

Compito 13 aprile 2023

Consideriamo il sistema unidimensionale costituito da una particella di spin $1/2$ intrappolata nel segmento $[-a, a]$ da una buca di potenziale infinita.

- (1) Calcolare lo spettro energetico del sistema, specificando la degenerazione dei livelli. Lo stato fondamentale è degenere? Scrivere una base di funzioni d'onda dello stato fondamentale.
- (2) Calcolare il valore medio di posizione, impulso e s_x (componente x dello spin) sullo stato con energia minima e autovalore $\hbar/2$ di s_z (componente z dello spin).
- (3) Verificare la relazione di indeterminazione tra posizione ed impulso per lo stato considerato nel punto precedente.

Supponiamo ora che sia presente un campo magnetico diretto lungo l'asse x , $\vec{B} = (B, 0, 0)$, che interagisce con la particella tramite un accoppiamento $\mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$.

- (4) Calcolare lo spettro esatto del sistema.
- (5) Verificare che lo stesso risultato si ottiene utilizzando teoria delle perturbazioni al primo ordine.

Supponiamo che a $t = 0$ si accenda istantaneamente il campo magnetico B (campo magnetico nullo per $t < 0$) e che al tempo $t = 0^-$ il sistema si trovasse nello stato fondamentale e con autovalore $\hbar/2$ di s_z .

- (6) Calcolare la forma dello stato del sistema al tempo t .
- (7) Calcolare il valore medio di s_z al tempo t .
- (8) Supponendo di effettuare una misura di posizione al tempo t , quale è la probabilità di trovare la particella sul segmento $[0, a]$?

Supponiamo infine che non sia presente campo magnetico e che nella buca di potenziale ci siano due particelle di spin $1/2$ che non interagiscono tra loro.

- (9) Assumendo le particelle non identiche, determinare lo spettro del sistema e discutere le degenerazioni. Scrivere le autofunzioni con energia minima.
- (10) Assumendo le particelle identiche, determinare lo spettro del sistema e discutere le degenerazioni. Scrivere l'autofunzione del fondamentale.

Integrali definiti che possono essere utili

$$\int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos(y) dy = -4\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) dy = \frac{1}{3}\pi(\pi^2 - 6)$$