I POLINOMI DI LEGENDRE

Manuel Deodato

Indice

1 Origine dei polinomi di Legendre

1.1 Definizione analitica

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione di tre variabili differenziabile due volte in D. Il suo laplaciano è definito come

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

In coordinate sferiche, prendendo

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad y = r \sin\theta \sin\phi \qquad z = \cos\theta$$

con $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$, il laplaciano è della forma

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \tag{1.1.1}$$

Si considerano sistemi con simmetria sferica in cui vi è invarianza sotto variazione dell'angolo azimutale ϕ: è proprio in questo tipo di problemi che si ottengono i polinomi di Legendre. In questo caso, il laplaciano si riduce a:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \tag{1.1.2}$$

visto che $r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r f) = r^{-1}\partial_r^2(rf)$.

1.1.1 Sfera dielettrica carica

Si considera, come caso particolare, un sistema composto da una sfera di raggio a, la cui distribuzione di carica dipende da $r \in [0, a]$ e da $\theta \in [0, \pi]$. Per $r > a$, la densità di carica è nulla cosicché il potenziale elettrostatico $V(r, \theta)$ soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$ per i punti fuori da tale sfera.

Assumendo che il potenziale sia noto per tutti i punti $r = a$ della superficie sferica, dato da $V(a, \theta) = F(\theta)$[1], e finito dovunque, si ottiene un problema con condizioni al contorno *ben posto*: in questo caso, si può risolvere usando la separazione delle variabili.

Il problema di Laplace per V è $r^{-1}\partial_r^2(rV) + (r^2 \sin\theta)^{-1}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta V) = 0$. Tramite separazione delle variabili, si scrive $V(r, \theta) = R(r)W(\theta)$; moltiplicando per $r^2/(RW)$, si trova:

$$r\frac{\partial_r^2(rR)}{r} = -\frac{\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta W)}{W \sin\theta}. \tag{1.1.3}$$

[1]Questo rappresenta la condizione al contorno.

I due membri dipendono da variabili indipendenti fra loro, quindi l'uguaglianza è valida se e solo se sono proporzionali fra loro tramite una costante λ. Questo porta a due equazioni differenziali ordinarie (una per la parte radiale, una per la parte angolare):

$$
\begin{aligned}
&r\partial_r^2(rR) - \lambda R = 0, \\
&\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta W) + \lambda\sin\theta W = 0.
\end{aligned}
$$

Si risolve la prima che, esplicitamente, diventa $r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0$. Per $r = e^\rho$, si ha $\rho = \ln r$ e $S(\rho) = R(r)|_{r=e^\rho}$, da cui

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dS}{d\rho}\frac{d\rho}{dr} = \frac{S'}{r} \implies \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{S'}{r}\right) = \frac{1}{r^2}(S'' - S').$$

Sostituendo, si ha l'equazione per $S(\rho)$: $S'' + 2S' - \lambda S = 0$, la quale ha soluzione $S(\rho) = Ae^{(-1+k)\rho} + Be^{(-1-k)\rho}$, dove $k = \sqrt{1+\lambda}$. Allora la soluzione per R è $R(r) = Ar^{-1+k} + Br^{-1-k}$, ma si prende $A = 0$ perché, essendo $k > 1$, il primo termine diverge per $r \to +\infty$, mentre $V(r,\theta)$ dovrebbe essere finito $\forall r > 0$. In definitiva, si ha:

$$R(r) = \frac{B}{r^{1+\sqrt{1+\lambda}}},\ \forall r > a \tag{1.1.4}$$

Per risolvere l'equazione angolare, si prende $x = \cos\theta$ e $y(x) \equiv W(\theta)$, dove $x \in [-1, 1]$ (visto che $\theta \in [0, \pi]$); usando il fatto che $\partial_\theta = \partial_\theta x \partial_x = -\sin\theta\partial_x = -(1-x^2)\partial_x$, si può riscrivere l'equazione differenziale come:

$$\partial_x\left[(1-x^2)\partial_x y\right] + \lambda y = 0 \tag{1.1.5}$$

Questa è proprio l'**equazione differenziale di Legendre**, la quale può apparire scritta in modo più esplicito come $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ e solitamente si ha $\lambda = \ell(\ell+1)$, $\ell \geqslant 0$, che è plausibile perché le uniche condizioni imposte su λ finora sono che debba essere reale e non-negativo.

1.1.2 Soluzione dell'equazione angolare

Si cercano soluzioni della forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

da cui l'ODE diventa:

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k-1} + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x_k c^{k-2} - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)c_k x^k - 2\sum_{k=0}^{+\infty} kc_k x^k + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} [\lambda - k(k-1) - 2k]\, c_k x^k = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} [\lambda - k(k+1)]\, c_k x^k = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ [\lambda - k(k+1)]\, c_k + (k+1)(k+2)c_{k+2} \right\} x^k = 0
\end{aligned}
$$

Visto che la serie deve essere nulla $\forall x \in [-1, 1]$, si conclude che devono essere nulli i coefficienti, per cui:

$$c_{k+2} = -\frac{\lambda - k(k+1)}{(k+1)(k+2)} c_k \tag{1.1.6}$$

Le serie $y(x)$ con coefficienti dati da eq. 1.1.6 sono dette *funzioni di Legendre*.

La condizione perché questa sia soluzione è che converga $\forall x \in [-1, 1]$. La proprietà dei coefficienti permette di studiare il comportamento all'infinito della serie; di fatto, si nota che $c_{k+2} \simeq c_k$ per $k \to +\infty$. Questo permette di identificare il comportamento della serie in questione con quello di una serie geometrica $c_\infty \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, che converge per $|x| < 1$. Nel caso della serie $y(x)$, però, si ha la possibilità $x = \pm 1$, quindi, per garantire la convergenza, l'unica possibilità è che, per qualche $n \geqslant 0$, la serie termina. Per imporre questa condizione, si richiede che $c_n \neq 0$ e che $c_{n+2} = 0$, che implica $c_{n+2m} = 0$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Inserendo la richiesta c_{n+2} in eq. 1.1.6, si ottiene che essere $\lambda = n(n+1)$[1]. La serie $y(x)$ si riduce, dunque, ad una funzione polinomiale di ordine n, con la proprietà che è pari o dispari a seconda di n stesso, per via del fatto che si potranno avere solo potenze pari o solo potenze dispari a seconda dei valori di c_0 e c_1 (di fatto, $c_0 \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$ e viceversa).

Usando l'equazione 1.1.6, si nota che:

$$c_n = -\frac{n(n+1) - (n-2)(n-1)}{n(n-1)} c_{n-2} = -\frac{2(2n-1)}{n(n-1)} c_{n-2} \implies 2(2n-1)c_{n-2} = -n(n-1)c_n$$

La ripetizione di questa porta ad esprimere tutti i coefficienti non nulli di ordine più piccolo di n come multipli di c_n:

$$c_{n-2k} = \frac{(-1)^k}{k!2^n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(2k-1))}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-(2k-1))} c_n, \ \forall k > 0$$

[1] È anche possibile dimostrare che λ non è un intero non-negativo, allora non vi sono soluzioni limitate per l'equazione di Legendre, a parte $y(x) \equiv 0$.

2 Proprietà matematiche dei polinomi di Legendre

2.1 Definizione algebrica

La loro definizione parte dalla serie di potenze $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$; a partire da questa, si vuole trovare un insieme di polinomi $\{P_0, P_1, \dots\}$, con $P_i : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ che risultino ortogonali fra loro.

Definizione 2.1 (Ortogonalità fra polinomi)

Siano $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, con $P, Q : [-1, 1] \to \mathbb{R}$; si definisce il loro prodotto scalare come

$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)\, dx \tag{2.1.1}$$

Conseguentemente, si dirà che $P \perp Q$ se:

$$\int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)\, dx = 0 \tag{2.1.2}$$

Il processo di ortogonalizzazione avviene tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt. Si indicheranno con p_i i polinomi ortogonalizzati, mentre con P_i quelli non ortogonali. Questo consiste nel prendere $p_0 = 1$; il k-esimo polinomio è ottenuto ricorsivamente tramite la formula

$$p_k = P_k - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle P_k, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} p_i \tag{2.1.3}$$

Così facendo, si ottiene un insieme di polinomi tra -1 e 1 ortogonali fra loro, ma non sono definiti univocamente perché, riscalandoli per una costante, risultano ancora ortogonali: se $\langle p, q \rangle = 0$, allora anche $\langle c_p p, c_q q \rangle = c_p c_q \langle p, q \rangle = 0$. Per eliminare questo ulteriore grado di libertà, si fissa la condizione di normalizzazione

$$p_k(1) = 1, \ \forall k \tag{2.1.4}$$

Tramite questo processo, si è costruito un insieme $\{p_0, p_1, \dots, p_k, \dots\}$ di polinomi che mappano $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ e, per n generico:

$$\deg(p_n) = n \qquad \deg(Q) < m \Rightarrow \langle p_n, Q \rangle = 0 \qquad p_n(1) = 1 \tag{2.1.5}$$

La seconda proprietà risulta direttamente dal fatto che un generico polinomio $Q(x) : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ si scrive come combinazione lineare di polinomi p_k.

Questi polinomi $\{p_0, p_1, \dots\}$ sono detti **polinomi di Legendre**. Di seguito, ne sono riportati alcuni (Svolgere calcoli!):

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1 \\
p_1(x) &= x \\
p_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
p_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
p_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
p_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{aligned}
$$

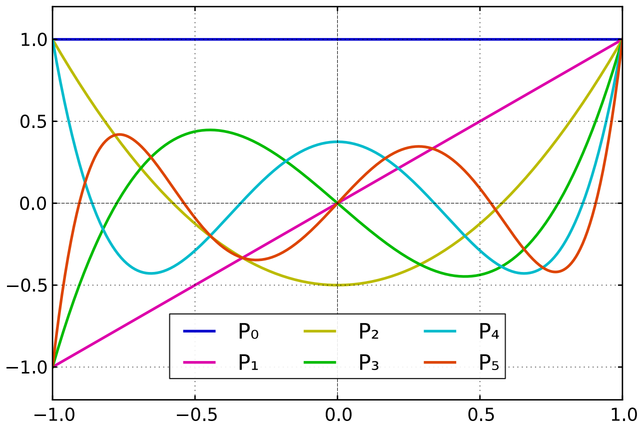

Figura 1: Plot dei polinomi di Legendre P_n, $n \leqslant 5$.

2.2 Parità

Come si può notare in figura 1, i polinomi di Legendre con indice pari sono pari, mentre quelli con indice dispari sono dispari.

Dimostrazione. Evidentemente, $\deg\big(P_n(-x)\big) = n$; usando che, per definizione $\langle P_n(x), Q(x)\rangle = 0$ se $\deg(Q) < n$, allora tramite integrazione per sostituzione:

$$\big\langle P_n(-x), Q(x)\big\rangle = \big\langle P_n(x), Q(-x)\big\rangle = 0$$

Allora deve risultare $P_n(-x) = \lambda P_n(x)$ per qualche costante λ perché sia verificato $\langle P_n(-x), Q(x)\rangle = 0$. Usando questo, si nota che:

$$\lambda\langle P_n(x), x^n\rangle = \langle P_n(-x), x^n\rangle = (-1)^n\langle P_n(-x), (-x)^n\rangle = (-1)^n\langle P_n(x), x^n\rangle$$

$$\Rightarrow P_n(-x) = (-1)^n P(x)$$

Questo dimostra che i polinomi di grado pari sono pari e quelli di grado dispari sono dispari. □

2.3 La formula di Rodrigues

Siano $P, Q : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ due generici polinomi in x; tramite integrazione per parti

$$\int_{-1}^{+1} P'(x)Q(x)\, dx = \left[PQ\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} P(x)Q'(x)\, dx$$

si ottiene la seguente formula per il calcolo del prodotto scalare:

$$\langle P', Q\rangle = \left[PQ\right]_{-1}^{+1} - \langle P, Q'\rangle \tag{2.3.1}$$

Se $(x^2 - 1)$ divide P o divide Q, la 2.3.1 diventa $\langle P', Q\rangle = -\langle P, Q'\rangle$. Applicando questa proprietà, si osserva che

$$\left\langle \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, Q \right\rangle \propto \left\langle (x^2-1)^n, \frac{d^n}{dx^n} Q \right\rangle$$

Allora:

$$\deg(Q) < n \implies \left\langle \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, Q \right\rangle = 0 \tag{2.3.2}$$

Visto che $D_x^n(X^2-1)^n$ è un polinomio di grado n, per le proprietà dei polinomi di Legendre, si deduce che:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \lambda P_n(x) \tag{2.3.3}$$

Ora si vuole trovare il valore di λ; per farlo, si usa la regola di Leibniz:

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n &= \frac{d^n}{dx^n}\left[(x+1)^n(x-1)^n\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}(x+1)^n\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x-1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x-1)^k\end{aligned}$$

Da questa, si nota che per $x = 1$, tutti i termini sono nulli eccetto quello per $k = 0$, che sarebbe 1; conseguentemente:

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right|_{x=1} = 2^n n!$$

Visto che $P_n(1) = 1$, allora si ottiene la *formula di Rodrigues* per i polinomi di Legendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{2.3.4}$$

2.4 L'equazione differenziale di Legendre

Si definisce l'operatore differenziale

$$L = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] \tag{2.4.1}$$

Assumendo che uno fra i due polinomi $P, Q : [-1,1] \to \mathbb{R}$ sia divisibile per $x^2 - 1$, allora si può usare $\langle P', Q\rangle = -\langle P, Q'\rangle$ per dimostrare che L è Hermitiano:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] P, Q \right\rangle &= -\left\langle (1-x^2)\frac{d}{dx}P, \frac{d}{dx}Q \right\rangle = -\left\langle \frac{d}{dx}P, (1-x^2)\frac{d}{dx}Q \right\rangle \\ &= \left\langle P, \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] Q \right\rangle\end{aligned}$$

cioè $\langle L[P], Q\rangle = \langle P, L[Q]\rangle$. L'operatore L mantiene il grado del polinomio, ossia $\deg\big(L[P]\big) = \deg(P)$ per il fatto che le derivate abbassano il grado di 2 e il prodotto per $1 - x^2$ lo ripristina.

Se $\deg(Q) < n$, allora, per P_n polinomio di Legendre, si ha $\langle L[P_n], Q\rangle = \langle P_n, L[Q]\rangle = 0$, pertanto deve valere $L[P_n] = \lambda P_n$. Per trovare il valore di λ, si considera

$$\begin{aligned}\lambda\langle P_n, x^n\rangle &= \langle L[P_n], x^n\rangle = \langle P_n, L[x^n]\rangle = \big\langle P_n, (n-1)nx^{n-2} - n(n+1)x^n \big\rangle \\ &= -n(n+1)\langle P_n, x^n\rangle\end{aligned}$$

dove si è eliminato il termine proporzionale a x^{n-2} perché ortogonale a P_n per definizione. Da questo, si conclude che $\lambda = -n(n+1)$, il che permette di ottenere due, equivalenti, equazioni differenziali per l'n-esimo polinomio di Legendre:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right] P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \\ (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0\end{gathered} \tag{2.4.2}$$

Questa è nota col nome di *equazione differenziale di Legendre*. Prendendo $x = 1$ in questa equazione, si ricava il valore della derivata in corrispondenza di tale valore: $P_n'(1) = n(n+1)/2$ (Controllare analogia con formuladi Gauss per la somma dei primi n interi).

2.5 Formula ricorsiva di Bonnet

Per ricavare un'espressione che permetta il calcolo ricorsivo dei polinomi, si parte dal valutare $\langle xP_n, P_m\rangle = \langle P_n, xP_m\rangle$, che risulta nullo se $m + 1 < n$. Questo permette di concludere che $P_{n+1} = \alpha x P_n + \beta P_{n-1} + \gamma P_n$, dove $\alpha + \beta + \gamma = 1$ per normalizzazione. Imponendo che i polinomi nei due membri dell'equazione abbiano stessa parità, si deve prendere $\gamma = 0$, per cui deve valere $\alpha + \beta = 1$.

Per trovare i valori di α e β, si ha già l'equazione $\alpha + \beta = 1$; inoltre, derivando e prendendo $x = 1$ nell'equazione trovata sopra:

$$\begin{aligned}
&P'_{n+1} = \alpha(P_n + xP'_n) + \beta P'_{n-1} \\
&\Rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \alpha\left[1 + \frac{n(n+1)}{2}\right] + \beta\frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

da cui $\alpha = (2n+1)/(n+1)$ e $\beta = -n/(n+1)$. Mettendo tutto insieme, si trova la *formula di Bonnet*:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{2.5.1}$$

2.6 Funzione generatrice

Si definisce la funzione generatrice come:

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n$$

dove i polinomi di Legendre P_n sono i coefficienti di una serie di potenze. Assumendo che $|t| < 1$:

$$g(1,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \qquad g(-1,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$$

Ora, partendo dalla formula di Bonnet e moltiplicando per t^n:

$$\begin{aligned}
&(n+1)P_{n+1}(x)t^n = (2n+1)xP_n(x)t^n - nP_{n-1}(x)t^n \\
&\Rightarrow (n+1)P_{n+1}t^n = xP_nt^n + 2nxP_nt^n - (n-1)P_{n-1}t^n - P_{n-1}t^n \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(P_{n+1}t^{n+1}\right) = x(P_nt^n) + 2tx\frac{\partial}{\partial t}(P_nt^n) - t^2\frac{\partial}{\partial t}(P_{n-1}t^{n-1}) + t(P_{n-1}t^{n-1}) \\
&\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial t} = xg + 2tx\frac{\partial g}{\partial t} - t^2\frac{\partial g}{\partial t} + tg \\
&\Rightarrow (1 - 2tx + t^2)\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = (x-t)g(x,t)
\end{aligned}$$

dove per la terza implicazione, si è sommato su n. Ora, chiamando $(1 - 2tx + t^2) = h(x,t)$, che è tale per cui $\partial_t h = 2(t-x)$, si ottiene:

$$h(x,t)\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}g(x,t)\frac{\partial}{\partial t}h(x,t) \implies \frac{1}{g(x,t)}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2h(x,t)}\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}$$

Integrando ambo i membri, si ottiene

$$\ln\big(g(x,t)\big) = -\frac{1}{2}\ln\big(h(x,t)\big) + c(x) \implies g(x,t) = \frac{e^{c(x)}}{\sqrt{h(x,t)}}$$

Per trovare $c(x)$, si usa che $g(x,0) = 1 \Rightarrow c(x) = 0$. Complessivamente, la funzione generatrice è:

$$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} \tag{2.6.1}$$

3 Da fare

- Partire dal problema di Laplace in coordinate polari.
- Definire l'operatore differenziale $L[P]$ nell'equazione differenziale dei polinomi.
- Vedere cosa significa autoaggiunto nel senso di Sturm-Liouville.
- Definire in generale il prodotto scalare per spazi di funzioni.
- Trarre da questo che il prodotto scalare deve avere peso costante e unitario.
- Motivare la scelta dell'intervallo $[-1, 1]$.