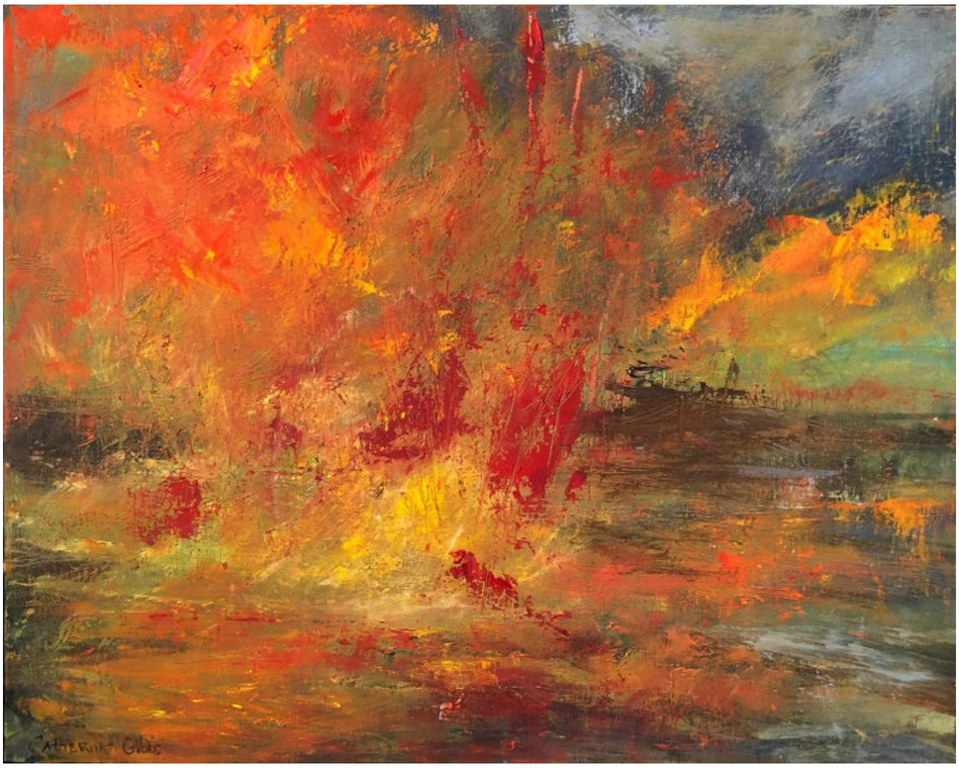
APPUNTI DI ANALISI 3

MANUEL DEODATO



Indice

1 Teoria della misura

Si costruisce una teoria della misura per spazi euclidei che sia compatibile con i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

1.1 Misura esterna

Si considerano gli oggetti fondamentali di $\mathbb{R}^d$, al variare di d, cioè, rettangoli per $d = 2$, parallelepipedi per $d = 3$ e così via. Questi sono della forma

$$I = \prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}^d$$

con $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, dove ogni $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo reale. Il loro volume è dato da

$$|I| = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

Definizione 1.1 (Misura esterna). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme generico. Dato un suo generico ricoprimento di plurintervalli chiusi $S = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ e data la funzione

$$\sigma(S) = \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k|$$

si definisce la misura esterna di E come

$$|E|_e := \inf_S \sigma(S)$$

che ha valori in $[0, +\infty]$.

Osservazione 1.1. Questa funzione misura esterna è ben definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, cioè su ogni possibile sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ e ha valori in $[0, +\infty]$. Per costruire una buona misura e arrivare alla misura di Lebesegue, si vorrà limitare l'intervallo di definizione della misura esterna ad una certa porzione di *sottoinsiemi buoni* di $\mathbb{R}^d$, che si chiameranno *insiemi misurabili* (secondo Lebesgue).

Ora si analizzano alcune proprietà della misura esterna.

Definizione 1.2 (Insiemi non sovrapposti). Dati due plurintervalli I_k, I_j, questi si dicono *non sovrapposti* se $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_j = \emptyset$, per $k \neq j$, cioè la frontiera non conta.

Teorema 1.1. Sia I un plurintervallo; allora $|I|_e = |I|$, cioè la misura esterna coincide con la misura usuale.

Teorema 1.2. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, con $A \subseteq B$; allora $|A|_e \leq |B|_e$.

Corollario 1.2.1. Siano $E, E' \subseteq \mathbb{R}^d$, con $E' \subseteq E$ e $|E|_e = 0$; allora $|E'|_e = 0$.

Da queste prime proprietà, si può vedere che, dato un insieme numerabile di $\mathbb{R}^d$

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x_k\}\,,\ x_k \in \mathbb{R}^d$$

allora $|E|_e = 0$.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, si trova un ricoprimento di E dato da $S_\varepsilon = \{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ tale che $|I_k| = \varepsilon/2^k$; allora

$$\sigma(S_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| = \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon$$

quindi, per definizione:

$$|E|_e \leq \sigma(S_\varepsilon) = \varepsilon$$

quindi si può rendere piccola a piacere, da cui la tesi. □

Da questa osservazione, segue direttamente che l'insieme dei numeri razionali è un insieme *piccolo*, nel senso che ha misura esterna nulla.

Teorema 1.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^d$; allora, fissato $\varepsilon > 0$, si trova un insieme aperto $G \subseteq \mathbb{R}^d$ tale che $E \subseteq G$ e

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato; allora esiste un ricoprimento chiuso $S_\varepsilon = \{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ di E tale che

$$\sigma(S_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \leq |E|_e + \frac{\varepsilon}{2}$$

Tale ricoprimento esiste perché, per definizione

$$|E|_e = \inf_S \sigma(S)$$

quindi si può prendere il ricoprimento che soddisfa tale estremo inferiore e *allargarlo di ε*. Ora si costruiscono degli intervalli I_k^* tali che $I_k \subset \mathring{I}_k^*$ e che

$$|I_k^*| \leq |I_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

per cui si può definire

$$G := \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathring{I}_k^*$$

che è aperto perché tutti gli $\mathring{I}_k^*$ sono aperti. Si vede che soddisfa $E \subset G$ per costruzione e

$$|G|_e \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k^*| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| + \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \leq |E|_e + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = |E|_e + \varepsilon$$

da cui la tesi. □

Teorema 1.4. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^d$; allora $\exists H \subseteq \mathbb{R}^d$ della forma

$$H = \bigcap_{j=1}^{+\infty} G_j$$

con G_j aperti, tale che $E \subseteq H$ e $|E|_e = |H|_e$.

Dimostrazione. Per il teorema precedente (1.3), dato $\varepsilon = 1/k$, si trova una famiglia numerabile di aperti $G_k \supseteq E$ tali che

$$|G_k|_e \leq |E|_e + \frac{1}{k}$$

Preso $H := \bigcap_{k=1}^{+\infty} G_k$, allora $G_k \supseteq H \supseteq E, \ \forall k$, quindi

$$|E|_e \leq |H|_e \leq |G_k|_e \leq |E|_e + \frac{1}{k}$$

Prendendo il limite per $k \to +\infty$, visto che $|E|_e$ e $|H|_e$ non dipendono da k, si rimane con $|E|_e \leq |H|_e \leq |E|_e$, da cui la tesi. □

Osservazione 1.2. Un insieme ottenuto come intersezione numerabile di aperti è chiamato G_δ; il teorema sopra, quindi, permette di trovare sempre un certo insieme G_δ che ha stessa misura dell'insieme in questione e lo contiene. Il vantaggio è legato alla struttura che gli insiemi G_δ hanno rispetto a sottoinsiemi generici di $\mathbb{R}^d$, che spesso è preferibile. Si nota, infine, che insiemi ottenuti come unione numerabile di chiusi si indica con F_σ.

1.2 Misurabilità

Definizione 1.3 (Insieme misurabile). Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, con $G \supseteq E$, tale che $|G \setminus E|_e < \varepsilon$. In questo caso, la misura di E è data da $|E| := |E|_e$.

Di seguito, si enunciano alcune proprietà degli insiemi misurabili.

Proposizione 1.1. Se $E \subseteq \mathbb{R}^d$ è aperto, allora è misurabile. Inoltre, se $E \subseteq \mathbb{R}^d$ è tale che $|E|_e = 0$, allora è misurabile.

Dimostrazione. Per vedere il secondo punto, si osserva che, per il teorema 1.3, si trova un aperto $E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^d$ tale che $|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon = \varepsilon$, quindi[1] $|G \setminus E|_e \leq |G|_e \leq \varepsilon$. □

Osservazione 1.3. Si è visto che per $E \subseteq \mathbb{R}^d$, si può trovare sempre una aperto che lo contiene tale che $|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon$, ma questa condizione non coincide con quella di misurabilità. Infatti, si nota che

$$G = E \cup (G \setminus E) \implies |G|_e \leq |E|_e + |G \setminus E|_e$$

ma non si riesce a dedurre che $|G \setminus E|_e < \varepsilon$.

Teorema 1.5. Valgono i seguenti punti.

(a). Se $\{E_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sono misurabili, allora $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ è misurabile.

(b). Se F è chiuso, allora è misurabile.

(c). Se I è un intervallo, allora $I = \mathring{I} \cup \partial I$ e $|\partial I| = 0$.

Dimostrazione 1.5a. Visto che gli E_k sono tutti misurabili, allora $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G_k \supset E_k$ aperto tale che $|G_k \setminus E_k|_e < \varepsilon / 2^k$; definendo

$$G := \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k$$

questo è aperto per costruzione e[2]

$$E_k \subset G_k \Rightarrow E \subset G \ ; \quad G \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (G_k \setminus E_k)$$

[1] La prima disuguaglianza fa uso del fatto che $G \setminus E \subseteq G$.

[2] Infatti $\forall k,\ E_k \subset G_k \Rightarrow \bigcup_k E_k \subset \bigcup_k G_k$. Inoltre, $x \in G \setminus E$ implica che $\exists k_0$ tale che $x \in G_k$ e che $\forall k,\ x \notin E_k$; allora $x \in \bigcup_k (G_k \setminus E_k)$ perché $x \in G_{k_0} \setminus E_{k_0}$.

Allora

$$|G \setminus E|_e \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |G_k \setminus E_k|_e \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

da cui la tesi. □

Per dimostrare che ogni chiuso è misurabile (1.5b), si usa il seguente lemma.

Lemma 1.5.1. Siano $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ due sottoinsiemi tali che $d(E_1, E_2) > 0$; allora $|E_1 \cup E_2|_e = |E_1|_e + |E_2|_e$

Dimostrazione 1.5b. Si assume preliminarmente F compatto, per poi estendere il risultato al caso generale. Sia $G \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto contenente F e tale che $|G| \leq |F|_e + \varepsilon$, per $\varepsilon > 0$; si deve arrivare a mostrare che $|G \setminus F|_e < \varepsilon$. Intanto si nota che, grazie alla compattezza di F, si può usare il lemma 1.5.1:

$$G = G \setminus F \cup F \implies |G| = |F|_e + |G \setminus F|_e \implies |G \setminus F|_e = |G| - |F|_e$$

Ma visto che $|G| \leq |F|_e + \varepsilon$, allora si ottiene la tesi. Ora si deve estendere la dimostrazione a F chiuso, senza la condizione che sia necessariamente limitato, quindi compatto; per farlo, si scrive

$$F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(F \cap \overline{B}_k(0)\right)$$

con $\overline{B}_k(0)$ palla chiusa di centro l'origine e raggio k. Si nota che ogni F_k è chiuso, perché intersezione di chiusi, e limitato perché $\overline{B}_k(0)$ è limitato. Ne segue che ogni F_k è compatto, quindi misurabile per quanto appena detto; per il teorema 1.5a, allora, anche F è misurabile. □

Lemma 1.5.2 (Da capire dove inserire). Siano $\{I_k\}_{k=1}^N$ degli intervalli non sovrapposti, cioè per cui vale $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_j = \emptyset$ per $k \neq j$; allora $\bigcup_{k=1}^N I_k$ è misurabile e

$$\left| \bigcup_{k=1}^{N} I_k \right| = \sum_{k=1}^{N} |I_k|$$

Riprendere da 16:38, lezione 29/09