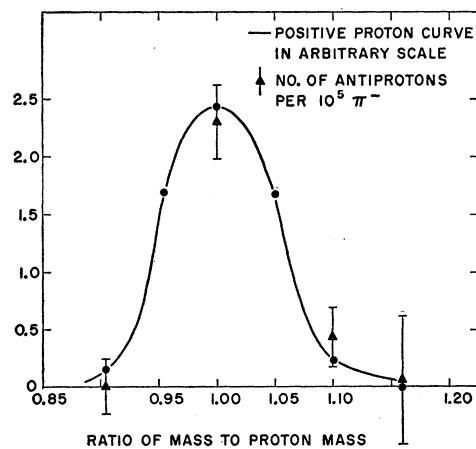


FIG. 4. The solid curve represents the mass resolution of the apparatus as obtained with protons. Also shown are the experimental points obtained with antiprotons.

different mass, in the region of the proton mass. A test for the reality of the newly detected negative particles is that there should be a peak of intensity at the proton mass, with small background at adjacent mass settings. By changing only the magnetic field values of $M1$, $M2$,

$Q1$, and $Q2$, particles of different momentum may be chosen. Providing the velocity selection is left completely unchanged, the apparatus is then set for particles of a different mass. These tests have been made for both positive and negative particles in the vicinity of the proton mass. Figure 4 shows the curve obtained using positive protons, which is the mass resolution

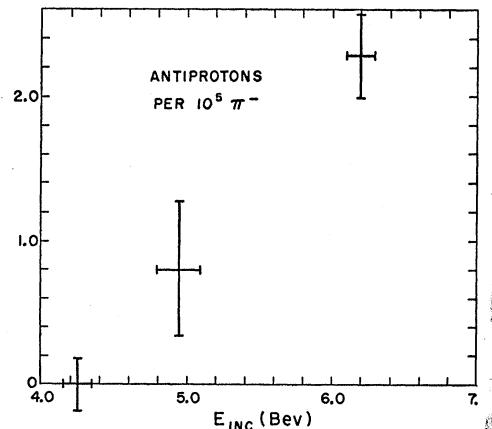


FIG. 5. Excitation curve for the production of antiprotons relative to meson production as a function of Bevatron beam energy.

curve of the instrument. Also shown in Fig. 4 are the experimental points obtained with antiprotons. The observations show the existence of a peak of intensity at the proton mass, with no evidence of background when the instrument is set for masses appreciably greater or smaller than the proton mass. This test is considered one of the most important for the establishment of the reality of these observations, since background, if present, could be expected to appear at any mass setting of the instrument. The peak at proton mass may further be used to say that the new particle has a mass within 5 percent of that of the proton mass. It is mainly on this basis that the new particles have been identified as antiprotons.

Excitation function.—A very rough determination has been made of the dependence of antiproton production cross section on the energy of the Bevatron proton beam. A more exact determination will be attempted in the future, but up to the present it has not been possible to monitor reliably the amount of beam actually striking the target. Furthermore, the solid angle of acceptance of the detection apparatus may not be independent of Bevatron energy since the shape of the orbit on which the antiprotons emerge depends somewhat on the magnetic field strength within the Bevatron magnet. It has, however, been possible to measure the ratio of antiprotons to mesons (both at momentum 1.19 Bev/c) emitted in the forward direction from the target as a function of Bevatron energy. The resulting approximate excitation function is shown in the form of three experimental points in Fig. 5.

Even at 6.2 Bev, the antiprotons appear only to the extent of one in 44 000 pions. Because of the decay of pions along the trajectory through the detecting apparatus, this number corresponds to one antiproton in 62 000 mesons generated at the target. It will be seen from Fig. 5 that there is no observed antiproton production at the lowest energy. Although the production of antiprotons does not seem to rise as sharply with increasing energy as might at first be expected, the data indicate a reasonable threshold for production of antiprotons. It must again be emphasized that Fig. 5 shows only the excitation function relative to the meson excitation function, hence the true excitation function is not known at this time. If and when detailed meson production excitation functions become known, data of the type shown in Fig. 5 may allow a true antiproton production excitation function to be determined. It should also be mentioned that the angle of emission from the target actually varies slightly with Bevatron energy. At 6.2 Bev, it is 3° , at 5.1 Bev it is 6° , and at 4.2 Bev it is 8° from the forward direction at the Bevatron target.

Possible spurious effects.—The possibility of a negative hydrogen ion being mistaken for an antiproton is ruled out by the following argument: It is extremely improbable that such an ion should pass through all the counters without the stripping of its electrons. It may be added that except for a few feet near the target the whole trajectory through the apparatus is though gas at atmospheric pressure, either in air or, near the magnetic lenses, in helium gas introduced to reduce multiple scattering.

None of the known heavy mesons or hyperons have the proper mass to explain the present observations. Moreover, no such particles are known that have a mean life sufficiently long to pass through the apparatus without a prohibitive amount of decay since the flight time through the apparatus of a particle of proton mass is 10.2×10^{-8} sec. However, this possibility cannot be strictly ruled out. In the description of the new particles as antiprotons, a reservation must be made for the possible existence of previously unknown negative particles of mass very close to 1840 electron masses.

The observation of pulse heights in counters S1 and S2 indicates that the new particles must be singly charged. No multiply charged particle could explain the experimental results.

Photographic experiments directed toward the detection of the terminal event of an antiproton are in progress in this laboratory and in Rome, Italy, using emulsions irradiated at the Bevatron, but to this date no positive results can be given. An experiment in conjunction with several other physicists to observe the energy release upon the stopping of an antiproton in a large lead-glass Čerenkov counter is in progress and its results will be reported shortly. It is also planned to try to observe the annihilation process of the anti-

proton in a cloud chamber, using the present apparatus for counter control.

The whole-hearted cooperation of Dr. E. J. Lofgren, under whose direction the Bevatron has been operated, has been of vital importance to this experiment. Mr. Herbert Steiner and Mr. Donald Keller have been very helpful throughout the work. Dr. O. Piccioni has made very useful suggestions in connection with the design of the experiment. Finally, we are indebted to the operating crew of the Bevatron and to our colleagues, who have cheerfully accepted many weeks' postponement of their own work.

* This work was done under the auspices of the U. S. Atomic Energy Commission.

¹ G. Feldman, Phys. Rev. **95**, 1967 (1954).

² Evans Hayward, Phys. Rev. **72**, 937 (1947).

³ Amaldi, Castagnoli, Cortini, Franzinetti, and Manfredini, Nuovo cimento **1**, 492 (1955).

⁴ Bridge, Courant, DeStaeler, and Rossi, Phys. Rev. **95**, 1101 (1954).

⁵ J. Marshall, Ann. Rev. Nuc. Sci. **4**, 141 (1954).

Observations of Negative K -Mesons and Charged Hyperons*

W. F. FRY, J. SCHNEPS, G. A. SNOW,[†] AND M. S. SWAMI

Department of Physics, University of Wisconsin,
Madison, Wisconsin

(Received August 31, 1955)

TWO pellicle stacks were exposed, in a negative K^- meson channel of the Bevatron, to particles from a target bombarded by 6.2-Bev protons. The pellicles were area scanned for stars produced by stopped K^- -mesons. Thirty stars were found in the first stack and have been described in detail previously.¹ In the second stack, 177 stars produced by stopped K^- -mesons were found. A summary of the salient features of these 207 K^- -meson stars is reported here.

The prong distribution of the K^- -meson stars with one or more prongs is shown in Fig. 1. The stopped K^- -mesons which produced zero-prong stars or stars with only a fast π meson, would not be detected with a high efficiency by the method of scanning that was employed. A few such cases were found but are not included in this report.

In many cases, charged π mesons, charged hyperons, and hyperfragments are observed from the K^- -meson stars. The frequency of these events is summarized in Table I.²

In 15 cases the hyperon ejected from the K^- star was clearly positively charged because it decayed from rest or decayed in flight into a proton. In 12 cases the hyperon was clearly negatively charged because it produced a star from rest. In addition there were 3 events where a particle of nucleonic mass, from a K -meson star, came to rest in the emulsion with an associated low-energy electron at the ending. Although it is possible that some of these electrons may be

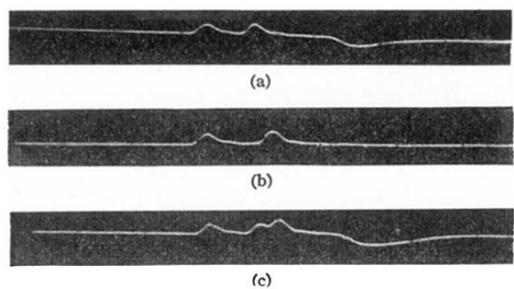


FIG. 2. Oscilloscope traces showing from left to right pulses from S_1 , S_2 , and C_1 . (a) meson, (b) antiproton, (c) accidental event.

Fisica III - AA 2021-2

Parte 6.6bis Note all'articolo sulla scoperta dell'antiproton

Versione del 19 novembre 2021 - soggetta a revisione

La numerazione di queste note è indicata nel file "**GB-fis3-6.6-antiproton-articolo-Segre-note**" che contiene l'articolo originale

Nota 1

1 Bev (Billion-elettron-volt) = 1 GeV (Giga-elettron-Volt):
da questo deriva il nome "Bevatron" per il sincrotrone a Brookhaven che accelerava protoni fino a 6.5 GeV di energia (prima fase di operazione).

La soglia in energia per la produzione di antiprotoni nell'interazione di un **protone su nucleone** $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ (o $p + n \rightarrow p + n + p + \bar{p}$) è data da $(E + m)^2 - (E^2 - m^2) \geq (4m)^2$, dove E è l'energia totale del protone incidente ed m la massa di un nucleone. Quindi $E \geq 7m$ e $T = E - m \geq 6m = 5.6 \text{ GeV}$

Se fosse possibile realizzare la reazione $p + A \rightarrow p + A + p + \bar{p}$, dove A è un nucleo di massa M_A che restasse invariato (i.e. non si dissociasse in due o più frammenti o nucleoni) nella reazione, la soglia si abbasserebbe al valore $T \geq 2m + 4m^2 / M_A$. Nel caso del $^{63}_{29}\text{Cu}$ (rame) si avrebbe $T \geq 1.94 \text{ GeV}$, decisamente molto favorevole.

Tuttavia questo processo non si realizza in pratica, perché per questo valore dell'energia del protone incidente, il nucleo di rame riceverebbe un impulso trasferito: $q^2 = (M_A\gamma - M_A)^2 - M_A^2\beta^2\gamma^2 = 2M_A^2(1-\gamma)$ dove β, γ si riferiscono al centro di massa..

Poiché alla soglia $\gamma = \frac{E + M_A}{3m + M_A} = 1 + \frac{4m^2}{M_A(3m + M_A)}$, si ha che $q^2 = \frac{-8M_A m^2}{3m + M_A} \approx -6.7 \text{ GeV}^2$, da

cui $\sqrt{|q^2|} = 2.6 \text{ GeV}/c$: questo è un valore molto maggiore dell'**impulso di Fermi** ($p_f \sim 200 \text{ MeV}/c$) ed **il nucleo si romperebbe**.

Nota 2

L'energia di Fermi è $T_f = \frac{p_f^2}{2m}$; nell'articolo è stimata essere **25 MeV**, da cui
 $p_f = \sqrt{2mT_f} \sim 216 \text{ MeV}/c$

Nota 3

Nella situazione più favorevole, quella in cui il nucleone si muove contro il protone incidente, il quadrimpulso totale è $P_{tot} = \begin{pmatrix} E+m+T_f, & \sqrt{E^2-m^2}-p_f, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. Allora $s = P_{tot}^2 = 2mE + 2ET_f + 2p_f\sqrt{E^2-m^2} + 2m^2 + T_f^2 \approx 2mE + 2ET_f + 2p_fE + 2m^2$ e l'energia di soglia verifica $s = 2mE + 2ET_f + 2p_fE + 2m^2 \geq (4m)^2$, da cui $T = E - m \geq \frac{7m^2}{m+p_f} - m \approx 4.7 GeV$ è

Nota 4

Come detto nel corso, la misura della massa di una particella ("particle identification") è possibile misurando in modo indipendente quantità di moto e velocità, poiché

$$m \gamma \beta \gamma = |\vec{p}| \Rightarrow m = |\vec{p}| \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$$

Nota 5

Il "fondo di pioni", i.e. il rapporto tra pioni negativi ed antiprotoni prodotti, non era conosciuto all'epoca; in seguito a quelle misure (ed alle successive) risulterà che

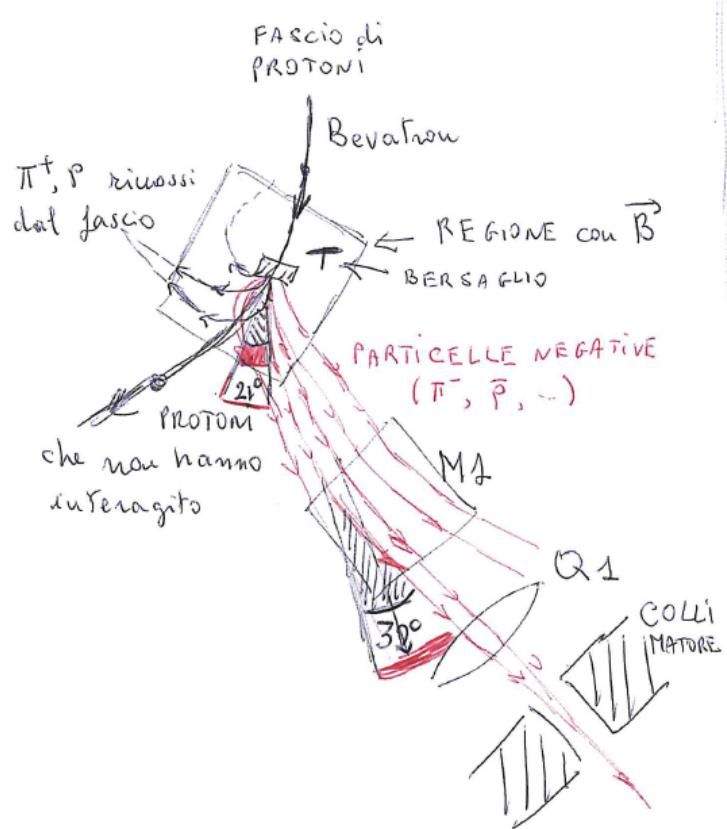
$$\sigma(p\text{Cu} \rightarrow \pi^- \text{any}) \approx 10^5 \sigma(p\text{Cu} \rightarrow \bar{p} \text{any})$$

Un fondo così grande richiede un forte "potere di reiezione", che aumenta effettuando le misure della velocità e dell'impulso nel maggior numero possibile di modi e con tecniche indipendenti. In questo caso l'impulso viene misurato con un campo magnetico ed un sistema di collimatori (un unico modo), mentre la velocità viene misurata in due modi indipendenti: tempo di volo e Cherenkov.

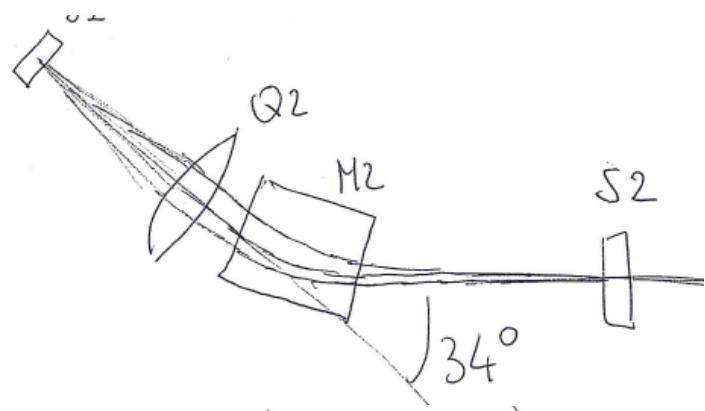
Nota 6

Le particelle sono prodotte prevalentemente in avanti ed hanno differenti quantità di moto, ma nel caso della produzione di un antiproton vicino alla soglia di reazione (vedi nota 3) la loro quantità di moto è molto vicina a $1.2 GeV/c$.

Il campo magnetico del Bevatron, presente anche nella regione del bersaglio, ed un collimatore (una apertura nello schermo "shielding", selezionano particelle negative con quantità di moto media di $1.19 GeV/c$.



Nota 7

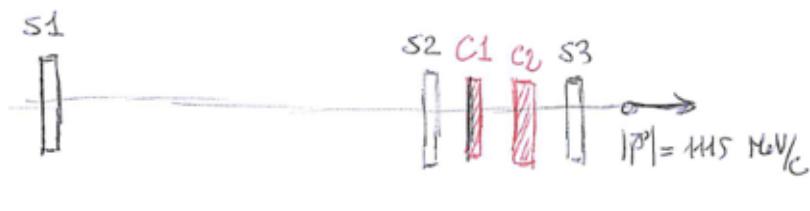


M2 rimuove
l'alone dovuto al
foco del viva il collimatore

Nota 8

$$|\Delta \vec{p}| = |\vec{p}| \times 2\% \approx 24 \text{ MeV} \Rightarrow 1166 \leq |\vec{p}| \leq 1214 \frac{\text{MeV}}{c}$$

Nota 9



$$1092 \leq |\vec{p}| \leq 1138 \text{ MeV}/c$$

↓

$$\begin{aligned} \beta &= 0.78 \quad (\bar{p}) \\ 1166 \leq |\vec{p}| &\leq 1214 \\ 0.758 &\leq \beta \leq 0.772 \approx \bar{p} \\ 0.9918 &\leq \beta \leq 0.9925 \approx \pi^- \\ (0.911 &\leq \beta \leq 0.917 \approx K^-) \end{aligned}$$

Domanda: la differenza $1190 - 1115 = 75 \text{ MeV}/c$ è compatibile con la perdita di energia, per un antiproton in S2, C1 e C2? Si, vedere il calcolo seguente.

La differenza in energia è $\Delta E = \sqrt{p_f^2 + m^2} - \sqrt{p_i^2 + m^2}$, quindi per un antiproton ci

$$\text{aspettiamo di trovare: } \Delta E_{\bar{p}} = \sqrt{1190^2 + 938^2} - \sqrt{1115^2 + 938^2} = 58 \text{ MeV}.$$

Procediamo a stimare la perdita di energia sulla base della conoscenza dei materiali attraversati. Effettueremo il calcolo anche per i pioni. Il fattore $\beta\gamma$, trascurando la piccola variazione di quantità di moto è: $\beta\gamma_{\bar{p}} \approx \frac{1190}{938} \approx 1.27$, $\beta\gamma_{\pi} \approx \frac{1190}{140} \approx 8.5$. Con questi dati possiamo ottenere dalle tabelle e grafici nei database usuali, gli stopping power (perdite di energia per unità di lunghezza), mentre dalla tabella I dell'articolo abbiamo densità e spessori dei materiali:

- in S2, materiale plastico: $\frac{dE_{\min}}{dx} \approx 1.94 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$, $\frac{dE_{\bar{p}}}{dx} \approx 2.5 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$, $\frac{dE_{\pi}}{dx} \approx 2.1 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$,

$$\rho \approx 1.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad \Delta x = 0.62'' = 1.57 \text{ cm}$$

- in C1, materiale $C_8F_{16}O$: $\frac{dE_{\min}}{dx} \approx 1.95 \frac{MeV}{g/cm^2}$, $\frac{dE_{\bar{p}}}{dx} \approx 2.5 \frac{MeV}{g/cm^2}$, $\frac{dE_{\pi}}{dx} \approx 2.1 \frac{MeV}{g/cm^2}$,

$$\rho = 1.76 \frac{g}{cm^3}, \Delta x = 2'' = 5.08 cm$$

- in C2, materiale quarzo: $\frac{dE_{\min}}{dx} \approx 1.70 \frac{MeV}{g/cm^2}$, $\frac{dE_{\bar{p}}}{dx} \approx 2.21 \frac{MeV}{g/cm^2}$, $\frac{dE_{\pi}}{dx} \approx 1.86 \frac{MeV}{g/cm^2}$,

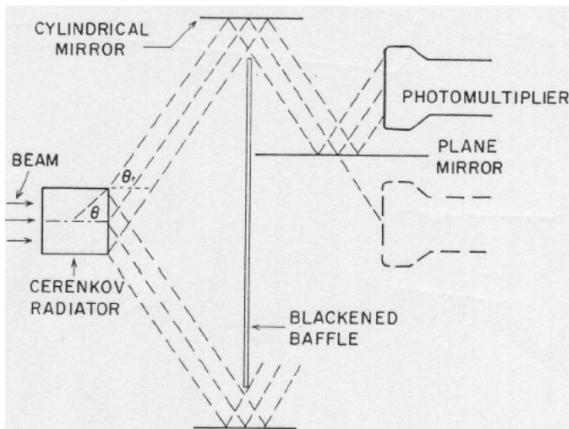
$$\rho = 2.2 \frac{g}{cm^3}, \Delta x = 2.5'' = 6.26 cm$$

Effettuando le semplici moltiplicazioni $\Delta E = \sum_{S2,C1,C2} \left(\frac{dE}{dx} \cdot \rho \cdot \Delta x \right)$ troviamo:

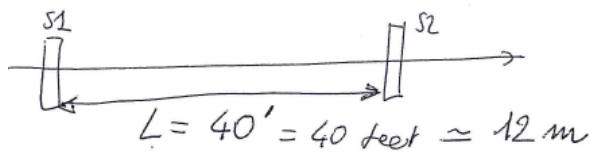
$\Delta E_{\bar{p}} \approx 58 MeV$ in ottimo accordo con il dato dell'articolo, e $\Delta E_{\pi} \approx 49 MeV$, che implica che la quantità di moto finale del pion sia circa $1140 Mev/c$.

Nota 10

Notare come **C1** sia sensibile solo a π o K , mentre **C2** solo a protoni, con il suo disegno particolare a base di schermi e specchi:



Nota 11

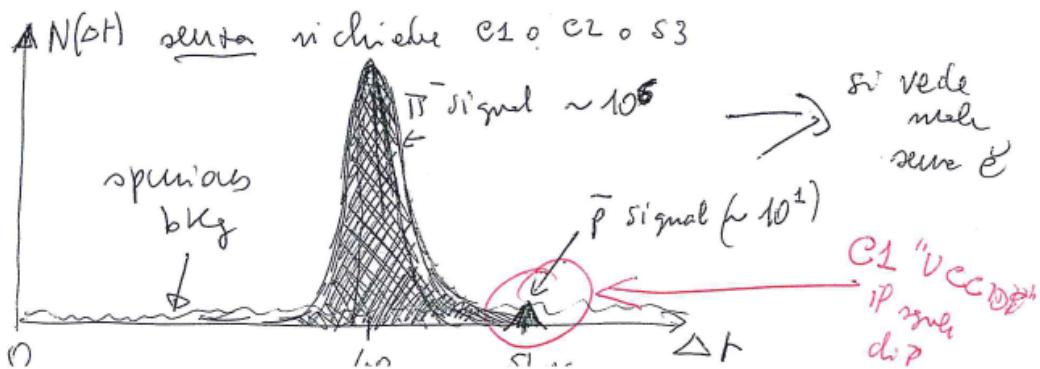


$$\Delta t = \begin{cases} 40 \text{ ns} & \text{se } |\vec{p}| = 1.19 \text{ TeV} \text{ e } M = M_\pi \\ 51 \text{ ns} & \text{se } " " \quad M = M_p \end{cases}$$

↗ "miliunica seconds"

Nota 12

Utilizzando il solo tempo di volo si osserverebbe una distribuzione del tipo seguente, in cui il piccolo numero di antiprotoni non si potrebbe evidenziare dal fondo di pioni (a meno di una mole di dati raccolti estremamente cospicua)



Nota 13

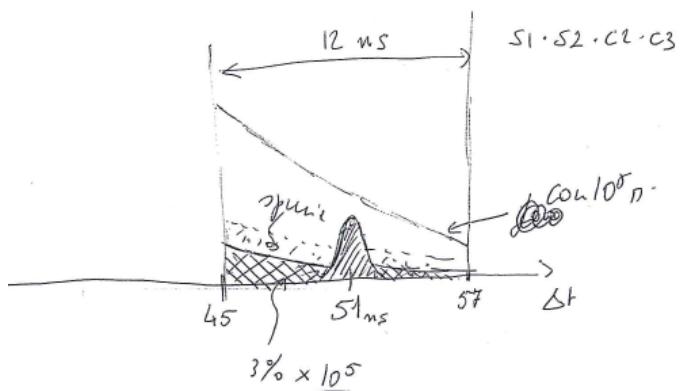
Per ridurre il fondo viene richiesta la coincidenza

$$S_1 * S_2 \text{ e } (C_2) * S_3$$

entro un tempo di 6 ns .

Nota 14

Ci si aspetta che la coincidenza precedente riduca molto il fondo, rendendo possibile l'identificazione degli antiprotoni, come in figura. Gli autori dichiarano che comunque il 3% dei pioni attiva il rivelatore C2 per interazioni nel materiale lungo la linea del fascio.

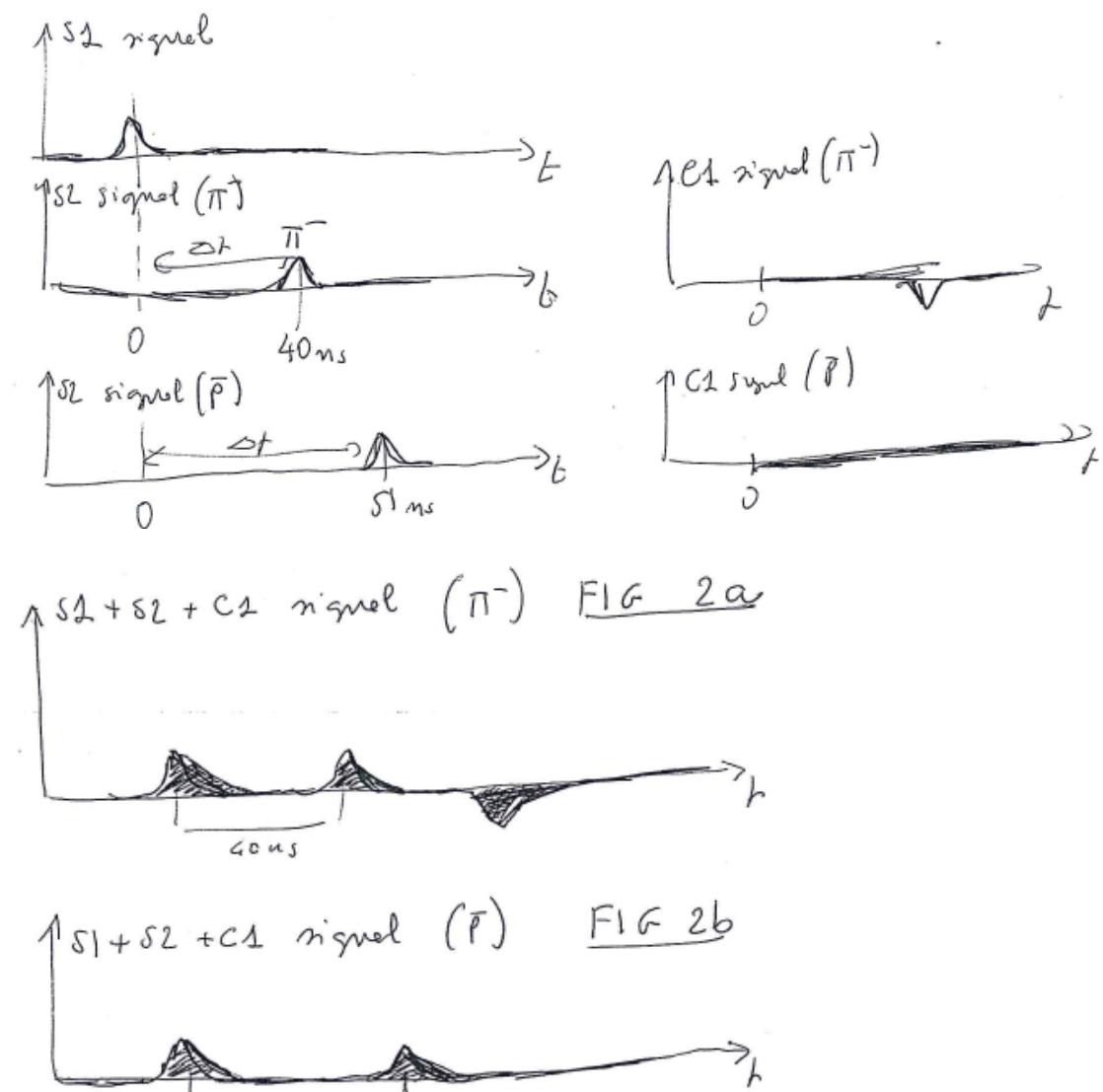


Nota 15

Utilizzare la tabella I per i parametri dei vari rivelatori: spessori, densità, indice di rifrazione.

Nota 16

Segnali caratteristici per pioni e antiprotoni. Il contatore C1 ridurrà ulteriormente il fondo identificando in modo positivo i pioni, per cui il fondo del 3% è ulteriormente rigettato.



Nota 17

Con l'inserimento finale di C1 si riducono tutti i fondi e si trova il segnale di

figura 3b di puri **antiprotoni** con la sequenza $S1 * S2 * S3 * \bar{C1} * C2$.

In **figura 3a** il segnale di puri **pioni** con la sequenza $S1 * S2 * S3 * C1 * \bar{C2}$.

Nota 18

Da questo punto la lettura dell'articolo è facoltativa

Parte V

Appendici

Appendice A

Alcuni dettagli

A.1 Convenzioni

In relatività ristretta si userà la metrica “west coast”, a dominanza di segni meno:

$$\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) , \quad (\text{A.1.1})$$

e la componente 0 del quadrivettore posizione sarà data da $x^0 = ct$. Si ha allora

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{A.1.2})$$

e (salvo esplicito avviso contrario) si indicheranno con lettere greche gli indici che possono assumere i valori 0, 1, 2, 3, mentre si riserveranno le lettere latine per gli indici spaziali. Si userà per il tensore completamente antisimmetrico la convenzione $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1$.

La quadrivelocità sarà definita come

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} , \quad (\text{A.1.3})$$

dove

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt \quad (\text{A.1.4})$$

è l'elemento infinitesimo di tempo proprio, quindi la quadrivelocità soddisfa la relazione $u^2 = c^2$. Di conseguenza il quadriimpulso $p^\mu = mu^\mu$ di una particella di massa m soddisfa la relazione

$$p^2 = m^2 c^2 . \quad (\text{A.1.5})$$

In elettromagnetismo si useranno il sistema internazionale ed il sistema di unità di misura di Gauss. Le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nei due sistemi (SI a sinistra, Gauss a destra)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} , & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho , \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} , \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 , & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

mentre per la forza di Lorentz si hanno le espressioni (nuovamente SI a sinistra e Gauss a destra)

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) , \quad \vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) . \quad (\text{A.1.7})$$

Vedi Sez. (A.3) per le conversioni tra un sistema di unità di misura e l'altro.

Per le trasformate di Fourier si useranno le seguenti convenzioni di π e segni:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, t) &= \int \tilde{f}(\vec{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k d\omega \\ \tilde{f}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 r dt \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

con le quali l'identità di Parsefall diventa

$$\int |f(\vec{r}, t)|^2 d^3 r dt = (2\pi)^4 \int |\tilde{f}(\vec{k}, \omega)|^2 d^3 k d\omega. \quad (\text{A.1.9})$$

Nel caso in cui si debbano considerare trasformate solo rispetto al tempo o solo rispetto allo spazio si useranno delle convenzioni compatibili con quelle scritte sopra, ovvero ad esempio:

$$\tilde{f}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt, \quad \tilde{f}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r. \quad (\text{A.1.10})$$

A.2 Alcune proprietà del tensore completamente antisimmetrico

In questa sezione si dimostreranno alcune proprietà del tensore di Levi-Civita che risultano talvolta utili per le applicazioni (le espressioni per il caso euclideo tridimensionale si possono ottenere in modo analogo, con qualche cambio di segno e di alcuni fattori numerici).

Mostriamo prima di tutto che si ha

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \det \begin{pmatrix} \delta_0^\alpha & \delta_1^\alpha & \delta_2^\alpha & \delta_3^\alpha \\ \delta_0^\beta & \delta_1^\beta & \delta_2^\beta & \delta_3^\beta \\ \delta_0^\mu & \delta_1^\mu & \delta_2^\mu & \delta_3^\mu \\ \delta_0^\nu & \delta_1^\nu & \delta_2^\nu & \delta_3^\nu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.1})$$

Questa relazione è banalmente vera per $\alpha = 0, \beta = 1, \mu = 2, \nu = 3$, in quanto

$$\epsilon^{0123} = 1 = \det(1), \quad (\text{A.2.2})$$

ed il caso generico segue dalla proprietà di antisimmetria del determinante per scambio di righe e colonne. In modo identico si vede che

$$\epsilon_{\rho\sigma\gamma\phi} = -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^0 & \delta_\rho^1 & \delta_\rho^2 & \delta_\rho^3 \\ \delta_\sigma^0 & \delta_\sigma^1 & \delta_\sigma^2 & \delta_\sigma^3 \\ \delta_\gamma^0 & \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \\ \delta_\phi^0 & \delta_\phi^1 & \delta_\phi^2 & \delta_\phi^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.3})$$

Considerando il prodotto di Eq. (A.2.1) e di Eq. (A.2.3), usando il fatto che $\det A = \det A^t$ e che $\delta_i^\alpha \delta_j^\beta = \delta_\beta^\alpha$ si trova

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\gamma\phi} = -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \\ \delta_\rho^\nu & \delta_\sigma^\nu & \delta_\gamma^\nu & \delta_\phi^\nu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2.4})$$

Sviluppando l'espressione predendente rispetto all'ultima riga usando le formule di Laplace si ottiene

$$\begin{aligned} -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \\ \delta_\rho^\nu & \delta_\sigma^\nu & \delta_\gamma^\nu & \delta_\phi^\nu \end{pmatrix} &= \delta_\rho^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \end{pmatrix} - \delta_\sigma^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \end{pmatrix} + \\ &\quad + \delta_\gamma^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\phi^\mu \end{pmatrix} - \delta_\phi^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

e se ora si considera la somma su $\nu = \phi$ si ottiene, usando la multilinearità dei determinanti e le proprietà di antisimmetria

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\gamma\nu} &= \det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\sigma^\mu & \delta_\rho^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\sigma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\sigma^\mu \end{pmatrix} + \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\sigma^\mu & \delta_\rho^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} = \\ &= -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

Sviluppando di nuovo rispetto all'ultima riga si trova

$$\begin{aligned} -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} &= -\delta_\rho^\mu \det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \end{pmatrix} + \delta_\sigma^\mu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta \end{pmatrix} - \\ &\quad - \delta_\gamma^\mu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

e sommando su $\mu = \gamma$ si trova quindi

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} &= -\det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\rho^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\rho^\beta \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix} - \\ &\quad - 4 \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix} = \\ &= -2(\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

Contraendo ancora si trova

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\beta\mu\nu} = -2(4\delta_\rho^\alpha - \delta_\rho^\alpha) = -6\delta_\rho^\alpha, \quad (\text{A.2.9})$$

ed infine

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -24, \quad (\text{A.2.10})$$

risultato questo facile da ottenere direttamente in quanto si stà sommando sulle $4! = 24$ permutazioni di $\epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -1$.

A.3 Sistemi di unità di misura: SI e Gauss

I due principali sistemi di unità di misura usati in elettromagnetismo classico¹ sono il sistema di Gauss o CGS (indicato nel seguito con il pedice G) ed il sistema internazionale o MKS (indicato

¹In elettrodinamica quantistica si usa di solito il sistema di Gauss razionalizzato, che differisce dal sistema di Gauss per alcuni 4π .

nel seguito con il pedice *SI*), in cui le equazioni di Maxwell assumono la forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_G &= 4\pi\rho_G, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{SI} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{SI}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_G &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_G + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_G}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B}_{SI} &= \mu_0\vec{j}_{SI} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}_{SI}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_G &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}_G}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{E}_{SI} &= -\frac{\partial \vec{B}_{SI}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_G &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{SI} &= 0.\end{aligned}\tag{A.3.1}$$

In entrambi i casi l'equazione di continuità si scrive $\partial_t\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Per capire la relazione tra i due sistemi di unità di misura è utile partire analizzando la forza di Coulomb, che nei due casi si scrive

$$\vec{F} = e_G^{(1)}e_G^{(2)}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{e_{SI}^{(1)}e_{SI}^{(2)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}.\tag{A.3.2}$$

Da questa equazione si ottiene la relazione che intercorre tra le cariche nei due sistemi: $e_{SI} = \sqrt{4\pi\epsilon_0}e_G$. Da questa relazione segue in particolare che le densità di carica e corrente sono legate da

$$\{\rho, \vec{j}\}_G = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\{\rho, \vec{j}\}_{SI}\tag{A.3.3}$$

Se usiamo ora il fatto che la forza di Lorentz si scrive nei due sistemi come

$$\dot{\vec{p}} = e_G\left(\vec{E}_G + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_G\right) = e_{SI}(\vec{E}_{SI} + \vec{v} \times \vec{B}_{SI}),\tag{A.3.4}$$

usando la relazione precedentemente trovata tra le cariche si ottiene (ricordiamo che $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$)

$$\begin{aligned}\{\vec{E}, \phi\}_G &= \sqrt{4\pi\epsilon_0}\{\vec{E}, \phi\}_{SI} \\ \{\vec{B}, \vec{A}\}_G &= c\sqrt{4\pi\epsilon_0}\{\vec{B}, \vec{A}\}_{SI} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\{\vec{B}, \vec{A}\}_{SI}.\end{aligned}\tag{A.3.5}$$

Si vede facilmente che usando queste conversioni le equazioni di Maxwell in *SI* e nel sistema di Gauss sono equivalenti.

Anche la relazione che lega i campi ai potenziali è leggermente diversa nei due sistemi di unità: in entrambi i casi si ha $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, tuttavia essendo l'equazione collegata alla legge di Faraday diversa in *SI* ed in Gauss, si ottengono le relazioni

$$\vec{E}_G = -\vec{\nabla}\phi_G - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t}, \quad \vec{E}_{SI} = -\vec{\nabla}\phi_{SI} - \frac{\partial \vec{A}_{SI}}{\partial t}.\tag{A.3.6}$$

Le densità di energia W ed il vettore Poynting (densità di flusso di energia) \vec{S} sono dati nei due sistemi da

$$W = \frac{\vec{E}_G^2 + \vec{B}_G^2}{8\pi} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\vec{E}_{SI}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_{SI}^2\right), \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}_G \times \vec{B}_G = \frac{\vec{E}_{SI} \times \vec{B}_{SI}}{\mu_0}\tag{A.3.7}$$

Nel formalismo quadridimensionale si ha

$$\begin{aligned}j_G^\mu &= (c\rho, \vec{j})_G = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}(c\rho, \vec{j})_{SI} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}j_{SI}^\mu \\ A_G^\mu &= (\phi, \vec{A})_G = \sqrt{4\pi\epsilon_0}(\phi, c\vec{A}) = \sqrt{4\pi\epsilon_0}A_{SI}^\mu;\end{aligned}\tag{A.3.8}$$

in entrambi i sistemi si ha $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e le equazioni di Maxwell omogenee si scrivono sempre nella forma $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, mentre quelle disomogenee assumono la forma

$$\partial_\mu F_G^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_G^\nu, \quad \partial_\mu F_{SI}^{\mu\nu} = c\mu_0 j_{SI}^\nu. \quad (\text{A.3.9})$$

Le equazioni di Maxwell macroscopiche nei due sistemi sono (vedi ad es. [4] §6.6 per una deduzione microscopica e [6] §6, §29, §75 per un approccio più macroscopico)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_G &= 4\pi\rho_G^{ext}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_{SI} &= \rho_{SI}^{ext}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_G &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_G^{ext} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_G}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{H}_{SI} &= \vec{j}_{SI}^{ext} + \frac{\partial \vec{D}_{SI}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_G &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_G}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{E}_{SI} &= -\frac{\partial \vec{B}_{SI}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_G &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{SI} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

dove $\rho_{G/SI}^{ext}$ e $\vec{j}_{G/SI}^{ext}$ sono la densità di carica e di corrente esterne nel sistema di unità G oppure SI . Le relazioni che legano i campi ausiliari $\vec{D}(\vec{r}, t)$ e $\vec{H}(\vec{r}, t)$ al campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ed al campo magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sono le stesse nei due sistemi e in regime lineare per materiali isotropi ed a riposo ² si scrivono tramite la permittività dielettrica ϵ e la permeabilità magnetica μ (in generale dipendenti dalla lunghezza d'onda):

$$\tilde{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \tilde{E}(\vec{k}, \omega), \quad \tilde{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \tilde{H}(\vec{k}, \omega), \quad (\text{A.3.11})$$

Queste relazioni sono talvolta chiamate relazioni costitutive.

In termini della densità di polarizzazione \vec{P} e densità di magnetizzazione \vec{M} si ha ³

$$\begin{aligned} \vec{D}_G(\vec{r}, t) &= \vec{E}_G(\vec{r}, t) + 4\pi\vec{P}_G(\vec{r}, t), & \vec{D}_{SI}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \vec{E}_{SI}(\vec{r}, t) + \vec{P}_{SI}(\vec{r}, t), \\ \vec{B}_G(\vec{r}, t) &= \vec{H}_G(\vec{r}, t) + 4\pi\vec{M}_G(\vec{r}, t), & \vec{B}_{SI}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \vec{H}_{SI}(\vec{r}, t) + \mu_0 \vec{M}_{SI}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.3.12})$$

In questo caso, al posto della permittività dielettrica e della permeabilità magnetica si introducono la suscettività elettrica χ_e e la suscettività magnetica χ_m tramite le relazioni (nuovamente valide nel limite di campi deboli, materiali isotropi ed a riposo)

$$\begin{aligned} \tilde{P}_G(\vec{k}, \omega) &= \chi_e^{(G)}(\vec{k}, \omega) \tilde{E}_G(\vec{k}, \omega), & \tilde{P}_{SI}(\vec{k}, \omega) &= \epsilon_0 \chi_e^{(SI)}(\vec{k}, \omega) \tilde{E}_{SI}(\vec{k}, \omega) \\ \tilde{M}_G(\vec{k}, \omega) &= \chi_m^{(G)}(\vec{k}, \omega) \tilde{H}_G(\vec{k}, \omega), & \tilde{M}_{SI}(\vec{k}, \omega) &= \chi_m^{(SI)}(\vec{k}, \omega) \tilde{H}_{SI}(\vec{k}, \omega), \end{aligned} \quad (\text{A.3.13})$$

da cui si vede che la suscettività elettrica e la suscettività magnetica sono legate alla permittività dielettrica e alla permeabilità magnetica da

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e^{(G)} = \epsilon_0(1 + \chi_e^{(SI)}), \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m^{(G)} = \mu_0(1 + \chi_m^{(SI)}). \quad (\text{A.3.14})$$

La densità di carica $\rho_{ind}(\vec{r}, t)$ e la densità di corrente $\vec{j}_{ind}(\vec{r}, t)$ indotte dai campi nel mezzo si possono infine scrivere in termini delle polarizzazioni tramite

$$\begin{aligned} \rho_{ind}^{(G)} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_G, & \rho_{ind}^{(SI)} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_{SI}, \\ \vec{j}_{ind}^{(G)} &= c\vec{\nabla} \times \vec{M}_G + \frac{\partial \vec{P}_G}{\partial t}, & \vec{j}_{ind}^{(SI)} &= \vec{\nabla} \times \vec{M}_{SI} + \frac{\partial \vec{P}_{SI}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{A.3.15})$$

come si vede dal fatto che sostituendo le relazioni costitutive scritte in termini delle densità di polarizzazione e di magnetizzazione nelle equazioni di Maxwell nel mezzo si ottengono le equazioni

²Vedi [6] §76 per il caso di un mezzo non a riposo.

³Vedi [6] §79 per i limiti della interpretazione di \vec{M} come densità di magnetizzazione.

valide nel vuoto quando sono presenti la densità di carica $\rho_{ext} + \rho_{ind}$ e la densità di corrente $\vec{j}_{ext} + \vec{j}_{ind}$.

Terminiamo ricordando i valori di ϵ_0 e μ_0 e dell'impedenza del vuoto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\simeq 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \\ \mu_0 &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \simeq 12.57 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \simeq 377 \Omega ,\end{aligned}\tag{A.3.16}$$

dove N=Newton, m=metro, C=Coulomb, A=Ampere e Ω =Ohm, $A = \frac{C}{s}$ e $\Omega = \frac{N \cdot m}{C} \times \frac{s}{C}$.

A.4 La delta di Dirac e le distribuzioni

In questa appendice si introdurrà in modo elementare la delta di Dirac (in effetti il concetto di distribuzione) ed alcune sue proprietà fondamentali. Per l'approccio “standard” alla teoria delle distribuzioni si può consultare ad esempio [14], mentre qui seguiremo la strada più elementare discussa in [46].

La teoria delle distribuzioni (ed in particolare la delta di Dirac) è originata dal tentativo di introdurre degli strumenti matematici con cui descrivere in modo consistente la distribuzione di carica (o di massa) di una carica puntiforme. Quello che è probabilmente il modo più naturale di trattare una particella puntiforme consiste nel partire considerando una particella di raggio finito, effettuando poi il limite per il raggio che tende a zero.

Consideriamo per semplicità un caso unidimensionale e le funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}n^2x^2} .\tag{A.4.1}$$

Queste funzioni soddisfano le condizioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) dx = 1 , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \phi_n(x) dx = 0 , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \phi_n(x) dx = \frac{1}{n^2} \tag{A.4.2}$$

quindi $\phi_n(x)$ può essere pensata come la distribuzione di carica di una particella di carica unitaria, centrata nell'origine e con raggio quadratico medio eguale ad $1/n$. Per considerare il limite di particella puntiforme dobbiamo effettuare il limite $n \rightarrow \infty$, nel qual caso si vede facilmente che si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases} .\tag{A.4.3}$$

Questo risultato patologico è inevitabile, in quanto se vogliamo descrivere la distribuzione di carica di una particella puntiforme si deve avere densità di carica nulla dove non c'è la particella; d'altra parte nel punto dove è posizionata la particella ci deve essere una densità di carica divergente, per fare in modo che la carica totale sia unitaria. Disgraziatamente non esiste una funzione ordinaria che soddisfi queste proprietà, in quanto la funzione definita dal limite in Eq. (A.4.3) ha integrale nullo nella teoria dell'integrazione di Lebesgue e quindi non può essere associata ad una carica unitaria.

Un modo di aggirare il problema consiste nel decidere di effettuare il passaggio al limite al momento giusto: la operazione più usuale che si effettua con una distribuzione di carica regolare è integrarla con un certo peso $f(x)$ per ottenere dei risultati di interesse fisico. Nel caso della distribuzione di carica di una particella puntiforme di carica unitaria, indicata con $\delta(x)$ (la delta di Dirac, appunto), *definiamo* questa operazione tramite il processo di limite come segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f(x) dx .\tag{A.4.4}$$

Questo è un caso in cui le operazioni di limite e di integrazione non commutano (non si ha convergenza uniforme) e l'idea operativa dietro questa definizione è che non siamo realmente interessati a descrivere la distribuzione di carica di una particella puntiforme di carica unitaria, ma siamo interessati a trovare una procedura per descrivere gli effetti fisici di una tale distribuzione. Inoltre fisicamente ci si aspetta che i fenomeni fisici siano continui nel limite puntiforme, nonostante la distribuzione limite possa essere patologica, quindi il modo corretto di effettuare il passaggio al limite è quello dell'equazione precedente: prima si effettua il calcolo nel caso non puntiforme e solo dopo si estrae il limite puntiforme.

Affinchè la procedura appena descritta possa essere portata a termine con successo è necessario introdurre alcune ipotesi tecniche di regolarità: supporremo di considerare solo successioni di funzioni $\psi_n(x)$ e funzioni di test $f(x)$ (si chiamano convenzionalmente con questo nome le funzioni "peso") che siano infinitamente derivabili e vadano a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza, come appunto le funzioni in Eq. (A.4.1). Con queste ipotesi l'integrale di $\psi_n(x)f(x)$ è sicuramente finito e una successione di funzioni $\psi_n(x)$ si definisce come ammissibile se per qualunque funzione di test $f(x)$ esiste finito il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)f(x)dx . \quad (\text{A.4.5})$$

Ovviamente possono esistere diverse successioni ammissibili di funzioni $\psi_n^{(1)}$ e $\psi_n^{(2)}$ per le quali si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^{(1)}(x)f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^{(2)}(x)f(x)dx \quad (\text{A.4.6})$$

per ogni funzione di test $f(x)$; questo introduce una relazione di equivalenza tra le successioni ammissibili. Ogni classe di equivalenza di successioni ammissibili definisce una distribuzione o funzione generalizzata $\psi(x)$, la cui azione sulla funzione di test $f(x)$ è definita dalla relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)f(x)dx , \quad (\text{A.4.7})$$

dove $\psi_n(x)$ è una qualunque successione della classe di equivalenza che definisce $\psi(x)$.

Le distribuzioni costituiscono una estensione delle funzioni ordinarie (almeno di quelle che non divergono troppo rapidamente all'infinito), in quanto esistono successioni ammissibili che convergono (nel senso delle distribuzioni) ad esse. Ad esempio la successione

$$\eta_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2n^2}} \quad (\text{A.4.8})$$

soddisfa per ogni funzione di test la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_n(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (\text{A.4.9})$$

ed è quindi equivalente, dal punto di vista delle distribuzioni, alla funzione costante 1. Per evitare di appesantire troppo le notazioni è convenzione comune non distinguere notazionalmente una funzione ordinaria dalla corrispondente distribuzione.

Nel caso specifico della delta di Dirac è semplice verificare che la successione Eq. (A.4.1) è una successione ammissibile e che si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x)f(x)dx = f(0) , \quad (\text{A.4.10})$$

che è il risultato naturale per una distribuzione di carica puntiforme unitaria: essa seleziona il valore della funzione peso nella posizione della particella. Una successione di funzioni equivalente a $\phi_a(x)$ potrebbe essere ad esempio

$$\phi_n^{(1)}(x) = \frac{n^3}{\sqrt{2\pi}(1+n^2)}(1+x^2)e^{-\frac{1}{2}n^2x^2} . \quad (\text{A.4.11})$$

Date due distribuzioni $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$, associate alle successioni ammissibili $\psi_n^{(1)}$ e $\psi_n^{(2)}$, è semplice verificare che la successione $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$ è ammissibile e questa definisce la distribuzione $\psi^{(1)} + \psi^{(2)}$. Analogamente molte altre operazioni, come il prodotto per una funzione che non cresce “troppo” all’infinito, la derivazione e la trasformata di Fourier, possono essere definite applicandole alle successioni ammissibili che definiscono le distribuzioni. Si ha quindi ad esempio (integrando per parti)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'_n(x) f(x) dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) f'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0), \end{aligned} \quad (\text{A.4.12})$$

da cui si vede che $-\delta'(x)$ è la distribuzione di carica associata ad un dipolo unitario infinitesimo, in quanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \delta'(x) dx = -1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha \delta'(x) dx = 0 \text{ se } \alpha > 1. \quad (\text{A.4.13})$$

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier della δ abbiamo

$$\tilde{\phi}_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{2n^2}} = \frac{1}{2\pi} \eta_n(x), \quad (\text{A.4.14})$$

quindi $\tilde{\delta}(k) = \frac{1}{2\pi}$. Analogamente

$$\tilde{\eta}_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_n(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} n \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2} n^2 k^2} = \phi_n(k), \quad (\text{A.4.15})$$

quindi $\tilde{\delta}(k) = \delta(k)$, che si può riscrivere in modo più suggestivo nella forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx = 2\pi \delta(k). \quad (\text{A.4.16})$$

È importante notare che il prodotto di due successioni ammissibili $\psi_n^{(1)}$ e $\psi_n^{(2)}$ non è in generale una successione ammissibile (come si vede semplicemente considerando $\phi_n^2(x)$), da cui segue che il prodotto di distribuzioni *non* è in generale ben definito.

Analizziamo infine l’effetto di un cambio di variabile lineare sulle distribuzioni: data la distribuzione $\psi(x)$ (con associata successione ammissibile $\psi_n(x)$) e la funzione lineare $x(y) = ay + b$ possiamo definire la distribuzione $\psi(x(y))$ tramite la successione ammissibile $\psi_n(x(y))$. Abbiamo allora, usando il teorema di cambiamento di variabile negli integrali

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(ay + b) f(y) dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(ay + b) f(y) dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_n(x)}{a} f((x - b)/a) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x)}{a} f((x - b)/a) dx \end{aligned} \quad (\text{A.4.17})$$

Consideriamo il caso particolarmente importante della delta di Dirac: si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ay + b) f(y) dy = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f((x - b)/a) dx = \frac{1}{a} f(-b/a). \quad (\text{A.4.18})$$

quindi in particolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - b) f(y) dy = f(b), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(ay) f(y) dy = \frac{1}{a} f(0). \quad (\text{A.4.19})$$

Dalla prima di queste relazioni si vede che $\delta(x - b)$ non è altro che la distribuzione di carica di una particella puntiforme di carica unitaria in posizione b . Un modo più compatto di scrivere la legge di trasformazione della delta è allora

$$\delta(ay + b) = \frac{1}{a} \delta(y - b/a) , \quad (\text{A.4.20})$$

da cui si vede che la proprietà di “località” della delta è conservata dal cambio di variabile: l’unico punto che contribuisce è quello in cui si annulla l’argomento. Si può quindi generalizzare la legge di trasformazione ad un generico cambio di variabile biunivoco $x(y)$, nel qual caso si ottiene

$$\delta(x(y)) = \frac{\delta(y - y_0)}{\left| \frac{dx}{dy}(y_0) \right|} , \quad (\text{A.4.21})$$

dove y_0 è l’unica soluzione di $x(y) = 0$. Si può infine considerare il caso di un cambio di variabile $x(y)$ non biunivoco, che si può trattare dividendo l’integrale in tratti su cui $x(y)$ è biunivoca, ottenendo infine

$$\delta(x(y)) = \sum_i \frac{\delta(y - y_i)}{\left| \frac{dx}{dy}(y_i) \right|} , \quad (\text{A.4.22})$$

dove y_i sono le soluzioni di $x(y) = 0$.

Tutti gli argomenti discussi in questa appendice possono essere generalizzati senza difficoltà al caso di funzioni di più variabili. La delta di Dirac multidimensionale è ad esempio definita usando la successione

$$\phi_n(\vec{x}) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}n^2\vec{x}^2} . \quad (\text{A.4.23})$$

e la formula per il cambio di variabile diventa

$$\delta(\vec{x}(\vec{y})) = \sum_i \frac{\delta(\vec{y} - \vec{y}_i)}{|J(\vec{y}_i)|} , \quad (\text{A.4.24})$$

dove \vec{y}_i sono le soluzioni di $\vec{x}(\vec{y}) = 0$ e J è lo Jacobiano del cambio di variabile.

A.5 Alcuni integrali singolari

Mostriamo preliminarmente che si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{\sin x}{x} dx = \pi . \quad (\text{A.5.1})$$

Sia $f(x)$ la funzione che vale 1 sull’intervallo $[-1, 1]$ e zero altrove, allora si ha

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega} \quad (\text{A.5.2})$$

e dall’identità di Parseval $\int |f(x)|^2 dx = 2\pi \int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ si ottiene allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi . \quad (\text{A.5.3})$$

Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = \\ &= \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L \frac{\sin 2x}{x} dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_{-L}^L + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (\text{A.5.4})$$

passando al limite per $L \rightarrow \infty$ usando il risultato precedente si ottiene Eq. (A.5.1).

Consideriamo ora l'integrale $\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx$: con una integrazione elementare si trova

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx = 2 \frac{\sin(kL/2)}{k} \quad (\text{A.5.5})$$

e sia ora $f(k)$ una funzione continua e derivabile un numero arbitrario di volte a supporto compatto e consideriamo

$$I_L = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) 2 \frac{\sin(kL/2)}{k} dk . \quad (\text{A.5.6})$$

Per il teorema dei valori intermedi di Lagrange per ogni k esiste un x_k compreso tra 0 e k tale che $f(k) = f(0) + kf'(x_k)$, quindi se il supporto di $f(k)$ è compreso in $[-a, a]$ si ha

$$I_L = \int_{-a}^a f(k) 2 \frac{\sin(kL/2)}{k} dk = 2f(0) \int_{-a}^a \frac{\sin(kL/2)}{k} dk + 2 \int_{-a}^a f'(x_k) \sin(kL/2) dk \quad (\text{A.5.7})$$

Per $L \rightarrow \infty$ il secondo integrale si annulla per il lemma di Riemann-Lebesgue, mentre scrivendo il primo in termini della variabile $x = kL/2$ si ottiene subito

$$\lim_{L \rightarrow \infty} I_L = 2\pi f(0) , \quad (\text{A.5.8})$$

e quindi nel senso delle distribuzioni si ha (vedi anche Sez. (A.4))

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx = 2\pi\delta(k) . \quad (\text{A.5.9})$$

Consideriamo ora un integrale del tipo

$$J_L = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) 4 \frac{\sin^2(kL/2)}{k^2} dk . \quad (\text{A.5.10})$$

Questo integrale può essere pensato come una specifica regolarizzazione fisica del quadrato di una δ , che dal punto di vista matematico non è una distribuzione ben definita. Espressioni di questo tipo compaiono spesso in casi in cui si deve effettuare il modulo quadro di una espressione che in un certo limite si riduce ad una distribuzione a δ (ad esempio un fattore di forma nel limite di ottica geometrica). Procedendo analogamente a prima si ottiene

$$J_L = f(0) 2L \int_{-aL/2}^{aL/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx + \int_{-a}^a f'(x_k) \frac{\sin^2(kL/2)}{k} dk . \quad (\text{A.5.11})$$

Cambiando variabile $x = kL/2$ nel secondo termine e usando $|f'(x_k)| \leq M$ si vede che l'integrazione per x piccoli non produce divergenze, mentre l'integrazione per x grandi (ora l'estremo dipende da L) produce una divergenza logaritmica in L , quindi molto soppressa rispetto all'andamento lineare del primo termine. Si ha quindi

$$J_L \rightarrow 2\pi L f(0) . \quad (\text{A.5.12})$$

Consideriamo infine l'integrale che compare in Eq. (7.3.8): questo si può scrivere nella forma

$$K(L_x, L_y) = \int_{n_z > 0} n_z^2 |F(\vec{k})|^2 d\Omega = 16 \int_{n_z > 0} n_z^2 \frac{\sin^2(kn_x L_x/2)}{k^2 n_x^2} \frac{\sin^2(kn_y L_y/2)}{k^2 n_y^2} d\Omega \quad (\text{A.5.13})$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido, l'integrale è esteso all'emisfera con $n_z > 0$ e n_x, n_y, n_z sono i coseni direttori di \hat{n} . Nel limite $L_x, L_y \rightarrow \infty$ il contributo dominante all'integrale è (analogamente al caso di J_L trattato prima) quello che viene dalle regioni $|n_x L_x k| \lesssim 1$ e $|n_y L_y k| \lesssim 1$, quindi si può approssimare $n_z \simeq 1$, $d\Omega \simeq dn_x dn_y$ e, introducendo le variabili $kn_x L_x/2 = x$ e $kn_y L_y/2 = y$, si ottiene

$$K(L_x, L_y) \simeq \frac{4L_x L_y}{k^2} \int \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{\sin^2 y}{y^2} dx dy = \frac{(2\pi)^2 A}{k^2} \quad (\text{A.5.14})$$

per $kL_x \gg 1$ e $kL_y \gg 1$.

A.6 Gli integrali di Fresnel

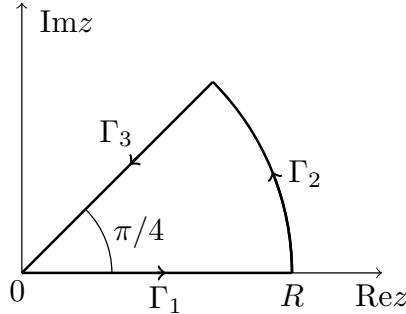


Figura A.1: Percorso di integrazione nel piano complesso per l'integrale di Fresnel.

Gli integrali di Fresnel sono convenzionalmente definiti da

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos t^2 dt \quad (\text{A.6.1})$$

ovvero

$$\int_0^x e^{it^2} = C(x) + iS(x). \quad (\text{A.6.2})$$

Questi integrali non sono esprimibili in termini di trascendenti elementari e gli integrali corrispondenti al limite $x \rightarrow \infty$ sono da intendere come integrali impropri: ad esempio

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos t^2 dt. \quad (\text{A.6.3})$$

I limiti per $x \rightarrow \infty$ di $C(x)$ e $S(x)$ possono essere calcolati usando l'integrazione complessa e considerando l'integrale della funzione e^{-z^2} .

Poiché e^{-z^2} è una funzione analitica si ha

$$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz = 0, \quad (\text{A.6.4})$$

dove le varie parti del percorso di integrazione sono mostrate in Fig. (A.1). Per mostrare che il contributo di Γ_2 si annulla nel limite $R \rightarrow \infty$ si può procedere come nella dimostrazione del lemma di Jordan: il percorso di integrazione Γ_2 può essere parametrizzato come $z = Re^{i\phi}$, con $\phi \in [0, \pi/4]$, quindi

$$\int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz = iR \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\phi}} e^{i\phi} d\phi, \quad (\text{A.6.5})$$

inoltre

$$\left| e^{-R^2 e^{2i\phi}} \right| = e^{-R^2 \cos(2\phi)} \quad (\text{A.6.6})$$

e per $\phi \in [0, \pi/4]$ si ha la relazione

$$\cos(2\phi) \geq 1 - \frac{4\phi}{\pi}, \quad (\text{A.6.7})$$

da cui si ottiene

$$\left| e^{-R^2 e^{2i\phi}} \right| \leq e^{-R^2 \left(1 - \frac{4\phi}{\pi}\right)}. \quad (\text{A.6.8})$$

Si ha quindi

$$\left| \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \left(1 - \frac{4\phi}{\pi}\right)} d\phi = \frac{\pi}{4R} \left(1 - e^{-R^2}\right) \quad (\text{A.6.9})$$

e dunque

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 . \quad (\text{A.6.10})$$

Parametrizzando Γ_3 come $z = e^{i\pi/4}t = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(1+i)t$ si ottiene

$$\int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}(C(R) + S(R) + i[C(R) - S(R)]) \quad (\text{A.6.11})$$

ed inoltre (per quanto riguarda l'integrale su Γ_1) si ha

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} , \quad (\text{A.6.12})$$

quindi dal fatto che l'integrale su tutto il percorso si annulla si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} C(+\infty) - S(+\infty) = 0 \\ S(+\infty) + C(+\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (\text{A.6.13})$$

ed infine

$$C(+\infty) = S(+\infty) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} . \quad (\text{A.6.14})$$

Si ha quindi infine

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{it^2} dt = 2C(\infty) + 2iS(\infty) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi} = \sqrt{i\pi} , \quad (\text{A.6.15})$$

in cui si vede esplicitamente che si deve considerare la determinazione $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ della radice dell'unità complessa. A questo punto è immediato ottenere il risultato Eq. (7.5.6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ikx^2}{2z}} dx = \sqrt{\frac{2\pi iz}{k}} . \quad (\text{A.6.16})$$

A.7 Gli sviluppi asintotici degli integrali \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_1

In questa sezione si studieranno gli andamenti asintotici per grandi valori del parametro a degli integrali usati in Sez. (11.5):

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau , \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau , \quad (\text{A.7.1})$$

dove Λ è un numero reale che può essere positivo o negativo.

Cominciamo con l'analizzare l'andamento di \mathcal{K}_0 quando Λ è positivo, definendo quindi per comodità $\lambda = \sqrt{\Lambda} > 0$. Con il cambio di variabile $\tau = \lambda x$ si ha allora

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\lambda x}}{\sqrt{1+x^2}} dx ; \quad (\text{A.7.2})$$

la funzione integranda ha quindi dei punti di diramazione in $\pm i$, i tagli possono essere scelti come in Fig. (A.2) e quindi il cammino di integrazione può essere deformato come in Fig. (A.2) ottenendo quindi

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-a\lambda y}}{\sqrt{1-y^2}} idy = 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-a\lambda y}}{\sqrt{y^2-1}} dy ; \quad (\text{A.7.3})$$

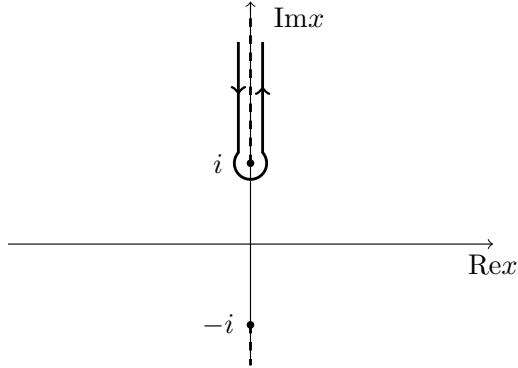


Figura A.2: Percorso di integrazione nel piano complesso per l'integrale \mathcal{K}_0 nel caso $\Lambda > 0$. Le linee tratteggiate denotano i tagli.

a questo punto effettuiamo il cambio di variabile $y = 1 + z/(a\lambda)$ arrivando a

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = 2 \frac{e^{-a\lambda}}{a\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{z^2}{a^2\lambda^2} + 2\frac{z}{a\lambda}}} dz = 2 \frac{e^{-a\lambda}}{\sqrt{a\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{2z}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{2a\lambda}}} dz . \quad (\text{A.7.4})$$

A causa del fattore e^{-z} questo integrale sarà dominato dai valori $z \lesssim 1$ indipendentemente dal valore di a e poichè siamo interessati al limite $a\lambda \rightarrow \infty$ si può sviluppare la radice al denominatore ottenendo la serie asintotica dell'integrale $\mathcal{K}_0(a; \Lambda)$. Poichè

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz \stackrel{z=\frac{1}{2}\xi^2}{=} \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.7.5})$$

il termine dominante della serie asintotica di $\mathcal{K}_0(a; \Lambda)$ per Λ positivo ed $a\lambda \rightarrow \infty$ è dato da

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{a\lambda}} e^{-a\lambda} \quad (\Lambda \text{ positivo}) . \quad (\text{A.7.6})$$

Per il caso di $\mathcal{K}_1(a; \Lambda)$ quando Λ è positivo si può procedere in modo identico, arrivando all'espressione

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) = 2ie^{-a\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{a\lambda}\right) \frac{e^{-z}}{\sqrt{2z}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{2a\lambda}}} dz \quad (\text{A.7.7})$$

e quindi allo sviluppo asintotico per Λ positivo ed $a\lambda \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq i\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{a}} e^{-a\lambda} \quad (\Lambda \text{ positivo}) . \quad (\text{A.7.8})$$

Passiamo ora allo studio di \mathcal{K}_0 quando Λ è negativo, nel qual caso è comodo definire la costante $\lambda = \sqrt{-\Lambda} > 0$, quindi

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iat}}{\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} d\tau . \quad (\text{A.7.9})$$

Si pone a questo punto il problema di come trattare le singolarità nell'integrale ed è utile ricordare l'espressione completa di Λ in Eq. (11.5.8):

$$\Lambda = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu . \quad (\text{A.7.10})$$

Siamo interessati al caso nondissipativo, in cui $\epsilon, \mu \in \mathbb{R}$, tuttavia si era visto in Sez. (11.2) che in generale si ha $\omega \Im \epsilon(\omega) > 0$ e $\omega \Im \mu(\omega) > 0$ quindi si deve usare $\epsilon(\omega) = \operatorname{Re} \epsilon(\omega) + i0^+$ per $\omega > 0$ (ed

analogamente per μ) e $\epsilon(\omega) = \text{Re}\epsilon(\omega) - i0^+$ per $\omega < 0$ (ed analogamente per μ). Bisogna dunque intepretare Λ come avente una parte immaginaria piccola: consideriamo ad esempio $\Lambda = -\lambda^2 - i0^+$ (il caso con la parte immaginaria positiva è completamente analogo e conduce al solito risultato). Dopo aver effettuato il cambio di variabile $\tau = \lambda x$ il cammino di integrazione può dunque essere modificato come mostrato in Fig. (A.3).

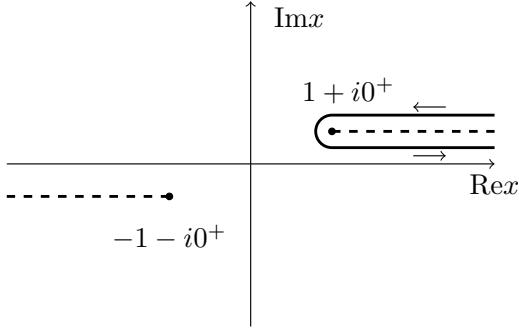


Figura A.3: Percorso di integrazione nel piano complesso per l'integrale \mathcal{K}_0 nel caso $\Lambda = \text{Re}\Lambda - i0^+$ e $\text{Re}\Lambda < 0$. Le linee tratteggiate denotano i tagli.

L'integrale si riduce dunque a

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{ia\lambda x}}{\sqrt{x^2 - 1}} dx , \quad (\text{A.7.11})$$

che dopo il cambio di variabile $x = 1 + y/(a\lambda)$ diventa

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \frac{2}{\sqrt{a\lambda}} e^{ia\lambda} \int_0^\infty \frac{e^{iy}}{\sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{y}{2a\lambda}}} dy , \quad (\text{A.7.12})$$

in cui nuovamente si può espandere la radice per ottenere lo sviluppo asintotico per grandi valori di $a\lambda$. Usando il fatto che si ha

$$\int_0^\infty \frac{e^{iy}}{\sqrt{y}} dy \stackrel{y=\xi^2}{=} 2 \int_0^\infty e^{i\xi^2} d\xi = 2[C(\infty) + iS(\infty)] = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{A.7.13})$$

(dove $C(x)$ e $S(x)$ sono gli integrali di Fresnel calcolati in Sez. (A.6)) si trova quindi per il termine dominante dello sviluppo di $\mathcal{K}_0(a; \Lambda)$ quando $\Lambda < 0$ l'andamento

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{a\lambda}} e^{ia\lambda} \quad (\Lambda \text{ negativo}) . \quad (\text{A.7.14})$$

Il caso di $K_1(a; \Lambda)$ con $\Lambda < 0$ può nuovamente essere trattato in modo praticamente identico, ottenendo

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) = 2\sqrt{\frac{\lambda}{a}} e^{ia\lambda} \int_0^\infty \left(1 + \frac{y}{a\lambda}\right) \frac{e^{iy}}{\sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{y}{2a\lambda}}} dy , \quad (\text{A.7.15})$$

e quindi il termine dominante dello sviluppo asintotico

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\pi\lambda}{a}} e^{ia\lambda} \quad (\Lambda \text{ negativo}) . \quad (\text{A.7.16})$$

Appendice B

Proprietà fondamentali di atomi e nuclei

Iniziamo senz'altro con indicare le principali grandezze fisiche che caratterizzano uno stato atomico o sub-atomico:

- massa
- carica elettrica, detta anche momento di monopolo elettrico
- momenti elettromagnetici (e. m.): dipolo elettrico e magnetico, quadrupolo elettrico, ...
- dimensioni e "forma"
- vita media e rapporti di decadimento
- spin (momento angolare intrinseco)

Ricordiamo che ogni grandezza fisica è definita come una "entità misurabile", per cui è obbligatorio definire gli strumenti/metodi di misura per ognuna delle grandezze sopra indicate. Le definizioni operative della massa, della carica elettrica e dei momenti e. m. sono state fornite nei corsi precedenti; in questo corso discuteremo le definizioni operative di dimensioni, forma, vita media e rapporti di decadimento di stati atomici o sub-atomici, mentre lo spin viene definito ed estensivamente trattato in altri corsi.

Passiamo adesso a riepilogare gli ordini di grandezza delle dimensioni di atomi, nuclei e (alcune) particelle:

Atomo dimensioni ≈ 1 Angstrom ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$).

Nucleo atomico dimensioni $\approx 1\text{-}10$ Fermi ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

Particelle non elementari (ad es. protone e neutrone) dimensioni $\approx 0.1\text{-}1$ fm.

Particelle attualmente ritenute elementari (ad es. l'elettrone) dimensioni attualmente sconosciute, ma sicuramente minori di 10^{-4} fm (limite sperimentale) e ragionevolmente maggiori della scala di Planck $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \times 10^{-20}$ fm.

Quindi, se un atomo fosse grande come l'orbita terrestre attorno al sole un nucleo avrebbe circa le dimensioni dell'Italia, un nucleone circa le dimensioni dell'Umbria, un quark o un elettrone potrebbero avere dimensioni comprese fra un campo di tennis ed un (vero) nucleo atomico. Messaggio: la regione inesplorata dello spazio si estende per 17 ordini di grandezza!

B.1 Atomi e masse atomiche

Ogni atomo neutro viene identificato da due numeri interi:

Z : il “numero atomico” che risulta essere sia il numero di elettroni, sia il numero di protoni in esso contenuti; Z definisce le proprietà chimiche dell’atomo; specificare Z è equivalente ad indicare il simbolo chimico della specie ($1=H$, $2=He$, $3=Li$, etc...)

A : il “peso atomico” che rappresenta il numero totale di protoni e neutroni contenuti nell’atomo (comunemente indicati con il termine “nucleoni”), per cui il numero di neutroni è $N = A - Z$.

Un atomo neutro viene di norma indicato con il simbolo $^A_Z X$, ma se si desidera esplicitare il numero di protoni e neutroni si può scrivere in modo totalmente equivalente: $^A_Z X_N$. Gli atomi possono acquisire o cedere elettroni: in queste situazioni si parla di ioni, che vengono indicati aggiungendo un simbolo + o - per ognuno degli elettroni ceduti o acquisiti.

$^A_Z X_N$ identifica l’atomo neutro, $^A_Z X_N^+$, $^A_Z X_N^{++}$, $^A_Z X_N^-$, ... identificano quindi ioni positivi o negativi.



Esempio B.1.1: Alcuni atomi leggeri sono

${}_0^1 H_1 = n = \text{neutron}$, ${}_1^1 H_0 = \text{atomo di Idrogeno}$, ${}_1^1 H_0^+ = p = \text{protone}$,

${}_1^2 H_1 = \text{atomo di Deuterio}$, ${}_1^2 H_1^+ = d = \text{deutone (nucleo di Deuterio)}$,

${}_2^4 He_2 = \text{atomo di Elio}$, ${}_2^4 He_2^{++} = \text{particella } \alpha \text{ (nucleo di Elio)}$.

Altri atomi/ioni sono ad esempio: ${}^{12}C$, ${}^{12}C^+$, ${}^{16}O$, ${}^{16}O^-$, ${}^{16}O^{--}$, ${}^{40}Ar$, ${}^{40}Ar^{++}$.

Ricordiamo che la massa di un atomo si può misurare tramite lo spettrometro di massa, in cui si misurano ioni atomici positivi o negativi. Gli spettrometri di massa sono strumenti che dovranno avere visto nel corso di Fisica II; per chi desiderasse un approfondimento suggeriamo di studiare una tecnica molto importante, quella del “doppietto di massa”, che permette le misure più accurate (precisione relativa 10^{-6}) delle differenze di masse atomiche fra diverse specie. Utilizzando la tecnica del doppietto di massa si misura ad esempio la massa di H in funzione della massa di C tramite il confronto C_9H_{20} vs $C_{10}H_8$ e la massa di N in funzione della massa di C e H tramite C_2H_4 vs N_2 ; la logica è di usare molecole con lo stesso numero di nucleoni per avere una maggiore accuratezza, vedi ad es. [36] §3.2.

Introduciamo ora le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} M_{A,Z}^{atomo} &= \text{massa dell’atomo neutro} \\ M_{A,Z}^{nucleo} &= \text{massa del nucleo (libero)} \\ B_{A,Z}^{elettroni} &= \text{energia di legame di tutti gli elettroni} \end{aligned} \quad (B.1.1)$$

e definiamo l’unità di massa atomica come un dodicesimo della massa del ${}^{12}C$

$$m_u = 1 \text{ uma} = \frac{1}{12} M_{12,6}^{atomo} \approx 931.49 \text{ MeV} . \quad (B.1.2)$$

L’energia di legame degli elettroni è definita come la differenza fra la massa dei costituenti dell’atomo e la massa dell’atomo stesso:

$$B_{A,Z}^{elettroni} = (M_{A,Z}^{nucleo} + Zm_e - M_{A,Z}^{atomo})c^2 . \quad (B.1.3)$$

$B_{A,Z}^{elettroni}$ è un numero positivo, che si ottiene sommando le energie minime per estrarre uno dopo l’altro tutti gli elettroni dall’atomo, dal più esterno al più interno. Tali energie sono via via crescenti ed assumono valori da circa 1eV fino ad un massimo di circa 100KeV per estrarre l’ultimo elettrone di un elemento pesante (per esempio il Pb). La ragione di procedere dall’esterno verso l’interno è per fare in modo che lo ione sia di volta in volta stabile, mentre se si procedesse in ordine diverso

gli elettroni si ricombinerebbero tra una estrazione e l'altra con emissione di fotoni. I valori delle energie di legame (o meglio delle energie di ionizzazione corrispondenti) sono disponibili in vari database pubblici, fra cui ad esempio:

<https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/ionEnergy.html>

Nota: i dati qui riportati possono essere di tre tipi: misurati, calcolati, semiempirici o interpolati.

La massa dell'elettrone è $m_e \approx 0.511\text{MeV}/c^2$, quindi la massa di un atomo (dell'ordine di $A\text{GeV}/c^2$) è sostanzialmente concentrata nel nucleo. L'energia di legame degli elettroni $B_{A,Z}^{\text{elettroni}}$ è quindi generalmente trascurabile non solo rispetto alla massa dell'atomo, ma anche rispetto alla massa degli elettroni, per cui si può in prima approssimazione stimare la massa di un atomo come la somma delle masse del nucleo e degli elettroni:

$$M_{A,Z}^{\text{atomo}} = M_{A,Z}^{\text{nucleo}} + Zm_e - B_{A,Z}^{\text{elettroni}}/c^2 \simeq M_{A,Z}^{\text{nucleo}} + Zm_e \quad (\text{B.1.4})$$

Riepiloghiamo le definizioni precedenti nel caso dell'atomo di idrogeno:

$$\begin{aligned} m_p &\approx 938.272\text{MeV}/c^2 \\ m_n &\approx 939.565\text{MeV}/c^2 \\ m_n - m_p &\approx 1.293\text{MeV}/c^2 \\ m_e &\approx 0.511\text{MeV}/c^2 \\ M_{1,1}^{\text{atomo}} &\simeq m_p + m_e \approx 938.783\text{MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (\text{B.1.5})$$

I valori delle masse atomiche $M_{A,Z}^{\text{atomo}}$ sono reperibili in vari database, anche sul web, per tutte le diverse specie conosciute di atomi neutri. Di norma non sono indicate direttamente le masse, ma si introduce una grandezza $\Delta_{A,Z}$ "eccesso di massa" definita come

$$\Delta_{A,Z} = M_{A,Z}^{\text{atomo}} - Am_u = M_{A,Z}^{\text{atomo}} - \frac{A}{12}M_{12,6}^{\text{atomo}} \quad \text{quindi} \quad M_{A,Z}^{\text{atomo}} = \Delta_{A,Z} + Am_u \quad (\text{B.1.6})$$

Nel sito

<https://www.nndc.bnl.gov/wallet/wall47.pdf>

che utilizzeremo estensivamente per studiare decadimenti e reazioni nucleari, potete trovare tutti i valori degli eccessi di massa attualmente conosciuti, ed iniziare a familiarizzare con i nuclei atomici.

Nota: talvolta (come nel testo [36]) la grandezza $\Delta_{A,Z}$ viene invece chiamata "difetto di massa".

Nota: $\Delta_{A,Z}$ è quindi positivo se l'atomo ha una energia media di legame minore di quella del ^{12}C , negativo se viceversa.

Nota: nelle tabelle si riporta $\Delta_{A,Z}$ invece della massa atomica, perchè è la grandezza che serve direttamente a calcolare il Q -valore o l'energia di soglia per una reazione in cui il numero di neutroni ed il numero di protoni si conservano (vedi Sez. (B.6)).

Esercizio B.1.1: calcolare la massa di ^{197}Au , ^{14}N , ^{14}C oltre ad altre due specie a vostra scelta.



B.2 Dimensioni atomiche

Precisiamo subito che l'interazione elettromagnetica e la meccanica quantistica sono necessarie per spiegare le proprietà atomiche, fra cui le dimensioni ed i livelli energetici, come vedrete nel corso di Meccanica Quantistica. Modelli precedenti alla meccanica quantistica (atomo di Thomson, di Rutherford, di Bohr) sono comunque utili perchè hanno via via fornito preziose indicazioni sulla modellizzazione dell'atomo.

B.2.1 Modello atomico di Bohr

Un modello semiclassico dell'atomo idrogenoide, dovuto a Bohr, permette di calcolare le energie di legame elettroniche degli atomi idrogenoidi, cioè degli atomi con un nucleo puntiforme di carica Ze ed un solo elettrone che gli orbita intorno con un moto circolare uniforme. Il modello utilizza:

- l'ipotesi che il moto semiclassico di un elettrone attorno ad una carica fissa puntiforme sia circolare, uniforme, non relativistico e dovuto alla sola forza di Coulomb;
- l'ipotesi di Bohr, secondo la quale il momento angolare orbitale può solo essere un multiplo intero della costante di Planck ridotta $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.0554 \times 10^{-34} \text{ Js}$.

Dalle due ipotesi di cui sopra segue

$$\begin{cases} m_e v R = n \hbar \\ \frac{m_e v^2}{R} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \end{cases} \implies \begin{cases} v = \frac{n\hbar}{m_e R} \\ m_e v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \end{cases} \implies m_e \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 R^2} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{B.2.1})$$

e si determina il raggio di un atomo idrogenoide

$$R = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z m_e e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0 , \quad (\text{B.2.2})$$

dove si è definito il raggio di Bohr dell'atomo di idrogeno

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 5.3 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.531 \text{ \AA} = 53 \text{ pm} . \quad (\text{B.2.3})$$

Nel modello di Bohr (come in quello di Rutherford, da cui esso prende spunto) un atomo di idrogeno è quindi “ pieno di vuoto”, essendo formato da un nucleo piccolissimo ed elettroni puntiformi che orbitano a grande distanza da esso. Con lo stesso modello si calcolano i livelli energetici:

$$E_n = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\frac{m_e e^4 Z^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} \approx -\frac{Z^2}{n^2} 13.6 \text{ eV} . \quad (\text{B.2.4})$$

Per l'atomo di idrogeno ($Z = 1$) questi livelli sono rappresentati in figura Fig. (B.1) e spiegano molto bene le linee spettrali degli atomi idrogenoidi. Accade infatti che un elettrone che si trovi in uno stato con $n > 1$ può transire spontaneamente ad uno stato con energia inferiore, irraggiando energia elettromagnetica sotto forma di un quanto di luce o “fotone” di energia $E_{n'} - E_n$ (con $n' < n$). Viceversa un atomo in un livello con energia E_n , se investito da un fotone di energia $E_{n'} - E_n$ (con $n' > n$), potrà spostarsi sul nuovo livello. Questi sono due esempi, rispettivamente, di “decadimenti spontanei” e di “risonanze” che saranno trattati nella Parte (???) e (II) rispettivamente.

Notiamo che il modello di Bohr non effettua previsioni ragionevoli per atomi complessi, per i quali occorre utilizzare altri modelli.

Nota importante: è fondamentale familiarizzare con le varie unità di misura e con alcune espressioni molto utili per effettuare valutazioni numeriche. Essenziali sono le seguenti espressioni:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \text{costante di struttura fine}$$

$$\hbar c \approx 1.05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{-8} \text{ J m} \approx \frac{3.15 \times 10^{-26}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV m} \approx 197 \text{ MeV fm} . \quad (\text{B.2.5})$$



Tramite queste costanti si possono calcolare altre quantità derivate molto facilmente, quali ad esempio la lunghezza d'onda Compton

$$\frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} \approx \frac{197 \text{ MeV fm}}{0.511 \text{ MeV}} \approx 386 \text{ fm} , \quad (\text{B.2.6})$$

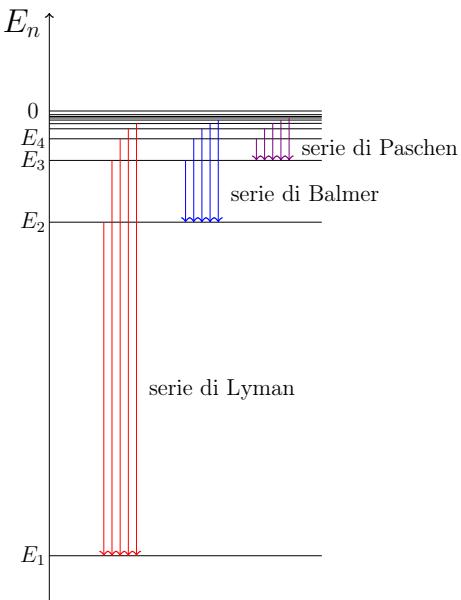


Figura B.1: Livelli energetici dell'atomo di idrogeno e serie spettrali associate ai decadimenti nel fondamentale (serie di Lyman), nel primo eccitato (serie di Balmer) e nel secondo eccitato (serie di Paschen).

il raggio atomico di Bohr

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{e^2} \frac{\hbar c}{m_e e^2} = \frac{1}{\alpha} \lambda_c \approx 5.3 \times 10^4 \text{ fm} = 0.53 \text{ \AA} , \quad (\text{B.2.7})$$

la velocità di un elettrone in un atomo idrogenoide di Bohr

$$v = n \frac{\hbar}{mR} = n \frac{\hbar}{m} \frac{Z}{n^2 a_0} = \frac{Z}{n} \alpha c , \quad (\text{B.2.8})$$

l'energia dei livelli degli atomi idrogenoidi di Bohr

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{m_e c^2}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{m_e c^2}{2} \alpha^2 . \quad (\text{B.2.9})$$

B.2.2 Gli atomi in fisica quantistica

Per quanto riguarda i modelli quantistici degli atomi, è sufficiente avere le nozioni di base ricevute nel corso di Chimica. In particolare ricordiamo che con buona approssimazione gli elettroni si trovano in “orbitali” e la probabilità di trovare un elettrone in un orbitale con una posizione r, θ, ϕ (coordinate sferiche) rispetto al nucleo è pari al modulo quadro della “funzione d’onda”:

$$P_{nl}(r, \theta, \phi) = |\Psi_{nl}(r, \theta, \phi)|^2 \quad (\text{B.2.10})$$

Nota: la forma esplicita delle funzioni d’onda si ottiene risolvendo l’equazione di Schrodinger, vedi il corso di Meccanica Quantistica, ed in generale per un atomo con Z elettroni la funzione d’onda atomica dipende dalle posizioni di tutti gli Z elettroni. Gli orbitali emergono nella approssimazione autoconsistente ad elettroni indipendenti.

È notevole il fatto che i livelli energetici degli atomi idrogenoidi calcolati con il modello di Bohr e con la meccanica quantistica coincidano (almeno fino a che si trascurano gli effetti legati

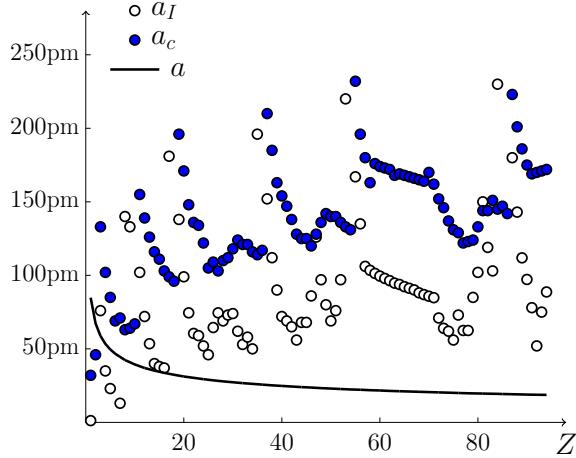


Figura B.2: Andamento con Z delle varie definizioni di raggio atomico: raggio ionico a_I , raggio covalente a_c e raggio medio a stimato nella approssimazione di Thomas-Fermi (dati riportati in $\text{pm} = 10^{-12}\text{m}$).

allo spin degli elettroni). È anche notevole il fatto che il raggio di Bohr dell'atomo di idrogeno sia un parametro fondamentale con cui la meccanica quantistica fornisce la probabilità di trovare l'elettrone ad una distanza r dal nucleo. Per esempio nello stato fondamentale ($n = 1$) la funzione d'onda risulta essere

$$\Psi_{10}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \quad (\text{B.2.11})$$

e la probabilità di trovare un elettrone in un elemento di volume dV a distanza r dal nucleo è quindi

$$P_{10}(r, \theta, \phi)dV = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} dV. \quad (\text{B.2.12})$$

Notiamo che la probabilità totale è normalizzata in quanto $\int P_{10}(r, \theta, \phi)dV = 1$.

Per quanto riguarda la “visualizzazione” della distribuzione degli elettroni in un atomo complesso, nell’ambito della meccanica quantistica questa può essere realizzata introducendo una “densità media degli elettroni in un atomo” $\rho_{el}(r, \theta, \phi)$, normalizzata con $\int \rho_{el}(r, \theta, \phi)dV = Z$. La conoscenza di tale densità risulta essere fondamentale per la spiegazione di molti effetti, alcuni dei quali (scattering Rayleigh, perdita di energia per collisioni, per irraggiamento, ...) saranno studiati più avanti nel corso. La misura della densità elettronica può essere effettuata tramite processi di urti di particelle o di radiazione e. m. (i fotoni) sull’atomo: si veda più avanti la discussione sui fattori di forma elettromagnetici in Sez. (6.4).

La distribuzione di carica elettronica tende a zero rapidamente a grande distanza, tuttavia formalmente è non nulla fino a distanza infinita, per cui nei vari contesti occorre essere chiari sulla definizione di “raggio di un atomo” che si sta utilizzando, in quanto vi sono diverse definizioni operative anche molto diverse fra di loro.

Le definizioni principali sono:

Raggio Ionico (nel seguito indicato con a_I) Viene definito misurando la distanza tra nuclei di ioni uniti da un legame ionico (come per esempio NaCl). a_I si può misurare tramite la diffrazione con raggi X; spostandosi da sinistra a destra lungo una riga della tavola degli elementi a_I decresce perché aumenta la carica nucleare senza che si debbano riempire orbitali elettronici più esterni. Inoltre a_I cresce spostandosi dall’alto in basso lungo una colonna della tavola periodica perché in questo caso si devono via riempire orbitali più esterni.

Simbolo	Z	a_I	a_c	a
H	1	1.2	32	84.8
He	2		46	67.3
Li	3	76	133	58.8
Be	4	35	102	53.4
B	5	23	85	49.6
C	6		69	46.7
N	7	13	71	44.3
O	8	140	63	42.4
F	9	133	64	40.8
Ne	10		67	39.4
Na	11	102	155	38.1
Mg	12	72	139	37.0
Al	13	53.5	126	36.1
Si	14	40	116	35.2
P	15	38	111	34.4
S	16	37	103	33.7
Cl	17	181	99	33.0
Ar	18		96	32.4
K	19	138	196	31.8
Ca	20	99	171	31.2
Sc	21	74.5	148	30.7
Ti	22	60.5	136	30.3
V	23	59	134	29.8
Cr	24	52	122	29.4
Mn	25	46	105	29.0
Fe	26	64.5	109	28.6
Co	27	74.5	103	28.3
Ni	28	69	110	27.9
Cu	29	73	112	27.6
Zn	30	74	118	27.3
Ga	31	62	124	27.0
Ge	32	53	121	26.7
As	33	58	121	26.4
Se	34	50	116	26.2
Br	35	196	114	25.9
Kr	36		117	25.7
Rb	37	152	210	25.4
Sr	38	112	185	25.2
Y	39	90	163	25.0
Zr	40	72	154	24.8
Nb	41	69	147	24.6
Mo	42	65	138	24.4
Tc	43	56	128	24.2
Ru	44	68	125	24.0
Rh	45	68	125	23.8
Pd	46	86	120	23.7
Ag	47	126	128	23.5

Simbolo	Z	a_I	a_c	a
Cd	48	97	136	23.3
In	49	80	142	23.2
Sn	50	69	140	23.0
Sb	51	76	140	22.9
Te	52	97	136	22.7
I	53	220	133	22.6
Xe	54		131	22.4
Cs	55	167	232	22.3
Ba	56	135	196	22.2
La	57	106.1	180	22.0
Ce	58	103.4	163	21.9
Pr	59	101.3	176	21.8
Nd	60	99.5	174	21.7
Pm	61	97.9	173	21.5
Sm	62	96.4	172	21.4
Eu	63	94.7	168	21.3
Gd	64	93.8	169	21.2
Tb	65	92.3	168	21.1
Dy	66	91.2	167	21.0
Ho	67	90.1	166	20.9
Er	68	88.1	165	20.8
Tm	69	86.9	164	20.7
Yb	70	85.8	170	20.6
Lu	71	84.8	162	20.5
Hf	72	71	152	20.4
Ta	73	64	146	20.3
W	74	62	137	20.2
Re	75	56	131	20.1
Os	76	73	129	20.0
Ir	77	62.5	122	19.9
Pt	78	62.5	123	19.8
Au	79	85	124	19.8
Hg	80	102	133	19.7
Tl	81	150	144	19.6
Pb	82	119	144	19.5
Bi	83	103	151	19.4
Po	84	230	145	19.4
At	85		147	19.3
Rn	86		142	19.2
Fr	87	180	223	19.1
Ra	88	143	201	19.1
Ac	89	111.9	186	19.0
Th	90	97.2	175	18.9
Pa	91	78	169	18.9
U	92	52	170	18.8
Np	93	75	171	18.7
Pu	94	88.7	172	18.7

Tabella B.1: Raggi atomici secondo le varie definizioni: raggio ionico a_I , raggio covalente a_c e raggio medio a calcolato in approssimazione di Thomas-Fermi. Tutti i dati sono riportati in unità di 10^{-12}m , dati da https://en.wikipedia.org/wiki/Ionic_radius e https://en.wikipedia.org/wiki/Covalent_radius.

Raggio covalente (nel seguito indicato con a_C) È definito come la metà della “lunghezza di legame”, *i. e.* la distanza tra i nuclei di due atomi identici uniti da un legame covalente, per esempio il gruppo O-O nei perossidi. Si può misurare tramite la diffrazione con raggi X. Anche per il raggio covalente si nota una dipendenza per righe e colonne della tavola periodica, dipendenza che è legata alla struttura a shell degli atomi.

Raggio quadratico medio È definito come la radice quadrata del valore medio della distanza al quadrato degli elettroni dal nucleo; per un atomo neutro si calcola come la radice di

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 \rho_{el}(r, \theta, \phi) dV}{\int \rho_{el}(r, \theta, \phi) dV} . \quad (\text{B.2.13})$$

Non è facile da misurare direttamente, tuttavia emerge naturalmente nel limite di bassa energia dei processi di urto, vedi ad es. Sez. (6.4).

Raggio medio (nel seguito indicato con a) È definito come il raggio entro il quale si trova il 50% della carica elettronica, quindi si esprime come quel valore di a per cui

$$\int_0^a dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho_{el}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho_{el}(r, \theta, \phi) . \quad (\text{B.2.14})$$

Come il precedente, non è facile da misurare direttamente e usualmente si valuta tramite processi di urto di particelle su atomi.

In Fig. (B.2) sono riportati i raggi atomici secondo le varie definizioni, mentre i corrispondenti valori numerici sono riportati in Tab. (B.1). Si noti che per i raggi ionici e covalenti sono riportati i dati sperimentali, mentre per il raggio medio è riportata la previsione del modello di Thomas-Fermi, secondo il quale il 50% della carica elettronica si trova entro un raggio che vale approssimativamente

$$a \approx \frac{1.6}{Z^{1/3}} a_0 . \quad (\text{B.2.15})$$

Per le idee del modello di Thomas-Fermi vedi Sez. (??), per maggiori dettagli vedi ad es. [26] §70 o [27] §22.7.1.

B.3 Nuclei e dimensioni nucleari

Un nucleo occupa una regione dello spazio il cui raggio varia da 1 a 10fm ed è composto da Z protoni ed N neutroni. È quindi ovvio che la carica totale di un nucleo sia pari a Ze , dove e è il valore assoluto della carica elementare $e \approx 1.602 \times 10^{-19} C$.

Anche per i nuclei si utilizza la stessa classificazione delle specie atomiche, per cui si dicono:

isobari nuclei con stesso A , diversi Z, N , ad esempio 3_1H_2 , 3_2He_1

isotopi nuclei con stesso Z , diversi A, N , ad esempio 3_1H_2 , 2_1H_1

isotonici nuclei con stesso N , diversi Z, A , ad esempio 3_1H_2 , 4_2He_2

Attenzione: la simbologia ${}_Z^AX_N$ viene comunemente utilizzata sia per indicare un nucleo, sia per indicare un atomo. Nel corso di una discussione è quindi fondamentale chiarire a quale struttura, se nucleo o atomo, ci si riferisce. In particolare questo chiarimento è rilevante nelle discussioni dei decadimenti radioattivi.

Come già accennato, un nucleo occupa una regione dello spazio il cui raggio varia da 1 a 10fm. In particolare un singolo protone o un singolo neutrone (neutrone e protone sono detti “nucleoni”) occupano una regione dello spazio di raggio $R_N \approx 1.25\text{fm}$.

La misura dei raggi nucleari viene effettuata tipicamente tramite processi di urto (detto anche “scattering”), dei quali i più importanti sono lo scattering Rutherford e lo scattering di elettroni



di alta energia su nuclei **aggiungere puntatori**. I risultati ottenuti tramite questi due processi si possono quindi considerare due differenti definizioni operative della misura dei raggi nucleari: essi saranno descritti nei capitoli successivi. I due metodi forniscono dei valori del raggio di un nucleo lievemente differenti fra di loro, ma non così differenti come nel caso delle varie definizioni di raggio atomico.

Entrambi i metodi (scattering Rutherford o di elettroni di alta energia) forniscono – in prima approssimazione e per $A \gg 1$ – un valore del raggio nucleare che dipende solamente dal peso atomico A :

$$R_A \simeq r_0 A^{1/3} + r_{skin} \approx (1.25 A^{1/3} + 2) \text{ fm} \quad (\text{B.3.1})$$

Nota: protoni e neutroni isolati hanno un raggio $R_N \approx 1.25 \text{ fm}$; ricordare che la formula precedente vale per $A \gg 1$ (tipicamente per $A > 4$ produce risultati ragionevoli).

Fu subito notato che la sola interazione coulombiana non può confinare in uno spazio così ristretto Z protoni: occorre quindi ipotizzare l'esistenza di una nuova forza “forte” fra due nucleoni qualsiasi che:

- a distanze dell'ordine di 1 fm sia attrattiva e di modulo superiore a quella coulombiana, pur andando velocemente a zero per distanze maggiori;
- l'energia potenziale di tale forza sia in gradi di bilanciare l'energia dovuta alla repulsione elettrostatica fra due protoni posti a distanza $2r_0 \approx 2.5 \text{ fm}$:

$$-U_{\text{forte}} > \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2r_0} = \frac{\alpha\hbar c}{2r_0} \approx 0.6 \text{ MeV} \quad (\text{B.3.2})$$

Per esercizio si può costruire un modellino naïf dei nuclei, in cui si può ipotizzare che fra due nucleoni l'energia potenziale dovuta alla forza forte sia pressoché nulla per distanze superiori a due raggi del nucleone, mentre a distanze di poco inferiori essa cresca molto velocemente in modo da impedire ai due nucleoni di “compenetrarsi”; in corrispondenza della distanza in cui i due nucleoni vengono a contatto vi sia infine una “buca” di potenziale. Si ottiene quindi un andamento del tipo riportato in Fig. (B.3), qualitativamente simile a quello dei potenziali di Lennard-Jones utilizzati per descrivere le interazioni tra molecole; ovviamente le scale di lunghezza e di energia in gioco sono completamente diverse rispetto al caso molecolare. Il valore della profondità della “buca” può corrispondere – come ordine di grandezza – all'energia di legame del nucleo del deuterio, *i. e.* alla differenza fra la massa del deutone e la somma delle masse del protone e del neutrone ($\approx 2.2 \text{ MeV}$, vedi sezione successiva). In pratica, l'energia potenziale dell'interazione forte agisce in modo da “incollare” due nucleoni quando essi vengono a contatto. Proprio da questa considerazione deriva il nome di “gluoni” (dall'inglese glue=colla) dei quanti responsabili dell'interazione forte.

B.4 Le masse dei nuclei e l'energia di legame nucleare

Ricordiamo che la massa di un atomo, trascurando ragionevolmente le energie di legame degli elettroni, si può approssimare come $M_{A,Z}^{\text{atomo}} \simeq M_{A,Z}^{\text{nucleo}} + Zm_e$, e che introducendo l'eccesso di massa e l'unità di massa atomica essa si può anche scrivere come $M_{A,Z}^{\text{atomo}} = Am_u + \Delta_{A,Z}$. La massa di un nucleo si può poi scrivere come la somma delle masse di tutti i suoi componenti, cui si deve sottrarre la “energia di legame” o “binding energy” (indicata con $B_{A,Z}$) dovuta all'interazione fra tutti i nucleoni che compongono il nucleo:

$$M_{A,Z}^{\text{nucleo}} = Zm_p + Nm_n - B_{A,Z} . \quad (\text{B.4.1})$$

Quindi la massa atomica si può riscrivere come

$$M_{A,Z}^{\text{atomo}} \simeq Zm_p + Nm_n - B_{A,Z} + Zm_e \simeq ZM_{1,1}^{\text{atomo}} + Nm_n - B_{A,Z} . \quad (\text{B.4.2})$$

Nota: l'energia di legame è sempre positiva ed è l'opposto dell'energia potenziale di tutte le forze agenti fra i nucleoni.

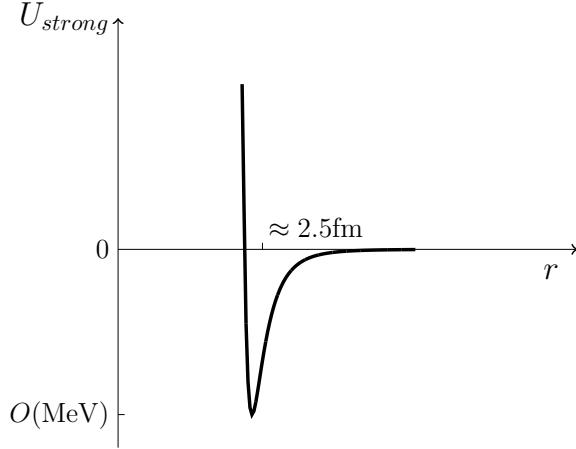


Figura B.3: Andamento qualitativo del potenziale forte tra nucleoni.

Nota: l'energia di legame nucleare è dovuta sia all'interazione forte, sia all'interazione elettromagnetica.

Nota: $B_{A,Z}$ ha un significato fisico diretto: è l'energia necessaria per separare un nucleo negli A nucleoni che lo costituiscono.

Per completezza (ed esercizio) ricaviamo la relazione che intercorre tra l'energia di legame $B_{A,Z}$ ed il difetto di massa $\Delta_{A,Z}$:

$$ZM_{1,1}^{atomo} + Nm_n - B_{A,Z} \simeq Am_u + \Delta_{A,Z} \quad (\text{B.4.3})$$

(dove il \simeq è sempre dovuto al fatto che stiamo trascurando l'energia di legame elettronica) quindi

$$\begin{aligned} B_{A,Z} &\simeq ZM_{1,1}^{atomo} + Nm_n - Am_u - \Delta_{A,Z} = \\ &= ZM_{1,1}^{atomo} + Nm_n - (Z + N)m_u - \Delta_{A,Z} \simeq \\ &\simeq Z(m_p + m_e - m_u) + N(m_n - m_u) - \Delta_{A,Z} = \\ &= Z\Delta_{1,1} + N\Delta_{1,0} - \Delta_{A,Z} \approx \\ &\approx 7.29\text{MeV} \times Z + 8.07\text{MeV} \times N - \Delta_{A,Z}, \end{aligned} \quad (\text{B.4.4})$$

dove si sono usate Eq. (B.1.2) e Eq. (B.1.5) per calcolare $\Delta_{1,1}$ e $\Delta_{1,0}$. Utilizzando questa relazione e gli eccessi di massa atomici riportati in

<https://www.nndc.bnl.gov/wallet/wall47.pdf>

è possibile ricostruire le energie di legame nucleari.

Ad esempio l'energia di legame di ^{238}U è circa 1801.6MeV ($B_{A,Z}/A \approx 7.57\text{MeV}$), l'energia di legame di ^{16}O è circa 127.5MeV ($B_{A,Z}/A \approx 7.97\text{MeV}$), l'energia di legame di ^{12}C è circa 92.2MeV ($B_{A,Z}/A \approx 7.68\text{MeV}$), l'energia di legame di ^4He è circa 28.3MeV ($B_{A,Z}/A \approx 7.08\text{MeV}$). Come potete vedere l'energia di legame nucleare è notevole, addirittura nel caso dell'Uranio è circa uguale alla massa di due nucleoni. L'entità delle energie in gioco (circa 1% della massa atomica) è il motivo per cui i fenomeni di fissione e fusione nucleari sono rilevanti ai fini della produzione di energia, anche se i benefici sono fortemente limitati dalle problematiche dello smaltimento delle scorie radioattive e dai rischi di incidenti con rilasci incontrollati di energia.

La grandezza $B_{A,Z}/A$ (detta “energia media di legame per nucleone”) è tanto maggiore quanto più un nucleo è stabile. Curiosamente, in quasi ogni libro è scritto che essa ha un massimo in corrispondenza di ^{56}Fe ($Z = 26$), mentre in realtà il podio degli elementi più stabili in natura è (dal più al meno legato) ^{62}Ni ($Z = 28$), ^{58}Fe e ^{56}Fe , vedi [47]. Un grafico dell'energia di legame per nucleone è riportato in Fig. (B.4), da cui si vede che per la maggior parte degli elementi si ha $B_{A,Z}/A \approx 8\text{MeV}$; inoltre dalla figura si possono prevedere due interessanti possibilità:

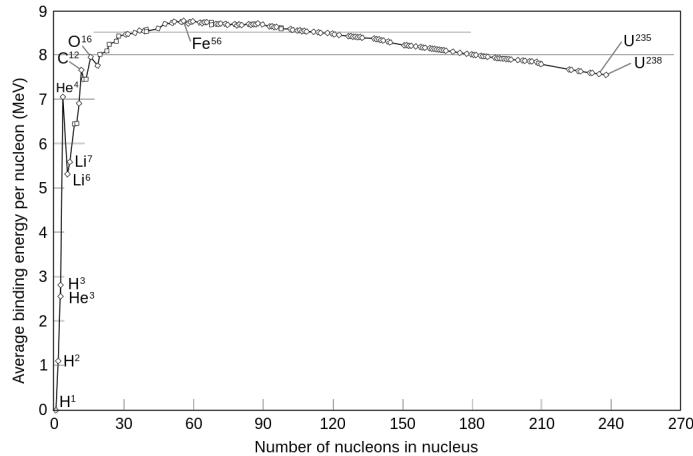


Figura B.4: Andamento con A dell’energia di legame nucleare per nucleone $B_{A,Z}/A$
https://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_binding_energy

- è possibile “fondere” due nuclei molto leggeri ed ottenere un nucleo più pesante guadagnando energia (“fusione nucleare”);
- è possibile “scindere” un nucleo molto pesante ottenendo nuclei più leggeri guadagnando – anche in questo caso – energia (“fissione nucleare”).

B.4.1 Il modello “a goccia” e i primi termini della formula semiempirica di massa

Esiste un semplice modello, chiamato “modello a goccia”, che riesce a spiegare alcune importanti misure sperimentali sui nuclei, in particolare il termine del raggio nucleare $r_0 A^{1/3}$ ed i termini più importanti della funzione $B_{A,Z}$.

Il modello ipotizza che ogni nucleone sia una sfera di raggio r_0 e che tutte queste sfere siano impacchettate a comporre un nucleo approssimativamente sferico di volume A volte il volume del singolo nucleone. Il tutto si può paragonare a tante gocce di liquido incomprimibile che si uniscono insieme in simmetria sferica, da cui il nome del modello. Questa schematizzazione spiega bene il termine $r_0 A^{1/3}$, mentre il termine di “skin” (=“pelle”) viene interpretato come lo spessore della regione in cui la densità di nucleoni (o comunque di materia nucleare) decresce fino ad annullarsi.

Per quanto riguarda la massa di un nucleo, si può assumere che vi sia una energia di legame (dovuta all’interazione “forte”) per ogni coppia di nucleoni che vengono a contatto, tipicamente dell’ordine di 2MeV. Il contributo dominante all’energia di legame del nucleo risulta quindi proporzionale al numero di nucleoni e dunque al volume del nucleo stesso. Questo termine si chiama termine “di volume” e si scrive $B_{A,Z} \approx a_V A$. Poichè ogni nucleone interno ad un nucleo è in contatto diretto con altri 12 nella configurazione di massimo impacchettamento, si ottiene la stima $a_V \approx 12\text{MeV}$ (l’energia di legame di una coppia è circa 2MeV, ma occorre dividere per 2 perché ogni nucleone viene contato due volte). Tale previsione è in ragionevole accordo col dato sperimentale $a_V \approx 15.5\text{MeV}$.

Nonostante il termine di volume sia il termine dominante dell’energia di legame, esistono correzioni la cui origine fisica è facilmente interpretabile. Occorre infatti tenere conto che i nucleoni sulla superficie non toccano gli altri nucleoni su ogni loro lato, per cui occorre sottrarre un contributo proporzionale alla superficie del nucleo stesso: $B_{A,Z} = a_V A - a_S A^{2/3}$. Questo termine “di superficie” vale (dato sperimentale) $a_S \approx 16.8\text{MeV}$. Inoltre occorre inserire la repulsione coulombiana, che introduce un termine proporzionale al quadrato della carica del nucleo (Z^2) ed inversamente

proporzionale al raggio del nucleo stesso

$$B_{A,Z} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} . \quad (\text{B.4.5})$$

La costante del termine coulombiano è fissata dall'energia coulombiana di una sfera uniformemente carica di carica totale Ze e raggio $R_A \approx r_0 A^{1/3}$ (con $r_0 \approx 1.25\text{fm}$), che è

$$\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R_A} = \frac{3}{5} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \frac{\alpha\hbar c}{r_0} \approx 0.69\text{MeV} \frac{Z^2}{A^{1/3}} , \quad (\text{B.4.6})$$

in ottimo accordo con il dato sperimentale $a_C \approx 0.72\text{MeV}$.

Ricordiamo che l'energia di una sfera carica uniformemente si calcola integrando $\frac{Q_r dQ_r}{4\pi\epsilon_0 r}$ sul volume della sfera, dove Q_r è la carica contenuta in una sfera di raggio r . Abbiamo quindi $Q_r = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$, $dQ_r = 4\pi\rho r^2 dr$ e dunque

$$\int_0^R \frac{Q_r}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ_r}{dr} dr = \frac{(4\pi)^2}{15(4\pi\epsilon_0)} \rho^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{B.4.7})$$

dove Q è la carica totale della sfera di raggio R e densità di carica ρ .

Nota: la modellizzazione tramite Z^2 del termine coulombiano è intuitivamente legata ad una distruzione continua di carica nel nucleo; una modellizzazione alternativa è quella che fa uso di Z particelle cariche, nel qual caso si ottiene una espressione proporzionale a $Z(Z - 1)$. Le due descrizioni sono equivalenti dal punto di vista operativo, ma ovviamente il coefficiente numerico ottenuto fissando i dati sperimentali risulterà leggermente diverso nei due casi.

B.4.2 La formula semi-empirica di massa completa e alcune importanti conseguenze

Nella formula semiempirica di massa vi sono ulteriori termini non previsti dal “modello a goccia” che sono spiegabili da modelli tipo il modello “a shell” o “a gas di Fermi”. Tali modelli sono basati sulla meccanica quantistica, con particolare riferimento al fatto che nuclei con un differente numero di protoni e di neutroni dovrebbero avere occupati – per il principio di Pauli – stati di energia più elevata. In particolare vengono introdotti due termini, denominati ripetutamente “di simmetria” e “di pairing”, per la spiegazione dei quali rimandiamo a corsi specifici di fisica nucleare.

Il risultato finale per la miglior espressione della “formula semiempirica di massa” è:

$$B_{A,Z} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(Z - N)^2}{A} + \delta_{pair} , \quad (\text{B.4.8})$$

con i parametri che sono stati ricavati da fit ai dati sperimentali delle centinaia di specie atomiche di cui è stata misurata la massa con sufficiente precisione:

$$\begin{aligned} a_V &\approx 15.5\text{MeV} , \\ a_S &\approx 16.8\text{MeV} , \\ a_C &\approx 0.72\text{MeV} , \\ a_{sym} &\approx 23\text{MeV} , \end{aligned} \quad (\text{B.4.9})$$

$$\delta_{pair} = \begin{cases} a_p A^{-3/4} & Z, N \text{ pari} \\ -a_p A^{-3/4} & Z, N \text{ dispari} \\ 0 & A \text{ dispari} \end{cases} , \quad a_p \approx 34\text{MeV} .$$

Nota: il termine a_{sym} deriva dal modello a gas di Fermi dei nuclei

Nota: il termine δ_{pair} spiega, per esempio, la forte stabilità delle particelle α (nuclei di He)

Esercizio B.4.1:



- Confrontare i dati sperimentali di $B_{A,Z}$ con la previsione della formula semiempirica di massa per alcune specie atomiche a vostra scelta.

- Costruire il grafico unidimensionale della binding energy in funzione di A per $N = Z = A/2$ evidenziando di volta in volta il contributo dei vari termini (i.e. iniziare con il solo termine di volume, poi inserire il termine di superficie, etc...).
- Costruire il grafico bidimensionale di $B_{A,Z}$, evidenziando di volta in volta il contributo dei vari termini.
- Costruire il grafico unidimensionale della binding energy in funzione di Z , selezionando (dai dati sperimentali o usando la formula semiempirica di massa) per ogni Z l'isotopo più stabile di ogni specie atomica.

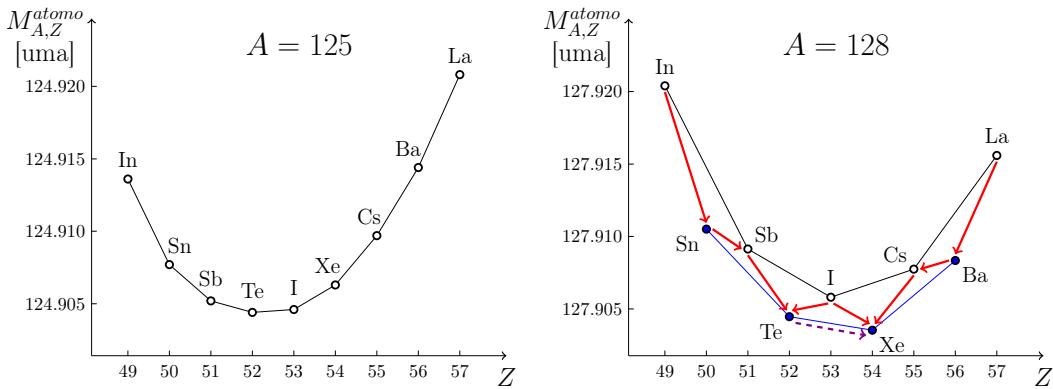


Figura B.5: Dipendenza da Z delle masse atomiche per $A = 125$ (dispari) e $A = 128$ pari. Nel caso $A = 128$ sono anche indicate con frecce rosse i possibili decadimenti β^- (freccia verso destra) e β^+ (freccia verso sinistra), mentre la freccia tratteggiata corrisponde ad decadimento doppio β .

Vediamo ora una importante conseguenza del termine di pairing: gli atomi isobari (stesso A) hanno una massa che ha una dipendenza quadratica in funzione di Z , infatti

$$\begin{aligned} M_{A,Z}^{atomo} &= ZM_{1,1}^{atomo} + Nm_n - B_{A,Z} = \\ &\simeq ZM_{1,1}^{atomo} + (A - Z)m_n - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(Z - N)^2}{A} - \delta_{pair} = \quad (\text{B.4.10}) \\ &= \text{const}(A) + Z(M_{1,1}^{atomo} - m_n) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(Z - N)^2}{A} - \delta_{pair}. \end{aligned}$$

Si nota che per A dispari le masse degli atomi si dispongono su un'unica parabola (lato sinistro di Fig. (B.5)). Invece per A pari si nota che le masse degli atomi si dispongono alternativamente su due parabole traslate del doppio del termine di pairing (lato destro di Fig. (B.5)). Questo avrà un effetto importante per i decadimenti e soprattutto per il decadimento doppio beta.

B.5 Le tabelle “nuclear wallet cards” e la classificazione dei decadimenti nucleari

Esaminiamo i primi elementi della tavola periodica nelle tabelle “nuclear wallet cards” reperibili al sito

<https://www.nndc.bnl.gov/wallet/wall47.pdf> .

Si nota che, oltre a $\Delta_{A,Z}$, ogni nucleo è caratterizzato da altre costanti, che ne sintetizzano (o semplicemente segnalano) alcune sue proprietà.

I vari isotopi sono elencati in ordine di Z crescente e, successivamente, di A crescente e le varie colonne hanno i seguenti significati:

Nuclear Wallet Cards

Nuclide	Z	E1	A	Jπ	Δ (MeV)	T%, Γ, or Abundance	Decay Mode
0	n	1		1/2+	8.071	10.183 m 17	β^-
1	H	1		1/2+	7.289	99.9885% 70	
				2	1+	13.136	0.0115% 70
				3	1/2+	14.950	12.32 y 2
				4	2-	24.6	n
				5	(1/2+)	32.89	5.7 MeV 21
				6	(2-)	41.9	1.6 MeV 4
				7	(1/2+)	47.9	29×10 ⁻²³ y 7
2	He	3		1/2+	14.931	0.000134% 3	
				4	0+	2.425	99.99986% 3
				5	3/2-	11.23	0.60 MeV 2
				6	0+	17.592	801 ms 10
				7	(3/2)-	26.067	150 keV 20
				8	0+	31.609	119.1 ms 12
				9	1/2+	39.78	n
				10	0+	48.81	300 keV 200
							n

Figura B.6: Prime righe delle nuclear wallet cards.

colonna 1 vengono riportati il numero atomico Z , il simbolo dell'elemento chimico ed il suo peso atomico A

colonna 2 J è lo spin (momento angolare intrinseco) del nucleo in unità di \hbar mentre π è la sua parità intrinseca.

colonna 3 l'eccesso di massa $\Delta_{A,Z}$ dell'atomo neutro corrispondente

colonna 4 si distinguono vari casi a seconda della stabilità del nucleo

...% : percentuale in natura (abbondanza) tipicamente per gli isotopi stabili

$T_{1/2}$: “tempo di dimezzamento” (purchè misurabile direttamente in s=secondi, m=minuti, h=ore, y=anni) per isotopi instabili

Γ : “larghezza totale” (se $T_{1/2}$ non misurabile direttamente) per isotopi instabili. Tali grandezze fisiche sono spiegate dettagliatamente nella sezione sui decadimenti **aggiungere puntatore** Come “preview” forniamo la relazione fra il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$, la “vita media” τ e la larghezza totale Γ :

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}, \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 \approx 0.693\tau. \quad (\text{B.5.1})$$

colonna 5 modo di decadimento (per i soli nuclei instabili). È il modo (o i modi principali) di decadimento.

Elichiamo di seguito i principali modi di decadimento:

β^- : decadimento β^- , corrispondente a ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} Y_{N-1}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, dove $\bar{\nu}_e$ è un antineutrino elettronico ed è importante notare che l'atomo finale Y è ionizzato positivamente (decadimento debole, cioè dovuto alla “interazione debole”). Il decadimento β^- del nucleo corrisponde al processo “microscopico” $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

ε : indica sia un decadimento β^+ , corrispondente a ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1}^- + e^+ + \nu_e$, dove e^+ è un positrone (stessa massa di un elettrone ma carica opposta) e ν_e è un neutrino elettronico (decadimento debole), che il caso della cattura elettronica (EC), corrispondente a ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + \nu_e$ (decadimento debole). Il decadimento β^+ del nucleo corrisponde al processo “microscopico” $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$, che non può avvenire per un protone isolato ma può essere consentito all'interno di un nucleo a causa dell'energia di legame nucleare (vedi Esempl. (B.6.2)), mentre il processo EC corrisponde al processo “microscopico” $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$.

IT : transizione isomerica, cioè decadimento γ da stato eccitato nucleare, corrispondente a ${}^A_Z X_N^* \rightarrow {}^A_Z X_N$ (decadimento elettromagnetico)

n : decadimento neutronico, corrispondente a ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_Z Y_{N-1} + n$ (decadimento forte)

p : decadimento protonico, corrispondente a ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} Y_N^- + p$ (decadimento forte)

α : decadimento α , corrispondente a ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-2} Y_{N-2}^{--} + \alpha$, dove con il simbolo α si indica un nucleo di ${}^4_2 He_2$

SF : fissione spontanea, cioè separazione del nucleo in due o più elementi; usualmente vi sono molti stati finali possibili

$2\beta^-$: decadimento doppio β^- , corrispondente a ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+2} Y_{N-2}^{++} + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$. In pratica questo decadimento è identificabile sperimentalmente solo se è vietato ogni altro decadimento, quindi solo nelle situazioni con A pari in cui il termine di pairing inibisce il decadimento β^- semplice (vedi Fig. (B.5)). Questo canale di decadimento costituisce un banco di prova fondamentale per testare sperimentalmente la possibilità che il neutrino sia una particella di Majorana tramite la ricerca del decadimento $2\beta 0\nu$: ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+2} Y_{N-2}^{++} + 2e^-$.

3α : triplo decadimento α

$\beta - p$: decadimento β^- con successivo decadimento protonico

$\beta - n$: decadimento β^- con successivo decadimento neutronico

$\beta - \alpha$: decadimento β^- con successivo decadimento α

εp : EC o β^+ con successivo decadimento protonico

εn : EC o β^+ con successivo decadimento neutronico

εSF : EC o β^+ con successiva fissione spontanea.

B.6 Energie di soglia e Q -valori di reazioni o decadimenti nucleari

Per una generica reazione la somma delle masse nello stato iniziale può essere maggiore o minore della somma delle masse dei prodotti nello stato finale. Si definisce Q -valore la differenza fra la somma delle masse nello stato iniziale e la somma delle masse dei prodotti nello stato finale, moltiplicata per c^2 :

$$Q = \sum_{\text{iniziali}} m_i c^2 - \sum_{\text{finali}} m_f c^2. \quad (\text{B.6.1})$$

Nota: negli esempi che seguiranno si userà il sistema di unità naturali in cui $c = 1$ per semplicità.
Per una collisione

$Q > 0$: la reazione produce energia (processo esotermico);

$Q < 0$: la reazione assorbe energia (processo endotermico) ed è necessaria una certa energia di soglia per innescare il processo; l'energia di soglia è sempre maggiore o uguale a $|Q|$.

Per un decadimento

$Q > 0$: il decadimento è spontaneo;

$Q < 0$: il decadimento è vietato.

Per familiarizzare con i nuclei e gli atomi, proponiamo adesso alcuni esercizi introduttivi di calcolo del Q -valore

Esempio B.6.1: decadimento del neutrone

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e . \quad (\text{B.6.2})$$

Il neutrone libero (i. e. isolato e fuori da un nucleo) è instabile e la sua vita media è di circa 15 minuti, corrispondente ad un tempo di dimezzamento di circa 10 minuti. Per calcolare il Q -valore del processo usiamo il fatto che la massa del $\bar{\nu}_e$ è ad oggi sperimentalmente compatibile con zero ($\lesssim 1.1\text{eV}$) e comunque molto piccola rispetto a m_e , quindi usando la definizione Eq. (B.1.6) dell'eccesso di massa abbiamo

$$\begin{aligned} Q &= m_n - (m_p + m_e + m_{\bar{\nu}}) \simeq m_n - M_{1,1}^{\text{atomo}} = \\ &= m_u + \Delta_{1,0} - (m_u + \Delta_{1,1}) \approx (8.071 - 7.289)\text{MeV} = 782\text{KeV} . \end{aligned} \quad (\text{B.6.3})$$

Per fortuna l'energia di legame “forte” impedisce il decadimento del neutrone in molti nuclei, come per esempio nel nucleo di deuterio.

Esempio B.6.2: decadimenti β^+ . Il protone è stabile, infatti il Q -valore dell'ipotetico decadimento $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ è negativo

$$m_p - m_n - m_e \approx -1.804\text{MeV} .$$

In generale per il decadimento β^+ dato da ${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y^- + e^+ + \nu_e$ si ha

$$Q \simeq \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z-1} - 2m_e . \quad (\text{B.6.4})$$

poichè la massa dello ione Y^- è molto ben approssimabile (trascurando l'energia di legame dell'elettrone) con la somma della massa dell'atomo neutro Y e della massa elettronica m_e . Ad esempio per il decadimento ${}_{11}^{22}\text{Na}_{11} \rightarrow {}_{10}^{22}\text{Ne}_{12}^- + e^+ + \nu$ il Q -valore è dato da

$$Q \simeq \Delta_{22,11} - \Delta_{22,10} - 2m_e \approx -5.181\text{MeV} - (-8.024 - 1.022)\text{MeV} = 1.821\text{MeV} . \quad (\text{B.6.5})$$

Esempio B.6.3: decadimenti EC. Per la cattura elettronica ${}_Z^A X_N \rightarrow {}_{Z-1}^A Y_{N+1} + \nu_e$ si ha (in questo caso si trascura la differenza tra le due energie di legame elettroniche, non le energie di legame elettroniche)

$$Q \simeq \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z-1} \quad (\text{B.6.6})$$

Nei casi in cui sia il decadimento β^+ che la cattura elettronica sono possibili, viene preferito il decadimento β^+ rispetto alla cattura elettronica. Possiamo dire che entrambi i processi hanno la stessa “dinamica” elementare, ma che nel caso di cattura elettronica la probabilità che un elettrone sia in prossimità del nucleo ne riduce la probabilità rispetto al β^+ . Una trattazione quantitativamente accurata di questo argomento richiede l'utilizzo della meccanica quantistica ed in particolare della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo (la cosiddetta “regola d'oro” di Fermi).

Esempio B.6.4: calcolare il Q -valore del processo (Hg e Au indicano gli atomi)

$$p + {}_{80}^{198}\text{Hg}_{118} \rightarrow p + p + {}_{79}^{197}\text{Au}_{118}^- , \quad (\text{B.6.7})$$

nota come reazione degli alchimisti. Dare una stima della energia di soglia nel sistema in cui il Mercurio è inizialmente fermo (sistema del laboratorio).

$$\begin{aligned} Q &\simeq (m_p + M_{198,80}^{\text{atomo}}) - (m_p + M_{1,1}^{\text{atomo}} + M_{197,79}^{\text{atomo}}) = \\ &= 198m_u + \Delta_{198,80} - (m_u + \Delta_{1,1} + 197m_u + \Delta_{197,79}) \approx \\ &\approx -30.95\text{MeV} - (7.29 - 31.14)\text{MeV} = -7.10\text{MeV} , \end{aligned} \quad (\text{B.6.8})$$

quindi (poichè il Mercurio è molto più pesante del protone e $|Q| \ll m_p$ si può trascurare in prima approssimazione l'energia di rinculo del Mercurio ed usare $-Q$ come energia di soglia, vedi anche

Esemp. (B.6.5) ed esercizi a fine sezione) ci si aspetta una energia di soglia di circa 7.1MeV. Questo calcolo è esatto dal punto di vista cinematico ma non considera la dinamica del problema: non abbiamo tenuto conto che la reazione è una reazione forte, che avviene solo quando i nuclei vengono a contatto, quindi nel caso specifico quando sono ad una distanza (vedi Eq. (B.3.1))

$$d = r_{Hg} + r_p \approx (1.25 \times 198^{1/3} + 2 + 1.25)\text{fm} \approx 10.5\text{fm} . \quad (\text{B.6.9})$$

Questa distanza può essere raggiunta solo se nel sistema del laboratorio il protone ha una energia cinetica sufficiente a vincere la repulsione coulombiana fra i nuclei. Consideriamo per semplicità un urto centrale e utilizzando le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto non relativistiche, in quanto $|Q| \ll m_p$ e in prima battuta ci possiamo aspettare che il protone resti non relativistico anche con il nuovo calcolo. L'energia minima del protone per cui può avvenire la reazione è quella per la quale il protone e il mercurio arrivano ad essere relativamente fermi ad una distanza d , quindi indicando con v_0 la velocità iniziale del protone, con T la sua energia cinetica e con v_{CM} la velocità del centro di massa, dobbiamo avere

$$\begin{cases} m_p v_0 = (m_p + m_{Hg}) v_{CM} \\ T \geq \frac{1}{2} (m_p + m_{Hg}) v_{CM}^2 + \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \end{cases} . \quad (\text{B.6.10})$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda otteniamo che deve essere

$$T \geq \frac{1}{2} \frac{m_p^2}{m_p + m_{Hg}} v_0^2 + \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{m_p}{m_p + m_{Hg}} T + \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d} , \quad (\text{B.6.11})$$

da cui si trova

$$T \geq \left(1 + \frac{m_p}{m_{Hg}}\right) \frac{Z_{Hg} e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \approx 13.5\text{MeV} . \quad (\text{B.6.12})$$

Come ultima nota dobbiamo evidenziare che il calcolo dell'energia di soglia effettuato inizialmente trascurando la repulsione coulombiana diventa corretto in ambito quantistico, poiché il protone può “passare sotto la barriera” per effetto tunnel (si veda il corso di Meccanica Quantistica), pur se con bassa probabilità.

Esempio B.6.5: esplicitare la relazione tra il Q -valore e l'energia di soglia per un generico processo in cui due particelle di massa m_1 e m_2 (di cui m_2 ferma nel laboratorio) producono un numero arbitrario di particelle finali $m_f^{(1)}, \dots, m_f^{(n)}$:

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_f^{(1)} + \dots + m_f^{(n)} . \quad (\text{B.6.13})$$

Assumiamo che il Q -valore sia negativo e che quindi il processo necessiti di una energia di soglia non nulla. Effettueremo il calcolo utilizzando la relatività ristretta, in modo da non dover prestare attenzione al fatto che le energie in gioco non possono essere troppo grandi; incidentalmente questo non comporta un aggravio di calcoli o complicazioni di principio. Indicando con E_{cm} l'energia calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa abbiamo subito, utilizzando gli stati finali, che

$$E_{cm}^2 \geq \left(\sum_f m_f \right)^2 \quad (\text{B.6.14})$$

in quanto l'energia di ogni particella è maggiore o uguale alla sua massa a riposo e l'impulso totale nel sistema del centro di massa è nullo. Poiché E_{cm} si conserva ed è un invariante, può essere calcolata anche nel sistema del laboratorio, in cui m_1 è in moto e m_2 è ferma:

$$E_{cm}^2 = (E_1 + m_2)^2 - \vec{p}_1^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1 , \quad (\text{B.6.15})$$

dove E_1 e \vec{p}_1 sono rispettivamente l'energia e l'impulso nel sistema del laboratorio della particella di massa m_1 . Da queste relazioni troviamo subito l'energia di soglia

$$E_1 \geq \frac{\left(\sum_f m_f\right)^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} \quad (\text{B.6.16})$$

e risulta conveniente isolare il contributo cinetico a E_1 , definendo $E_1 = m_1 + T_1$. In questo modo si ottiene

$$T_1 \geq \frac{\left(\sum_f m_f\right)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} = \frac{\sum_f m_f + m_1 + m_2}{2m_2} |Q| . \quad (\text{B.6.17})$$

Sostituendo $\sum_f m_f = m_1 + m_2 + |Q|$ otteniamo infine

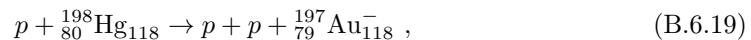
$$T_1 \geq \left(1 + \frac{2m_1 + |Q|}{2m_2}\right) |Q| . \quad (\text{B.6.18})$$

Una conseguenza immediata di questa relazione è il fatto che se la massa m_2 della particella ferma nel laboratorio è molto più grande della particella m_1 e del Q -valore allora l'energia di soglia è con buona approssimazione data da $|Q|$.

Esercizio B.6.1:



- calcolare il Q -valore del processo $D + D \rightarrow \alpha + \gamma$ (reazione di fusione nucleare) dove α e D indicano rispettivamente i nuclei di Elio e di Deuterio (${}^2_1\text{H}_1$). Dare una stima della energia di soglia nel sistema in cui uno dei nuclei di Deuterio ha energia cinetica trascurabile.
- calcolare il Q -valore e l'energia cinetica dei prodotti della reazione $n + {}^{10}\text{B} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^7\text{Li}$ in cui il neutrone è “termico” (energia cinetica $\approx 0.025\text{eV}$) ed il Boro è inizialmente fermo.
- Calcolare l'energia di soglia nel laboratorio



nel caso in cui il protone sia fermo e il mercurio è in moto.

La seconda reazione è spesso indicata come ${}^{10}\text{B}(n, \alpha){}^7\text{Li}$ ed è una delle reazioni più importanti per la cattura dei neutroni in quanto avviene con grande probabilità (formalmente è caratterizzata da una grande sezione d'urto, vedi prossime sezioni **aggiungi puntatore**).

Bibliografia

- [1] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons (1972).
- [2] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov e A. T. Fomenko. *Geometria contemporanea, volume 1*. Editori Riuniti (1999).
- [3] Y. Ohnuki. *Unitary representations of the Poincaré group and relativistic wave equations*. World Scientific (1988).
- [4] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons (1999).
- [5] O. L. Brill e B. Goodman. “Causality in the Coulomb Gauge”. Am. J. Phys., **35**, (1967) 832.
- [6] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Electrodynamics of Continuous Media*. Butterworth-Heinemann (1984).
- [7] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Teoria dei campi*. Editori Riuniti (2003).
- [8] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press (1984).
- [9] M. D’Elia. *Lezioni di meccanica classica*. Pisa University Press (2020).
- [10] P. A. M. Dirac. *Lectures on quantum mechanics*. Dover Publications (2001).
- [11] Y. Youngrau e S. Mandelstam. *Variational principles in dynamics and quantum theory*. Dover Publications (1979).
- [12] F. Rohrlich. *Classical Charged Particles*. World Scientific (2007).
- [13] S. L. Sobolev. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications (1989).
- [14] V. S. Vladimirov. *Equazioni della fisica matematica*. Edizioni MIR (1987).
- [15] M. Schwartz. *Principles of electrodynamics*. Dover Publications (1987).
- [16] J. Schwinger. “On the Classical Radiation of Accelerated Electrons”. Phys. Rev., **75**, (1949) 1912.
- [17] D. T. McDonald. “On the History of the Radiation Reaction”. <http://kirkmcd.princeton.edu/examples/sefforce.pdf>.
- [18] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press (2020).
- [19] A. Macchi. *A Superintense Laser-Plasma Interaction Theory Primer*. Springer (2013).
- [20] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Teoria quantistica relativistica*. Editori Riuniti (2004).
- [21] A. B. Migdal e V. Krainov. *Approximation methods in quantum mechanics*. W. A. Benjamin, Inc. (1969).

- [22] C. Patrignani *et al.* “Review of Particle Physics”. Chin. Phys., **C40** (10), (2016) 100001. <http://pdg.lbl.gov/>.
- [23] A. Bohr e B. R. Mottelson. *Nuclear Structure*. World Scientific (1998).
- [24] A. Sommerfeld. *Optics*. Academic Press (1954).
- [25] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Statistical Physics*. Butterworth-Heinemann (1980).
- [26] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Meccanica quantistica. Teoria non relativistica*. Editori Riuniti (2003).
- [27] K. Konishi e G. Paffuti. *Quantum Mechanics. A New Introduction*. Oxford University Press (2009).
- [28] M. Born e E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press (2001).
- [29] L. Brillouin. “The Scattering Cross Section of Spheres for Electromagnetic Waves”. J. Appl. Physics, **20**, (1949) 1110.
- [30] D. Sinclair. “Light Scattering by Spherical Particles”. J. Opt. Soc. Amer., **37**, (1947) 475.
- [31] R. O. Gumprecht e C. M. Sliepcevich. “Scattering of Light by Large Spherical Particles”. J. Phys. Chem., **57**, (1953) 90.
- [32] H. C. van de Hulst. *Light scattering by small particles*. Dover Publications (1981).
- [33] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Harcourt College Publishers (1976).
- [34] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley (1994).
- [35] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Meccanica*. Editori Riuniti (2003).
- [36] K. S. Krane. *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons (1988).
- [37] E. Segre. *Nuclei and particles*. W. A. Benjamin (1965).
- [38] A. Di Giacomo. *Lezioni di Fisica Teorica*. Edizioni ETS (1992).
- [39] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen e C. G. van Weert. *Relativistic kinetic theory. Principles and Applications*. North Holland (1980).
- [40] H. J. Lipkin. *Quantum Mechanics. New approaches to selected topics*. Dover Publications (2007).
- [41] R. V. Pound e G. A. Rebka, Jr. “Apparent Weight of Photons”. Phys. Rev. Lett., **4**, (1960) 337.
- [42] L. Brillouin. *Wave propagation and group velocity*. Academic Press (1960).
- [43] P. W. Milonni e R. W. Boyd. “Momentum of Light in a Dielectric Medium”. Advances in Optics and Photonics, **2**, (2010) 519.
- [44] E. Fermi. “The Ionization Loss of Energy in Gases and in Condensed Materials”. Phys. Rev., **57**, (1940) 485.
- [45] E. Fermi e E. Teller. “The capture of negative mesotrons in matter”. Phys. Rev., **72**, (1947) 399.
- [46] M. J. Lighthill. *Introduction to Fourier analysis and generalised functions*. Cambridge University Press (1964).
- [47] M. P. Fewell. “The atomic nuclide with the highest mean binding energy”. Am. J. Phys., **63**, (1995) 653.