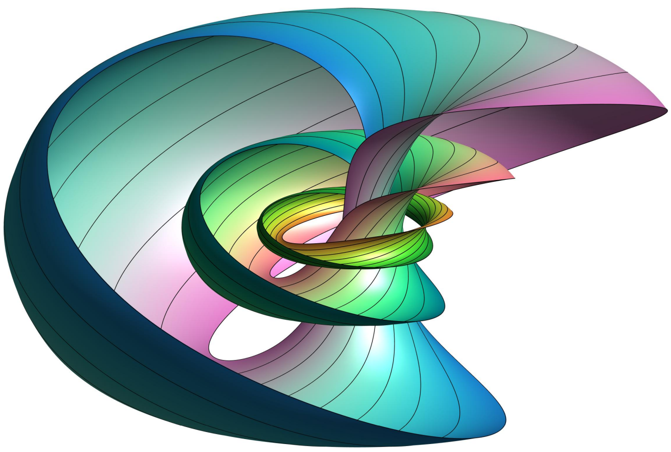
APPUNTI DI TOPOLOGIA

Manuel Deodato



Indice

1 Spazi metrici, topologici e applicazioni continue

1.1 Spazi metrici

Definizione 1.1 (Spazio metrico)

Sia X un insieme non vuoto; allora X si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, x') \geq 0$ e $d(x, x') = 0 \iff x = x'$;
- $d(x, x') = d(x', x)$;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Dato uno spazio metrico (X, d_X) e un insieme $Y \subset X$, si può definire un sottospazio di (X, d_X) restringendo la distanza al solo Y:

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'), \ \forall y, y' \in Y$$

Quindi (Y, d_Y) è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di (X, d_X), il quale è detto *spazio ambiente* di Y.

1.1.1 Insiemi aperti

In uno spazio metrico (X, d), si può definire un *disco aperto* di raggio r e centro x come

$$B_r(x) := \left\{ x' \in X \mid d(x, x') < r \right\}$$

Definizione 1.2 (Insieme aperto)

Sia (X, d) uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

1.1.2 Continuità in spazi metrici

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon, \ \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \ \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$

È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

Definizione 1.3 (Continuità in spazi metrici)

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, con (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici. Si dice che f è continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon,\ \exists \delta(\epsilon)$ tale che:

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon,\ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \tag{1.1.1}$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

Teorema 1.1

Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\iff$ $\forall A \subset Y$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni.

- $(\Rightarrow)$ Si assume che f sia continua. Si prende $f(x) \in A$, con $A \subset Y$ aperto, per qualche $x \in f^{-1}(A)$. Essendo A aperto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset A$; allo stesso tempo, per continuità di f, dato ε scelto prima, deve esistere $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$$

  quindi $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Valendo $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- $(\Leftarrow)$ Si assume che $\forall A \subset Y$ aperto, la funzione f sia tale che l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto. Per $f(x) \in Y$, esiste $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subset Y$; essendo questo aperto, deve essere aperto anche $f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$. Dunque, dato $x \in f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, $\exists \delta(\varepsilon) : B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}\big[B_\varepsilon\big(f(x)\big)\big]$, quindi vuol dire che $f\big(B_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x)\big)$, ossia:

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon,\ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

  Valendo $\forall x \in X$, allora f è continua.

$\square$

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

1.1.3 Distanze equivalenti

Definizione 1.4 (Distanze topologicamente equivalenti)

Due distanze $d, \overline{d}$ su X si dicono *topologicamente equivalenti* se hanno gli stessi insiemi aperti, cioè se generano la stessa topologia.

Se $d(x, y) = r\overline{d}(x, y)$, per $r > 0$, si hanno due distanze equivalenti perché, evidentemente, $\forall \varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(x) = \overline{B}_{r\varepsilon}(x)$$

cioè le due distanze $d, \overline{d}$ identificano le stesse palle aperte, quindi gli stessi insiemi aperti. In $\mathbb{R}^n$, le distanze

$$\begin{aligned} d_2(x, x') &= \|x - x'\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2} \\ d_1(x, x') &= \sum_{i=1}^{n} |x - x_i| \\ d_\infty(x, x') &= \max_i \left\{ |x_i - x_i'| \right\} \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

sono equivalenti e si ha

$$d_\infty(x, x') \leq d_2(x, x') \leq d_1(x, x') \leq n d_\infty(x, x') \tag{1.1.3}$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è giustificata da:

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2} \geq \sqrt{\max_i \left\{ (x_i - x_i')^2 \right\}} = \max_i \left\{ |x - x_i'| \right\} = d_\infty(x, x')$$

La seconda, invece, è vera perché:

$$\left[d_2(x, x') \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i')^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| \right]^2 = \left[d_1(x, x') \right]^2$$

L'ultima disuguaglianza è immediata. □

Da questo segue direttamente che[1]

$$B_\varepsilon^{(\infty)}(x) \supset B_\varepsilon^{(2)}(x) \supset B_\varepsilon^{(1)}(x) \supset B_{\varepsilon/n}^{(\infty)}(x) \tag{1.1.4}$$

[1] Apparentemente, la distanza più grande dovrebbe includere più elementi, quindi i simboli $\supset$ dovrebbero essere dei $\subset$, invece, avendo fissato il raggio ε, quella che permette di creare la palla più grande è la distanza più piccola perché *avvicina* i punti tra di loro, quindi più elementi rientreranno in tale raggio.

Questo mostra che se A è aperto rispetto ad una distanza, lo è anche rispetto alle altre.

1.1.4 Alcuni risultati sulla continuità

Proposizione 1.1

Siano (X, d_X), (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \to Y$ un'applicazione. Dato $x \in X$, se esiste costante $M > 0$ tale che

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leq M d_X(x', x),\ \forall x' \in X$$

allora f è continua in x.

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che, per ipotesi, definendo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$, si ha $f\big(D_{\delta(\varepsilon)}(x)\big) \subset D_\varepsilon\big(f(x)\big)$. □

Proposizione 1.2

Ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alle distanze euclidee.

Dimostrazione. Si usa Prop. 1.1 applicato alle distanze $d^{(1)}$, che sono topologicamente equivalenti alle distanze euclidee $d^{(2)}$. Inoltre, visto che ogni applicazione costante è continua, si esclude che L sia nulla. Si denota con $(a_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ la matrice che rappresenta L; se $x, x' \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} d^{(1)}\big(L(x), L(x')\big) &= \left|\sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j - x'_j)\right| + \ldots + \left|\sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j - x'_j)\right| \\ &\leq \left(\max_j |a_{1j}| + \ldots + \max_j |a_{mj}|\right) \sum_{j=1}^n |x_j - x'_j| \leq Mm d^{(1)}(x, x') \end{aligned}$$

con $M = \max|a_{ij}|$, che è maggiore di 0 perché L è non-nulla. Da Prop. 1.1, segue la tesi. □

La precedente proposizione può essere applicata al caso particolare di applicazioni lineari: le **proiezioni**. Una proiezione è generalmente definita come:

$$p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p_i(x) = x_i \tag{1.1.5}$$

È possibile definire, più in generale, per $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m < n$, la proiezione

$$p_{i_1,\ldots,i_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ p_{i_1,\ldots,i_m}(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \tag{1.1.6}$$

che è lineare e, quindi, continua.

1.1.5 Isometrie e omeomorfismi

Definizione 1.5 (Isometria)
Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ è un'isometria se $\forall x, x' \in X$, si ha $d_X(x, x') = d_Y\big(f(x), f(x')\big)$.

Da Prop 1.1, segue che un'isometria è un'applicazione continua. Se fra due spazi metrici X, Y esiste un'isometria $f : X \to Y$, gli spazi si dicono **isometrici**.

Sono isometrie $\mathrm{Id} : X \to X$, cioè l'applicazione identità, l'inversa di un'isometria e la composizione di isometrie. Questo porta al seguente.

Proposizione 1.3
Un'isometria fra due spazi metrici è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.6 (Omeomorfismo)
Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ è un *omeomorfismo* se la sua inversa e f stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo $e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, questa ha un'inversa continua $\log(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda $(-\infty, 0]$ in $(0, 1]$. Anche gli omemorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

1.2 Spazi topologici

Definizione 1.7 (Topologia e spazio topologico)
Sia X un insieme non-vuoto. Una *topologia* su X è una famiglia non-vuota τ di sottoinsiemi di X, chiamati *insiemi aperti della topologia*. Questi soddisfano le seguenti condizioni:

- $\varnothing$, X sono aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un aperto.

Allora si definisce *spazio topologico* la coppia (X, τ), dove X è detto *supporto* dello spazio topologico e i suoi elementi sono i *punti* dello spazio.

Dato (X, d) spazio metrico, la famiglia degli insiemi aperti rispetto a d è una topologia su X indotta da d stessa. In $\mathbb{R}^n$, si definisce **topologia euclidea** (o **naturale**) $\mathcal{E}$ come quella indotta dalla distanza euclidea d_2. Su $\mathbb{C}$, la topologia euclidea $\mathcal{E}$ è quella indotta da $d(z, w) = |z - w|$; questa conclusione si può ottenere identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ da $z = x + iy \mapsto (x, y)$ e considerando la distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$. In modo del tutto analogo, si identifica $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ e la distanza euclidea di $\mathbb{R}^{2n}$ definisce, su $\mathbb{C}^n$, una distanza e, quindi, una topologia che è la topologia naturale di $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{E}$. Su un qualunque insieme non-vuoto X, si possono sempre definire due topologie:

- la **topologia banale** $\mathcal{B} = \{X, \varnothing\}$, con $(X, \mathcal{B})$ **spazio topologico banale**;
- la **topologia discreta** ottenuta prendendo $\tau = \mathcal{P}(X)$, con $(X, \mathcal{P}(X))$ **spazio topologico discreto**.

Definizione 1.8 (Spazio metrizzabile)
Uno spazio topologico (X, τ) è detto *metrizzabile* se si può definire una distanza su X che induce la topologia τ.

Sia dato Y sottoinsieme non-vuoto di uno spazio metrizzabile (X, d_X); si sa già che d_Y, ottenuta come restrizione di d_X a Y, è una distanza su Y. In questo caso, la topologia indotta da d_Y su Y si dice *topologia indotta da X su Y*. Allora, se $y \in Y$: $B_\varepsilon^{(Y)}(y) = B_\varepsilon^{(X)}(y) \cap Y$; questo significa che gli aperti di Y sono della forma $A \cap Y$, con A aperto di X.