Meccanica Quantistica, Corso B, Appello del 4 Settembre 2023

Si consideri una particella di massa m che si muove lungo una circonferenza di raggio r fissato.

Consideriamo inizialmente il caso in cui la particella è soggetta alla solo forza vincolare che la costringe a muoversi lungo una cinconferenza, e quindi il suo moto può essere descritto dall'Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\theta^2}{2m}, \qquad \hat{p}_\theta \to -i\hbar\frac{1}{r}\partial_\theta,$$

dove $\theta \in [0, 2\pi)$ è una variabile angolare e $\hat{p}_\theta$ è l'operatore impulso diretto parallelamente alla circonferenza.

(1) Scrivere l'equazione di Schrödinger per le funzioni d'onda del sistema (in funzione dell'angolo θ), e determinare la scala E_r di energia del problema. Dire quali osservabili sono conservate, considerando in particolare l'operatore riflessione $\hat{P}_x : (x, y) \to (-x, y)$ nel piano (l'asse x corrisponde a $\theta = 0$), e la componente del momento angolare ortogonale alla circonferenza $\hat{L}_z = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_z$. Scrivere questi operatori in termini della variabile θ.

(2) Determinare lo spettro dell'Hamiltoniana e le funzioni d'onda degli autostati. Discutere la degenerazione dello spettro.

(3) Consideriamo una perturbazione locale descritta dal termine di Hamiltoniana

$$\hat{H}_I = b\frac{\hbar^2}{mr^2}\pi\delta(\theta),$$

dove b è una costante sufficientemente piccola e $\delta(\theta)$ è la funzione delta (descrive in qualche modo l'interazione con un difetto nella circonferenza). Determinare il suo effetto al primo ordine sullo stato fondamentale e i primi stati eccitati. Dire se la perturbazione risolve la degenerazione dell'Hamiltoniano nonperturbato.

(4) Assumiamo adesso che le particelle siano due, con identica massa m, libere ma soggette alla forza vincolare come sopra (senza il difetto) che le costringe a muoversi lungo la circonferenza, e abbiano entrambe spin 1/2. Dire se si conservano gli operatori di spin $\hat{\boldsymbol{s}}_1$, $\hat{\boldsymbol{s}}_2$ e $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2$, e l'operatore $\hat{P}_{12}$ che scambia le particelle (cioè $\hat{\boldsymbol{x}}_1 \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_2$ e $\hat{\boldsymbol{s}}_1 \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{s}}_2$). Descrivere lo spettro, e in particolare lo stato fondamentale, i primi stati eccitati, e la loro degenerazione, nell'ipotesi che le particelle siano distinguibili. Scrivere gli stati di energia minima come autostati dell'operatore $\hat{P}_{12}$.

(5) Descrivere lo spettro nell'ipotesi che le particelle siano identiche, in particolare scrivere lo stato fondamentale.

(6) Assumiamo adesso che le due particelle interagiscono con un termine di interazione spin-spin, cioè

$$\hat{H}_{ss} = \alpha\, \hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2, \qquad \alpha < 0,$$

assumendo $|\alpha|$ piccolo, più precisamente $|\alpha|\hbar^2 \ll E_r$ dove E_r è la scala di energia del problema non perturbato. Descrivere esattamente (senza utilizzare la teoria delle perturbazioni) lo spettro in presenza di questa interazione, e in particolare lo stato fondamentale e i primi stati eccitati, assumendo le particelle distinguibili. Dire se lo stato fondamentale è diverso nel caso di particelle identiche.

(7) Nel caso di particelle distinguibili, calcolare la matrice di densità ridotta associata alle sole variabili di spin di entrambe, e quella associata allo spin della singola particella, sugli stati di minima energia con $\hat{S}^z$ fissato.

Ritorniamo adesso alla singola particella vincolata a muoversi lungo la circonferenza, assumiamo che abbia una carica q, e che ci sia un flusso di campo magnetico ϕ associato ad un campo magnetico costante $B\hat{z}$ ortogonale alla circonferenza che è confinato in una regione circolare di raggio R tale che $R \ll r$. Quindi $\phi = \pi R^2 B$ e il campo magnetico è nullo sulla circonferenza dove si muove la particella.

(8) Usando il fatto che il potenziale vettore associato al campo magnetico può essere scritto come $\boldsymbol{A} = \frac{\phi}{2\pi r}\hat{\theta}$ in coordinate cilindriche, scrivere l'equazione di Schrödinger in presenza del flusso ϕ. Dire se l'operatore time reversal T commuta con l'Hamiltoniana.

(9) Determinare lo spettro (autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana) in presenza del flusso magnetico (suggerimento provare una funzione del tipo $\phi_n \propto e^{i\beta\theta}$ simile al caso senza campo magnetico). Determinare in particolare lo stato fondamentale, e calcolare la corrente associata.

(10) Consideriamo adesso un flusso magnetico variabile nel tempo, più precisamente una variazione istantanea a $t = 0$, da $\phi = 0$ a $\phi > 0$ per $t > 0$. Assumendo che la particella sia nello stato k al tempo $t = 0$, verificare che la soluzione dell'equazione di Schrödinger per $t > 0$ sia

$$\psi_k(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i\left[k\theta - \frac{\hbar(k-\varphi)^2}{2mr^2}t\right], \quad \psi_k(\theta, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\theta}, \quad \varphi = \frac{q\phi}{2\pi\hbar c},$$

e stimare il lavoro medio fatto sul sistema attraverso la differenza del valore medio dell'energia tra $t > 0$ e $t = 0$.