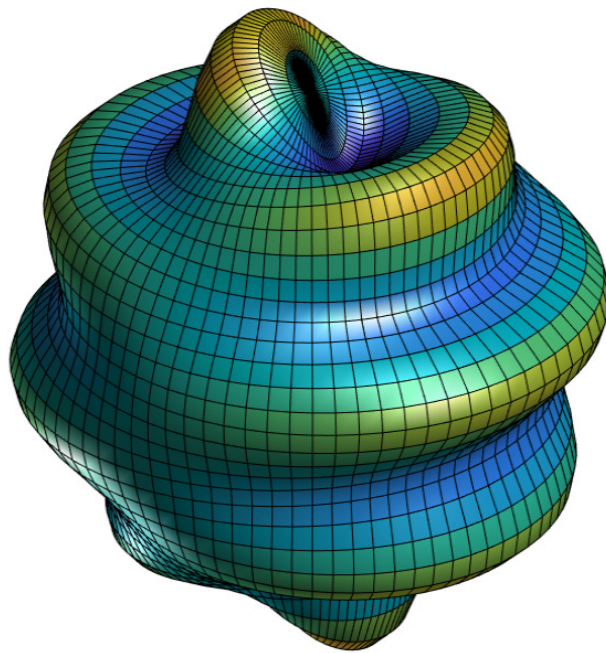


# APPUNTI DI GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

MANUEL DEODATO



# INDICE

<b>1</b>	<b>Teoria delle curve</b>	<b>4</b>
1.1	Introduzione	4
1.2	Riparametrizzazione di una curva	5
1.3	Riferimento ed equazioni di Frenet	9
1.4	Riferimento di Frenet senza lunghezza d'arco	15
1.5	Teorema fondamentale della teoria delle curve	17
1.6	Esercizi	19
<b>2</b>	<b>Superfici</b>	<b>23</b>
2.1	Introduzione	23
2.2	Alcuni esempi di superficie	24
2.3	Superfici di rotazione	26
2.4	Metodo del gradiente	29
2.5	Piano tangente	31
2.5.1	Esistenza e unicità	31
2.5.2	Versore normale	33
2.6	Orientabilità	34
<b>3</b>	<b>Curve su superfici</b>	<b>37</b>
3.1	Introduzione	37
3.2	L'operatore forma	38
3.3	Curvature e direzioni principali	40
3.4	Forme fondamentali	43
3.4.1	Formula per la curvatura di Gauss	43
3.4.2	Formula per $\ell, m, n$	44
3.5	Il teorema Egregium	45
3.6	Trasporto parallelo	49
3.7	Geodetiche	52
3.7.1	Esistenza locale e mappa esponenziale	53
3.7.2	Minimizzazione delle distanze	55
3.7.3	Geodetiche su superfici di rotazione	56
3.8	Teorema di Gauss-Bonnet	60
3.8.1	Integrazione su superfici	60

3.8.2	Teorema di Gauss-Bonnet locale	63
3.8.3	Curvatura normale e curvatura geodetica	64
3.8.4	Teorema di Gauss-Bonnet globale	65
3.9	Esercizi	67
<b>4</b>	<b>Topologia differenziale</b>	<b>85</b>
4.1	Spazio tangente e differenziale	86
4.2	Punti critici e valori regolari	89
4.2.1	Teoremi di Sard e di Brown	91
4.2.2	Altri risultati sui valori regolari	94

# 1 | TEORIA DELLE CURVE

## §1.1 Introduzione

**Definizione 1.1 (Curva parametrizzata).** Una *curva parametrizzata* è un'applicazione  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^\infty(I)$ , con  $I$  intervallo aperto. Data  $t \in I$ , si può scrivere in componenti come

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  tutte di classe  $C^\infty(I)$ .

**Osservazione 1.1.** La necessità di definire la curva su un aperto, o quantomeno di poter estendere l'intervallo di definizione ad un aperto, deriva dal fatto che, in questo modo, si può effettivamente parlare di derivata piena anche per gli estremi, potendo trovare, infatti, un aperto che contiene interamente i punti di frontiera dell'intervallo di definizione. Se non si avesse questa possibilità, nel caso di  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , per esempio, non si potrebbe calcolare la derivata tradizionale in  $a$ , o  $b$ , perché si potrebbe solamente calcolare il limite destro o sinistro.

Si parla di *traccia* della curva in riferimento all'immagine che genera dell'intero intervallo:  $\text{Tr } \alpha = \alpha(I)$ . La traccia rappresenta l'unione di ciascun punto di  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\forall t \in I$ . Per *velocità* della curva, invece, si intende la grandezza<sup>1</sup>

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (1.1.1)$$

In realtà, questo rappresenta il *vettore velocità*, mentre la velocità vera e propria è data dalla sua norma  $\|\alpha'(t)\|$ .

**Esempio 1.1 (Retta parametrizzata).** Siano  $P, Q \in \mathbb{R}^3$ , con  $P \neq Q$ , due punti dello spazio; si definisce, allora, *retta parametrizzata* la curva

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto P + t(Q - P) = P + t\overrightarrow{PQ} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Questa è ben definita perché si sta operando in uno spazio vettoriale, con  $\alpha(t+h) - \alpha(t)$  giustificata dall'operazione di somma dello spazio e divisione per  $h$  data dalla moltiplicazione per uno scalare.

La sua traccia è la retta affine passante per  $P$  e  $Q$ , e ha vettore velocità  $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$ , da cui  $\|\alpha'(t)\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$ , che è costante.

**Esempio 1.2 (Circonferenza parametrizzata).** Dato  $a \in \mathbb{R}$ , con  $a > 0$ , si definisce *circonferenza parametrizzata* come

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a \cos t, a \sin t, 0) \end{array}$$

il cui vettore velocità è dato da  $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$ , che non risulta costante, mentre la sua velocità  $\|\alpha'\| = a > 0$  sì. La traccia corrisponde ad una circonferenza nel piano  $z = 0$ , di centro l'origine e raggio  $a$ .

## §1.2 Riparametrizzazione di una curva

Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata; una sua *riparametrizzazione* è data dalla coppia di mappe  $h : [a, b] \rightarrow [c, d] \subseteq \mathbb{R}$  e  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} [a, b] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow h & \nearrow \beta & \\ [c, d] & & \end{array}$$

commuta, quindi si ha  $\beta(h(t)) = \alpha(t)$ . Perché questo sia verificato, si assume che  $h \in C^\infty([a, b])$  e  $h'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ ; in questo modo,  $\exists h^{-1}$  di classe  $C^\infty$  tale che  $\beta = \alpha \circ h^{-1}$ , quindi anche  $\beta$  risulta liscia ed è verificata la relazione  $(\beta \circ h)(t) = \alpha(t)$ , con  $\text{Tr } \alpha = \text{Tr } \beta$ .

Ora si definisce la lunghezza di una curva; se ne giustifica la definizione tramite il seguente ragionamento. Sia dato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $P \in \mathcal{P}([a, b])$  una sua partizione, tale che  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ ; allora la lunghezza di una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  approssimata a tale partizione è data da:

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \quad (1.2.1)$$

Si nota, dunque, che la lunghezza effettiva della curva coincide con

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([a, b])} L(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du \quad (1.2.2)$$

**Definizione 1.2 (Lunghezza d'arco).** Sia  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva; si definisce *lunghezza d'arco* la funzione

$$s : \begin{array}{ll} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \end{array}$$

La lunghezza dell'intera curva  $\alpha$  è data da  $L(\alpha) = s(b)$ .

**Osservazione 1.2.** Si nota che per  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ , valendo  $\|\alpha'(t)\| = a$ , si ha:

$$s(t) = a \int_0^t du = ta \implies s(2\pi) = 2\pi a$$

Vale la pena chiedersi se  $L(\alpha)$  sia indipendente dalla sua parametrizzazione, cioè se  $L(\alpha) = L(\beta)$ , se  $\beta$  è una riparametrizzazione di  $\alpha$ ; questo si vede facilmente per conto diretto.

*Dimostrazione.* Se  $\alpha(t) = \beta(h(t))$ , allora  $\alpha'(t) = \beta'(h(t))h'(t)$ , quindi

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b |h'(t)| \|\beta'(h(t))\| dt$$

Ora si distinguono due casi: essendo  $h'(t) \neq 0, \forall t$ , si può avere o  $h'(t) < 0$ , o  $h'(t) > 0$ . Nel primo caso, si ha  $h'(t) < 0$ , quindi  $|h'(t)| = -h'(t)$ , con  $h(a) = d$  e  $h(b) = c$ ; nel secondo caso,  $|h'(t)| = h'(t)$ , con  $h(a) = c$  e  $h(b) = d$ . Si trova, per  $s = h(t)$ , rispettivamente:

$$\begin{cases} -\int_d^c h'(t) \|\beta'(h(t))\| dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = L(\beta) \\ \int_c^d h'(t) \|\beta'(h(t))\| dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| ds = L(\beta) \end{cases}$$

In entrambi i casi, dunque, si ottiene  $L(\alpha) = L(\beta)$ . □

Ora si introduce una particolare riparametrizzazione, talvolta nota col nome di *riparametrizzazione canonica*, o *naturale*; per poterla definire, è necessario che  $\alpha$  soddisfi la seguente condizione.

**Definizione 1.3 (Curva regolare).** Una curva parametrizzata  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è detta *regolare* se  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

Si considera, quindi, una curva regolare  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; visto che  $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ , allora  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ . Si può pensare alla lunghezza d'arco come  $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\alpha)]$ , che, essendo monotona perché si è appena osservato che  $s'(t) > 0$ , allora ha anche inversa  $t : [0, L(\alpha)] \rightarrow [a, b]$ . È, quindi, possibile definire la funzione

$$\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.2.3)$$

tale che  $\text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha)$  e  $\beta(s) = \alpha(t(s))$ , per cui

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t)\|}$$

per cui  $\|\beta'(s)\| = 1$ .

**Definizione 1.4 (Curva p.l.a.).** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva tale che  $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ , allora si dice che è *parametrizzata tramite lunghezza d'arco*, o *pla*.

**Osservazione 1.3.** In base a quanto detto prima, ogni curva regolare è *riparametrizzabile tramite lunghezza d'arco*.

**Osservazione 1.4 (Non unicità della versione pla).** Data una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la riparametrizzazione tramite lunghezza d'arco non è univoca ma dipende dall'estremo inferiore di integrazione della lunghezza d'arco  $s(t)$ ; se, infatti,  $a, b \in I$  con  $a < b$ :

$$s_a(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \quad s_b(t) = \int_b^t \|\alpha'(u)\| du$$

Le due, però, differiscono solo per una costante perché

$$s_a(t) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du + \int_b^t \|\alpha'(u)\| du = \text{cost.} + s_b(t)$$

Questa differenza per una costante non influirà sulla trattazione del riferimento di Frenet perché si lavora con derivate e la costante sparisce.

**Esempio 1.3 (Elica).** Sia  $a > 0$ ; allora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, z) & \longmapsto & (a \cos u, a \sin u, z) \end{array}$$

definisce un cilindro di raggio  $a$  attorno all'asse  $z$ . Preso  $b > 0$  e presi i punti  $\{(t, bt)\}_{t \in \mathbb{R}}$ , relativi ad una retta passante per l'origine, aperto, si può definire la curva

$$\alpha(t) = \varphi(t, bt) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

che descrive un'elica destrorsa, visto che si è preso  $b > 0^a$ , di raggio  $a$  e passo  $b$ . Si nota che

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

da cui  $\alpha$  è regolare. Restringendola a  $[0, +\infty)$ , cioè considerando  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si ha:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t(s) \sqrt{a^2 + b^2} \implies t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \alpha(t(s)) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ &= \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{aligned}$$

con  $\beta$  pla e, conseguentemente,  $\beta(\mathbb{R}) = \text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha) = \alpha(\mathbb{R})$ .

---

<sup>a</sup>Fosse stato  $b < 0$ , sarebbe stata un'elica sinistrorsa.

**Esempio 1.4 (Ellisse).** Siano  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e sia

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole definire una curva  $\alpha$  tale che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$

*Svolgimento.* Si nota che  $(x/a, y/b) \in S^1$ , cioè

$$\frac{x}{a} = \cos t \quad \frac{y}{b} = \sin t$$



con  $S^1$  circonferenza unitaria e  $t \in [0, 2\pi)$ . Sia, allora

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a \cos t, b \sin t, 0) \end{array}$$

e si vede che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$ . ■

**Esempio 1.5.** Sia

$$\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire  $\alpha$  tale che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{C}$ .

*Svolgimento.* Se si considera la secante  $y = tx$ , allora  $t^2 x^2 = x^3$ , ossia  $x = t^2$  e  $y = t^3$ . Ne segue che la curva che soddisfa la richiesta è  $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ . ■

**Esempio 1.6.** Sia

$$\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \mid y^2 = x^3 + x^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire una curva  $\alpha$  tale che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{C}$ .

*Svolgimento.* Si considera, come prima,  $y = tx$ , da cui  $x^3 + x^2(1 - t^2) = 0$ , e si vede che  $x = t^2 - 1$  e  $y = t^3 - t$ , quindi  $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t, 0)$ . ■

Per quanto in linea teorica se  $\alpha$  è una curva regolare, allora si può riparametrizzare tramite lunghezza d'arco, questo non è praticamente fattibile in ogni singolo caso; se, per esempio, si considera  $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ , si ha  $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$ , che, dunque, è regolare, ma data

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4} du$$

non si è in grado di trovare un'espressione per  $t(s)$  perché la primitiva di  $s$  non è scrivibile in termini di funzioni elementari.

### §1.3 Riferimento ed equazioni di Frenet

**Definizione 1.5 (Versore tangente).** Data una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e la sua versione pla,  $\beta(s)$ , si definisce il *versore tangente* ad  $\alpha$  come  $T(s) = \beta'(s)$ .

**Definizione 1.6 (Curvatura).** Data una curva pla  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e il suo versore tangente  $T(s)$ , allora se ne definisce la *curvatura* come

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

Ora si ricavano il riferimento di Frenet e le equazioni di Frenet. Per poter definire il riferimento di Frenet e ricavare, conseguentemente, le equazioni di Frenet, è necessario imporre ulteriori condizioni sulle curve in esame; la condizione operativa necessaria è la seguente.

**Definizione 1.7 (Curva di Frenet).** Una curva regolare  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è detta di *Frenet* se la sua pla  $\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è tale che  $k(s) > 0, \forall s \in [0, L(\alpha)]$ .

**Lemma 1.0.1.** Se  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono due mappe, allora

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$$

quindi

$$(f(t) \cdot g(t))' = \sum_{i=1}^3 [f'_i(t)g_i(t) + f_i(t)g'_i(t)]$$

□

Data  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di Frenet e  $T(s) = \beta'(s)$  il suo versore normale, con  $\beta$  versione pla di  $\alpha$ , si nota che  $T'(s)$  non è, in generale un versore e

$$1 = \|T(s)\|^2 = T(s) \cdot T(s) \implies [T(s) \cdot T(s)]' = 2T'(s) \cdot T(s) = 0 \implies T'(s) \perp T(s)$$

Avendo assunto  $\alpha$  di Frenet, significa che  $k_\alpha(s) \neq 0$ , quindi  $T'(s)$  è normalizzabile e si ottiene un versore ortogonale a  $T(s)$ . Usando questo versore e  $T(s)$ , tramite il prodotto vettore, se ne può definire un terzo; allora si ha la seguente definizione.

**Definizione 1.8 (Versori normale e binormale).** Dato  $T(s)$  versore tangente di una curva di Frenet  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si definiscono  $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$  *versore normale principale* e  $B(s) = T(s) \times N(s)$  *versore binormale*.

Evidentemente, si ha  $\|N(s)\| = \|B(s)\| = 1$  e  $T(s) \cdot N(s) = T(s) \cdot B(s) = N(s) \cdot B(s) = 0$ . Ne segue che  $(T(s), N(s), B(s)), \forall s \in I$  forma una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ , nota col nome di **riferimento di Frenet**. Per definizione di  $N(s)$ , si ottiene la **I equazione di Frenet**:

$$T'(s) = k(s)N(s) \tag{1.3.1}$$

Si nota che, essendo un versore, si ha  $N(s) \cdot N(s) = 1$ , quindi  $N'(s) \cdot N(s) = 0$  (per lo stesso ragionamento fatto per  $T(s)$ ), dunque  $N'(s) \in \langle T(s), B(s) \rangle$ ; inoltre, essendo  $T(s) \cdot N(s) = 0$ , si ha

$$T'(s) \cdot N(s) + T(s) \cdot N'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot N(s)}_{=1} + T(s) \cdot N'(s) = 0$$

perciò si trova  $\tau(s)$  tale per cui

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad (1.3.2)$$

Questa è nota come **II equazione di Frenet**.

**Definizione 1.9 (Torsione).** Data una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta$  la sua pla, si definisce  $\tau(s)$  come la *torsione* di  $\beta$  nel punto  $s$ .

Ripetendo lo stesso ragionamento, si ha  $B(s) \cdot B(s) = 1 \Rightarrow B'(s) \cdot B(s) = 0$ , da cui  $B'(s) \in \langle T(s), N(s) \rangle$  e, essendo  $N(s) \cdot B(s) = 0$ , dalla derivata di  $T(s) \cdot B(s) = 0$ , si ha

$$T'(s) \cdot B(s) + T(s) \cdot B'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot B(s)}_{=0} + T(s) \cdot B'(s) = 0$$

quindi  $B'(s) \in \langle N(s) \rangle$ . Usando  $T(s) \cdot B(s) = 0$  e derivando  $N(s) \cdot B(s) = 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} N'(s) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) &= (-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) \\ &= \tau(s) \underbrace{B(s) \cdot B(s)}_{=1} + N(s) \cdot B'(s) = 0 \end{aligned}$$

cioè

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) \quad (1.3.3)$$

che è nota come **III equazione di Frenet**. Ricapitolando, le equazioni di Frenet stabiliscono delle relazioni tra le derivate dei versori ortonormali del riferimento di Frenet e i versori stessi e sono:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Ora si applicano i concetti visti alle curve studiate nella sezione precedente.

**Esempio 1.7.** Sia  $\alpha(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$  una curva parametrizzata (con  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  e  $P \neq Q$ ). Si ha  $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$ , quindi la curva è regolare, quindi se ne può trovare una pla:

$$s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{PQ}\| du = t\|\overrightarrow{PQ}\| \implies t = \frac{s}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

quindi si ha  $\beta(s) = P + s \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ . Allora il versore tangente è dato da

$$T(s) = \beta'(s) = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \implies T'(s) = 0$$

perciò  $k(s) = 0$  e, quindi,  $\alpha$  non è una curva di Frenet perché non ha curvatura positiva.

**Esempio 1.8.** Per  $a > 0$ , sia  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$  una circonferenza parametrizzata di raggio  $a$ . Evidentemente, si può vedere come un caso particolare di elica parametrizzata per  $b = 0$ , quindi si può fare uso del risultato trovato in precedenza:

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left( a \cos \left( \frac{s}{a} \right), a \sin \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right) \implies T(s) = \left( -\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a}, 0 \right) \\ \Rightarrow T'(s) &= \underbrace{\frac{1}{a} \left( -\cos \frac{s}{a}, -\sin \frac{s}{a}, 0 \right)}_{\substack{k(s) \\ N(s)}} \end{aligned}$$

Si conclude che  $N(s) \perp z$  e punta proprio verso  $z$ ; inoltre, la circonferenza parametrizzata è una curva di Frenet perché ha curvatura positiva, essendo  $1/a > 0$  perché  $a > 0$  per assunzione. Infine:

$$\begin{aligned} B(s) &= \begin{pmatrix} -\sin s/a \\ \cos s/a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/a \\ -\sin s/a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -\tau(s)N(s) &= B'(s) = 0 \implies \tau(s) = 0 \end{aligned}$$

**Esempio 1.9.** Si considera l'elica parametrizzata  $\alpha = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , con raggio  $a \in \mathbb{R}^{>0}$  e passo  $b \in \mathbb{R}$ . La sua pla è già stata ricavata; dato  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , si ottiene:

$$\beta(s) = \left( a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{b}{c}s \right)$$

da cui

$$T(s) = \frac{1}{c} \left( -a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right) \implies T'(s) = \underbrace{\frac{a}{c^2}}_{k(s)} \underbrace{\left( -\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right)}_{N(s)}$$

quindi, come nel caso della circonferenza,  $N(s) \perp z$  e punta verso di esso. Si ha:

$$B(s) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -a \sin s/c \\ a \cos s/c \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/c \\ -\sin s/c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b \sin s/c \\ -b \cos s/c \\ a \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \implies \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = \frac{b}{c^2}$$

Da questo, si vede che

- se  $b > 0$ , allora l'elica è destrorsa e  $\tau(s) > 0$ ,
- se  $b < 0$ , allora l'elica è sinistrorsa e  $\tau(s) < 0$ ,
- se  $b = 0$ , si ha una circonferenza e  $\tau(s) = 0$ , con  $k(s) = 1/a$ .

Fissando  $a$ , si nota che, per  $b \rightarrow \pm\infty$ , si ha  $\tau(s) \rightarrow 0$  e  $k(s) = a/(a^2 + b^2) \rightarrow 0$ .

**Proposizione 1.1.** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare; allora  $k_\alpha = 0 \iff \alpha(I)$  è contenuta in una retta.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ( $\Leftarrow$ ) Se  $\alpha(I) \subseteq P + \langle v \rangle$ , per  $v$  versore generico, si considera la sua versione pla  $\alpha(I) = \beta(J) \subseteq P + \langle v \rangle$ ; allora  $\beta = P + f(s)v$  e  $\beta' = f'(s)v$ , con  $f'(s) = \pm 1$  perché  $\|\beta'\| = 1$ . Ne segue che:

$$T(s) = \beta'(s) = f'(s)v = \pm v \implies T'(s) = 0 \implies k_\alpha(s) = 0$$

- ( $\Rightarrow$ ) Sia  $\|T'(s)\| = k_\alpha(s) = 0$ , quindi  $T(s) = \beta'(s) = v$ , per qualche  $v \in \mathbb{R}^3$ . Allora

si deve avere  $\beta(s) = \beta(0) + sv \in \beta(0) + \langle v \rangle$ .

□

**Esercizio 1.1.** Sia  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva pla tale che

$$\beta(I) \subseteq S_r^2(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| = r\}$$

Mostrare che  $\beta$  è di Frenet.

*Svolgimento.* Se  $\beta(I) \subseteq S_r^2(P)$ , allora  $\|\beta(s) - P\|^2 = r^2$ ; derivando due volte rispetto a  $s$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [T(s) \cdot (\beta(s) - P)] &= 0 \implies T'(s) \cdot (\beta(s) - P) + T(s) \cdot T(s) = 0 \\ \implies T'(s) \cdot (\beta(s) - P) &= -1 \implies k(s) [N(s) \cdot (\beta(s) - P)] = -1 \end{aligned}$$

Quindi  $k(s) \neq 0$  e, pertanto  $\beta$  è di Frenet. ■

**Proposizione 1.2.** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di Frenet; allora  $\tau_\alpha = 0 \iff \alpha(I)$  è contenuta in un piano.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ( $\implies$ ) Si assume, senza perdita di generalità, che  $\alpha$  sia pla<sup>1</sup>. Allora

$$\tau_\alpha = 0 \implies B'_\alpha(s) = -\tau_\alpha(s)N_\alpha(s) = 0$$

quindi  $B_\alpha$  è costante; sia  $B_\alpha(s) = B_0$ , per qualche  $B_0 \in \mathbb{R}^3$  tale che  $\|B_0\| = 1$ . Ne segue, allora, che

$$T(s) \cdot B_0 = \alpha'(s) \cdot B_0 \implies (\alpha(s) \cdot B_0)' = 0$$

quindi  $\alpha(s) \cdot B_0 = c \in \mathbb{R}$ , dunque  $\alpha(I) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\}$ .

- ( $\impliedby$ ) Sia  $\alpha(I) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\}$ , per qualche  $B_0 \in \mathbb{R}^3$  tale che  $\|B_0\| = 1$  e  $c \in \mathbb{R}$ ; allora  $\forall s, \alpha(s) \cdot B_0 = c$ . Ne segue che

$$T(s) \cdot B_0 = 0 \implies k(s)(N(s) \cdot B_0) = 0 \implies N(s) \cdot B_0 = 0$$

---

<sup>1</sup>Altrimenti,  $\alpha$  ammette una versione pla perché è una curva di Frenet.

dove la seconda implicazione è giustificata dal fatto che  $\alpha$  è di Frenet, quindi  $k(s) > 0$ . Visto che  $B_\alpha(s) = T(s) \times N(s)$ , allora si avrà  $B_\alpha(s) = \pm B_0, \forall s$ , da cui  $B'_\alpha = 0, \forall s$ , quindi  $\tau_\alpha(s) = 0, \forall s$ . □

**Proposizione 1.3.** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di Frenet; se  $\tau_\alpha = 0$ , allora  $k_\alpha$  è costante  $\iff \alpha(I)$  è contenuta in una circonferenza.

*Dimostrazione.* La serie di equivalenze è fornita dall'esercizio 1.1. □

**Proposizione 1.4.** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare; se  $\alpha(I) \subseteq \mathbb{S}_R(P) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| = R\}$ , allora  $\alpha$  è di Frenet e  $k_\alpha \geq 1/R > 0$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\beta$  la versione pla di  $\alpha$ . Assumendo che  $\text{Tr}(\beta) \subseteq \mathbb{S}_R(P)$ , si ha:

$$(\beta(s) - P) \cdot (\beta(s) - P) = \|\beta(s) - P\|^2 = R^2$$

Derivando questa relazione, si ha:

$$\beta'(s) \cdot (\beta(s) - P) = 0$$

Derivando nuovamente:

$$T'(s) \cdot (\beta(s) - P) + \underbrace{\beta'(s) \cdot \beta'(s)}_{=1} = 0$$

Passando alla norma, si vede che:

$$1 = \|T'(s) \cdot (\beta(s) - P)\| \leq \|T'(s)\| \|\beta(s) - P\| = k_\alpha(s)R$$

da cui  $k_\alpha(s) \geq 1/R > 0$ , quindi  $\alpha$  è di Frenet. □

## §1.4 Riferimento di Frenet senza lunghezza d'arco

Come accennato, la possibilità di ottenere la versione pla di una curva regolare, anche se ammissibile in teoria, non sempre è concreta in pratica.

Sia, allora,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare; per definizione

$$\beta(s(t)) = \alpha(t) \implies \beta'(s(t))s'(t) = \beta'(s(t)) \|\alpha'(t)\| = \alpha'(t)$$

da cui si ottiene la relazione

$$T(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

Dalla relazione precedente, sostituendo  $\beta'(s(t)) = T(s(t))$ , si ottiene

$$s'(t)T(s(t)) = \alpha'(t) \quad (1.4.1)$$

e, derivando:

$$s''(t)T(s(t)) + s'^2(t)T'(s(t)) = \alpha''(t) \quad (1.4.2)$$

A questo punto, si vede che, facendo il prodotto vettore  $\alpha' \times \alpha''$ , il termine  $T' \times T' = 0$ , quindi:

$$\alpha' \times \alpha'' = s'^3 T \times T' \quad (1.4.3)$$

Si nota che, essendo  $T' \perp T$  e  $\|T\| = 1$ , si ha  $\|T' \times T\| = \|T'\| = k$ , perciò

$$k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{s'^3} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

Per continuare, si assume che  $\alpha$  sia una curva di Frenet; allora, usando la I equazione di Frenet, si ottiene

$$s'^3 \underbrace{k T \times N}_{=B} = \alpha' \times \alpha''$$

da cui si ottiene

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha'\|^3 k} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

Da questo, si ricava

$$N = B \times T = \frac{\alpha' \times \alpha'' \times \alpha'}{\|\alpha' \times \alpha''\| \|\alpha'\|}$$

Infine, si calcola la torsione. Per farlo, si deriva la I equazione di Frenet:

$$s'T'' = s'k'N + s'kN' \implies T'' = k'N + kN'$$

dove  $s' \neq 0$  perché la curva è regolare e, quindi, si cancella. Vista la III equazione di



Frenet  $B' = -\tau N$ , si ha  $\tau = -B' \cdot N$ ; in realtà, si nota che

$$0 = \underbrace{(B \cdot N)'}_{=0} = B' \cdot N + B \cdot N' \implies B' \cdot N = -B \cdot N'$$

da cui  $\tau = B \cdot N'$ . Derivando l'equazione 1.4.2:

$$\alpha''' = T''s'^3 + 3T's's'' + Ts'''$$

Ora, visto che  $T' \propto N$  e  $T, N \perp B$ , dal prodotto scalare per  $B$  si ha:

$$\alpha''' \cdot B = s'^3 T'' \cdot B = s'^3 k N' \cdot B = s'^3 k \tau$$

Ricordando l'espressione per  $B$ , si ha:

$$\tau = \frac{\alpha''' \cdot (\alpha' \times \alpha'')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

**Osservazione 1.5.** L'esistenza di queste formule implica l'indipendenza di curvatura, torsione e intero riferimento di Frenet dalla scelta della lunghezza d'arco per la riparametrizzazione.

## §1.5 Teorema fondamentale della teoria delle curve

Siano  $\beta, \tilde{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  due curve pla di Frenet, con  $\tilde{\beta}$  ottenuta tramite roto-traslazione di  $\beta$ , cioè

$$\tilde{\beta}(s) = A\beta(s) + b$$

con  $A \in SO(3)$  e  $b \in \mathbb{R}^3$ . Quello che si vuole verificare ora è che le due curve abbiano uguali curvatura e torsione. Per farlo, si nota che, essendo  $A$  un operatore lineare, è anche continuo (visto che opera su uno spazio finito-dimensionale), dunque:

$$\tilde{T}(s) = AT(s) \quad \tilde{T}'(s) = T'(s) \implies \tilde{k}(s)\tilde{N}(s) = k(s)AN(s)$$

$\forall s \in I$ . Passando alle norme, visto che  $A$  le preserva si ha  $\|AN(s)\| = 1, \forall s \in I$ , dunque  $\tilde{k}(s) = k(s), \forall s \in I$ .

Per la torsione, invece, si ha:

$$\tilde{B}(s) = \tilde{T}(s) \times \tilde{N}(s) = (AT(s)) \times (AN(s)) = A[T(s) \times N(s)] = AB(s)$$

Per passaggi analoghi a prima, si vede che

$$\tilde{B}'(s) = AB'(s) \implies -\tilde{\tau}(s)\tilde{N}(s) = -\tau(s)AN(s)$$

da cui  $\tilde{\tau}(s) = \tau(s)$ . Ora ci si chiede il viceversa: date due curve con uguale curvatura e torsione, è vero che una è la versione roto-traslata dell'altra? Per rispondere, si ha il seguente.

**Teorema 1.1.** Se  $\beta, \tilde{\beta} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono due pla di Frenet con  $k(s) = \tilde{k}(s)$  e  $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$ , allora  $\exists A \in SO(3)$ ,  $\exists b \in \mathbb{R}^3$  tali che  $\tilde{\beta}(s) = A\beta(s) + b$ ,  $\forall s \in I$ .

*Dimostrazione.* Si fissa un punto  $s_0 \in I$ ; in questo punto, si possono calcolare i valori del riferimento di Frenet di ciascuna curva, ottenendo un totale di sei vettori. Si possono costruire  $M = (T(s_0), N(s_0), B(s_0))$  e  $\tilde{M} = (\tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0), \tilde{B}(s_0))$ , che sono due matrici di  $SO(3)$ <sup>1</sup> e, a partire da queste, si può costruire la matrice  $A = \tilde{M}M^{-1}$  che permette di passare dal riferimento di  $\beta$  a quello di  $\tilde{\beta}$  nel punto  $s_0$ .

Ora bisogna mostrare che  $A$  permette il passaggio da un riferimento all'altro e bisogna trovare la costante di traslazione. Per farlo, si definisce  $\beta^*(s) = A\beta(s) + b$ ; si mostra che  $\beta^*(s) = \tilde{\beta}(s)$ ,  $\forall s \in I$ . Intanto si trova  $b$ : è sufficiente notare che

$$\beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0) = A\beta(s_0) + b \implies b = \tilde{\beta}(s_0) - A\beta(s_0)$$

Si nota che, dimostrando l'uguaglianza delle terne del riferimento di  $\beta^*$  e  $\tilde{\beta}$  per ogni  $s \in I$ , unito al fatto che  $\beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0)$ , si ottiene il sistema

$$\begin{cases} T^*(s) = \tilde{T}(s) \\ \beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0) \end{cases} \iff \begin{cases} (\beta^*)'(s) = \tilde{\beta}'(s) \\ \beta^*(s_0) = \tilde{\beta}(s_0) \end{cases}$$

da cui, integrando, si ha  $\beta^*(s) = \tilde{\beta}(s)$ ,  $\forall s \in I$ .

Per dimostrarlo, si definisce la funzione

$$f(s) = T^*(s) \cdot \tilde{T}(s) + N^*(s) \cdot \tilde{N}(s) + B^*(s) \cdot \tilde{B}(s)$$

che è sempre minore o uguale a 3 perché ciascun termine è minore o uguale ad 1 e l'uguaglianza vale quando il riferimento di  $\beta^*$  e quello di  $\tilde{\beta}$  coincidono; in particolare, quindi,  $f(s_0) = 3$ . Basta mostrare che questa è costante per mostrare che i due

<sup>1</sup>Evidentemente, il riferimento di Frenet restituisce un elemento di  $O(3)$  perché la relazione  $M^T M = \text{Id}$  corrisponde a moltiplicare i vettori del riferimento tra loro. Inoltre, usando  $\det M = T \cdot (N \times (T \times N)) = T \cdot [(N \cdot N)T - (N \cdot T)N] = \|T\| = 1$ .

referimenti coincidono ovunque su  $I$ . Allora si vede che:

$$f'(s) = kN^* \cdot \tilde{T} + kT^* \cdot \tilde{N} + (-kT^* + \tau B^*) \cdot \tilde{N} + N^* \cdot (-k\tilde{T} + \tau\tilde{B}) - \tau N^* \cdot \tilde{B} - \tau B^* \cdot \tilde{N} = 0$$

dove si è usato che  $k^*(s) = \tilde{k}(s) = k(s)$  e  $\tau^*(s) = \tilde{\tau}(s) = \tau(s)$  per quanto dimostrato all'inizio della sezione, essendo che  $\beta^*$  è la roto-traslata di  $\beta$  e le uguaglianze tra  $\tilde{\beta}$  e  $\beta$  valgono per assunzione.  $\square$

A questo punto, ci si può chiedere se, date comunque  $\tau, k : I \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^\infty(I)$  e con  $k > 0$ , si può trovare una pla di Frenet  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $k_\beta = k$  e  $\tau_\beta = \tau$ . Questo si dimostra essere vero, ma non si dimostra.

## §1.6 Esercizi

**Esercizio 1.2.** Sia data la curva

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \left( \frac{1}{3}t^3, \sqrt{2}(t \sin t + \cos t), \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) \right) \end{array}$$

Rispondere ai seguenti punti.

- (a). Dimostrare che  $\alpha$ , ristretta ad un intorno dell'origine, è di Frenet.
- (b). Calcolare la curvatura e il riferimento di Frenet in un intorno di  $t = 0$ .

*Svolgimento.* Per lo svolgimento, si userà la seguente definizione di lunghezza d'arco:

$$s(t) := \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

Si divide lo svolgimento nei due punti.

- (a). Essendo interessati ad un intorno dell'origine, per dire che  $\alpha$  è di Frenet bisogna preliminarmente verificarne la regolarità; allora si nota che

$$\alpha' = (t^2, \sqrt{2}t \cos t, \cos^2 t)$$

che è non-nulla in un intorno di  $t = 0$ . Ora, invece di procedere direttamente con i conti, che sono estremamente lunghi e complessi, si può notare che la condizione da mostrare è  $T'(0) \neq 0$ , per far vedere che  $\alpha$  è di Frenet in un intorno dell'origine.

Per farlo, si può mostrare che  $T \cdot T' \neq 0$  in  $s(0)$  e si possono usare le relazioni

$$\alpha'(t) = s'(t)T(s(t)) \quad \alpha''(t) = s''(t)T(s(t)) + s'^2(t)T'(s(t))$$

Infatti

$$\alpha' \times \alpha'' = \|\alpha'\|^3 T \times T'$$

e  $\alpha''$  si calcola facilmente come

$$\alpha''(t) = (2t, \sqrt{2}(\cos t - t \sin t), -2 \cos t \sin t)$$

Quindi

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che permette di concludere direttamente che  $T' \neq 0$  in un intorno di  $t = 0$ .

(b). Si nota che, essendo

$$\|\alpha'\| = \sqrt{t^4 + 2t^2 \cos^2 t + \cos^4 t} = t^2 + \cos^2 t \Rightarrow \|\alpha'(0)\| = 1$$

allora, dalla norma di  $\alpha'(0) \times \alpha''(0)$ , si ricava:

$$\sqrt{2} = \underbrace{\|\alpha'(0)\|^3}_{=1} k \Rightarrow k(0) = \sqrt{2}$$

Dalla stessa relazione, si ricava anche  $B$ , inserendo la I equazione di Frenet:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \times T' = kT \times N = kB \Rightarrow B(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dai calcoli precedenti, si può ottenere il versore tangente in  $t = 0$ :

$$T(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per finire, si ottiene il versore normale tramite prodotto vettore:

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

**Definizione 1.10 (Piano osculatore).** Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una pla di Frenet. Dato  $s_0 \in I$ , il *piano osculatore* di  $\gamma$  in  $\gamma(s_0)$  è il piano affine descritto da

$$\gamma(s_0) + \text{Span}(T(s_0), N(s_0))$$

Il piano generato da  $N$  e  $B$  è detto *normale*, mentre quello generato da  $T$  e  $B$  è detto *rettificante*.

**Esercizio 1.3 (Cerchio osculatore).** Sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una pla di Frenet; il suo *cerchio osculatore* in  $\gamma(s_0)$  è l'unico cerchio  $C$  di raggio  $R$  e centro  $P$  tale che:

- (a).  $C$  è contenuto nel piano osculatore in  $\gamma(s_0)$ ;
- (b).  $\gamma(s_0) \in C$ ;
- (c). data  $f(s) := \|\gamma(s) - P\|^2 - R^2$ , si ha  $f'(s_0) = f''(s_0)$  (cioè il cerchio è sufficientemente vicino alla curva).

Dimostrare che  $C$  così definito esiste ed è unico, esprimendo  $P$  ed  $R$  in termini di  $\gamma$ .

*Svolgimento.* Si inizia col mostrare l'unicità, assumendo che siano verificati i punti (a), (b) e (c). Si nota che  $f(s) = (\gamma(s) - P) \cdot (\gamma(s) - P) - R^2$ , quindi

$$0 = f'(s_0) = T(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - P)$$

da cui  $T(s_0) \perp (\gamma(s_0) - P)$ , quindi  $\gamma(s_0) - P = \lambda N(s_0)$ , visto che sia  $\gamma(s_0)$  che  $P$  appartengono al cerchio. Derivando nuovamente:

$$\begin{aligned} 0 &= f''(s_0) = T'(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - P) + T(s_0) \cdot T(s_0) \\ &= k(s_0)N(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - P) + 1 = k(s_0)\lambda + 1 \end{aligned}$$

da cui  $\lambda = -1/k(s_0)$ . Allora si possono ricavare R e P:

$$R = \|\gamma(s_0) - P\| = \left\| -\frac{1}{k(s_0)} N(s_0) \right\| = \frac{1}{k(s_0)}$$

$$P = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0)$$

Visto che il cerchio ha raggio e centro descritti esclusivamente tramite le proprietà della curva  $\gamma$ , significa che, in  $\gamma(s_0)$ , questo è unico.

Quando all'esistenza, si può costruire il cerchio scegliendo R e P come sopra in modo tale da avere soddisfatte le relazioni  $f'(s_0) = f''(s_0) = 0$  usate per ricavarle in principio e in modo tale da essere contenuto nel piano osculatore. In questo modo, è anche verificato il punto (b) perché, valendo  $\|\gamma(s_0) - P\| = R$ ,  $\gamma(s_0)$  è contenuto nel cerchio. ■

# 2 | SUPERFICI

## §2.1 Introduzione

Si dà inizialmente una definizione intuitiva di superfici come sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$ . Per analogie con le curve, si parte da un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  e da una mappa *buona*  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , per poi definire la superficie come  $S = \underline{x}(U)$ . Questo approccio permetterà esclusivamente una definizione locale di cosa sia una superficie e non ne consentirà una trattazione globale. Ora si cerca di caratterizzare la bontà accennata per  $\underline{x}$ , provando a capire quali sono le situazioni che *non* devono verificarsi.

- (a). L'aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  non deve essere mappato in una superficie che si interseca, cioè  $\underline{x}$  deve essere iniettiva, altrimenti non si ha modo di capire quale sia il piano tangente nell'intersezione.
- (b). Si vogliono evitare piani tangenti multipli, ad esempio come succede nel caso del vertice di un cono.

Scrivendo  $\underline{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , con

$$\begin{aligned}\underline{x}_u &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right) \\ \underline{x}_v &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)\end{aligned}$$

con  $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$  mappe di classe  $C^\infty(U)$ , si richiede che  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ ,  $\forall u, v \in U$ , cioè che  $\text{rk}(J(\underline{x})) = 2$ , così da avere un piano tangente ben definito, essendo  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$  linearmente indipendenti.

- (c). Si vuole evitare che una successione non convergente in  $U$  possa convergere in  $\underline{x}(U)$ , quindi si richiede che  $\underline{x}$  sia un omeomorfismo, richiedendo, dunque, che  $\underline{x}^{-1}$  sia continua.

**Definizione 2.1 (Parametrizzazione regolare).** Sia  $\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una mappa di classe  $C^\infty(U)$ . Si dice che  $\underline{x}$  è una *parametrizzazione regolare* se:

- (a).  $\underline{x}$  è iniettiva;
- (b).  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$  in  $U$ ;

(c).  $\underline{x}^{-1}$  è continua.

**Definizione 2.2 (Superficie).** Un sottoinsieme  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  si dice *superficie* se,  $\forall p \in S$ , si trova una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\underline{x}(U) \subseteq S$  è un intorno di  $p$ .

## §2.2 Alcuni esempi di superficie

**Esempio 2.1 (Grafico di una funzione).** Si considera una funzione  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U$  aperto e  $f \in C^\infty(U)$ . Il suo grafico è definito da

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Si vuole parametrizzare  $\Gamma_f$  tramite una superficie. Una possibile parametrizzazione è

$$\underline{x} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v, f(u, v)) \end{array}$$

In questo modo,  $\underline{x} \in C^\infty(U)$  perché ogni sua componente lo è e  $\underline{x}(U) = \Gamma_f$ . Si dimostra che è effettivamente una parametrizzazione regolare.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nei tre punti da verificare per una parametrizzazione regolare.

- (a). La mappa scelta è sicuramente iniettiva perché ad ogni punto del dominio  $U$ , corrisponde un solo punto  $f(u, v)$ , altrimenti  $f$  non sarebbe una buona funzione. Si può, allora, definire la proiezione

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

in modo tale da verificare la relazione  $\pi(\underline{x}(u, v)) = (u, v)$ . L'esistenza dell'inversa implica necessariamente la biezionalità  $U \xleftrightarrow{\quad} \underline{x}(U)$ .

- (b). Ora si mostra che  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ . Calcolando le derivate, si vede facilmente che:

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$



dove le prime due componenti non importano perché tanto l'ultima è costante e non-nulla  $\forall u, v \in U$ .

- (c). Infine, si dimostra la continuità dell'inversa. Una candidata per l'inversa, come visto al punto (a), è ovviamente  $\underline{x}^{-1} = \pi|_{\underline{x}(U)} : \underline{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . La proiezione è una mappa continua, quindi l'inversa è continua.

□

**Esempio 2.2 (Superficie elicoidale).** Si definisce la mappa, nota come *superficie elicoidale*:

$$\begin{aligned} \underline{x} : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u \cos v, u \sin v, bv) \end{aligned}$$

dove  $U = \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$  e  $b \neq 0$ . Per vedere la superficie generata, si può notare che:

- fissando  $u_0$ , si fissa il raggio e, al variare di  $v$ , si ottiene un'elica;
- fissando  $v_0$ , si fissa un'altezza e un punto su un'elica e, il variare di  $u$ , si incontrano tutte le eliche di raggio sempre maggiore.

La superficie è l'unione di questi due sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$  descritti e, pertanto, si ottiene una scalinata di spessore pari al massimo  $u_0$  in  $U$ , la cui altezza dipende dai valori di  $v$  contenuti in  $U$ . Di seguito, si dimostra che è effettivamente una superficie.

*Dimostrazione.* Come prima, si divide la dimostrazione nei vari punti da far vedere.

- (a). Per l'iniettività, si cerca di definire un'inversa. Dalla relazione  $\underline{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv) = (x, y, z)$ , si possono provare a ricavare  $u$  e  $v$ :

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad v = \frac{z}{b}$$

Quindi si può definire la mappa

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, z/b) \end{aligned}$$

Per definizione, allora, si ha  $\varphi(\underline{x}(u, v)) = (u, v)$ , per cui  $\underline{x}$  è iniettiva.

(b). Per definizione, la mappa è  $C^\infty$  perché ogni sua componente lo è e le sue derivate parziali prime sono:

$$\underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0) \quad \underline{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

Visto che  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1$ ,  $\underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \neq 0$  perché  $v \neq 0$  e  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$  (cioè i due sono ortogonali), allora deve valere  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ .

(c). Per la continuità dell'inversa, si vede che la mappa  $\underline{x}^{-1} = \varphi|_{\underline{x}(U)}$  è continua perché le sue componenti lo sono.

□

**Esempio 2.3 (Sfera).** Si indica con

$$S_a^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

Di seguito, si dimostra che è una superficie ben definita con un metodo alternativo.

*Dimostrazione.* L'idea è mostrare che è il grafico di una funzione, ma, per come è, non sarebbe il grafico di alcuna funzione, visto che ad un punto del dominio, ne corrispondono due. Per risolvere il problema, si seziona la sfera in calotte sferiche, due per ogni asse; ad esempio:

$$\begin{aligned} A_z^+ &= \{(x, y, z) \in S_a^2 \mid z > 0\} \\ &= \{(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \mid 0 \leq x^2 + y^2 < a^2\} \end{aligned}$$

Questa è la calotta sferica superiore ed è il grafico di  $f(u, v) = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$ , il cui dominio è  $D_a^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < a^2\}$  e che è liscia. In maniera analoga, ma cambiando il segno di  $z$ , si definisce  $A_z^-$  e, sempre allo stesso modo, ma cambiando la coordinata per cui si risolve, si definiscono anche  $A_x^\pm$  e  $A_y^\pm$ . L'unione di queste restituisce  $S_a^2$  e la loro intersezione non crea punti di discontinuità, quindi  $S_a^2$  è una superficie.

□

## §2.3 Superfici di rotazione

Un altro esempio di superficie sono le cosiddette *superfici di rotazione*. Queste sono tutte ottenute a partire dalla traccia di una curva nel piano e a seguito di un'opportuna rotazione attorno a qualche asse. L'obiettivo, ora, è capire quando questo procedimento

genera, effettivamente, una superficie. Formalmente, si considera una curva

$$\alpha: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & (f(u), 0, g(u)) \end{array}$$

dove  $f, g \in C^\infty$  e  $f(u) > 0, \forall u$ . La conseguente superficie è data dalla parametrizzazione

$$\underline{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \end{array}$$

**Osservazione 2.1.** Si nota che, da queste definizioni,  $\underline{x}$  non è mai iniettiva perché bisognerebbe opportunamente restringere il dominio nel piano in modo tale che  $v$  spazi in un intervallo in cui le funzioni trigonometriche compiano un solo giro. Definendole su tutto l'intervallo reale, infatti, si ottiene una superficie che si interseca su se stessa infinite volte.

Ora si dimostra che superfici così costruite sono effettivamente delle superfici e, nella trattazione, si stabiliranno le condizioni necessarie che deve rispettare la curva  $\alpha$  perché il risultato sia una buona superficie.

*Dimostrazione.* Quello che si vuole mostrare è che  $\forall p \in S$ , si ha  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ , per  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  e, per tale  $\underline{x}(u_0, v_0)$ , si vuole trovare un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  di  $(u_0, v_0)$  tale che  $\underline{x}|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia una parametrizzazione regolare.

Per costruire correttamente il dominio della parametrizzazione, si parte col considerare un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , contenente  $u_0$ , tale per cui  $\alpha|_I: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  risulti iniettiva e si prova a mostrare che  $\underline{x}|_{I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)}$  è una parametrizzazione regolare. Se  $(u, v), (u', v') \in I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$  e  $\underline{x}(u, v) = \underline{x}(u', v')$ , si vede che, data

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tale che } \varphi(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$$

si ha  $\varphi(\underline{x}(u, v)) = (f(u), 0, g(u)) = \alpha(u)$ , pertanto

$$\alpha(u) = \varphi(\underline{x}(u, v)) = \varphi(\underline{x}(u', v')) = \alpha(u')$$

da cui  $u = u'$  perché  $\alpha$  è iniettiva per  $u \in I$ . Per quanto riguarda  $v$ , si vede che  $\underline{x}(u, v) = \underline{x}(u, v')$  implica uguaglianza componente per componente:

$$f(u) \cos v = f(u) \cos v' \quad f(u) \sin v = f(u) \sin v'$$

da cui  $(\cos v, \sin v) = (\cos v', \sin v')$ . Visto che  $v, v' \in (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$ , allora deve risultare

per forza  $v = v'$  perché le funzioni trigonometriche sono iniettive su questo intervallo.

**Osservazione 2.2.** L'iniettività appena dimostrata è solamente una relazione locale, imposta per ciascuno specifico punto  $p \in S$ ; questo non basterà e si dovrà estendere con ulteriori ipotesi.

Quanto alla regolarità, si vede che

$$\underline{x}_u = (f' \cos v, f' \sin v, g') \quad \underline{x}_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

e, essendo  $\underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = f'^2 > 0$ ,  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$  e  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = f'^2 + g'^2 = \|\alpha'(u)\|^2$ , dall'imposizione che  $\alpha$  sia regolare, si ottiene la regolarità della parametrizzazione.

**Osservazione 2.3.** La regolarità di  $\alpha$  serve ad evitare casi in cui la superficie presenta cuspidi, o altre irregolarità; inoltre, questo garantisce anche la regolarità della parametrizzazione.

Infine, si mostra che  $\underline{x}^{-1}|_{\underline{x}(I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi))}$  è continua. Per farlo, si prende la relazione  $(f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) = (x, y, z)$  e la si prova ad invertire. Visto che  $\alpha$  è iniettiva, ammette inversa nell'immagine di  $I$ , quindi si ha

$$u = \alpha^{-1} \left( \sqrt{x^2 + y^2}, 0, z \right)$$

Perché questa sia continua, serve richiedere esplicitamente che  $\alpha^{-1}|_{\alpha(I)} : \alpha(I) \rightarrow I$  sia continua. Quanto a  $v$ , invece, se  $v_0 \notin \pi\mathbb{Z}$  (cioè non è un multiplo di  $\mathbb{Z}$ ), in un intorno di  $v_0$ , si può ricavare

$$x^{-1}(x, y, z) = \left( \alpha^{-1} \left( \sqrt{x^2 + y^2}, 0, z \right), \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right)$$

Se, invece  $v_0 \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$  si può invertire il seno e ottenere

$$x^{-1}(x, y, z) = \left( \alpha^{-1} \left( \sqrt{x^2 + y^2}, 0, z \right), \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right)$$

In entrambi i casi, si riesce a trovare un opportuno intervallo  $J \subseteq (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$  tale che  $v_0 \in J$  e  $\underline{x}^{-1}|_{\underline{x}(I \times J)}$  è continua.  $\square$

**Esempio 2.4 (Toro).** Si considera una circonferenza parametrizzata nel piano  $(x, z)$ :

$$\alpha(u) = (a + b \cos u, 0, b \sin u)$$

dove  $a$  serve a distanziarla dall'asse  $z$  in modo che la rotazione attorno allo stesso asse possa creare una superficie con un buco al centro; di fatto, si prende  $a > b > 0$ .

In realtà, per le superfici di rotazione, ma anche per la sfera, non si è verificato che la parametrizzazione locale fosse tale che  $p \in \underline{x}(U)$  è un intorno di  $p$  nella topologia indotta su  $S$  da  $\mathbb{R}^3$ . Quindi si verifica  $\underline{x}(I \times J)$  è un intorno di  $\underline{x}(u_0, v_0)$ ,  $\forall (u_0, v_0) \in I \times J$ .

Per farlo, si considera una successione  $\{\underline{x}(u_i, v_i)\} \subseteq S$  tale che  $\underline{x}(u_i, v_i) \rightarrow \underline{x}(u_0, v_0)$  e si fa vedere che, per  $i$  arbitrariamente grande,  $\underline{x}(u_i, v_i) \in \underline{x}(I \times J)$ . Ricordando la definizione della mappa  $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tale che  $\varphi(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z)$  e  $\varphi \circ \underline{x}(u, v) = \alpha(u)$ , si ha

$$\varphi(\underline{x}(u_i, v_i)) = \alpha(u_i) \xrightarrow{!} \alpha(u) \implies u_i \rightarrow u_0$$

per cui è necessario richiedere che  $\alpha(I)$  sia un intorno di  $\alpha(\mathbb{R})$ . Definendo, poi

$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & , \text{ se } v_0 \notin \pi\mathbb{Z} \\ \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & , \text{ se } v_0 \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

la mappa tale che  $\psi \circ \underline{x}(u, v) = v$  definita sopra, si nota che  $\psi \circ \underline{x}(u_i, v_i) = v_i \rightarrow v_0$ . Quindi, per avere la tesi, bisogna solo richiedere che  $\alpha(I)$  sia un intorno di  $\alpha(u_0)$ ,  $\forall u_0 \in \mathbb{R}$ , con  $I$  un qualche intorno di  $u_0$ .

## §2.4 Metodo del gradiente

Questo è un altro metodo di costruzione di superfici che passa per il teorema della funzione implicita.

**Definizione 2.3 (Valore regolare).** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  un aperto e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^\infty(U)$ , una funzione. Si dice che  $a \in \mathbb{R}$  è un *valore regolare* per  $f$  se vale una delle due seguenti condizioni:

- (a).  $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ ;
- (b).  $\nabla_p f \neq 0$ ,  $\forall p \in f^{-1}(a)$ , dove  $\nabla_p f$  è il gradiente di  $f$  nel punto  $p$ .

L'idea è che se  $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ , allora  $S := f^{-1}(a)$  è una superficie.

*Dimostrazione.* Sia  $p \in f^{-1}(a)$ . Per ipotesi,  $\nabla_p f \neq 0$ ; si assume, senza perdita di generalità, che sia  $f_z(p) \neq 0$ . Dato, allora,  $p = (x_0, y_0, z_0)$  e  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proiezione

sul piano  $(x, y)$ , cioè tale che  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ , allora, per il teorema della funzione implicita, si trovano un intorno aperto  $U \ni (x_0, y_0)$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ , di classe  $C^\infty(U)$ , tali per cui  $\pi^{-1}(U) \cap f^{-1}(a) = \Gamma_\varphi$ , cioè:

$$\pi^{-1}(U) \cap f^{-1}(a) = \{(u, v, \varphi(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in U\}$$

Allora, la mappa  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\underline{x}(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$  definisce una parametrizzazione regolare perché è il grafico di una mappa  $C^\infty$ . Lo stesso discorso si applica nel caso in cui  $f_x(p) \neq 0$ , oppure  $f_y(p) \neq 0$ , scegliendo, rispettivamente, la proiezione sul piano  $yz$ , oppure sul piano  $xz$ . Complessivamente,  $f^{-1}(a)$  è, allora, una superficie.  $\square$

**Esempio 2.5 (Sfera).** Data  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , allora  $S_a^2 = f^{-1}(a^2)$ . Si vede che questa è una superficie perché, dato  $\nabla_p f = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$  relativo  $p = (x_0, y_0, z_0) \in S_a^2$ , questo è sempre non-nullo perché  $(0, 0, 0) \notin S_a^2$ .

**Esempio 2.6 (Toro).** Come per la sfera, si deve cercare di capire qual è la relazione che descrive tutti i punti appartenenti al toro. Se  $(x, y, z) = p \in \mathbb{T}_{a,b}$ , indicando con  $q$  il centro della circonferenza che contiene  $p^a$ , allora deve essere rispettata la relazione

$$d^2(p, q) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$$

da cui  $\mathbb{T}_{a,b} := f^{-1}(b^2)$ , con  $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$ . Si vede, allora, che

$$\nabla f = \left( \frac{2(\sqrt{x^2 + y^2} - a)x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right)$$

Preso  $p = (x, y, z) \in f^{-1}(b^2)$ , l'assunzione  $\nabla_p f = 0$  implica, in particolare,  $z = 0$ , da cui deve risultare  $f(x, y, 0) = b^2$ , che è vero se e solo se  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = b^2 \neq 0$ . Quindi, l'assunzione  $\nabla_p f = 0$  implica anche  $x = y = 0$ , ma  $(0, 0, 0) \notin \mathbb{T}_{a,b}$ , quindi si ha un assurdo e se ne conclude che  $\nabla f|_{f^{-1}(b^2)} \neq 0$  sempre e, dunque,  $\mathbb{T}_{a,b}$  è una superficie.

<sup>a</sup>Prendendo un piano contenente l'asse  $z$  e un asse contenuto nel piano  $x, y$  che forma un angolo  $\varphi$  con l'asse  $y$ , al variare dello stesso  $\varphi$ , si ottengono diversi cerchi del toro intersecando questo piano col toro stesso. Si assume, allora, di scegliere  $\varphi$  di modo che l'intersezione tra il piano e il toro restituisca un cerchio contenente  $p$  al suo interno e il cui centro sia proprio  $q$ .

## §2.5 Piano tangente

### §2.5.1 Esistenza e unicità

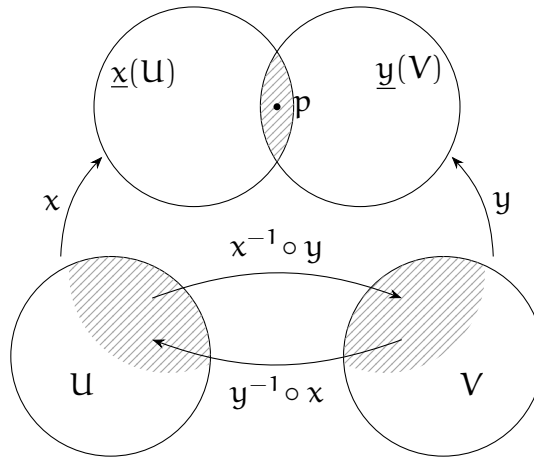
**Definizione 2.4 (Piano tangente).** Sia  $S$  una superficie e sia  $p \in S$  un suo punto. Data  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare di  $S$  tale che  $\underline{x}(U) \subseteq S$  sia un intorno di  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ , il piano tangente di  $S$  nel punto  $p$  è dato da

$$T_p S := p + \text{Span}(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p))$$

Le assunzioni su  $\underline{x}$  sono state pensate per avere un piano tangente ad una superficie definito in ogni suo punto; si vuole verificare che queste assunzioni siano sufficienti a garantire l'unicità del piano, visto la sua esistenza è già garantita dalla non linearità dei vettori  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$  in un dato punto della superficie.

*Dimostrazione.* Sia  $\underline{y} : V \rightarrow S^3$  un'altra parametrizzazione, con  $\underline{y}(V) \subseteq S$  intorno di  $p = \underline{y}(s_0, t_0)$ . Si vuole dimostrare che deve valere

$$\text{Span}(\underline{y}_s(s_0, t_0), \underline{y}_t(s_0, t_0)) = \text{Span}(\underline{x}_u(u_0, v_0), \underline{x}_v(u_0, v_0))$$



Se si avesse  $f := \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$  di classe  $C^\infty$ , visto che soddisfa

$$f(s, t) = (u(s, t), v(s, t)) \implies f(s_0, t_0) = (u_0, v_0)$$

quindi  $\underline{x}(f(s, t)) = \underline{y}(s, t)$ , allora si potrebbe derivare per ottenere

$$\begin{cases} \underline{y}_s = u_s \underline{x}_u \cdot f + v_s \underline{x}_v \cdot f \\ \underline{y}_t = u_t \underline{x}_u \cdot f + v_t \underline{x}_v \cdot f \end{cases}$$

Ma allora  $\underline{y}_s, \underline{y}_t \in \text{Span}(\underline{x}_u, \underline{x}_v)$ , quindi

$$\text{Span}(\underline{y}_u(s_0, t_0), \underline{y}_v(s_0, t_0)) \subseteq \text{Span}(\underline{x}_u(u_0, v_0), \underline{x}_v(u_0, v_0))$$

Però entrambi gli spazi vettoriali generati da questi span hanno dimensione 2 e uno è contenuto nell'altro, quindi coincidono.  $\square$

**Osservazione 2.4.** La richiesta di  $\underline{x}^{-1} \circ \underline{y} \in C^\infty$  non è espressamente necessaria in questo caso: avere  $\underline{x}^{-1} \circ \underline{y} \in C^1$  è più che sufficiente, ma questa l'appartenenza a  $C^\infty$  seguirà dall'assunzione di  $\underline{x}, \underline{y} \in C^\infty$  che, a sua volta, è legata esclusivamente ad una comodità teorica e sarebbe sufficiente  $C^2$ .

**Lemma 2.0.1.** Siano  $\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\underline{y} : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  due parametrizzazioni regolari, quindi di classe  $C^\infty(U)$  e  $C^\infty(V)$  rispettivamente; allora la *funzione di transizione*

$$\underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : \underline{y}^{-1}(\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)) \longrightarrow \underline{x}^{-1}(\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V))$$

è di classe  $C^\infty$ .

*Dimostrazione.* Data  $\underline{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , il suo jacobiano è dato da

$$J(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

da cui  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0 \iff \text{rk}(J(\underline{x})) = 2$ . Sia, ora,  $S \ni p = \underline{x}(u_0, v_0)$ ; dovendo risultare  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$  in  $(u_0, v_0) \in U$  visto che  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare, si può assumere, senza perdita di generalità, valga

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \neq 0 \text{ in } (u_0, v_0)$$

Quindi, data

$$\pi_{xy} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$



la proiezione sul piano  $xy$ , si ha  $(\pi_{xy} \circ \underline{x})(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  e  $\text{rk}(J(\pi_{xy} \circ \underline{x})) = 2$  in  $(u_0, v_0)$ . Allora, per il teorema della funzione inversa,  $\pi \circ \underline{x}$  è un diffeomorfismo di classe  $C^\infty$  intorno a  $(u_0, v_0)$ . Se  $(x_0, y_0, z_0) = \underline{x}(u_0, v_0)$  e  $(x, y)$  sta in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , si ha:

$$(\pi_{xy} \circ \underline{x}) \circ (\pi_{xy} \circ \underline{x})^{-1}(x, y) = (x, y) \implies \underline{x} \circ (\pi_{xy} \circ \underline{x})^{-1}(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

cioè un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  è un grafico. Ne segue che, localmente, *una superficie è un grafico rispetto ad una delle proiezioni  $\pi_{xy}$ ,  $\pi_{xz}$ , o  $\pi_{yz}$* . Infine, si osserva che

$$\underline{x}^{-1} \circ \underline{y} = (\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ (\pi \circ \underline{x}) \circ \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} = (\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ \pi \circ \underline{y}$$

è di classe  $C^\infty$  perché composizione di mappe  $C^\infty$ , dove  $\pi$  indica una delle tre proiezioni. Questo discorso si può ripetere per dimostrare che anche  $\underline{y}^{-1} \circ \underline{x}$  è di classe  $C^\infty$ .  $\square$

### §2.5.2 Versore normale

**Osservazione 2.5.** Se  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie, con  $p \in \underline{x}(U) \subseteq S$  e  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzazione regolare, si può sempre scegliere  $U = D_\varepsilon(\underline{0})$  e  $\underline{x}(\underline{0}) = p$ . Se, infatti,  $\underline{x}(u_0, v_0) = p$  con  $(0, 0) \neq (u_0, v_0) \in U$ , si può definire la traslazione

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{(u_0, v_0)} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (u + u_0, v + v_0) \end{aligned}$$

tramite cui l'aperto  $V := \mathbf{t}_{(u_0, v_0)}^{-1}(U)$  contiene  $(0, 0)$  e la parametrizzazione regolare  $\underline{x} \circ \mathbf{t}_{(u_0, v_0)} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  soddisfa la proprietà richiesta. Inoltre, dato che  $V$  è un aperto contenente  $(0, 0)$ ,  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $D_\varepsilon(\underline{0}) \subseteq V$  e la restrizione

$$\underline{x} \circ \mathbf{t}_{(u_0, v_0)}|_{D_\varepsilon(\underline{0})} : D_\varepsilon(\underline{0}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

è ancora una parametrizzazione regolare attorno a  $p \in S$ .

**Definizione 2.5 (Versore normale).** Sia  $\underline{x} : D_\varepsilon(\underline{0}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare attorno ad un punto  $p = \underline{x}(u_0, v_0) \in S \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie; allora, si definisce *versore normale*

$$\underline{n}(p) = \frac{\underline{x}_u(u_0, v_0) \times \underline{x}_v(u_0, v_0)}{\|\underline{x}_u(u_0, v_0) \times \underline{x}_v(u_0, v_0)\|}$$

Per definizione, questo è un vettore di norma unitaria che è sempre ortogonale al piano tangente passante per il punto  $p$ . Si nota, inoltre, che il versore normale dipende dalla scelta della parametrizzazione; infatti, data un'altra parametrizzazione  $\underline{y} : D_\varepsilon(\underline{0}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\underline{y}(u, v) := \underline{x}(u, -v)$ , si ha

$$\underline{y}_u = \underline{x}_u, \underline{y}_v = -\underline{x}_v \implies \underline{y}_u \times \underline{y}_v = -\underline{x}_u \times \underline{x}_v$$

da cui  $\underline{n}_{\underline{x}}(p) = -\underline{n}_{\underline{y}}(p)$ .

Questa arbitrarietà nel segno è, in qualche modo, legata all'impossibilità di stabilire una parte esterna e una interna della superficie: per una sfera, distinguere i due lati è immediato, mentre per un nastro di Möbius non si può.

## §2.6 Orientabilità

Come accennato precedentemente, l'orientabilità di una superficie è legata alla possibilità di distinguere un suo lato interno e un suo lato esterno. Ora si cerca di formalizzare questa idea qualitativa.

Sia  $p \in S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie e sia  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare attorno a  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ ; sia, inoltre,  $\underline{y} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'altra parametrizzazione regolare attorno a  $p = \underline{y}(s_0, t_0)$  e siano  $\underline{n}_{\underline{x}}(p)$  e  $\underline{n}_{\underline{y}}(p)$  i due versori normali al piano tangente  $T_p S$  relativi alle due parametrizzazioni. Come già detto, la funzione di transizione

$$f = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y} : \underline{y}^{-1}(\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)) \longrightarrow \underline{x}^{-1}(\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V))$$

è di classe  $C^\infty$  e tale che  $f(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ . Visto che  $\underline{y} = \underline{x} \circ f$ , si ha:

$$\begin{cases} \underline{y}_s = u_s \underline{x}_u + v_s \underline{x}_v \circ f \\ \underline{y}_t = u_t \underline{x}_u + v_t \underline{x}_v \circ f \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \underline{y}_s \times \underline{y}_t &= (u_s \underline{x}_u + v_s \underline{x}_v \circ f) \times (u_t \underline{x}_u + v_t \underline{x}_v \circ f) \\ &= u_s v_t \underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f - v_s u_t \underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f = \det(Jf) \underline{x}_u \times \underline{x}_v \circ f \end{aligned}$$

dove

$$Jf(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} u_s(s_0, t_0) & u_t(s_0, t_0) \\ v_s(s_0, t_0) & v_t(s_0, t_0) \end{pmatrix}$$

è lo jacobiano di  $f$  nel punto  $(s_0, t_0)$ . Da questo, se ne conclude che

$$\underline{n}_y(p) = \text{sgn}(\det Jf(s_0, t_0)) \underline{n}_x(p) \quad (2.6.1)$$

quindi se  $\det Jf > 0$ , allora  $\underline{n}_x = \underline{n}_y$  su  $\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$  e le due parametrizzazioni si dicono *compatibili*. Se ne ricava la seguente definizione.

**Definizione 2.6 (Orientabilità).** Una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  è detta *orientabile* se è ricoperta dalle immagini  $\underline{x}(U)$  di un insieme di parametrizzazioni regolari tali che tutte le funzioni di transizione abbiano  $\det Jf > 0$ .

**Esempio 2.7.** I grafici di funzione e le elicoidi sono superfici orientabili perché sono ricoperte dall'immagine di una singola parametrizzazione regolare.

**Lemma 2.0.2.** Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie; allora la funzione  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  è continua se e solo se date  $\{\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3\}$  parametrizzazioni regolari con  $\{\underline{x}(U)\}$  ricoprimento di  $S$ , vale che  $f \circ \underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$  è continua.

*Dimostrazione.* Se  $f$  è continua, allora  $f \circ \underline{x}$  è composizione di funzioni continue, quindi è continua.

Al contrario, assumendo  $f \circ \underline{x}$  continua per ogni parametrizzazione regolare del ricoprimento di  $S$ , si ha che  $f|_{\underline{x}(U)} = (f \circ \underline{x}) \circ \underline{x}^{-1}$  è continua e, quindi,  $f$  risulta continua in ogni punto di  $S$ , da cui  $f$  è continua.  $\square$

**Proposizione 2.1.** Una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  è orientabile se e solo se esiste un'applicazione continua  $\underline{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\|\underline{n}(p)\| = 1$  e  $\text{Span}(\underline{n}(p))^\perp = T_p S$ ,  $\forall p \in S$ .

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ( $\Rightarrow$ ) Sia  $\{\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3\}$  una collezione di parametrizzazioni regolari compatibili, le cui immagini ricoprono  $S$ . Sia, poi,  $\underline{x}(u_0, v_0) = p \in \underline{x}(U) \subseteq S$  un punto; allora si definisce

$$\underline{n}(p) := \underline{n}_x(p) = \frac{\underline{x}_u(u_0, v_0) \times \underline{x}_v(u_0, v_0)}{\|\underline{x}_u(u_0, v_0) \times \underline{x}_v(u_0, v_0)\|}$$

Ora, se  $p \in \underline{y}(V)$ , essendo  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  compatibili, si ha anche  $\underline{n}_x(p) = \underline{n}_y(p)$ . Rimane da mostrarne la continuità. Per questo, si considera una parametrizzazione  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  del solito ricoprimento e si osserva che

$$\underline{n} \circ \underline{x}(u, v) = \underline{n}(\underline{x}(u, v)) = \frac{\underline{x}_u(u, v) \times \underline{x}_v(u, v)}{\|\underline{x}_u(u, v) \times \underline{x}_v(u, v)\|}$$

che è una mappa  $C^\infty(U)$  e, in particolare, continua, quindi  $\underline{n}$  è continua.

- ( $\Leftarrow$ ) Sia  $\underline{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  come da tesi. Dato  $p \in S$ , sia  $\underline{x} : D_\varepsilon(\underline{0}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare attorno a  $p = \underline{x}(\underline{0})$ . Se  $\underline{n}_x(p) = \underline{n}(p)$ , allora si tiene  $\underline{x}$ , altrimenti la si cambia componendola con la mappa  $D_\varepsilon(\underline{0}) \rightarrow D_\varepsilon(\underline{0}) : (u, v) \mapsto (u, -v)$ . La mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} D_\varepsilon(\underline{0}) & \longrightarrow & \{\pm 1\} \\ (u, v) & \longmapsto & \underline{n}_x(\underline{x}(u, v)) \cdot \underline{n}(\underline{x}(u, v)) \end{array}$$

è continua perché  $\underline{n}_x$  e  $\underline{n}$  hanno componenti continue (essendo esse stesse continue). Ne segue che se il prodotto scalare è pari a  $+1$ , come stabilito dalla scelta precedente di  $\underline{x}$ , allora  $\varphi(D_\varepsilon(\underline{0})) = \{1\}$ ; infatti, se saltasse a  $-1$ , perderebbe la continuità, quindi  $\underline{n}_x = \underline{n}$  in ogni punto di  $\underline{x}(D_\varepsilon(\underline{0}))$ . Applicando lo stesso ragionamento ad ogni punto di  $S$ , si ottiene una collezione di parametrizzazioni regolari compatibili, le cui immagini ricoprono  $S$ , quindi  $S$  è orientabile. □

**Proposizione 2.2.** Le superfici di livello sono orientabili.

*Dimostrazione.* Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty(U)$  tale che  $a \in \mathbb{R}$  sia un suo valore regolare e, quindi,  $S := f^{-1}(a)$  sia una superficie. Si prende

$$\underline{n} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p & \longmapsto & \nabla_p f / \|\nabla_p f\| \end{array}$$

Per costruzione, si ha  $\|\underline{n}\| = 1$ ; si verifica che è continua e che  $\text{Span}(\underline{n}(p)) = T_p S^\perp$ ,  $\forall p \in S$ . Per la continuità, si vede che

$$\underline{n} \circ \underline{x}(u, v) = \underline{n}(\underline{x}(u, v)) = \nabla_{\underline{x}(u, v)} f / \|\nabla_{\underline{x}(u, v)} f\| \in C^\infty(U)$$

Sia, ora,  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare attorno a  $p \in S$  con  $\underline{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ; per definizione  $f(\underline{x}(u, v)) = a$ ,  $\forall (u, v) \in U$ , quindi:

$$\begin{cases} f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u = \nabla_{\underline{x}(u, v)} f \cdot \underline{x}_u(u, v) = 0 \\ f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v = \nabla_{\underline{x}(u, v)} f \cdot \underline{x}_v(u, v) = 0 \end{cases}$$

quindi  $\nabla_p f \perp T_p S$ ,  $\forall p \in \underline{x}(U)$ . □

# 3 | CURVE SU SUPERFICI

Lo studio di curve su superfici serve ad capire meglio la geometria della superficie in questione; in particolare, tramite le curve, si possono definire distanze (geodetiche), analizzare la forma locale della superficie, o la sua curvatura gaussiana eccetera.

## §3.1 Introduzione

Una curva regolare su una superficie ha sempre velocità contenuta nel piano tangente; per vederlo, si considera la seguente dimostrazione.

*Dimostrazione.* Sia data una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $0 \in I$  e  $\text{Tr } \alpha \subseteq S$ , con  $S$  superficie. Sia  $\alpha(0) = p \in S$ ; se  $\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare di  $S$  intorno a  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ , allora  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \underline{x}(U)$  e la mappa

$$\begin{aligned} \underline{x}^{-1} \circ \alpha(t) : \quad & \begin{array}{ccc} (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (u(t), v(t)) \end{array} \end{aligned}$$

è ben definita. Sia, ora,  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una proiezione<sup>1</sup> tale che  $\pi \circ \underline{x}$  ha inversa  $(\pi \circ \underline{x})^{-1}$  di classe  $C^\infty$  intorno a  $(u_0, v_0)$ ; allora:

$$\underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ (\pi \circ \underline{x}) \circ \underline{x}^{-1} \circ \alpha = (\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ \pi \circ \alpha$$

è di classe  $C^\infty$  perché composizione di funzioni di classe  $C^\infty$ . Ne segue che la curva si può scrivere come  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , con  $u(t), v(t) \in C^\infty$  per quanto appena detto, perciò:

$$\alpha'(0) = u'(0)\underline{x}_u(u_0, v_0) + v'(0)\underline{x}_v(u_0, v_0) \in T_p S$$

□

Questa osservazione servirà alla dimostrazione della seguente proposizione.

---

<sup>1</sup>Visto che  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare, come le dimostrazioni precedenti, deve avere un minore non-nullo; volendo trattare il caso più generale possibile, non si assume che  $\pi$  sia una proiezione in particolare, ma ci si limita ad assumere che sia quella proiezione sul piano per cui il minore del prodotto vettore  $\underline{x}_u \times \underline{x}_v$  sia non-nullo.

**Proposizione 3.1.** Data  $S$  una superficie e  $p \in S$  un suo punto; allora

$$T_p S = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ curva regolare : } \text{Tr } \alpha \subseteq S \text{ e } \alpha(0) = p \}$$

*Dimostrazione.* L'inclusione  $\supseteq$  è già stata dimostrata dal discorso iniziale, quindi si dimostra l'inclusione opposta. Sia, dunque,  $v = a\underline{x}_u(u_0, v_0) + b\underline{x}_v(u_0, v_0) \in T_p S$ ; allora  $v = \alpha'(0)$  per  $\alpha(t) = \underline{x}(u_0 + at, v_0 + bt)$ , che soddisfa  $\alpha(0) = \underline{x}(u_0, v_0) = p$ .  $\square$

### §3.2 L'operatore forma

L'operatore forma è uno strumento che consente di descrivere in modo quantitativo come una superficie si piega nello spazio circostante.

**Definizione 3.1.** Se  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie, si dice che un'applicazione  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  è  $C^\infty$  su  $S$  se  $f \circ \underline{x}$  è di classe  $C^\infty$ , per ogni parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  su  $S$ .

**Osservazione 3.1.** Se  $\underline{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una normale unitaria e continua, per ogni parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  su  $S$ , l'applicazione  $\underline{n} \circ \underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  coincide con  $\underline{n}_{\underline{x}}$ , o con  $-\underline{n}_{\underline{x}}$ , quindi è di classe  $C^\infty$ .

Data  $f : S \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$  e preso  $\xi \in T_p S$ , si vuole, ora, definire il concetto di *derivata* nella direzione  $\xi$ . Se  $\xi = \alpha'(0)$ , per  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  curva regolare su  $S$ , con  $\alpha(0) = p$ , si definisce

$$D_\xi f := (f \circ \alpha)'(0) \quad (3.2.1)$$

**Proposizione 3.2.** L'oggetto  $D_\xi f$  definito come sopra dipende solo da  $f$  e da  $\xi$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\underline{x} : U \rightarrow S$  una parametrizzazione regolare intorno a  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ , da cui  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , per  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $u(t), v(t) \in C^\infty$ . Allora:

$$\xi = \alpha'(0) = u'(0)\underline{x}_u(p) + v'(0)\underline{x}_v(p)$$

e, visto che  $(f \circ \alpha)(t) = f \circ \underline{x}(u(t), v(t))$ , si trova:

$$(f \circ \alpha)'(0) = u'(0)(f \circ \underline{x})_u(u_0, v_0) + v'(0)(f \circ \underline{x})_v(u_0, v_0) \quad (3.2.2)$$

Si vede che il membro sinistro non dipende da  $\underline{x}$ , mentre il membro destro dipende da  $\alpha$  solo tramite le coordinate  $u'(0)$  e  $v'(0)$  di  $\xi$ , quindi la dipendenza è esclusivamente legata a  $f$  e  $\xi$ .  $\square$

**Osservazione 3.2.** Per la proposizione precedente,  $D_\xi f$  è ben definito e, per l'equazione 3.2.2, è lineare in  $\xi$ .

Ora si definisce l'operatore forma. Sia  $\xi \in T_p S$  un vettore tangente in  $p$  alla superficie  $S$  dotata di versore normale  $\underline{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Data anche una curva su  $S$ ,  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ , con  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \xi$ , deve valere  $\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1$ ; allora, derivando rispetto a  $t$ :

$$0 = 2(\underline{n} \circ \alpha)'(t) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) \xrightarrow{t=0} 0 = D_\xi \underline{n} \cdot \underline{n}(p)$$

perciò  $D_\xi \underline{n} \in T_p S = \underline{n}(p)^\perp$ .

**Definizione 3.2 (Operatore forma).** Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientabile e  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un versore normale unitario. Si definisce *operatore forma* di  $\Sigma$  nel punto  $p$  come la mappa

$$S_p : \begin{array}{ccc} T_p \Sigma & \longrightarrow & T_p \Sigma \\ \xi & \longmapsto & -D_\xi \underline{n} \end{array}$$

**Esempio 3.1 (Operatore forma della sfera).** Si considera una superficie sferica  $S_a^2(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ , con versore normale

$$\underline{n} : \begin{array}{ccc} S_a^2(0) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ p & \longmapsto & p/a \end{array}$$

Per  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_a^2(0)$ , con  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \xi$ , si ha  $\underline{n}(\alpha(t)) = \alpha(t)/a$ , da cui

$$\begin{aligned} S_p(\xi) &= -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \underline{n}(\alpha(t)) = -\frac{1}{a} \xi \\ \Rightarrow S_p &= -\frac{1}{a} \text{Id}_{T_p S_a^2(0)}, \quad \forall p \in S_a^2(0) \end{aligned}$$

**Proposizione 3.3.** Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie e  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un versore normale; allora

$$S_p \xi \cdot \eta = \xi \cdot S_p \eta, \quad \forall p \in \Sigma, \quad \forall \xi, \eta \in T_p \Sigma$$

cioè  $S_p$  è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard.

*Dimostrazione.* Visto che  $S_p$  è lineare (essendolo  $D_\xi$ ), è sufficiente verificare che, data una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow S$  intorno a  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ , vale

$$S_p \underline{x}_u(p) \cdot \underline{x}_v(p) = \underline{x}_u(p) \cdot S_p \underline{x}_v(p)$$

Per definizione

$$S_p \underline{x}_u = - \frac{d}{du} \bigg|_{u=u_0} \underline{n}(\underline{x}(u, v_0))$$

quindi, essendo  $\underline{n}(\underline{x}(u, v_0)) \cdot \underline{x}_v(u, v_0) = 0$ , derivando rispetto a  $u$  e calcolando il risultato in  $u_0$ , si ottiene:

$$-S_p(\underline{x}_u(p)) \cdot \underline{x}_v(p) + \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{vu}(p) = 0$$

Allo stesso modo, si parte da  $\underline{n}(\underline{x}(u_0, v)) \cdot \underline{x}_u(u_0, v) = 0$  e, calcolando la derivata rispetto a  $v$  in  $v_0$ , si ottiene:

$$-S_p(\underline{x}_v(p)) \cdot \underline{x}_u(p) + \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{uv}(u_0, v_0) = 0$$

Facendo uso del fatto che le derivate parziali sono miste, essendo  $\underline{x}$  in  $C^\infty$ , unendo le due relazioni ottenute, si ha:

$$S_p(\underline{x}_u(p)) \cdot \underline{x}_v(p) = \underline{x}_u(p) \cdot S_p(\underline{x}_v(p))$$

□

### §3.3 Curvature e direzioni principali

Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie,  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un versore normale e  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  una parametrizzazione regolare compatibile, con  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ . Si prende  $w \in T_p \Sigma$ , con  $\|w\| = 1$ , e si prende il piano affine  $\pi$  passante per  $p$  e contenente la retta  $p + \text{Span}(w)$ ; si vuole studiare  $\pi \cap \underline{x}(U)$ .

Sia, allora,  $\pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b, c) \cdot X = d\}$  e sia  $f(u, v) = (a, b, c) \cdot \underline{x}(u, v) : U \rightarrow \mathbb{R}$ . In questo modo, la condizione che un punto della superficie stia nel piano diventa  $f(u, v) = d$ , quindi

$$\underline{x}^{-1}(\pi \cap \underline{x}(U)) = \{(u, v) \in U \mid f(u, v) = d\}$$

Essendo che

$$\begin{cases} f_u(u_0, v_0) = (a, b, c) \cdot \underline{x}_u(p) \\ f_v(u_0, v_0) = (a, b, c) \cdot \underline{x}_v(p) \end{cases}$$

allora  $\pi \neq T_p \Sigma \iff (f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0)) \neq (0, 0)$ . Assumendo, per esempio,  $f_v(u_0, v_0) \neq 0$ , per il teorema della funzione implicita, si trova  $v = v(u)$ , con  $(u, v)$



valori attorno a  $(u_0, v_0)$ , tale che la curva  $t \mapsto (t, v(t))$  parametrizza  $\underline{x}^{-1}(\pi \cap \Sigma)$  in questo intorno; allora la curva  $\alpha(u) = \underline{x}(u, v(u))$  parametrizza  $\pi \cap \Sigma$  intorno a  $p$ .

Si nota, inoltre, che  $\alpha$  è regolare perché:

$$\alpha'(u) = \underline{x}_u + v'(u)\underline{x}_v \neq 0$$

essendo  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$  indipendenti. Allora si può assumere che  $\alpha$  sia pla<sup>1</sup>, per esempio con  $\alpha'(s_0) = w \in T_p \Sigma$ , dove  $\|w\| = 1$ . Dato, ora, il versore normale alla superficie  $\underline{n} : \underline{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si ha:

$$\underline{n}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0, \forall s \in I$$

dove  $I$  è un certo intervallo che realizza tale condizione, non meglio specificato per semplicità. Assumendo che  $\exists s_0 \in I : \alpha(s_0) = p$ , allora:

$$0 = \frac{d}{ds} \Big|_{s=s_0} \underline{n}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = -S_p w \cdot w + \underline{n}(p) \cdot T'(s_0)$$

da cui

$$k_n(p, w) := S_p w \cdot w = \underline{n}(p) \cdot T'(s_0) \quad (3.3.1)$$

Si nota che la quantità  $S_p w \cdot w$  non dipende dalla scelta della curva, motivo per cui la dipendenza è esclusivamente legata a  $w$  e  $p$ ; in questo modo, la quantità  $k_n(p, w)$  è ben definita e, visto che lega l'operatore forma alla curvatura di  $\alpha$  (essendoci un  $T'$  a secondo membro), è chiamata *curvatura normale* (da cui il pedice  $n$ ).

**Osservazione 3.3.** Si nota che se  $\underline{n}(p) \in \pi$ , allora  $T'(s_0)$  e  $\underline{n}(p)$  sono allineati, per cui

$$|k_n(p, w)| = \|T'(s_0)\|$$

cioè la curvatura normale coincide con la curvatura della curva  $\pi \cap \Sigma$  in  $p$ .

Visto che  $S_p$  è autoaggiunto, è diagonalizzabile, pertanto possono esistere due auto-spazi distinti e ortogonali fra loro in  $T_p \Sigma$  legati ai suoi autovalori: questi sono chiamati **direzioni principali**, mentre i suoi autovalori sono chiamati **curvature principali**.

**Osservazione 3.4.** Si vede che, se  $w \in T_p \Sigma$ , con  $\|w\| = 1$  e  $S_p w = \lambda w$ , si ha

$$k_n(p, w) = \lambda$$

<sup>1</sup>Allora si usa  $s$  per la variabile in modo da evidenziare che è una pla.

**Proposizione 3.4 (Formula di Eulero).** Sia  $\Sigma$  una superficie, con  $p \in \Sigma$ , e siano  $e_1, e_2 \in T_p \Sigma$  due versori tangenti che generano le direzioni principali (cioè una base ortonormale di  $T_p \Sigma$  ottenuta da  $S_p$ ), quindi con  $S_p e_i = k_i e_i$ ,  $i = 1, 2$ . Allora, dato un versore  $w \in T_p \Sigma$ , si ha  $w = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$  e

$$k_n(p, w) = \cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2$$

*Dimostrazione.* Per conto diretto:

$$S_p(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \cdot (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) = (\cos \theta k_1 e_1 + \sin \theta k_2 e_2) \cdot (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)$$

□

**Corollario 3.0.1.** Se  $k_1 \leq k_2$  sono le curvature principali di  $\Sigma$  in  $p \in \Sigma$ , allora

$$\{k_n(p, w) \mid \|w\| = 1, w \in T_p \Sigma\} = [k_1, k_2] \subset \mathbb{R}$$

*Dimostrazione.* Per la formula di Eulero:

$$k_n(p, w) = (1 - \sin^2 \theta) k_1 + \sin^2 \theta k_2 = k_1 + (k_1 - k_2) \sin^2 \theta$$

quindi, al variare di  $\theta$ , si raggiungono tutti i valori compresi tra  $k_1$  e  $k_2$ . □

**Definizione 3.3 (Curvatura gaussiana).** Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie con versore normale  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; si definisce *curvatura gaussiana* di  $\Sigma$  in  $p \in \Sigma$  come

$$K(p) := \det S_p$$

**Definizione 3.4 (Curvatura media).** Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie con versore normale  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; si definisce *curvatura media* di  $\Sigma$  in  $p \in \Sigma$  come

$$H(p) := \frac{1}{2} \text{Tr } S_p$$

**Osservazione 3.5.** Si nota che per  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  superficie e  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  versore normale, allora anche  $-\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  è un versore normale; operando la sostituzione  $\underline{n} \rightarrow -\underline{n}$ , tutte le curvature normali  $k_n(p, w)$  e la curvatura media cambiano segno, mentre la curvatura gaussiana rimane invariata.

**Definizione 3.5 (Superficie piatta e minima).** Una superficie  $\Sigma$  si dice *piatta* se  $K = 0$ ,  $\forall p$  e si dice *minima* se  $H = 0$ ,  $\forall p$ .

Tramite queste due curvature, si possono classificare i punti di una superficie nei seguenti modi:

- un punto  $p$  è detto *ellittico* se  $K(p) > 0$ ;
- $p$  è *iperbolico* se  $K(p) < 0$ ;
- $p$  è *parabolico* se  $K(p) = 0$  e  $S_p \neq 0$ ;
- $p$  è *planare* se  $S_p = 0$ .

### §3.4 Forme fondamentali

**Definizione 3.6 (I forma fondamentale).** Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie; si definisce la *I forma fondamentale* come la famiglia

$$\{\mathbf{I}_p : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in \Sigma}$$

di applicazioni lineari simmetriche date da

$$\mathbf{I}_p(\xi, \eta) := \xi \cdot \eta, \quad \forall \xi, \eta \in T_p \Sigma$$

**Definizione 3.7 (II forma fondamentale).** Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie e  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una mappa versore normale; si definisce la *II forma fondamentale* come la famiglia

$$\{\mathbf{II}_p : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in \Sigma}$$

di applicazioni lineari simmetriche date da

$$\mathbf{II}_p(\xi, \eta) := S_p \xi \cdot \eta, \quad \forall \xi, \eta \in T_p \Sigma$$

#### §3.4.1 Formula per la curvatura di Gauss

Tramite queste, è possibile ricavare una formula per la curvatura gaussiana. Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie, con versore normale  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; fissata una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow X(U) \subseteq \Sigma$  tale che  $\underline{x}(u_0, v_0) = p$ , si possono scrivere la prima e la seconda forma fondamentale in termini della base di  $T_p \Sigma$  data da  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$ :

$$\mathbf{I} : \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \mathbf{II} : \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

Inoltre, si può scrivere in forma matriciale anche l'operatore forma:

$$S : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Se  $\xi, \eta \in T_p \Sigma$  hanno coordinate  $X, Y$  rispetto alla base  $(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p))$ , si trova:

$$\begin{aligned} \mathbf{II}(\xi, \eta) &= X^\top \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} Y = \xi \cdot S\eta = \mathbf{I}(\xi, S(\eta)) = X^\top \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} Y \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} \quad (3.4.1)$$

### §3.4.2 Formula per $\ell, m, n$

Si prende  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie e  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  versore normale. Sia  $\underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  una parametrizzazione regolare con  $p = \underline{x}(u_0, v_0)$ ; si nota che  $\underline{n}(\underline{x}(u, v_0)) \cdot \underline{x}_u(u, v_0) = 0$ , quindi, derivando rispetto ad  $u$  e calcolando in  $u_0$ :

$$-S_p(\underline{x}_u(p)) \cdot \underline{x}_u(p) + \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{uu}(u_0, v_0) = 0$$

da cui

$$\ell(u_0, v_0) = \mathbf{II}_p(\underline{x}_u(p), \underline{x}_u(p)) = \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{uu}(u_0, v_0) \quad (3.4.2)$$

In modo del tutto analogo, si ricavano gli altri coefficienti:

$$\begin{cases} m(u_0, v_0) = \mathbf{II}_p(\underline{x}_u(p), \underline{x}_v(p)) = \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{uv}(u_0, v_0) \\ n(u_0, v_0) = \mathbf{II}_p(\underline{x}_v(p), \underline{x}_v(p)) = \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{vv}(u_0, v_0) \end{cases} \quad (3.4.3)$$

### §3.5 Il teorema Egregium

Nasce dal problema di creare carte geografiche che conservassero le lunghezze, cioè dalla possibilità di definire un'isometria tra la sfera e il piano.

Per formalizzare questa richiesta, si considera una superficie  $\Sigma$  e una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ . Si cerca di capire che condizioni imporre su  $\underline{x}$  in modo che, per ogni curva  $\bar{\alpha} : [a, b] \rightarrow U$ , posto  $\alpha = \underline{x} \circ \bar{\alpha} : U \rightarrow \Sigma$ , sia soddisfatta la relazione  $L(\alpha) = L(\bar{\alpha})$ . Si nota che

$$\int_a^t \|\bar{\alpha}'(u)\| du = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du, \quad \forall t \in [a, b]$$

implica che, derivando rispetto a  $t$ , si abbia  $\|\alpha'(t)\| = \|\bar{\alpha}'(t)\|$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . Sia, ora,  $t_0 \in [a, b]$ , con  $\alpha(t_0) = p$ ; per costruzione,  $\bar{\alpha} = (u(t), v(t)) \Rightarrow \bar{\alpha}'(t) = (u'(t), v'(t))$ , mentre

$$\alpha'(t) = u'(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + v'(t)\underline{x}_v(\alpha(t))$$

Allora, per la richiesta  $\|\alpha'(t)\| = \|\bar{\alpha}'(t)\|$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , si ha che la mappa

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2, \cdot) &\longrightarrow (T_{\alpha(t)}\Sigma, \mathbf{I}_{\alpha(t)}) \\ (a, b) &\longmapsto a\underline{x}_u(\alpha(t)) + b\underline{x}_v(\alpha(t)) \end{aligned}$$

è un'isometria  $\forall t \in [a, b]$  quindi  $E = G = 1$  e  $F = 0$ ; infatti  $\alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = \bar{\alpha}'(t) \cdot \bar{\alpha}'(t)$  se e solo se

$$u'^2(t) + v'^2(t) = (u'(t), v'(t)) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Viceversa, è ovvio che se la matrice associata alla prima forma fondamentale è l'identità nel riferimento provvisto da  $\underline{x}$  parametrizzazione regolare, allora le lunghezze delle curve sono conservate. Allora si ha la seguente definizione.

**Definizione 3.8.** Una superficie  $\Sigma$  si dice *localmente isometrica* al piano se,  $\forall p \in \Sigma$ , esiste una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  attorno a  $p$  tale che  $E = G = 1$  e  $F = 0$ .

**Teorema 3.1 (Teorema Egregium).** Sia  $\Sigma$  una superficie e  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  una parametrizzazione regolare; allora la curvatura gaussiana di  $\Sigma$  si esprime, in ogni punto di  $\underline{x}(U) \subseteq \Sigma$ , in termini di  $E, F, G$  e delle loro derivate.

*Dimostrazione.* Si fissa una parametrizzazione  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$ ; tramite questa, la tripla

$(\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n})$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ , per ogni punto  $p \in \Sigma$ . Allora è possibile esprimere le derivate seconde di  $\underline{x}$  tramite questa base; i coefficienti di  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$  sono dati dai cosiddetti *simboli di Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k$  e si ha:

$$\begin{aligned}\underline{x}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uu}^v \underline{x}_v + \ell \underline{n} \\ \underline{x}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uv}^v \underline{x}_v + m \underline{n} \\ \underline{x}_{vu} &= \Gamma_{vu}^u \underline{x}_u + \Gamma_{vu}^v \underline{x}_v + n \underline{n}\end{aligned}$$

La dimostrazione viene portata a termine passando per i seguenti tre punti.

- (1). I simboli di Christoffel si esprimono come funzione di  $E, F, G$ . Per vederlo, si nota che

$$\begin{aligned}\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} &= E \Gamma_{uu}^u + F \Gamma_{uu}^v \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} &= F \Gamma_{uu}^u + G \Gamma_{uu}^v\end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{pmatrix}$$

La matrice della I forma è invertibile, quindi si dimostra che le componenti del vettore del membro di sinistra si possono esprimere in termini di  $E, F, G$ . Questo è vero perché

$$\begin{aligned}\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{uu} &= \frac{1}{2} (\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u)_u = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} = \frac{1}{2} E_u \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu} &= \underbrace{(\underline{x}_v \cdot \underline{x}_u)_u}_{=F} - \underbrace{\underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_u}_{=\frac{1}{2} (\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u)_v} = F_u - \frac{1}{2} E_v\end{aligned}$$

Visto che per gli altri simboli, il discorso è analogo, il punto (1) è verificato.

- (2). Si ricorda che

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \ell d - mb &= \frac{1}{EG - F^2} [\ell(-mF + nE) - m(\ell F + mE)] = E \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = EK\end{aligned}$$

- (3). Per finire, si mostra che  $\ell d - mb$  si esprime in termini di  $E, F, G$ . Si può sfruttare l'equivalenza delle derivate miste; per esempio, si considera che  $\underline{x}_{uuu} = \underline{x}_{uvu}$ .

Indicando con  $[\cdot]_v$  il coefficiente di  $\underline{x}_v$  di un vettore, si nota che

$$\begin{aligned} [(\underline{x}_{uu})_v]_v &= [(\Gamma_{uu}^u \underline{x}_u + \Gamma_{uu}^v \underline{x}_v + \ell \underline{n})_v]_v \\ &= \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + (\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v + \ell(-d) \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che

$$\underline{n}_v = -S(\underline{x}_v) = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -d \end{pmatrix} = -c \underline{x}_u - d \underline{x}_v$$

Analogamente, si calcola l'altra derivata parziale e si ottiene che

$$[(\underline{x}_{uv})_u]_v = \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + (\Gamma_{uu}^v)_u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v + m(-b)$$

Calcolando la differenza di queste due, si ottiene la relazione

$$-\ell d + bm + f(\Gamma_{ij}^k) = 0$$

da cui si ottiene la tesi, con  $f(\Gamma_{ij}^k)$  è una funzione dei simboli di Christoffel e delle loro derivate.

□

**Corollario 3.1.1.** Le sfere non sono localmente isometriche a  $\mathbb{R}^2$ .

*Dimostrazione.* La sfera  $S_a^2$  ha curvatura gaussiana costante  $K = 1/a^2 > 0$ , mentre il piano ha  $E, G = 1$  e  $F = 0$ , con  $K = 0$ . □

Ora si generalizza il concetto di isometria locale a due superfici generiche.

**Definizione 3.9 (Superfici localmente isometriche).** Siano  $\Sigma, \Sigma^*$  due superfici; queste si dicono *localmente isometriche* intorno ai punti  $p \in \Sigma$  e  $p^* \in \Sigma^*$  se si trovano due parametrizzazioni regolari

$$\begin{aligned} \underline{x} : U &\rightarrow \Sigma \text{ attorno a } p \\ \underline{x}^* : U &\rightarrow \Sigma^* \text{ attorno a } p^* \end{aligned}$$

tali che  $E = E^*, F = F^*$  e  $G = G^*$  come funzioni su  $U$ .

Si considera il seguente diagramma.



da cui  $f \circ \alpha = \underline{x}^* \circ \bar{\alpha} = \alpha^*$ . Si vede che  $f$  è una biezione e conserva le lunghezze delle curve; infatti, conserva le velocità. Per vederlo, si procede come nel caso specifico di superfici isometriche al piano; si nota che  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , da cui

$$\alpha'(t) = u'(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + v'(t)\underline{x}_v(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$$

quindi

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = (u'(t), v'(t)) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Big|_{(u(t), v(t))} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$

Al contempo

$$\|(\alpha^*)'(t)\|^2 = (u'(t), v'(t)) \begin{pmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{pmatrix} \Big|_{(u(t), v(t))} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \|\alpha'(t)\|^2$$

visto che i coefficienti della prima forma sono uguali per assunzione. Quindi si ha:

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|(\alpha^*)'(t)\| dt = L(\alpha^*)$$

Ripercorrendo i passaggi all'indietro, si vede che se  $f = \underline{x}^* \circ \underline{x}^{-1}$  conserva le lunghezze delle curve, allora ne conserva la velocità e, per le formule appena viste, i coefficienti della prima forma devono coincidere.

**Esempio 3.2 (Applicazioni del teorema Egregium).** Come applicazioni del teorema Egregium, si nota anche che:



- gli elicoidi ( $K < 0$ ) non sono localmente isometrico né alle sfere, né al piano;
- il cilindro è localmente isometrico al piano tramite

$$\underline{x}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto \left( R \cos\left(\frac{u}{R}\right), R \sin\left(\frac{u}{R}\right), v \right)$$

perché  $\underline{x}_u = (-\sin(u/R), \cos(u/R), 0)$  e  $\underline{x}_v = (0, 0, 1)$ , quindi  $E = G = 1$  e  $F = 0$ .

### §3.6 Trasporto parallelo

**Definizione 3.10 (Campo vettoriale).** Data  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ , una mappa  $X: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  è detta *campo vettoriale* su  $\Sigma$  se è di classe  $C^\infty$  e soddisfa  $X(p) \in T_p \Sigma$ ,  $\forall p \in \Sigma$ .

**Definizione 3.11 (Derivata covariante).** Sia  $X$  un campo vettoriale su  $\Sigma$  e siano  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p \Sigma$  un punto sulla superficie e un vettore nel piano tangente a  $p$ . La *derivata covariante* di  $X$  in  $p$  nella direzione  $v$  è definita da<sup>a</sup>

$$\nabla_v X = (D_v X)^\parallel = D_v X - [D_v X \cdot \underline{n}(p)] \underline{n}(p)$$

con  $\underline{n}$  versore normale attorno a  $p$  e

$$D_v X = \left. \frac{d}{dt} X(\alpha(t)) \right|_{t=0}, \quad \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma \text{ tale che } \alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v$$

<sup>a</sup>L'apice  $\parallel$  indica la componente parallela.

**Definizione 3.12 (Campo parallelo).** Un campo vettoriale  $X: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  è detto *parallelo* lungo una curva regolare  $\alpha: I \rightarrow \Sigma$  se  $\nabla_{\alpha'(t)} X = 0$ ,  $\forall t \in I$ .

**Esempio 3.3 (Cerchio massimo).** Si considera la curva ottenuta come l'intersezione di una sfera  $S_a^2$  e un piano passante per il centro della sfera: questa intersezione è nota come *cerchio massimo* in quanto individua una circonferenza di raggio massimo possibile tracciabile sulla sfera. È possibile costruire tale piano introducendo la mappa versore normale  $\underline{n}$  a  $S_a^2$ ; così facendo, il piano  $\pi$  è dato dalla regione di spazio individuata da  $\underline{n}^\perp$ .

Si individua il cerchio massimo  $\mathcal{C}$  tramite la curva  $\alpha: I \rightarrow S_a^2$ , con  $\alpha(I) = \mathcal{C}$ , che si assume avere velocità costante; a partire da questa, si definisce il campo vettoriale

$X(\alpha(s)) = \alpha'(s)$ ,  $\forall s \in I$ . Si vede che

$$\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = \text{cost.} \implies 2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \implies \alpha''(s) \perp \alpha'(s), \forall s \in I$$

Visto che il versore normale  $\underline{n}$  al piano  $\pi$  è costante, allora:

$$\underline{n}(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \implies \underline{n}(s) \cdot \alpha''(s) = 0$$

Se ne conclude, allora, che  $\alpha''(s) \perp \underline{n}$  e  $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$ , quindi  $\alpha''(s) \in \underline{n}^\perp \cap \alpha'(s)^\perp$ . Visto che sia  $\alpha'(s)$  che  $\underline{n}$  sono normali ad  $\alpha(s)$  (perché  $\alpha(s)$  appartiene a  $\pi$ ), si ha che  $\alpha''(s) \in \text{Span}(\alpha(s)) = (T_{\alpha(s)}S_a^2)^\perp$ . Tramite queste informazioni, si può calcolare la derivata covariante del campo  $X$ :

$$D_{\alpha'(s)}X = \left. \frac{d}{dt}(\alpha'(s+t)) \right|_{t=0} = \alpha''(s) \perp T_{\alpha(s)}S_a^2 \implies \nabla_{\alpha'(s)}X = 0$$

quindi  $X$  è parallelo alla superficie lungo  $\alpha$ .

**Teorema 3.2.** Sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una curva regolare, con  $X_0 \in T_{\alpha(0)}\Sigma$ ; allora  $\exists! X$  campo vettoriale parallelo lungo  $\alpha$  tale che  $X(\alpha(0)) = X_0$  e  $X(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

*Dimostrazione.* La traccia di  $\alpha$  è contenuta nell'immagine di un numero finito di parametrizzazioni regolari  $\underline{x}_k(U_k)$ , quindi, a meno di prenderne l'unione, si può affermare che  $\text{Tr}(\alpha) \subseteq \underline{x}(U)$ , cioè la traccia della curva è contenuta nell'immagine di un'unica parametrizzazione regolare. Ora, per  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , si sceglie

$$X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(u(t), v(t)) + b(t)\underline{x}_v(u(t), v(t))$$

da cui

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'(t)}X &= \left. \frac{d}{ds}X(\alpha(t+s))^\top \right|_{s=0} = \frac{d}{dt}X(\alpha(t))^\top \\ &= a'\underline{x}_u + b'\underline{x}_v + a[u'(\Gamma_{uu}^u\underline{x}_u + \Gamma_{uu}^v\underline{x}_v) + v'(\Gamma_{uv}^u\underline{x}_u + \Gamma_{uv}^v\underline{x}_v)] \\ &\quad + b[u'(\Gamma_{uv}^u\underline{x}_u + \Gamma_{uv}^v\underline{x}_v) + v'(\Gamma_{vv}^u\underline{x}_u + \Gamma_{vv}^v\underline{x}_v)] \\ &= [a' + a(u'\Gamma_{uu}^u + v'\Gamma_{uv}^u) + b(u'\Gamma_{uv}^u + v'\Gamma_{vv}^u)]\underline{x}_u \\ &\quad + [b' + a(u'\Gamma_{uu}^v + v'\Gamma_{uv}^v) + b(u'\Gamma_{uv}^v + v'\Gamma_{vv}^v)]\underline{x}_v \end{aligned}$$

Allora la condizione  $\nabla_{\alpha'(t)}X = 0$  è equivalente al seguente sistema di equazioni diffe-

renziali:

$$\begin{cases} a' + a(u'\Gamma_{uu}^u + v'\Gamma_{uv}^u) + b(u'\Gamma_{uv}^u + v'\Gamma_{vv}^u) = 0 \\ b' + a(u'\Gamma_{uu}^v + v'\Gamma_{uv}^v) + b(u'\Gamma_{uv}^v + v'\Gamma_{vv}^v) = 0 \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Essendo questo un sistema di due EDO del primo ordine, omogenee, ordinarie e lineari nelle incognite  $a, b$  e visto che i dati iniziali sono relativi ad  $a(0), b(0)$  imposti dalla condizione  $X(0) = X_0$ , la soluzione è unica su  $[0, 1]$ .  $\square$

Tramite il precedente teorema, si può dare una definizione coerente di *trasporto parallelo*.

**Definizione 3.13 (Trasporto parallelo).** Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie e sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  una curva sulla superficie, con  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ . Allora,  $\forall X_0 \in T_p \Sigma$ , si definisce il *trasportato* di  $X_0$  in  $q$  come il valore  $X(\alpha(1))$ , con  $X$  unico campo parallelo lungo  $\alpha$  tale che  $X(\alpha(0)) = X_0$ .

**Osservazione 3.6.** Essendo il sistema 3.6.1 lineare e omogeneo, allora la somma di due soluzioni uniche relative a due condizioni iniziali diverse permette di costruire una nuova soluzione, data dalla somma delle soluzioni e relativa alla somma dei dati iniziali. In questo senso, l'applicazione trasporto parallelo lungo  $\alpha$ ,  $\varphi_\alpha : T_p \Sigma \rightarrow T_q \Sigma$ , è lineare.

**Proposizione 3.5.** Il trasporto parallelo conserva i prodotti scalari, cioè

$$\varphi_\alpha(X_0) \cdot \varphi_\alpha(Y_0) = X_0 \cdot Y_0$$

*Dimostrazione.* Siano  $X_0, Y_0 \in T_p \Sigma$  e sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  una curva regolare, con  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ ; indicando con  $X$  e  $Y$  gli unici campi vettoriali paralleli lungo  $\alpha$  e tali che  $X(\alpha(t)), Y(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)} \Sigma$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ , allora si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))] &= D_{\alpha'(t)} X \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot D_{\alpha'(t)} Y(\alpha(t)) \\ &= \nabla_{\alpha'(t)} X \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot \nabla_{\alpha'(t)} Y(\alpha(t)) = 0 \end{aligned}$$

Infatti, visto che  $X, Y \in T_{\alpha(t)} \Sigma$ , si ha, per esempio

$$D_{\alpha'(t)} X \cdot Y = (D_{\alpha'(t)} X)^\top \cdot Y + \underbrace{(D_{\alpha'(t)} X)^\perp \cdot Y}_{=0} = \nabla_{\alpha'(t)} X \cdot Y = 0$$

perché  $X$  è parallelo e, quindi,  $\nabla_{\alpha'(t)} X = 0$ . Allora i prodotti scalari sono costanti e, quindi, conservati dal trasporto parallelo.  $\square$

**Corollario 3.2.1.** Il trasporto parallelo conserva le norme, quindi risulta essere un isomorfismo lineare tra  $T_p\Sigma$  e  $T_q\Sigma$ .

**Proposizione 3.6.** Sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  una curva regolare e sia  $\{v_1, v_2\} \subseteq T_{\alpha(0)}\Sigma$  una base positiva (cioè  $(v_1 \times v_2) \cdot \underline{n} > 0$ ) dello spazio tangente a  $\Sigma$ , superficie orientabile, in  $\alpha(0)$ . Dati  $X, Y$  campi vettoriali tali che  $X(\alpha(0)) = v_1$ ,  $Y(\alpha(0)) = v_2$ , allora  $[X(\alpha(1)) \times Y(\alpha(1))] \cdot \underline{n} > 0$ . Cioè  $\varphi_\alpha$  mappa basi positive in basi positive.

*Dimostrazione.* Si considera la quantità

$$\psi_\alpha(t) = [X(\alpha(t)) \times Y(\alpha(t))] \cdot \underline{n}(\alpha(t))$$

Visto che  $\psi_\alpha(0) > 0$  per assunzione e visto che  $X(\alpha(t))$  e  $Y(\alpha(t))$ , per conservazione del prodotto scalare, devono sempre rimanere indipendenti, allora  $\psi_\alpha(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ . Però  $\psi(t)$  è continua e non si annulla mai, quindi non può cambiare segno e, conseguentemente, la base in  $T_{\alpha(1)}\Sigma$  è ancora positiva.  $\square$

## §3.7 Geodetiche

**Definizione 3.14.** Una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  è una *geodetica* se soddisfa

$$\nabla_{\alpha'} \alpha' = (\alpha'')^\top = 0$$

Si nota che la velocità di una geodetica è costante; infatti, visto che  $\alpha'$  è tangente alla curva e  $(\alpha'')^\top = 0$  per definizione di geodetica:

$$(\alpha' \cdot \alpha')' = 2\alpha'' \cdot \alpha' = 0$$

cioè  $\|\alpha'\|$  è costante.

**Esempio 3.4 (Geodetiche su una sfera).** Si è visto che i cerchi massimi su una superficie sferica, parametrizzati a velocità costante, sono geodetiche; si cerca di capire se sono gli unici tipi di geodetica ottenibile su  $S_a^2$ .

*Svolgimento.* Sia  $\alpha : I \rightarrow S_a^2$  regolare e tale che  $\|\alpha'\| = \text{cost.}$ ; da questa ipotesi, si ha  $\alpha'' \perp T_{\alpha(t)}S_a^2$ , che è equivalente a dire che  $\alpha'' \times \alpha = 0$ . Ne segue che

$$(\alpha' \times \alpha)' = \alpha'' \times \alpha + \cancel{\alpha' \times \alpha'} = 0 \implies \alpha' \times \alpha = v_0 \text{ costante}$$

perciò  $\alpha(t) \cdot v_0 = 0$ ,  $\forall t \in I$ , che è vero se e solo se  $\alpha(t) \in v_0^\perp \cap S_a^2$ , che coincide proprio con un cerchio massimo.  $\blacksquare$

### §3.7.1 Esistenza locale e mappa esponenziale

In coordinate locali su una superficie, una curva  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$  ha velocità data da  $\alpha'(t) = u'(t)\underline{x}_u + v'(t)\underline{x}_v$ ; visto che un campo vettoriale parallelo lungo  $\alpha$  si scrive come  $X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + b(t)\underline{x}_v(\alpha(t))$ , quello coincidente con  $\alpha'$  lungo  $\alpha$  dovrà avere  $a(t) = u'(t)$  e  $b(t) = v'(t)$ . Pertanto dovrà soddisfare

$$\begin{cases} u'' + (u')^2\Gamma_{uu}^u + 2u'v'\Gamma_{uv}^u + (v')^2\Gamma_{vv}^u = 0 \\ v'' + (u')^2\Gamma_{uu}^v + 2u'v'\Gamma_{uv}^v + (v')^2\Gamma_{vv}^v = 0 \end{cases}$$

che è un sistema di EDO del secondo ordine non lineari. Per  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$ , date le condizioni iniziali  $\alpha(0) = p$ , che impone i valori per  $u(0)$  e  $v(0)$ , e  $\alpha'(0) = v$ , che impone i valori su  $u'(0)$  e  $v'(0)$ , la soluzione esiste ed è unica su un intervallo  $(-\delta, \delta) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Allora si ha il seguente.

**Teorema 3.3.** Se  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie e  $p \in \Sigma$  un suo punto, con  $v \in T_p\Sigma$  un vettore nel piano tangente, allora  $\exists \varepsilon > 0$  ed esiste un'unica geodetica  $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  tale che  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma'_v(0) = v$ .

Sia  $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  la geodetica relativa a  $\gamma_v(0) = p$  e  $\gamma'_v(0) = v$ ; fissato  $0 \leq t \leq 1$ , la curva  $\gamma_v(ts)$  è ben definita per ogni  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Inoltre, lasciando  $s$  fisso e facendo variare  $t$ , si ottiene la curva

$$[0, 1] \longrightarrow \Sigma : t \longmapsto \gamma_v(ts)$$

Si vuole capire se è ancora una geodetica, quindi se ne studiano le derivate:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \gamma_v(ts) \right|_{t=0} &= s\gamma'_v(0) = sv \\ \frac{d^2}{dt^2} \gamma_v(ts) &= s^2\gamma''_v(ts) \end{aligned}$$

ma  $\gamma''_v(ts) \perp T_{\gamma_v(ts)}\Sigma$  perché  $\gamma_v(s)$  è una geodetica, quindi anche  $\gamma_v(ts)$  è una geodetica. In quanto tale, per unicità, questa sarà l'unica geodetica che parte con velocità  $sv$ :  $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$ , con  $t \in [0, 1]$ .

**Osservazione 3.7.** Il parametro  $\varepsilon$  che individua il dominio di definizione della geodetica a fissati  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p\Sigma$  dipende sia da  $p$ , che da  $v$ . Allora si nota che, fissato  $p \in \Sigma$  e preso un insieme  $\{v \in T_p\Sigma \mid \|v\| = 1\}$  nel piano tangente a  $p$ , dal fatto che questo insieme è compatto e dalle proprietà di regolarità della dipendenza delle

soluzioni delle EDO dai dati iniziali, si trova un valore  $\epsilon > 0$  tale che  $(-\epsilon, \epsilon)$  è un dominio comune a tutte le geodetiche  $\gamma_v$  che partono da  $p$  con velocità  $\|v\| = 1$ , ma direzione diversa.

Questo significa che, scegliendo  $\epsilon$  sufficientemente piccolo in modo tale che  $(-\epsilon, \epsilon)$  sia dominio comune di tutte le geodetiche che partono da  $p$  con velocità unitaria, allora  $\forall v \in T_p \Sigma : \|v\| < \epsilon$ , la geodetica  $\gamma_v(t)$  è definita almeno<sup>1</sup> sul dominio  $[0, 1]$ .

A questo punto, si può definire la **mappa esponenziale**:

$$\exp_p : \begin{array}{ccc} U_p = \{v \in T_p \Sigma \mid \|v\| < \epsilon\} & \longrightarrow & \Sigma \\ v & \longmapsto & \exp_p(v) := \gamma_v(1) \end{array} \quad (3.7.1)$$

Ora, fissata una base  $\{e_1, e_2\} \subset T_p \Sigma$ , si ha la biezione  $\mathbb{R}^2 \longleftrightarrow T_p \Sigma$ ; questa permette di individuare un aperto  $U'p \subseteq \mathbb{R}^2$  che è in biezione con  $U_p \subseteq T_p \Sigma$ . Pertanto si può definire la mappa

$$\underline{x} : \begin{array}{ccccc} U'p & \longrightarrow & U_p & \longrightarrow & \Sigma \\ (u, v) & \longmapsto & ue_1 + ve_2 & \longmapsto & \exp_p(ue_1 + ve_2) \end{array}$$

Ora si dimostra che  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare.

*Dimostrazione.* Visto che la mappa esponenziale è  $C^\infty$  grazie alla regolarità delle soluzioni del sistema di EDO rispetto ai dati iniziali, anche  $\underline{x}$  è di classe  $C^\infty$ . Poi si nota che

$$\left. \frac{d}{dt} \underline{x}(t, 0) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp_p(te_1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_{te_1}(1) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_{e_1}(t) \right|_{t=0} = e_1$$

quindi  $\underline{x}_u(0, 0) = e_1$  e, analogamente,  $\underline{x}_v(0, 0) = e_2$ . Visto che  $e_1, e_2$  sono una base,  $\underline{x}_u(0, 0) \times \underline{x}_v(0, 0) = e_1 \times e_2 \neq 0$ , pertanto il prodotto vettore è non nullo in un intorno. Rimane da verificare la continuità dell'inversa; a questo proposito, prendendo una proiezione  $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  rispetto a cui  $\Sigma$  è il grafico di una funzione attorno a  $p$  (che esiste a meno di scegliere un  $\epsilon > 0$  più piccolo), si ha

$$\text{rk } J(\pi \circ \underline{x})_{(0,0)} = 2$$

pertanto  $\pi \circ \underline{x} : U'_q \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un diffeomorfismo attorno a  $\underline{0}$  e, quindi,  $\underline{x}$  è iniettiva, con inversa continua data da  $(\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ \pi$ . Quindi, a meno di restringere ulteriormente

<sup>1</sup>In realtà, come si intuisce dal ragionamento, il dominio di una geodetica può essere anche maggiore di  $[0, 1]$ ; l'obiettivo di questa trattazione è far vedere che è quantomeno possibile che ogni geodetica abbia un dominio contenente  $[0, 1]$ .

$U'_p$  (che dipende dall'estensione di  $U_p$ , a sua volta dipendente da  $\varepsilon$ ), si ha che  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare attorno a  $p$ .  $\square$

A questo punto, si può definire

$$N_p := \underline{x}(U'_p) = \exp_p(U_p) \quad (3.7.2)$$

che è noto come **intorno normale** di  $p$ .

### §3.7.2 Minimizzazione delle distanze

Si fissa  $e_1, e_2$  base ortonormale di  $T_q\Sigma$ , con  $\Sigma$  superficie, e si considera la curva

$$\begin{aligned} v: \mathbb{R} &\longrightarrow T_q\Sigma \\ t &\longmapsto k(e_1 \cos t + e_2 \sin t) \end{aligned}$$

Questa è tale che  $\text{Tr}(v) = \{v \in T_q\Sigma \mid \|v\| = k\}$ .

**Lemma 3.3.1 (Lemma di Gauss).** Sia  $\exp_q : U_q = \{v \in T_q\Sigma \mid \|v\| < \varepsilon\} \rightarrow N_q \subset \Sigma$  la mappa esponenziale. Le geodetiche  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ , con  $v \in U_q$ , sono ortogonali alle curve  $t \mapsto \exp_q(v(t))$ ,  $\forall 0 < k < \varepsilon$ .

*Dimostrazione.* Sia

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 1] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \Sigma \\ (u, t) &\longmapsto \exp_q(uv(t)) = \gamma_{uv(t)}(1) = \gamma_{v(t)}(u) \end{aligned}$$

Si verifica che  $\alpha_u \cdot \alpha_t = 0$ . Intanto si nota che

$$(\alpha_u \cdot \alpha_t)_u = \alpha_{uu} \cdot \alpha_t + \alpha_u \cdot \alpha_{tu} \quad (3.7.3)$$

Visto che  $\gamma_{v(t)}(u)$  è una geodetica, allora

$$\alpha_{uu} = \gamma''_{v(t)}(u) \perp T_{\gamma_{v(t)}(u)}\Sigma \implies \alpha_{uu} \cdot \alpha_t = 0$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_u &= \gamma'_{v(t)}(u) \implies \alpha_u \cdot \alpha_u = v(t) \cdot v(t) = k^2 \text{ cost.} \\ \implies 0 &= (\alpha_u \cdot \alpha_u)_t = 2\alpha_{ut} \cdot \alpha_u \end{aligned}$$

Allora, riprendendo l'equazione 3.7.3, si ottiene che  $(\alpha_u \cdot \alpha_t)_u = 0$ , per cui  $\alpha_u \cdot \alpha_t$  non dipende da  $u$ . Però,  $\alpha(0, t) = \exp_q(0) = q$ ,  $\forall t$ , quindi  $\alpha_t(0, t) = 0$  e, pertanto,  $\alpha_u \cdot \alpha_t = 0$ .  $\square$

**Corollario 3.3.1.** Se  $q' = \exp_q(v) \in N_q \setminus \{q\} \subset \Sigma$  e  $c : [0, 1] \rightarrow N_q$  una curva regolare da  $c(0) = q$  a  $c(1) = q'$ , allora

$$L(c) \geq L(\gamma_v)$$

*Dimostrazione.* Intanto si nota che

$$L(\gamma_v) = \int_0^1 \|\gamma'_v(t)\| dt = \int_0^1 \|v\| dt = \|v\|$$

Si dimostra la disuguaglianza assumendo che  $c(t) = 0 \iff t = 0$ <sup>1</sup>.

Ora, visto che  $c(t)$  è una curva interamente contenuta in  $N_q$ , si può esprimere in termini di  $\exp_q$  tramite una funzione radiale e una funzione angolare:

$$c(t) = \exp_q(u(t)v(\tau(t))) = \alpha(u(t), \tau(t))$$

dove  $\alpha(u, t) = \exp_q(uv(t))$  è la funzione usata nel lemma precedente e  $\tau(t)$  è una funzione ausiliare permette di controllare la direzione angolare in generale (e non vincolarla ad essere lineare). Dal lemma precedente, si ricorda che  $\|\alpha_u\| = \|\gamma'_{v(t)}(u)\| = \|v(t)\| = \|v\|$ . Allora, usando che  $\alpha_u \cdot \alpha_t = 0$  per il lemma di Gauss:

$$c'(t) = u'(t)\alpha_u + \tau'(t)\alpha_t \implies \|c'(t)\|^2 = u'(t)^2 \|v\|^2 + \tau'(t)^2 \|\alpha_t\|^2 \geq u'(t)^2 \|v\|^2$$

Integrando, si ottiene:

$$L(c) = \int_0^1 \|c'\| dt \geq \|v\| \int_0^1 |u'| dt = \|v\| \int_0^1 u'(t) dt = \|v\| (u(1) - u(0)) = \|v\|$$

dove si è usato che  $u(1) = 1$  perché deve valere  $c(1) = q' = \exp_q(v)$ .  $\square$

### §3.7.3 Geodetiche su superfici di rotazione

Se una superficie di rotazione è ottenuta dalla rotazione del profilo  $r = r(u)$ ,  $z = z(u)$  attorno all'asse  $z$ , allora ogni valore fissato di  $u$  descrive un cerchio nel piano  $z = z(u)$ ,

<sup>1</sup>Il caso più generale, cioè quello in cui la curva percorre un tratto per poi ritornare al punto di partenza e procedere verso il punto di arrivo  $q'$ , segue direttamente dal fatto che il tratto percorso prima di ritornare a  $q$  ne aumenta la lunghezza senza farla avvicinare a  $q'$ .



di raggio  $r(u)$ . Ciascuno di questi cerchi è ciò che si definisce *parallelo* della superficie.

**Teorema 3.4 (Teorema di Clairaut).** Valgono i due seguenti punti.

(a). Le geodetiche su una superficie di rotazione soddisfano la relazione

$$r \cos \phi = \text{cost.} \quad (3.7.4)$$

con  $r$  distanza dall'asse di rotazione e  $\phi$  angolo tra la geodetica e i paralleli.

(b). Una curva parametrizzata a velocità costante che soddisfa l'equazione 3.7.4 e non è un parallelo, è una geodetica.

*Dimostrazione.* Si considera una curva regolare  $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$ , con  $\underline{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$  parametrizzazione per la superficie. Le equazioni delle geodetiche sono date da

$$\begin{cases} u'' + (u', v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \\ v'' + (u', v') \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Si calcolano i simboli di Christoffel; per farlo, si calcolano le derivate di  $\underline{x}$ :

$$\begin{aligned} \underline{x}_u &= (f' \cos v, f' \sin v, g') & \underline{x}_{uu} &= (f'' \cos v, f'' \sin v, g'') \\ \underline{x}_v &= (-f \sin v, f \cos v, 0) & \underline{x}_{uv} &= (-f' \sin v, f' \cos v, 0) \\ & & \underline{x}_{vv} &= (-f \cos v, -f \sin v, 0) \end{aligned}$$

da cui  $E = (f')^2 + (g')^2 = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = f^2$  e

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{1}{E} \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_u = \frac{1}{2} (\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u)_u = \frac{1}{2} E_u = 0 & \Gamma_{uu}^v &= \frac{1}{G} \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_v = 0 \\ \Gamma_{uv}^u &= \frac{1}{E} \underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_u = 0 & \Gamma_{uv}^v &= \frac{1}{G} \underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_v = \frac{1}{f^2} f f' = f/f' \\ \Gamma_{vv}^u &= \frac{1}{E} \underline{x}_{vv} \cdot \underline{x}_u = -f f' & \Gamma_{vv}^v &= \frac{1}{G} \underline{x}_{vv} \cdot \underline{x}_v = 0 \end{aligned}$$

Allora il sistema di EDO diventa:

$$\begin{cases} u'' - ff'(v')^2 = 0 \\ v'' + 2\frac{f}{f'}u'v' = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono determinate dalle condizioni iniziali a  $t = t_0$ , indicate con  $(u(t_0), v(t_0))$  e  $(u'(t_0), v'(t_0))$ ; ora si considerano casi diversi a seconda del valore di  $v'(t_0)$ .

- Caso 1:  $v'(t_0) \neq 0$ .

In questo caso, la soluzione soddisfa  $v'(t) \neq 0$  per ogni  $t$  in un intorno di  $t_0$ , quindi la seconda equazione implica che

$$\frac{v''}{v'} = 2\frac{f'(u)}{f(u)}u' \iff \ln v' = -2 \ln f(u) + \text{cost.} \iff v' = \frac{c}{f(u)^2}$$

Ora, se  $\gamma$  è una geodetica,  $\gamma' = u'\underline{x}_u + v'\underline{x}_v$ ; usando il valore di  $v'$  appena ottenuto dalla condizione  $v(t) \neq 0$ , si può calcolare il prodotto scalare tra  $\gamma$  e  $\underline{x}_v$  in quanto quest'ultimo è tangente ad un parallelo:

$$\gamma' \cdot \underline{x}_v = v'G = v'f(u)^2 = \text{cost.}$$

Ma il prodotto scalare dei due è anche pari a

$$\text{cost.} = \|\gamma'\| \|\underline{x}_v\| \cos \phi = \|\gamma'\| f(u) \cos \phi = \|\gamma'\| r \cos \phi$$

Però si può dividere per  $\|\gamma'\|$  e ottenere ancora una costante perché quest'ultimo è costante, per cui  $r \cos \phi = \text{cost.}$  e si ha la tesi.

- Caso 2:  $v'(t_0) = 0$ .

Per unicità, in un intorno di  $t_0$ , la soluzione del sistema è data da

$$(u(t), v(t)) = (u(t_0) + u'(t_0)t, v(t_0))$$

In questo caso,  $\gamma(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$  parametrizza il meridiano relativo a  $v = v(t_0)$ , per cui  $\cos \phi = 0$  e, allora, la relazione di Clairaut è automaticamente verificata perché  $r \cos \phi = 0 = \text{cost.}$  e si ha nuovamente la tesi.

Resta da dimostrare il punto (b). Sia, quindi,  $\gamma(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$  una curva parametrizzata a velocità costante che soddisfa  $r \cos \phi = \text{costante}$ ; si fa vedere che è una

geodetica attorno ad ogni punto con  $u' \neq 0^1$ . Anche per questo punto si distinguono due casi.

- Caso 1:  $r \cos \phi = 0$ .

In questo caso,  $\cos \phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm\pi/2$ , quindi  $v' = 0$ . Inoltre,  $\gamma' = u' \underline{x}_u + v' \underline{x}_v = u' \underline{x}_u$ , da cui  $\|\gamma'\| = u' E$ , ma  $E = 1$  perché la superficie è ottenuta da una curva pla:

$$E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = (f')^2 + (g')^2 = \|\alpha(u)\|^2 = 1$$

In definitiva,  $\|\gamma'\| = u' = \text{cost.} \neq 0 \Rightarrow u'' = 0$ . Allora  $\gamma(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$  è una curva che soddisfa  $u'' = 0$  e  $v' = 0$  (quindi  $v'' = 0$  perché  $\gamma(t)$  soddisfa  $\cos \phi = 0$  per ogni  $t$ ); inserendo queste due condizioni nel sistema di EDO, si vede che è soddisfatto e, quindi, è una geodetica.

- Caso 2:  $r \cos \phi = \text{cost.} \neq 0$ .

Si ha sempre  $\gamma' = u' \underline{x}_u + v' \underline{x}_v$ , da cui

$$0 \neq \|\gamma'\| f \cos \phi = \gamma' \cdot \underline{x}_v = v' G = v' f^2 \Rightarrow v' \neq 0$$

Si sa che  $\gamma(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$  è una geodetica se e solo se soddisfa il sistema di EDO

$$\begin{cases} u'' - f f' (v')^2 = 0 \\ v'' + 2 \frac{f'}{f} u' v' = 0 \end{cases}$$

Si nota, però, che se  $v' \neq 0$  e  $\|\gamma'\|$  è costante (come in questo caso), allora la seconda equazione del sistema è soddisfatta se e solo se vale la relazione di Clairaut. Infatti, mettendo insieme tutte queste cose, si sa che  $r \cos \phi = \text{cost.} \Rightarrow \|\underline{x}_v\| \cos \phi = \text{cost.}$ , ma visto che  $\|\gamma'\|$  è costante, allora

$$\gamma' \cdot \underline{x}_v = \|\gamma'\| \|\underline{x}_v\| \cos \phi = \text{cost.} \Rightarrow \frac{d}{dt} \gamma' \cdot \underline{x}_v = 0$$

cioè, usando che  $f = f(u) = f(u(t))$

$$\frac{d}{dt} (v' f^2) = v'' f^2 + v' 2 f f' u' = 0 \Rightarrow v'' + 2 u' v' \frac{f'}{f} = 0$$

che coincide proprio con la seconda equazione del sistema. Per terminare questo caso, allora, si verifica che  $\gamma$  soddisfa la prima equazione. A questo scopo, si usa

---

<sup>1</sup>Quest'ultima condizione serve a evitare che ci si ritrovi nel caso di un parallelo.

il fatto che  $\|\gamma'\| = 0$  e si deriva.

$$\|\gamma'\|^2 = (u')^2 + (v')^2 f^2 = \text{cost.}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \|\gamma'\|^2 = 2u'u'' + 2v'v''f^2 + 2(v')^2 f f' u' = 0$$

$$\Rightarrow u'u'' + v'v''f^2 + (v')^2 f f' u' = 0 \Rightarrow \frac{1}{f^2} u'u'' + v' \left( v'' + v'u' \frac{f'}{f} \right) = 0$$

Si nota che il termine tra parentesi assomiglia alla seconda EDO del sistema; aggiungendo e sottraendo  $(v')^2 u' f' / f$ , infatti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^2} u'u'' + v' \left( \underbrace{v'' + 2v'u' \frac{f'}{f}}_{=0} \right) - (v')^2 u' f' / f &= 0 \\ \Rightarrow u' [u'' - (v')^2 f' / f] &= 0 \end{aligned}$$

Visto che  $u' \neq 0$  per assunzione, deve risultare  $u'' - (v')^2 f' / f = 0$ , per cui  $\gamma$  soddisfa il sistema ed è, dunque, una geodetica.

□

**Osservazione 3.8.** Se  $f'(u_0) = 0$ , la curva

$$\gamma(t) = \underline{x}(u_0, v_0 + tv'_0)$$

soddisfa il sistema di EDO e parametrizza il parallelo  $u = u_0$ .

Sostanzialmente, in ogni punto  $u_0$  in cui la curva  $(f(u), 0, g(u))$  ha  $f'(u_0) = 0$ , si ha una geodetica della forma riportata sopra. Questi punti, per la superficie di rotazione, corrispondono a zone ad altezza fissata in cui il raggio  $f(u)$  ha punto di minimo, o di massimo locale; in questo caso, il parallelo  $u = u_0$ , parametrizzato dalla curva  $\gamma$  riportata sopra, quindi, è una geodetica.

## §3.8 Teorema di Gauss-Bonnet

### §3.8.1 Integrazione su superfici

**Definizione 3.15 (Curva semplice e regolare a tratti).** Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  una curva chiusa su  $\Sigma$  superficie. Si dice che  $\alpha$  è *semplice e regolare a tratti* se valgono i due seguenti punti:

(a). se  $t \neq t'$ , allora  $\alpha(t) = \alpha(t') \iff \{t, t'\} = \{a, b\}$ ;

(b). dati  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell-1} < t_\ell = b$ , si ha  $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  regolare,  $\forall i = 1, \dots, \ell$ .

**Definizione 3.16 (Regione di superficie).** Una *regione*  $R$  di una superficie  $\Sigma$  è la chiusura di un aperto  $\mathring{R} \subset R$  tale che  $\partial R = R \setminus \mathring{R}$  è la traccia di una curva semplice, chiusa e regolare a tratti.

**Definizione 3.17 (Area di una superficie).** Se  $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq S$  è una regione di una superficie  $S$ , parametrizzata localmente da  $\underline{x}$ , si definisce l'*area* di  $R$  come:

$$A(R) = \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \, du dv$$

**Proposizione 3.7.** L'area  $A(R)$  non dipende dalla parametrizzazione regolare usata.

*Dimostrazione.* Si considera una superficie  $S$  e una regione  $R$  contenuta all'interno di due parametrizzazioni regolari  $\underline{x}(U)$  e  $\underline{y}(V)$ . Si definisce  $f = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$ , che permette di passare da  $\underline{y}^{-1}(\underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)) \rightarrow \underline{x}^{-1}(\underline{y}(V) \cap \underline{x}(U))$ . Visto che

$$f(s, t) = (u(s, t), v(s, t)) \iff y(s, t) = \underline{x}(u(s, t), v(s, t))$$

si ha

$$\begin{aligned} \begin{cases} \underline{y}_s = u_s \underline{x}_u + v_s \underline{x}_v \\ \underline{y}_t = u_t \underline{x}_u + v_t \underline{x}_v \end{cases} \\ \Rightarrow \underline{y}_s \times \underline{y}_t = (u_s v_t - u_t v_s) \underline{x}_u \times \underline{x}_v \end{aligned}$$

Integrando, si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{y}_s \times \underline{y}_t\| \, ds dt &= \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} |u_s v_t - u_t v_s| \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \circ f \, ds dt \\ &= \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \circ f |\det Jf| \, ds dt \\ &= \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \, du dv \end{aligned}$$

dove si è usato che  $\det Jf = u_s v_t - u_t v_s$ . □

**Proposizione 3.8.** Data  $\Sigma$  una superficie e  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  una sua parametrizzazione

regolare, allora vale

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \underline{n} \cdot (\underline{x}_u \times \underline{x}_v) = \det \begin{pmatrix} -\underline{n} \\ -\underline{x}_u \\ -\underline{x}_v \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|^2 = \det \begin{pmatrix} -\underline{n} \\ -\underline{x}_u \\ -\underline{x}_v \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{n} & \underline{x}_u & \underline{x}_v \\ | & | & | \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{pmatrix} = EG - F^2$$

da cui la tesi. □

**Corollario 3.4.1.** L'integrale di area di una regione  $R \subset \Sigma$  è dato da

$$A(R) = \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

**Definizione 3.18.** Se  $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione  $C^\infty(U)$ , con  $U \supset R$  aperto, allora si definisce

$$\int_R \varphi dA := \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \varphi \circ \underline{x} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv$$

Si dimostra che la definizione data sopra è una buona definizione.

*Dimostrazione.* Se  $R \subset \underline{x}(U) \cap \underline{y}(V)$ , si definisce  $f = \underline{x}^{-1} \circ \underline{y}$ , da cui

$$\begin{aligned} \int_{\underline{y}^{-1}(R)} \varphi \circ \underline{y} \|\underline{y}_s \times \underline{y}_t\| ds dt &= \int_{\underline{y}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \circ f \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| \circ f \det(Jf) ds dt \\ &= \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \varphi \circ \underline{x} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv \end{aligned}$$

□

### §3.8.2 Teorema di Gauss-Bonnet locale

**Definizione 3.19 (Angoli esterni).** Sia  $R \subseteq \Sigma$  una regione su una superficie orientata  $\Sigma$ . Gli *angoli esterni* di  $\partial R$  sono dati dagli angoli misurati nei punti suoi irregolari. La misurazione degli angoli avviene in senso anti-orario, con  $\partial R$  orientato in modo che  $\mathring{R}$  sia a sinistra.

**Definizione 3.20 (Curvatura geodetica).** Sia  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  una curva pla regolare a tratti; allora, per ogni intervallo in cui  $\alpha$  è regolare, si definisce la sua *curvatura geodetica* come

$$k_g = T'_\alpha \cdot (\underline{n} \times T_\alpha)$$

**Teorema 3.5 (Teorema di Gauss-Bonnet locale).** Sia  $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  una regione semplicemente connessa, quindi con  $\partial R$  ottenuta come traccia di una curva semplice, chiusa e regolare a tratti. Siano, inoltre,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$  gli angoli esterni di  $\partial R$ . Allora si ha:

$$\int_{\partial R} k_g ds + \int_R K dA + \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j = 2\pi$$

**Osservazione 3.9 (Inversione dell'orientazione).** Si nota che la formula di Gauss-Bonnet locale non dipende dall'orientazione della superficie, cioè mandando  $\underline{n} \rightarrow -\underline{n}$ , resta invariata. Infatti, dovendo rispettare la convezione secondo cui il verso di percorrenza deve essere tale da lasciare l'interno di  $R$  sinistra, allora per  $\underline{n} \rightarrow -\underline{n}$ , bisogna invertire il verso di percorrenza (perché si passa dal vedere la superficie da "sopra" a vederla da "sotto"), quindi  $T_\alpha \rightarrow -T_\alpha$ , mentre  $T'_\alpha \rightarrow T'_\alpha$  perché  $T' = \frac{dT}{ds} \rightarrow \frac{d(-T)}{d(-s)} = \frac{dT}{ds} = T'$ , visto che il parametro lunghezza d'arco deve aumentare in verso opposto (che è anche il motivo per cui  $T \rightarrow -T$ ). Pertanto, visto che  $K$  è indipendente dal segno (entrambe le curvature principali cambiano segno e nel loro prodotto, tale cambiamento si annulla) e che  $k_g = T'_\alpha \cdot (\underline{n} \times T_\alpha) \rightarrow T'_\alpha [(-\underline{n}) \times (-T_\alpha)] = T'_\alpha (\underline{n} \times T_\alpha) = k_g$ , la formula è invariante, essendo gli angoli esterni sempre gli stessi (mantenendo la loro misurazione coerente col verso di percorrenza di  $\partial R$ ).

**Definizione 3.21 (Triangolo geodetico).** Su una superficie  $\Sigma$ , un *triangolo geodetico* è una regione  $\mathcal{T}$  delimitata dall'intersezione di tre geodetiche della superficie in tre punti distinti, che formano i *vertici* del triangolo. Tali geodetiche che formano il bordo del rettangolo sono chiamate *lati geodetici*.

**Corollario 3.5.1.** Sia  $\mathcal{T} \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  un triangolo geodetico con bordo orientato in

senso anti-orario e angoli interni  $i_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ; allora

$$\int_{\mathcal{T}} K dA = \sum_{k=1}^3 i_k - \pi$$

*Dimostrazione.* Essendo  $\partial\mathcal{T}$  composto da geodetiche, allora  $T' \in T\Sigma^\perp$ , mentre  $\underline{n} \times T \in T\Sigma$ , pertanto  $k_g = 0$ . Inoltre,  $i_k + \varepsilon_k = \pi$ ,  $\forall k$ , quindi

$$\int_{\mathcal{T}} K dA + 3\pi - \sum_{k=1}^3 i_k = 2\pi$$

da cui la tesi.  $\square$

### §3.8.3 Curvatura normale e curvatura geodetica

Sia  $\Sigma$  una superficie orientata, con versore normale  $\underline{n}$ , e sia  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  una curva pla. Si nota che la terna  $(T_\alpha, \underline{n} \times T_\alpha, \underline{n})$  forma una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$  per ogni  $t \in I$ , visto che  $T_\alpha(t) = \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$ ,  $\forall t \in I$ . Ora, visto che  $T'_\alpha \perp T_\alpha$ , si può scrivere

$$T'_\alpha = (T'_\alpha \cdot \underline{n} \times T_\alpha) \underline{n} \times T_\alpha + (T'_\alpha \cdot \underline{n}) \underline{n}$$

dove  $T'_\alpha \cdot \underline{n} = k_n(\alpha(t))$  è la curvatura normale. Si nota, poi, che  $T'_\alpha = D_{\alpha'}\alpha'$ , quindi

$$D_{\alpha'}\alpha' \cdot \underline{n} \times T_\alpha = (D_{\alpha'}\alpha')^\top \cdot \underline{n} \times T_\alpha = \nabla_{\alpha'}\alpha' \cdot \underline{n} \times T_\alpha := k_g(\alpha(t))$$

dove, nella seconda uguaglianza, si è usato il fatto che  $\underline{n} \times T_\alpha \in T_{\alpha(t)}\Sigma$ , quindi la componente che sopravvive al prodotto scalare è solamente quella parallela alla superficie, cioè  $\nabla_{\alpha'}\alpha'$ . Allora si ha la seguente.

**Proposizione 3.9.** Data una curva  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$ , con  $\Sigma$  superficie orientabile, allora  $k_g(\alpha(t)) = 0$ ,  $\forall t \in I \iff \alpha(t)$  è una geodetica su  $I$ .

Inoltre, dalla scomposizione di  $T'_\alpha$ , si ricava la seguente relazione:

$$k_\alpha^2 = k_g^2 + k_n^2 \quad (3.8.1)$$

La condizione di  $\alpha$  geodetica, allora, è equivalente a  $k_\alpha = |k_n|$ <sup>1</sup>, che, a sua volta, è

<sup>1</sup>Si ha  $k_\alpha > 0$  per definizione, mentre  $k_n$  può essere negativa e bisogna usare il modulo dopo la radice.



equivalente a richiedere  $T'_\alpha = \alpha'' \perp T_{\alpha(t)}\Sigma$ .

### §3.8.4 Teorema di Gauss-Bonnet globale

**Definizione 3.22 (Superficie con bordo).** Sia  $\hat{\Sigma} \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientata e compatta, con  $\partial\hat{\Sigma} = \emptyset$  (senza bordo). Sia, poi,  $R \subseteq \hat{\Sigma}$  una regione (o unione di più regioni), con  $\partial R$  traccia di una curva chiusa, semplice e regolare a tratti (o unione di curve del genere); allora una *superficie orientata con bordo* è della forma  $\Sigma = \overline{\hat{\Sigma}} \setminus R$ , il cui bordo può anche essere sconnesso.

**Definizione 3.23 (Triangolazione).** Sia  $\Sigma$  una superficie orientata con bordo  $\partial\Sigma$ . Una *triangolazione* di  $\Sigma$  è una famiglia  $\mathcal{T} = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^m$  tale che:

- (a).  $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^m \Delta_\lambda$ ;
- (b).  $\Delta_\lambda$  è l'immagine di un triangolo Euclideo tramite una parametrizzazione regolare di  $\Sigma$  compatibile con la sua orientazione;
- (c). se  $\lambda \neq \mu$ , allora

$$\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ vertice} \\ 1 \text{ lato} \end{cases}$$

cioè i  $\Delta_\lambda$  si intersecano “bene”;

- (d). se  $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu$  è un lato, allora le orientazioni su quest'ultimo sono opposte;
- (e). per ogni  $\lambda$

$$\Delta_\lambda \cap \partial\Sigma = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ vertice} \\ 1 \text{ lato} \end{cases}$$

cioè i  $\Delta_\lambda$  intersecano “bene” il bordo.

**Teorema 3.6 (Teorema di Radó).** Sia  $\Sigma$  una superficie orientata con bordo  $\partial\Sigma$ ; allora  $\Sigma$  ammette una *triangolazione*. Se  $\partial\Sigma = \emptyset$ , invece,  $\Sigma$  continua ad ammettere una triangolazione, ma senza il punto (e).

L'obiettivo è estendere il teorema di Gauss-Bonnet a tutta la superficie, piuttosto che ad una regione. Per farlo, si deve ottenere un termine correttivo che mantenga l'enunciato

vero globalmente.

**Definizione 3.24 (Caratteristica di Eulero).** Sia  $\mathcal{T}$  una triangolazione di  $\Sigma$ , superficie orientata con bordo. Dati  $V$  il numero di vertici,  $L$  il numero di lati e  $T$  il numero di triangoli su  $\Sigma$  generati dalla triangolazione, allora si definisce la *caratteristica di Eulero* della superficie come

$$\chi(\Sigma) = V - L + T \in \mathbb{Z}$$

Per poter enunciare il teorema globale, è prima necessario chiarire cosa vuol dire integrare su tutta la superficie. Facendo uso del teorema di Radó e assumendo che  $\Sigma$  sia triangolata da  $\{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^m$ , allora si definisce

$$\int_{\Sigma} K dA := \sum_{\lambda=1}^m \int_{\Delta_\lambda} K dA$$

**Teorema 3.7 (Teorema di Gauss-Bonnet globale).** Sia  $\Sigma$  una superficie compatta, orientata e con bordo regolare a tratti, semplice e chiuso (anche sconnesso). Siano, inoltre,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$  gli angoli esterni del bordo e sia  $\mathcal{T} = \{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$  una sua triangolazione. Allora

$$\int_{\partial\Sigma} k_g ds + \int_{\Sigma} K dA + \sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k = 2\pi\chi(\Sigma)$$

*Dimostrazione.* Si fornisce un'idea della dimostrazione. Per il teorema di Gauss-Bonnet locale, si sa che

$$\int_{\partial\Delta_\lambda} k_g ds + \int_{\Delta_\lambda} K dA + \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{\lambda_j} = 2\pi$$

Sommando su  $\lambda$ , si ha:

- $\sum_{\lambda=1}^m \int_{\Delta_\lambda} K dA = \int_{\Sigma} K dA$  per definizione;
- $\sum_{\lambda=1}^m \int_{\partial\Delta_\lambda} k_g ds = \int_{\partial\Sigma} k_g ds$  perché, per definizione di triangolazione, il verso di percorrenza su lati comuni a più triangoli è opposto, quindi i contributi “non di bordo” si annullano;
- $\sum_{\lambda,j} \varepsilon_{\lambda_j} = 2\pi(L - V)$  per arrangiamento combinatorio;
- $\sum_{\lambda=1}^m 2\pi = 2\pi T$ , cioè  $m$  sarebbe il numero di triangoli su  $\Sigma$ .

□

**Corollario 3.7.1.** Se  $\partial\Sigma = \emptyset$ , allora

$$\int_{\Sigma} K dA = 2\pi\chi(\Sigma)$$

Per finire la sezione, si lascia il seguente fatto: *le superfici chiuse (senza bordo), connesse e orientabili, a meno di omomorfismi, sono la sfera, il toro, il toro con due buchi e, più in generale, il toro con  $g$  buchi.* Il numero di buchi  $g$  prende il nome di **genere** e, indicando una superficie simile di genere  $g$  con  $F_g$ , vale

$$\chi(F_g) = 2 - 2g \quad (3.8.2)$$

### §3.9 Esercizi

**Esercizio 3.1 (Classificazione del cilindro).** Classificare tutti i punti di un cilindro retto di raggio  $R$ .

*Svolgimento.* Il cilindro si può ottenere tramite la rotazione di una retta verticale nel piano  $xz$  a distanza  $R$  dall'asse  $z$ . La sua parametrizzazione sarà:

$$\underline{x}(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$$

Si ha

$$\begin{cases} \underline{x}_u = (-R \sin u, R \cos u, 0) \\ \underline{x}_v = (0, 0, 1) \end{cases} \implies \underline{x}_u \times \underline{x}_v = \begin{pmatrix} R \cos u \\ R \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allora la prima forma fondamentale in forma matriciale tramite la base composta da  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$  è data da

$$\mathbf{I}_{\underline{x}(u,v)} : \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per scrivere la seconda forma fondamentale, bisogna arrivare alle derivate seconde:

$$\begin{cases} \underline{x}_{uu} = -R(\cos u, \sin u, 0) \\ \underline{x}_{uv} = (0, 0, 0) \Rightarrow m = 0 \\ \underline{x}_{vv} = (0, 0, 0) \Rightarrow n = 0 \end{cases} \implies \ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = -R$$

dove  $\underline{n} = \underline{x}_u \times \underline{x}_v / \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|$ , da cui

$$\mathbf{II}_{\underline{x}(u,v)} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine, la matrice dell'operatore forma si ottiene invertendo quella della prima forma fondamentale (che essendo diagonale, corrisponde alla matrice con gli inversi dei termini diagonali) e si ha:

$$S_{\underline{x}(u,v)} : \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo diagonale, i suoi autovalori, cioè le curvatures principali, sono  $k_1 = -1/R$  e  $k_2 = 0$ , da cui le curvatures normali varieranno nell'intervallo  $[-1/R, 0]$ . ■

**Esercizio 3.2 (Classificazione dell'elicoide).** Classificare tutti i punti dell'elicoide di passo  $b > 0$ .

*Svolgimento.* Si considera la parametrizzazione regolare

$$\underline{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u \cos v, u \sin v, bv) \end{array}$$

per cui l'elicoide è data da  $\mathcal{E} = \underline{x}(\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R})$ . Si ha:

$$\begin{cases} \underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0) \\ \underline{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, b) \end{cases} \implies \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(u^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Il versore normale è dato da

$$\underline{n} = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin v \\ -b \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

I coefficienti della seconda forma normale, invece, sono dati da:

$$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = \underline{n} \cdot (0, 0, 0) = 0$$

$$m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv} = \underline{n} \cdot (\sin v, \cos v, 0) = -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}}$$

$$n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv} = \underline{n} \cdot (-u)(\cos v, \sin v, 0) = 0$$

da cui

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(u^2 + b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b/\sqrt{u^2 + b^2} \\ -b/\sqrt{u^2 + b^2} & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \\ -\frac{b}{(u^2 + b^2)^{3/2}} & \frac{b}{\sqrt{u^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

Allora si trova  $H = 0$ , da cui si conclude che  $\mathcal{E}$  è una superficie *minima*, e

$$K(p) = \det S_p = -\frac{b^2}{(u^2 + b^2)} < 0$$

quindi tutti i punti dell'elicoide sono iperbolici. Per le curvatures principali, invece, si usa che  $H \propto k_1 + k_2 = 0$  e che  $K = k_1 k_2 = -\frac{b^2}{u^2 + b^2}$ , da cui

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{b}{u^2 + b^2} \\ k_2 = \frac{b}{u^2 + b^2} \end{cases}$$

da cui si ricava anche il range per le curvatures normali, come da corollario della formula di Eulero. ■

**Esercizio 3.3 (Classificazione del toro).** Classificare tutti i punti del toro  $\mathbb{T}_{a,b}$ .

*Svolgimento.* In questo caso, si parte con l'osservare che i punti più esterni saranno ellittici, mentre quelli vicini al buco interno saranno iperbolici, viste le curvatures principali in quelle regioni.

Dalla scrittura del toro come superficie di rotazione, si trova che

$$\underline{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$$

da cui

$$\begin{cases} \underline{x}_u = -b(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \\ \underline{x}_v = (a + b \cos u)(-\sin v, \cos v, 0) \end{cases}$$

I coefficienti della prima forma sono:

$$E = b^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = b^2 \quad F = 0 \quad G = (a + b \cos u)^2$$

da cui

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a+b \cos u)^2} \end{pmatrix}$$

Visto che

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = -b \underbrace{(a + b \cos u)}_{\text{sempre } \neq 0} \underbrace{(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)}_{\text{versore}}$$

si ottiene

$$\underline{n} = \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} = - \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

I coefficienti della seconda forma, quindi, sono:

$$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu} = -b \underline{n} \cdot \underbrace{(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)}_{=\underline{n}} = v$$

$$m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv} = -b \sin u (-\sin v, \cos v, 0) = 0$$

$$n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv} = -(a + b \cos u) \underline{n} \cdot (\cos v, \sin v, 0) = (a + b \cos u) \cos u$$

Quindi, la matrice dell'operatore forma è data da

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/b^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a+b \cos u)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a + b \cos u) \cos u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/b & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{a+b \cos u} \end{pmatrix}$$

che è diagonale e, quindi, si ottengono subito le curvature principali:

$$\begin{cases} k_1 = 1/b > 0, \forall p \\ k_2 = \frac{\cos u}{a + b \cos u} \end{cases}$$

Si vede che  $k_1$  è costante, mentre  $k_2$  dipende da  $u$ , che sarebbe l'angolo della circonferenza nel piano  $xz$  a partire da cui si ottiene, tramite rotazione, il toro. Allora si conclude che i punti per  $u \in (-\pi/2, \pi/2)$  sono ellittici, quelli con  $u = \pm\pi/2$  sono parabolici, mentre gli altri sono iperbolici. ■

**Esercizio 3.4.** Mostrare che se  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie compatta, allora ha punti ellittici.

*Svolgimento.* Si considera la funzione

$$f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto p \cdot p$$

Sia  $p_0 \in \Sigma$  un punto di massimo<sup>1</sup> per  $f$ ; si vuole studiare il segno di  $k_n(p_0, w) := T'_\alpha \cdot \underline{n}(p_0)$ , con  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  curva pla tale che  $\alpha(0) = p_0$  e  $\alpha'(0) = w \in T_{p_0}\Sigma$ . Dall'assunzione di  $p_0$  massimo per  $f$ , si ha:

$$\varphi(s) = f(\alpha(s)) \leq f(\alpha(0)) = f(p_0)$$

Usando che  $\varphi(s) = \alpha(s) \cdot \alpha(s)$ , con  $\varphi'(0) = 0$  e  $\varphi''(0) \leq 0$ , si ha:

$$\varphi'(0) = 2\alpha'(0) \cdot \alpha(0) = 2w \cdot p_0 = 0, \quad \forall w \in T_{p_0}\Sigma$$

quindi  $T_{p_0}\Sigma$ , e

$$\varphi''(0) = 2[T'_\alpha(0) \cdot p_0 + \underbrace{T_\alpha(0) \cdot T_\alpha(0)}_{=1}]$$

Scegliendo un versore normale  $\underline{n}$  definito attorno a  $p_0$  tale che  $\underline{n}(p_0) = p_0 / \|p_0\|$ , si ha:

$$\varphi''(0) = 2[\underbrace{T'_\alpha(0) \cdot \|p_0\| \underline{n}(p_0)}_{=\|p_0\|k_n(p_0, w)} + 1] \leq 0 \implies k_n(p_0, w) \leq -\frac{1}{\|p_0\|} < 0$$

da cui  $K(p_0) > 0$ . ■

**Esercizio 3.5.** Sia  $p \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  un punto di una superficie  $\Sigma$ ; dimostrare i seguenti punti.

- (a). Se  $p$  è ellittico, tutti i punti di un intorno di  $p$  sono dalla stessa parte del piano affine  $p + T_p\Sigma$ .
- (b). Se  $p$  è iperbolico, allora non esiste un intorno come al punto (a).
- (c). Se  $p$  è parabolico o planare, allora si possono verificare sia (a), che (b).

*Svolgimento.* Si usa preliminarmente il fatto che le roto-traslazioni  $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  conservano le curvatures delle curve sulla superficie, quindi le curvatures normali di  $\Sigma$  in  $p$  sono le stesse di quelle di  $R(\Sigma)$  nel punto  $R(p)$  (a meno di un cambio di segno). Allora si assume che:

- $p$  è nell'origine (cioè  $p = (0, 0, 0) = 0 \in \mathbb{R}^3$ );

---

<sup>1</sup>Assicurato dalla compattezza della superficie

- $p + T_p \Sigma = \{z = 0\}$ , cioè il piano tangente in  $p$  coincide col piano  $xy$ ;
- le direzioni principali nel punto  $p$  coincidono con gli assi  $x, y$ .

Si considera, allora, una parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  attorno al punto  $p = 0$ ; si ha:

$$T_0 \Sigma = \{z = 0\} = \text{Span}(\underline{x}_u(0), \underline{x}_v(0))$$

dove sia  $\underline{x}_u$  che  $\underline{x}_v$  hanno coordinata  $z = 0$  perché sono contenuti nel piano  $xy$ . Ne segue che la matrice delle componenti di  $\underline{x}_u, \underline{x}_v$  è della forma

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove il determinante del blocco  $2 \times 2$  deve essere non-nullo. Per ragionamenti simili a quelli svolti in precedenza, si conclude che  $\Sigma$  è parametrizzata dal grafico di una funzione in un intorno  $V$  di  $(0, 0)$ , cioè si trova una parametrizzazione  $\underline{y} : V \rightarrow \Sigma : (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$ , da cui

$$\underline{y}_u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(0) \end{pmatrix} \quad \underline{y}_v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(0) \end{pmatrix}$$

Visto che anche questi devono appartenere al piano  $xy$ , deve valere  $f_u(0) = f_v(0) = 0$ , così come  $f(0) = 0$ , visto che il punto  $p$  corrisponde con l'origine. Allora, sviluppando in serie di Taylor attorno a  $p$ :

$$f(u, v) = f(0) + f_u(0)u + f_v(0)v + \frac{1}{2}(f_{uu}(0)u^2 + f_{vv}(0)v^2 + 2f_{uv}(0)uv) + \underbrace{\varepsilon(u, v)}_{\text{resto}}$$

con  $\frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} \rightarrow 0$ , per  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ . Si cercano i valori delle derivate seconde di  $f$ . Si calcola, preliminarmente, la I forma fondamentale, che è data da:

$$\begin{aligned} E(0) &= \underline{y}_u(0) \cdot \underline{y}_u(0) = 1 & F(0) &= \underline{y}_u(0) \cdot \underline{y}_v(0) = 0 & G(0) &= \underline{y}_v(0) \cdot \underline{y}_v(0) = 1 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Big|_{(u, v) = (0, 0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \text{Id} \end{aligned}$$

Inoltre, visto che si sono prese le curvature principali coincidenti con gli assi  $x$  e  $y$ , si



ha che la matrice dell'operatore forma in  $p$  è data da:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Sfruttando il fatto che la matrice associata alla I forma fondamentale è l'identità, si trova che quella associata alla seconda coincide con quella associata all'operatore forma:

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

da cui, usando che  $\underline{n}(0) = (0, 0, 1)$  (per come si sono scelti gli assi), si ha:

$$k_1 = \ell(0) = \underline{n}(0) \cdot \underline{y}_{uu}(0) = f_{uu}(0) \quad 0 = m(0) = f_{uv}(0) \quad k_2 = n(0) = f_{vv}(0)$$

Se ne conclude che:

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(k_1 u^2 + k_2 v^2) + \varepsilon(u, v)$$

Per capire cosa succede in ciascun caso, quindi, si studia  $\frac{f(u, v)}{u^2 + v^2}$ .

(a). Si considera  $p$  ellittico, quindi si hanno due casi:  $k_1 \geq k_2 > 0$  (1), oppure  $k_2 \leq k_1 < 0$ . Nel caso (1):

$$\frac{f(u, v)}{u^2 + v^2} = \frac{1}{2(u^2 + v^2)}(k_1 u^2 + k_2 v^2) + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} \geq \frac{1}{2}k_2 + \frac{\varepsilon}{u^2 + v^2} > 0$$

per  $(u, v) \sim (0, 0)$  e  $(u, v) \neq (0, 0)$ . Nel secondo caso, invece:

$$\frac{f(u, v)}{u^2 + v^2} \leq \frac{1}{2}k_1 + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2} < 0$$

per  $(u, v) \sim (0, 0)$ .

(b). Si considera, senza perdita di generalità,  $k_1 > 0 > k_2$ ; allora:

$$\frac{f(u, v)}{u^2 + v^2} = \frac{1}{2} \frac{k_1 u^2 + k_2 v^2}{u^2 + v^2} + \frac{\varepsilon(u, v)}{u^2 + v^2}$$

Mettendosi arbitrariamente vicino a  $(0, 0)$ , senza raggiungerlo, cioè considerando  $(u, v) \sim (0, 0)$ , ci si può restringere ad uno dei due assi e ottenere  $v = 0$ , oppure  $u = 0$ , cioè, rispettivamente,  $k_1/2 > 0$  e  $k_2/2 < 0$ , da cui la tesi.

- (c). Se  $p$  è parabolico, si può considerare un cilindro; in questo caso, tutti i punti sulla sua superficie laterale sono dalla stessa parte del piano tangente. Al contrario, considerando la superficie ottenuta come grafico di  $z = x^2 + y^3$ , si vede che il piano tangente spezza la superficie in due regioni, quindi i punti non sono tutti dalla stessa parte.

Nel caso di  $p$  planare, invece, si possono considerare le curve ottenute come grafici di  $z = y^3$  (entrambe le parti) e  $z = y^4$  (da una parte).

■

**Esercizio 3.6 (Trasporto parallelo su cilindro).** Calcolare il trasporto parallelo del vettore  $(0, 0, 1)$  lungo il cerchio  $\{z = 0\}$  del cilindro  $\{x^2 + y^2 = a^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

*Svolgimento.* Il vettore  $(0, 0, 1)$  è parallelo alla superficie lungo tutta la circonferenza; per unicità del trasporto parallelo, dunque,  $(0, 0, 1)$  è il trasportato di se stesso. ■

**Esercizio 3.7 (Trasporto parallelo lungo i paralleli di una sfera).** Si considera una superficie sferica  $S^2$ . Si individua un cerchio massimo e si considerano due circonferenze ad esso parallele: una nella calotta superiore e una in quella inferiore. Dati tre vettori, ciascuno tangente alla relativa circonferenza in un dato punto, studiarne il trasportato.

*Svolgimento.* Si può costruire la sfera  $S^2$  senza i poli come rotazione, attorno all'asse  $z$ , della semicirconferenza  $(\sin u, 0, \cos u)$ ,  $u \in (0, \pi)$  nel piano  $xz$ , dove  $u$  rappresenta l'angolo di apertura con l'asse  $z$ . Allora la sua parametrizzazione regolare è data da  $\underline{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$  e, dunque  $S^2 \setminus \{\text{poli}\} = \underline{x}((0, \pi) \times \mathbb{R})$ .

Data  $\alpha(t) = \underline{x}(u_0, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , questa è una curva sulla circonferenza che parametrizza un parallelo; allora si prende un campo vettoriale lungo  $\alpha$ , della forma<sup>1</sup>

$$\begin{cases} X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(u_0, t) + b(t)\underline{x}_v(u_0, t) \\ X(\alpha(t_0)) = X_0 = \underline{x}_v(u_0, v_0) \end{cases}$$

Imponendo che i coefficienti  $a(t)$ ,  $b(t)$  soddisfino le equazioni del trasporto parallelo 3.6.1, allora devono soddisfare

$$\begin{cases} a' + a\Gamma_{uv}^u + b\Gamma_{vv}^u = 0 \\ b' + a\Gamma_{uv}^v + b\Gamma_{vv}^v = 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Si prende come condizione iniziale il vettore  $X_0$  relativo al campo  $X$  calcolato in  $\alpha(t_0) = \underline{x}(u_0, v_0)$ .

visto che  $u'(t) = 0$  e  $v'(t) = 1$ . Ora si calcolano i simboli di Christoffel; per farlo, serve calcolare le derivate di  $\underline{x}$ .

$$\underline{x}_u = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \Rightarrow E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1$$

$$\underline{x}_v = \sin u(-\sin v, \cos v, 0) \Rightarrow F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0, \quad G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = \sin^2 u$$

$$\underline{x}_{uv} = \cos u(-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\underline{x}_{vv} = -\sin u(\cos v, \sin v, 0)$$

Allora

$$\Gamma_{uv}^u = E\Gamma_{uv}^u = \underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_u = 0$$

$$\Gamma_{uv}^v = \frac{1}{\sin^2 u} \underline{x}_{uv} \cdot \underline{x}_v = \frac{1}{\sin^2 u} \sin u \cos u = \frac{\cos u}{\sin u}$$

$$\Gamma_{vv}^u = \underline{x}_{vv} \cdot \underline{x}_u = -\cos u \sin u$$

$$\Gamma_{vv}^v = \frac{1}{\sin^2 u} \underline{x}_{vv} \cdot \underline{x}_v = \frac{1}{\sin^2 u} 0 = 0$$

Pertanto il sistema è dato da

$$\begin{cases} a' = \sin u_0 \cos u_0 b \\ b' = -\frac{\cos u_0}{\sin u_0} a \end{cases}$$

- Se  $\cos u_0 = 0$ , cioè il parallelo considerato coincide con l'equatore, allora il sistema si riduce a  $a' = b' = 0$ , per cui  $X(\alpha(t)) = \underline{x}_v(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ ,  $\forall t$ .
- Se  $\cos u_0 \neq 0$ , invece, si trova che

$$b'' = -\frac{\cos u_0}{\sin u_0} \sin u_0 \cos u_0 b \implies b'' + k^2 b = 0$$

per  $k = \cos u_0$ . La soluzione generale di questa è  $b(t) = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt)$ ; imponendo le condizioni iniziali, si trova:

$$1 = b(0) = c_1 \quad 0 = a(0) = -\frac{\sin u_0}{\cos u_0} b'(0) = -\sin u_0 c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

ossia  $b(t) = \cos(\cos u_0 t)$ , da cui

$$a(t) = -\frac{\sin u_0}{\cos u_0} b'(t) = \sin u_0 \sin(\cos u_0 t)$$

■  
**Esercizio 3.8.** Determinare le geodetiche del piano  $\{z = 0\}$ .

*Svolgimento.* Il piano  $\{z = 0\}$  è parametrizzato da  $\underline{x}(u, v) = (u, v, 0)$ , quindi  $\underline{x}_{uu} = \underline{x}_{uv} = \underline{x}_{vv} = 0$ , da cui  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Pertanto, il sistema di EDO che definisce le geodetiche si riduce a

$$\begin{cases} u'' = 0 \\ v'' = 0 \end{cases} \implies \alpha(t) = (a_1 t + b_1, a_2 t + b_2, 0)$$

Questo vuol dire che tutte e sole le geodetiche di  $\{z = 0\}$  sono porzioni di rette parametrizzate a velocità costante. ■

**Esercizio 3.9 (Area del toro).** Si vuole verificare che, per la definizione data di integrale, l'area del toro  $\mathbb{T}_{a,b} \subset \mathbb{R}^3$ , con  $a > b > 0$ , è coerente con quella data dalla geometria euclidea:  $A(\mathbb{T}_{a,b}) = (2\pi a)(2\pi b)$ . Per farlo, si considera il rettangolo  $[0, 2\pi - \varepsilon] \times [0, 2\pi - \varepsilon] \subset \mathbb{R}^2$  e la corrispondente regione sul toro  $R_\varepsilon = \underline{x}([0, 2\pi - \varepsilon] \times [0, 2\pi - \varepsilon]) \subset \mathbb{T}_{a,b}$ . Dimostrare, allora, che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = (2\pi a)(2\pi b)$$

*Svolgimento.* Visto che  $\mathbb{T}_{a,b} = \underline{x}(\mathbb{R}^2)$ , con

$$\underline{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin v)$$

allora

$$\begin{aligned} \underline{x}_u &= (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u) \\ \underline{x}_v &= (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0) \end{aligned}$$

Da queste, si ottengono  $E = b^2$ ,  $F = 0$  e  $G = (a + b \cos u)^2$ , quindi

$$\begin{aligned} A(R_\varepsilon) &= b \int_0^{2\pi - \varepsilon} (a + b \cos u) du \int_0^{2\pi - \varepsilon} dv \\ &= b(2\pi - \varepsilon) [a(2\pi - \varepsilon) + b \sin(2\pi - \varepsilon)] \rightarrow (2\pi a)(2\pi b) \end{aligned}$$

per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

**Esercizio 3.10.** Verificare il teorema di Gauss-Bonnet globale per il cilindro.

*Svolgimento.* Si nota che un cilindro è una superficie ricoperta da geodetiche: i suoi paralleli sono ottenuti ruotando punti critici della distanza dal centro del profilo. Considerando anche il fatto che è una superficie piatta e che non ha angoli, si ha, rispetti-

vamente

$$\int_{\partial\Sigma} k_g ds = 0 \quad \int_{\Sigma} K dA = 0 \quad \sum_{j,\lambda} \varepsilon_{\lambda_j} = 0$$

Pertanto, si deve far vedere che  $\chi(\Sigma) = 0$ . Visto che, come spazio topologico,  $\Sigma \cong A$  anello, il quale ha  $\chi(A) = 0$ , e che  $\chi(\Sigma)$  è invariante sotto omotopia, allora il teorema è verificato. ■

**Esercizio 3.11.** Se  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una superficie connessa, orientabile e compatta, con  $\partial\Sigma = \emptyset$  e  $\Sigma \not\cong S^2$ , allora ha punti in cui  $K > 0$ , punti in cui  $K = 0$  e punti in cui  $K < 0$ .

*Svolgimento.* Essendo una superficie compatta, si è già mostrato che deve possedere punti in cui  $K > 0$ . Se fosse  $K \geq 0$  ovunque, si avrebbe

$$2\pi\chi(\Sigma) = 2\pi(2 - 2g) = \int_{\Sigma} K dA \geq 0 \iff g \leq 1$$

Visto che si è escluso il caso della sfera, deve essere  $g > 0$ , quindi si ha  $g = 1$ . Però questo implica che

$$0 = 2\pi\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} K dA$$

ma è assurdo perché esistono punti in cui  $K > 0$ , quindi l'integrale non può essere nullo. Questo permette di concludere che devono esistere punti in cui  $K < 0$  e, per continuità di  $K$ , si devono anche avere dei punti in cui  $K = 0$ . ■

**Esercizio 3.12.** Stabilire quando può esistere una geodetica semplice e chiusa su una generica superficie  $\Sigma$  in ciascuno dei seguenti casi:

- (1).  $\forall p \in \Sigma, K(p) > 0$ ;
- (2).  $\forall p \in \Sigma, K(p) < 0$ ;
- (3).  $\forall p \in \Sigma, K(p) = 0$ .

In ciascuno di questi casi, inoltre, dire se tale geodetica può essere il bordo di una regione semplicemente connessa.

*Svolgimento.* Si considera il caso (1). Si può considerare il caso di una superficie sferica, in cui ogni suo cerchio massimo parametrizzato a velocità costante è una geodetica. In questo caso,  $R$  coincide con una calotta, che si può mostrare essere semplicemente connessa.

Ora si considera il caso (2), con  $K(p) < 0, \forall p \in \Sigma$ . In questo caso, si può considerare

la superficie di rotazione ottenuta ruotando mezza circonferenza aperta verso destra, fondamentalmente a formare la parte interna di un toro. Anche in questo caso, evidentemente, l'equatore è una geodetica chiusa. Si assume per assurdo che la regione  $R$  che delimita sia semplicemente connessa; usando il teorema di Gauss-Bonnet locale, unitamente al fatto che  $K(p) < 0$ ,  $\forall p$ , si ha:

$$0 > \int_R K dA = 2\pi > 0$$

Per il caso (3), infine, si può considerare un qualunque parallelo ad altezza fissata di un cilindro. Per lo stesso ragionamento usato sopra con Gauss-Bonnet, anche in questo caso, la regione  $R$  delimitata da una tale geodetica non può essere semplicemente connessa. ■

**Esercizio 3.13.** Calcolare la curvatura geodetica di un parallelo di  $S^2$ .

*Svolgimento.* La sfera senza i poli è parametrizzata da

$$\underline{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad 0 < u < \pi$$

quindi  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = \sin^2 u$ , come già visto. La curva  $\alpha(t) = \underline{x}(u_0, t)$  parametrizza il parallelo  $u = u_0$  e soddisfa  $\alpha'(t) = \underline{x}_v(u_0, t)$ , per cui  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{G(u_0, t)} = \sin u_0$ , perciò la sua versione pla è data da  $\beta(s) := \alpha(s/\sin u_0)$ . Con la versione pla, si possono calcolare versore tangente e derivata, mentre, per versore normale, si usa quello fornito dalla parametrizzazione:

$$\begin{aligned} T_\beta(s) &= \frac{1}{\sin u_0} \alpha' \left( \frac{s}{\sin u_0} \right) = \frac{\underline{x}_v(u_0, s/\sin u_0)}{\sin u_0} \\ T'_\beta(s) &= \frac{1}{\sin^2 u_0} \alpha'' \left( \frac{s}{\sin u_0} \right) = \frac{1}{\sin^2 u_0} \underline{x}_{vv} \left( u_0, \frac{s}{\sin u_0} \right) = -\frac{1}{\sin^2 u_0} \sin u_0 \begin{pmatrix} \cos(s/\sin u_0) \\ \sin(s/\sin u_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \underline{n}(u_0, s/\sin u_0) &= \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \underline{x}_u \times \frac{\underline{x}_v(u_0, s/\sin u_0)}{\sin u_0} = \underline{x}_u \times T_\beta \\ \Rightarrow \underline{n} \times T_\beta &= -\underline{x}_u = - \begin{pmatrix} \cos u_0 \cos(s/\sin u_0) \\ \cos u_0 \sin(s/\sin u_0) \\ -\sin u_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Unendo tutto, si ottiene

$$k_g(s) = T'_\beta \cdot (\underline{n} \times T_\beta) = \frac{\cos u_0}{\sin u_0} = \cotan u_0$$

■ **Esercizio 3.14.** Verificare il teorema di Gauss-Bonnet per una calotta sferica di  $S^2$ .

*Svolgimento.* Si indica con  $\varphi$  l'angolo formato tra l'asse  $z$  e la posizione del parallelo che delimita la calotta, e si considera  $0 < \varphi < \pi/2$ . Per parametrizzare  $S^2$ , si prende

$$\underline{x}: \begin{array}{ccc} \mathbb{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, v\sqrt{1-u^2-v^2}) \end{array}$$

quindi la calotta è data da

$$R = \underline{x}(\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < \sin^2 \varphi\}) \subseteq \underline{x}(\mathbb{U})$$

Visto che  $R$  è omeomorfa ad un disco, è semplicemente connessa, quindi si può usare Gauss-Bonnet. Si ha che:

$$\int_{\partial R} k_g ds = \cotan \varphi L(\partial R) = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sin \varphi 2\pi = 2\pi \cos \varphi$$

Sapendo che, per la sfera,  $K = 1$ :

$$\int_R K dA = \int_R dA = A(R) = \int_{\underline{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Si devono calcolare  $E, F, G$  relativi a questa parametrizzazione. Visto che

$$\underline{x}_u = \left(1, 0, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) \quad \underline{x}_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)$$

si trova che

$$\begin{aligned} E &= \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1 + \frac{u^2}{1-r^2} \\ F &= \frac{uv}{1-r^2} \quad G = 1 - \frac{v^2}{1-r^2} \end{aligned}$$

con  $r = u^2 + v^2$ , cioè prendendo  $u = r \cos \theta$  e  $v = r \sin \theta$ . Quindi  $EG - F^2 = \frac{1}{1-r^2}$ , da cui

$$\int_{\underline{x}^{-1}(R)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} du dv = \int_0^{\sin \varphi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 2\pi(1 - \cos \varphi)$$

Allora, visto che la regione non ha contributi dovuti a spigoli, il teorema è verificato perché la somma dei due integrali restituisce  $2\pi$ . ■

**Esercizio 3.15.** Dato il toro  $\mathbb{T}_{5,2} = \underline{x}(\mathbb{R}^2)$ , con

$$\underline{x}(u, v) = ((5 + 2 \cos u) \cos v, (5 + 2 \cos u) \sin v, \sin u)$$

e data la regione  $R = \underline{x}([0, \pi/2] \times [0, \pi])$ , verificare il teorema di Gauss-Bonnet:

$$\int_{\partial R} k_g ds + \int_R K dA + \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i = 2\pi \chi(R)$$

*Svolgimento.* La definizione di  $R$  tramite immagine di  $\underline{x}$  implica che  $R$  è omeomorfo ad un rettangolo, quindi è semplicemente connesso. Prendendo la normale esterna, l'orientazione di questo pezzo di toro è data da  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$ , dove

$$A_1 = \{\underline{x}(0, t), 0 \leq t \leq \pi\}$$

$$A_2 = \{\underline{x}(t, \pi), 0 \leq t \leq \pi/2\}$$

$$A_3 = \{\underline{x}(\pi/2, \pi - t), 0 \leq t \leq \pi\}$$

$$A_4 = \{\underline{x}(\pi/2 - t, 0), 0 \leq t \leq \pi/2\}$$

Si nota, intanto, che gli angoli formati dal bordo sono tutti pari a  $\pi/2$ , quindi  $\sum_{k=1}^4 \varepsilon_k = 2\pi$ . Si vede, poi, che  $A_1$  è la rotazione di un punto critico della funzione distanza nel profilo della superficie, pertanto è traccia di una geodetica, così come lo sono anche  $A_2$  e  $A_4$ , corrispondenti ai tratti di salita e discesa rispettivamente. Questo significa che  $A_3$  è l'unico tratto di bordo che non può essere ottenuto tramite traccia di una geodetica<sup>1</sup>, pertanto

$$\int_{\partial R} k_g ds = \int_{A_3} k_g ds$$

Per calcolare questo integrale, si calcola  $k_g$ ; per farlo, si costruisce una curva la cui traccia coincide con  $A_3$  e la si parametrizza tramite lunghezza d'arco per arrivare al vettore tangente. Per la parametrizzazione data,  $A_3 = \text{Tr}(\alpha)$ , con

$$\alpha(t) = (5 \cos(\pi - t), 5 \sin(\pi - t), 2), 0 \leq t \leq \pi$$

per cui  $\alpha'(t) = (5 \sin(\pi - t), -5 \cos(\pi - t), 0)$ . Allora la versione pla è

$$\beta(s) = \left(5 \cos\left(\pi - \frac{s}{5}\right), 5 \sin\left(\pi - \frac{s}{5}\right), 2\right)$$

<sup>1</sup>Chiaramente non soddisfa  $\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$ , visto che si può prendere un piano tangente che restituisce una circonferenza, parte di cui è  $A_3$ , dall'intersezione con la superficie e questa ha curvatura che punta verso il centro.



da cui

$$\begin{aligned}T_{\beta}(s) &= \left( \sin\left(\pi - \frac{s}{5}\right), -\cos\left(\pi - \frac{s}{5}\right), 0 \right) \\T'_{\beta}(s) &= -\frac{1}{5} \left( \cos\left(\pi - \frac{s}{5}\right), \sin\left(\pi - \frac{s}{5}\right), 0 \right)\end{aligned}$$

Il versore normale lungo  $A_3$  è dato da  $\underline{n} = (0, 0, 1)$ , perciò:

$$k_g = -\frac{1}{5} \det \begin{pmatrix} \cos(\pi - s/5) & \sin(\pi - s/5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\pi - s/5) & -\cos(\pi - s/5) & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$$

Visto che  $L(A_3) = 5\pi$ , si ottiene

$$\int_{A_3} k_g ds = -\frac{5\pi}{5} = -\pi$$

Riprendendo le formule ricavate per i coefficienti della prima forma fondamentale e della curvatura gaussiana nel caso del toro, si ha

$$E = 4 \quad F = 0 \quad G = (5 + 2 \cos u)^2 \quad K = \frac{\cos u}{2(5 + 2 \cos u)}$$

Quindi, visto che  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{EG} = 2(5 + 2 \cos u)$ :

$$\int_R K dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \frac{\cos u}{2(5 + 2 \cos u)} \sqrt{EG - F^2} du dv = \pi [\sin u]_0^{\pi/2} = \pi$$

Allora i due integrali si elidono a vicenda e rimane la somma sugli angoli, che coincide proprio con  $2\pi$ . ■

**Esercizio 3.16 (Esercizio di riepilogo).** Sia  $\Sigma = \underline{x}(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ , con

$$\begin{aligned}\underline{x}: U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u \cos v, u \sin v, \ln u)\end{aligned}$$

cioè è la superficie ottenuta ruotando un profilo logaritmico.

- (1). Calcolare la curvatura gaussiana di  $\Sigma$  in ogni suo punto.
- (2). Verificare il teorema di Gauss-Bonnet per la regione  $R = \{0 \leq z \leq 1\} \subseteq \Sigma$ .
- (3). Data  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  una geodetica tale che  $\gamma(0) = (1, 0, 0)$  e  $\gamma'(0) = -(1, \sqrt{2}, 1)$ ,

mostrare che

$$\gamma(\mathbb{R}) \subseteq \left\{ z \geq -\frac{1}{2} \ln(2) \right\} \subseteq \Sigma$$

*Svolgimento.* Si divide lo svolgimento nei punti richiesti.

(1). Si svolgono i soliti conti:

$$\begin{aligned} \underline{x}_u &= (\cos v, \sin v, 1/u) & \underline{x}_v &= (-u \sin v, u \cos v, 0) = u(-\sin v, \cos v, 0) \\ \Rightarrow E &= \frac{1+u^2}{u^2} & F &= 0 & G &= u^2 \\ \underline{n} &= \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|} = \frac{u}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1/u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ u \end{pmatrix} \\ \underline{x}_{uu} &= (0, 0, -1/u^2) & \underline{x}_{uv} &= (-\sin v, \cos v, 0) & \underline{x}_{vv} &= -u(\cos v, \sin v, 0) \\ \Rightarrow \ell &= \underline{x}_{uu} \cdot \underline{n} = -\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} & m &= \underline{x}_{uv} \cdot \underline{n} = 0 & n &= \underline{x}_{vv} \cdot \underline{n} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

quindi

$$K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

(2). Si nota che, per  $u_0 > 0$ , la circonferenza  $\{z = \ln u_0\} \cap \Sigma$  è una circonferenza di raggio  $u_0$ , quindi si parametrizza tramite lunghezza d'arco come

$$\beta_{u_0}(s) = \left( u_0 \cos \left( \frac{s}{u_0} \right), u_0 \sin \left( \frac{s}{u_0} \right), \ln(u_0) \right)$$

Da questa, si ricavano

$$T(s) = \left( -\sin \left( \frac{s}{u_0} \right), \cos \left( \frac{s}{u_0} \right), 0 \right) \quad T'(s) = -\frac{1}{u_0} \left( \cos \frac{s}{u_0}, \sin \frac{s}{u_0}, 0 \right)$$

Quindi, lungo  $\beta_{u_0}$ , si ha:

$$k_g = T' \cdot (\underline{n} \times T) = \frac{1}{u_0 \sqrt{1+u_0^2}} \det \begin{pmatrix} \cos s/u_0 & \sin s/u_0 & 0 \\ \cos s/u_0 & \sin s/u_0 & -u_0 \\ -\sin s/u_0 & \cos s/u_0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+u_0^2}}$$

Il verso del versore normale trovato al punto precedente punta, evidentemente, verso l'interno della superficie, per via dei segni negativi davanti a seno e coseno. Tenendo conto dell'orientazione data dal versore normale e che la regione è

circondata dalle circonferenze  $z = 0 \Rightarrow u = 1$  e  $z = 1 \Rightarrow u = e$ , allora

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} k_g ds &= \int_{\beta_e} k_g ds - \int_{\beta_1} k_g ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} 2\pi e - \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi = 2\pi \left( \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)\end{aligned}$$

Ora si calcola l'integrale di K:

$$\int_R K dA = \int_1^e \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} du dv$$

Per calcolare la primitiva di  $(1+u^2)^{-3/2}$ , si usano seno e coseno iperbolici, che vengono richiamati di seguito.

$$\begin{aligned}\sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \implies \cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t \\ \sinh' t &= \cosh t & \cosh' t &= \sinh t\end{aligned}$$

Per l'integrale, si sostituisce  $u = \sinh t$ , per cui

$$\int (1+u^2)^{-3/2} du = \int \cosh^{-3} t \cosh t dt = \int \frac{1}{\cosh^2 t} dt = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

visto che

$$\left[ \frac{\sinh t}{\cosh t} \right] = \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh^2 t} = \frac{1}{\cosh^2 t}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int_R K dA &= - \int_1^e \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} du dv = -2\pi \left[ \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right]_1^e \\ &= -2\pi \left( \frac{e}{\sqrt{1+e^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = - \int_{\partial R} k_g ds\end{aligned}$$

Essendo che  $R$  è omeomorfo ad un anello, allora  $\chi(R) = 0$  e la formula di Gauss-Bonnet è verificata.

- (3). Visto che  $\Sigma$  è una superficie di rotazione, si può usare la relazione di Clairaut per  $\gamma$ , con  $r = u$ . Ora si cerca di trovare la costante che soddisfa  $u \cos \phi = \text{cost.}$  Si

inizia col notare che, nel punto  $(1, 0, 0) = \underline{x}(1, 0)$ , si ha  $u = 1$ , mentre

$$\gamma'(0) \cdot \underline{x}_v(1, 0) = \|\gamma'(0)\| \|\underline{x}_v(1, 0)\| \cos \phi = 2 \cos \phi$$

Ma il prodotto scalare tra i due è  $-(1, \sqrt{2}, 1) \cdot (0, 1, 0) = -\sqrt{2}$ , quindi  $\cos \phi = -1/\sqrt{2}$ , da cui la costante è proprio  $-1/\sqrt{2}$ . Ne segue che, in ogni punto di  $\gamma$  della forma  $\underline{x}(u, v)$ , si ha

$$u \cos \phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ora, visto che  $-u \leq u \cos \phi = -1/\sqrt{2} \iff u \geq 1/\sqrt{2}$  e che  $z = \ln u$ , allora

$$z \geq \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{2} \ln 2$$

che è proprio il risultato cercato. ■

# 4

## TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

**Definizione 4.1 (Mappa liscia).** Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ , con  $X, Y \neq \emptyset$ , due sottoinsiemi generici di spazi euclidei. Data anche  $f : X \rightarrow Y$  una mappa fra questi due sottoinsiemi, si dice che  $f$  è *liscia*, o  $C^\infty$ , se  $\forall x \in X$ , si trova un intorno aperto  $W \subseteq \mathbb{R}^n : x \in W$  e una funzione  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^\infty$  tale che  $F|_{W \cap X} = f|_{W \cap X}$ .

**Definizione 4.2 (Diffeomorfismo).** Una mappa  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$  è detta *diffeomorfismo* se è un omeomorfismo e  $f, f^{-1}$  sono entrambe lisce. In questo caso, si scriverà che  $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ , oppure  $X \cong Y$  se  $f$  non è specificata.

Si può verificare che:

- (a). se  $X = U \subseteq \mathbb{R}^n$  è un aperto, allora  $f : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$  è  $C^\infty \iff f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  lo è nel senso usuale;
- (b). la composizione di mappe  $C^\infty$  è  $C^\infty$ ;
- (c). se  $f : X \rightarrow Y$  è  $C^\infty$ , allora lo è anche  $f : X \rightarrow f(X)$  e,  $\forall X' \subseteq X$ ,  $f|_{X'} : X' \rightarrow Y$  è  $C^\infty$ .

**Definizione 4.3 (Varietà differenziabile).** Sia dato un sottoinsieme  $M \subseteq \mathbb{R}^k$ ; allora questo è una *varietà differenziabile* (o  $C^\infty$ ) di *dimensione*  $m$  se  $\forall x \in M$ , si trova un intorno aperto  $W \subseteq \mathbb{R}^k$  di  $x$  e un diffeomorfismo  $f : W \cap M \xrightarrow{\cong} U \subseteq \mathbb{R}^m$ , con  $U$  aperto.

Nella definizione sopra, si dice che  $f$  è una *carta locale* su  $M$ , mentre la sua inversa  $f^{-1} : U \rightarrow W \cap M$  è detta *parametrizzazione locale*. Nel caso in cui  $m = 0$ , per convenzione, si richiede che  $W \cap M = \{x\}$ , invece di avere  $W \cap M \cong U$ .

**Esempio 4.1.** Di seguito, alcuni esempi di varietà differenziabili.

- (a). Un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  è una varietà di dimensione  $k$ .
- (b). Una superficie  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  è una varietà di dimensione 2. Infatti, dato  $p \in \Sigma$ , si può trovare un intorno di  $p$  in  $\Sigma$  che è grafico di funzione rispetto ad una proiezione  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Quindi, si trova un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  e una mappa liscia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tali per cui

$$\begin{array}{ccc} \underline{x} : & U & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto (u, v, f(u, v)) \end{array}$$

è una parametrizzazione regolare attorno a  $p$ . Posto, quindi,  $W = \pi^{-1}(U)$ , si ha  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto e

$$\pi|_{W \cap \Sigma} : W \cap \Sigma = \underline{x}(U) \longrightarrow U$$

è  $C^\infty$ , con inversa  $\underline{x}$ , anch'essa  $C^\infty$ .

## §4.1 Spazio tangente e differenziale

Ora si vuole definire lo spazio tangente di una varietà in ogni suo punto. Si inizia col costruire tale definizione per gli aperti degli spazi euclidei.

**Definizione 4.4 (Spazio tangente).** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  un aperto e sia  $x \in U$ ; lo spazio tangente  $T_x U$  è  $\mathbb{R}^k$ .

Per poter estendere questa definizione, è necessario introdurre e caratterizzare il differenziale di una mappa.

**Definizione 4.5 (Differenziale).** Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$  due aperti e sia  $f : U \rightarrow V$  di classe  $C^\infty$ ; allora, dati  $x \in U$  e  $h \in \mathbb{R}^k$ , il *differenziale* di  $f$  è definito da  $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  come

$$df_x(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

Il differenziale è un'applicazione lineare, la cui matrice è data dallo jacobiano  $J(f)_x = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_x$  rispetto alla base canonica. Seguono alcune sue proprietà.

- (a).  $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$ .
- (b). dato  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  e data  $\text{Id}_U : U \rightarrow U$ , allora  $d(\text{Id}_U)_x = \text{Id}_{\mathbb{R}^k}$ ,  $\forall x \in U$ .
- (c). Dati  $U' \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^k$  due aperti, la mappa inclusione  $\iota : U' \hookrightarrow U$  soddisfa  $(d\iota)_x = \text{Id}_{\mathbb{R}^k}$ ,  $\forall x \in U'$ .
- (d). Data  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  un'applicazione lineare, allora  $dL_x = L$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^k$ .

**Proposizione 4.1.** Dati  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$  due aperti tali che  $\exists f : U \xrightarrow{\cong} V$ , allora  $k = \ell$  e  $df_x$  è un isomorfismo lineare  $\forall x \in U$ .

*Dimostrazione.* Sia  $g : V \rightarrow U$  l'inversa di  $f$ ; allora

$$\text{Id}_{\mathbb{R}^k} = d(\iota_U)_x = d(g \circ f)_x = (dg)_{f(x)} \circ df_x$$

$$\text{Id}_{\mathbb{R}^\ell} = d(\iota_V)_{f(x)} = d(f \circ g)_{f(x)} = (df)_x \circ dg_{f(x)}$$

per cui  $df_x : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  è iniettiva e suriettiva, quindi  $f$  è un isomorfismo e  $k = \ell$ .  $\square$

Ora si può estendere la definizione di spazio tangente a varietà generiche.

**Definizione 4.6 (Spazio tangente).** Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  una varietà differenziabile di dimensione  $\dim M = m$  e sia  $x \in M$ . Data  $g : U \xrightarrow{\cong} W \cap M \subseteq \mathbb{R}^k$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto e  $x = g(u) \in W \cap M$ , una parametrizzazione locale attorno ad  $x$ , allora si definisce

$$T_x M := dg_u(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^k$$

come lo *spazio tangente* di  $M$  in  $x$ .

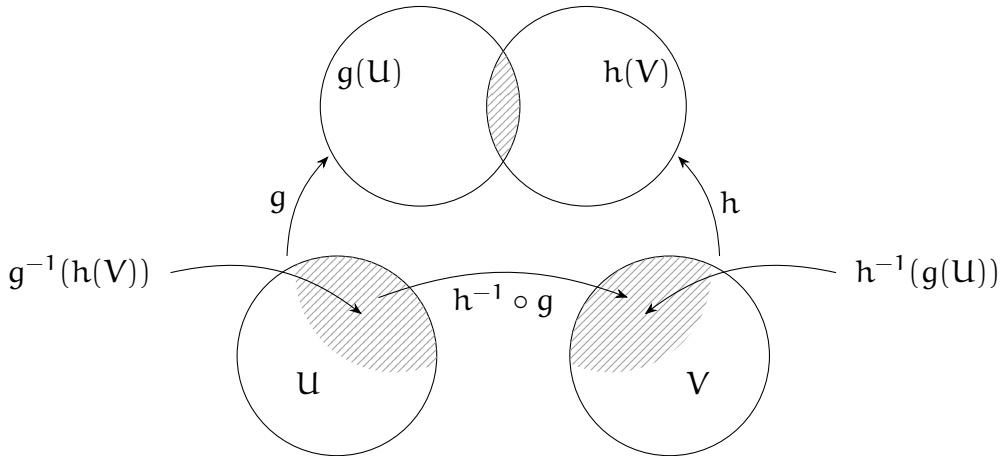
Ora si verifica la bontà della definizione.

*Dimostrazione.* Siano

$$g : U \xrightarrow{\cong} g(U) \subseteq M$$

$$h : V \xrightarrow{\cong} h(V) \subseteq M$$

due parametrizzazioni locali attorno a  $x \in M$ .



Visto che  $g(U)$  e  $h(V)$  sono aperti, l'intersezione  $g(U) \cap h(V)$  è, a sua volta, un aperto. La mappa  $h^{-1} \circ g$  è un diffeomorfismo perché composizione di diffeomorfismi, quindi

$$dg_u = d(h \circ (h^{-1} \circ g))_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u$$

Allora, essendo che  $d(h^{-1} \circ g)_u$  è un isomorfismo lineare, si ha  $\text{Im}(dg_u) = \text{Im}(dh_v)$ , perciò il piano tangente è univocamente determinato.  $\square$

**Proposizione 4.2.** Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^k$  una varietà di dimensione  $m$ ; allora  $\forall x \in M$ ,  $\dim T_x M = m$ .

*Dimostrazione.* Visto che  $\dim T_x M = \dim dg_u(\mathbb{R}^m)$ , allora  $\dim T_x M \leq m$  perché il differenziale è un isomorfismo. Per  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto, data la parametrizzazione locale

$$g : U \xrightarrow{\cong} W \cap M$$

e  $g(u) = x$ , visto che  $g^{-1}$  è  $C^\infty$ , allora  $\exists x \in W' \subseteq W$  aperto, con  $F : W' \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^\infty$  e  $F|_{W' \cap M} = g^{-1}|_{W' \cap M}$ , quindi tale che

$$(d\iota)_u = \text{Id}_{\mathbb{R}^m} = dF_x \circ dg_u$$

$$\begin{array}{ccc} & & W' \\ & \nearrow g & \downarrow F \\ u \in U \cap g^{-1}(W') & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Allora  $dg_u$  è iniettiva e, allora,  $\dim T_x M = m$ . □

**Definizione 4.7 (Differenziale per varietà).** Si considera  $f : M \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow N \subseteq \mathbb{R}^\ell$  liscia, con  $x \mapsto y = f(x)$ ; per definizione, quindi,  $\exists W \subseteq \mathbb{R}^k$  intorno aperto di  $x$  e  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  tale che  $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$ . Allora si definisce il differenziale di  $f$  come

$$df_x := dF_x|_{T_x M} : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$$

Ora si dimostra che il differenziale  $df_x$  è ben definito e  $df_x(T_x M) \subseteq T_{f(x)} N$ .

*Dimostrazione.* Si fa vedere che  $df_x$  non dipende da  $F$ , ma solo da  $f$ . Sia, per esempio,  $\dim M = m$  e siano

$$\begin{array}{ccc} g : U & \longrightarrow & M \\ u & \longmapsto & g(u) = x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} h : V & \longrightarrow & N \\ v & \longmapsto & h(v) = y \end{array}$$

due parametrizzazioni locali attorno a  $x$  e  $y$  rispettivamente. A meno di cambiare  $U$ , si può supporre che  $g(U) \subseteq W$ , quindi si può costruire il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^\ell \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \end{array}$$



Pertanto, si ha:

$$\begin{aligned} dF_x \left( \overbrace{dg_u(\mathbb{R}^m)}^{T_x M} \right) &= \overbrace{dh_v(d(h^{-1} \circ f \circ g)_u(\mathbb{R}^m))}^{\subseteq \text{Im}(dh_v) = T_y N} \\ \Rightarrow dF_x|_{T_x M} &= dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1} \end{aligned}$$

dove l'ultima espressione non dipende né da  $F$ , né da  $W$ .  $\square$

**Proposizione 4.3 (Proprietà del differenziale).** Il differenziale di mappe tra varietà soddisfa le seguenti proprietà:

- (a).  $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$ ;
- (b). la mappa identità  $\text{Id}_M : M \rightarrow M : x \mapsto x$  soddisfa  $d(\text{Id}_M)_x = \text{Id}_{T_x M}$ ,  $\forall x \in M$ ;
- (c). l'iniezione  $M' \xhookrightarrow{\iota} M$  è la restrizione di  $\text{Id}_M$  a  $M'$ , che è, a sua volta, la restrizione di  $\text{Id}_{\mathbb{R}^k}$ , quindi  $d\iota_x : T_x M' \rightarrow T_x M$  è iniettiva e definisce un'immersione lineare di  $T_x M'$  in  $T_x M$ , dove, perciò, il primo risulta un sottospazio del secondo.

Similmente a quanto visto nell'ultimo punto della proposizione precedente, si nota che se  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo tra varietà, allora

$$df_x : T_x M \xrightarrow{\cong} T_{f(x)} N$$

è un isomorfismo lineare  $\forall x \in M$ .

## §4.2 Punti critici e valori regolari

**Definizione 4.8 (Punto critico).** Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa  $C^\infty$  tra varietà, con  $\dim M = m$  e  $\dim N = n$ ; allora  $x \in M$  è un *punto critico* di  $f$  se  $\text{rg } df_x < n$ .

Se un punto non è critico, allora si dice *regolare*. I rispettivi  $y \in N$  per cui la controimmagine di  $f$  è un punto critico sono detti *valori critici*, altrimenti sono *valori regolari*. In particolare, se  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , allora  $y$  è un valore regolare.

**Proposizione 4.4.** Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia, con  $\dim M = \dim N$ ; allora valgono i due seguenti punti.

- (a). Se  $x \in M$  è un punto regolare di  $f$ , allora la restrizione di  $f$  è un diffeomorfismo tra un intorno di  $x \in M$  e un intorno di  $f(x)$  in  $N$ .

- (b). Se  $M$  è compatta e se  $y \in N$  è un valore regolare di  $f$ , allora  $f^{-1}(y)$  è un insieme finito.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nei due punti.

- (a). Si considerano le parametrizzazioni locali

$$g : U \longrightarrow g(U) \subseteq M \quad h : V \longrightarrow h(V) \subseteq N$$

rispettivamente attorno a  $x$  e a  $y$ . A meno di restringere  $U$ , si può supporre che  $f(g(U)) \subseteq h(V)$ , quindi vale il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} x \in g(U) & \xrightarrow{f} & h(V) \ni y = f(x) \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ u \in U & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & V \ni v \\ \downarrow \text{ } & & \downarrow \text{ } \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

da cui  $df_x \circ dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u$ , con  $df_x, dg_u, dh_v$  tutti isomorfismi. Allora si può usare il teorema della funzione inversa per dire che  $\exists U'$  tale che

$$h^{-1} \circ f \circ g|_{U'} : U' \xrightarrow{\cong} V'$$

cioè si trova un intervallo aperto  $U' \subseteq U$  in cui  $h^{-1} \circ f \circ g$  è un diffeomorfismo. Ma quindi

$$f|_{g(U')} = h|_{V'} \circ (h^{-1} \circ f \circ g)|_{V'} \circ g^{-1}|_{g(U')}$$

è un diffeomorfismo perché composizione di diffeomorfismi.

- (b). Ora si assume  $M$  compatta. Intanto, si ha che  $f^{-1}(y) \subseteq M$  è chiuso in un compatto, quindi è, a sua volta, compatto. Inoltre è discreto perché se  $x \in f^{-1}(y)$ , per il punto precedente,  $\exists U$  intorno di  $x$  tale che

$$f|_U : U \xrightarrow{\cong} f(U) \ni y$$

per cui  $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$ , perciò  $|f^{-1}(y)| < +\infty$ .

□

**Lemma 4.0.1 (Lemma della pila di dischi).** Siano  $M, N$  due varietà differenziabili, con  $\dim M = \dim N$  e  $M$  compatta. Data  $f : M \rightarrow N$  liscia e  $y \in N$  valore regolare di  $f$ , allora esiste un intorno  $V \subseteq N$  di  $y$  tale che  $|f^{-1}(y')| = |f^{-1}(y)|$ ,  $\forall y' \in V$ .

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente, si può affermare che  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  e anche che per ciascun  $x_i$ , si trova un  $U_i$  suo intorno tale che

$$f|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\cong} f(U_i) := V_i, \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Allora si prende

$$V := V_1 \cap \dots \cap V_k \setminus f\left(M \setminus \bigcup_i U_i\right)$$

dove  $f(M \setminus \bigcup_i U_i)$  è immagine di un compatto, perché  $M \setminus \bigcup_i U_i$  è chiuso in  $M$ , quindi è chiuso e, allora,  $V$  è aperto. Questo  $V$  è l'insieme cercato perché assicura che, dato  $y' \in V$ , ci sia esattamente un  $x'_i$  in ogni  $U_i$  che viene mappato in  $y'$  perché ogni  $U_i$  è diffeomorfo al relativo  $V_i$ , pertanto  $y' \in V \Rightarrow y' \in V_i, \forall i$ ; inoltre, sottraendo  $f(M \setminus \bigcup_i U_i)$ , si assicura che di rimuovere tutti gli elementi che abbiano preimmagine all'infuori degli  $U_i$ . Così facendo, ogni elemento di  $V$  ha una preimmagine di cardinalità esattamente  $k$ .  $\square$

### §4.2.1 Teoremi di Sard e di Brown

Questi due permettono di concludere l'esistenza di valori regolari. Per poterli introdurre, si deve dare qualche basilica nozione di teoria della misura.

**Definizione 4.9 (Rettangoli di  $\mathbb{R}^n$ ).** Un rettangolo  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  è un sottoinsieme della forma

$$B = I_1 \times \dots \times I_n$$

dove  $I_k \subseteq \mathbb{R}, \forall k = 1, \dots, n$ . Inoltre, il suo volume è dato da

$$\text{vol}(B) = \prod_{k=1}^n |I_k|$$

**Definizione 4.10 (Insieme di misura nulla).** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un sottoinsieme; si dice che  $A$  ha *misura nulla* se  $\forall \varepsilon > 0$ , esiste una famiglia numerabile di rettangoli  $\{B_i\}_i$ ,

con  $B_i \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\forall i$ , tale che

$$A \subset \bigcup_i B_i \quad \text{e} \quad \sum_i \text{vol}(B_i) < \varepsilon$$

**Proposizione 4.5.** Siano  $A' \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ ; se  $m(A) = 0$ , allora  $m(A') = 0$ .

**Proposizione 4.6.** Se  $\{A_k\}_{k \geq 1}$  è una famiglia numerabile di insiemi a misura nulla, allora

$$m\left(\bigcup_k A_k\right) = 0$$

*Dimostrazione.* Siano  $\{B_i^{(k)}\}_i$  delle famiglie numerabili di rettangoli al variare di  $k \geq 1$  con

$$A_k \subset \bigcup_i B_i^{(k)} \quad \text{e} \quad \sum_i \text{vol}(B_i^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Allora si ha:

$$\bigcup_{i,k} B_i^{(k)} \supseteq \bigcup_k A_k \quad \text{e} \quad \sum_{i,k} \text{vol}(B_i^{(k)}) < \varepsilon$$

da cui la tesi. □

Ora si hanno gli strumenti necessari per introdurre i risultati analitici di cui si ha bisogno. Questi, essendo prevalentemente di carattere analitico, non vedranno dimostrazione.

**Lemma 4.0.2.** Sia  $R \subseteq \mathbb{R}^n$  un rettangolo tale che la sua chiusura  $\bar{R}$  è contenuta nell'unione di una famiglia numerabile di rettangoli  $\{B_i\}_i$ . Allora

$$\sum_i \alpha_n z^n \text{vol}(B_i) \geq \text{vol}(R)$$

In particolare, se  $\text{vol}(R) > 0$ , allora  $\bar{R}$  ha misura non-nulla.

**Teorema 4.1 (Teorema di Sard).** Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  un aperto e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una mappa  $C^\infty$ ; allora l'insieme dei valori critici di  $F$  ha misura nulla.

L'obiettivo, ora, è di estendere questo risultato al caso più generale di varietà differenziabili. Per fare ciò, è prima necessario stabilire quando un sottoinsieme di una varietà ha misura nulla, per cui si ha la seguente definizione.

**Definizione 4.11.** Sia  $M$  una  $m$ -varietà; si dice che  $A \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^k$  ha *misura nulla* se, per ogni carta locale  $(f, W \cap M)$  su  $M$ , l'insieme  $f(A \cap W) \subseteq \mathbb{R}^m$  ha misura nulla.

**Teorema 4.2.** Sia  $F : M \rightarrow N$  un'applicazione  $C^\infty$  tra varietà, con  $\dim M = m$  e  $\dim N = n$ ; allora l'insieme dei valori critici di  $F$  ha misura nulla.

*Dimostrazione.* Gli spazi euclidei sono a base numerabile, pertanto esiste una famiglia numerabile di carte locali  $\{(f_i, W_i \cap M)\}_i$  tale che

$$M \subseteq \bigcup_i W_i$$

Si fa vedere che, data  $(g, Z \cap N)$  è una carta su  $N$ , l'insieme  $g(F(C) \cap Z)$  ha misura nulla, con  $C = \text{Crit}(F)$  insieme dei punti critici di  $F$ , quindi  $F(C)$  è l'insieme dei valori critici di  $F$ . Si considera il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} x \in W_i \cap F^{-1}(Z) & \xrightarrow{F} & Z \cap N \\ f_i \downarrow & & \downarrow g \\ u \in f_i(W_i \cap F^{-1}(Z)) & \xrightarrow{g \circ F \circ f_i^{-1}} & g(Z \cap N) \end{array}$$

per cui sono definite le funzioni di transizione

$$h_i := g \circ F \circ f_i^{-1} : f_i(W_i \cap F^{-1}(Z)) \rightarrow g(Z \cap N)$$

Visto che  $g$  e  $f_i$  sono diffeomorfismi, allora un punto  $u$  è critico per  $h_i$  se e solo se  $f_i^{-1}(u) \in C = \text{Crit}(F)$  perché

$$dF_x = dg_v^{-1} \circ d(g \circ F \circ f_i^{-1})_u \circ (df_i)_x$$

Ma l'insieme dei valori critici di  $h_i$  coincide con  $g(F(C \cap W_i) \cap Z)$  per il diagramma e ha misura nulla per il teorema di Sard; inoltre

$$\bigcup_i g(F(C \cap W_i) \cap Z) = g(F(C) \cap Z)$$

e, essendo l'unione numerabile di insiemi a misura nulla ancora a misura nulla, si ha  $m(g(F(C) \cap Z)) = 0$ , quindi  $F(C)$  ha misura nulla.  $\square$

**Corollario 4.2.1 (Teorema di Brown).** Sia  $F : M \rightarrow N$  una mappa  $C^\infty$  tra varietà di dimensioni  $m = \dim M$  e  $n = \dim N$ . L'insieme dei valori regolari di  $F$  è denso in  $N$ .

*Dimostrazione.* Si fa vedere che  $N \setminus F(C)$  è denso in  $N$ , cioè dato  $x \in F(C)$ , si mostra

che per ogni carta locale  $(g, Z \cap N)$  intorno ad  $X$ , si trovano punti di  $N \setminus F(X)$  in  $Z \cap N$ . Per il teorema di Sard, l'insieme  $g(Z \cap F(C))$ ; se per assurdo  $Z \cap N$  non contenesse punti di  $N \setminus F(C)$ , allora  $Z \cap N = Z \cap F(C)$ , ma, allora, l'aperto  $g(Z \cap N) = g(Z \cap F(C))$  conterrebbe la chiusura di un rettangolo di volume positivo, quindi per il lemma 4.0.2, non avrebbe misura nulla. Ne segue che, in  $Z \cap N$ , devono esserci punti regolari.  $\square$

### §4.2.2 Altri risultati sui valori regolari

**Proposizione 4.7 (Prodotto diretto di varietà).** Se  $N, N'$  sono due varietà differenziabili, allora anche  $N \times N'$  è una varietà, con  $\dim N \times N' = \dim N + \dim N'$ . Inoltre

$$T_{(y, y')}(N \times N') = d\iota_{y'}(T_y N) \oplus d\iota_y(T_{y'} N')$$

dove

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & N \times N' \\ \iota_{y'} : n & \longmapsto & (n, y') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N' & \longrightarrow & N \times N' \\ \iota_y : n' & \longmapsto & (y, n') \end{array}$$

*Dimostrazione.* Da dimostrare...  $\square$

**Teorema 4.3.** Siano  $M, N$  due varietà di dimensioni  $m$  e  $n$  rispettivamente, con  $m \geq n$ . Sia, poi,  $f : M \rightarrow N$  una mappa liscia, con  $y \in N$  valore regolare; allora  $f^{-1}(y) \subset M$  è una varietà di dimensione  $m - n$ .

*Dimostrazione.* L'idea è di *inspessire*  $N$  in modo da poter applicare il punto (a) della proposizione 4.4.

Sia, allora,  $x \in f^{-1}(y)$ , per cui  $df_x : T_x M \rightarrow T_y N$  è suriettiva, visto che  $y$  è regolare. Dato  $K = \text{Ker } df_x \subseteq T_x M$ , si ha  $\dim K = m - n$ ; si vorrebbe trovare una mappa  $F : M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$ . A tal proposito, si considera l'applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ , con  $k : \mathbb{R}^k \supseteq M$  (quindi  $K \subseteq \mathbb{R}^k$ ) e tale che

$$L|_K : K \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{m-n}$$

è un isomorfismo. Allora si definisce

$$F : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \times \mathbb{R}^{m-n} \\ x & \longmapsto & (f(x), L(x)) \end{array}$$

Ora si dimostra (da dimostrare...) che  $F$  è  $C^\infty$  e soddisfa  $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$ .  $\square$