APPUNTI DI
GEOMETRIA PROIETTIVA E TOPOLOGIA

Manuel Deodato

Indice

1 | Geometria proiettiva

§1.1 Introduzione agli spazi proiettivi

Definizione 1.1 (Spazio proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; il suo *spazio proiettivo* è dato da:

$$\mathbb{P}(V) = {}^{V \setminus \{0\}}\!/\!_{\sim}$$

dove $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda v$.

Dalla definizione, uno spazio proiettivo collassa tutti i vettori di uno spazio vettoriale che appartengono alla stessa retta in un punto. In questo senso, $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme delle rette di V.

Esempio 1.1. Si nota che $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing/\sim = \varnothing$, mentre per $v \neq 0$, si ha:

$$\mathbb{P}(\operatorname{Span} v) = {}^{\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0\}}\!/\!_{\sim} = \{[v]\}$$

dove $[v]$ rappresenta la classe di equivalenza di v; questo significa che lo spazio proiettivo dello span di un elemento è composto da un solo punto.

Definizione 1.2 (Dimensione di uno spazio proiettivo). La dimensione di uno spazio proiettivo è

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$$

Intuitivamente, questa definizione è dovuta al fatto che gli spazi proiettivi collassano le rette in punti, abbassando di 1 la dimensione dello spazio vettoriale.

Definizione 1.3 (Punti, rette e piani proiettivi). Si definisce *punto proiettivo* uno spazio proiettivo di dimensione 0, *retta proiettiva* uno spazio di dimensione 1 e *piano proiettivo* uno spazio di dimensione 2.

Definizione 1.4 (Spazio proiettivo standard). Sia $\mathbb{K}$ un campo; si definisce lo *spazio proiettivo standard* come

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{KP}^n$$

§1.1.1 Trasformazioni proiettive

Analogamente al caso dei gruppi e degli anelli, si studiano quelle mappe che preservano la struttura di spazio proiettivo.

Definizione 1.5 (Trasformazione proiettiva). Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è detta *trasformazione proiettiva* se $\exists \varphi : V \to W$ applicazione lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

In questa definizione, si dice che f è *indotta* da φ e, talvolta, si scrive che $f = [\varphi]$.

Proposizione 1.1. Se f è una trasformazione proiettiva indotta da φ, allora φ è iniettiva.

Dimostrazione. Per assurdo, $\ker \varphi \neq \{0\}$ e sia $v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$; allora $f([v]) = [0]$, ma $[0] \notin \mathbb{P}(W)$ per definizione di spazio proiettivo, quindi f non sarebbe ben definita. □

Proposizione 1.2. Ogni applicazione lineare iniettiva $\varphi : V \to W$ induce una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tramite l'associazione $[v] \mapsto [\varphi(v)]$.

Dimostrazione. Se $v \neq 0$, allora $\varphi(v) \neq 0$ perché φ è iniettiva. Se, invece, $[v] = [w]$, allora, per definizione, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$[\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)]$$

□

Proposizione 1.3. Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

Dimostrazione. Sia $f([v]) = f([w])$ e sia φ l'applicazione lineare che induce f; allora l'uguaglianza si traduce in $[\varphi(v)] = [\varphi(w)]$, ma per come sono definite queste classi di equivalenza, questo vuol dire che $\varphi(v) = \lambda\varphi(w) = \varphi(\lambda w)$. Essendo φ iniettiva, però, si ottiene che $v = \lambda w$, cioè $[v] = [\lambda w]$. □

Proposizione 1.4. La trasformazione $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è proiettiva ed è indotta da Id_V.

Dimostrazione. Tale trasformazione deve essere tale per cui $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}([v]) = [v] = [\mathrm{Id}_V\, v]$, quindi è indotta da Id_V; essendo quest'ultima iniettiva, anche $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è iniettiva. □

Proposizione 1.5. Siano $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ e $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Z)$ due trasformazioni proiettive; allora $g \circ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(Z)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Se φ induce f e ψ induce g, allora $\psi \circ \varphi$ induce $g \circ f$:

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g\left([\varphi(v)]\right) = g \circ f\left([v]\right)$$

□

Si passa, ora, a caratterizzare gli isomorfismi di spazi proiettivi; il seguente teorema giustificherà la definizione di isomorfismo proiettivo.

Teorema 1.1. Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ una trasformazione proiettiva; allora, le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti.

(a). f è suriettiva.

(b). f è biettiva.

(c). $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.

(d). f è invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Il fatto che (a) $\iff$ (b) è dato dal fatto che f è proiettiva, quindi è iniettiva.

Per mostrare che (b) $\Rightarrow$ (c), si prende φ che induce f e si fa vedere che è suriettiva. Visto che $\varphi(0) = 0$, basta mostrare che $W \setminus \{0\} \subset \operatorname{Im} \varphi$. Sia, dunque, $w \in W \setminus \{0\}$, quindi $[w] \in \mathbb{P}(W)$; visto che f è suriettiva, $\exists [v] \in \mathbb{P}(V) : f([v]) = [w] = [\varphi(v)]$. Allora $w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow w \in \operatorname{Im} \varphi$. Questo significa che φ è un isomorfismo tra V e W, per cui

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W)$$

Ora si mostra che (c) $\Rightarrow$ (d), quindi sia φ lineare che induce f. Si sa, dunque, che φ è iniettiva e che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$, il che implica che $\dim V = \dim W$, pertanto φ è un isomorfismo; in quanto tale, φ^{-1} è ben definita ed è ancora un isomorfismo di spazi vettoriali. Rimane da mostrare che φ^{-1} induce f; a questo scopo, si nota che:

$$\begin{aligned} &[\varphi^{-1}]f([v]) = [\varphi^{-1}][\varphi(v)] = [\varphi^{-1}\varphi(v)] = [v] \\ &f[\varphi^{-1}]([v]) = f\left([\varphi^{-1}(v)]\right) = [\varphi\varphi^{-1}(v)] = [v] \end{aligned}$$

Infine, (d) $\Rightarrow$ (a) perché, essendo f invertibile, è anche suriettiva. $\square$

Definizione 1.6 (Isomorfismo proiettivo). Una trasformazione proiettiva che sia anche suriettiva è detta *isomorfismo proiettivo*.

Definizione 1.7 (Proiettività). Ogni trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è detta *proiettività*; si indica con $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ l'insieme delle proiettività di V.

Da questa definizione, si può notare che ogni proiettività è un isomorfismo perché, se f

è indotta da φ, allora vale la formula della dimensione

$$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V \implies \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$$

Inoltre, si può mostrare che equipaggiando $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ con l'operazione di composizione, questo è un gruppo.

Osservazione 1.1 (Punti fissi). Sia f una proiettività indotta da φ, con $[v]$ punto fisso, cioè

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)]$$

Allora $\lambda v = \varphi(v)$, cioè v è un autovettore di φ, con autovalore λ; analogamente, se v è un autovettore di φ, allora $[v]$ è un punto fisso per lo stesso motivo.

§1.1.2 Sottospazi proiettivi

Per semplicità di notazione, si introduce la proiezione

$$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V) \tag{1.1.1}$$

che manda $V \setminus \{0\}$ sul suo quoziente con la relazione di equivalenza.

Definizione 1.8 (Grassmanniana). Sia V uno spazio vettoriale tale che $\dim V = n$ e sia $k \in \{0, \dots, n\}$; allora la *grassmanniana* k di V è l'insieme di tutti i sottospazi di V di dimensione k:

$$\mathrm{Gr}_k(V) = \{W \subseteq V \mid W \text{ spazio vettoriale con } \dim W = k\}$$

Si userà, inoltre, la seguente notazione:

$$\mathrm{Gr}(k, n) = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$$

Definizione 1.9 (Sottospazio proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale; un *sottospazio proiettivo* S di $\mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$S = \pi(H \setminus \{0\})$$

per qualche H sottospazio vettoriale di V.

Osservazione 1.2. Dalla definizione, si deduce che uno sottospazio proiettivo è esso stesso uno spazio proiettivo, cioè $\pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$.

Definizione 1.10 (Iperpiano proiettivo). Un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$\dim S = \dim \mathbb{P}(V) - 1$$

Teorema 1.2. Siano V uno spazio vettoriale e H un suo sottospazio. Sia $S = \pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$; allora $\pi^{-1}(S) = H \setminus \{0\}$. In sostanza, si ha una biezione tra i sottospazi vettoriali di V e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Si nota che

$$\pi^{-1}(S) = \bigcup_{[v]\in S} \pi^{-1}([v]) = \bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v])$$

Si dimostrerà il teorema per doppia inclusione. Avendo $\pi(v) = [v]$, allora $v \in \pi^{-1}([v])$, perciò

$$\bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v]) \supseteq H \setminus \{0\}$$

Si nota anche che

$$\pi^{-1}([v]) = \big\{w \mid [w] = [v]\big\} = \big\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\big\}$$

pertanto $\forall w \in \pi^{-1}([v])$, si ha $w = \lambda v \in H \setminus \{0\}$, da cui segue che

$$\bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v]) \subseteq H \setminus \{0\}$$

$\square$

Il teorema appena mostrato permette di concludere che

$$\dim \mathbb{P}(H) = \dim H - 1 \iff \dim \pi^{-1}(S) \cup \{0\} = \dim S + 1$$

Dal punto di vista delle grassmanniane, si ha che

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{P}(V)) \cong \mathrm{Gr}_{k+1}(V)$$

dove le grassmanniane di uno spazio proiettivo sono ottenute tramite la definizione di dimensione per uno spazio proiettivo.

Si passa, ora, allo studio di somme e intersezioni di sottospazi proiettivi; in particolare, si ha il seguente.

Proposizione 1.6. Siano S_i, per $i \in I$ un certo insieme di indici, dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$; allora l'intersezione $\bigcap_{i \in I} S_i$ è ancora un sottospazio di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Si indicano con H_i i sottospazi vettoriali di V tali che $S_i = \mathbb{P}(H_i)$. Per conto diretto, si trova che:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} \pi(H_i \setminus \{0\}) &= \big\{[v] \mid \forall i \in I,\ [v] \in \pi(H_i \setminus \{0\})\big\} \\
&= \big\{[v] \mid \forall i \in I,\ \exists w_i \in H_i \setminus \{0\} \text{ t.c. } [w_i] = [v]\big\} \\
&= \big\{[v] \mid \forall i \in I,\ v \in H_i \setminus \{0\}\,\big\} = \pi\left(\bigcap_{i \in I} (H_i \setminus \{0\})\right) \\
&= \pi\left[\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right) \setminus \{0\}\right] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right)
\end{aligned}$$

□

La proposizione appena dimostrata permette di concludere che

$$\mathbb{P}(V) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(V \cap W) \tag{1.1.2}$$

Come nel caso degli spazi vettoriali, l'unione di spazi proiettivi non è, in generale, uno spazio proiettivo; l'idea, allora, è quella di definire anche in questo caso un concetto di somma.

Definizione 1.11 (Spazio proiettivo generato). Sia $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$. A partire da A, si può definire il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ contenente A come

$$L(A) = \bigcap \{S \subseteq \mathbb{P}(V) \mid A \subseteq S \text{ e } S \text{ sottospazio proiettivo}\}$$

Si nota che, per definizione, tale intersezione è non vuota perché $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di se stesso.

In questo modo, si può trovare lo spazio proiettivo della somma di due sottospazi prendendo

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2) \tag{1.1.3}$$

Proposizione 1.7. Siano $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$ due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, con H_1, H_2 sottospazi vettoriali di V; allora

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

Dimostrazione. Si procede per doppia inclusione. Si mostra prima che $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$; per farlo, visto che $H_1 \subseteq H_1 + H_2$, si ha

$$S_1 = \mathbb{P}(H_1) = \pi(H_1 \setminus \{0\}) \subseteq \pi\big((H_1 + H_2) \setminus \{0\}\big) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

In maniera del tutto analoga, si mostra che $S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$. Questo significa che $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$ è un sottospazio proiettivo contenente sia S_1, che S_2, quindi, per la minimalità di $L(S_1, S_2)$, deve valere $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$.

Per l'inclusione inversa, visto che $L(S_1, S_2)$ è un sottospazio proiettivo, si prende H sottospazio vettoriale di V tale che $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H) \Rightarrow H = \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\}$. Allora:

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \implies H_1 = \pi^{-1}(S_1) \cup \{0\} \subseteq \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\} = H$$

Analogamente si mostra che $H_2 \subseteq H$, quindi si ha $H_1 + H_2 \subseteq H$, da cui $\mathbb{P}(H_1 + H_2) \subseteq \mathbb{P}(H) = L(S_1, S_2)$. □

Proposizione 1.8. Sia $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$ e f una trasformazione proiettiva; allora $f(L(S)) = L(f(S))$.

Dimostrazione. Siano $H = \pi^{-1}(S)$ un sottoinsieme di V e $f = [\varphi]$. Si nota che $f(S) = f(\pi(H)) = \pi(\varphi(H))$, quindi

$$\begin{aligned} f(L(S)) &= f\big[\pi(\operatorname{Span}(H) \setminus \{0\})\big] = \pi\big[\varphi(\operatorname{Span}(H)) \setminus \{0\}\big] \\ &= \pi\big[\operatorname{Span}(\varphi(H)) \setminus \{0\}\big] = \pi\big\{\operatorname{Span}[\pi^{-1}(f(S))] \setminus \{0\}\big\} \\ &= L(f(S)) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3 (Formula di Grassmann). Siano S_1, S_2 due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$; allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

Dimostrazione. Siano H_1, H_2 i sottospazi di V tali che $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$. Per la formula di Grassmann, si ha

$$\dim H_1 + H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$$

Dal punto di vista degli spazi proiettivi, questa si traduce in:

$$\dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) + 1 = (\dim \mathbb{P}(H_1) + 1) + (\dim \mathbb{P}(H_2) + 1) - \dim \mathbb{P}(H_1 \cap H_2) - 1$$
$$\Rightarrow \dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

□

Corollario 1.3.1. Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ tali che $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$, allora $S_1 \cap S_2 \neq 0$.

Dimostrazione. Usando la formula di Grassmann:

$$\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim \mathbb{P}(V) - \dim L(S_1, S_2) \geq 0$$

Visto che, per convenzione, $\dim \varnothing = -1$, si ha $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. □

Teorema 1.4. Sui piani proiettivi, non esistono *rette parallele*. Più precisamente, dati r_1, r_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ e $\dim r_1 = \dim r_2 = 1$, si ha $r_1 = r_2$, oppure $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, dove P è un punto proiettivo.

Dimostrazione. Sia $r_1 \neq r_2$; allora $\dim L(r_1, r_2) = 2$ e

$$\dim r_1 \cap r_2 = \dim r_1 \dim r_2 - \dim L(r_1, r_2) = 1 + 1 - 2 = 0$$

quindi $r_1 \cap r_2$ è un punto proiettivo. □

§1.1.3 Riferimenti proiettivi

L'idea è quella di estendere il concetto di indipendenza lineare e base agli spazi proiettivi.

Definizione 1.12 (Punti indipendenti). Siano $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$; questi sono detti *indipendenti* se per $v_1, \dots, v_k \in V : [v_i] = P_i$, i $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

È anche facile convincersi che tale definizione è indipendente dai rappresentati scelti, visto che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti $\iff \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k$ lo sono.

Questa nozione di indipendenza per gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ permette di individuare tutte quelle rette di V che non si possono scrivere in combinazione lineare tra di loro.

Si nota, inoltre, che gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ sono, a due a due, sempre indipendenti per costruzione, mentre non è vero in generale per un insieme di k punti, con $k > 2$. Infatti, prendendo $V = \mathbb{R}^2$, si osserva che non si potrà mai costruire un insieme di punti di $\mathbb{P}(V)$

che sia indipendente e che abbia più di due elementi perché $\mathbb{R}^2$ è ottenuto dallo span di esattamente due elementi indipendenti.

Definizione 1.13 (Posizione generale). Dati $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{P}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione $n+1$, questi sono detti essere in *posizione generale* se ogni loro sottoinsieme di $h \leq n+1$ elementi distinti è indipendente.

Osservazione 1.3. Se $k \leq n+1$, allora la nozione di posizione generale coincide con quella di indipendenza, mentre se $k > n+1$, la definizione richiede l'indipendenza di tutte le $(n+1)$-uple di punti.

Definizione 1.14 (Riferimento proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale tale che $\mathbb{P}(V)$ è n-dimensionale. Un *riferimento proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$ è una $(n+2)$-upla di punti in posizione generale.

L'ultimo punto nel riferimento è detto **punto unità**, mentre gli altri sono detti **punti fondamentali**.

Definizione 1.15 (Base normalizzata). Sia $\mathcal{R} = (P_0, \ldots, P_{n+1})$ un riferimento di $\mathbb{P}^n(V)$. Una *base normalizzata* di V associata a $\mathcal{R}$ è una base $\{v_0, \ldots, v_n\}$ tale che

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}\,,\ [v_i] = P_i \text{ e } P_{n+1} = [v_0 + \ldots + v_n]$$

Teorema 1.5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ tale che $\mathbb{P}(V)$ abbia dimensione n e sia $\mathcal{R} = (P_0, \ldots, P_{n+1})$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Esiste sempre almeno una base normalizzata $\mathcal{B} = \{v_0, \ldots, v_n\}$ e, se $\mathcal{B}' = \{u_0, \ldots, u_n\}$ è un'altra base, allora $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $u_i = \lambda v_i$.

Dimostrazione. Sia $\{w_0, \ldots, w_{n+1}\} \subset V$ un insieme di vettori, con $[w_i] = P_i$, $i = 0, \ldots, n+1$. Visto che $\mathcal{R}$ è un riferimento proiettivo, i $w_0, \ldots, w_n$ sono $n+1$ vettori linearmente indipendenti in V spazio $(n+1)$-dimensionale, quindi sono una base. Questo implica che $w_{n+1} = \lambda_0 w_0 + \ldots + \lambda_n w_n$, dove $\lambda_i \neq 0$, altrimenti i $w_0, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_{n+1}$ non sarebbero indipendenti e $\mathcal{R}$ non sarebbe un riferimento proiettivo. Si prendono, ora, $v_i = \lambda_i w_i$, $i = 0, \ldots, n$, mentre $v_{n+1} = w_{n+1}$; in questo modo, $[v_i] = [w_i] = P_i$, mentre $v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i$ per costruzione. In questo modo, si è costruita $\mathcal{B} = \{v_0, \ldots, v_n\}$ base normalizzata associata a $\mathcal{R}$.

Sia, ora, $\mathcal{B}' = \{u_0, \ldots, u_n\}$ un'altra base normalizzata di $\mathcal{R}$; essendo che $[u_i] =$

$P_i = [v_i]$, allora $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : v_i = \mu_i u_i,\ i = 0, \dots, n+1$. Inoltre

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} \sum_{i=0}^{n} u_i = \mu_{n+1} u_{n+1} = v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i = \sum_{i=0}^{n} \mu_i u_i \\ \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} (\mu_i - \mu_{n+1}) u_i\end{aligned}$$

Visto che gli $u_0, \dots, u_n$ sono una base, per indipendenza lineare deve valere $\mu_i = \mu_{n+1},\ \forall i$, cioè le due basi coincidono a meno di un fattore invertibile. □

Osservazione 1.4. Si nota che rispetto all'algebra lineare, in geometria proiettiva non è possibile estendere riferimenti proiettivi di sottospazi proiettivi a riferimenti di sottospazi che li estendono.

Sia, infatti, $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ un riferimento di un sottospazio S di H; allora si nota che i P_i non sono in posizione generale se visti come punti di H perché se la dimensione aumenta, le $(n+2)$-uple devono essere indipendenti, ma il punto unità è scritto come combinazione degli altri.

Con la teoria sviluppata finora, è possibile stabilire un criterio di uguaglianza per individuare trasformazioni proiettive uguali.

Teorema 1.6. Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ due trasformazioni proiettive indotte, rispettivamente, da φ e da ψ e sia, inoltre, $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$; allora sono equivalenti le seguenti affermazioni.

(a). Si trova un coefficiente $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\varphi = \lambda \psi$.

(b). Le due trasformazioni proiettive sono identiche: $f = g$.

(c). Per ogni punto $P \in \mathcal{R}$, si ha $f(P) = g(P)$.

Dimostrazione. Si dimostra che (a) $\Rightarrow$ (b). Per conto diretto:

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda \psi(v)] = [\psi(v)] = g(v)$$

Ora si mostra che (b) $\Rightarrow$ (c). Questo, però, è ovvio perché $f(P) = g(P),\ \forall P \in \mathbb{P}(V)$, incluso $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(V)$.

Infine, si mostra (c) $\Rightarrow$ (a). Per farlo, si prende $\{v_0, \dots, v_n\}$ base normalizzata riferita a $\mathcal{R}$. Si sa che

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = f(P_i) = [\psi(v_i)],\ \forall P_i \in \mathcal{R} \tag{1.1.4}$$

quindi $\exists \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i)$. Per concludere, si considera cosa succede al punto unità; per la relazione 1.1.4, deve valere $\varphi(v_{n+1}) = \lambda_{n+1}\psi(v_{n+1})$, per qualche $\lambda_{n+1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, ma, al contempo:

$$\lambda_{n+1} \sum_{i=0}^{n} \psi(v_i) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(v_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \psi(v_i) \implies \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \lambda_{n+1})\psi(v_i) = 0$$

Visto che ψ è iniettiva, gli $\psi(v_0), \ldots, \psi(v_n)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\forall i = 0, \ldots, n,\ \lambda_{n+1} = \lambda_i$, il che vuol dire che $\lambda_{n+1}\psi = \varphi$ sui $v_0, \ldots, v_n$; essendo questi una base, la relazione $\varphi = \lambda_{n+1}\psi$ vale su tutti i vettori dello spazio. □

Corollario 1.6.1. Si ha

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(V) \cong {}^{\mathrm{GL}(V)}\!/\!_{N}$$

con $N = \{\lambda \,\mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \lhd \mathrm{GL}(V)$.

Dimostrazione. Si considera la mappa $\varphi \mapsto [\varphi] : \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$. Questa mappa è un omomorfismo suriettivo di gruppi e, se $[\varphi] = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)} = [\mathrm{Id}_V]$, allora $\varphi = \lambda \,\mathrm{Id}_V$ per il teorema 1.6 appena mostrato. Questo implica che il nucleo di tale omomorfismo è proprio N, quindi la tesi segue applicando il primo teorema di omomorfismo. □

Notazione 1.1 (Proiettività standard). Le proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ formano un gruppo indicato da $\mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$. L'$n+1$ come pedice indica la taglia delle matrici che rappresentano le proiettività, non la dimensione dello spazio su cui agiscono.

Teorema 1.7 (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive). Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ due spazi proiettivi su $\mathbb{K}$ tali che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$. Fissati $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ e $\mathcal{R}' = \{P'_0, \ldots, P'_{n+1}\}$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente, esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che $f(P_i) = P'_i,\ i = 0, \ldots, n+1$.

Dimostrazione. L'unicità è diretta conseguenza del teorema 1.6. Rimane da mostrare l'esistenza.

Siano, allora, $\mathcal{B} = \{v_0, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_0, \ldots, w_n\}$ due basi normalizzate associate a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ rispettivamente e sia $\varphi : V \to W$ la mappa tale che $\forall i,\ \varphi(v_i) = w_i$; si nota che φ è iniettiva perché ha rango massimo, quindi si può prendere $f = [\varphi]$. Per costruzione:

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = P'_i$$

mentre per i punti fondamentali:

$$f(P_{n+1}) = f([v_0 + \ldots + v_n]) = [\varphi(v_0 + \ldots + v_n]) = [w_0 + \ldots + w_n] = P'_{n+1}$$

□

§1.1.4 Coordinate omogenee

Come per il caso degli spazi vettoriali, è utile ricorrere a sistemi di coordinate. Per capire come definirli, si considera il caso particolare di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$; questo, per definizione, è:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = {}^{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}}\!/\!_{\sim} = \{[(x_0, \ldots, x_n)] \mid \exists x_i \neq 0\}$$

Definizione 1.16 (Riferimento proiettivo canonico). Il *riferimento canonico* (o standard) di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è quel riferimento proiettivo che ha, come base normalizzata, la base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$.

In questo caso, si dirà che $[(x_0, \ldots, x_n)]$ ha *coordinate omogenee* $[x_0 : \ldots : x_n]$ rispetto al riferimento canonico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Ora si estende questa definizione a spazi proiettivi generali.

Definizione 1.17 (Coordinate omogenee). Sia $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$; dato $P \in \mathbb{P}(V)$, le sue *coordinate omogenee* rispetto a $\mathcal{R}$ sono date da una delle seguenti definizioni.

- Se $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è l'unico isomorfismo proiettivo che manda $\mathcal{R}$ nel riferimento canonico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, allora le coordinate di omogenee di P sono $f(P)$.
- Se $\mathcal{B} = \{v_0, \ldots, v_n\}$ è una base normalizzata di $\mathcal{R}$ e $P = [v]$, si considera $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$; le coordinate omogenee di P rispetto a $\mathcal{R}$, allora, sono $[a_0 : \ldots : a_n]$.

Come per gli spazi vettoriali, è possibile rappresentare le trasformazioni proiettive come matrici e i sottospazi proiettivi come i luoghi di zeri di equazioni.

Definizione 1.18 (Matrice associata). Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ un isomorfismo proiettivo e siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente, con $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ le rispettive basi normalizzate. Se φ induce f, allora f è rappresentata da

$$M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \in \mathcal{M}(n+1, \mathbb{K})$$

Osservazione 1.5 (Prodotto tra matrice e coordinate omogenee). Siano $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ e $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$, con $f = [\varphi]$. Sia M la matrice che rappresenta f e siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ due riferimenti di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$, con basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Indicando il passaggio a coordinate omogenee rispetto a $\mathcal{R}$ con $[\cdot]_{\mathcal{R}}$ e il passaggio a coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ con $[\cdot]_{\mathcal{B}}$, si ha:

$$\begin{aligned}[f(P)]_{\mathcal{R}'} = [[\varphi(v)]]_{\mathcal{R}'} = \left[[[M[v]_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}'}^{-1}]\right]_{\mathcal{R}'} = \left[[[[M[v]_{\mathcal{B}}]]_{\mathcal{R}'}^{-1}]\right]_{\mathcal{R}'} \\ = [M[v]_{\mathcal{B}}]\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Notazione 1.2. Sia M una matrice e sia $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$; prendendo $\mathcal{R}$ un riferimento di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathcal{B}$ sua base normalizzata, si pone

$$M[P]_{\mathcal{R}} = [M][P]_{\mathcal{R}} \doteqdot [M[v]_{\mathcal{B}}]$$

Definizione 1.19 (Equazioni cartesiane proiettive). Sia $S \subset \mathbb{P}(V)$ un sottospazio proiettivo e W il sottospazio di V tale che $S = \mathbb{P}(W)$. Fissato un riferimento $\mathcal{R}$ su $\mathbb{P}(V)$, si individua univocamente una base normalizzata di V, pertanto W si esprime come luogo degli zeri di $\dim V - \dim W$ equazioni. Queste equazioni si definiscono *equazioni cartesiane* per S rispetto a $\mathcal{R}$.

Si nota che il numero di equazioni cartesiane si può scrivere anche come

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim S = \dim V - \dim W$$

§1.2 Spazi proiettivi e spazi affini

§1.2.1 Carte affini

Definizione 1.20 (Iperpiano coordinato). Dato $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, si definisce il seguente suo sottoinsieme:

$$H_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0\}$$

con $i \in \{0, \ldots, n\}$. Tale sottoinsieme è noto come l'i-esimo *iperpiano coordinato*.

Se considerati come spazi proiettivi, allora

$$H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \tag{1.2.1}$$

Definizione 1.21 (Carta affine – Insieme). Si definisce l'i-esima *carta affine* come

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i$$

Proposizione 1.9. Esiste una mappa biettiva tra U_i e $\mathbb{K}^n$, $\forall i = 0, \ldots, n$.

Dimostrazione. □

2 Topologia generale

§2.1 Spazi metrici

Definizione 2.1 (Spazio metrico). Sia X un insieme non vuoto; allora X si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, x') \geq 0$ e $d(x, x') = 0 \iff x = x'$;
- $d(x, x') = d(x', x)$;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Dato uno spazio metrico (X, d_X) e un insieme $Y \subset X$, si può definire un sottospazio di (X, d_X) restringendo la distanza al solo Y:

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'),\ \forall y, y' \in Y$$

Quindi (Y, d_Y) è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di (X, d_X), il quale è detto *spazio ambiente* di Y. In uno spazio metrico (X, d), si può definire un *disco aperto* di raggio r e centro x come

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

Definizione 2.2 (Insieme aperto). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

Equivalentemente, un insieme $\forall \subseteq X$ si dice aperto rispetto alla metrica d se $\forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Lemma 2.0.1. Le palle aperte sono insiemi aperti relativamente alla metrica che le definisce.

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico e $x_0 \in X$; si dimostra che la palla $B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ è aperto rispetto a d. Si nota che, $\forall x \in B_r(x_0)$, è possibile definire $\delta = r - d(x, x_0)$ tale che $B_\delta(x) \subseteq B_r(x_0)$; infatti tutti i punti di

$B_\delta(x)$ sono a distanza minore di ε da x, quindi, per disuguaglianza triangolare:

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + \underbrace{d(x, y)}_{<\delta} < r, \ \forall y \in B_\delta(x)$$

per definizione di δ. □

Nello stesso spazio metrico, è possibile definire la distanza tra un punto $x \in X$ con un sottoinsieme $A \subseteq X$ come:

$$d_A(x) = \inf \{d(x, a) \mid a \in A\} \tag{2.1.1}$$

§2.1.1 Continuità in spazi metrici

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon, \ \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \ \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$

È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

Definizione 2.3 (Continuità in spazi metrici). Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, con $(X, d_X), \ (Y, d_Y)$ spazi metrici. Si dice che f è continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon, \ \exists \delta(\epsilon)$ tale che:

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon, \ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \tag{2.1.2}$$

Questo si esprime equivalentemente come:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B_{d_X}(x, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

Teorema 2.1. Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\iff$ $\forall A \subset Y$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni.

- $(\Rightarrow)$ Si assume che f sia continua. Si prende $f(x) \in A$, con $A \subset Y$ aperto, per qualche $x \in f^{-1}(A)$. Essendo A aperto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset A$; allo stesso tempo, per continuità di f, dato ε scelto prima, deve esistere $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$$

quindi $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Valendo $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- ($\Leftarrow$) Si assume che $\forall A \subset Y$ aperto, la funzione f sia tale che l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto. Per $f(x) \in Y$, esiste $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset Y$; essendo questo aperto, deve essere aperto anche $f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$. Dunque, dato $x \in f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, $\exists \delta(\varepsilon)$: $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, quindi vuol dire che $f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$, ossia:

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon, \ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

Valendo $\forall x \in X$, allora f è continua.

$\square$

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

Negli spazi metrici, è possibile caratterizzare delle mappe che preservano le distanze; queste sono note come *immersioni isometriche.*

Definizione 2.4 (Immersione isometrica). Sia $f : X \to Y$ una mappa tra spazi metrici; questa è detta immersione isometrica se

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

Un'immersione isometrica deve necessariamente essere iniettiva:

$$f(x) = f(y) \implies d_Y(f(x), f(y)) = 0 = d_X(x, y) \iff x = y$$

Inoltre, la composizione di due immersioni isometriche è ancora un'immersione isometrica e l'identità ne è un esempio.

Definizione 2.5 (Isometria). Sia $f : X \to Y$ un'immersione isometrica; allora se f è suriettiva, quindi biettiva, è detta *isometria.*

Le isometrie formano un gruppo con l'operazione di composizione, che si indica con $\mathrm{Isom}(X)$.

Definizione 2.6 (Omeomorfismo). Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ è un *omeomorfismo* se la sua inversa e f stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo $e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, questa ha un'inversa continua $\log(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda $(-\infty, 0]$ in $(0, 1]$. Anche gli omemorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

Definizione 2.7 (Mappa lipschitziana). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una mappa; si dice che f è *lipschitizana* se

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq k d_X(p, q), \ \forall p, q \in X$$

Proposizione 2.1. Se $f : X \to Y$ è lipschitizana, allora è continua.

Dimostrazione. Sia f una funzione k-lipschitziana; si fissa $\varepsilon > 0$ e si prende $\delta = \varepsilon / k$, per cui $\forall x' \in X$ tale che $d_X(x, x') < \delta$, si ha

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x') < k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

$\square$

§2.2 Spazi topologici

Allo scopo di giustificare la definizione e lo studio di spazi topologici, si considera il seguente risultato.

Proposizione 2.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:

(a). $\varnothing$ e X sono aperti;

(b). se A, B sono aperti, allora $A \cap B$ è aperto;

(c). se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti, allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nei vari punti.

(a). X è ovviamente aperto, mentre per l'insieme vuoto non ci sono punti per cui bisogna verificare la richiesta, quindi è aperto.

(b). Sia $x_0 \in A \cap B$; questo significa che ci sono due palle di raggi ϵ_1, ϵ_2 interamente contenute in A e B rispettivamente, visto che sono aperti. Prendendo $\epsilon = \min \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, si verifica immediatamente che $B_\epsilon(x) \subseteq A \cap B$, visto che è interamente contenuta sia in A che B.

(c). Evidentemente $\exists j \in I : x_0 \in A_j \implies \exists \epsilon : B_\epsilon(x_0) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

$\square$

Si nota che l'intersezione arbitraria di aperit può non risultare aperta, come nel caso della famiglia $B_{1/n}(0)$ in $\mathbb{R}$.

Dalla precedente proposizione, è possibile giustificare la seguente definizione di topologia.

Definizione 2.8 (Topologia e spazio topologico). Sia X un insieme non-vuoto. Una *topologia* su X è una famiglia non-vuota $\tau \subseteq \mathcal{P}(x)$, chiamati *insiemi aperti della topologia*. Questi soddisfano le seguenti condizioni:

- $\varnothing$, X sono aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un aperto.

Allora si definisce *spazio topologico* la coppia (X, τ), dove X è detto *supporto* dello spazio topologico e i suoi elementi sono i *punti* dello spazio.

Dato (X, d) spazio metrico, la famiglia degli insiemi aperti rispetto a d è una topologia su X indotta da d stessa. In $\mathbb{R}^n$, si definisce **topologia euclidea** (o **naturale**) $\mathcal{E}$ come quella indotta dalla distanza euclidea d_2. Su $\mathbb{C}$, la topologia euclidea $\mathcal{E}$ è quella indotta da $d(z, w) = |z - w|$; questa conclusione si può ottenere identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ da $z = x + iy \mapsto (x, y)$ e considerando la distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 2.9 (Topologia discreta). Sia X un insieme generico; allora l'insieme $\tau = \mathcal{P}(X)$ è una topologia di X, nota col nome di *topologia discreta*. Inoltre, si dice che (X, τ) è lo *spazio topologico discreto*.

Definizione 2.10 (Topologia banale). Sia X un insieme generico; allora l'insieme $\tau = \{\varnothing, X\}$ definisce una topologia su X, nota col nome di *topologia banale*, o *indiscreta*. Inoltre, si dice che (X, τ) è lo *spazio topologico banale*.

Definizione 2.11 (Topologia cofinita). Sia X un insieme; l'insieme

$$\tau = \{\varnothing\} \cup \{A \subseteq X \mid |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$$

è una topologia su X, detta *topologia cofinita*. Questa ha, come chiusi, gli insiemi finiti e tutto lo spazio; quest'ultimo risulta sia chiuso che aperto.

In generale, una topologia non induce una distanza; per esempio, la topologia banale non è indotta da alcuna metrica per $|X| \geq 2$ perché se $x_1, x_2 \in X$ sono due punti distinti, allora $B(x_1, d(x_1, x_2)/2)$ e $B(x_2, d(x_1, x_2)/2)$ sono disgiunte e non-vuote, quindi sono aperte rispetto a questa distanza, ma la topologica banale prevede solo $\varnothing$ e X come aperti.

Definizione 2.12 (Spazio metrizzabile). Uno spazio topologico (X, τ) è detto *metrizzabile* se si può definire una distanza su X che induce la topologia τ.

Definizione 2.13 (Topologia di sottospazio). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme; la topologia di sottospazio è l'insieme degli aperti rispetto alla distanza $d|_Y$, rispetto a cui Y è uno spazio metrico.

Osservazione 2.1. Se $y \in Y$: $B_\varepsilon^{(Y)}(y) = B_\varepsilon^{(X)}(y) \cap Y$; questo significa che gli aperti di Y sono della forma $A \cap Y$, con A aperto di X.

§2.2.1 Distanze equivalenti

Definizione 2.14 (Distanze topologicamente equivalenti). Due distanze $d, \overline{d}$ su X si dicono *topologicamente equivalenti* se hanno gli stessi insiemi aperti, cioè se generano la stessa topologia.

Se $d(x, y) = r\overline{d}(x, y)$, per $r > 0$, si hanno due distanze equivalenti perché, evidentemente, $\forall \varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(x) = \overline{B}_{r\varepsilon}(x)$$

cioè le due distanze $d, \overline{d}$ identificano le stesse palle aperte, quindi gli stessi insiemi aperti. In $\mathbb{R}^n$, le distanze

$$\begin{aligned} d_2(x, x') &= \|x - x'\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i')^2} \\ d_1(x, x') &= \sum_{i=1}^n |x - x_i| \\ d_\infty(x, x') &= \max_i \{|x_i - x_i'|\} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

sono equivalenti e si ha

$$d_\infty(x, x') \leq d_2(x, x') \leq d_1(x, x') \leq n d_\infty(x, x') \tag{2.2.2}$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è giustificata da:

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i')^2} \geq \sqrt{\max_i \{(x_i - x_i')^2\}} = \max_i \{|x - x_i'|\} = d_\infty(x, x')$$

La seconda, invece, è vera perché:

$$[d_2(x,x')]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x-x_i')^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i'|\right]^2 = [d_1(x,x')]^2$$

L'ultima disuguaglianza è immediata. $\square$

Da questo segue direttamente che[1]

$$B_{\varepsilon}^{(\infty)}(x) \supset B_{\varepsilon}^{(2)}(x) \supset B_{\varepsilon}^{(1)}(x) \supset B_{\varepsilon/n}^{(\infty)}(x) \tag{2.2.3}$$

Questo mostra che se A è aperto rispetto ad una distanza, lo è anche rispetto alle altre.

[1] Apparentemente, la distanza più grande dovrebbe includere più elementi, quindi i simboli $\supset$ dovrebbero essere dei $\subset$, invece, avendo fissato il raggio ε, quella che permette di creare la palla più grande è la distanza più piccola perché *avvicina* i punti tra di loro, quindi più elementi rientreranno in tale raggio.