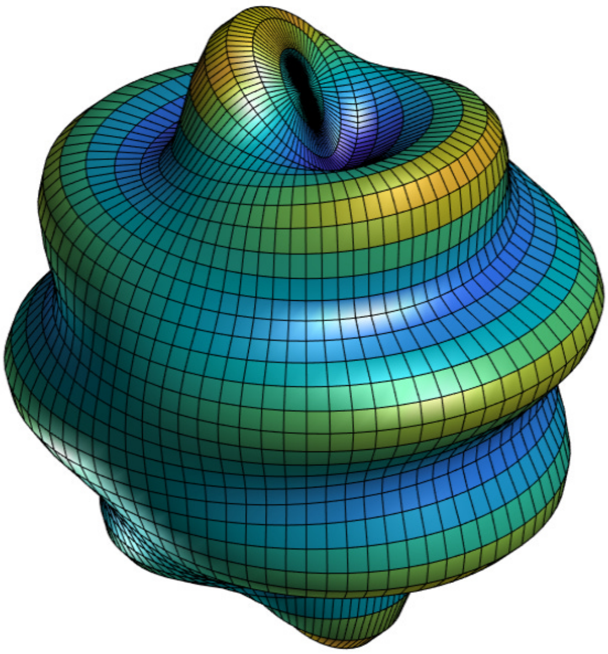
APPUNTI DI
GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

Manuel Deodato



Indice

1 | Teoria delle curve

§1.1 Introduzione

Definizione 1.1 (Curva parametrizzata). Una *curva paramtrizzata* è un'applicazione $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^\infty(I)$, con I intervallo aperto. Data $t \in I$, si può scrivere in componenti come

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ tutte di classe $C^\infty(I)$.

Osservazione 1.1. La necessità di definire la curva su un aperto, o quantomeno di poter estendere l'intervallo di definizione ad un aperto, deriva dal fatto che, in questo modo, si può effettivamente parlare di derivata piena anche per gli estremi, potendo trovare, infatti, un aperto che contiene interamente i punti di frontiera dell'intervallo di definizione.

Se non si avesse questa possibilità, nel caso di $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, per esempio, non si potrebbe calcolare la derivata tradizionale in a, o b, perché si potrebbe solamente calcolare il limite destro o sinistro.

Si nota che, nel caso in cui I non fosse aperto, si estende l'intervallo di definizione ad $A \supset I$ aperto.

Si parla di *traccia* della curva in riferimento all'immagine che genera dell'intero intervallo: $\operatorname{Tr}\alpha = \alpha(I)$. La traccia rappresenta l'unione di ciascun punto di $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I$. Per *velocità* della curva, invece, si intende la grandezza

$$\alpha'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) \tag{1.1.1}$$

In realtà, questo rappresenta il *vettore velocità*, mentre la velocità vera e propria è data dalla sua norma $\|\alpha'(t)\|$.

Esempio 1.1 (Retta parametrizzata). Siano $P, Q \in \mathbb{R}^3$, con $P \neq Q$, due punti dello spazio; si definisce, allora, *retta parametrizzata* la curva

$$\alpha(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$$

La sua traccia è la retta affine passante per P e Q, e ha vettore velocità $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$, da cui $\|\alpha'(t)\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$, che è costante.

Esempio 1.2 (Circonferenza parametrizzata). Dato $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, si definisce *circonferenza parametrizzata* come

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$$

il cui vettore velocità è dato da $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$, che non risulta costante, mentre la sua velocità $\|\alpha'\| = a > 0$ sì. La traccia corrisponde ad una circonferenza nel piano $z = 0$, di centro l'origine e raggio a.

Definizione 1.2 (Curva regolare). Una curva parametrizzata $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è detta *regolare* se $\alpha'(t) \neq 0, \ \forall t \in I$.

Definizione 1.3 (Lunghezza d'arco). Sia $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare; si definisce *lunghezza d'arco* la funzione

$$s : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du \end{array}$$

La lunghezza dell'intera curva α è data da $L(\alpha) = s(b)$.

Osservazione 1.2. Si nota che per $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, con $\alpha(t) = \big(a \cos t, a \sin t, 0\big)$, valendo $\|\alpha'(t)\| = a$, si ha:

$$s(t) = a \int_0^t du = ta \implies s(2\pi) = 2\pi a$$

Sia dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $P \in \mathcal{P}([a, b])$ una sua partizione, tale che $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$; allora la lunghezza di una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ approssimata a tale partizione è data da:

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \tag{1.1.2}$$

Si nota, dunque, che la lunghezza effettiva della curva coincide con

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| \, du \tag{1.1.3}$$

Si considera, ancora una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$; visto che $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du$, allora $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. Si può pensare alla lunghezza d'arco come $s : [a, b] \to [0, L(\alpha)]$, che, essendo monotona perché si è appena osservato che $s'(t) > 0$, allora ha anche inversa $t : [0, L(\alpha)] \to [a, b]$. È, quindi, possibile definire la funzione

$$\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \to \mathbb{R}^3 \tag{1.1.4}$$

tale che $\mathrm{Tr}(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha)$ e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, per cui

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t)\|}$$

per cui $\|\beta'(s)\| = 1$.

Definizione 1.4 (Curva p.l.a.). Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è una curva tale che $\|\alpha'(t)\| = 1$, $\forall t \in I$, allora si dice che è *parametrizzata tramite lunghezza d'arco*, o pla.

Osservazione 1.3. In base a quanto detto prima, ogni curva regolare è *riparametrizzabile tramite lunghezza d'arco*.

Esempio 1.3 (Elica). Sia $a > 0$; allora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, z) & \longmapsto & (a \cos u, a \sin u, z) \end{array}$$

definisce un cilindro di raggio a attorno all'asse z. Preso $b > 0$ e presi i punti $\{(t, bt)\}_{t \in \mathbb{R}}$, relativi ad una retta passante per l'origine, aperto, si può definire la curva

$$\alpha(t) = \varphi(t, bt) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

che descrive un'*elica destrorsa*, visto che si è preso $b > 0$[a], di raggio a e passo b. Si nota che

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

da cui α è regolare. Restringendola a $[0, +\infty)$, cioè considerando $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, si ha:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t(s)\sqrt{a^2 + b^2} \implies t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

quindi:

$$\begin{aligned}\beta(s) = \alpha(t(s)) &= a\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\ &= \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\end{aligned}$$

con β pla e, conseguentemente, $\beta(\mathbb{R}) = \mathrm{Tr}(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha(\mathbb{R})$.

[a]Fosse stato $b < 0$, sarebbe stata un'*elica sinistrorsa*.

Esempio 1.4 (Ellisse). Siano $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e sia

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole definire una curva α tale che $\mathrm{Tr}\,\alpha = \mathcal{E}_{a,b}$

Svolgimento. Si nota che $(x/a, y/b) \in S^1$, cioè

$$\frac{x}{a} = \cos t \qquad \frac{y}{b} = \sin t$$

con S^1 circonferenza unitaria e $t \in [0, 2\pi)$. Sia, allora

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a\cos t, b\sin t, 0)\end{array}$$

e si vede che $\mathrm{Tr}\,\alpha = \mathcal{E}_{a,b}$. ■

Esempio 1.5. Sia

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire α tale che $\mathrm{Tr}\,\alpha = \mathcal{C}$.

Svolgimento. Se si considera la secante $y = tx$, allora $t^2x^2 = x^3$, ossia $x = t^2$ e $y = t^3$. Ne segue che la curva che soddisfa la richiesta è $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$. ■

Esempio 1.6. Sia

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,0) \mid y^2 = x^3 + x^2\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire una curva α tale che $\mathrm{Tr}\,\alpha = \mathcal{C}$.

Svolgimento. Si considera, come prima, $y = tx$, da cui $x^3 + x^2(1-t^2) = 0$, da cui si vede che $x = t^2 - 1$ e $y = t^3 - t$, quindi $\alpha(t) = (t^2-1, t^3-t, 0)$ (da controllare). ■

Lemma 1.0.1. Se $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ sono due mappe, allora

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Dimostrazione. Si ha

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t) g_i(t)$$

quindi

$$(f(t) \cdot g(t))' = \sum_{i=1}^{3} [f_i'(t) g_i(t) + f_i(t) g_i'(t)]$$

□

Definizione 1.5 (Versore tangente). Data una curva riparametrizzabile $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e la sua riparametrizzazione tramite lunghezza d'arco $\beta(s)$, si definisce il *versore tangente* ad α come $T(s) = \beta'(s)$.

Proposizione 1.1. Se $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ è una curva pla, allora $T'(s) \cdot T(s) = 0$.

Dimostrazione. Per quanto visto, $\|T(s)\|^2 = T(s) \cdot T(s) = 1$; per il lemma precedente 1.0.1, si ha $2T'(s) \cdot T(s) = (T(s) \cdot T(s))' = 0$. □

Definizione 1.6 (Curvatura). Data una curva pla $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ e il suo versore tangente $T(s)$, allora se ne definisce la *curvatura* come

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

§1.2 Riferimento di Frenet