Appello del 22 giugno 2023

Si consideri un sistema quantistico composto da due particelle di massa uguale e spin 1/2, vincolate a muoversi lungo una linea. L'Hamiltoniana è data

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \beta\, \hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2\, \hat{x}_1 \hat{x}_2 + \gamma\, \hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2 \sum_{i=1}^{2} \hat{x}_i^2, \qquad \hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa \hat{x}_i^2.$$

(1) Dire per quali operatori $\hat{O}$ si conserva il valore medio $\langle \Psi(t)|\hat{O}|\Psi(t)\rangle$ dove $|\Psi(t)\rangle$ è un generico stato soluzione dell'equazione di Schrödinger. Considerare in particolare gli operatori $\hat{H}$, $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$, inversione spaziale $\hat{B}_1$ e $\hat{B}_2$ delle coordinate delle due particelle, il loro prodotto $\hat{B}_{12} = \hat{B}_1 \hat{B}_2$, $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2$, l'operatore $\hat{P}_{12}$ di scambio delle particelle, e l'operatore $\hat{p}_{12}$ che scambia solo le coordinate spaziali.

Consideriamo inizialmente il caso in cui $\beta = 0$ e $\gamma = 0$.

(2) Scrivere gli autostati dell'Hamiltoniana nella base associata agli operatori $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ e $\hat{S}^z$. Determinare lo spettro dell'Hamiltoniana, e discutere la degenerazione degli stati, tenendo conto dello spin delle particelle.

(3) Calcolare la distanza quadratica media $d = \sqrt{\langle(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)^2\rangle}$ tra le particelle negli stati con energia minima.

(4) Calcolare la probabilità che nello stato fondamentale una particella (qualunque delle due) sia ad una distanza $|x| < a$ dal centro e l'altra ad una distanza $|x| > a$ (limitarsi a scrivere questa probabilità in termini degli integrali corrispondenti). Stimare il massimo valore che può assumere questa probabilità al variare di a.

(5) Scrivere gli autostati di $\hat{H}$ in modo che siano anche autostati degli operatori $\hat{H}$, $\hat{p}_{12}$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ e $\hat{S}^z$ ($\hat{p}_{12}$ è l'operatore di scambio delle coordinate, e $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2$).

(6) Consideriamo adesso l'effetto della perturbazione dipendente dagli spin, assumendo $0 < \beta\hbar^2 \ll \kappa$ e $\gamma = 0$. Calcolare la correzione dovuta alla perturbazione associata al parametro β al primo ordine della teoria delle perturbazioni per i primi due livelli energetici. Suggerimento: utilizzare la base ottenuta al punto (5), associata al set di operatori $\hat{H}$, $\hat{p}_{12}$, $\hat{\boldsymbol{S}}^2$ e $\hat{S}^z$.

Assumiamo adesso che $\beta = 0$ e $0 < \gamma\hbar^2 \ll \kappa$.

(7) Calcolare esattamente lo spettro in presenza della parturbazione associata al parametro γ. Scrivere esplicitamente le autofunzioni degli stati associati ai due valori minimi dell'energia.

(8) Calcolare la probabilità che la particella 1 abbia $s^z = 1/2$ nello stato fondamentale.

Assumiamo adesso che le due particelle siano identiche (due fermioni) e che si abbia sempre $\beta = 0$ e $0 < \gamma\hbar^2 \ll \kappa$.

(9) Come cambia lo spettro? Scrivere lo stato fondamentale e i primi stati eccitati.

(10) Calcolare la densitá di probabilità che le due particelle si trovino nello stesso punto, nello stato fondamentale e nei primi stati eccitati.

Riportiamo per referenza le funzioni d'onda in rappresentazione di Schrödinger dei primi due livelli dell'oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza ω

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}} \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}}\,, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \frac{x}{\ell_\omega} e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}}\,, \qquad \ell_\omega = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}.$$

Inoltre può essere utile l'integrale $\int_0^\infty dx e^{-c\,x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4c}}$.