

# NOTE DI MECCANICA QUANTISTICA

MANUEL DEODATO



## INDICE

<b>1</b>	<b>Struttura matematica della meccanica quantistica</b>	<b>7</b>
1.1	Introduzione	7
1.1.1	Notazione bra-ket	7
1.1.2	Operatori	8
1.1.3	Operatori autoaggiunti	9
1.1.4	Commutatori	10
1.2	Prodotto esterno	10
1.2.1	Proiettori	10
1.2.2	Completezza di una base e valore di aspettazione di un osservabile	10
1.2.3	Cambiamento di base	11
1.3	Applicazioni per la meccanica quantistica	11
1.3.1	Rappresentazione delle coordinate	11
1.3.2	Rappresentazione degli impulsi	12
1.3.3	Misura di un osservabile	12
1.3.4	Principi della meccanica quantistica	13
1.3.5	Spazio di Hilbert proiettivo, sistemi puri e misti	13
1.3.6	Proiettore per sistemi puri	14
1.3.7	Flusso di probabilità ed equazione di continuità	15
<b>2</b>	<b>Introduzione alla meccanica quantistica</b>	<b>16</b>
2.1	Evoluzione temporale	16
2.1.1	Equazione di Shrödinger per gli stati	16
2.1.2	Soluzione dell'equazione	16
2.1.3	Equazione di Shrödinger per la funzione d'onda	17
2.1.4	Equazione di Shrödinger per il proiettore	18
2.2	Evoluzione temporale per gli operatori	18
2.2.1	Il quadro di Shrödinger	18
2.2.2	Il quadro di Heisenberg	18
2.2.3	Evoluzione delle misure	19
2.3	Simmetrie e operatore impulso	19
2.3.1	Traslazioni	19
2.3.2	L'operatore impulso	20
2.3.3	Funzione d'onda degli impulsi	21
2.3.4	Simmetrie per stati che evolvono temporalmente	22
2.3.5	Commutatore di $\hat{p}$ e $\hat{X}$	22

2.4	Il principio di indeterminazione	23
2.4.1	Introduzione	23
2.4.2	Algebra degli operatori sottratti	24
2.4.3	Il principio di indeterminazione	24
2.5	Alcuni esempi di $\hat{H}$ per sistemi quantistici	25
2.5.1	Sistema di due corpi	25
2.5.2	Particella in campo esterno	26
2.6	L'oscillatore armonico	26
2.6.1	Operatori di creazione e distruzione	26
2.6.2	Funzione d'onda per l'oscillatore armonico	28
2.7	Operatore parità e sistemi unidimensionali	29
2.7.1	Operatore parità	29
2.7.2	Alcuni teoremi per sistemi unidimensionali	30
2.7.3	Moto di una particella sotto potenziale	31
2.7.4	Particella contro barriera di potenziale	32
2.8	Meccanica quantistica dei sistemi interagenti	33
2.8.1	Operatori per sistemi non-interagenti	33
2.8.2	La matrice densità	34
2.8.3	Caratterizzazione degli stati misti	34
2.8.4	Valore di aspettazione per miscele statistiche	35
2.8.5	Evoluzione temporale della matrice densità	35
2.9	L'operatore momento angolare	36
2.9.1	Rotazioni in 3D	36
2.9.2	Rotazione su funzione d'onda	36
2.9.3	Momento angolare	36
2.9.4	Momento angolare orbitale	37
2.9.5	Spettro del momento angolare	38
2.9.6	Introduzione allo spin	38
2.9.7	Spettro del momento angolare orbitale	39
2.10	Atomo di idrogeno	41
2.10.1	Particelle in campo centrale	41
2.10.2	Funzione d'onda per l'atomo di idrogeno	42
2.10.3	Lo stato fondamentale, medie e varianze di posizione e momento	43
2.10.4	Principio di indeterminazione	45
2.10.5	Oscillatore armonico 3D	45
2.11	Lo spin	46
2.11.1	Esempio – Sistema di spin 1/2 (parte 1)	46

2.11.2	Esempio – Sistema di spin $1/2$ (parte 2)	47
2.11.3	Gli angoli di Eulero e le matrici di Wigner	49
2.11.4	Regole di superselezione	50
2.11.5	Coefficienti di Clebsch-Gordan	51
2.11.6	Esempio – Coefficienti di Clebsch-Gordan per due spin $1/2$	53
2.11.7	Operatori tensoriali irriducibili	54
2.11.8	Teorema di Wigner-Eckart	55
2.12	Formulazione tramite path integral	56
2.12.1	Particella libera	58
2.12.2	Oscillatore armonico	58
<b>3</b>	<b>Teoria delle perturbazioni</b>	<b>60</b>
3.1	Introduzione	60
3.1.1	Primo ordine perturbativo	61
3.1.2	Ordini superiori	62
3.1.3	Normalizzazione	63
3.1.4	Esempio – Sistema a due livelli	64
3.1.5	Esempio – Oscillatore armonico	65
3.2	Teoria delle perturbazioni per spettri degeneri	66
3.2.1	Esempio – Sistema a due livelli degeneri	66
3.2.2	Soluzione operatoriale	67
3.2.3	Limite a spettro non-degeneri	68
3.2.4	Esempio – Sistema a due livelli	69
3.3	Atomo di idrogeno	70
3.3.1	Correzione relativistica	70
3.3.2	Dipendenza dallo spin – Introduzione	71
3.3.3	Dipendenza dallo spin – Coefficienti di Clebsch-Gordan	72
3.4	Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo	73
3.4.1	Schema risolutivo	74
3.4.2	Esempio di applicazione #1	75
3.4.3	Esempio di applicazione #2	76
3.4.4	Condizione di risonanza – Regola d'oro di Fermi	76
3.4.5	Rappresentazione dell'interazione	77
3.5	Dinamiche adiabatiche	79
3.6	Interazioni elettromagnetiche	81
3.6.1	L'operatore velocità	82
3.6.2	Invarianza di Gauge	82
3.6.3	Particella in campo magnetico	83
3.6.4	Atomo in campo magnetico – Effetto Zeeman	84

3.6.5	Atomo in campo elettromagnetico	85
3.6.6	Effetto Aharanov-Bohm	86
<b>4</b>	<b>Simmetrie</b>	<b>89</b>
4.1	Parità e time reversal	89
4.1.1	L'operatore parità	90
4.1.2	Operatore di inversione temporale	91
4.2	Particelle identiche	93
4.2.1	Condizione di identità	94
4.2.2	Disuguaglianza di Bell	96
<b>5</b>	<b>Scattering quantistico</b>	<b>99</b>
5.1	Introduzione	99
5.2	Approssimazione di Born	101
5.3	Validità dello sviluppo	102
5.4	Soluzione in zona di radiazione	103
5.5	Trasformata di Fourier e regola d'oro di Fermi	103
5.6	Soluzione alternativa al problema dello scattering	104
<b>6</b>	<b>Esercitazioni</b>	<b>107</b>
6.1	Complementi di teoria	107
6.1.1	Entropia di entanglement	107
6.1.2	Funzione di una matrice	107
6.1.3	Evoluzione temporale di stati impuri	108
6.1.4	Teoria generica sui sistemi composti	108
6.1.5	Prodotto tensore fra matrici	110
6.1.6	Regole di selezione	110
6.2	Sistemi a due livelli	113
6.2.1	Generalità sui sistemi a due livelli	113
6.2.2	Sistema di qubit	117
6.2.3	Sistema di due qubit interagenti	119
6.2.4	Dinamica di un sistema a due livelli	123
6.2.5	Dinamica di un sistema a due livelli tramite rappresentazione di Heisenberg	124
6.2.6	Risonanza di spin	125
6.2.7	Effetto Landau-Zener	127
6.3	Buca di potenziale $V_0$	130
6.3.1	Buca di potenziale con parità	132
6.3.2	Spettro energetico	133

6.3.3	Buca di potenziale infinita	134
6.4	Positronio (prova d'esame)	134
6.5	Teoria delle perturbazioni	139
6.5.1	Oscillatore armonico 2D	139
6.5.2	Effetto Stark	143
6.5.3	Perturbazione spin-posizione	147
6.5.4	Hamiltoniano di Heisenberg con campo magnetico	150
6.5.5	Atomo di idrogeno in campo elettrico	155
6.5.6	Oscillatore armonico 1D in campo elettrico	156
6.5.7	Buca di potenziale infinita con campo elettrico	157
6.5.8	Due particelle identiche di spin 1 in potenziale armonico	159
6.6	Problemi di scattering	161
6.6.1	Ionizzazione per atomo di idrogeno soggetto a potenziale	161
6.6.2	Sezione d'urto per potenziale esponenzialmente decrescente	163
6.6.3	Scattering inelastico di un elettrone su un atomo di idrogeno	164
<b>7</b>	<b>Formulario</b>	<b>169</b>
7.1	Integrali utili	169
7.2	Trucchi utili	169

# 1 STRUTTURA MATEMATICA DELLA MECCANICA QUANTISTICA

## 1.1 Introduzione

### DEFINIZIONE 1.1 — PRODOTTO SCALARE.

Per  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e  $\psi, \phi \in V$ , si definisce  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  come:

- $\langle \psi, \phi \rangle \in \mathbb{C}$ ;
- $\langle \psi, \phi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle^*$ ;
- $\langle \psi, c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \rangle = c_1 \langle \psi, \phi_1 \rangle + c_2 \langle \psi, \phi_2 \rangle$ , con  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ;
- $\langle \phi, \phi \rangle \geq 0$  e  $\langle \phi, \phi \rangle = 0 \iff \phi = 0$ .

Dato  $\phi \in V$ , questo induce la **norma**:

$$\|\phi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} \quad (1.1.1)$$

Si ricordano le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \textbf{Schwarz: } |\langle \phi, \psi \rangle|^2 &\leq \langle \phi, \phi \rangle \langle \psi, \psi \rangle \\ \textbf{Triangolare: } \|\phi + \psi\| &\leq \|\psi\| + \|\phi\| \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

### TEOREMA 1.1 — TEOREMA DI RIESZ.

Dato  $T$  operatore lineare limitato agente su spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , allora  $\exists f \in \mathcal{H} : \forall \phi \in \mathcal{H} \Rightarrow T(\phi) \equiv \langle f, \phi \rangle$ . Inoltre,  $\|T\| = \|f\|$ .

**OSSERVAZIONE 1.1 — FUNZIONALI E OPERATORI.** Un funzionale lineare è un operatore lineare  $F$  che agisce su uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  e restituisce un valore nel campo; formalmente:  $F : V \rightarrow \mathbb{K}$ . In generale, gli operatori non restituiscono valori in  $\mathbb{K}$ , mentre i funzionali sì.

Gli operatori rappresentano gli osservabili, mentre i funzionali sono usati per calcolare aspettazione e probabilità.

#### 1.1.1 Notazione bra-ket

Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $V'$  il suo duale; si definiscono:

- per  $\phi \in V \longrightarrow |\phi\rangle \in V$ ;
- per  $F \in V' \longrightarrow \langle F| \in V'$ .

Per Riesz, per qualche  $f \in V$ :

$$\langle F|\phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} F(\phi) = \langle f, \phi \rangle \Rightarrow F(\phi) \leftrightarrow \langle f|\phi \rangle \quad (1.1.3)$$

Visto che  $\langle \phi|\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$ , allora:

$$\langle c\phi| = c^* \langle \phi| \longleftrightarrow |c\phi \rangle = c |\phi \rangle \quad (1.1.4)$$

### 1.1.2 Operatori

Si considerano vettori, o **stati**, in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Un operatore che agisce su tale spazio è definito come  $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , quindi  $\hat{A}|\phi \rangle \in \mathcal{H}$ . Gli operatori di interesse saranno **lineari**.

Se  $\hat{A}$  è limitato (quindi continuo), dato  $|\psi \rangle \in \mathcal{H}$ , con  $\{\phi_i\}$  base ortonormale:

$$\begin{cases} \hat{A}|\psi \rangle = |\phi \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i |\phi_i \rangle \\ \hat{A}|\psi \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \hat{A}|\phi_i \rangle \end{cases}$$

si nota che

$$\langle \phi_j|\hat{A}\psi \rangle = \langle \phi_j| \left( \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \hat{A}|\phi_i \rangle \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i \underbrace{\langle \phi_j|\hat{A}|\phi_i \rangle}_{\equiv A_{ji}} \quad (1.1.5)$$

dove  $A_{ji}$  è un elemento di matrice; infatti

$$\langle \phi_j|\phi \rangle = \langle \phi_j|\hat{A}\psi \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \langle \phi_j|\phi_i \rangle = c_j$$

da cui, unendo le uguaglianze:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} A_{ji} b_i = c_j$$

Sia  $\hat{A}$  lineare; l'aggiunto è  $\hat{A}^\dagger$  e tale che  $\langle \phi, \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}^\dagger \phi, \psi \rangle$ . Allora, in notazione bra-ket:

$$\langle w| = \langle \phi| \hat{A}^\dagger \longleftrightarrow |w \rangle = \hat{A} |\phi \rangle \quad (1.1.6)$$

Inoltre



$$\begin{aligned}\langle \psi, \phi \rangle^* &= \langle \phi, \psi \rangle \implies \langle \psi | \phi \rangle^* = \langle \phi | \psi \rangle \\ \implies \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \phi \rangle^* &= \langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle\end{aligned}\quad (1.1.7)$$

Infine, se  $\{\phi_i\}$  base ortonormale:

$$A_{ij}^\dagger = \langle \phi_i | \hat{A}^\dagger | \phi_j \rangle = \langle \phi_j | \hat{A} | \phi_i \rangle^* = A_{ji}^* \implies A^\dagger = (A^\top)^* \quad (1.1.8)$$

Da questo, segue:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger; (cA)^\dagger = c^* A^\dagger \quad (1.1.9)$$

### 1.1.3 Operatori autoaggiunti

**DEFINIZIONE 1.2 — OPERATORE AUTOAGGIUNTO.**

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso e sia  $A$  un operatore lineare definito su un dominio  $\text{Dom}(A) \subseteq \mathcal{H}$ . L'operatore  $A$  si dice **autoaggiunto** se soddisfa le seguenti condizioni:

- (1). **Densità del dominio:** il dominio  $\text{Dom}(A)$  è denso nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , ovvero:

$$\overline{\text{Dom}(A)} = \mathcal{H}.$$

- (2). **Simmetria:** per ogni  $\psi, \phi \in \text{Dom}(A)$ ,

$$\langle \psi, A\phi \rangle = \langle A\psi, \phi \rangle.$$

- (3). **Uguaglianza con l'aggiunto:** il dominio di  $A$  coincide con quello del suo aggiunto  $A^\dagger$ , e i due operatori coincidono, ovvero:

$$\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A^\dagger) \quad \text{e} \quad A = A^\dagger.$$

Essendo  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ , si ha  $A_{ij} = (A_{ij}^*)^\top$ . Questi sono sempre diagonalizzabili, quindi hanno base ortonormale di autovettori. Visto che  $\langle \phi_1 | \hat{A} | \phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | \hat{A} | \phi_1 \rangle^*$ , allora  $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \in \mathbb{R}$  ed è il **valore di aspettazione**.

Sia  $|\psi\rangle$  autostato di  $\hat{A}$  autoaggiunto; allora  $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \implies \langle \psi | \hat{A} = \langle \psi | a^*$ . Si nota, però, che:

$$a \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \psi \rangle = a^* \langle \psi | \psi \rangle \iff a = a^* \implies a \in \mathbb{R} \quad (1.1.10)$$

Siano  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  tali che  $\hat{A}|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$  e  $\hat{A}|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$ , con  $a_1 \neq a_2$ ; allora:

$$\begin{aligned} a_2 \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \hat{A}^\dagger | \psi_2 \rangle = a_1^* \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = a_1 \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \\ \Rightarrow (a_2 - a_1) \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= 0 \iff |\psi_1\rangle \perp |\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

#### 1.1.4 Commutatori

**DEFINIZIONE 1.3 — COMMUTATORE.**

Siano  $\hat{A}, \hat{B}$  due operatori; il commutatore è:  $[\hat{A}, \hat{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ . Quindi se  $\hat{A}, \hat{B}$  commutano, si ha  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ .

**TEOREMA 1.2 — SPETTRO COMUNE.**

Se  $\hat{A}, \hat{B}$  sono autoaggiunti e commutano, allora condividono una base di autovettori.

## 1.2 Prodotto esterno

Applicazione  $\rho : V \times V \rightarrow \mathcal{O}$ , con  $\mathcal{O}$  spazio degli operatori lineari. Un esempio di prodotto esterno è l'operatore lineare

$$\hat{O} = |\psi\rangle \langle \phi| : V \rightarrow V \quad (1.2.1)$$

Si nota che:

$$\langle v | \hat{O} w \rangle = \langle v | (|\psi\rangle \langle \phi|) w \rangle = \langle v | \psi \rangle \langle \phi | w \rangle = \langle \hat{O}^\dagger v | w \rangle \iff O^\dagger = |\phi\rangle \langle \psi|$$

### 1.2.1 Proiettori

Operatore  $\hat{P}$  tale che  $\hat{P}^2 = \hat{P}$ . Un esempio è  $\hat{P} = |\psi\rangle \langle \psi|$ , con  $\|\psi\| = 1$  perché:

$$\hat{P}^2 = |\psi\rangle \langle \psi | \psi \rangle \langle \psi| = |\psi\rangle \langle \psi| \equiv \hat{P}$$

### 1.2.2 Completezza di una base e valore di aspettazione di un osservabile

Un insieme ortonormale  $\{|\phi_i\rangle\}$  si dice completo se:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = \text{Id} \quad (1.2.2)$$

Un insieme ortonormale completo è una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ , quindi permette di scomporre ogni stato in una combinazione lineare.

### 1.2.3 Cambiamento di base

Siano  $\{|\phi_i\rangle\}_i, \{|\psi_i\rangle\}_i$  basi ortonormali. Si esprime una in funzione dell'altra:

$$|\psi_i\rangle = \left( \sum_{j=1}^{+\infty} |\phi_j\rangle \langle \phi_j| \right) |\psi_i\rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle \phi_j | \psi_i \rangle |\phi_j\rangle \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} S_{ij}^* |\phi_j\rangle \quad (1.2.3)$$

Per  $\varphi$  generico stato:  $|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i |\phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i |\psi_i\rangle$ ; allora:

$$\begin{cases} b_i = \langle \psi_i | \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \langle \psi_i | \phi_j \rangle \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} S_{ij} a_j \\ a_i = \langle \phi_i | \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j \langle \phi_i | \psi_j \rangle \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} S_{ji}^* b_j \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Ora, essendo le due basi ortonormali:

$$\delta_{ij} = \left\langle \phi_i \left| \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) \phi_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle \phi_i | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \phi_j \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} S_{ki}^* S_{kj} \quad (1.2.5)$$

da cui  $S^\dagger S = \text{Id}$ .

## 1.3 Applicazioni per la meccanica quantistica

### 1.3.1 Rappresentazione delle coordinate

Uno stato si decompone in maniera diversa a seconda della base; ogni decomposizione è una sua diversa **rappresentazione**.

Sia  $\hat{Q} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  operatore autoaggiunto **posizione**<sup>1</sup>, con  $\hat{Q} |x\rangle = x |x\rangle$ <sup>2</sup>. Il suo spettro è continuo, quindi la decomposizione spettrale avviene tramite integrale:

<sup>1</sup>Indicato anche con  $\hat{X}$ .

<sup>2</sup>Gli autostati sono le  $x$ , mentre  $|x\rangle$  rappresenta gli autovettori.

dato uno stato  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|\psi\rangle |x\rangle dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) |x\rangle dx \quad (1.3.1)$$

con  $\psi(x)$  **funzione d'onda** dello stato  $|\psi\rangle$  e ne indica i coefficienti nella rappresentazione delle coordinate.

### 1.3.2 Rappresentazione degli impulsi

Sia  $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$  operatore impulso (autoaggiunto); per  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ :

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp c(p) |p\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dp \tilde{\psi}(p) |p\rangle \quad (1.3.2)$$

dove  $\tilde{\psi}(p)$  è la funzione d'onda nel dominio degli impulsi e si ottiene trasformando con Fourier  $\psi(x)$ .

### 1.3.3 Misura di un osservabile

Sia  $\hat{A}$  operatore lineare autoaggiunto<sup>1</sup> con autovalori  $a_i$  e autovettori  $|\lambda_i\rangle$ . Assumendo che  $\langle \lambda_i|\lambda_j\rangle = \delta_{ij}$  formino una base ortonormale<sup>2</sup> e dato un generico  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i |\lambda_i\rangle$ , si nota che :

$$\langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle = \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^* \langle \lambda_i| \right] \left[ \sum_{j=1}^{+\infty} b_j \hat{A} |\lambda_j\rangle \right] = \sum_{i=1}^{+\infty} |b_i|^2 a_i \quad (1.3.3)$$

dove si può vedere  $|b_i|^2$  come probabilità di ottenere misura  $a_i$  da osservabile  $\hat{A}$ . In questo senso, deve valere:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |b_i|^2 \stackrel{!}{=} 1$$

Questa condizione è verificata dalla normalizzazione di ciascuno stato:

$$\langle \psi|\psi\rangle = \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} b_i^* \langle \lambda_i| \right] \left[ \sum_{j=1}^{+\infty} b_j |\lambda_j\rangle \right] = \sum_{i,j=1}^{+\infty} b_i^* b_j \langle \lambda_i|\lambda_j\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} |b_i|^2 \stackrel{!}{=} 1 \quad (1.3.4)$$

<sup>1</sup>In generale, ogni operatore in meccanica quantistica, almeno quelli associati ad osservabili, sono operatori lineari autoaggiunti.

<sup>2</sup>Possono essere sempre costruiti in modo che siano ortonormali.

Per un operatore a spettro continuo  $\hat{F}$ , con autovettori  $|z\rangle$  relativi ad autovalori  $z$  e  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ,  $|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) |z\rangle dz$ ,  $f(z) = \langle z|\psi\rangle$ :

$$\begin{aligned}\langle \psi|\hat{F}|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(y) \langle y| dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \hat{F} |z\rangle dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy dz f^*(y) f(z) z \langle y|z\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} z |f(z)|^2 dz \quad (1.3.5) \\ \langle \psi|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz \stackrel{!}{=} 1 \text{ (normalizzazione)}\end{aligned}$$

### 1.3.4 Principi della meccanica quantistica

- (a). Uno stato fisico  $|\psi\rangle$  è un vettore in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\ell^2$  o  $L^2$ . Lo stesso stato può essere equivalentemente moltiplicato per una fase:  $e^{i\alpha} |\psi\rangle$ .
- (b). Per ogni sistema, ogni stato deve essere tale che  $\langle \psi|\psi\rangle = 1$ .
- (c). Gli osservabili sono operatori lineari autoaggiunti che agiscono su  $\mathcal{H}$ .
- (d). Il valore di aspettazione di un osservabile  $\hat{A}$  relativo ad uno stato  $|\psi\rangle$  è  $\langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle$ . Se  $a_i$  sono autovalori, con  $|a_i\rangle$  relativi autovettori, di  $\hat{A}$ , la probabilità di ottenere la misura  $a_i$  (data dal fatto che il sistema è nello stato  $|a_i\rangle$ ) è  $|a_i|^2$ .

Nel caso di operatori con spettri continui, si costruisce la densità di probabilità  $P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx$  (come esempio per operatore posizione  $\hat{Q}$ ) ed è probabilità di trovare la particella nell'intervallo spaziale  $dx$ .

### 1.3.5 Spazio di Hilbert proiettivo, sistemi puri e misti

Ogni stato  $|\psi\rangle$  è definito a meno di una fase; per eliminare fase globale, si usa lo spazio proiettivo  $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}/\sim$ , con  $|\psi\rangle \sim e^{i\alpha} |\psi\rangle$ .

Con gli elementi di  $\mathcal{P}(\mathcal{H})$  si può introdurre un **isomorfismo naturale**<sup>1</sup> con lo spazio generato dagli operatori  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ , nel caso di sistemi **puri**.

Un sistema quantistico puro, è univocamente descritto da un singolo stato  $|\psi\rangle$  (quello in cui si trova in un certo istante temporale), quindi il proiettore  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  contiene tutte le informazioni necessarie per una sua descrizione. Un sistema **misto**, invece, non può essere descritto tramite un singolo stato perché appartiene a più stati puri contemporaneamente in una certa proporzione; in

<sup>1</sup>Isomorfismo che non dipende dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza.

questo caso, il proiettore diventa una **matrice di densità** con

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.3.6)$$

### 1.3.6 Proiettore per sistemi puri

La condizione di normalizzazione è:

$$\text{Tr } \rho = 1 \quad (1.3.7)$$

*Dimostrazione.* Se  $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n |\phi_n\rangle$ :

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \phi_m | \rho | \phi_n \rangle \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \phi_n | \rho | \phi_n \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle \phi_n | \psi \rangle \langle \psi | \phi_n \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \phi_n | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \psi \rangle \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dalla completezza di  $\{|\phi_n\rangle\}_n$ . ■

Un generico elemento di matrice di  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  è  $\rho_{ij} = c_i c_j^*$ , dove  $|\psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle$ .

*Dimostrazione.* Per conto diretto:

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \langle \phi_i | \rho | \phi_j \rangle = \langle \phi_i | \psi \rangle \langle \psi | \phi_j \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \langle \phi_i | \phi_m \rangle \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^* \langle \phi_n | \phi_j \rangle \\ &= \sum_{m,n=1}^{+\infty} c_m c_n^* \delta_{im} \delta_{jn} = c_i c_j^* \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

■

Dato  $\hat{A}$  osservabile con base di autostati  $\{|a_i\rangle\}_i$ :

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \text{Tr } \rho \hat{A} \quad (1.3.10)$$

*Dimostrazione.* Si prende  $\psi = \sum_i c_i |a_i\rangle$  e  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ; allora:

$$\text{Tr}(\rho\hat{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \langle a_i | \rho \hat{A} | a_i \rangle = \sum_i a_i \langle a_i | \rho | a_i \rangle = \sum_i |c_i|^2 a_i \equiv \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (1.3.11)$$

■

### 1.3.7 Flusso di probabilità ed equazione di continuità

Sistema composto da particella in 3D sotto potenziale  $V(x)$ . Sia  $\psi(\mathbf{x}, t)$  funzione d'onda per stato  $|\psi(t)\rangle$ . La probabilità di trovare particella in una regione  $\Gamma$  dello spazio è<sup>1</sup>:

$$P_\Gamma(t) \equiv \int_\Gamma d^3x |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (1.3.12)$$

Per quanto detto in §2.5.2:  $i\hbar\partial_t\psi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\right)\psi(\mathbf{x}, t)$ ; evoluzione temporale di  $P_\Gamma(t)$  è:

$$\begin{aligned} \partial_t P_\Gamma(t) &= \partial_t \int_\Gamma d^3x \psi(\mathbf{x}, t)\psi^*(\mathbf{x}, t) = \int_\Gamma [\psi^*(\mathbf{x}, t)\partial_t\psi(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t)\partial_t\psi^*(\mathbf{x}, t)] d^3x \\ &= \int_\Gamma \left[ \psi^*(\mathbf{x}, t) \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right) \psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{i\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right) \psi^*(\mathbf{x}, t) \right] d^3x \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_\Gamma [\psi^*(\mathbf{x}, t)\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t)\nabla^2\psi^*(\mathbf{x}, t)] d^3x = \frac{i\hbar}{2m} \int_\Gamma \nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) d^3x \end{aligned}$$

Definendo **flusso di probabilità**:

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (1.3.13)$$

si ha:

$$\partial_t P_\Gamma(t) = - \int_\Gamma \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x \quad (1.3.14)$$

da cui si ottiene equazione di continuità:

$$\partial_t |\psi|^2 + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.3.15)$$

<sup>1</sup>I termini con il potenziale si cancellano perché simmetrici, mentre quelli con  $\nabla^2$  no perché in uno sarà derivato  $\psi$ , nell'altro  $\psi^*$ .

## 2 INTRODUZIONE ALLA MECCANICA QUANTISTICA

### 2.1 Evoluzione temporale

#### 2.1.1 Equazione di Shrödinger per gli stati

Variazione temporale dello stato di un sistema:  $|\psi(t)\rangle$  o  $|\psi, t\rangle$ . Per la funzione d'onda:  $\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle$ . Per trovare evoluzione temporale di uno stato, si richiede che:

- (a). l'evoluzione sia univocamente determinata da uno stato iniziale  $\Rightarrow$  si richiede che nell'equazione compaia al massimo il primo ordine di derivazione  $\partial_t |\psi(t)\rangle$ ;
- (b). sperimentalmente, si verifica il principio di sovrapposizione, quindi l'equazione differenziale deve essere lineare.

L'equazione risultante è:

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (2.1.1)$$

$\hat{H}$  è un generico operatore che definisce l'evoluzione temporale del sistema. Deve risultare autoaggiunto.

*Dimostrazione.* Da  $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \stackrel{!}{=} 1, \forall t$ :

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \partial_t \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = (\partial_t \langle \psi(t) |) |\psi(t)\rangle + \langle \psi(t) | (\partial_t |\psi(t)\rangle) \\ &\Rightarrow \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H}^\dagger | \psi(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle \Rightarrow \hat{H}^\dagger = \hat{H} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

■

Questo candida  $\hat{H}$  come osservabile

#### 2.1.2 Soluzione dell'equazione

La soluzione è:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \quad (2.1.3)$$

dove

$$e^{\hat{A}} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \hat{A} + \frac{1}{2} \hat{A}^2 + \dots$$



Visto che  $\hat{H}$  è autoaggiunto, l'esponenziale è unitario:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} = \text{Id} \quad (2.1.4)$$

Definendo l'**evolutore** come l'operatore  $\hat{U}(t, t_0)$  tale che  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ , risulta  $\hat{U}(t, t_0)\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \text{Id}$ . Se  $\hat{H}$  **indipendente dal tempo**, allora  $\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$ .

### 2.1.3 Equazione di Shrödinger per la funzione d'onda

Per  $\{|x\rangle\}$  base ortonormale  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi(t)|x\rangle \langle x|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x, t)|^2 \stackrel{!}{=} 1$  per normalizzazione. Nell'eq. di Shrödinger:

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar\partial_t \langle x|\psi(t)\rangle = \langle x|\hat{H}|\psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar\partial_t \psi(x, t) = \hat{H}\psi(x, t) \quad (2.1.5)$$

Il passaggio  $\langle x|\hat{H}|\psi(t)\rangle \stackrel{*}{=} \hat{H}\psi(x, t)$  è giustificato con l'accorgimento che gli  $\hat{H}$  non sono gli stessi: uno agisce su ket, l'altro su scalare; la definizione di  $\hat{H}$  agente su  $\psi(x, t)$  è:

$$\langle x|\hat{H}|\psi(t)\rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dy \langle x|\hat{H}|y\rangle \langle y|\psi(t)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{H}\psi(x, t)$$

con  $\langle x|\hat{H}|y\rangle$  è l'elemento di matrice dell'Hamiltoniano originale nella rappresentazione delle coordinate.

Per la soluzione dell'equazione:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \Rightarrow \langle x|\psi(t)\rangle = \psi(x, t) = \langle x|\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \\ \Rightarrow \psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \langle x|\hat{U}(t, t_0)|y\rangle \langle y|\psi(t_0)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \hat{U}(x, y, t, t_0)\psi(y, t_0) \\ \Rightarrow \psi(x, t) &= \hat{U}(t, t_0)\psi(x, t_0) \end{aligned}$$

dove, come prima, i due  $\hat{U}$  non sono gli stessi.

### 2.1.4 Equazione di Shrödinger per il proiettore

Partendo da  $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ , si trova:

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{\rho}(t) &= [\partial_t |\psi(t)\rangle] \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle [\partial_t \langle \psi(t)|] \\ &= -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| + \frac{i}{\hbar} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \hat{H}^\dagger = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \hat{\rho}(t) + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho}(t) \hat{H} \\ &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]\end{aligned}\quad (2.1.6)$$

## 2.2 Evoluzione temporale per gli operatori

Ci sono tre quadri per vedere il problema:

- (a). **quadro di Shrödinger:** solo gli stati dipendono dal tempo, mentre gli operatori no;
- (b). **quadro di Heisenberg:** solo gli operatori dipendono dal tempo;
- (c). **quadro misto (o di interazione):** l'Hamiltoniano si divide in  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ , dove il primo evolve gli operatori e il secondo evolve gli stati.

### 2.2.1 Il quadro di Shrödinger

Evoluzione temporale di  $\hat{O}$ , con  $\partial_t \hat{O} = 0$ , è:

$$\begin{aligned}\partial_t \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H} \hat{O} | \psi(t) \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{O} \hat{H} | \psi(t) \rangle \\ &= \left\langle \psi(t) \left| \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}] \right| \psi(t) \right\rangle\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

Operatore **velocità** definito come  $\hat{v} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{Q}]$ .

### 2.2.2 Il quadro di Heisenberg

Gli stati evolvono tramite operatore, quindi si definisce  $\hat{O}_H(t)$  come:

$$\left\langle \psi(t_0) \left| e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{O} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \right| \psi(t_0) \right\rangle \equiv \langle \psi(t_0) | \hat{O}_H(t) | \psi(t_0) \rangle \quad (2.2.2)$$

dove si nota che ancora  $\hat{O}$  non dipende dal tempo.

### 2.2.3 Evoluzione delle misure

Modello della mq prevede che operatore  $\hat{O}$  autoaggiunto applicato ad uno stato  $|\psi\rangle$  restituisca valore rappresentato da  $\hat{O}$  in tale stato. In questo senso, potendo espandere  $|\psi\rangle$  in autostati di  $\hat{O}$ , le misure sono gli autovalori dell'operatore e, a seconda del tipo di spettro, sono continui, discreti o entrambi.

Per l'energia (quindi se  $\hat{O} \equiv \hat{H}$ ), se  $|\psi_n\rangle$  autostato dell'autovalore  $E_n$ :  $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ , dove  $E_n$  è energia dello stato  $|\psi_n\rangle$ .

Sia  $|\phi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right)|\phi(t_0)\rangle$  un generico stato, con  $|\phi(t_0)\rangle = \sum_n c_n |\psi_n(t_0)\rangle$ . Allora:

$$|\phi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |\psi_n(t_0)\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)} |\psi_n(t_0)\rangle \quad (2.2.3)$$

L'esponenziale è una fase, quindi  $|\phi(t)\rangle$  è **stazionario**. Per questo, se  $\hat{O}$  operatore:  $\langle\psi_n(t)|\hat{O}|\psi_n(t)\rangle = \langle\psi_n(t_0)|\hat{O}|\psi_n(t_0)\rangle$ , da cui  $E_n(t) = E_n(0)$  per  $\hat{O} \equiv \hat{H}$ .

## 2.3 Simmetrie e operatore impulso

### 2.3.1 Traslazioni

Sia trasla  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$ ,  $\hat{A} \rightarrow \hat{A}'$ , e, assumendo simmetria per traslazioni spaziali, si richiede che per  $\hat{A}|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle \rightarrow \hat{A}'|\phi_n\rangle = a'_n|\phi'_n\rangle$  si abbia  $a'_n = a_n$ . Se  $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$  e  $|\psi'\rangle = \sum_n c'_n |\phi'_n\rangle$ , deve valere  $|c_n|^2 = |c'_n|^2$  perché sono le probabilità di ottenere una certa misura. L'invarianza per traslazione è assicurata quando:

$$\begin{cases} a'_n = a_n \\ |c'_n|^2 = |c_n|^2 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Si cerca  $\hat{U}$  operatore delle traslazioni. Si assume che questo soddisfi:

$$\begin{cases} |\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle, \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \\ \langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle, \forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Unendo le due, si trova  $\hat{U}$  unitario:

$$\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle \Rightarrow \hat{U}^\dagger\hat{U} = \text{Id} \quad (2.3.3)$$

Su generico operatore  $\hat{A}$  come sopra:

$$\begin{aligned}\hat{A}'\hat{U}|\phi_n\rangle &= a_n\hat{U}|\phi_n\rangle = \hat{U}a_n|\phi_n\rangle = \hat{U}\hat{A}|\phi_n\rangle \Rightarrow \hat{A}'\hat{U}|\phi_n\rangle = \hat{U}\hat{A}|\phi_n\rangle \\ \Rightarrow \hat{A}' &= \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger\end{aligned}\quad (2.3.4)$$

Si definisce azione di  $\hat{U}$  su una funzione d'onda:

$$\psi'(x) = \langle x|\psi'\rangle = \langle x|\hat{U}|\psi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}\psi(x) \Rightarrow \psi'(x) = \hat{U}\psi(x) \quad (2.3.5)$$

### 2.3.2 L'operatore impulso

Visto  $\hat{U}$  unitario, si prende  $\hat{U}(s) = e^{is\hat{K}}$  per parametrizzare la traslazione con parametro continuo  $s$ . Si mostra che  $\hat{K}$  è autoaggiunto<sup>1</sup>. Sviluppando attorno a  $s = 0$ :

$$\hat{U}(s) \simeq \hat{U}(0) + s \left. \frac{d}{ds} \hat{U}(s) \right|_{s=0} + O(s^2) = \text{Id} + is\hat{K} + O(s^2) \quad (2.3.6)$$

Dovendo essere  $\hat{U}(s)\hat{U}^\dagger(s) = \text{Id}$ , trascurando  $O(s^2)$ :

$$\left( \text{Id} + s \frac{d}{ds} \hat{U}^\dagger(s) \right) \left( \text{Id} + s \frac{d}{ds} \hat{U}(s) \right) = \left( \text{Id} - is\hat{K}^\dagger \right) \left( \text{Id} + is\hat{K} \right) \simeq \text{Id} + is(\hat{K} - \hat{K}^\dagger) \quad (2.3.7)$$

da cui  $\hat{K} = \hat{K}^\dagger$ .

Si introduce operatore **impulso**<sup>2</sup> come  $\hat{K} = -\frac{1}{\hbar}\hat{p}$ , da cui  $\hat{U}(s) = \exp(-\frac{i}{\hbar}s\hat{p})$ . Si ricava la sua rappresentazione nello spazio delle posizioni. Sviluppando<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}\hat{U}\psi(x) &\simeq \left( 1 - \frac{i}{\hbar}s\hat{p} \right) \psi(x) \\ \psi'(x) &\equiv \psi(x-s) \simeq \psi(x) + s \left. \frac{d}{ds} \psi(x-s) \right|_{s=0} = \psi(x) - s\partial_x\psi(x) \\ \Rightarrow \left( 1 - \frac{i}{\hbar}s\hat{p} \right) \psi(x) &= \psi(x) - s\partial_x\psi(x)\end{aligned}\quad (2.3.8)$$

Da cui  $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ .

<sup>1</sup>Quindi sarà un possibile osservabile.

<sup>2</sup>Questa introduzione è giustificata dal fatto che, per il teorema di Nöther, l'impulso è il generatore delle traslazioni spaziali.

<sup>3</sup>Si ottiene l'espressione di  $\hat{p}$  nella rappresentazione delle coordinate sotto l'assunzione che una traslazione abbia il seguente effetto su una funzione d'onda:  $\psi'(x) \equiv \hat{U}\psi(x) = \psi(x-s)$ .

### 2.3.3 Funzione d'onda degli impulsi

Visto che  $\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\partial_x|\psi\rangle$ , vale  $\langle x|\hat{p}|p\rangle = \hat{p}\langle x|p\rangle \equiv \hat{p}\psi_p(x) \Rightarrow -i\hbar\partial_x\psi_p(x) = p\psi_p(x)$ , quindi  $\psi_p(x) = \langle x|p\rangle = C \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right)$ . Per  $C$ , si usa normalizzazione:

$$\delta(p'-p) = \langle p'|p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle p'|x\rangle \langle x|p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |C|^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}x(p'-p)\right) = 2\pi |C|^2 \hbar \delta(p-p')$$

quindi  $C = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$  e

$$\psi_p(x) = \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right) \quad (2.3.9)$$

Dato generico  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  rappresentato dalle posizioni, usando  $\langle p|x\rangle^* = \psi_p(x)$ :

$$\tilde{\psi}(p) \equiv \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}px\right) \psi(x) dx \quad (2.3.10)$$

Quindi spazi di posizioni e momenti sono legati da una trasformata di Fourier<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} \psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p) e^{ipx/\hbar} dp \\ \tilde{\psi}(p) \equiv \langle p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx \end{cases} \quad (2.3.11)$$

L'azione di  $\hat{X}$  su  $\tilde{\psi}(p)$  è:

$$\hat{X}\tilde{\psi}(p) = i\hbar\partial_p\tilde{\psi}(p) \quad (2.3.12)$$

cioè la rappresentazione di  $\hat{X}$  nello spazio dei momenti è  $\hat{X} = i\hbar\partial_p$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \langle p|\hat{X}|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle p|\hat{X}|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx = \left(-\frac{\hbar}{i}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_p e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx \\ &= (i\hbar\partial_p) \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} dx = i\hbar\partial_p \tilde{\psi}(p) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Essendo  $\lambda = h/p$  e  $k = 2\pi/\lambda = 2\pi p/h = p/\hbar$ .

### 2.3.4 Simmetrie per stati che evolvono temporalmente

$\hat{O}(t, t_0)$  operatore di evoluzione temporale:  $|\psi'(t)\rangle = \hat{O}(t, t_0)|\psi'(t_0)\rangle$  e  $|\psi(t)\rangle = \hat{O}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ . Simmetria per traslazioni temporali implica:  $|\psi'(t)\rangle = \hat{U}(s)|\psi(t)\rangle$ ,  $\forall t$ . Unendo le due:

$$\begin{aligned} |\psi'(t)\rangle &= \hat{U}(s)\hat{O}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(s)\hat{O}(t, t_0)\hat{U}^{-1}(s)\hat{U}(s)|\psi(t_0)\rangle \\ &= \hat{U}(s)\hat{O}(t, t_0)\hat{U}^{-1}(s)|\psi'(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Dall'imposizione dell'invarianza per traslazioni, risulta  $\hat{U}(s)\hat{O}(t, t_0)\hat{U}^{-1}(s) = \hat{O}(t, t_0)$ . Vista la struttura dell'operatore di evoluzione temporale<sup>1</sup>, si ricava  $[\hat{H}, \hat{U}(s)] = 0$ .

Per  $s$  piccoli,  $\hat{U}(s)$  è rappresentato da  $\hat{p}$ , quindi vale  $[\hat{H}, \hat{p}] = 0$ .

### 2.3.5 Commutatore di $\hat{p}$ e $\hat{X}$

Sia  $\hat{T}(s)$  operatore di traslazione spaziale; se  $|x'\rangle = \hat{T}(s)|x\rangle \equiv |x+s\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}s\hat{p})|x\rangle$ :

$$\begin{aligned} \hat{X}|x'\rangle &= x'|x'\rangle = (x+s)|x+s\rangle \\ \hat{X}'|x'\rangle &= \hat{T}(s)\hat{X}\hat{T}^\dagger(s)|x'\rangle = x|x+s\rangle \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

con  $\hat{X}'$  operatore traslato. Per  $s$  piccoli:

$$\hat{X}' = e^{-\frac{i}{\hbar}s\hat{p}}\hat{X}e^{\frac{i}{\hbar}s\hat{p}} \simeq \hat{X} + \frac{i}{\hbar}s[\hat{X}, \hat{p}]$$

Visto che  $(\hat{X} - s \text{Id})|x+s\rangle = x|x+s\rangle$ , da cui  $\hat{X}' = \hat{X} - s \text{Id}$ :

$$\hat{X}' = \begin{cases} \hat{X} + \frac{i}{\hbar}s[\hat{X}, \hat{p}] \\ \hat{X} - s \text{Id} \end{cases} \Rightarrow [\hat{X}, \hat{p}] = i\hbar \text{Id} \quad (2.3.15)$$

Alternativamente, si sarebbe potuto notare che

$$\begin{cases} \hat{X}\psi(x) = x\psi(x) \\ \hat{p}\psi(x) = -i\hbar\partial_x\psi(x) \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Nel caso in questione, si può scrivere come esponenziale dell'operatore  $\hat{H}$ , che, sviluppato in serie, permette di ricavare l'espressione del commutatore.

implica:

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{p}]\psi(x) &= x(-i\hbar\partial_x)\psi(x) - (-i\hbar\partial_x)x\psi(x) \\ &= -x(i\hbar\partial_x\psi(x)) + x(i\hbar\partial_x\psi(x)) + \psi(x)(i\hbar\partial_x x) = i\hbar\psi(x), \quad \forall \psi(x) \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

## 2.4 Il principio di indeterminazione

### 2.4.1 Introduzione

Si usa funzione d'onda<sup>1</sup> tridimensionale<sup>2</sup>  $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ , dove  $|\mathbf{r}\rangle = |\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle$ . Questa definizione è necessaria per far sì che l'azione di un operatore posizione legato alla singola coordinata restituisca  $\hat{X}_1 |\mathbf{r}\rangle = x_1 |\mathbf{r}\rangle$  per esempio<sup>3</sup>. Allora  $|\psi(\mathbf{r})|^2 = |\langle \mathbf{r} | \psi \rangle|^2$  è densità di probabilità di trovare la particella in un certo intervallo  $d\mathbf{r}$ . Il valore di aspettazione si esprime come:

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \langle \psi | \hat{\mathbf{R}} | \psi \rangle \equiv \bar{\mathbf{R}} = \iiint dx dy dz \mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 = \begin{pmatrix} \bar{R}_{x_1} \\ \bar{R}_{x_2} \\ \bar{R}_{x_3} \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

La varianza è data da  $\mathbf{E}[(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{R}})^2] = \iiint dx dy dz (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{R}})^2 |\psi(x, y, z)|^2$ , quindi si definisce:

$$\Delta_r^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi | \hat{\mathbf{R}}_S^2 | \psi \rangle = \iiint dx dy dz (\mathbf{r} - \bar{\mathbf{R}})^2 |\psi(\mathbf{r})|^2 \equiv \mathbf{E}[(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{R}})^2] \quad (2.4.2)$$

con  $\hat{\mathbf{R}}_S = \hat{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}$  è l'operatore posizione **sottratto** e  $\bar{\mathbf{R}} = \bar{R} \text{Id}$ . Analogamente:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \langle \psi | \hat{\mathbf{P}} | \psi \rangle \\ \Delta_p^2 &= \langle \psi | \hat{\mathbf{P}}_S^2 | \psi \rangle \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

<sup>1</sup>Con il pedice 0, indica che è relativa allo stato fondamentale  $\psi_0$ .

<sup>2</sup>Essa è definita, sotto l'assunzione di poter separare le variabili nell'integrale, come  $\psi(\mathbf{r}) = \psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)$ . Essendo che  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$  e che ogni bra agisce sul ket del suo spazio di Hilbert, si ottiene  $\psi(\mathbf{r}) = \langle x_1 | \psi_{x_1} \rangle \langle x_2 | \psi_{x_2} \rangle \langle x_3 | \psi_{x_3} \rangle$ .

<sup>3</sup>In questo caso  $|\mathbf{r}\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ , dove gli operatori  $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3$  agiscono rispettivamente su  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ .

### 2.4.2 Algebra degli operatori sottratti

Siano  $\hat{A}, \hat{B}$  autoaggiunti tali che  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ , con  $\hat{C}$  autoaggiunto<sup>1</sup>; se  $\hat{A}_S, \hat{B}_S$  sono i sottratti, allora è ancora  $[\hat{A}_S, \hat{B}_S] = i\hat{C}$ :

$$[\hat{A}_S, \hat{B}_S] = (\hat{A} - \hat{\bar{A}})(\hat{B} - \hat{\bar{B}}) - (\hat{B} - \hat{\bar{B}})(\hat{A} - \hat{\bar{A}}) = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) - \cancel{\hat{A}\hat{\bar{B}}} + \cancel{\hat{\bar{A}}\hat{B}} + \cancel{\hat{\bar{B}}\hat{A}} - \cancel{\hat{\bar{A}}\hat{B}} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

dove si è usato che l'identità commuta con ogni operatore. Sia  $\hat{T} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}_S + i\omega\hat{B}_S$  non autoaggiunto:  $\hat{T}^\dagger = \hat{A}_S - i\omega\hat{B}_S$ . Si nota che  $\hat{T}^\dagger\hat{T}$  è autoaggiunto:  $(\hat{T}^\dagger\hat{T})^\dagger = \hat{T}^\dagger\hat{T}$ .

Per generico  $|\psi\rangle$  vale  $\langle\psi|\hat{T}^\dagger\hat{T}|\psi\rangle \geq 0$ :

$$|w\rangle = \hat{T}|\psi\rangle, \langle w| = \langle\psi|\hat{T}^\dagger \Rightarrow \langle w|w\rangle = \langle\psi|\hat{T}^\dagger\hat{T}|\psi\rangle \geq 0$$

quindi:

$$0 \leq \langle\psi|\hat{T}^\dagger\hat{T}|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{A}_S - i\omega\hat{B}_S)(\hat{A}_S + i\omega\hat{B}_S)|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}_S^2|\psi\rangle + \omega^2\langle\psi|\hat{B}_S^2|\psi\rangle + i\omega\langle\psi|[\hat{A}_S, \hat{B}_S]|\psi\rangle \\ \Rightarrow \langle\psi|\hat{A}_S^2|\psi\rangle + \omega^2\langle\psi|\hat{B}_S^2|\psi\rangle + i\omega\langle\psi|i\hat{C}|\psi\rangle \geq 0, \forall\omega$$

Vale  $\forall\omega \Rightarrow$  si cerca  $\omega_0$  che la rende più piccola possibile<sup>2</sup>; si ottiene, per  $\omega = \omega_0$ :

$$\Delta_A^2\Delta_B^2 \geq \frac{\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle^2}{4} \Rightarrow \Delta_A\Delta_B \geq \frac{|\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle|}{2} \quad (2.4.4)$$

### 2.4.3 Il principio di indeterminazione

Usando  $\hat{A}, \hat{B}$  come  $\hat{X}_i, \hat{p}_i$ ; visto che  $[\hat{R}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ , allora:

$$\Delta_{x_i}\Delta_{p_i} \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.4.5)$$

<sup>1</sup>La  $i$  fuori serve per assicurare che  $\hat{C}$  sia autoaggiunto.

<sup>2</sup>La procedura si basa sul derivare rispetto a  $\omega$  e imporre derivata a 0.



## 2.5 Alcuni esempi di $\hat{H}$ per sistemi quantistici

### 2.5.1 Sistema di due corpi

Il sistema è rappresentato dallo spazio di Hilbert totale dato da  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  delle singole particelle in 3D. Per due corpi 1, 2 in 3D, si ha un Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + U(|\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2|) \quad (2.5.1)$$

con<sup>1</sup>  $[\hat{r}_{ij}, \hat{p}_{kl}] = i\hbar\delta_{ik}\delta_{jl}$ . Si definiscono:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}} &= \frac{m_1\hat{\mathbf{r}}_1 + m_2\hat{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}; \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1 \\ \hat{\mathbf{P}} &= \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2; \quad \hat{\mathbf{p}} = \frac{m_1\hat{\mathbf{p}}_2 - m_2\hat{\mathbf{p}}_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

con  $[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}$  e  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ . In questo modo<sup>2</sup>:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} + U(|\hat{\mathbf{x}}|), \quad M = m_1 + m_2 \quad \text{e} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.5.3)$$

che agisce su una nuova separazione dello spazio di Hilbert in termini di  $\mathbf{X}$  (coordinata del centro di massa) e  $\mathbf{x}$  (coordinata relativa):  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{CM}} \otimes \mathcal{H}_{\text{rel}}$ .

Da eq. 2.5.1, passando in rappresentazione delle coordinate:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m_1}\vec{\nabla}_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2}\vec{\nabla}_2^2 + U(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2M}\vec{\nabla}_X^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\vec{\nabla}_x^2 + U(|\mathbf{x}|) \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Si è separato  $\hat{H}$  in parte dipendente da  $\hat{\mathbf{X}}$  e parte dipendente solo da  $\hat{\mathbf{x}}$ . Per risolvere l'equazione di Schrödinger<sup>3</sup> si usa la separazione delle variabili:  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{X}) =$

<sup>1</sup>Il primo indice rappresenta a quale delle due particelle fa riferimento la grandezza, mentre il secondo indice indica la componente del vettore.

<sup>2</sup>Si sostituisce  $\hat{\mathbf{p}}_1 = -\hat{\mathbf{p}} + m_1\hat{\mathbf{P}}/(m_1 + m_2)$  e  $\hat{\mathbf{p}}_2 = \hat{\mathbf{p}} + m_2\hat{\mathbf{P}}/(m_1 + m_2)$ .

<sup>3</sup>Data da  $\hat{H}\psi = E\psi$ , con  $E$  energia dello stato.

$A(\mathbf{X})B(\mathbf{x})$ :

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_X^2 A(\mathbf{X}) = EA(\mathbf{X}) \\ \left( -\frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_x^2 + U(|\mathbf{x}|) \right) B(\mathbf{x}) = E'B(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.5.5)$$

$$\Rightarrow \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}_X^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \vec{\nabla}_x^2 + U(|\mathbf{x}|) \right) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = (E + E')\psi(\mathbf{x}, \mathbf{X})$$

### 2.5.2 Particella in campo esterno

In 1D, particella soggetta a  $F = -\partial_x V(x)$  con  $V(x)$  potenziale. In questo caso, varrà:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (2.5.6)$$

L'equazione di Shrödinger è:

$$i\hbar \partial_t |\psi(x, t)\rangle = \hat{H} |\psi(x, t)\rangle \quad (2.5.7)$$

In rappresentazione delle coordinate, visto che  $\hat{H}$  si rappresenta come  $-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x)$ :

$$i\hbar \partial_t \psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x) \right) \psi(x, t) \quad (2.5.8)$$

In rappresentazione degli impulsi, invece:

$$i\hbar \partial_t \tilde{\psi}(p, t) = \left( \frac{p^2}{2m} + V(i\hbar \partial_p) \right) \tilde{\psi}(p, t) \quad (2.5.9)$$

## 2.6 L'oscillatore armonico

### 2.6.1 Operatori di creazione e distruzione

Si prende un Hamiltoniano analogo al caso classico:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2 \quad (2.6.1)$$

Tramite costanti del sistema come  $m, \omega, \hbar$ , si costruiscono altre costanti caratteristiche del sistema in questione:  $\ell_\omega = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$  lunghezza caratteristica e

$p_\omega = m\omega\ell_\omega$  impulso caratteristico. Da queste, si definisco gli operatori:

$$\begin{cases} \hat{p} = \hat{P}/p_\omega \\ \hat{q} = \hat{x}/\ell_\omega \end{cases} \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} [\hat{p}^2 + \hat{q}^2] \quad (2.6.2)$$

Si definisce anche  $\hat{a} = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2}$ , che soddisfa  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  e  $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})$ . Per  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \Rightarrow \hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2)^1$ ; inoltre:

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}] &= [\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a} \\ [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \end{aligned}$$

Prendendo base di autostati di  $\hat{N}$  tali che  $\hat{N}|\nu\rangle = \nu|\nu\rangle$  e definendo  $\hat{a}|\nu\rangle = |w\rangle$ , si ha<sup>2</sup>:

$$\hat{N}|w\rangle = \hat{N}\hat{a}|\nu\rangle = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|\nu\rangle = \hat{a}(\nu - 1)|\nu\rangle = (\nu - 1)\hat{a}|\nu\rangle = (\nu - 1)|w\rangle \quad (2.6.3)$$

Questo significa che  $|w\rangle$  è autostato con autovalore diminuito di 1 rispetto a quello di partenza, che si traduce nel fatto che  $\hat{a}$  mappa gli autostati di  $\hat{N}$  in autostati con autovalore diminuito di 1.

Si osserva, poi, che gli autovalori di  $\hat{N}$  non sono mai negativi:

$$0 \leq \langle w|w\rangle = \langle \nu|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\nu\rangle = \langle \nu|\hat{N}|\nu\rangle = \nu \langle \nu|\nu\rangle = \nu$$

che assicura che  $\hat{a}|0\rangle = |0\rangle$ . In maniera del tutto analoga si vede che  $\hat{N}\hat{a}^\dagger|\nu\rangle = (\nu + 1)\hat{a}^\dagger|\nu\rangle$ , quindi  $\hat{a}^\dagger$  aumenta autovalore. Si nota che **non vi è limite superiore** agli autovalori, mentre limite inferiore è dato da  $\langle \nu|\nu\rangle \geq 0$ . Ciò significa che autovalori di  $\hat{N}$  vanno da 0 a  $+\infty$ .

Si nota, infine, che, vale  $\hat{a}^\dagger|n\rangle = c_n|n + 1\rangle^3$ ; per trovare  $c_n$ , facendo uso della relazione di commutazione  $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{N} + 1$ :

$$\begin{cases} \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \langle n|(\hat{N} + 1)|n\rangle = (n + 1)\langle n|n\rangle = n + 1 \\ \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = |c_n|^2 \langle n + 1|n + 1\rangle = |c_n|^2 \end{cases} \Rightarrow |c_n|^2 = n + 1$$

Dovendo avere autostati normalizzati:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad (2.6.4)$$

<sup>1</sup>Questo si ottiene usando  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , per cui risulta che  $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$ .

<sup>2</sup>La seconda uguaglianza è assicurata dal commutatore  $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ .

<sup>3</sup>Visto che  $\hat{a}^\dagger$  deve mappare autostato di  $\hat{N}$  in quello che ha autovalore aumentato di 1, allora  $\hat{a}^\dagger|n\rangle \propto |n + 1\rangle$  con costante di proporzionalità  $c_n$ . Lo stesso vale per  $\hat{a}$ .

Dagli autovalori di  $\hat{N}$ , si ricavano quelli dell'energia  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2) \Rightarrow E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ .

### 2.6.2 Funzione d'onda per l'oscillatore armonico

In rappresentazione delle coordinate, l'equazione di Shrödinger è  $\hat{H}\psi(x, t) = i\hbar\partial_t\psi(x, t)$ , cioè:

$$\left[ -\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \right] \psi(x, t) = i\hbar\partial_t\psi(x, t) \quad (2.6.5)$$

Per gli autovalori, invece si ha  $\hat{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x)$ <sup>1</sup>:

$$\left[ -\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \right] \psi_E(x) = E\psi_E(x) \quad (2.6.6)$$

Si definisce  $\lambda = E/E_\omega$ , dove si è preso  $E_\omega = \hbar\omega/2$ . In rappresentazione delle coordinate,  $q = x/\ell_\omega$ , quindi  $\psi(x) = \psi(\ell_\omega q) \equiv u(q)$ . Quindi:

$$\frac{d^2u}{dq^2} + (\lambda - q^2)u = 0 \quad (2.6.7)$$

*Dimostrazione.* Essendo  $q = x/\ell_\omega \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{dq}{dx} \frac{d}{dq} = \frac{1}{\ell_\omega} \frac{d}{dq}$ . Sostituendo nell'equazione agli autovalori:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\ell_\omega^2} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\ell_\omega^2q^2 \right] \psi_E(x) = \left[ -\frac{\hbar\omega}{2} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{\hbar\omega}{2}q^2 \right] \psi_E(x) = E\psi_E(x)$$

Usando  $E = \lambda E_\omega = \lambda \frac{\hbar\omega}{2}$  e dividendo tutto per  $\frac{\hbar\omega}{2}$ , si ottiene il risultato cercato dopo aver sostituito  $u(q) = \psi(\ell_\omega q)$ . ■

Questo si dice *risrittura in unità naturali*, cioè si è espresso tutto tramite valori adimensionali.

Si impone condizione di moto limitato, quindi  $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} u(q) = 0$ ; sotto questo limite, l'equazione diventa

$$\frac{d^2u}{dq^2} + q^2u = 0 \Rightarrow u(q) \propto e^{q^2/2}, e^{-q^2/2}$$

---

<sup>1</sup>Visto che l'evoluzione temporale degli autostati dell'Hamiltoniano è banale, cioè consiste nel prodotto per una fase, si trascura evoluzione temporale nell'equazione agli autovalori.

da cui chiaramente si deve scartare  $e^{q^2/2}$  perché non rispetta il limite. Si assume soluzione generale della forma:

$$u(q) = \mathcal{H}(q)e^{-q^2/2} \quad (2.6.8)$$

Per trovare  $\mathcal{H}(q)$  si sostituisce in equazione originale  $\Rightarrow \mathcal{H}'' - 2q\mathcal{H}' + (\lambda - 1)\mathcal{H} = 0$ ; matematicamente si dimostra che vi è soluzione che non modifica l'andamento di  $e^{-q^2/2}$  solo se  $(\lambda_n - 1) = 2n$  e questa soluzione sono i **polinomi di Hermite**, della forma

$$\mathcal{H}_n = (-1)^n e^{q^2} \frac{d^n e^{-q^2}}{dq^n} \quad (2.6.9)$$

Allora avere una soluzione fisicamente accettabile, cioè che rispetti  $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} u(q) = 0$  implica quantizzazione dell'energia perché, dovendo richiedere  $\lambda_n = 2n + 1$ , si ha  $E_n = \lambda_n E_\omega = \hbar\omega(n + 1/2)$ .

Ora si torna a  $\psi_n(x)$  e si cerca la costante di normalizzazione  $C_n$ :

$$\psi_n(x) = C_n \mathcal{H}_n \left( \frac{x}{\ell_\omega} \right) e^{-x^2/(2\ell_\omega^2)} \quad (2.6.10)$$

Per la costante di normalizzazione, si fa uso di  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_n^2(q) e^{-q^2} dq = 2^n (n!) \sqrt{\pi}$ :

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = |C_n|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_n^2 \left( \frac{x}{\ell_\omega} \right) e^{x^2/\ell_\omega^2} dx = |C_n|^2 \ell_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_n^2(q) e^{-q^2} dq$$

dove  $q = x/\ell_\omega$ . Allora si ha  $C_n = 1/\sqrt{2^n \ell_\omega \sqrt{\pi} (n!)}$ , da cui:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \ell_\omega \sqrt{\pi} (n!)}} \mathcal{H}_n \left( \frac{x}{\ell_\omega} \right) e^{-x^2/(2\ell_\omega^2)} \quad (2.6.11)$$

## 2.7 Operatore parità e sistemi unidimensionali

### 2.7.1 Operatore parità

Operatore  $\hat{P}_a$  definito in modo tale da soddisfare

$$\begin{aligned} \hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a^{-1} &= -\hat{x}; \quad \hat{P}_a \hat{p} \hat{P}_a = -\hat{p} \\ \hat{P}_a^2 &= \text{Id} \Rightarrow \hat{P}_a = \hat{P}_a^{-1} \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Da questo deriva che  $[\hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a, \hat{P}_a \hat{p} \hat{P}_a] = i\hbar$ . Dato un generico stato  $|\psi\rangle$ , si ha:

$$\hat{P}_a \hat{x} \psi(x) = \hat{P}_a x \psi(x) = x \hat{P}_a \psi(x) \Rightarrow \hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a \hat{P}_a \psi(x) = -\hat{x} \hat{P}_a \psi(x) = x \hat{P}_a \psi(x)$$

cambiando segno ad entrambi i membri, si vede che  $\hat{P}_a \psi(x) = \psi(-x)$ . L'operatore parità può commutare con  $\hat{H}$  quando questo è, per esempio, quadratico in  $\hat{x}, \hat{p}$ , infatti:

$$[\hat{P}_a, \hat{p}^2] = \hat{P}_a \hat{p}^2 - \hat{p} \hat{P}_a \hat{p} = \hat{P}_a \hat{p}^2 + \hat{p} \hat{P}_a \hat{p} = \hat{P}_a \hat{p}^2 - \hat{P}_a \hat{p}^2 = 0$$

dove si è sfruttato solo che  $\hat{P}_a \hat{P}_a = \text{Id}$ . Quando  $\hat{P}_a$  commuta con  $\hat{H}$ , oltre a valere invarianza temporale, significa anche che hanno stessi autostati. Visto che  $\hat{P}_a^2 = \text{Id}$ , i suoi autovalori sono  $\pm 1$ , quindi nei casi in cui  $[\hat{H}, \hat{P}_a] = 0$ , si possono ordinare gli autostati  $|n\rangle$  di  $\hat{H}$  t.c.  $\hat{P}_a |n\rangle = (-1)^n |n\rangle$ . Questo implica che:

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{x} | n \rangle &= -\langle n | -\hat{x} | n \rangle = -\langle n | \hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a | n \rangle = -(-1)^n (-1)^n \langle n | \hat{x} | n \rangle = -\langle n | \hat{x} | n \rangle \\ \Rightarrow \langle n | \hat{x} | n \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Analogamente si vede che  $\langle n | \hat{p} | n \rangle = 0$ .

### 2.7.2 Alcuni teoremi per sistemi unidimensionali

Si considera Hamiltoniano della forma  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ .

#### TEOREMA 2.1.

In 1D,  $\hat{H}$  ha spettro non-degenere.

#### TEOREMA 2.2.

Gli stati fondamentali dello spettro non hanno zeri.

#### TEOREMA 2.3.

Gli stati non-fondamentali dello spettro hanno degli zeri e l' $n$ -esimo ne ha  $n$ .

#### TEOREMA 2.4.

Uno spettro discreto di  $\hat{H}$  corrisponde ad un moto limitato nello spazio.

### 2.7.3 Moto di una particella sotto potenziale

Si considera sistema 1D composto da particella soggetta a

$$U(x) = \begin{cases} V_0 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Conseguentemente, l'Hamiltoniano è  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x})$  e l'equazione agli autovallori è data da  $\hat{H}\psi_E(x) = E\psi_E(x)$ .

Quando una particella arriva da  $x < 0$  e incontra potenziale  $V_0$  si distinguono i casi in cui  $E > V_0$  e  $E < V_0$ .

L'equazione di Shrödinger è data da:

$$\partial_x^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi = 0$$

- **Caso**  $E > V_0$ .

Se  $x < 0$ , si ha  $\partial_x^2 \psi + k^2 \psi = 0$  con  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ <sup>1</sup>, quindi:

$$\psi_-(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx} \quad (2.7.2)$$

Se  $x > 0$ , invece, si ha, per  $q = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$ ,  $\partial_x^2 \psi + q^2 \psi = 0$ , da cui:

$$\psi_+(x) = B_1 e^{iqx} + B_2 e^{-ikx} \quad (2.7.3)$$

Si impone raccordo in  $x = 0$  tra le soluzioni:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 & \text{continuità di } \psi \\ ik(A_1 - A_2) = iq(B_1 - B_2) & \text{continuità di } \psi' \end{cases}$$

Per altre condizioni, si usa flusso di probabilità  $J = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial_x \psi - \psi \partial_x \psi^*)$ ; andando a inserire  $\psi_-$  nella definizione di  $J$ , si ha  $J = \frac{\hbar k}{m} (|A_1|^2 - |A_2|^2) \equiv J_{\text{inc}} + J_{\text{rif}}$ . Si assume assenza di onda riflessa, per cui  $B_2 = 0$ <sup>2</sup>; similmente, si prende anche  $A_2 = 0$  perché non si è interessati ad un'onda che si propaga via dalla barriera.

Per normalizzazione di  $\psi_-$ <sup>3</sup>, si prende  $|J| = 1$ ; avendo interpretato  $A_1 e^{ikx}$

<sup>1</sup>Essendo che in  $x < 0$   $U(x) = 0$ .

<sup>2</sup>Si richiede questo perché è il coefficiente dell'onda che da  $x > 0$  va verso  $x < 0$ .

<sup>3</sup>È comune utilizzare un tipo di normalizzazione alternativa quando si ha a che fare con particelle non confinate in una regione spaziale.

come onda incidente e  $A_2 e^{-ikx}$  come onda riflessa, si deve normalizzare a  $1 J_{\text{inc}}$ , quindi  $A_1 = 1/\sqrt{\hbar k/m} \equiv 1/\sqrt{v}^1$ .

Se  $J_{\text{tr}} = \frac{\hbar q}{m} |B_1|^2$  come flusso trasmesso, si possono definire anche

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_{\text{tr}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{q}{k} \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}; \quad R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{J_{\text{rif}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} \quad (2.7.4)$$

da cui deve risultare anche  $T + R = 1$ . Risolvendo le condizioni imposte, si trova:

$$\begin{cases} R = 1 - \frac{4kq}{(k+q)^2} \\ T = \frac{4kq}{(k+q)^2} \end{cases}$$

Per  $E/V_0 \rightarrow \infty$ , deve risultare  $T \rightarrow 1$ , quindi  $k \sim q$ .

- **Caso  $E < V_0$ .**

In  $x < 0$ ,  $\partial_x^2 \psi + k^2 \psi = 0$  con  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  e si ha stessa soluzione di prima. In  $x > 0$  vale  $\partial_x^2 \psi - \beta^2 \psi = 0$  con  $\beta = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$ , quindi

$$\psi_+(x) = B_1 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x} \quad (2.7.5)$$

Per il resto, si richiede ancora  $B_2 = 0$  e si impongono le stesse condizioni di raccordo.

## 2.7.4 Particella contro barriera di potenziale

Si considera  $V(x) \neq 0$  per  $x \in [0, a]$ ; si cerca di capire se nel caso di  $V_0 > E$ , si trova qualcosa per  $x > a$ .

Se  $x < 0$  si ha  $\partial_x^2 \psi + k^2 \psi = 0$ ,  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$  e  $\psi_- = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$ . Per  $0 < x < a$ , si ha  $\psi_a(x) = B_1 e^{-\beta x} + B_2 e^{\beta x}$ . Se  $x > a$ , si ha  $\psi_+ = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$ .

Le condizioni di raccordo sono da scrivere sia in  $x = 0$  che in  $x = a$ ; rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad x = 0$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\beta a} & e^{\beta a} \\ -\beta e^{-\beta a} & \beta e^{\beta a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ika} & e^{-ika} \\ ike^{ika} & -ike^{-ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Si identifica  $\hbar k/m$  come la velocità di propagazione dell'onda.



Si richiede  $C_2 = 0$  perché si è interessati solo all'effetto tunnel e (forse) si prende  $B_2 = 0$  come al solito. Risolvendo il sistema e imponendo  $R + T = 1$ , si trova

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{V_0 - E}{\hbar^2/(2ma^2)}} \right)} \equiv \frac{|C_1|^2}{|A_1|^2} \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\sqrt{\frac{V_0 - E}{\hbar^2/(2ma^2)}}} \quad (2.7.6)$$

con approssimazione per  $V_0 - E \gg \hbar^2/(2ma^2)$ .

## 2.8 Meccanica quantistica dei sistemi interagenti

Si considerano sistemi 1, 2. Se questi non interagiscono  $\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ; se  $\{|a_n\rangle\}_n, \{|b_m\rangle\}_n$  basi di  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  rispettivamente, si avrebbe base di  $\mathcal{H}$  data da  $|a_n, b_m\rangle = |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle$ , quindi  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  significa che:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{n,m} |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle \equiv \left[ \sum_n c_n |a_n\rangle \right] \otimes \left[ \sum_m d_m |b_m\rangle \right]$$

dove  $c_{n,m} = c_n b_m$ .

### 2.8.1 Operatori per sistemi non-interagenti

Se  $\hat{A}, \hat{B}$  operatori di 1, 2 rispettivamente, allora per  $\{|a_n\rangle\}$  base di autostati di  $\hat{A}$  e  $\{|b_m\rangle\}$  base di autostati di  $\hat{B}$ :

$$\begin{aligned} \hat{A} |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle &= a_n |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle \\ \hat{B} |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle &= b_m |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle \end{aligned}$$

Da questo, risulta

$$(\hat{A} \otimes \hat{B}) |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle = a_n b_m |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle$$

Per questa caratterizzazione, deve risultare  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0^1$ . Infine, se  $|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{n,m} |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle$ :

$$\begin{aligned} \hat{A} |\psi\rangle &= \sum_{n,m} c_{n,m} (\hat{A} |a_n\rangle) \otimes |b_m\rangle = a_n |\psi\rangle \\ (\hat{A} \otimes \hat{B}) |\psi\rangle &= \sum_{n,m} c_{n,m} (\hat{A} |a_n\rangle) \otimes (\hat{B} |b_m\rangle) = a_n b_m |\psi\rangle \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Questo, in realtà, vale anche quando i sistemi sono interagenti.

### 2.8.2 La matrice densità

Se  $\mathcal{H}$  spazio del sistema complessivo, con base  $|a_n b_m\rangle$ , e  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , si scrive matrice densità o come  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , o con elementi di matrice  $\langle a_n b_m | \rho | a_j b_k \rangle$  della **matrice densità**.

Se  $\hat{R}$  operatore in  $\mathcal{H}$ , inserendo base completa tra  $\rho$  e  $\hat{R}$ :

$$\langle\psi|\hat{R}|\psi\rangle = \text{tr}(\rho\hat{R}) = \sum_{n,m} \langle a_n b_m | \rho \hat{R} | a_n b_m \rangle = \sum_{n,m,j,k} \langle a_n b_m | \rho | a_j b_k \rangle \langle a_j b_k | \hat{R} | a_n b_m \rangle$$

Si considera caso particolare  $\hat{R} = \hat{R}^{(1)} \otimes \text{Id}^{(2)}$  (cioè  $\hat{R}$  agisce solo su  $\mathcal{H}_1$ ) e si ha:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho\hat{R}) &= \sum_{n,m,j,k} \langle a_n b_m | \rho | a_j b_k \rangle \langle a_j b_k | \hat{R} | a_n b_m \rangle = \sum_{n,m,j,k} \langle a_n b_m | \rho | a_j b_k \rangle \langle a_j | \hat{R}^{(1)} | a_n \rangle \overbrace{\langle b_k | \text{Id}^{(2)} | b_m \rangle}^{=\delta mk} \\ &= \sum_{n,m,j} \langle a_n b_m | \rho | a_j b_m \rangle \langle a_j | \hat{R}^{(1)} | a_n \rangle \equiv \text{tr}(\rho^{(1)} \hat{R}^{(1)}) \end{aligned}$$

dove  $\rho^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \rho \stackrel{\text{def}}{=} \sum_m \langle a_n b_m | \rho | a_j b_m \rangle$ . Tutte le proprietà del proiettore valgono anche per  $\rho^{(1)}$ <sup>1</sup>, cioè  $\text{tr}^{(1)} \rho^{(1)} = 1$ ,  $\rho^{(1)\dagger} = \rho^{(1)}$ , ma **non è vero** che  $\text{tr}^{(1)} (\rho^{(1)})^2 = 1$ . In generale:

$$\text{tr}^{(1)} (\rho^{(1)})^2 \leq 1 \quad (2.8.1)$$

e l'uguaglianza vale quando lo stato che descrive è puro.

### 2.8.3 Caratterizzazione degli stati misti

Si considerano due sistemi 1,2 interagenti e si studia il sistema complessivo, rappresentato da  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , con Hamiltoniano  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_I$ . L'evoluzione temporale di un  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  è data da:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(0)\rangle$$

Gli stati che non si possono scrivere come miscela di altri stati sono detti **puri** e si parla di **sovrapposizione coerente**. Un esempio è  $|\psi\rangle = (|0\rangle^{(1)} + |1\rangle^{(1)}) \otimes |0\rangle^{(2)}$  che si separa come prodotto tensore di stati del sistema 1 e del 2.

Quando questo non è possibile, si parla di **miscela statistica**, come per lo stato  $|\psi\rangle = |0\rangle^{(1)} \otimes |0\rangle^{(2)} + |1\rangle^{(1)} \otimes |1\rangle^{(2)}$ .

<sup>1</sup>Qui si tratterà  $\rho^{(1)}$  in particolare, ma il discorso è analogo per gli altri.

#### 2.8.4 Valore di aspettazione per miscele statistiche

Per  $\hat{O}$  osservabile, valore di aspettazione per stati puri è  $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$ . Se  $|\phi\rangle$  stato misto, non si calcola allo stesso modo perché il sistema si distribuisce su più stati con una certa probabilità. Si calcola come:

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_n \omega_n \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_n \rangle \quad (2.8.2)$$

dove i  $|\phi_n\rangle$  sono stati di una base di  $\mathcal{H}$  e  $\omega_n$  è la relativa probabilità, quindi  $0 \leq \omega_n \leq 1$  e  $\sum_n \omega_n = 1$ .

Introducendo base ortonormale  $\{|i\rangle\}$ :

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_{n,i,j} \omega_n \langle \phi_n | i \rangle \langle i | \hat{O} | j \rangle \langle j | \phi_n \rangle \equiv \sum_{n,i,j} \omega_n O_{ij} \langle \phi_n | i \rangle \langle j | \phi_n \rangle \equiv \sum_{i,j} \rho_{ji} O_{ij} \equiv \text{tr } \rho \hat{O} \quad (2.8.3)$$

dove si è definita la matrice densità

$$\rho_{ij} = \sum_n \omega_n \langle j | \phi_n \rangle \langle \phi_n | i \rangle \Rightarrow \hat{\rho} = \sum_n \omega_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \quad (2.8.4)$$

Con questa definizione, la **matrice di densità** permette descrizione del sistema. Per questa definizione, continuano a valere  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$  e  $\text{tr } \rho = 1$ , ma

$$\text{tr } \rho^2 = \sum_n \omega_n^2 \leq \sum_n \omega_n = 1$$

#### 2.8.5 Evoluzione temporale della matrice densità

Per proiettore classico (che si ha per  $\omega_n = 1$  per generico  $n$ )  $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$  l'evoluzione temporale è data da:

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(0)\rangle \langle \psi(0)| e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$$

Per stato misto, in generale:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{\rho}(0) e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$$

Per  $\{|\phi\rangle_n\}_n$  base:

$$\rho(t) = \sum_n \omega_n e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\phi_n(0)\rangle \langle \phi_n(0)| e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \equiv \sum_n \omega_n |\phi_n(t)\rangle \langle \phi_n(t)| \quad (2.8.5)$$

## 2.9 L'operatore momento angolare

### 2.9.1 Rotazioni in 3D

Una generica rotazione si scrive come composizione di tre matrici di rotazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per rotazione infinitesima, sviluppando attorno a 0 le matrici sopra, si ottiene la forma generica  $R_k(\varepsilon) = \text{Id} - i\varepsilon \Omega_k$ , dove  $k$  rappresenta l'asse attorno a cui si ruota e:

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vale  $(\Omega_k)_{ij} = -i\varepsilon_{kij}$  e  $[\Omega_i, \Omega_j] = i\varepsilon_{ijk}\Omega_k$ . Componendo le tre matrici, la rotazione infinitesima più generale, attorno a generico asse  $\mathbf{n}$ , è scritta come  $R_{\mathbf{n}} = \text{Id} - i\varepsilon_k \Omega_k$ <sup>1</sup> (eliminando infinitesimi di ordine superiore al primo). Applicandola a vettore  $\mathbf{x}$ , si trova  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta\theta \mathbf{n} \times \mathbf{x}$ , prendendo  $\vec{\varepsilon} = \delta\theta \mathbf{n}$ .

### 2.9.2 Rotazione su funzione d'onda

Dovendo rimanere la probabilità invariata sotto rotazione, la funzione d'onda non deve cambiare valore dopo rotazione dello spazio.

Dato operatore  $\hat{U}_R : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , con  $R$  matrice di rotazione 3D, si richiede che:

$$\psi'(\mathbf{x}) = \hat{U}_R \psi(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}) \quad (2.9.1)$$

dove  $\hat{U}_R$  in equazione sopra è definito in  $L^2$ .

### 2.9.3 Momento angolare

Una trasformazione finita da quella infinitesima è data da

---

<sup>1</sup>Si sta assumendo somma su  $k$ .

$$\hat{U}_R(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}} \quad (2.9.2)$$

con  $\mathbf{n}$  asse di rotazione,  $\theta$  angolo di rotazione e  $\mathbf{J}$  vettore **momento angolare** degli operatori Hermitiani dei momenti angolari lungo ciascun asse.

Valgono le relazioni di commutazione e si mostra solo la prima:

$$\begin{aligned} [\hat{J}_a, \hat{J}_b] &= i\hbar \varepsilon_{abc} \hat{J}_c \\ [\hat{X}_a, \hat{J}_b] &= i\hbar \varepsilon_{abc} \hat{X}_c \\ [\hat{p}_a, \hat{J}_b] &= i\hbar \varepsilon_{abc} \hat{p}_c \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

*Dimostrazione.* Si considerano due rotazioni infinitesime attorno a due assi distinti:  $R_1(\varepsilon) = \text{Id} - i\varepsilon \Omega_1$  e  $R_2 = \text{Id} - i\varepsilon \Omega_2$ . Si approssima al secondo ordine (primo ordine non-banale):

$$R_G = R_2(-\varepsilon)R_1(-\varepsilon)R_2(\varepsilon)R_1(\varepsilon) \simeq (\text{Id} + \varepsilon^2[\Omega_1, \Omega_2]) = (\text{Id} + i\varepsilon^2\Omega_3) = R_3(-\varepsilon^2)$$

dove si sono usate relazioni di commutazione delle  $\Omega_k$ . Applicandole a funzione d'onda, si ha contemporaneamente:

$$\begin{cases} \psi'(\mathbf{x}) = \hat{U}_{R_G}\psi(\mathbf{x}) \simeq \left(\text{Id} + \frac{i}{\hbar}\varepsilon^2\hat{J}_3\right)\psi(\mathbf{x}) \\ \psi'(\mathbf{x}) \simeq \left(\text{Id} + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}[\hat{J}_1, \hat{J}_2]\right)\psi(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Confrontando le due, si ottiene la tesi generalizzando relazione. (Forse) alternativamente, si sarebbe potuto procedere direttamente da analisi delle relazioni di commutazione delle  $\Omega_k$ , considerando che  $\hat{J}_k = \Omega_k/\hbar$ . ■

#### 2.9.4 Momento angolare orbitale

Si definisce  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{X}} \times \hat{\mathbf{p}}$  parte orbitale di  $\hat{\mathbf{J}}$ . Si mostra che, in rappresentazione delle coordinate:

$$\hat{\mathbf{L}}\psi(\mathbf{x}) = -i\hbar \mathbf{x} \times \nabla \psi(\mathbf{x}) \quad (2.9.4)$$

*Dimostrazione.* Per rotazione  $\delta\theta$  della funzione d'onda, da  $\hat{U}_R\psi(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x})$ , si ha:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\delta\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{L}}}\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x})$$

Sviluppando fino al primo ordine entrambi i membri:

$$\left[ \text{Id} - \frac{i}{\hbar} \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \right] \psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \delta\theta (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x})$$

Utilizzando  $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{x}) \cdot \nabla = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} \times \nabla)$  e dovendo valere per generica scelta di  $\hat{\mathbf{n}}$ , si ritrova la tesi. ■

### 2.9.5 Spettro del momento angolare

$\hat{J}_a$  e  $\hat{H}$  non commutano, quindi non hanno base comune. Si definisce  $\hat{J}^2 = \sum_a \hat{J}_a^2$  e si può mostrare che  $[\hat{J}^2, \hat{J}_a] = 0$ . Si cerca base comune a  $\hat{J}^2$  e  $\hat{J}_z$  per convenzione; in particolare, si richiede:

$$\hat{J}^2 |\beta m\rangle = \hbar^2 \beta |\beta m\rangle; \quad \hat{J}_z |\beta m\rangle = \hbar m |\beta m\rangle$$

con  $|\beta m\rangle$  autostati normalizzabili<sup>1</sup>. Si nota che:

- (a). visto che  $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ , vale  $\beta = \langle \beta m | \hat{J}^2 | \beta m \rangle \geq \langle \beta m | \hat{J}_z^2 | \beta m \rangle = m^2$ ;
- (b). definendo  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ , con  $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm \hbar \hat{J}_\pm$  e  $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hbar \hat{J}_z^2$ , e dovendo valere  $\beta \geq m^2 \Rightarrow \exists m_{\max}, m_{\min}$  tali che:

$$\begin{aligned} \hat{J}_z \hat{J}_+ |\beta m\rangle &= (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+) |\beta m\rangle = \hbar(m+1) \hat{J}_+ |\beta m\rangle \Rightarrow \hat{J}_+ |\beta m_{\max}\rangle = 0 \\ \hat{J}_z \hat{J}_- |\beta m\rangle &= (\hat{J}_- \hat{J}_z - \hbar \hat{J}_-) |\beta m\rangle = \hbar(m-1) \hat{J}_- |\beta m\rangle \Rightarrow \hat{J}_- |\beta m_{\min}\rangle = 0 \end{aligned}$$

- (c). visto che  $\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z$ , si ha:

$$0 = \hat{J}_- \hat{J}_+ |\beta j\rangle = (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) |\beta j\rangle \Rightarrow \hbar^2(\beta - j^2 - j) = 0 \Rightarrow \beta = j(j+1)$$

con  $j = m_{\max}$ . Analogamente  $m_{\min} = -j$ . Visto che  $\beta = j(j+1)$ , si usa  $j$  al posto di  $\beta$ , per cui vale  $-j \leq m \leq j$ .

### 2.9.6 Introduzione allo spin

Si usa solo parte orbitale  $\hat{\mathbf{L}}$  per sistemi la cui descrizione avviene tramite singola funzione d'onda.

Si considera sistema descritto da più funzioni d'onda  $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x})$ ; sotto rotazione, il sistema deve mantenere intatte le sue simmetrie e si deve anche

<sup>1</sup>Si usa notazione con due variabili  $\beta, m$  perché corrisponderanno ai due numeri quantici che permettono una più dettagliata descrizione dello stato che rappresentano.

<sup>2</sup>Si mostrano a partire da  $[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} \hat{J}_c$ .

considerare lo spin, che è una proprietà intrinseca della particella. Per questo motivo, una generica rotazione è data da:

$$\hat{U}_R \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) \\ \psi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{S}}} \begin{pmatrix} \psi_1(R^{-1}\mathbf{x}) \\ \psi_2(R^{-1}\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.9.5)$$

con  $\hat{\mathbf{S}}$  operatore momento angolare di spin. Questo si occupa della rotazione intrinseca della particella per mantenere intatta la simmetria di partenza, mentre  $\hat{\mathbf{L}}$  si occupa della rotazione spaziale. Si assume che:

$$[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{S}}] = 0 \quad (2.9.6)$$

e si ha  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ . Inoltre, visto che  $[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} \hat{J}_c$ , deve valere:

$$[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\hbar \varepsilon_{abc} \hat{S}_c \quad (2.9.7)$$

### 2.9.7 Spettro del momento angolare orbitale

Analogamente a quanto fatto per  $\hat{J}$ , si usano  $\hat{L}^2, \hat{L}_z$  con autostati  $|\ell m\rangle$  tali che:

$$\hat{L}^2 |\ell m\rangle = \ell(\ell + 1) |\ell m\rangle, \quad \hat{L}_z |\ell m\rangle = m |\ell m\rangle$$

Usando coordinate sferiche,  $\hat{\mathbf{L}}$  nello spazio delle coordinate diventa:

$$\hat{\mathbf{L}} = r \hat{\mathbf{r}} \times (-i\hbar) \left[ \hat{r} \partial_r + \frac{1}{r} \hat{\theta} \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right] = -i\hbar \left[ \hat{\phi} \partial_\theta - \frac{1}{\sin \theta} \hat{\theta} \partial_\varphi \right]$$

Si definiscono<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{\ell}^2 &= \hat{L}^2 / \hbar = - \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) \right] \\ \hat{\ell}_z &= \hat{L}_z / \hbar = -i \partial_\varphi \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

Si cerca soluzione con la separazione delle variabili:  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ . Inserendola in una delle due, visto che non hanno parte che agisce su  $R(r)$ , questa si semplifica e riduce il problema al calcolo di  $Y(\theta, \varphi)$ ,

<sup>1</sup>In  $\hat{\ell}_z$  si ha solo componente  $\varphi$  perché è l'unica che contribuisce alla componente  $z$  di  $\hat{\mathbf{L}}$ , infatti  $\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$ .

quindi a risolvere:

$$\begin{cases} \hat{\ell}^2 Y(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1) Y(\theta, \varphi) \\ \hat{\ell}_z Y(\theta, \varphi) = m Y(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (2.9.9)$$

- **Soluzione della seconda equazione.**

Si risolve

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Theta(\theta) \Phi(\varphi)] = m \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \implies \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = i m \Phi(\varphi)$$

Questo significa che  $\Phi(\varphi) \propto e^{-im\varphi}$  con costante di normalizzazione data da  $\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi) \Phi_{m'}(\varphi) d\varphi = \delta_{mm'}$  dove si è esplicitata dipendenza dal parametro  $-\ell < m < \ell$ . La soluzione completa è:

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.9.10)$$

Infine, dovendo risultare  $\varphi + 2\pi = \varphi$ , si richiede che  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \implies e^{im(2\pi+\varphi)} = e^{im\varphi} \iff e^{i2\pi m} = 1 \iff m \in \mathbb{Z}$ . Allora  $\hat{L}_z$  può avere solo autovalori del tipo  $0, \pm\hbar, \pm2\hbar, \dots$

- **Soluzione della prima equazione.**

Si inserisce  $\Phi_m(\varphi)$  e si usa  $\partial_\varphi^2 \Phi_m(\varphi) = -m^2 \Phi_m(\varphi)$ , ottenendo:

$$-\left[ -\frac{m^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \Theta(\theta) = \ell(\ell + 1) \Theta(\theta)$$

La soluzione di questa sono i **polinomi di Legendre**  $\Theta_{\ell m}(\theta) \propto P_\ell^m(\cos \theta)$ .

Complessivamente, si ha:

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = C_{\ell m} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \theta), \quad C_{\ell m} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} \quad (2.9.11)$$

In questo modo:

$$\int (Y_{\ell'}^{m'})^* Y_\ell^m d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

e formano base ortonormale per lo spazio di Hilbert  $L^2$ .



## 2.10 Atomo di idrogeno

### 2.10.1 Particelle in campo centrale

Si studia problema generale di particelle in campo centrale  $U(|\hat{x}_1 - \hat{x}_2|)$ ; volendo applicare, poi, il discorso all'atomo di idrogeno, si assume un moto limitato. Si riprende trattazione affrontata in §2.5.1, con  $\psi(X, x) = \phi(X)\kappa(x)$  per assunzione, che deve soddisfare:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_X^2\phi(X) = E_{\text{CM}}\phi(X) \\ \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_x^2 + U(x)\right)\kappa(x) = E\kappa(x) \end{cases} \quad (2.10.1)$$

Dalla prima, si trova  $\phi(\vec{X}) = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{X}}$ , essendo  $E_{\text{CM}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$ . Poi ci si mette nel CM, per cui  $E_{\text{CM}} = 0$ , e si risolve la seconda usando le coordinate sferiche:

$$\hat{H}\psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi) \Rightarrow \left[ \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2}\hat{\ell}^2 \right] \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))\psi = 0 \quad (2.10.2)$$

con  $\hat{\ell}^2$  dato da eq. 2.9.8. Allora si assume  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ , per cui:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)R + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U(r))R = 0$$

Usando  $\chi(r) = rR(r)$ , tale che  $\chi(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow 0$ , e definendo  $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$ , si ha:

$$\frac{d^2}{dr^2}\chi(r) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_{\text{eff}}(r))\chi(r) = 0 \quad (2.10.3)$$

Vista l'equazione differenziale, la soluzione dipenderà dai parametri  $E, \ell$ , quindi un autostato si esprime, in generale, come  $|E, \ell, m\rangle$  e costituiscono un sistema ortonormale. Questo sistema è anche non-degenere perché il problema per  $R(r)$  è unidimensionale e relativo a moto limitato, quindi la coppia di autovalori  $E, \ell$ , relativi rispettivamente a  $\hat{H}, \hat{\ell}^2$ , è non-degenere. Visto che le autofunzioni dipendono da  $m$ , lo si include per la descrizione degli stati.

Si assume  $R(r) \propto r^a$ , con  $a$  da determinare; per farlo, si sostituisce nell'equazione differenziale e si manda  $r \rightarrow 0$ , facendo rimanere l'equazione nel limite

asintotico di  $r$  piccoli:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \ell(\ell + 1)R = 0 \Rightarrow a = \ell \quad (2.10.4)$$

quindi  $R(r) \propto r^\ell$ .

### 2.10.2 Funzione d'onda per l'atomo di idrogeno

È il caso particolare della trattazione precedente con  $U(\hat{r}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hat{r}}$ . A partire dalle grandezze  $m_e c^2 \simeq 0.5 \text{ MeV}$  e  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$  costante di struttura fine, si definisco le grandezze caratteristiche del sistema:

$$\begin{aligned} \ell_B &= \frac{\hbar}{m_e c \alpha} \approx 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m} & (\text{raggio di Bohr}) \\ E_B &= \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 & (\text{costante di Rydberg}) \end{aligned} \quad (2.10.5)$$

Nel caso di atomo di idrogeno, si approssima  $\mu \simeq m_e \equiv m$ , e l'equazione agli autovalori relativa è:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(\mathbf{x}) = E \psi(\mathbf{x}) \quad (2.10.6)$$

Conviene passare in coordinate sferiche e sfruttare invarianza sotto rotazioni, per cui  $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = 0$ . Usando separazione delle variabili:  $\psi_{E\ell m}(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} | E \ell m \rangle = R_{E\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ .

Si sostituiscono in eq. differenziale per  $R$  le grandezze  $\bar{r} = r/\ell_B$  e  $\bar{E} = E/E_B$ . Per semplicità, si ometteranno le barre, ma si intendono grandezze riscalate. Definendo, inoltre,  $n = 1/\sqrt{-2\bar{E}}$ <sup>1</sup> e  $\rho = 2r/n$ :

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' + \left[ \frac{n}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{\ell(\ell + 1)}{\rho^2} \right] R = 0 \quad (2.10.7)$$

con  $R = R(\rho)$ . Si è visto che  $R(\rho) \propto \rho^\ell$  per  $\rho \rightarrow 0^+$ , mentre per  $\rho \rightarrow +\infty$  si ha  $R'' - \frac{1}{4}R = 0 \Rightarrow R(\rho) \propto e^{\pm\rho/2}$ . Volendo descrivere moto limitato, si elimina soluzione con  $+$ . Complessivamente, si ha:

$$R(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2} L(\rho) \quad (2.10.8)$$

---

<sup>1</sup>Qui  $n$  non è immaginario perché le energie relative al sistema limitato che si sta studiando sono assunte negative.

che, sostituita nell'equazione differenziale, restituisce forma di  $L$ , che deve essere una **ipergeometrica confluyente**. Imponendo che queste funzioni rispettino la condizione energetica  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq \ell + 1$ , le soluzioni sono i **polinomi generalizzati di Laguerre**:

$$L_k^{(s)}(\rho) = \frac{d^s}{d\rho^s} L_k(\rho), \text{ con } L_k(\rho) = e^\rho \frac{d^k}{d\rho^k} (\rho^k e^{-\rho}) \quad (2.10.9)$$

Mettendo tutto insieme e aggiungendo la costante di normalizzazione, si trova:

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{4(n-\ell-1)!}{(n\ell_B)^3 n [(n+\ell)!]^3}} \rho^\ell e^{-\rho/2} L_{n+\ell}^{(2\ell+1)}(\rho) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (2.10.10)$$

dove si è sostituito  $E$  con  $n$  come pedice in quanto sono in corrispondenza per la relazione  $E_n = -\frac{m_e \alpha^2 c^2}{2n^2}$ .

### 2.10.3 Lo stato fondamentale, medie e varianze di posizione e momento

L'energia minima del sistema è  $E_1 = -m_e \alpha^2 c^2 / 2$  e, visto che si deve rispettare  $n \geq \ell + 1$  e  $|m| \leq \ell$ , associata a:

$$\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = R_{10}(r) Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi \ell_B^3}} e^{-r/\ell_B} \quad (2.10.11)$$

Essendo il sistema nello stato fondamentale invariante per rotazioni, deve anche valere  $\langle 0 | \hat{\mathbf{X}} | 0 \rangle = 0$ ; si distinguerebbero direzione e verso del vettore. Per lo stesso motivo:  $\langle 0 | \hat{\mathbf{p}} | 0 \rangle = 0^1$ .

Si può riscrivere  $\psi_{100}$  in termini di  $\bar{r} = r/\ell_B$ , con normalizzazione  $(\sqrt{\pi})^{-1} \Rightarrow \psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\bar{r}}$ .

Si cerca probabilità di ottenere un certo impulso  $\mathbf{p}$  (relativo allo stato fondamentale):  $\mathcal{P}(p) = |\tilde{\psi}_{100}(p)|^2$ . Si ottiene trasformando con Fourier  $\psi_{100}$ :

$$\tilde{\psi}_{100} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{(1+p^2)^2}$$

<sup>1</sup>È ragionevole che sia 0 perché lo stato è legato, nel senso che l'elettrone è vincolato a un moto limitato ad una certa regione dello spazio. Se non fosse nullo, il sistema andrebbe all'infinito lungo quella particolare direzione.

**OSSERVAZIONE 2.1.** Sistema invariante per rotazione  $\Rightarrow \tilde{\psi}(p)$  dipende solo da  $|\mathbf{p}|$ .

Si calcola varianza della posizione<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
 \langle 0|\hat{\mathbf{X}}^2|0\rangle &= \int d^3x \langle 0|x\rangle \langle x|\hat{\mathbf{X}}^2|0\rangle = \int d^3x \psi_{100}^*(x) \hat{\mathbf{X}}^2 \psi_{100}(x) \\
 &= \int r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi |\mathbf{x}|^2 |\psi_{100}(x)|^2 \\
 &= \frac{1}{\pi \ell_B^3} \int_0^{+\infty} dr r^4 e^{-2r/\ell_B} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (2.10.12) \\
 &= \frac{4}{\ell_B^3} \int_0^{+\infty} dr r^4 e^{-2r/\ell_B} = \frac{4}{\ell_B^3} \cdot \frac{3\ell_B^5}{4} = 3\ell_B^2
 \end{aligned}$$

dove si è usato  $\int_0^{+\infty} r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ . Ora si fa il calcolo per  $\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle$ . Si ha  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$  nelle coordinate, quindi:

$$\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{100}^*(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi_{100}(\mathbf{x}) d^3x = -\hbar^2 \cdot 4\pi \int_0^\infty \psi_{100}(r) \nabla^2 \psi_{100}(r) r^2 dr$$

Per una funzione radiale  $\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r)$ , dove  $\psi'(r) = -\frac{1}{l_B} \psi_{100}(r)$  e  $\psi''(r) = \frac{1}{l_B^2} \psi_{100}(r)$ , perciò  $\nabla^2 \psi_{100}(r) = \frac{1}{l_B^2} \psi_{100}(r) - \frac{2}{l_B r} \psi_{100}(r)$ . Allora:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle &= -\hbar^2 \cdot 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{\pi l_B^3} e^{-2r/l_B} \left( \frac{1}{l_B^2} - \frac{2}{l_B r} \right) r^2 dr \\
 &= -\frac{4\hbar^2}{l_B^3} \left[ \frac{1}{l_B^2} \int_0^\infty r^2 e^{-2r/l_B} dr - \frac{2}{l_B} \int_0^\infty r e^{-2r/l_B} dr \right] \quad (2.10.13) \\
 &= -\frac{4\hbar^2}{l_B^3} \left[ \frac{1}{l_B^2} \cdot \frac{l_B^3}{4} - \frac{2}{l_B} \cdot \frac{l_B^2}{4} \right] = \frac{\hbar^2}{l_B^2}
 \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\langle 0|\hat{\mathbf{X}}|0\rangle = \langle 0|\hat{\mathbf{p}}|0\rangle = 0 ; \quad \langle 0|\hat{\mathbf{X}}^2|0\rangle = 3\ell_B^2 ; \quad \langle 0|\hat{\mathbf{p}}^2|0\rangle = \frac{\hbar^2}{\ell_B^2} \quad (2.10.14)$$

<sup>1</sup>Invarianza per rotazioni  $\Rightarrow \psi(\mathbf{x}) \equiv \psi(x)$ , inoltre  $|\mathbf{x}| \equiv x \equiv r$ .

#### 2.10.4 Principio di indeterminazione

Si è visto che, essendo  $[\hat{X}_a, \hat{p}_b] = i\hbar\delta_{ab}$ , si ricava:

$$\left\langle (\hat{X}_a - \langle \hat{X}_a \rangle)^2 \right\rangle \left\langle (\hat{p}_b - \langle \hat{p}_b \rangle)^2 \right\rangle \geq \delta_{ab} \frac{\hbar^2}{4} \quad (2.10.15)$$

Applicandolo allo stato fondamentale, per quanto detto sopra,  $\langle \hat{X}_a \rangle = \langle \hat{p}_b \rangle = 0, \forall a, b$ ; inoltre, valendo invarianza per rotazioni, sommando su  $a, b$ , si ha:

$$\langle \hat{\mathbf{X}}^2 \rangle \langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle \geq \frac{3\hbar^2}{4} \quad (2.10.16)$$

D'altra parte  $\langle 0 | \hat{X}_a^2 | 0 \rangle = \frac{1}{3} \langle 0 | \hat{\mathbf{X}}^2 | 0 \rangle$  e  $\langle 0 | \hat{p}_a^2 | 0 \rangle = \frac{1}{3} \langle 0 | \hat{\mathbf{p}}^2 | 0 \rangle$  vista l'invarianza per rotazioni, quindi:

$$\frac{\hbar^2}{4} \leq \langle 0 | \hat{X}_a^2 | 0 \rangle \langle 0 | \hat{p}_a^2 | 0 \rangle = \frac{1}{9} \langle 0 | \hat{\mathbf{X}}^2 | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\mathbf{p}}^2 | 0 \rangle \Rightarrow \langle \hat{\mathbf{X}}^2 \rangle \langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle \geq \frac{9}{4} \hbar^2 \quad (2.10.17)$$

per cui si ottiene un limite inferiore più preciso. Tuttavia si possono usare i risultati in eq. 2.10.14, per concludere che  $\langle \hat{\mathbf{X}}^2 \rangle \langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle = 3\hbar^2$ , conforme con le stime di sopra.

#### 2.10.5 Oscillatore armonico 3D

Si studia sistema con Hamiltoniano  $\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}_i^2$ . Questo si può scomporre come  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$ , ciascuno relativo a una coordinata spaziale.

Gli Hamiltoniani si diagonalizzano separatamente, con  $\hat{H}_1 |n_1\rangle = E_{n_1} |n_1\rangle$ , con  $E_{n_1} = \hbar\omega(n_1 + 1/2)$ . Per operatore di creazione:  $|n_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} (\hat{a}_1^+)^{n_1} |0\rangle$ , con  $|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4} \ell_\omega^{1/2}} e^{-x^2/(2\ell_\omega^2)}$ .

Chiaramente  $[\hat{H}_i, \hat{H}_j] = 0$ , quindi uno stato di  $\hat{H}$ , individuabile tramite  $|n_1 n_2 n_3\rangle$ , si può rappresentare con  $|n_1\rangle |n_2\rangle |n_3\rangle$ ; ne segue che  $E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + n_3 + 3/2) \equiv \hbar\omega(n + 3/2)$ , visto che  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$ .

Potendo scomporre  $|n_1 n_2 n_3\rangle$ , questo si scrive come:

$$|n_1 n_2 n_3\rangle = C (\hat{a}_1^+)^{n_1} (\hat{a}_2^+)^{n_2} (\hat{a}_3^+)^{n_3} |000\rangle$$

dove  $C$  è un fattore di normalizzazione e gli  $\hat{a}_i^+$  sono operatori di creazione relativi alla variabile  $i$ -esima.

In 3D, la funzione d'onda è:

$$\varphi_0 = \left( \frac{1}{\pi^{1/4} \ell_\omega^{1/2}} \right)^3 e^{-r^2/(2\ell_\omega^2)} \quad (2.10.18)$$

Il valore medio della distanza è dato, usando  $\hat{r}^2 = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2$ , da:

$$\langle 0|^{(1)} \langle 0|^{(2)} \langle 0|^{(3)} (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2) |0\rangle^{(1)} |0\rangle^{(2)} |0\rangle^{(3)} = \langle 0|\hat{x}_1^2|0\rangle \langle 0|\hat{x}_2^2|0\rangle \langle 0|\hat{x}_3^2|0\rangle = \frac{3}{2} \ell_\omega^2$$

## 2.11 Lo spin

Si ricorda che per sistemi descritti da più funzioni d'onda, una rotazione  $\hat{R}$  agisce come:

$$\hat{R} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} \psi_1(R^{-1}\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_n(R^{-1}\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

con  $\hat{R}(\hat{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{L}}} \hat{M}(\hat{n}, \theta)$ , dove  $\hat{M}$  agisce sulle componenti (rotazione passiva), mentre l'esponenziale agisce sulle coordinate (rotazione attiva).

Visto che  $\hat{R}$  deve essere unitario e che l'esponenziale già lo è, anche  $\hat{M}$  deve esserlo; allora  $\hat{M}(\hat{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{S}}}$ , con  $\hat{\mathbf{S}}$  Hermitiano.  $[\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{S}}] = 0$  visto che agiscono indipendentemente, quindi  $\hat{R}(\hat{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}})} \equiv e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}}$ . Valendo  $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$  e  $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$ , deve risultare  $[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k$ . Si ha anche:

$$\begin{aligned} [\hat{S}^2, \hat{S}_a] &= 0 \\ \begin{cases} \hat{S}^2 |s, s_z\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, s_z\rangle, & s = \frac{n}{2} \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots \\ \hat{S}_z |s, s_z\rangle = \hbar s_z |s, s_z\rangle, & -s \leq s_z \leq s \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11.1)$$

### 2.11.1 Esempio – Sistema di spin 1/2 (parte 1)

Si considera per esempio un sistema (una particella tipo elettrone) di spin 1/2. Lo studio di un sistema del genere consiste nel trascurare qualunque altro aspetto del sistema se non il suo spin. In altre parole, gli stati del sistema in esame saranno unicamente stati di spin e non coinvolgeranno energia o altri valori.

Per  $s = 1/2$ , si ha  $m = 1/2$ ,  $m = -1/2$  perché  $m$  si muove a passi di 1 tramite gli operatori di salita e discesa, quindi il sistema ha un totale di due gradi di libertà. Questo significa che gli stati prendono valori in uno spazio vettoriale

bidimensionale, pertanto gli operatori di spin saranno matrici hermitiane  $2 \times 2$ . In questo caso, la forma matriciale degli operatori di spin è ottenuta tramite le matrici di Pauli:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_1 \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2}\hbar\sigma_2 \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_3 \quad (2.11.2)$$

dove i coefficienti  $\hbar/2$  servono a rendere esatte le relazioni dell'algebra di tali operatori.

Da §6.2.1 e §6.2.2, si sa che  $\sigma_3$ , quindi  $\hat{S}_z$ , fornisce una base completa per il sistema ed è data da

$$\left\{ |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si vede che  $|\uparrow\rangle = |s = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ , mentre  $|\downarrow\rangle = |s = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ <sup>1</sup>:

$$\hat{S}_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi  $m = 1/2$  effettivamente perché è l'autovalore di  $\hat{S}_z$ . Questo dimostra che lo spin up coincide con  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$  e, quindi, il down coincide con  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Sia  $|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$  un generico stato; la probabilità di trovare il sistema nello stato  $|\uparrow\rangle$  in questo sistema è, per definizione,  $|\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$ ; analogamente, la probabilità di trovarlo in  $|\downarrow\rangle$  è  $|\langle\downarrow|\psi\rangle|^2 = |\beta|^2$ . Per normalizzazione dello stato, la somma di queste fa 1, coerentemente con quanto ci si sarebbe aspettato.

### 2.11.2 Esempio – Sistema di spin 1/2 (parte 2)

Si considera ancora  $s = 1/2$ , per cui l'autovalore di  $\hat{S}_z$  è:  $m = s_z = -1/2, 1/2$ . L'autovalore di  $\hat{S}^2$ , invece, ha valore  $3/4$ . In unità naturali, si considera  $\hat{S}_a = \sigma_a/2$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Gli elementi della base completa si indicano con  $|s, m\rangle$  e si prende, come base completa, gli autostati di  $\hat{S}_z$ .

Ora si studia l'effetto di una rotazione, attorno all'asse  $\hat{n}$  e di angolo  $\theta$ , su un generico stato  $|\psi\rangle = a |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + b |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ . Tale rotazione sarà data da  $\hat{R}(\hat{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{n}\cdot\hat{S}\theta}$ ; se ne cercherà rappresentazione matriciale per ottenere autovalori e autovettori. Il versore in coordinate polari è  $\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , quindi:

$$\hat{n} \cdot \hat{S} = \frac{1}{2}\hbar\hat{n} \cdot \hat{\sigma} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\hbar M$$

<sup>1</sup>Si sottintende  $\hbar = 1$ .

**ESERCIZIO 2.1.**

Si cercano autovalori e autovettori di  $M$ .

*Svolgimento.* Per gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \lambda^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

quindi  $\lambda_{\pm} = \pm 1$ . Quindi gli autovettori sono:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \mp 1 & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \mp 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \iff a(\cos \theta \mp 1) + be^{-i\varphi} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow b = e^{i\varphi} \frac{\pm 1 - \cos \theta}{\sin \theta} a$$

dove il segno superiore è relativo a  $\lambda = 1$ , mentre quello inferiore a  $\lambda = -1$ . Queste possono essere riscritte meglio usando le identità trigonometriche  $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ ,  $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$  e  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ :

$$b_+ = e^{i\varphi} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} a_+ = e^{i\varphi} \frac{2 \sin^2 \theta/2}{2 \cos \theta/2 \sin \theta/2} a_+ = e^{i\varphi} \frac{\sin \theta/2}{\cos \theta/2} a_+$$

$$b_- = -e^{i\varphi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} a_- = -e^{i\varphi} \frac{2 \cos^2 \theta/2}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} a_- = -e^{i\varphi} \frac{\cos \theta/2}{\sin \theta/2} a_-$$

Così facendo, si possono ottenere degli autovettori scritti in maniera simmetrica prendendo  $a_+ = e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2$  e  $a_- = -e^{-\varphi/2} \sin \theta/2$ :

$$|v_+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad |v_-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \theta/2 \\ e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix}$$

♠

**OSSERVAZIONE 2.2.** Si nota che gli autovalori si sarebbero potuti determinare in principio senza calcoli: il sistema è invariante per rotazioni per assunzione, quindi, visto che ruotando  $\hat{S}_z$  lungo un altro asse, il sistema deve rimanere uguale, anche i suoi autovalori devono rimanere invariati.

A questo punto, gli autostati di  $\hat{R} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{n} \cdot \hat{S} \theta}$  sono gli stessi di  $\hat{n} \cdot \hat{S}$ , che, a loro volta, sono gli stessi di  $M$ .



### 2.11.3 Gli angoli di Eulero e le matrici di Wigner

Permettono di esprimere la rotazione più generica. Si indicherà rotazione con  $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ . Usando base completa  $|jm\rangle$ , si verifica che  $\langle j'm'|\hat{R}|jm\rangle \equiv \langle \hat{R} \rangle = M\delta_{j'j}$ , con  $M$  matrice generica; per farlo, si usa  $[\hat{J}^2, \hat{R}] = 0$ :

$$\begin{cases} \langle j'm'|\hat{J}^2\hat{R}|jm\rangle = j'(j'+1)\langle \hat{R} \rangle \\ \langle j'm'|\hat{J}^2\hat{R}|jm\rangle = j(j+1)\langle \hat{R} \rangle \end{cases} \iff j = j'$$

Si indica  $\langle \hat{R} \rangle \equiv D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$ , con  $\alpha, \beta, \gamma$  una delle possibili parametrizzazioni. Usando base  $|jm\rangle$ :

$$\hat{R}|jm\rangle = \sum_{j'm'} |j'm'\rangle \langle j'm'|\hat{R}|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma)$$

Significa che per ogni rotazione,  $j$  è fissato.

Si calcolano elementi di  $D_{m,m'}^j$ . Per farlo, si considera che una generica rotazione si può spezzare nella composizione delle rotazioni per ciascun angolo di Eulero:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{R}(\hat{z}', \gamma)\hat{R}(\hat{u}, \beta)\hat{R}(\hat{z}, \alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{z}'\cdot\mathbf{J}}e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{u}\cdot\mathbf{J}}e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{z}\cdot\mathbf{J}}$$

con  $\hat{u}$  versore  $\hat{y}$  dopo rotazione attorno all'asse  $\hat{z}$ , di angolo  $\alpha$  e  $\hat{z}'$  versore  $\hat{z}$  che si ottiene dopo rotazione attorno a  $\hat{u}$  di angolo  $\beta$ . Si può dimostrare che:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z}e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} D_{m,m'}^j(\alpha, \beta, \gamma) &= \langle jm' | e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z} | jm \rangle = e^{i(\alpha m' - \gamma m)} \langle jm' | e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} | jm \rangle \\ &\equiv e^{-i(\alpha m' + \gamma m)} d_{m,m'}^j(\beta) \end{aligned} \quad (2.11.3)$$

Le matrici  $D, d$  sono note come **matrici di Wigner**.

#### ESEMPIO 2.1 — MATRICE DI WIGNER PER SPIN 1/2.

Si vuole calcolare  $d_{m,m'}^j(\beta)$  nel caso di  $s = 1/2$ . In questo caso, in unità naturali,  $J_y = \sigma_y/2$ , quindi si deve calcolare  $e^{-\frac{i}{2}\beta\sigma_y}$ . Si ha:

$$e^{-i\frac{\beta\sigma_y}{2}} = \cos \frac{\beta}{2} - i\sigma_y \sin \frac{\beta}{2}$$

Allora:

$$d_{m,m'}^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & -\sin \beta/2 \\ \sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \quad (2.11.4)$$

Da questa, si ricava

$$D_{m,m'}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(\alpha m' + \gamma m)} \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & -\sin \beta/2 \\ \sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \quad (2.11.5)$$

Facendo agire questa rotazione sulle armoniche sferiche, che sono gli autostati del momento angolare orbitale, si deve ottenere lo stesso effetto che su  $|jm\rangle$ , quindi:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta', \varphi') = \sum_{m'} Y_{lm'}(\theta, \varphi) D_{m',m}^\ell(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.11.6)$$

#### 2.11.4 Regole di superselezione

Si considera una rotazione di  $\theta = 2\pi$  attorno all'asse  $\hat{z}$ ; questa agisce su un autostato nel seguente modo:

$$\hat{R}_{2\pi} |jm\rangle = e^{-i2\pi \hat{J}_z} |jm\rangle = e^{-i2\pi m} |jm\rangle = (e^{-i\pi})^{2m} |jm\rangle = (-1)^{2m} |jm\rangle$$

Si nota che  $m$  dipende direttamente da  $j$ : se  $j \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \mathbb{Z} \Rightarrow (-1)^{2m} = 1$ ; al contrario, se fosse  $j$  semintero<sup>1</sup>, visto che ogni valore di  $m$  si trova a passi di 1 da  $j$ , significa che  $m$  rimane semintero<sup>2</sup>. Allora si può più semplicemente scrivere che

$$\hat{R}_{2\pi} |jm\rangle = (-1)^{2j} |jm\rangle \quad (2.11.7)$$

**OSSERVAZIONE 2.3.** Nel caso di spin semintero (quindi per fermioni) si osserva che una rotazione di  $2\pi$  non è sufficiente a far tornare il sistema allo stesso punto di partenza.

Dal punto di vista fisico, nonostante gli stati possono subire variazioni a seguito di rotazioni di  $2\pi$ , si deve comunque verificare un'invarianza degli operatori: le misure che si compiono ruotando il sistema di  $2\pi$  devono essere le stesse. Per imporre questa condizione su un osservabile  $\hat{O}$  generico, si richiede

<sup>1</sup>Cioè della forma  $n/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>2</sup>Infatti se 2 non divide  $n \Rightarrow n = 2q + r$ ,  $q \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq r < 2$ , pertanto sommando un  $k \in \mathbb{N}$ , si trova  $(n + 2k)/2$ . Si deve mostrare che questo non è divisibile per 2 ed è immediato, visto che  $n + 2k = 2(q + k) + r \equiv 2n' + r$ .

$[\hat{O}, \hat{R}_{2\pi}] = 0$ . D'ora in poi, ogni osservabile che sia *un buon osservabile*, soddisfa automaticamente  $[\hat{O}, \hat{U}] = 0$ .

Usare operatori che soddisfano questa richiesta non è sufficiente a rendere indifferente il risultato in eq. 2.11.7. Sia  $\hat{U} \equiv \hat{R}_{2\pi}$  e sia  $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle \neq |\psi\rangle$ ; per osservabile  $\hat{A}$  tale che  $[\hat{A}, \hat{U}] = 0$ :

$$\langle\psi'|\hat{A}|\psi'\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

visto che  $[\hat{A}, \hat{U}] = 0 \Rightarrow \hat{A}\hat{U} = \hat{U}\hat{A} \Rightarrow \hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} = \hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{A} = \hat{A}$ , essendo  $\hat{U}$  unitario. Questo significa che se anche gli stati non rimangono invariati sotto rotazione di  $2\pi$ , nel caso in cui l'osservabile commuti con tale rotazione, il suo valore medio sullo stato rimane invariato.

Visto che  $\hat{R}_{2\pi}|jm\rangle = (-1)^{2j}|jm\rangle$ , alcuni stati prenderanno un segno negativo, altri no:

$$\hat{R}_{2\pi}|+\rangle = |+\rangle \quad \hat{R}_{2\pi}|-\rangle = -|-\rangle$$

Se  $[\hat{A}, \hat{R}_{2\pi}] = 0$ , usando sempre che  $\hat{R}_{2\pi}$  è unitario, si trova che:

$$\langle+|\hat{R}_{2\pi}\hat{A}|-\rangle = \langle+|\hat{A}\hat{R}_{2\pi}|-\rangle \Rightarrow \langle+|\hat{A}|-\rangle = -\langle+|\hat{A}|-\rangle \iff \langle+|\hat{A}|-\rangle = 0$$

dove si è applicato prima  $\hat{R}_{2\pi}$  su  $|+\rangle$  e poi su  $|-\rangle$ .

Le implicazioni di questo sono che gli stati a  $j$  intero e quelli a  $j$  semintero non interferiscono tra di loro. A questo punto, il valor medio di un operatore  $\hat{A}$  su uno stato composto dalla mistura di questi due, tipo  $|\psi_\omega\rangle = |+\rangle + e^{i\omega}|-\rangle$ , dipende singolarmente dal valor medio di  $\hat{A}$  su  $|+\rangle$  e su  $|-\rangle$ :

$$\langle\psi_\omega|\hat{A}|\psi_\omega\rangle = \langle+|\hat{A}|+\rangle + \langle-|\hat{A}|-\rangle$$

Questa è chiamata **regola di superselezione**.

### 2.11.5 Coefficienti di Clebsch-Gordan

Si considerano due sistemi a due livelli, 1 e 2, con momenti angolari fissati  $j_1, j_2$  rispettivamente. Hanno basi, rispettivamente,  $|j_1 m_1\rangle$  e  $|j_2 m_2\rangle$  di  $2j_1 + 1$  e  $2j_2 + 1$  elementi, mentre la base della composizione<sup>1</sup> è data da  $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$  e ha  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  elementi.

Si cerca un cambio di base da  $|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$  a  $|j_1, j_2, J, M\rangle$ , con  $J$  riferito a  $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2$  e  $M$  a  $\hat{J}_z = \hat{J}_{1,z} + \hat{J}_{2,z}$ , per sistema complessivo invariante rispetto

<sup>1</sup>La base della composizione di due sistemi è sempre il prodotto tensore delle basi, però quando vi è interazione, vi può essere la formazione di stati entangled che non sono esprimibili tramite stati di  $\mathcal{H}$ .

a rotazioni globali. È possibile usare gli autovalori di  $\hat{J}^2$  e  $\hat{J}_z$  come numeri quantici perché formano un set completo; questo si dimostra facendo vedere che  $\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$  commutano, cosa che deriva direttamente dal fatto che  $[\hat{J}_1^2, \hat{J}_2^2] = 0$  e dal fatto che commutano anche  $\hat{J}^2, \hat{J}_z$ .

Sia  $N(J)$  numero di set indipendenti associati a  $J^1$  e  $n(M)$  numero di stati con autovalore  $M$ . Si ha:

$$n(M) = \sum_{J \geq |M|} N(J) \quad (2.11.8)$$

Questa implica che  $N(J) = n(J) - n(J + 1)$ . Inoltre, si ha che:

$$n(M) = \begin{cases} 0 & , |M| > j_1 + j_2 \\ j_1 + j_2 + 1 - |M| & , j_1 + j_2 \geq |M| \geq |j_1 - j_2| \\ 2 \min \{j_1, j_2\} + 1 & , |j_1 - j_2| \geq |M| \geq 0 \end{cases} \quad (2.11.9)$$

Allora

$$N(J) = n(J) - n(J + 1) \implies N(J) = \begin{cases} 1 & , |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.11.10)$$

**ESEMPIO 2.2 — CASO  $j_1 = j_2 = 1$ .**

Si considera il caso  $j_1 = j_2 = 1$ , quindi  $m_1, m_2 = 1, 0, -1$ . Si calcola  $n(M)$ , che sarebbe il numero di stati con  $m_1, m_2$  tali che  $m_1 + m_2 = M$ . In questo caso  $-2 \leq M \leq 2$ , quindi si calcolano i seguenti.

- $n(2) = 1$ , perché l'unica combinazione che restituisce  $M = 2$  è  $m_1 = m_2 = 1$ .
- $n(1) = 2$  perché si può ottenere da  $(m_1, m_2) = (1, 0)$  o  $(0, 1)$ .
- $n(0) = 3$  perché si può ottenere da  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$  o  $(-1, 1)$ .

Conseguentemente si ha:

- $N(2) = n(2) - n(3) = 1 - 0 = 1$ ;
- $N(1) = n(1) - n(2) = 2 - 1 = 1$ ;
- $N(0) = n(0) - n(1) = 3 - 2 = 1$ .

Questo è servito a dimostrare che nella base  $|j_1 j_2 J M\rangle$ , ad ogni valore fissato di  $J$ , si ha un singolo set di  $M$  perché  $N(J)$  è al massimo 1 e i valori di  $J$  sono tali per cui  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ .

---

<sup>1</sup>Con set si intende l'insieme degli stati che, a fissato  $J$ , hanno  $-J \leq M \leq J$  diverso.

Pertanto è possibile passare dalla base  $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$  alla base  $|j_1 j_2 JM\rangle$  perché quest'ultima è ben definita. La relazione tra le due basi è data dai **coefficienti di Clebsch-Gordan**:

$$\begin{aligned} |j_1 j_2 JM\rangle &= \sum_{m_1, m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM\rangle \\ &\equiv \sum_{m_1, m_2} C_{j_1 j_2 m_1 m_2}^{JM} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \end{aligned} \quad (2.11.11)$$

Questi coefficienti possono essere scelti reali tramite fasi per gli stati. La relazione si può invertire per scrivere  $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$  tramite il complesso coniugato di  $C_{j_1 j_2 m_1 m_2}^{JM}$ . Per il seguito, **si assumeranno reali**.

Questi coefficienti, essendo trasformazioni unitarie, soddisfano le seguenti relazioni<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, m_2} C_{j_1 j_2 m_1 m_2}^{JM} C_{j_1 j_2 m'_1 m'_2}^{J'M'} &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \\ \sum_{J, M} C_{j_1 j_2 m_1 m_2}^{JM} C_{j_1 j_2 m'_1 m'_2}^{JM} &= \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned} \quad (2.11.12)$$

#### 2.11.6 Esempio – Coefficienti di Clebsch-Gordan per due spin 1/2

Si considera la composizione di due spin 1/2, cioè  $j_1 = j_2 = 1/2$ . In questo caso, la base data dal prodotto tensore è della forma

$$\left| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle$$

Si vogliono calcolare i coefficienti di Clebsch-Gordan per passare da  $\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right\rangle$  a  $\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} JM \right\rangle$ .

Per iniziare, si considerano  $|j_1 j_2 JM\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 11 \right\rangle$  e  $\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 -1 \right\rangle$ ; dovendo avere  $M = 1, -1$ , l'unica possibilità è, rispettivamente,  $m_1 = m_2 = 1/2$  e  $m_1 = m_2 = -1/2$ , quindi, in entrambi i casi, i coefficienti di Clebsch-Gordan sono pari a 1:

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 11 \right\rangle = C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{11} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \quad \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 -1 \right\rangle = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Si riprende l'operatore discesa  $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y = \hat{J}_{1,-} + \hat{J}_{2,-}$ , che è tale per cui  $\hat{J}_- |JM\rangle = [(J-M+1)(J+M)]^{1/2} |J, M-1\rangle$ . Tramite questo, si possono calcolare

<sup>1</sup>Si ottengono sostituendo i coefficienti di una delle due equazioni (quelle per  $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$  e  $|j_1 j_2 JM\rangle$  per il cambio di base) e imponendo che valga l'uguaglianza.

gli altri coefficienti:

$$\hat{J}_- \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 11 \right\rangle = \sqrt{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 10 \right\rangle = (\hat{J}_{1,-} + \hat{J}_{2,-}) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle^{(1)} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle^{(2)} = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle^{(1)} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle^{(1)} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle^{(2)}$$

da cui

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 10 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

L'ultimo si trova per ortogonalità con gli altri ed è:

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

Ricapitolando, i coefficienti di Clebsch-Gordan sono:

$$C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}^{11} = 1 \quad C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}^{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}^{00} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e gli altri sono nulli.

### 2.11.7 Operatori tensoriali irriducibili

Si ricorda che

$$\langle j' m' | \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) | j m \rangle = \delta_{jj'} D_{m' m}^j(\alpha, \beta, \gamma)$$

che è equivalente a

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) | j m \rangle = \sum_{m'} | j m' \rangle D_{m' m}^j(\alpha, \beta, \gamma)$$

**DEFINIZIONE 2.1 — OPERATORI TENSORIALI IRRIDUCIBILI.**

Si parla di **operatori tensoriali irriducibili** (ITO, *irreducible tensor operators*) riferendosi all'insieme di operatori  $\hat{T}_q^{(k)}$ ,  $-k \leq q \leq k$  (quindi sono  $2k + 1$  elementi) che soddisfano:

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) \hat{T}_q^k \hat{R}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^k D_{q' q}^k(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.11.13)$$

**ESEMPIO 2.3 — ITO SCALARI.**

Si considera  $\hat{T}_0^0$ ; allora:

$$\hat{R} \hat{T}_0^0 \hat{R}^{-1} = \hat{T}_0^0 D_{00}^0(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{T}_0^0$$

cioè  $\hat{T}_0^0$  è un operatore scalare.

Sia  $\hat{V}$  un generico operatore vettoriale (tipo la posizione o il momento); se ne costruiscono gli ITO come segue:

$$\hat{T}_1^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{V}_x + i\hat{V}_y) \quad \hat{T}_0^1 = \hat{V}_z \quad \hat{T}_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{V}_x - i\hat{V}_y) \quad (2.11.14)$$

Per definizione, si ha<sup>1</sup>:

$$\hat{R}\hat{T}_q^k\hat{R}^{-1} = \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^k D_{q'q}^k = \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^k \langle kq' | \hat{R} | kq \rangle$$

Si esprime  $\hat{R} = 1 - i\epsilon \hat{n} \cdot \hat{J}$  come rotazione infinitesima e, sostituendo, si trova:

$$\hat{T}_q^k - i\epsilon [\hat{n} \cdot \hat{J}, \hat{T}_q^k] = \hat{T}_q^k - i\epsilon \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^k \langle kq' | \hat{n} \cdot \hat{J} | kq \rangle$$

da cui

$$[\hat{n} \cdot \hat{J}, \hat{T}_q^k] = \sum_{q'} \hat{T}_{q'}^k \langle kq' | \hat{n} \cdot \hat{J} | kq \rangle \quad (2.11.15)$$

Da questa relazione, si possono calcolare le regole di commutazione coi vari operatori di momento angolare definiti; ricordando la definizione di operatore di salita, per esempio

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ |jm\rangle &= [j+m+1)(j-m)]^{1/2} |j, m+1\rangle \\ \Rightarrow [\hat{J}_+, \hat{T}_q^k] &= [(k-q)(k+q+1)]^{1/2} \hat{T}_{q+1}^k \end{aligned}$$

oppure

$$[\hat{J}_z, \hat{T}_q^k] = q\hat{T}_q^k$$

### 2.11.8 Teorema di Wigner-Eckart

Siano gli stati di un sistema generico della forma  $|\alpha JM\rangle$ ; volendo calcolare

$$\langle \alpha' J' M' | T_q^k | \alpha JM \rangle = C_{JkMq}^{J'M'} \langle \alpha' J' || T_q^k || \alpha J \rangle$$

dove  $C$  sono i coefficienti di Clebsch-Gordan. L'importanza del teorema sta nel fatto che tutta la dipendenza da  $M, M', q$  sta in  $C_{JkMq}^{J'M'}$  e risulta utile nel calcolare rapporti fra elementi di matrice.

<sup>1</sup>Si nota che qui  $k, q, q', \dots$  sono autostati della forma  $|jm\rangle$  del momento angolare.

**ESEMPIO 2.4.**

Si usa il teorema nel caso di un operatore scalare  $\hat{S}$  che è della forma  $T_0^0$ :

$$\langle \alpha' J' M' | \hat{S} | \alpha J M \rangle = C_{J0M0}^{J'M'} \langle \alpha' J' || \hat{S} || \alpha J \rangle$$

Visto che  $C_{J0M0}^{J'M'} = \langle J0M0 | J_1 J_2 J M \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$ , si ha:

$$\langle \alpha' J' M' | \hat{S} | \alpha J M \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \langle \alpha' J' || \hat{S} || \alpha J \rangle$$

**2.12 Formulazione tramite path integral**

La formulazione tramite path integral si ottiene nel risolvere l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo in maniera alternativa. A partire da  $i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$ , si definisce  $\hat{U}(t, t_0)$  l'operatore generico che si occupa dell'evoluzione temporale; allora:

$$\begin{aligned} \langle x | \psi(t) \rangle &= \langle x | \hat{U}(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \int dx_0 \langle x | \hat{U}(t, t_0) | x_0 \rangle \langle x_0 | \psi(t_0) \rangle \\ &= \int dx_0 G(x, t; x_0, t_0) \psi(t_0) \end{aligned} \quad (2.12.1)$$

dove si sta assumendo di essere in 1D, ma non compromette la generalità del discorso. Dove il nucleo  $G(x, t; x_0, t_0)$  è detto **propagatore**.

Si ricorda che per  $t_2 < t_1 < t_0$ , l'evoluzione temporale  $\hat{U}(t_2, t_0)$  si può scrivere come  $\hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_0)$  e questo vale per un arbitrario numeri di istanti tra  $t_2$  e  $t_0$ . L'idea, adesso, è proprio quella di suddividere l'intervallo  $[t_0, t]$  in  $N$  intervalli, di modo che:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) &= \hat{U}(t, t_{N-1}) \hat{U}(t_{N-1}, t_{N-2}) \dots \hat{U}(t_1, t_0) \\ \Rightarrow \langle x | \hat{U}(t, t_0) | x_0 \rangle &= \langle x | \hat{U}(t, t_{N-1}) \hat{U}(t_{N-1}, t_{N-2}) \dots \hat{U}(t_1, t_0) | x_0 \rangle \end{aligned}$$

In mezzo a ciascun evolutore, si può inserire una base completa in modo da ottenere la seguente scrittura:

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{U}(t, t_0) | x_0 \rangle &= \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \langle x | \hat{U}(t, t_{N-1}) | x_{N-1} \rangle \dots \langle x_1 | \hat{U}(t_1, t_0) | x_0 \rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i G(x, t; x_{N-1}, t_{N-1}) \dots G(x_1, t_1; x_0, t_0) \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

**OSSERVAZIONE 2.4.** Il significato di questa scrittura è di ottenere una somma su



tutti i possibili percorsi che portano da  $x_0$  a  $x$ ; infatti, visto che ogni propagatore, relativo a ciascun sotto-intervallo di  $[t_0, t]$ , è integrato sui possibili percorsi  $x_1, \dots, x_{N-1}$ , il risultato sarà una sovrapposizione di tutte le possibilità per passare da  $x_0$  a  $x$ .

La divisione in sotto-intervalli temporali serve per poter approssimare i propagatori nel limite di intervalli sufficientemente stretti. Assumendo un Hamiltoniano della forma  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ , il generico propagatore è scritto come

$$G(x, t; x', t') = \left\langle x \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} \right| x' \right\rangle$$

L'idea è di usare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{\alpha \hat{X}} e^{\alpha \hat{Y}} = e^{\alpha \hat{Z}}, \quad \hat{Z} = \hat{X} + \hat{Y} + \frac{\alpha}{2} [\hat{X}, \hat{Y}] + \dots$$

Tramite approssimazione al primo ordine di sviluppo, cioè  $\hat{Z} \simeq \hat{X} + \hat{Y}$ , si può scrivere

$$\left\langle x \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t (\hat{T} + V(\hat{x}))} \right| x' \right\rangle \simeq \left\langle x \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{T}} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t V(\hat{x})} \right| x' \right\rangle = \left\langle x \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{T}} \right| x' \right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t V(x')}$$

dove si è usato che  $F(\hat{x})|x\rangle = F(x)|x\rangle$ . Per l'elemento di matrice rimanente, si ha:

$$\int dp \left\langle x \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t T(\hat{p})} \right| p \right\rangle \langle p | x' \rangle = \int dp e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \frac{p^2}{2m}} \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle$$

Si usa che  $\langle x | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{\frac{i}{\hbar} p x}$  e l'eq. 7.1.6 con  $a = \frac{i\Delta t}{2m\hbar}$  e  $b = -i(x' - x)$  per ottenere che

$$\int dp e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \frac{p^2}{2m}} \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle = \frac{1}{2m\hbar} \int dp e^{-\frac{i\Delta t p^2}{2m\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} p(x' - x)} = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t}} e^{i\frac{m(x-x')^2}{2\hbar\Delta t}}$$

Mettendo tutto insieme, si ottiene:

$$\begin{aligned} \left\langle x \left| e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} \right| x_0 \right\rangle &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \prod_{j=0}^{N-1} G(x_{j+1}, t_{j+1}; x_j, t_j) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \left( \frac{m}{i2\pi\hbar\Delta t} \right)^{N/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\} \end{aligned}$$

Si nota che  $N \rightarrow +\infty$  corrisponde a mandare  $\Delta t \rightarrow 0$  perché l'intervallo è fissato, quindi deve diminuire l'ampiezza di ciascun sotto-intervallo; in questo limite,

le somme diventano degli integrali:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta V(x_j) = \int_{t_0}^t dt V(x) \quad \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2 = \int_{t_0}^t dt \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

Conseguentemente, l'esponente dell'esponenziale diventa  $\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) = \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \mathcal{L}(x, \dot{x}) \equiv \frac{i}{\hbar} S(x[t])$ , dove  $\mathcal{L}$  è la Lagrangiana e  $S$  è l'azione. Complessivamente, si ha:

$$G(x, t; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} S(x[t])} \quad (2.12.3)$$

dove la misura di integrazione è:

$$\mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{N/2} \quad (2.12.4)$$

**OSSERVAZIONE 2.5.** Il termine cinetico della forma  $\frac{i}{\hbar} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta t} \right)^2$  risolve potenzialmente problemi di percorsi spigolosi, o comunque non regolari.

### 2.12.1 Particella libera

Per la teoria appena sviluppata, la formulazione tramite path integral della particella libera (che coinvolge solamente un termine cinetico) è espressa come:

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} T(t-t_0)} | x' \rangle = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \frac{m}{2} \dot{x}^2} \quad (2.12.5)$$

Per quanto l'integrale sia calcolabile, si ottiene il risultato in maniera alternativa:

$$\begin{aligned} \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} T(t-t_0)} | x' \rangle &= \int dp \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \frac{p^2}{2m}} | p \rangle \langle p | x' \rangle = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | x' \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \frac{p^2}{2m}} \\ &= \int dp e^{\frac{i}{\hbar} (x-x')p} e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \frac{p^2}{2m}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t-t_0)}} \exp \left[ i \frac{m(x-x_0)^2}{2\hbar(t-t_0)} \right] \end{aligned}$$

### 2.12.2 Oscillatore armonico

In questo caso, si deve calcolare

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) \hat{H}} | x_0 \rangle = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right)}$$

con  $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ . Questa volta, come base completa si usa quella fornita da  $\hat{H}$ :

$$\begin{aligned}\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | x_0 \rangle &= \sum_n \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} | n \rangle \langle n | x_0 \rangle = \sum_n \psi_n^*(x) \psi_n(x_0) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)} \\ &= \left( \frac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin \omega(t-t_0)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \frac{m\omega}{\sin \omega(t-t_0)} \left[ (x^2 + x_0^2) \cos \omega(t-t_0) - 2xx_0 \right] \right\}\end{aligned}$$

## 3 TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

### 3.1 Introduzione

Si assume che il sistema in esame sia descrivibile tramite  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$ , con  $\lambda$  parametro *piccolo*. Si vuole calcolare lo spettro, cioè risolvere

$$(\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1) |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (3.1.1)$$

Generalmente quello che si sperimenta in teoria delle perturbazioni è che il problema con  $\lambda = 0$  si sa risolvere ed è noto, quindi si vanno a studiare gli effetti che produce  $\hat{H}_1$  all'aumentare di  $\lambda$ .

Sia, allora,  $\hat{H}_0 |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle$  spettro noto. Gli autostati  $|n\rangle$  formano una base completa; il fatto che sia completa è indipendente dal fatto che siano autostati di  $\hat{H}$  o meno, quindi si può usare come tale anche quando  $\lambda \neq 0$ <sup>1</sup>.

In eq. 3.1.1 si devono trovare sia gli autostati  $|\psi_n\rangle$ , sia gli autovalori  $E_n$ ; per farlo, si segue il seguente *ansatz*:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \\ |\psi_n\rangle &= |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\psi_n^{(2)}\rangle \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

cioè si espande in potenze di  $\lambda$ .

Si assume che lo spettro di  $\hat{H}_0$  sia non degenero, cioè  $\epsilon_n = \epsilon_{n'} \Rightarrow |n\rangle = |n'\rangle$ . Inserendo questo *ansatz* in eq. 3.1.1:

$$(\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1) (|\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \dots) = (E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \dots) (|\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \dots)$$

Questa è vera se ciascun termine relativo ad una potenza di  $\lambda$  del membro di sinistra è uguale al relativo membro di sinistra. Per l'ordine 0, si ottiene il problema per  $\hat{H}_0$  come ci si sarebbe aspettato:

$$\hat{H}_0 |\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_n^{(0)}\rangle \implies \begin{cases} E_n^{(0)} = \epsilon_n \\ |\psi_n^{(0)}\rangle = |n\rangle \end{cases}$$

<sup>1</sup> Anche se il nuovo Hamiltoniano comprenda un potenziale che vincola il sistema ad una certa regione spaziale, gli stati al di fuori di questa regione sono ancora accessibili, ma avranno un modulo quadro della funzione d'onda prossimo a zero semmai. Questo per dire che la struttura dello spazio di Hilbert è determinata in principio, cioè dipende dal sistema considerato e non dallo specifico operatore Hamiltoniano che agisce su di esso.

Per il primo e il secondo ordine perturbativo, si trova:

$$\begin{aligned}(\hat{H}_0 - E_n^{(0)})|\psi_n^{(1)}\rangle &= (E_n^{(1)} - \hat{H}_1)|\psi_n^{(0)}\rangle \\(\hat{H}_0 - E_n^{(0)})|\psi_n^{(2)}\rangle &= (E_n^{(1)} - \hat{H}_1)|\psi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)}|\psi_n^{(0)}\rangle\end{aligned}$$

Si vede facilmente, allora, che per l'ordine  $r$ , si ha:

$$(\hat{H}_0 - E_n^{(0)})|\psi_n^{(r)}\rangle = (E_n^{(1)} - \hat{H}_1)|\psi_n^{(r-1)}\rangle + E_n^{(2)}|\psi_n^{(r-2)}\rangle + \dots + E_n^{(r)}|\psi_n^{(0)}\rangle \quad (3.1.3)$$

Visto che  $|n\rangle$  è una base completa, si possono espandere gli autostati del problema perturbato:  $|\psi_n\rangle = \sum_{n'} |n'\rangle \langle n'|\psi_n\rangle$ , con  $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$ .

Inoltre, non si normalizzano ad 1 gli stati (cioè non si impone  $\langle \psi_n|\psi_n\rangle \stackrel{!}{=} 1$ ), ma, per comodità di calcolo, si prende la seguente normalizzazione:

$$\langle \psi_n^{(0)}|\psi_n\rangle = \langle n|\psi_n\rangle \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.1.4)$$

il che implica

$$\langle \psi_n|\psi_n\rangle = \left( \sum_{n'} \langle \psi_n|n'\rangle \langle n'| \right) \left( \sum_{n''} |n''\rangle \langle n''|\psi_n\rangle \right) = \sum_{n'} |\langle \psi_n|n'\rangle|^2 \Rightarrow 1$$

**OSSERVAZIONE 3.1.** Questo verrà rinormalizzato correttamente alla fine dei calcoli per cui si necessita l'altra condizione di normalizzazione, cosa che è possibile perché le equazioni sono omogenee.

Questa normalizzazione è utile per quanto segue:

$$1 = \langle n|\psi_n\rangle = \langle n| \left( |\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \dots \right) = \langle n|\psi_n^{(0)}\rangle + \lambda \langle n|\psi_n^{(1)}\rangle + \dots$$

ma visto che  $\psi_n^{(0)} = n \Rightarrow \langle n|\psi_n^{(0)}\rangle = \langle n|n\rangle = 1$ , allora  $\forall r > 0$ ,  $\langle n|\psi_n^{(r)}\rangle = 0$ .

### 3.1.1 Primo ordine perturbativo

Si studia  $(\hat{H}_0 - E_n^{(0)})|\psi_n^{(1)}\rangle = (E_n^{(1)} - \hat{H}_1)|\psi_n^{(0)}\rangle$ ; si può sviluppare  $|\psi_n^{(1)}\rangle$  nella base fornita da  $\hat{H}_0$ :  $|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{n' \neq n} |n'\rangle \langle n'|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{n' \neq n} a_{n'}^{(1)} |n'\rangle$ , dove si è scritto

$n \neq n'$  perché  $\langle n | \psi_n^{(r)} \rangle = 0, \forall r > 0$ . Da questo, si ha:

$$\left( \hat{H}_0 - E_n^{(0)} \right) \sum_{n' \neq n} a_{n'}^{(1)} |n'\rangle = \left( E_n^{(1)} - \hat{H}_1 \right) |n\rangle$$

Moltiplicando a destra e sinistra per un elemento della base  $\langle m|$ :

$$\begin{aligned} \langle m | \left( \hat{H}_0 - E_n^{(0)} \right) \sum_{n' \neq n} a_{n'}^{(1)} |n'\rangle &= \langle m | \left( E_n^{(1)} - \hat{H}_1 \right) |n\rangle \\ \Rightarrow (\epsilon_m - \epsilon_n) a_m^{(1)} &= E_n^{(1)} \delta_{mn} - \langle m | \hat{H}_1 | n \rangle \end{aligned}$$

dove si è fatto prima agire  $(\hat{H}_0 - E_n^{(0)})$  su  $\langle m|$  e poi si è portato questo su  $|n'\rangle$ , dove ha portato  $\delta_{n'm}$ . Si distinguono diversi risultati a seconda di  $m$ .

$$\begin{aligned} m = n &\Rightarrow E_n^{(1)} = \langle n | \hat{H}_1 | n \rangle \\ m \neq n &\Rightarrow a_m^{(1)} = \frac{\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_m} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Allora:

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} |m\rangle \frac{\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_m} \quad (3.1.6)$$

Le **condizioni dello sviluppo** sono date dalla verifica che gli ordini correttivi sono sempre molto più piccoli del relativo ordine precedente. In questo caso, quindi, deve risultare

$$|\langle m | \lambda \hat{H}_1 | n \rangle| \ll |\epsilon_n - \epsilon_m|$$

dove si è inserito  $\lambda$  perché il termine che compare nello sviluppo è  $\lambda |\psi_n^{(1)}\rangle$ .

### 3.1.2 Ordini superiori

Riprendendo la generica equazione per ordine  $r$  e moltiplicando ambo i membri per  $\langle n|$ :

$$\begin{aligned} \langle n | \left( \hat{H}_0 - E_n^{(0)} \right) |\psi_n^{(r)}\rangle &= \langle n | \left[ \left( E_n^{(1)} - \hat{H}_1 \right) |\psi_n^{(r-1)}\rangle + E_n^{(2)} |\psi_n^{(r-2)}\rangle + \dots + E_n^{(r)} |\psi_n^{(0)}\rangle \right] \\ \Rightarrow 0 &= -\langle n | \hat{H}_1 | \psi_n^{(r-1)} \rangle + E_n^{(r)} \end{aligned}$$

dove si è usata la condizione di normalizzazione imposta precedentemente, cioè  $\langle n | \psi_n^{(r)} \rangle = 0, \forall r > 0$ . Pertanto, si ricava che

$$E_n^{(r)} = \langle n | \hat{H}_1 | \psi_n^{(r-1)} \rangle \quad (3.1.7)$$

Questo significa che, avendo calcolato i termini dell'ordine 1, si possono ricavare tutti gli altri. Per il **secondo ordine**, infatti, ricordando che

$$\lambda | \psi_n^{(1)} \rangle = \sum_{m \neq n} | m \rangle \frac{\langle m | \lambda \hat{H}_1 | n \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_m}$$

si ottiene:

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \hat{H}_1 | m \rangle \langle m | \hat{H}_1 | n \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_m} \quad (3.1.8)$$

### 3.1.3 Normalizzazione

Gli stati  $|\psi_n\rangle$  non sono normalizzati per aver scelto una diversa condizione di normalizzazione; assumendo, per esempio, che sia  $\langle \psi_n | \psi_n \rangle = Z_n$ , per rinormalizzare gli stati, è sufficiente prendere  $|\Psi_n\rangle = Z_n^{1/2} |\psi_n\rangle$ .

Svolgendo il calcolo, si trova che:

$$\left( \langle \psi_n^{(0)} | + \lambda \langle \psi_n^{(1)} | + \dots \right) \left( | \psi_n^{(0)} \rangle + \lambda | \psi_n^{(1)} \rangle + \dots \right) = 1 + \lambda^2 \langle \psi_n^{(1)} | \psi_n^{(1)} \rangle + \dots$$

Si nota che all'ordine  $\lambda$ , la normalizzazione è già verificata. Inserendo il risultato trovato, si conclude che il valore di  $Z_n$  all'ordine 2 (indicato con  $Z_n^{(2)}$ ) è:

$$Z_n^{(2)} = 1 + \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle|^2}{(\epsilon_n - \epsilon_m)^2} \quad (3.1.9)$$

**OSSERVAZIONE 3.2.** Sviluppando perturbativamente, la condizione di normalizzazione non necessita modifiche fintanto che non si arriva al secondo ordine.

### 3.1.4 Esempio – Sistema a due livelli

Si considera un sistema a due livelli in cui  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}$ . Come visto in esercizio 6.1, l' $\hat{H}$  più generale sarà la più generale matrice Hermitiana<sup>1</sup>:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & \lambda V_{12} \\ \lambda V_{21} & E_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

dove si è assunto che  $V_{12} = V_{21}$ , ma in generale sarebbe potuto valere anche  $V_{12} = V_{21}^*$ . Il motivo del nome degli elementi della forma matriciale è dovuto al fatto che l'Hamiltoniano si può riscrivere come

$$\hat{H} = \underbrace{a_0 \text{Id} + a_3 \sigma_3}_{\equiv \hat{H}_0} + \underbrace{a_1 \sigma_1}_{\lambda \hat{V}} \quad \hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_0^{(1)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \lambda \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda V_{12} \\ \lambda V_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

con  $a_0 = (E_1^{(0)} + E_2^{(0)})/2$ ,  $a_1 = \lambda V_{12}$  e  $a_3 = (E_1^{(0)} - E_2^{(0)})/2$ . Si è assunto  $E_1 > E_2$ .

Gli autovalori sono dati da:

$$E_{\pm} = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4} + \lambda^2 V_{12}^2} \quad (3.1.10)$$

Assumendo  $\lambda$  molto piccolo, si può sviluppare il termine sotto radice; ricordando che  $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2 - x^2/8$ , si trova

$$E_+ = E_1^{(0)} + \frac{\lambda^2 |V_{12}|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} \quad E_- = E_2^{(0)} - \frac{\lambda^2 |V_{12}|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}$$

Avendo, ora, sviluppato gli autovalori dell'Hamiltoniano per  $\lambda \ll 1$ , si possono confrontare con quanto previsto dalla teoria delle perturbazioni. Prendendo d'esempio  $E_+$ , effettivamente  $E_n^{(0)} = \epsilon_n$  perché, in  $E_+$ , il termine di ordine 0 è proprio l'energia dell'Hamiltoniano non perturbato.

Si nota, poi, che  $E_n^{(1)} = \langle n | \hat{H}_1 | n \rangle$ , in questo caso, è nullo perché la perturbazione è fuori diagonale; infatti, non vi è termine di ordine 1 in  $\lambda$  nell'espressione di  $E_+$ .

Infine, per l'ordine 2, si deve trovare

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle|^2}{\epsilon_n - \epsilon_m}$$

<sup>1</sup>La perturbazione è unicamente fuori diagonale per assunzione.



il che coincide proprio con quanto riporta il termine di ordine 2 in  $E_+$ .

### 3.1.5 Esempio – Oscillatore armonico

L'Hamiltoniano è

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2$$

A questo si aggiunge il termine perturbativo  $\lambda\hat{H}_1 = \lambda\hat{q}$  (quindi della forma di un potenziale, vista la dipendenza dalle coordinate).

Per oscillatore armonico, si conosce  $E_n^{(0)} = \epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ , mentre dalla teoria delle perturbazioni si sa che

$$E_n^{(1)} = \langle n|\hat{q}|n\rangle \quad E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m|\hat{q}|n\rangle|^2}{\epsilon_m - \epsilon_n}$$

**OSSERVAZIONE 3.3.** Il primo ordine è sempre 0. Questo è dovuto al fatto che gli autostati dell'oscillatore armonico hanno parità ben definita, quindi in

$$\langle n|\hat{q}|n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_n^{(0)})^* q \psi_n^{(0)} dq$$

gli  $\psi_n^{(0)}$  hanno parità ben definita, quindi il loro prodotto è sempre pari, mentre la posizione è dispari, quindi l'integrale fa 0.

Si riscrive l'Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + \lambda\hat{q} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{q} + \frac{\lambda}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$$

Si prende  $\hat{Q} = \hat{q} + \lambda/m\omega^2$ , che conserva le leggi di commutazione con  $\hat{P}$ , e si ottiene

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2 - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} \implies E_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$$

Ora che si è risolto esattamente il problema, si confronta la soluzione con quanto previsto dalla teoria delle perturbazioni. Si è già visto che il primo ordine perturbativo è nullo, quindi si calcola il termine del secondo ordine.

L'idea per il calcolo è di partire dalla definizione degli operatori di salita e

discesa e ricavare un'espressione di  $\hat{q}$  in termini di questi due; si ottiene

$$\hat{q} = \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

### 3.2 Teoria delle perturbazioni per spettri degeneri

Nel caso non-degenere, l'ordine 0 della perturbazione implicava  $|\psi_n^{(0)}\rangle = |n\rangle$ . Nel caso di degenerazione, si indicano gli stati di  $\hat{H}_0$  come  $|n, r\rangle$  dove  $r$  dà la degenerazione di  $n$ ; si ha, per definizione,  $\hat{H}_0 |n, r\rangle = \epsilon_n |n, r\rangle$ , con  $\langle n, r | n, s \rangle = \delta_{rs}$ . Lo stato all'ordine 0 si scrive, allora, come

$$|\psi_{n,r}^{(0)}\rangle = \sum_s c_{rs} |n, s\rangle \quad (3.2.1)$$

Si cercano i coefficienti  $c_{rs}$ . Al primo ordine in  $\lambda$ , si ha  $E_{nr} = E_{nr}^{(0)} + \lambda E_{nr}^{(1)}$  e  $|\psi_{nr}\rangle = |\psi_{nr}^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_{nr}^{(1)}\rangle$ . L'equazione del primo ordine perturbativo è, moltiplicando ambo i membri per  $\langle ns|$ :

$$\begin{aligned} \langle ns | (\hat{H}_0 - \epsilon_n) |\psi_{nr}^{(1)}\rangle &= \langle ns | (E_{nr}^{(1)} - \hat{H}_1) |\psi_{nr}^{(0)}\rangle \\ \Rightarrow 0 &= \langle ns | (E_{nr}^{(1)} - \hat{H}_1) \sum_{r'} c_{rr'} |nr'\rangle \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{r'} [E_{nr} \delta_{sr'} - \langle ns | \hat{H}_1 | nr' \rangle] c_{rr'} \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'equazione agli autovalori  $M_{sr'} c_{rr'} = E_{nr}^{(1)} \delta_{sr'} c_{rr'}$ . Questa permette di ottenere i coefficienti per gli stati all'ordine 0 e anche gli autovalori.

Immaginando di aver scelto in principio una base di autostati  $|k\rangle$  che diagonalizza, all'interno della degenerazione, anche  $\hat{H}_1$ . In termini di questi  $|k\rangle$ , tutta la trattazione precedente torna valida.

#### 3.2.1 Esempio – Sistema a due livelli degeneri

Si considera il caso in cui

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix}$$

con  $v \in \mathbb{C}, |v| \ll 1$ . Si considera il problema agli autovalori  $(\hat{H}_0 + \hat{H}_1) |\psi\rangle = E |\psi\rangle$ , che si risolve da

$$\begin{vmatrix} \epsilon_1 - E & v \\ v^* & \epsilon_2 - E \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \implies E^2 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)E + (\epsilon_1\epsilon_2 - |v|^2) = 0$$

da cui

$$\implies E_{\pm} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4|v|^2} \quad (3.2.2)$$

Nel caso di degenerazione, cioè  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ , non si hanno problemi in questa soluzione esatta: si trova  $E_{\pm} = \epsilon \pm |v|$ .

La formula perturbativa per il secondo ordine correttivo nell'energia è

$$E_n^{(2)} = \sum_{n \neq m} \frac{|\langle m | \hat{H}_1 | n \rangle|^2}{\epsilon_n - \epsilon_m}$$

che porta a qualcosa della forma  $|v|^2/(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ . Nel caso di degenerazione, questa non va più bene. Questo crea problemi anche nel caso in cui  $|\epsilon_1 - \epsilon_2| \ll 1$ .

*Da continuare...*

### 3.2.2 Soluzione operatoriale

Si riparte da capo, assumendo di avere Hamiltoniano  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$  e conoscere lo spettro di  $\hat{H}_0$ , dato da  $\hat{H}_0 |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle$ , ma non si fanno altre assunzioni. Di nuovo si trova che  $\hat{H} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \implies (E_n - \hat{H}_0) |\psi_n\rangle = \lambda \hat{H}_1 |\psi_n\rangle$ . Si definisce l'operatore

$$\hat{Q}_n := \sum_{r \neq n} |r\rangle \langle r| = 1 - |n\rangle \langle n| \quad (3.2.3)$$

che è un proiettore su tutti gli stati a parte  $n$ , il che giustifica la seconda uguaglianza. Visto che il  $\hat{Q}_n$  è scritto in termini degli autostati di  $\hat{H}_0$ , si ha  $[\hat{Q}_n, \hat{H}_0] = 0$ .

Con la normalizzazione  $\langle \psi_n | n \rangle = 1$ , si può scrivere un generico autostato di  $\hat{H}$  come:

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + \hat{Q}_n |\psi_n\rangle \quad (3.2.4)$$

Applicando  $\hat{Q}_n$  a sinistra di entrambi i membri dell'equazione di Shrödinger e usando il fatto che commuta con  $\hat{H}_0$ , si trova che:

$$(E_n - \hat{H}_0) \hat{Q}_n |\psi_n\rangle = \hat{Q}_n \hat{H}_1 |\psi_n\rangle$$

La soluzione di questa si ottiene assumendo che l'operatore  $(E_n - \hat{H}_0)$  non sia degenere; allora si può moltiplicare per il suo inverso e ottenere

$$\hat{Q}_n |\psi_n\rangle = (E_n - \hat{H}_0)^{-1} \hat{Q}_n \hat{H}_1 |\psi_n\rangle$$

Si definisce  $\hat{R}_n = (E_n - \hat{H}_0)^{-1} \hat{Q}_n = \hat{Q}_n (E_n - \hat{H}_0)^{-1}$ ; allora:

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + \hat{R}_n \hat{H}_1 |\psi_n\rangle \quad (3.2.5)$$

Questa riscrittura permette uno sviluppo perturbativo tramite serie di potenze.

### 3.2.3 Limite a spettro non-degnere

Si vuole studiare la trattazione della teoria delle perturbazioni che permette di capire cosa succede quando, in presenza di degenerazioni, si influenzano il sistema in modo da rimuoverle. Un esempio pratico di questo è legato all'atomo di idrogeno, il quale ha momento angolare conservato, legato alla simmetria per rotazioni. Applicando un campo (elettrico o magnetico) esterno, questa simmetria si rompe e si vuole capire come questo si manifesta in teoria delle perturbazioni.

Si parte sempre da  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$ , con  $\hat{H}_0 |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle$  noto. Si cerca di risolvere  $\hat{H} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$ , assumendo in prima battuta che  $|\psi_n\rangle = |n\rangle + O(\lambda)$ . Questa assunzione era possibile unicamente quando  $\hat{H}_0$  aveva spettro non-degenere, quindi non sembra utile alla trattazione; il caso in esame, però, prevede di mettersi in una situazione di spettro *quasi-degenere*, quindi, per il momento, si prenderà per buona.

L'equazione per  $\hat{H}$  si riscrive come  $(E_n - \hat{H}_0) |\psi_n\rangle = \lambda \hat{H}_1 |\psi_n\rangle$ . Poi si riprende l'operatore  $\hat{Q}_n = \sum_{r \neq n} |r\rangle \langle r| = 1 - |n\rangle \langle n|$ , che permette di scrivere  $|\psi_n\rangle = |n\rangle + \hat{Q}_n |\psi_n\rangle$ ; inoltre, si ricorda che soddisfa  $[\hat{Q}_n, \hat{H}_0] = 0$  perché  $\hat{Q}_n$  è costruito tramite autostati di  $\hat{H}_0$ . Si userà la condizione di normalizzazione  $\langle n | \psi_n \rangle = 1$ .

**OSSERVAZIONE 3.4.** A volte, si potrebbe evitare di specificare  $\lambda$  affianco ad  $\hat{H}_1$ , ma questi vanno sempre l'uno con l'altro. Si può, però, assumere che  $\lambda$  venga inglobato nella definizione di  $\hat{H}_1$ , quindi, quando non scrive esplicitamente, lo si sottintende.

Si nota che

$$\begin{aligned}\hat{Q}_n(E_n - \hat{H}_0)|\psi_n\rangle &= \hat{Q}_n\hat{H}_1|\psi_n\rangle \\ \Rightarrow (E_n - \hat{H}_0)\hat{Q}_n|\psi_n\rangle &= \hat{Q}_n\hat{H}_1|\psi_n\rangle \\ \Rightarrow \hat{Q}_n|\psi_n\rangle &= (E_n - \hat{H}_0)^{-1}\hat{Q}_n\hat{H}_1|\psi_n\rangle\end{aligned}$$

Allora, definendo<sup>1</sup>

$$\hat{R}_n = (E_n - \hat{H}_0)^{-1}\hat{Q}_n = \sum_{r \neq n} \frac{|r\rangle\langle r|}{E_n - \epsilon_r}$$

si può scrivere  $|\psi_n\rangle = |n\rangle + \hat{R}_n\hat{H}_1|\psi_n\rangle$ .

Il vantaggio di questa scrittura è che si può arrivare ad uno sviluppo per  $|\psi_n\rangle$  perché il termine con  $\hat{H}_1$  è piccolo:

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + \hat{R}_n\lambda\hat{H}_1|n\rangle + \left(\hat{R}_n\lambda\hat{H}_1\right)^2|n\rangle + \dots = (1 - \hat{R}_n\lambda\hat{H}_1)^{-1}|n\rangle \quad (3.2.6)$$

dove il coefficiente  $(1 - \hat{R}_n\lambda\hat{H}_1)^{-1}$ , sviluppato con Taylor come sviluppo di  $1/(1 - x)$  porta all'espressione dell'uguaglianza precedente.

In questo modo, si riscrive l'equazione iniziale applicando il bra  $\langle n|$ :

$$\begin{aligned}\langle n|(\hat{H}_0 - \lambda\hat{H}_1)|\psi_n\rangle &= E_n\langle n|\psi\rangle = E_n \\ \Rightarrow E_n &= \epsilon_n\langle n|\lambda\hat{H}_1|\psi_n\rangle\end{aligned}$$

dove si è usata la condizione di normalizzazione  $\langle n|\psi_n\rangle = 1$ . Inserendo lo sviluppo di  $|\psi_n\rangle$ :

$$E_n = \epsilon_n + \langle n|\lambda\hat{H}_1|n\rangle + \sum_{m \neq n} \frac{\langle n|\lambda\hat{H}_1|m\rangle\langle m|\lambda\hat{H}_1|n\rangle}{E_n - \epsilon_m} \quad (3.2.7)$$

Per riottenere l'espressione del caso non-degenere, si deve sviluppare l' $E_n$  al denominatore del secondo membro.

### 3.2.4 Esempio – Sistema a due livelli

Si scelgono

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \quad \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Nella seconda uguaglianza, si è semplicemente fatto agire  $\hat{H}_0$  su  $|r\rangle\langle r|$  nella definizione di  $\hat{Q}_n$ .

Il problema risolto esattamente si è già fatto in eq. 3.2.2:

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + 4|v|^2}$$

Nel caso di degenerazione  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon \Rightarrow E_{\pm} = \epsilon \pm |v|$ . L'approssimazione in eq. 3.2.7 porta  $E_1 = \epsilon_1 + |v|^2/(E_1 - \epsilon_2)$ , che è l'equazione esatta che si ottiene dal calcolo degli autovalori della matrice  $\hat{H}$ .

### 3.3 Atomo di idrogeno

Si assume che il protone rimanga fermo e si considera solo il moto dell'elettrone. Nel caso in cui si volesse risolvere senza questa approssimazione, ci si mette nel centro di massa e si deve considerare la massa ridotta. Si considera l'Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{k}{\hat{r}}, \quad k \sim e^2$$

Nella soluzione vista in §2.10.2, uno stato era descritto da  $|n\ell m\rangle$ , con  $n = 1, 2, \dots$ ,  $0 \leq \ell < n$  e  $-m \leq \ell \leq m$ . La degenerazione è data da  $\sum_{\ell=0}^{n-1} 2\ell + 1 = n^2$ . Includendo lo spin, che per l'elettrone è  $\pm 1/2$ , la base completa sarà data da  $|n\ell m\rangle \otimes |s, s_z\rangle$ , per cui la degenerazione complessiva è  $2n^2$ , avendo due valori di spin possibili.

#### 3.3.1 Correzione relativistica

Dalla relatività ristretta, l'energia cinetica è:

$$K = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2 \simeq \frac{p^2}{2m} - \frac{(p^2)^2}{8m^3 c^2}$$

dove si toglie  $mc^2$  per rendere tale energia confrontabile con l'energia cinetica non-relativistica. Lo sviluppo si è fatto per  $p$  piccolo. Per introdurre questa correzione nella trattazione dell'atomo di idrogeno, si considerano

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{k}{\hat{r}} \quad \hat{H}_k = -\frac{(\hat{p}^2)^2}{8m^3 c^2}$$

L'operatore  $\hat{H}_k$  è invariante per rotazione, visto che  $[\hat{L}, \hat{p}^2] = 0 \Rightarrow [\hat{L}, \hat{H}_k] = 0$  (come visto nella trattazione dell'atomo di idrogeno). Questo significa che i due operatori si possono diagonalizzare contemporaneamente.

Il primo ordine di correzione all'energia è  $E_{n\ell m}^{(1)} = \langle n\ell m | \hat{H}_k | n\ell m \rangle$ . Per calcolarlo, si può usare che  $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m - k/\hat{r} \Rightarrow (\hat{p}^2)^2 = 4m^2 \left( \hat{H}_0 + k/\hat{r} \right)^2$ , allora

$$\frac{(\hat{p}^2)^2}{8m^3c^2} = \frac{4m^2}{8m^3c^2} \left( \hat{H}_0 + \frac{k}{\hat{r}} \right)^2$$

Allora

$$\left\langle n\ell m \left| \hat{H}_0^2 + \hat{H}_0 \frac{k}{\hat{r}} + \frac{k}{\hat{r}} \hat{H}_0 + \frac{k^2}{\hat{r}^2} \right| n\ell m \right\rangle = \left( E_{n\ell m}^{(0)} \right)^2 + 2E_{n\ell m}^{(0)} \left\langle n\ell m \left| \frac{k}{\hat{r}} \right| n\ell m \right\rangle + \left\langle n\ell m \left| \frac{k^2}{\hat{r}^2} \right| n\ell m \right\rangle$$

Gli altri elementi di matrice si calcolano per conto diretto, cioè svolgendo  $\int \psi_{n\ell m}^*(r, \theta, \varphi) \frac{k}{r} \psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi) d^3x$ . Ricordando che  $E_{n\ell m}^{(0)} = -mk^2/(2n^2)$  e completando il calcolo, si trova:

$$E_{n\ell m}^{(1)} = -\frac{E_{n\ell m}^{(0)}}{2mc^2} \left[ -3 + \frac{4n}{\ell + 1/2} \right] \quad (3.3.1)$$

### 3.3.2 Dipendenza dallo spin – Introduzione

Nell'Hamiltoniano dell'atomo di idrogeno  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{k}{\hat{r}}$  non è presente alcun termine riguardante lo spin, quindi si modellizzerebbero gli stati, una volta considerato il termine di interazione  $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$ , come  $|n\ell m\rangle \otimes |s s_z\rangle$ . Di fatto, si ha  $[\hat{H}_0, \hat{S}_\alpha] = 0$ , quindi possono essere simultaneamente diagonalizzati. Come già accennato, la degenerazione, che prima era di  $n^2$ , ora passa a  $2n^2$  per via degli stati ottenuti tramite prodotto tensore, essendo che l'elettrone si può trovare sia con spin up che spin down.

Quando c'è invarianza per rotazioni, non è singolarmente  $\hat{L}$  a conservarsi (cioè  $[\hat{H}, \hat{L}] = 0$ ), ma è  $\hat{J}$ , quindi si vuole usare una base che possa essere *sensibile* a questa invarianza. L'idea è di usare quella fornita simultaneamente da  $\hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$ <sup>1</sup>. La comodità di questa scelta risiede nel fatto che  $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$  sarà diagonale in questa base.

**Si mostra che  $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$  è diagonale nella nuova base.** Intanto si ricorda che i valori possibili di  $J$ , per le regole di composizione del momento angolare, sono  $\ell \pm \frac{1}{2}$ . Si calcola  $\langle \ell s J M | \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} | \ell' s' J' M' \rangle$ . Per farlo, si usa che  $\hat{J}^2 = (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}})^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$ ,

<sup>1</sup>Si traslascia il numero quantico  $n$  relativo all'Hamiltoniano perché è presente in ogni caso e non influenza la trattazione.

quindi

$$\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2)$$

da cui appare evidente che  $|\ell s J M\rangle$  è autostato di  $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$ , visto che è autostato di  $\hat{J}^2, \hat{L}^2, \hat{S}^2$ . **D'ora in poi, si trascurano i segni di vettore e si sottintendono.** Considerando, poi,  $J = \ell + \frac{1}{2}$ , si ha

$$\begin{aligned} \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} |\ell s J M\rangle &= \frac{1}{2} [J(J+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] |\ell s J M\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \left( \ell + \frac{3}{2} \right) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] |\ell s J M\rangle = \frac{1}{2} \ell |\ell s J M\rangle \end{aligned}$$

Nel caso di  $J = \ell - \frac{1}{2}$ , invece, si ha autovalore  $-\frac{1}{2}(\ell+1)$ . In questo modo, si vede che l'operatore è diagonale in questa base.

### 3.3.3 Dipendenza dallo spin – Coefficienti di Clebsch-Gordan

Il passaggio di base avviene tramite i coefficienti di Clebsch-Gordan  $C_{J_1 J_2 m_1 m_2}^{JM}$ :

$$|J_1 J_2 J M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |J_1 J_2 m_1 m_2\rangle \langle K_1 K_2 m_1 m_2 | J_1 J_2 J M\rangle \equiv \sum_{m_1, m_2} C_{J_1 J_2 m_1 m_2}^{JM} |J_1 J_2 m_1 m_2\rangle$$

Si ricorda che, essendo questi coefficienti relativi ad una trasformazione unitaria, devono soddisfare le seguenti proprietà:

$$\sum_{m_1, m_2} C_{J_1 J_2 m_1 m_2}^{JM} C_{J_1 J_2 m_1' m_2'}^{J'M'} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad \sum_{JM} C_{J_1 J_2 m_1 m_2}^{JM} C_{J_1 J_2 m_1' m_2'}^{JM} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

Visto che  $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$ , perché questi coefficienti siano non-nulli devono soddisfare  $m_1 + m_2 = M$  e, inoltre, deve essere  $|J_1 - J_2| \leq J \leq J_1 + J_2$  e  $J_1 + J_2 + J \in \mathbb{Z}$ .

In questo caso particolare, si ha:

$$|\ell s J M\rangle = \sum_{m, s_z} |\ell s m s_z\rangle \langle \ell s m s_z | \ell s J M\rangle$$

Visto che ci si mette nel caso di spin 1/2 e si ha  $m + s_z = M$ , si può riscrivere questa operazione come somma solamente su  $s_z$ :

$$\left| \ell \frac{1}{2} J M \right\rangle = \sum_{s_z} C_{\ell, \frac{1}{2}, M-s_z, s_z}^{JM} \left| \ell, \frac{1}{2}, M-s_z, s_z \right\rangle$$



Scrivendo  $J = \ell + 1/2$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 W_{\ell}^{\ell+\frac{1}{2},M}(\theta, \varphi) &= C_{\ell, \frac{1}{2}, M-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2},M} \underbrace{\left| \ell, M-\frac{1}{2} \right\rangle}_{Y_{\ell, M-\frac{1}{2}}} \otimes \underbrace{\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\top}} + C_{\ell, \frac{1}{2}, M+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\ell+\frac{1}{2},M} \underbrace{\left| \ell, M+\frac{1}{2} \right\rangle}_{Y_{\ell, M+\frac{1}{2}}} \otimes \underbrace{\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top}} \\
 &= (2\ell+1)^{-1/2} \begin{bmatrix} (\ell+M+\frac{1}{2})^{1/2} Y_{\ell, M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ (\ell-M+\frac{1}{2})^{1/2} Y_{\ell, M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \quad (3.3.2)
 \end{aligned}$$

Analogamente:

$$W_{\ell}^{\ell-\frac{1}{2},M}(\theta, \varphi) = (2\ell+1)^{-1/2} \begin{bmatrix} -(\ell-M+\frac{1}{2})^{1/2} Y_{\ell, M-\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \\ (\ell+M+\frac{1}{2})^{1/2} Y_{\ell, M+\frac{1}{2}}(\theta, \varphi) \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

con  $|\ell-s| \leq J \leq \ell+s$ . Queste funzioni  $W_{\ell}^{JM}$  sono normalizzate, cioè

$$\int \left( W_{\ell}^{JM} \right)^{\dagger} W_{\ell'}^{J'M'} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$$

e permettono di ricavare i nuovi autostati come

$$\Psi_{n\ell JM}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r) W_{\ell}^{JM}(\theta, \varphi) \quad (3.3.4)$$

### ESERCIZIO 3.1.

Si considerano gli stati relativi a  $\ell = 0, J = \frac{1}{2}, M = \frac{1}{2}$  e  $\ell = 1, J = \frac{1}{2}, M = \frac{1}{2}$  e si vuole, in entrambi i casi, calcolare la probabilità che lo stato sia nello spin up, cioè  $S_z = \frac{1}{2}$ . **Da fare!**

*Svolgimento.* Nel primo caso è 1, nel secondo caso 1/3 (lezione 40 1:05:00). ♠

## 3.4 Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo

Si considera  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{P}(t)$ , conoscendo  $\hat{H}_0 |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle$  che si possono usare come base completa. Usando questa:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle$$

dove se  $\lambda$  fosse stato nullo, allora gli  $a_n(t)$  sarebbero stati dei coefficienti costanti. Prendendo, per pertinenza con l'essenza della teoria delle perturbazioni,  $\lambda \ll 1$ ,

ci si aspetta che  $\dot{a}_n(t) \ll 1$ , cioè che gli  $a_n(t)$  abbiano una dipendenza debole dal tempo.

Inserendo lo stato  $|\psi(t)\rangle$  con lo sviluppo stabilito sopra all'interno dell'equazione di Shrödinger  $i\partial_t |\psi(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \lambda\hat{P}(t)) |\psi(t)\rangle$ , si trova:

$$\begin{aligned} \sum_n [i\dot{a}_n(t) + \epsilon_n a_n(t)] e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle &= \sum_n \epsilon_n a_n(t) e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle + \lambda \sum_n a_n(t) e^{-i\epsilon_n t} \hat{P}(t) |n\rangle \\ \Rightarrow \sum_n i\dot{a}_n(t) e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle &= \lambda \sum_n a_n(t) e^{-i\epsilon_n t} \hat{P}(t) |n\rangle \end{aligned}$$

Si applica  $\langle m|$  (facente parte della base completa fornita da  $\hat{H}_0$ , quindi è un suo autostato) per ottenere:

$$\sum_n \langle m|i\dot{a}_n(t) e^{-i\epsilon_n t}|n\rangle = i\dot{a}_m(t) e^{-i\epsilon_m t} = \lambda \sum_n a_n(t) e^{-i\epsilon_n t} \langle m|\hat{P}(t)|n\rangle$$

cioè:

$$i\dot{a}_m(t) = \lambda \sum_n a_n(t) e^{i\omega_{nm}t} \langle m|\hat{P}(t)|n\rangle \quad (3.4.1)$$

con  $\omega_{nm} = \epsilon_m - \epsilon_n$  (ottenuto dividendo per  $e^{-i\epsilon_m t}$ ). Questa si può risolvere perturbativamente prendendo  $a_k(t) = a_k^{(0)} + \lambda a_k^{(1)}(t) + \dots$ , da cui

$$i\lambda^r \dot{a}_m^{(r)}(t) = \lambda \sum_n \lambda^{r-1} a_n^{(r-1)} e^{i\omega_{nm}t} \langle m|\hat{P}(t)|n\rangle \quad (3.4.2)$$

Al primo ordine, per esempio, definendo  $\langle m|\hat{P}(t)|n\rangle = P_{mn}(t)$ , si ha:

$$i\dot{a}_m^{(1)}(t) = \sum_n a_n^{(0)} e^{i\omega_{nm}t} P_{mn}(t) \quad (3.4.3)$$

Per risolvere l'equazione differenziale, è prassi assumere che lo stato al tempo  $t = 0$  sia autostato dell'Hamiltoniano, quindi  $a_n^{(0)} = \delta_{ni}$ .

### 3.4.1 Schema risolutivo

In linea di principio, si assumerà che per  $t \leq 0$ , la perturbazione è spenta, quindi gli stati evolvono solamente tramite  $\hat{H}_0$ , quindi:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle$$

Per  $0 \leq t \leq T$ , invece, si ha  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{P}(t)$ <sup>1</sup>, per cui

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle$$

Infine, per  $t > T$  si spegne la perturbazione, quindi il sistema evolve di nuovo secondo  $\hat{H}_0$  e si ha

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(T) e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle$$

Ora si cerca la probabilità  $P_f$  di ottenere una certa energia finale  $\epsilon_f$ , tenendo conto del fatto che  $a_n(t=0) = \delta_{ni}$ , con  $|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-i\epsilon_n t} |n\rangle$ . Questa si ottiene direttamente da  $|a_f(T)|^2$ , visto che  $e^{-i\epsilon_f T}$  è una fase.

**OSSERVAZIONE 3.5.** Si nota che questa probabilità rimane la stessa  $\forall t > T$  perché  $a_f(T)$  è costante e  $e^{-i\epsilon_f t}$  è una fase ad ogni  $t$ .

Si vuole calcolare  $a_f$  usando la teoria delle perturbazioni, fermandosi al primo ordine di approssimazione; per farlo, si usa:

$$i\dot{a}_f^{(1)}(t) = \sum_n \langle f | \hat{P}(t) | n \rangle e^{i\omega_{fn}t} a_n^{(0)} = \langle f | \hat{P}(t) | i \rangle e^{i\omega_{fi}t}$$

visto che si è preso come dato iniziale  $a_n^{(0)} = \delta_{ni}$ ; questo implica anche che  $a_f(0) = 0$ , quindi la soluzione dell'equazione differenziale, al tempo  $T$ , è:

$$a_f^{(1)}(T) = - \int_0^T dt \langle f | \hat{P}(t) | i \rangle e^{i\omega_{fi}t} \quad (3.4.4)$$

### 3.4.2 Esempio di applicazione #1

Si considera una perturbazione del tipo  $\hat{P}(t) = A e^{-i\Omega t} + A^\dagger e^{i\Omega t}$ , che agisce per  $0 \leq t \leq T$ . Il coefficiente finale è ottenuto come segue:

$$\begin{aligned} a_f^{(1)}(T) &= -i \langle f | A | i \rangle \int_0^T dt e^{i(\omega_{fi}-\Omega)t} - i \langle f | A^\dagger | i \rangle \int_0^T dt e^{i(\omega_{fi}+\Omega)t} \\ &= \langle f | A | i \rangle \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}-\Omega)T}}{\omega_{fi} - \Omega} + \langle f | A^\dagger | i \rangle \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}+\Omega)T}}{\omega_{fi} + \Omega} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Si ingloba  $\lambda$  in  $\hat{P}(t)$ .

### 3.4.3 Esempio di applicazione #2

Si considera un sistema a due livelli sotto l'azione di

$$\hat{H}_0 = -\frac{\mu B_0}{2} \sigma_z \equiv -\frac{\omega_0}{2} \sigma_z$$

$$\hat{P}(t) = -\frac{\mu B_1}{2} (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t) \equiv -\frac{\omega_1}{2} (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t) \equiv A e^{-i\omega t} + A^\dagger e^{i\omega t}$$

Si assume che lo stato iniziale sia il ground state di  $\hat{H}_0$ , cioè  $|i\rangle = |\uparrow\rangle$ . Ci si chiede la probabilità di trovare il sistema in  $|\downarrow\rangle$ . Usando la teoria appena sviluppata, si trova che:

$$|a_f|^2 \simeq \frac{\omega_1^2}{4} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} + \omega)T}}{\omega_{fi} + \omega} \right|^2 = \frac{\omega_1^2}{4} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_0 + \omega)T}}{\omega_0 + \omega} \right|^2 \quad (3.4.5)$$

Il risultato esatto a questo problema si è ottenuto in §6.2.6, che è pari a

$$|a_f(T)|^2 = \left( \frac{\omega_1}{\alpha} \right)^2 \left( \sin \frac{\alpha T}{2} \right)^2, \quad \alpha = \sqrt{(\omega_0 + \omega)^2 + \omega_1^2}$$

Si sviluppa in potenza, assumendo  $|\omega_1/(\omega_0 + \omega)| \ll 1$  e si mostra che coincidono.

Considerando, ora, il caso in cui  $\omega + \omega_0 \rightarrow 0$ , si trova che la soluzione esatta è  $|a_f|^2 = \sin^2 \omega_1 T/2$ , mentre la soluzione approssimata è  $|a_f|^2 = (\omega_1 T/2)^2$ . Quindi, in condizioni di risonanza, la soluzione approssimata è una buona approssimazione solo quando  $\omega_1 T \ll 1$ .

### 3.4.4 Condizione di risonanza – Regola d'oro di Fermi

Riprendendo il caso dell'esempio precedente, ci si chiede quando sia possibile uno sviluppo perturbativo in condizioni di risonanza. L'equazione generale trovata è:

$$a_f^{(1)}(T) = \langle f|A|i\rangle \frac{1 - e^{-i(\omega_{fi} - \omega)T}}{\omega_{fi} - \omega} + \langle f|A^\dagger|i\rangle \frac{1 - e^{-i(\omega_{fi} + \omega)T}}{\omega_{fi} + \omega} \quad (3.4.6)$$

dove si sta considerando il sistema soggetto a  $\hat{P}(t) = A e^{-i\omega t} + A^\dagger e^{i\omega t}$ . La risonanza si verifica  $\omega_{fi} - \omega \rightarrow 0$  o  $\omega_{fi} + \omega \rightarrow 0$ ; la condizione per avere uno sviluppo perturbativo consistente è  $\langle f|A|i\rangle T \ll 1$ , nel caso di  $\omega_{fi} - \omega \rightarrow 0$ .

Per  $\omega_{fi} - \omega \rightarrow 0$ , si può scrivere

$$|a_f(T)|^2 \simeq |\langle f|A|i\rangle|^2 \left| \frac{\sin \left[ \frac{1}{2} (\omega - \omega_{fi}) T \right]}{\omega - \omega_{fi}} \right|^2 = c |A_{fi}|^2 \left| \frac{\sin \left( \frac{\omega_{fi} - \omega}{2} T \right)}{\frac{1}{2} (\omega_{fi} - \omega)} \right|^2 \quad (3.4.7)$$

Il plot di questa funzione è una campana con lati oscillanti, il cui massimo è  $\sim T^2$  e la larghezza FWHM è  $\sim 1/T$ . Si ottiene un valore significativamente diverso da 0 per  $|\omega_{fi} - \omega| < 2\pi/T$ , cioè si ha uno pseudo principio di indeterminazione  $\Delta E \sim 1/T$ . Non è propriamente un principio di indeterminazione perché il tempo non ha un equivalente operatoriale.

Prendendo in considerazione la seconda uguaglianza di eq. 3.4.7, si nota che

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega_{fi} - \omega}{2}\right) T}{\frac{1}{2}(\omega_{fi} - \omega)} \right|^2 = 2\pi \delta(\omega - \omega_{fi}) T$$

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} T^{-1} |a_f(T)|^2 = |\langle f|A|i \rangle|^2 \delta(\epsilon_f - (\epsilon_i + \omega))$$

Partendo da  $\epsilon_i$  e finendo in una densità di stati  $n(\epsilon_f)$ , si ottiene il rate integrando:

$$R = \int 2\pi |\langle f|A|i \rangle|^2 \delta(\epsilon_f - (\epsilon_i + \omega)) n(\epsilon_f) d\epsilon_f = 2\pi |\langle f|A|i \rangle|^2 n(\epsilon_f) \quad (3.4.8)$$

### 3.4.5 Rappresentazione dell'interazione

Invece di scrivere il generico stato  $|\psi(t)\rangle_S = \sum c_n(t) e^{-iE_n t} |n\rangle$ , si scrive in una rappresentazione diversa, chiamata *dell'interazione*:

$$|\psi(t)\rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0 t} \sum c_n(t) e^{-iE_n t} |n\rangle = \sum c_n(t) |n\rangle \quad (3.4.9)$$

cioè tutta la dipendenza temporale è gestita dai coefficienti  $c_n(t)$  della perturbazione. In questa rappresentazione, l'equazione di Shrödinger diventa:

$$\begin{aligned} i\partial_t |\psi(t)\rangle_I &= \left( -\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S \right) + e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H}_0 + \hat{P}) |\psi(t)\rangle_S \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{P} |\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{P}(t) e^{-i\hat{H}_0 t} e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_S \\ &= \hat{P}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \end{aligned}$$

dove si è definito  $\hat{P}_I(t)$  che è l'operatore di perturbazione in rappresentazione dell'interazione. Complessivamente, in questa rappresentazione, l'equazione di Shrödinger è:

$$i\partial_t |\psi(t)\rangle_I = \hat{P}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (3.4.10)$$

Usando questo formalismo, si vuole ritrovare il risultato ottenuto in eq. 3.4.2. Per farlo, si moltiplica per  $\langle n|$  l'equazione sopra:

$$\begin{aligned}
\langle n|\psi(t)\rangle_I &= \left\langle n \left| \sum_m c_m(t) \right| m \right\rangle = c_n(t) \\
\Rightarrow i\dot{c}_n(t) &= \sum_m \langle n|\hat{P}_I(t)|m\rangle \underbrace{\langle m|\psi(t)\rangle_I}_{\equiv c_m(t)} = \sum_m \left\langle n \left| e^{i\hat{H}_0 t} \hat{P}(t) e^{-i\hat{H}_0 t} \right| m \right\rangle c_m(t) \\
&= \sum_m e^{i(E_n - E_m)t} \langle n|\hat{P}(t)|m\rangle c_m(t) \\
\Rightarrow i\dot{c}_n(t) &= \sum_m P_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t} c_m(t)
\end{aligned}$$

Quindi questo formalismo si è dimostrato consistente con quanto trovato precedentemente.

Ora si cerca una soluzione all'equazione di Schrödinger nella nuova rappresentazione  $i\partial_t |\psi(t)\rangle_I = \hat{P}_I(t) |\psi(t)\rangle_I$ . Si introduce, come visto anche per l'altro formalismo, un operatore di evoluzione temporale  $U_I(t)$  tale che

$$|\psi(t)\rangle_I = U_I(t) |\psi(t=0)\rangle_I$$

che nel caso del formalismo di Schrödinger, in cui l'Hamiltoniano era indipendente dal tempo, si trovava essere  $e^{-i\hat{H}t}$ . Non essendoci più indipendenza temporale, i vari operatori potrebbero non commutare più, quindi la forma non sarà un altro esponenziale. Inserendo questa espressione nell'equazione, si trova:

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{U}_I(t) = \hat{P}_I(t) \hat{U}_I(t) \\ \hat{U}_I(0) = 1 \end{cases}$$

La soluzione di questa si esprime tramite il *T-prodotto*:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_I(t) &= 1 - i \int_0^t \hat{P}_I(t') dt' + (-i)^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{P}_I(t') \hat{P}_I(t'') + \dots \\
&= \mathcal{T} e^{-i \int_0^t \hat{P}_I(t') dt'} \quad (3.4.11)
\end{aligned}$$

In questa espressione, si nota che i termini da sinistra verso destra (che sono perturbazioni) sono tutti uno più piccolo del precedente.

**ESEMPIO 3.1.**

Si immagina che  $|i\rangle = |\psi(t=0)\rangle_S = |\psi(t=0)\rangle_I$ ; conseguentemente, usando  $|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_I(t)|i\rangle$ , si ha

$$\sum_n c_n(t)|n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\hat{U}_I(t)|i\rangle \implies c_n(t) = \langle n|\hat{U}_I(t)|i\rangle$$

Da questa espressione, si trova uno sviluppo perturbativo per i coefficienti perché  $\hat{U}_I(t)$  è in potenze di  $\hat{P}(t)$ . Intanto, risulta  $c_n^{(0)} = \delta_{ni}$  perché all'ordine 0,  $\hat{U}_I(t)$  è l'identità. Si trova facilmente il primo ordine come:

$$c_n^{(1)}(t) = \left\langle n \left| -i \int_0^t \hat{P}_I(t') dt' \right| i \right\rangle = -i \int_0^t dt' e^{i\omega_{ni}t'} \langle n|\hat{P}(t')|i\rangle$$

La probabilità ad un tempo  $t$  che si misuri il sistema in uno stato  $n$  è proprio

$$P(t; n \neq i) = \left| c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + \dots \right|^2$$

Questo è tutto consistente con quanto trovato dalla teoria perturbativa sviluppata finora, solo che si riesce a esprimere in maniera più sintetica ed elegante.

### 3.5 Dinamiche adiabatiche

Si assume di avere un Hamiltoniano  $\hat{H}$  che dipende dal tempo *molto lentamente* tramite un parametro  $\lambda(t)$ ; in tal caso, si scriverà  $\hat{H}[\lambda(t)]$ . Si assume che, istante per istante, se ne conosca lo spettro (e che questo sia non-degenere) tramite l'equazione

$$\hat{H}[\lambda(t)]|n, \lambda(t)\rangle = E_n[\lambda(t)]|n, \lambda(t)\rangle \quad (3.5.1)$$

Si assume un'evoluzione da uno stato  $|n, \lambda(0)\rangle$  a uno stato  $|n, \lambda(t_f)\rangle$ <sup>1</sup> e si assume che  $|n, \lambda(t)\rangle$  sia una base completa ad ogni istante; in questo caso, si potrà scrivere

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{i\alpha_n(t)} |n, \lambda(t)\rangle, \quad \alpha_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n[\lambda(t')] dt' \quad (3.5.2)$$

Questa scelta di come rappresentare i coefficienti della sovrapposizione sarà chiara più avanti per semplificazioni di calcoli. Inserendo questa combinazione lineare nell'equazione di Schrödinger time-dependent per l'evoluzione

---

<sup>1</sup>Cioè dopo un certo tempo di evoluzione, lo stato finale non diventa una sovrapposizione, ma rimane lo stesso stato con parametro  $\lambda$  aggiornato all'ultimo istante.

temporale  $i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H}[\lambda(t)] |\psi(t)\rangle$ , si trova che (posto  $\hbar = 1$ ):

$$i \sum_n \left( \dot{a}_n(t) e^{i\alpha_n(t)} |n, \lambda(t)\rangle + a_n(t) \left( -iE_n[\lambda(t)] e^{i\alpha_n(t)} |n, \lambda(t)\rangle + a_n e^{i\alpha_n(t)} \partial_t |n, \lambda(t)\rangle \right) \right) \\ = \sum_n a_n e^{i\alpha_n(t)} E_n[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle$$

Applicando il bra  $\langle m, \lambda(t) |$  ai termini rimanenti, si trova che:

$$\dot{a}_m(t) e^{i\alpha_m(t)} = - \sum_n a_n(t) e^{i\alpha_n(t)} \langle m, \lambda(t) | \partial_t |n, \lambda(t)\rangle \quad (3.5.3)$$

Ora si deve calcolare l'elemento di matrice  $\langle m, \lambda(t) | \partial_t |n, \lambda(t)\rangle$ ; per farlo, si deriva rispetto al tempo l'equazione  $\hat{H}[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle = E_n[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle$ :

$$\dot{\hat{H}}[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle + \hat{H}[\lambda(t)] \partial_t |n, \lambda(t)\rangle = \dot{E}_n[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle + E_n[\lambda(t)] \partial_t |n, \lambda(t)\rangle$$

Applicando  $\langle m, \lambda(t) |$ ,  $m \neq n$ , si ha:

$$\langle m, \lambda(t) | \dot{\hat{H}}[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle + E_m[\lambda(t)] \langle m, \lambda(t) | \partial_t |n, \lambda(t)\rangle = E_n[\lambda(t)] \langle m, \lambda(t) | \partial_t |n, \lambda(t)\rangle \\ \Rightarrow \langle m, \lambda(t) | \partial_t |n, \lambda(t)\rangle = \frac{\langle m, \lambda(t) | \dot{\hat{H}}[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle}{E_n[\lambda(t)] - E_m[\lambda(t)]}$$

Partendo, come accennato, da  $|\psi(t=0)\rangle = |n, \lambda(0)\rangle$ , allora<sup>1</sup>:

$$\dot{a}_m(t) = - \sum_n a_n(t) e^{i(\alpha_n(t) - \alpha_m(t))} \frac{\langle m, \lambda(t) | \dot{\hat{H}}[\lambda(t)] |n, \lambda(t)\rangle}{E_n[\lambda(t)] - E_m[\lambda(t)]} \quad (3.5.4)$$

Si assume che, inizialmente, il sistema sia preparato nello stato  $|n, \lambda(0)\rangle$ , quindi  $a_n(0) = 1$  e  $a_m(0) = 0$  se  $m \neq n$ . Per uno stato  $m \neq n$ , assumendo una piccolissima dipendenza temporale, cioè che l'evoluzione temporale praticamente non fa discostare il sistema dalle condizioni iniziali, si può scrivere

$$\dot{a}_m(t) \approx e^{i(\alpha_n(t) - \alpha_m(t))} \frac{\langle m, \lambda(t) | \dot{\hat{H}} |n, \lambda(t)\rangle}{E_n[\lambda(t)] - E_m[\lambda(t)]} \quad (3.5.5)$$

dove si è usato che  $a_n(0) = 1$  e si è ridotta la serie al solo termine  $n$ -esimo perché tutti gli altri sono nulli per condizioni iniziali. Si immagina, inoltre, che la variazione sia talmente minima da rendere il coefficiente dell'esponentiale in 3.5.5 come costante nel tempo e da poter approssimare l'esponente come la

<sup>1</sup>In teoria la somma non dovrebbe essere su  $n$ ; da controllare perché non dovrebbe essere ben definito quando  $m = n$ .



differenza delle energie:

$$\dot{a}_m(t) \approx e^{-i(E_n - E_m)t} \frac{\langle m, \lambda(t) | \hat{H} | n, \lambda(t) \rangle}{E_n[\lambda(t)] - E_m[\lambda(t)]} \quad (3.5.6)$$

Questa, ora, si sa integrare e diventa:

$$a_m(t) \approx \frac{\langle m, \lambda(t) | \hat{H} | n, \lambda(t) \rangle}{(E_n[\lambda(t)] - E_m[\lambda(t)])^2} \left( e^{-i(E_n - E_m)t} - 1 \right) \quad (3.5.7)$$

### 3.6 Interazioni elettromagnetiche

La Lagrangiana per un'interazione elettromagnetica, scritta in termini dei potenziali scalare  $\phi$  e vettore  $\vec{A}$ , è:

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} - q\phi + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (3.6.1)$$

L'impulso coniugato, a partire da questa, è dato da:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A} \quad (3.6.2)$$

Tramite trasformata di Legendre, si ottiene l'Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H &= \frac{mv^2}{2} + q\phi = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{2m} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{q^2}{2mc^2} A^2 + q\phi \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Per passare alla formulazione quantistica, si estende l'Hamiltoniana ad operatore Hamiltoniano definendo  $\hat{A} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{A}(\hat{x}, t)$  e  $\hat{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \phi(\hat{x}, t)$ ; in questo modo, l'ipotesi di Hamiltoniano per l'interazione elettromagnetica è:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{p} - \frac{q}{c} \hat{A} \right)^2 + q\hat{\phi} \quad (3.6.4)$$

### 3.6.1 L'operatore velocità

Per calcoli a seguire, torna utile definire e studiare l'operatore velocità, la cui definizione si può ricondurre a

$$\hat{v} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}] = \frac{1}{m} \left( \hat{p} - \frac{1}{c} \hat{A} \right) \quad (3.6.5)$$

consistentemente con quanto si sarebbe immaginato. Visto che è ancora soddisfatta la regola di commutazione  $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$ , allora si trova:

$$[\hat{x}_i, \hat{v}_j] = \frac{i}{m} \delta_{ij} \quad (3.6.6)$$

Allo stesso tempo, si ha  $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ ,  $i \neq j$ ; si vuole mostrare che è valido anche per la velocità:

$$\begin{aligned} [\hat{v}_i, \hat{v}_j] &= \frac{1}{m^2} \left[ \hat{p}_i - \frac{q}{c} \hat{A}_i, \hat{p}_j - \frac{q}{c} \hat{A}_j \right] = \frac{i\hbar q}{m^2 c} \left( \nabla \times \hat{A} \right)_k \\ &= \frac{i\hbar q}{m^2 c} \epsilon_{ijk} B_k \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

dove si è usato il fatto che, essendo  $\hat{A}$  funzione di  $\hat{x}$ , vale  $[\hat{p}_i, \hat{A}_j] = -i\partial_i \hat{A}_j$ .

### 3.6.2 Invarianza di Gauge

I campi elettrico e magnetico in termini dei potenziali sono espressi come:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.6.8)$$

Questo porta una libertà di Gauge data da:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \quad (3.6.9)$$

con  $\chi(\vec{r}, t)$  generica funzione scalare sufficientemente liscia. In meccanica quantistica, queste sono chiaramente ancora valide e si può dimostrare che l'equazione di Schrödinger è lasciata inalterata se, oltre alle trasformazioni in 3.6.9, si prende anche

$$\psi'(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \exp \left[ \frac{iq}{\hbar c} \chi(\vec{r}, t) \right] \quad (3.6.10)$$

*Dimostrazione.* Si prendono gli  $\vec{A}'$ ,  $\phi'$  come in eq. 3.6.9. Si mostra che il nuovo Hamiltoniano  $\hat{H}' = \hat{H}(\phi', \vec{A}')$  è tale da soddisfare  $\hat{H}'\psi' = i\hbar\partial_t\psi'$ .

Si nota, intanto, che:

$$\begin{aligned} \left[ -i\hbar\nabla - \frac{q}{c}(\vec{A} + \nabla\chi) \right] \psi e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} &= -i\hbar e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} \nabla\psi + \frac{q}{c} \psi e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} \nabla\chi - \frac{q}{c} \vec{A} \psi e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} - \frac{q}{c} \psi e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} \nabla\chi \\ &= e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} \left( \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \psi \end{aligned}$$

Riapplicando nuovamente lo stesso operatore, si trova  $e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} \left( \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \psi$ . Scrivendo l'equazione di Shrödinger, si ha:

$$\begin{aligned} \cancel{e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}} \frac{1}{2m} \left( \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + q \cancel{e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}} \left( \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) \psi &= i\hbar\partial_t \left( \psi e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi} \right) = i\hbar \cancel{e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}} \partial_t \psi - \frac{q}{c} \cancel{e^{\frac{iq}{\hbar c}\chi}} \phi \partial_t \chi \\ \Rightarrow \frac{1}{2m} \left( \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + q\phi\psi &= i\hbar\partial_t \psi \end{aligned}$$

che coincide proprio con l'equazione di Shrödinger originale per  $\psi$ . ■

Usando l'invarianza di Gauge, si estende il concetto di *flusso di probabilità* a questo caso. In §1.3.7, si era definito

$$\vec{J} = \Re \left\{ \psi^* \hat{v} \psi \right\} = \frac{i\hbar}{m} \Re \left\{ \psi^* \nabla \psi \right\}$$

La formula più generale e corretta è:

$$\vec{J} = \Re \left\{ \psi^* \hat{v} \psi \right\} \quad (3.6.11)$$

proprio perché in questo modo risulta invariante sotto trasformazioni di Gauge.

### 3.6.3 Particella in campo magnetico

Si considera particella in campo magnetico  $\vec{B} = B_z \hat{z}$ . Si scrive l'Hamiltoniano come:

$$\hat{H} = \hat{H}_{xy} + \hat{H}_z = \frac{1}{2}m \left( \hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2 \right) + \frac{1}{2}m\hat{v}_z^2 \quad (3.6.12)$$

dove il campo magnetico è inserito implicitamente in  $\hat{v} = \frac{1}{m} \left( \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)$ . Il motivo per cui si è diviso l'Hamiltoniano in quel modo sta nel seguente commutatore:

$$[\hat{H}_{xy}, \hat{H}_z] = 0 \quad (3.6.13)$$

Questa relazione si mostra facilmente perché  $B_x = B_y = 0$ . Questo implica che il problema è separabile nei due termini.

**Problema nel piano xy.** L'idea è di ricondurre  $\hat{H}_{xy}$  all'Hamiltoniano di un oscillatore armonico unidimensionale. Nell'oscillatore armonico, lo spettro era dato da  $\hbar\omega(n + 1/2)$  perché l'Hamiltoniano si riusciva a scrivere come  $\hbar\omega(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)/2$ , con  $[\hat{x}, \hat{p}] = i$  (dopo rinormalizzazione con le costanti del problema).

In questo caso, si sa già scrivere l'Hamiltoniano in una forma analoga, infatti  $\hat{H}_{xy} = m(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2)/2$ . Il problema sta nel commutatore che, definendo  $\gamma = \sqrt{\hbar q B_z / m^2 c}$ , è dato da  $[\hat{v}_x, \hat{v}_y] = i\gamma$ . Allora si definiscono  $\hat{v}_x = \gamma\hat{q}$  e  $\hat{v}_y = \gamma\hat{p}$ , che soddisfano proprio  $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ ; allora, per questi, si trova che lo spettro è dato da

$$\frac{\hbar q B_z}{mc} \left( n + \frac{1}{2} \right) \equiv \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.6.14)$$

visto che  $\hat{H}_{xy} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2) \frac{\hbar q B_z}{mc}$ , con  $\omega_c$  frequenza di ciclotrone.

**Problema complessivo.** Ora si vuole ricavare lo spettro dell'Hamiltoniano totale  $\hat{H}_{xy} + \hat{H}_z$ . Avendo mostrato che  $[\hat{H}_{xy}, \hat{H}_z] = 0$ , il problema è separabile, quindi lo spettro risultante sarà la somma degli spettri. Per quanto riguarda  $\hat{H}_z$ , lungo questa direzione non accade nulla e lo spettro è quello di una particella libera, cioè  $p_z^2/2m$ .

### 3.6.4 Atomo in campo magnetico – Effetto Zeeman

L'Hamiltoniano è:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \left( \hat{\vec{p}} + \frac{e}{c} \hat{\vec{A}} \right)^2 - \frac{k}{\hat{r}} + \hat{P} \\ &= \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{k}{\hat{r}}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\frac{e}{cm} \left( \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{A}} + \hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{p}} \right) + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2}_{\hat{P}} \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

dove si prende, per la scelta di Gauge,  $\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{x})$ . In questo caso, l'Hamiltoniano  $\hat{H}_0$  è quello dell'atomo di idrogeno, quindi si può risolvere il problema come perturbazione di  $\hat{H}_0$ .

**OSSERVAZIONE 3.6.** Si nota che  $\hat{\vec{p}}$  e  $\hat{\vec{A}}$  commutano; passando in rappresentazione delle coordinate, infatti, si trova che  $i\hbar\nabla \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot i\hbar\nabla + \hbar(\nabla \cdot \vec{A})$ . Però  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  perché si è definito come un rotore, pertanto  $\nabla \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla$ .

Per questa osservazione, la perturbazione è

$$\hat{P} = \frac{e}{mc} \hat{\vec{A}} \cdot \hat{\vec{p}} + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2 \quad (3.6.16)$$

In ipotesi di campo magnetico sufficientemente debole, si può trascurare il termine quadratico in  $\hat{P}$ . Si nota, poi, che:

$$\vec{A} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{x}) \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} B_j x_k p_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{jki} B_j x_k p_i = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{L}$$

Allora, in approssimazione di campo magnetico debole:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e}{2mc} \hat{\vec{B}} \cdot \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B} \quad (3.6.17)$$

dove si è considerata l'interazione spin-campo magnetico, con  $\hat{\vec{\mu}} = \frac{e}{mc} \hat{\vec{S}}$ .

Si cerca una base in cui la perturbazione è diagonale. Considerando anche lo spin, la base che si prende è  $|n\ell m\rangle \otimes |\frac{1}{2}s_z\rangle$ . Scegliendo un sistema di assi per cui  $\vec{B}$  è parallelo a  $\hat{z}$ , si nota che la perturbazione è diagonale nella base appena riportata; il primo ordine di approssimazione dello sviluppo perturbativo è, dunque:

$$E_{n\ell m s_z}^{(1)} = \frac{eB_z}{2m_e c} (m - 2s_z) \quad (3.6.18)$$

dove si è indicata, ora, la massa dell'elettrone con  $m_e$  per distinguerla dal numero quantico  $m$ .

### 3.6.5 Atomo in campo elettromagnetico

Si considera atomo di idrogeno soggetto a radiazione elettromagnetica, per cui l'Hamiltoniano complessivo è dato da<sup>1</sup>:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi(x) + V(\vec{x}), \quad V(\vec{x}) = -\frac{k}{r} \quad (3.6.19)$$

L'idea è sempre di scrivere  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$ , con  $\hat{H}_I$  perturbazione e  $\hat{H}_0$  Hamiltoniano dell'atomo di idrogeno. Con questa notazione, si trova che

$$\hat{H}_I = -e\phi + \frac{e}{2mc} \left( \vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} \right) + \frac{e^2}{2mc^2} A^2$$

Si assume che la scala di grandezza su cui varia il campo elettrico (che è circa una lunghezza d'onda) sia molto più grande della grandezza dell'atomo e si

<sup>1</sup>Si sottintende il simbolo di operatore.

trascura il campo magnetico<sup>1</sup>. In queste assunzioni, si può prendere  $\vec{A} = 0$  e  $\vec{E} = -\nabla\phi$ , quindi  $\hat{H}_I = -e\phi$ . Il potenziale scalare, vista la condizione  $\vec{E} = -\nabla\phi$ , si prende

$$\phi(\vec{x}) = - \int_0^{\vec{x}} \vec{E}(\vec{x}', t) \cdot d\vec{x}' \quad (3.6.20)$$

Avendo assunto il campo elettrico costante in questa regione di spazio, assumendo che l'atomo sia centrato in  $\vec{x} = 0$ , si può scrivere  $\vec{E}(\vec{x}', t) \simeq \vec{E}(0, t)$  e si può portare fuori dall'integrale, quindi  $\phi(\vec{x}) \simeq -\vec{E}(0, t) \cdot \vec{x}$ . In definitiva, si ha  $\hat{H}_I = \vec{E}(0, t) \cdot \vec{d}$ , con  $\vec{d} = -e\vec{x}$ . Ora si esplicita la dipendenza temporale del campo elettrico, per ottenere<sup>2</sup>:

$$\hat{H}_I = \vec{E}_0 \cdot \vec{d} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \quad (3.6.21)$$

A  $t = 0$ , si prepara il sistema in  $|i\rangle$ ; dopo un certo tempo di interazione  $T$ , lo stato sarà una sovrapposizione del tipo  $\sum_n a_n(T) e^{-iE_n T} |n\rangle$ , dove  $a_n(T)$  è la *probabilità di transizione* (in realtà lo sarebbe il suo modulo quadro). Il primo ordine perturbativo di questa probabilità è

$$a_f^{(1)} = \frac{-e\vec{E}_0 \langle f|\vec{x}|i\rangle}{\hbar} \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} + \frac{-e\vec{E}_0 \langle f|\vec{x}^\dagger|i\rangle}{\hbar} \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi} + \omega}$$

Una condizione per avere transizione, quindi, è  $\langle f|\vec{x}|i\rangle \neq 0$ . Si devono trovare, quindi, gli stati  $|f\rangle$  per cui tale elemento di matrice è non-nullo. Si può dimostrare tramite il teorema di Wigner-Eckart (esercitazione) che gli unici  $\ell_f$  ammessi tali che  $\langle n_f \ell_f m_f | \vec{x} | n_i \ell_i m_i \rangle \neq 0$  sono  $\ell_f = \ell_i, \ell_i \pm 1$ .

### 3.6.6 Effetto Aharanov-Bohm

Si considera un solenoide infinito di raggio  $a$  orientato lungo  $\hat{z}$  e percorso da corrente costante nel tempo. Questo genera, al suo interno, un certo campo magnetico  $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ , mentre se  $r > a$ , si ha  $\mathbf{B} = 0$ . Si nota che il potenziale vettore non può essere nullo per nessuna scelta di Gauge perché, per il teorema di Stokes:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \implies \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$$

dove  $S$  è la superficie racchiusa da  $\Gamma$ , con  $\Gamma$  curva chiusa e orientata di raggio  $r > a$ .

<sup>1</sup>Quest'ultimo si può trascurare perché varia con un fattore  $\alpha/c$  rispetto al campo elettrico, quindi di può vedere come effetto secondario (da controllare).

<sup>2</sup>La somma degli esponenziali complessi è per fare in modo che il risultato sia un valore reale (mancherebbe un fattore  $1/2$  per avere  $\vec{E}(0, 0) = \vec{E}_0$ ).

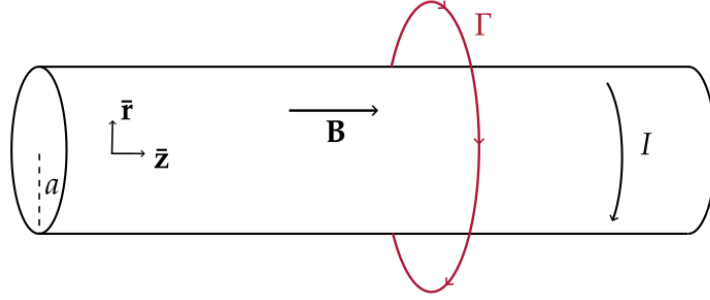


Figura 1: Rappresentazione schematica del solenoide, in cui la particella è vincolata a muoversi sulla curva chiusa  $\Gamma$ , di raggio  $r$ .

Se  $\Phi(\mathbf{B}) = \pi a^2 B_0$  è il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso l'intera sezione del solenoide, per il teorema di Stokes, si ha:

$$2\pi r A(r) = \Phi(\mathbf{B}) \implies \mathbf{A}(r) = \frac{\Phi(\mathbf{B})}{2\pi r} \hat{\phi}$$

L'impulso in rappresentazione delle coordinate cilindriche è:

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla = -i\hbar \left( \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Immaginando di vincolare una particella carica a muoversi unicamente su  $\Gamma$ , cioè a  $r, z$  costanti, si possono trascurare le derivate rispetto a queste ultime due variabili. Si ha, quindi,  $\psi = \psi(\phi)$  e  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\phi} \frac{-i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \implies \hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ . L'Hamiltoniano del sistema è:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2\mu} \left( \hat{\phi} \frac{-i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{q}{c} \frac{\Phi(\mathbf{B})}{2\pi r} \hat{\phi} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{i}{\hbar} \frac{q}{c} \frac{\Phi(\mathbf{B})}{2\pi} \right)^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} - i\eta \right)^2 \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

dove si è definito  $\eta = q\Phi(\mathbf{B})/(2\pi\hbar c)$  e si è indicata la massa della particella con  $\mu$ , mentre la sua carica con  $q$ .

L'equazione di Schrödinger, a questo punto, è un'equazione differenziale ordinaria:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left( \frac{d}{d\phi} - i\eta \right)^2 \psi(\phi) = E \psi(\phi) \quad (3.6.23)$$

la cui soluzione è ottenibile tramite l'ansatz

$$\psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad \int_0^{2\pi} d\phi |\psi(\phi)|^2 = 1$$

cioè è già correttamente normalizzato. Inserendo l'ansatz nell'equazione, si ottiene:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \left( \frac{d^2}{d\phi^2} - \eta^2 - 2i\eta \frac{d}{d\phi} \right) \psi(\phi) &= -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} [(im)^2 - \eta^2 - 2i\eta(im)] \psi(\phi) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} [-m^2 - \eta^2 + 2m\eta] \psi(\phi) \\
&= \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} (m - \eta)^2 \psi(\phi) \equiv E \psi(\phi)
\end{aligned}$$

Imponendo che  $\psi(\phi + 2\pi) = \psi(\phi)$ , il che equivale a richiedere che  $e^{i2\pi m} = 1$ , si ottiene che deve essere  $m \in \mathbb{Z}$ , dove questo  $m$  è il numero quantico autovalore di  $\hat{L}_z$ ; infatti, essendo questo un problema a simmetria cilindrica, il sistema è invariante per rotazioni sul piano  $xy$ , pertanto  $\hat{L}_z$  è conservato. Per verificarlo:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}} &= \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}} = r\hat{r} \times \left( -\frac{i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) = -i\hbar \frac{d}{d\phi} \hat{z} \\
\Rightarrow \hat{L}_z \psi_m(\phi) &= -i\hbar \frac{d}{d\phi} \psi(\phi) = \hbar m \psi(\phi)
\end{aligned}$$

Visto che i livelli energetici di una particella vincolata a muoversi su una circonferenza sono della forma  $E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2\mu r^2}$ , si nota che il campo magnetico influenza i livelli energetici anche dove non è fisicamente presente; tale influenza è legata al parametro

$$\eta = \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \equiv \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

dove  $\Phi_0$  può essere visto come un'unità di flusso del campo magnetico: se  $\eta$  è intero, allora lo spettro rimane lo stesso, solo che ogni autostato verrebbe mappato nel successivo, ma rimangono complessivamente gli stessi al variare di  $m \in \mathbb{Z}$ ; al contrario, se  $\Phi$  non fosse multiplo di  $\Phi_0$ , allora la particella subirebbe uno shift misurabile dei livelli energetici.



## 4 SIMMETRIE

### DEFINIZIONE 4.1 — DEFINIZIONE DI SIMMETRIA.

Data una trasformazione  $\hat{O}$  (tipo una rotazione) e dati due stati di un sistema  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ , si dice che  $\hat{O}$  è una simmetria per il sistema se, per  $|\psi'_1\rangle = \hat{O}|\psi_1\rangle, |\psi'_2\rangle = \hat{O}|\psi_2\rangle$ , si ha:

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| = |\langle\psi'_1|\psi'_2\rangle| \quad (4.0.1)$$

Il teorema di Wigner permette di concludere che operatori che sono simmetrie per un sistema possono essere rappresentati tramite operatori unitari  $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$  o tramite operatori *anti-unitari*. Questi ultimi sono operatori che soddisfano ancora  $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^\dagger$ , ma invece di essere lineari, soddisfano  $\hat{A}(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a^*\hat{A}|\psi_1\rangle + b^*\hat{A}|\psi_2\rangle$ .

### 4.1 Parità e time reversal

Entrambi questi operatori sono definiti in base a come si dovrebbero comportare su posizione, momento e momento angolare:

$$\begin{aligned} \hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a^{-1} &= -\hat{x} & \hat{P}_a \hat{p} \hat{P}_a^{-1} &= -\hat{p} & \hat{P}_a \hat{J} \hat{P}_a^{-1} &= \hat{J} \\ \hat{T} \hat{x} \hat{T}^{-1} &= \hat{x} & \hat{T} \hat{p} \hat{T}^{-1} &= -\hat{p} & \hat{T} \hat{J} \hat{T}^{-1} &= -\hat{J} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Si mostra che, per come sono definiti, la parità sarà un operatore unitario, mentre il time reversal sarà anti-unitario.

Dovendo essere  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , per consistenza, deve valere  $[\hat{x}_p, \hat{p}_p] = i\hbar$ , con  $\hat{O}_p = \hat{P}_a \hat{O} \hat{P}_a^{-1}$ . Visto che

$$\begin{aligned} [\hat{x}_p, \hat{p}_p] &= \hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a^{-1} \hat{P}_a \hat{p} \hat{P}_a^{-1} - \hat{P}_a \hat{p} \hat{P}_a^{-1} \hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a^{-1} = \hat{P}_a \hat{x} \hat{p} \hat{P}_a^{-1} - \hat{P}_a \hat{p} \hat{x} \hat{P}_a^{-1} \\ &= \hat{P}_a [\hat{x}, \hat{p}] \hat{P}_a^{-1} = \hat{P}_a i\hbar \hat{P}_a^{-1} \stackrel{!}{=} i\hbar \end{aligned}$$

Perché l'uguaglianza sia verificata,  $\hat{P}_a$  deve essere lineare, quindi è unitario.

Ripetendo la stessa logica con il time reversal, dovendo risultare  $[\hat{x}_T, \hat{p}_T] = -i\hbar$ , allora deve essere  $\hat{T} i\hbar \hat{T}^{-1} = -i\hbar$ , che è verificato solamente se  $\hat{T}$  è anti-lineare, quindi anti-unitario.

#### 4.1.1 L'operatore parità

L'operatore parità, oltre a essere unitario, è anche, conseguentemente, Hermitiano perché soddisfa  $\hat{P}_a^2 = \text{Id} \Rightarrow \hat{P}_a = \hat{P}_a^\dagger$ .

Per ottenere l'effetto che la parità ha su un autostato della posizione  $|x\rangle$ , si considera che:

$$\begin{aligned}\hat{P}_a \hat{x} |x\rangle &= \hat{P}_a x |x\rangle = x \hat{P}_a |x\rangle \\ \hat{P}_a \hat{x} |x\rangle &= \hat{P}_a \hat{x} \hat{P}_a^{-1} \hat{P}_a |x\rangle = -\hat{x} \hat{P}_a |x\rangle \implies \hat{P}_a |x\rangle = |-x\rangle\end{aligned}$$

Si usa questo per capire come agisce su una funzione d'onda. Visto che, **per definizione**, si ha  $\hat{P}_a \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x | \hat{P}_a | \psi \rangle$ , si trova che:

$$\hat{P}_a \psi(x) = \langle x | \hat{P}_a | \psi \rangle = \langle -x | \psi \rangle = \psi(-x)$$

visto che  $\hat{P}_a$  è Hermitiano e si può far agire su  $\langle x |$ .

Un'altra proprietà importante deriva dal fatto che  $\hat{P}_a^2 = \text{Id}$ , il che implica che gli autovalori della parità sono  $\lambda_P = \pm 1$ . Per quanto motivo, se si trova che  $[\hat{H}, \hat{P}_a] = 0$ , il che implica che si può trovare una base comune ad entrambi, significa che le autoenergie devono avere parità definita.

Questa parità si conserva anche nel tempo; infatti, assumendo sempre che  $[\hat{P}_a, \hat{H}] = 0$ , facendo evolvere temporalmente  $\psi(x, t)$  secondo  $i\partial_t \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$  con l'assunzione che  $\hat{P}_a \psi(x, 0) = \pm \psi(x, 0)$ , visto che  $\psi(x, t) = e^{-i\hat{H}t} \psi(x, 0)$ , si ha:

$$\hat{P}_a \psi(x, t) = \hat{P}_a e^{-i\hat{H}t} \psi(x, 0) = e^{-i\hat{H}t} \hat{P}_a \psi(x, 0) = \pm e^{-i\hat{H}t} \psi(x, t)$$

visto che, per assunzione,  $\hat{P}_a$  commuta con  $\hat{H}$ .

Prendendo, ora, gli autostati del momento angolare  $|\ell m\rangle$ , si vuole capire come la parità agisce su questi. Si può dimostrare che una trasformazione sotto parità è tale per cui  $Y_\ell^m(\theta, \varphi) \rightarrow Y_\ell^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ , per cui

$$\hat{P}_a |n \ell m\rangle = (-1)^\ell |n \ell m\rangle$$

Da questo è evidente che, per la composizione di due momenti angolari, si ha:

$$\hat{P}_a |\ell_1 \ell_2 JM\rangle = \sum C_{\ell_1 \ell_2 m_1 m_2}^{JM} \hat{P}_a |\ell_1 m_1\rangle \otimes |\ell_2 m_2\rangle = (-1)^{\ell_1 + \ell_2} |\ell_1 \ell_2 JM\rangle$$

Per finire, si può vedere come la parità agisce sull'operatore momento di dipolo

elettrico  $\hat{d} = \sum_i q_i \hat{x}_i$ . Sia  $|\psi\rangle$  autostato di  $\hat{H}$ , cioè  $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ ; si nota che

$$\langle\psi|\hat{d}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_a^{-1}\hat{P}_a\hat{d}\hat{P}_a^{-1}\hat{P}_a|\psi\rangle = -\langle\psi'|\hat{d}|\psi'\rangle$$

dove  $|\psi'\rangle = \hat{P}_a|\psi\rangle$ . Però si osserva anche che  $\hat{P}_a\hat{H}\hat{P}_a^{-1}\hat{P}_a|\psi\rangle = E\hat{P}_a|\psi\rangle \Rightarrow \hat{H}|\psi'\rangle = E|\psi'\rangle$ . In assenza di degenerazione nello spettro, avendo assunto che  $[\hat{P}_a, \hat{H}] = 0$ , si sa che  $\hat{P}_a|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$ , ma qualunque segno possano prendere, questo viene eliminato nell'elemento di matrice, quindi, sotto parità, si verifica:

$$\langle\psi|\hat{d}|\psi\rangle = -\langle\psi|\hat{d}|\psi\rangle$$

#### 4.1.2 Operatore di inversione temporale

Si caratterizza tale operatore, avendo definito in partenza come agisce su alcuni operatori, quali posizione, momento e momento angolare. Si considera  $\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\partial_t|\psi(t)\rangle$  e si assume che valga  $[\hat{H}, \hat{T}] = 0$ ; allora:

$$\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1}\hat{T}|\psi(t)\rangle = \hat{T}i\partial_t|\psi(t)\rangle = -i\partial_t\hat{T}|\psi(t)\rangle \implies \hat{H}\hat{T}|\psi(t)\rangle = -i\partial_t\hat{T}|\psi(t)\rangle$$

Ora, mandando  $t \rightarrow -t$  nell'equazione sopra, notando che  $\partial_t \rightarrow -\partial_t$  conseguentemente, si ha:

$$\hat{H}\hat{T}|\psi(-t)\rangle = i\partial_t\hat{T}|\psi(-t)\rangle$$

*Si nota che quanto appena trovato è l'equazione di Shrödinger per lo stato  $\hat{T}|\psi(-t)\rangle$ , il che vuol dire che se  $|\psi(t)\rangle$  è soluzione dell'equazione di Shrödinger, anche  $\hat{T}|\psi(-t)\rangle$  lo è.*

Si considera, ora, un Hamiltoniano in rappresentazione delle coordinate comprensivo di un termine potenziale generico  $V(x)$ . L'equazione di Shrödinger, conseguentemente, sarà:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\psi(x, t) = i\hbar\partial_t\psi(x, t)$$

Facendo il coniugato complesso di entrambi i membri, si ottiene:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\psi^*(x, t) = -i\hbar\partial_t\psi^*(x, t)$$

Mandando  $t \rightarrow -t$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \psi^*(x, -t) = i\hbar \partial_t \psi^*(x, -t)$$

che è la stessa equazione ma per  $\psi^*(x, -t)$ . Ricordando quanto detto prima, cioè che se  $|\psi(t)\rangle$ , relativo alla funzione d'onda  $\psi(x, t)$ , è soluzione, allora anche  $\hat{T}|\psi(-t)\rangle$ , il quale sarà relativo alla funzione d'onda  $\psi^*(x, -t)$ . Allora si trova che l'azione di  $\hat{T}$  su una funzione d'onda restituisce il complesso coniugato della stessa:

$$\hat{T}\psi(x, t) = \psi^*(x, t) \quad (4.1.2)$$

**OSSERVAZIONE 4.1.** Questo si mostrerà vero solamente per particelle senza spin.

Tramite questa proprietà, si ottiene l'azione di  $\hat{T}$  su  $|x\rangle$ . Per  $|\psi\rangle = \int dx \langle x|\psi\rangle |x\rangle$ , si ha:

$$\hat{T}|x\rangle = \int dx \psi^*(x) \hat{T}|x\rangle$$

Per consistenza col fatto che  $\hat{T}\psi(x) = \psi^*(x)$ , deve valere

$$\hat{T}|x\rangle = |x\rangle \quad (4.1.3)$$

Similmente, si mostra che

$$\hat{T}|p\rangle = |-p\rangle \quad (4.1.4)$$

Finora, l'azione di  $\hat{T}$  è l'azione di un operatore  $\hat{K}$  che prende il complesso coniugato. Questo non va più bene per lo spin, che deve soddisfare  $\hat{T}\hat{S}\hat{T}^{-1} = -\hat{S}$ ; infatti, se  $s = 1/2$ , per cui  $\hat{S}_a = \sigma_a/2$ , si ottiene

$$\hat{K}\hat{S}_1\hat{K}^{-1} = \hat{S}_1 \quad \hat{K}\hat{S}_2\hat{K}^{-1} = -\hat{S}_2 \quad \hat{K}\hat{S}_3\hat{K}^{-1} = \hat{S}_3$$

visto che solo  $\sigma_2$  ha elementi complessi. Per risolvere questo, si prende  $\hat{T} = \hat{Y}\hat{K}$ , dove  $\hat{Y}$  agisce solo sullo spin ed è definito come

$$\hat{Y} = e^{-\frac{i}{\hbar}\pi\hat{S}_y} \quad (4.1.5)$$

In questo modo, è effettivamente verificato  $\hat{T}\hat{S}\hat{T}^{-1} = -\hat{S}$ .

**OSSERVAZIONE 4.2.** Questa è la correzione per lo spin 1/2; altri spin avranno le opportune correzioni.

**OSSERVAZIONE 4.3.** Non è sempre detto che  $\hat{T}^2 = \text{Id}$ .

## 4.2 Particelle identiche

Si prende un sistema composto da due particelle identiche; la base complessiva si indica con  $|\alpha\rangle^{(1)} \otimes |\beta\rangle^{(2)} = |\alpha\rangle |\beta\rangle$ . Un generico stato è:

$$|\psi\rangle = \sum c_{\alpha\beta} |\alpha\rangle |\beta\rangle$$

$$\Rightarrow \psi(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_1| \otimes \langle x_2| \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} |\alpha\rangle |\beta\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \langle x_1|\alpha\rangle \langle x_2|\beta\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2)$$

**OSSERVAZIONE 4.4.** La funzione d'onda  $\psi(x_1, x_2)$  (il suo modulo quadro) rappresenta la probabilità di trovare la particella 1 in  $x_1$  e la particella 2 in  $x_2$ , quindi consente una descrizione simultanea del sistema. Essendo interessati alla sola probabilità di trovare 1 in  $x_1$ , si calcola  $\int dx_2 |\psi(x_1, x_2)|^2$ .

Si definisce, ora, l'operatore che scambia le due particelle:

$$\hat{P}_{12} |\alpha\rangle^{(1)} \otimes |\beta\rangle^{(2)} = |\beta\rangle^{(1)} \otimes |\alpha\rangle^{(2)} \equiv |\beta\rangle |\alpha\rangle \quad (4.2.1)$$

il che è possibile perché le due particelle hanno stesso spazio di Hilbert (sono particelle identiche). Questo operatore soddisfa  $\hat{P}_{12}^2 = \text{Id}$  e  $\hat{P}_{12} = \hat{P}_{12}^\dagger = \hat{P}_{12}^{-1}$ . La sua azione su una funzione d'onda è data da:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{12} \psi(x_1, x_2) &= \langle x_1| \langle x_2| \hat{P}_{12} |\psi\rangle = \langle x_1| \langle x_2| \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \hat{P}_{12} |\alpha\rangle |\beta\rangle \\ &= \langle x_1| \langle x_2| \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} |\beta\rangle |\alpha\rangle = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \psi_\beta(x_1) \psi_\alpha(x_2) \equiv \psi(x_2, x_1) \end{aligned}$$

Si assume che  $[\hat{P}_{12}, \hat{H}] = 0$ ; come nel caso della parità, significa che, essendo  $\hat{P}_{12}^2 = \text{Id} \Rightarrow \hat{P}_{12} |\psi\rangle = \pm |\psi\rangle$  su  $|\psi\rangle$  autostato, gli autostati dell'Hamiltoniano mantengono la proprietà di simmetria o antisimmetria per scambio delle due particelle nell'evoluzione temporale.

Nel caso di tre particelle, uno stato si indica con  $|\alpha\beta\gamma\rangle = |\alpha\rangle^{(1)} \otimes |\beta\rangle^{(2)} \otimes |\gamma\rangle^{(3)}$ . In questo caso gli operatori di scambio sono  $\text{Id}, \hat{P}_{12}, \hat{P}_{13}, \hat{P}_{23}, \hat{P}_{123}, \hat{P}_{123}^2$ , dove

$\hat{P}_{123}|\alpha\beta\gamma\rangle = |\gamma\alpha\beta\rangle$  e  $\hat{P}_{123}^2|\alpha\beta\gamma\rangle = |\beta\gamma\alpha\rangle$ . Chiaramente tutti questi operatori non commutano fra loro.

Di seguito, si riportano, rispettivamente, uno stato simmetrico rispetto a questi operatori e uno anti-simmetrico rispetto allo scambio di due particelle:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left[ |\alpha\beta\gamma\rangle + |\beta\alpha\gamma\rangle + |\alpha\gamma\beta\rangle + |\gamma\beta\alpha\rangle + |\gamma\alpha\beta\rangle + |\beta\gamma\alpha\rangle \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left[ |\alpha\beta\gamma\rangle - |\beta\alpha\gamma\rangle - |\alpha\gamma\beta\rangle - |\gamma\beta\alpha\rangle + |\gamma\alpha\beta\rangle + |\beta\gamma\alpha\rangle \right]$$

dove  $1/\sqrt{6}$  è la costante di normalizzazione. Se  $[\hat{H}, \hat{P}_a] = 0, \forall a$ , si può dimostrare che gli autostati appartengono a spazi invarianti, quindi verrà sempre restituito o uno stato simmetrico o antisimmetrico per scambio di due particelle.

#### 4.2.1 Condizione di identità

**OSSERVAZIONE 4.5.** Il solo fatto che  $\hat{H}$  commuti con tutti gli operatori di scambio di due particelle non implica che le due particelle siano identiche; infatti, prendendo  $\hat{H} = p_1^2/2m + p_2^2/2m + V(r)$ ,  $r = |x_2 - x_1|$  agente su sistema composto da elettrone e positrone (positronio), le due particelle non sono identiche, ma l'Hamiltoniano è invariante per scambio.

#### DEFINIZIONE 4.2 — PARTICELLE IDENTICHE.

Due particelle 1 e 2 si dicono identiche se non esiste operatore (misura) in grado di distinguerle.

Sia  $\hat{A}$  un generico operatore; praticamente quello che si sta richiedendo è che per ogni stato  $|\psi\rangle$  di un sistema a due (per esempio) particelle, deve risultare

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\hat{P}_{12}\psi|\hat{A}|\hat{P}_{12}\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_{12}^\dagger\hat{A}\hat{P}_{12}|\psi\rangle \quad (4.2.2)$$

Questa richiesta si formalizza nel fatto che  $\hat{A} = \hat{P}_{12}^\dagger\hat{A}\hat{P}_{12}$ ; ricordando, però, che vale  $\hat{P}_{12} = \hat{P}_{12}^\dagger = \hat{P}_{12}^{-1}$ , la richiesta è equivalente a dire

$$[\hat{A}, \hat{P}_{12}] = 0 \quad (4.2.3)$$

Quindi  $\hat{P}_{12}$  non deve commutare solo con  $\hat{H}$ , ma con tutti gli operatori Hermitiani.

- Le particelle i cui stati risultano simmetrici per scambio sono dette **bosoni**.
- Le particelle i cui stati risultano anti-simmetrici per scambio sono dette **fermioni**.

**ESEMPIO 4.1 — SISTEMA DI OSCILLATORI SENZA SPIN.**

Si prende  $\hat{H} = \sum_{i=1}^N \hat{p}_i^2/2m + m\omega^2 \hat{x}_i^2/2$ , con lunghezza caratteristica  $l = \sqrt{\hbar/m\omega}$ . Il generico livello energetico per lo stato  $|n_i\rangle$  è  $E_{n_i} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$ , mentre uno stato del sistema complessivo è  $|n_1 n_2 \dots n_N\rangle$ , con energia

$$E_{n_1 \dots n_N} = \hbar\omega \left[ \frac{N}{2} + \sum_{i=1}^N n_i \right]$$

Per  $N = 2$ , volendo calcolare, per esempio, il numero di stati con energia  $E_{n_1 n_2} \leq E_{\text{tot}} = \hbar\omega(m + N/2) = \hbar\omega(m + 1)$ <sup>1</sup>, si deve imporre  $\sum_{i=1}^2 n_i \leq m$ .

Di seguito, è riportata una tabella con il numero di stati possibili (senza considerare lo spin) nel caso di sistema non-identico, bosoni e fermioni.

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
non identiche	1 $ 00\rangle$	3 $ 00\rangle,  01\rangle,  10\rangle$	6
bosoni	1 $ 00\rangle$	2 $ 00\rangle,  01\rangle +  10\rangle$	4
fermioni	0	1 $ 01\rangle -  10\rangle$	2

Tabella 1: Numero di stati per vari valori di  $m = 0, 1, 2$  a seconda se le due particelle che compongono il sistema sono, rispettivamente, diverse, bosoni o fermioni.

**ESEMPIO 4.2 — SISTEMA DI OSCILLATORI CON SPIN.**

L'Hamiltoniano è sempre  $\hat{H} = \sum \hat{p}_i^2/2m + m\omega^2 \hat{x}_i^2/2$ , ma questa volta gli stati di singola particella sono della forma  $|n_i\rangle \otimes |s_i\rangle$ . Per due particelle, quindi, si ha  $(|n_1\rangle \otimes |s_1\rangle) \otimes (|n_2\rangle \otimes |s_2\rangle)$ . Per studiare il problema, si considera la base  $|s_1 s_1 JM\rangle$ , che ha proprietà utili rispetto alla permutazione.

Prendendo d'esempio i fermioni, con spin  $s = 1/2$ , la base  $|JM\rangle$  è

$$\begin{aligned}
 |J = 1, M = 1\rangle &= \left| s_{z,1} = \frac{1}{2}, s_{z,2} = \frac{1}{2} \right\rangle & |J = 1, M = -1\rangle &= \left| s_{z,1} = -\frac{1}{2}, s_{z,2} = -\frac{1}{2} \right\rangle \\
 |J = 1, M = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right) & |00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right)
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Qui  $m$  non è il numero quantico, ma un generico numero intero noto.

Si nota che  $J = 1$  ha stati simmetrici per scambio, mentre  $J = 0$  ne ha di anti-simmetrici. Conseguentemente, si ha la seguente tabella degli stati anti-simmetrici al variare di  $m$ .

	$m = 0$	$m = 1$
$J = 0$	1	2
$J = 1$	0	3

Per  $J = 0, m = 0$  si ha lo stato  $|00\rangle$  composto con lo stato anti-simmetrico di spin  $|J = 0, M = 0\rangle$ , mentre per  $J = 1$  sono tutti simmetrici, quindi non ce ne sono di anti-simmetrici.

Se  $m = 1$ , ci sono due stati simmetrici:  $|00\rangle, |10\rangle + |01\rangle$ , quindi  $J = 0$  ha uno stato anti-simmetrico che composto con questi due dà due stati anti-simmetrici; se  $J = 1$ , ci sono tre stati simmetrici e  $m = 1$  ne porta uno anti-simmetrico  $|01\rangle - |10\rangle$ , quindi ci sono tre stati anti-simmetrici.

#### 4.2.2 Disuguaglianza di Bell

Si inizia col considerare il seguente esempio.

##### ESEMPIO 4.3.

Siano 1, 2 due particelle. Se ne considera lo stato complessivo a spin 0

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$$

La direzione di spin è arbitraria perché sarà  $J, M = 0$  lungo qualunque asse. Si considera l'operatore

$$\hat{O}_{12} = \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{n}_1 \otimes \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{n}_2$$

con  $\vec{\sigma}_i$  matrici di Pauli relative alla particella  $i$ -esima, mentre  $\hat{n}_1, \hat{n}_2$  sono due versori. Essendo  $|\psi\rangle$  uno stato con direzione di spin arbitraria, cioè a seguito di una rotazione, la sua espressione rimane la stessa e anche il suo valore di spin, si può ruotare il sistema in modo da scegliere, per esempio,  $\hat{n}_1 = \hat{z}$ . Così facendo,  $\hat{O}_{12} = \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \cos \theta_{12}$ , con  $\theta_{12}$  angolo formato tra  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$  (quindi tra  $\hat{z}$  e  $\hat{n}_2$ ). Allora

$$\langle\psi|\sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} \cos \theta_{12}|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left( \langle-|\sigma_z^{(2)} \cos \theta_{12}|-\rangle - \langle+|\sigma_z^{(2)} \cos \theta_{12}|+\rangle \right) = -\cos \theta_{12}$$

Ora si immagina di avere due particelle a formare uno stato di singoletto  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle)$  e si indica con  $\hat{a}$  il versore lungo cui il rivelatore per



la particella  $a$  ne misura lo spin e  $\hat{b}$  l'analogo per la particella  $b$ .

La misura per la particella  $a$ ,  $A(\hat{a}, \lambda)$ , si immagina dipendere esclusivamente dalla direzione di misurazione  $\hat{a}$  e da altri parametri generici contenuti in  $\lambda$ ; lo stesso si fa per  $B(\hat{b}, \lambda)$ . La misura complessiva di entrambe le particelle sarà, allora, della forma  $M(\hat{a}, \hat{b}, \lambda)$ .

Si definisce la **correlazione** tra le due misurazioni la seguente grandezza:

$$C(\hat{a}, \hat{b}) = \int A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (4.2.4)$$

dove si è assunto che i parametri contenuti in  $\lambda$  seguono una certa distribuzione (correttamente normalizzata)  $\rho(\lambda)$ .

Dall'assunzione  $|A(\hat{a}, \lambda)| = |B(\hat{b}, \lambda)| \leq 1$ , si ottiene che:

$$\begin{aligned} C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{b}') &= \int [A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) - A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}', \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) [1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}', \lambda)] + \\ &\quad - A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}', \lambda) [1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} |C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{b}')| &\leq \int (1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}', \lambda)) \rho(\lambda) d\lambda + \int (1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}, \lambda)) \rho(\lambda) d\lambda \\ \Rightarrow |C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{b}')| &\leq 2 + [C(\hat{a}, \hat{b}') + C(\hat{a}', \hat{b})] \end{aligned}$$

Quindi:

$$|C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{b}')| + |C(\hat{a}', \hat{b}') + C(\hat{a}', \hat{b})| \leq 2 \quad (4.2.5)$$

In meccanica quantistica è possibile osservare la violazione di questa disuguaglianza in varie combinazioni; se si prende  $\hat{b} = \hat{a}'$  e si definisce  $\theta$  come l'angolo fra  $\hat{a}$  e  $\hat{a}'$  e come, contemporaneamente, l'angolo tra  $\hat{b}$  e  $\hat{b}'$ , si ottiene:

$$|C(\theta) - C(2\theta)| + |C(\theta) + C(0)| \leq 2$$

Considerando che, per la meccanica quantistica, si è trovato  $C(\theta) = -\cos \theta$ , allora deve valere  $|- \cos \theta + \cos 2\theta| + |- \cos \theta - 1| \leq 2 \Rightarrow 2 \cos \theta - \cos 2\theta \leq 1$ . Come accennato, ci sono varie combinazioni per cui si assiste alla violazione di tale disuguaglianza; una di queste si ha per  $\theta = \pi/3$  perché si avrebbe  $1 + 1/2 \leq 1$ , che è chiaramente falso.

La trattazione fatta è stata utile solamente per arrivare alla conclusione che la disuguaglianza di Bell non è verificata; con un approccio più completo, è anche

possibile mostrare che il problema delle assunzioni di partenza che portano ad un assurdo è legata alla causalità.

## 5 SCATTERING QUANTISTICO

### 5.1 Introduzione

Avendo assenza di traiettoria in meccanica quantistica, si modella un fascio di particelle incidenti su un bersaglio tramite il flusso di probabilità introdotto in §1.3.7. Si chiama il flusso incidente  $J_i$ ; le particelle incidenti hanno una certa probabilità di essere deflesse di un certo angolo  $\theta$ , quindi si ha un certo flusso uscente di particelle passanti attraverso un angolo solido  $d\Omega$ . Il numero di particelle uscente viene parametrizzato come segue:

$$dN = J_i d\Omega \sigma(\theta) \quad (5.1.1)$$

- È proporzionale a  $J_i$  perché ci si aspetta che raddoppiando il flusso entrante, raddoppi anche quello uscente.
- È proporzionale a  $d\Omega$  perché ci si aspetta che raddoppiando l'angolo solido su cui il rivelatore cattura le particelle deflesse, raddoppi il numero di particelle rivelate.
- Per potenziali a simmetria centrale, la sezione d'urto  $\sigma$  dipende unicamente da  $\theta$ ; più in generale dovrebbe dipendere anche da  $\varphi$ , ma per il momento si assume dipendenza unicamente da  $\theta$ .

Tramite  $dN$ , si ottiene il numero di particelle (come densità di probabilità uscenti) che attraversa il rivelatore, cioè il numero di particelle per unità di area  $r^2 d\Omega$ , quindi:

$$J_s = \frac{dN}{r^2 d\Omega} \quad (5.1.2)$$

Conseguentemente, si ottiene un'espressione per la sezione d'urto differenziale:

$$\sigma(\theta) = \frac{r^2 J_s(\theta)}{J_i} \quad (5.1.3)$$

Da questa, si può ottenere la sezione d'urto totale integrando sull'angolo solido:

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sigma(\theta) = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta$$

Si modella l'interazione del fascio col centro diffusore tramite

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla_2^2 + V(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_X^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(\vec{r}) \quad (5.1.4)$$

dove si è fatto il cambio di variabile nel CM:  $\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2}{m_1+m_2}$  e  $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ . L'Hamiltoniano è separabile in  $\vec{X}$  e  $\vec{r}$ , quindi la funzione d'onda si potrà scrivere come  $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \phi(\vec{X})\psi(\vec{r})$ . Il problema relativo a  $\vec{X}$  è quello di una particella libera, quindi si studia solamente

$$\hat{H}_{\text{rid}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) \longrightarrow i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) = \hat{H}_{\text{rid}}\psi(\vec{r}, t)$$

**OSSERVAZIONE 5.1.** Contrariamente a quanto fatto nei problemi precedenti, dove come condizione al contorno dell'equazione di Shrödinger si imponeva una probabilità nulla di trovare le particelle, qui è il contrario. Nel primo caso, infatti, si studiavano gli stati legati, mentre qui si è proprio interessati al comportamento delle particelle all'infinito.

Allontanandosi molto dalla regione di interazione, cioè per  $r \rightarrow +\infty$ , la funzione d'onda deve contenere, separatamente, la funzione d'onda del fascio incidente e del fascio uscente; le particelle entranti e uscenti non devono sentire il potenziale fuori dalla regione di interazione, pertanto dovranno comportarsi come particelle libere. Allora, si scrive  $\psi(\vec{r} \rightarrow +\infty) = \psi_i(\vec{r}) + \psi_s(\vec{r})$ , dove  $\psi_i(\vec{r}) = Ae^{ikz}$ , dove  $z$  è l'asse lungo cui procede il fascio, con  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . Da questa, si ricava il flusso di probabilità:

$$\vec{J}_i = \frac{\hbar}{m} \Im \{ \psi_i^* \nabla \psi_i \} = |A|^2 \frac{k_z \hbar}{m} \quad (5.1.5)$$

Per trovare la funzione d'onda uscente, si risolve l'equazione di Shrödinger  $\hat{H}\psi_s(r) = E\psi_s(r)$ , con  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  perché anche questo, nel limite  $r \rightarrow +\infty$ , è una particella libera. Quindi si ha l'equazione

$$\nabla^2 \psi_s + k^2 \psi_s = 0$$

Le soluzioni che si cercano devono essere radiali, cioè devono descrivere un'emissione radiale dal centro diffusore; si può dimostrare che funzioni con questa caratteristica sono della forma<sup>1</sup>

$$\psi_s(\vec{r}) = Af(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (5.1.6)$$

---

<sup>1</sup>La costante  $A$  è uguale per entrambe le funzioni d'onda.

La componente radiale del flusso uscente è:

$$(\vec{J}_s)_r = \frac{\hbar}{m} \Im \{ \psi_s^* \partial_r \psi_s \} = |A|^2 \frac{|f|^2}{r^2} \frac{k}{m} \quad (5.1.7)$$

Complessivamente, quindi:

$$\psi(r \rightarrow +\infty) = A \left[ e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad (5.1.8)$$

Inoltre, dai flussi calcolati, si trova:

$$\sigma(\theta) = \frac{J_s(\theta)r^2}{J_i} = |f(\theta)|^2 \quad (5.1.9)$$

Quindi, risolvendo l'equazione di Shrödinger con la condizione al contorno in eq. 5.1.8, si può ricavare  $f(\theta)$  e, quindi, la sezione d'urto.

**OSSERVAZIONE 5.2.** Il problema con quanto fatto finora è che, invece di calcolare il flusso della funzione d'onda complessiva  $\psi = \psi_i + \psi_s$ , si sono calcolati i flussi separatamente, assumendo nullo il termine di interferenza fra i due. Questo non è nullo in generale, ma quanto ricavato va bene perché il termine di interferenza è rilevante solo per angoli  $\theta \approx 0$  perché il flusso entrante ha una certa sezione e la loro interferenza si osserva solamente a piccoli angoli di scattering.

## 5.2 Approssimazione di Born

Si assume che il potenziale di interazione sia una perturbazione. Si risolve, quindi

$$\nabla^2 + k^2 \psi = \frac{2mV}{\hbar^2} \psi, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{p}{\hbar}$$

Avendo assunto un potenziale piccolo tale da essere una perturbazione, si scrive la soluzione di tale equazione come  $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$ , dove lo sviluppo è in  $V$  e  $\psi^{(0)}$  è il termine in assenza di  $V$ , mentre  $\psi^{(1)}$  è al primo ordine. L'assunzione di potenziale  $V$  piccolo verrà definita meglio più avanti, intanto si procede con questa *ipotesi di lavoro*.

La  $\psi^{(0)}$ , quindi, soddisfa l'equazione di particella libera  $\nabla^2 \psi^{(0)} + k^2 \psi^{(0)} = 0$  e sarà  $\psi^{(0)} = e^{ikz} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ , assumendo  $A = 1$ <sup>1</sup>. La seconda uguaglianza è il caso più generale in cui non si fanno scelte sugli assi.

---

<sup>1</sup>La sezione d'urto è definita in modo tale da non dipendere dalle costanti di normalizzazione utilizzate, quindi prendere  $A = 1$  non comporta errore.

Dalla conoscenza di  $\psi^{(0)}$ , si ricava  $\psi^{(1)}$ :

$$\nabla^2 \psi^{(1)} + k^2 \psi^{(1)} = \frac{2mV}{\hbar^2} \psi^{(0)} = \frac{2mV(\vec{x})}{\hbar^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

La soluzione di questa è

$$\psi^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \psi^{(0)}(\vec{x}') V(\vec{x}') \frac{e^{ikr}}{r} d^3x', \quad r = |\vec{x} - \vec{x}'|$$

### 5.3 Validità dello sviluppo

Ora si può capire cosa significa  $V$  piccolo. Per consistenza dello sviluppo, deve valere  $\psi^{(1)} \ll \psi^{(0)} \sim 1^1$ . Inoltre, l'assunzione di assenza di interazione fuori dalla regione di interazione impone che, se  $a$  è la dimensione caratteristica di tale regione, allora  $V(r) \approx 0$ ,  $r > a$ . Calcolando  $\psi^{(1)}$  al limite della regione di interazione (quindi in  $a$ ) e compiendo le dovute approssimazioni, si ottiene:

$$\psi^{(0)} \sim 1 \gg \frac{ma^2}{\hbar^2} V(a) \implies V(a) \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$$

Prendendo un fascio incidente molto veloce (ma comunque in limite non-relativistico), cioè  $ka \gg 1$ , l'ipotesi di potenziale piccolo si può alleggerire come

$$|V| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} ka \quad (5.3.1)$$

*Dimostrazione.* Per dimostrarlo, in regime  $ka \gg 1$ , si sostituisce  $\psi^{(1)}(\vec{x}) = e^{ikz} g(\vec{x})$  in  $\nabla^2 \psi^{(1)} + k^2 \psi^{(1)} = \frac{2mV}{\hbar^2} e^{ikz}$  per ottenere

$$2ik\partial_z g e^{ikz} + \cancel{e^{ikz} \nabla^2 g} = \frac{2mV}{\hbar^2} e^{ikz} \implies 2ik\partial_z g = \frac{2mV}{\hbar^2} \implies g = \frac{m}{ik\hbar^2} \int V dz$$

dove si è trascurato il termine  $\nabla^2 g$  perché non proporzionale a  $k$ . Dal fatto che  $g \sim \frac{m}{k\hbar^2} \int V dz \sim \frac{m}{k\hbar^2} Va$ , dovendo risultare  $g \ll 1$ , si ottiene

$$\frac{mVa}{k\hbar^2} \ll 1 \implies V \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} ka$$

■

---

<sup>1</sup>Questo perché  $\psi^{(0)}$  è una funzione oscillante, che è dell'ordine di 1.

## 5.4 Soluzione in zona di radiazione

Ci si mette a grandi distanze dal centro diffusore, cioè  $x \gg a$ , e si approssima  $|\vec{x} - \vec{x}'| \simeq r - \vec{x}' \cdot \hat{n}$ , dove  $|\vec{x}| = r$  e  $\hat{n} = \vec{x}/r$ . Quindi, assumendo di essere di approssimazione di Born (quindi vale o  $V \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$  o  $V \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} ka$ ), si ha:

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(\vec{x}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \psi^{(0)}(\vec{x}') V(\vec{x}') \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \\ &\simeq -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'} V(\vec{x}') \frac{e^{ikr - i\vec{k}' \cdot \vec{x}}}{r} d^3x' = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int V(x') e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}'} d^3x'\end{aligned}$$

dove si è preso  $\vec{k}' = k\hat{n}$ . Ora, ricordando che  $\psi \simeq e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ , si deduce che:

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(x') e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}'} d^3x'$$

con  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ ,  $|\vec{q}| = 2k \sin(\theta/2)$  impulso trasferito. Per risolvere questo integrale, si passa in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r') e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} d^3r' \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r') e^{iqr' \cos \theta'} r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \int V(r') r' \frac{\sin qr'}{q} dr'\end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Per procedere nell'integrazione, è necessaria un'espressione per il potenziale.

## 5.5 Trasformata di Fourier e regola d'oro di Fermi

Riprendendo l'espressione

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(x') e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}'} d^3x'$$

questa si può vedere come una trasformata di Fourier di  $V$ , per cui si può scrivere la sezione d'urto differenziale come:

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} |\widetilde{V}(k - k')|^2 \quad (5.5.1)$$

Si lega questo alla regola d'oro di Fermi. Si considera, allora, uno stato iniziale

$$|i\rangle = \sqrt{\frac{m}{k\hbar}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad p = \hbar k$$

Lo stato finale, invece, si scrive come

$$|f\rangle = e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}}$$

con  $\vec{k}'$  impulso uscente. Si vuole ricavare la probabilità di transizione da  $|i\rangle$  a  $|f\rangle$ . La formula trovata per la regola d'oro è:

$$d\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(E_f - E_i) dv_f \quad (5.5.2)$$

In questo caso particolare, questa formula diventa:

$$d\omega_{kk'} = \frac{4\pi m}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(p^2 - p'^2) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \quad (5.5.3)$$

con

$$\langle f|V|i\rangle = \sqrt{\frac{m}{k}} \int e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} V e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3 x$$

che coincide con l'integrale ottenuto per la sezione d'urto.

**OSSERVAZIONE 5.3.** La differenza dei due approcci è che questo appena fatto, cioè calcolare le funzioni d'onda, permette una visione più completa perché tramite la funzione d'onda si ha anche accesso alla fase, più che al modulo quadro ottenuto direttamente da  $d\omega_{fi}$ . Al contrario, la regola d'oro è più conveniente da usare in casi più complicati, come scattering di elettrone veloce contro atomo ad esempio. Le formule ricavate con le funzioni d'onda, invece, sono limitate allo scattering da potenziale.

## 5.6 Soluzione alternativa al problema dello scattering

L'idea è di partire dall'equazione di Schrödinger in campo centrale

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + (k^2 - \bar{U}(r)) \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \bar{U}(r) = \frac{2m}{\hbar^2} U(r)$$



La soluzione di questa sarà della forma

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) R_{k\ell}(r)$$

Inserendola nell'equazione differenziale e passando in coordinate sferiche, si trova, per  $u_{k\ell} = r R_{k\ell}$ , che:

$$u_{k\ell}'' + \left[ k^2 - \bar{U}(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u_{k\ell} = 0$$

Nel limite  $r \rightarrow +\infty$ , però, si sa che la soluzione di questa deve essere quella di una particella libera perché si è fuori dalla regione di interazione, quindi  $u_{k\ell} \simeq e^{ikr}$ .

La funzione d'onda che risolve l'equazione differenziale permette di ottenere un'espressione significativa per l'ampiezza di scattering se, nel momento in cui è espressa nella forma (ansatz)

$$\psi = \sum_{\ell=0}^{+\infty} A_{\ell} R_{k\ell}(r) P_{\ell}(\cos \theta)$$

si sceglie

$$A_{\ell} = \frac{1}{2k} (2\ell+1) i^{\ell} e^{i\delta_{\ell}}$$

Tutte le informazioni sul potenziale sono contenute nella fase  $\delta_{\ell}$ , dove si è eliminata la  $m$  perché, per assunzione, non si vuole avere dipendenza da  $\varphi$ , per si prende  $m = 0$ . Inserendo questo ansatz nell'equazione differenziale per  $u$ , da cui si ricava, poi, il comportamento asintotico di  $R_{k\ell}$  tramite la relazione  $R_{k\ell} = u_{k\ell}/r$ , si ottiene

$$R_{k\ell} \simeq \frac{2}{r} \sin \left( kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_{\ell} \right)$$

Complessivamente, la funzione d'onda si scrive come:

$$\psi = \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) \left[ (-1)^{\ell+1} e^{-ikr} + S_{\ell} e^{ikr} \right], \quad S_{\ell} = e^{i2\delta_{\ell}}$$

Da questa funzione d'onda si vuole ricavare la parte con  $f(\theta)$ ; ricordando che  $\psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ , si ottiene  $f(\theta)$  espandendo  $e^{ikz}$  in onde sferiche:

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) \left[ (-1)^{\ell+1} e^{-ikr} + e^{ikr} \right]$$

da cui

$$\psi - e^{ikz} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \Rightarrow f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1)(S_\ell - 1)P_\ell(\cos \theta)$$

Tutto il problema di scattering si è ricondotto alla determinazione di un infinito numero di fasi, date dal potenziale, contenute in  $S_\ell$ .

A questo punto, la sezione d'urto totale è ottenuta tramite la seguente espressione:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell \quad (5.6.1)$$

dove si sono usate le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \int d\cos \theta P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) &= 0 \\ \int d\cos \theta P_\ell^2(\cos \theta) &= \frac{2}{2\ell+1} \end{aligned}$$

Si considera l'approssimazione di  $k$  piccoli, ossia  $pa/\hbar = ka \ll 1$ , con  $a$  lunghezza caratteristica del potenziale d'interazione. In questo regime ( $ka \ll 1$ ) si ha  $\delta_\ell \simeq c_\ell k^{2\ell+1}$ , da cui

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1) c_\ell^2 k^{2+4\ell} \simeq 2\pi c_0^2, \quad ka \ll 1$$

## 6 ESERCITAZIONI

### 6.1 Complementi di teoria

#### 6.1.1 Entropia di entanglement

È possibile quantificare la purezza di uno stato a seconda di quando  $\text{Tr } \rho^2$  è vicina a 1. Questo viene fatto tramite **entropia di entanglement**:

$$S = -\ln \left[ \text{Tr} \left( \rho^{(1)} \right)^2 \right] \quad (6.1.1)$$

Più in generale, si definisce

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \left[ \text{Tr} \left( \rho^{(1)} \right)^\alpha \right] \quad (6.1.2)$$

Si può anche definire l'entropia di von Neumann:

$$S_{\text{VN}} = -\text{Tr} \left( \rho^{(1)} \ln \rho^{(1)} \right) \quad (6.1.3)$$

#### 6.1.2 Funzione di una matrice

Si è appena usato  $\ln \rho$ , con  $\rho$  matrice. Per capire cosa significa, si prende una matrice  $M$  hermitiana e una sua funzione  $F(M)$  è definita come:

$$F(M) = U F(\lambda_i) U^{-1} \quad (6.1.4)$$

dove  $U$  è la matrice che diagonalizza  $M$ , i  $\lambda_i$  sono i suoi autovalori e  $F(\lambda_i)$  è la matrice in cui la funzione  $F$  agisce sugli autovalori della matrice.

Praticamente, se  $F(M) = M^3$  per esempio, si ha:

$$F(M) = U \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} U^{-1}$$

Questo significa che si applica  $F$  su una matrice diagonale dove l'operazione è ben definita e poi si ritorna alla rappresentazione originaria della matrice tramite la matrice  $U$  che è quella che diagonalizza  $M$ , cioè che la porta nella rappresentazione in cui è diagonale.

### 6.1.3 Evoluzione temporale di stati impuri

Stati impuri che si formano dall'interazione di più sistemi mantengono la loro impurità anche quando si blocca l'interazione. Per dimostrarlo, sia  $\rho^{(1)}(0)$  la matrice densità di uno stato entangled, cioè tale che  $\text{Tr}(\rho^{(1)}(0))^2 < 1$ . Se a  $t = 0$  si blocca l'interazione,  $\forall t > 0$ ,  $\text{Tr}(\rho^{(1)}(t))^2 < 1$ :

$$\text{Tr}(\rho^{(1)}(t))^2 = \text{Tr}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t} \rho^{(1)}(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t}\right)^2 = \text{Tr}\left(\rho^{(1)}(0) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t}\right)^2 = \text{Tr}(\rho^{(1)}(0))^2 < 1$$

dove si è usata la proprietà della traccia per cui  $\text{Tr} AB = \text{Tr} BA$ .

### 6.1.4 Teoria generica sui sistemi composti

Si considerano due sistemi 1, 2 e si cerca di caratterizzare gli stati del sistema globale 1 + 2. Si indicano con  $\hat{A}^{(1)}$  gli operatori hermitiani del sistema 1 e con  $\hat{B}^{(2)}$  quelli del 2, cioè, tali che  $\hat{A}^{(1)} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle$ , con  $a_n$  autostati di  $\hat{A}^{(1)}$  e che  $\hat{B}^{(2)} |b_m\rangle = b_m |b_m\rangle$ <sup>1</sup>.

Lo spazio di Hilbert di 1+2, a partire dalle basi fornite dagli operatori  $\hat{A}^{(1)}$ ,  $\hat{B}^{(2)}$  per 1 e 2 rispettivamente, è ottenuto tramite prodotto vettore:

$$|a_n b_m\rangle = |a_n\rangle^{(1)} \otimes |b_m\rangle^{(2)} \quad (6.1.5)$$

L'azione di un operatore di uno dei due spazi su un elemento di base dello spazio completo agisce solo sulla componente proveniente dallo stesso spazio; ad esempio

$$\hat{A}^{(1)} |a_n b_m\rangle = \hat{A}^{(1)} |a_n\rangle^{(1)} \otimes |b_m\rangle^{(2)} = (\hat{A}^{(1)} |a_n\rangle) \otimes |b_m\rangle^{(2)}$$

Di fatto, si ha  $[\hat{A}^{(1)}, \hat{B}^{(2)}] = 0$ .

Il generico stato ottenuto da questa base sarà:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |a_n\rangle^{(1)} \otimes |b_m\rangle^{(2)}$$

Dato  $\hat{R}$  generico operatore, si vuole calcolare  $\langle\psi|\hat{R}|\psi\rangle \equiv \text{tr} \rho \hat{R}$ , con  $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$ . Rinominando con  $|nm\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle$  un elemento di base dello spazio completo,

---

<sup>1</sup>Si assume base di autovettori discreta per semplicità e si assume, inoltre, assenza di degenerazione.

si può scrivere  $\rho$  in forma matriciale come

$$\rho_{nm,n'm'} = \langle nm|\psi\rangle\langle\psi|n'm'\rangle \implies \rho = \sum_{n,m,n',m'} |nm\rangle \rho_{n,m,n',m'} \langle n'm'| = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Allo stesso modo, si rappresenta in forma matriciale l'operatore  $\hat{R}$ :

$$R_{nm,n'm'} = \langle nm|\hat{R}|n'm'\rangle$$

A questo punto

$$\langle\psi|\hat{R}|\psi\rangle = \text{tr } \rho\hat{R} = \sum_{n,m,n',m'} \langle nm|\rho|n'm'\rangle \langle n'm'|\hat{R}|nm\rangle = \sum_{n,m,n',m'} \rho_{nm,n'm'} R_{nm,n'm'}$$

Limitando l'azione dell'operatore  $\hat{R}$  solamente allo stato 1, cioè  $\hat{R} \rightarrow \hat{R}^{(1)}$ , l'espressione sopra si modifica come segue:

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho\hat{R}^{(1)} &= \sum_{n,m,n',m'} \langle nm|\rho|n'm'\rangle \langle n'm'|\hat{R}^{(1)}|nm\rangle = \sum_{n,m,n',m'} \langle nm|\rho|n'm'\rangle \langle n'|\hat{R}^{(1)}|n\rangle \overbrace{\langle m'|m\rangle}^{=\delta_{mm'}} \\ &= \sum_{n,n'} \sum_m \underbrace{\langle nm|\rho|n'm\rangle}_{\equiv \rho^{(1)}} \langle n'|\hat{R}^{(1)}|n\rangle \end{aligned}$$

visto che  $\hat{R}^{(1)}$  agisce solo su 1, con  $\rho^{(1)}$  matrice densità limitata allo spazio 1. Si capisce se il sistema 1 è isolato se  $\text{tr } [\rho^{(1)}]^2 = 1$ .

**OSSERVAZIONE 6.1.** Nel passaggio da  $\rho$  a  $\rho^{(1)}$  o  $\rho^{(2)}$  si perdono informazioni sul sistema globale:  $\rho^{(i)}$  permette di studiare i sottosistemi singolarmente, ma non contiene l'informazione riguardante la comunicazione tra i vari sottosistemi contenuta, invece, in  $\rho$ .

Si immagina, ora, di mantenere attiva l'interazione fra due sistemi 1, 2 per  $t < t_0$ ; in questa frazione di tempo, l'Hamiltoniano complessivo è dato da  $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12}$ . Immaginando, a  $t = t_0$ , di rimuovere l'interazione e di continuare a studiare unicamente l'interazione del sistema 1, il nuovo Hamiltoniano è semplicemente  $\hat{H}_1$ , quindi l'evoluzione temporale è ottenuta tramite  $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1(t-t_0)}$ ,  $t > t_0$ :

$$\rho^{(1)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1(t-t_0)} \rho^{(1)}(t=t_0) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1(t-t_0)} \quad (6.1.6)$$

dove si usa la condizione iniziale di  $\rho^{(1)}(t = t_0) = \text{tr}_2 \rho(t_0)$ <sup>1</sup>, cioè la condizione del sistema 1 poco prima della fine dell'interazione.

### 6.1.5 Prodotto tensore fra matrici

Il prodotto tensore tra due matrici, rispettivamente di dimensioni  $m \times n$  e  $p \times q$ , restituisce una matrice di dimensioni  $pm \times qn$  definita come:

$$A \otimes B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (6.1.7)$$

dove ogni prodotto  $a_{ij}B$  è blocco dato dal prodotto della matrice  $B$  per lo scalare  $a_{ij}$ .

### 6.1.6 Regole di selezione

Le regole di selezione sono particolarmente utili e verranno applicate nello studio delle transizioni di stato per atomo di idrogeno investito da radiazione elettromagnetica in approssimazione di dipolo e si è interessati alle regole di selezione del problema, quali simmetrie, parità o momento angolare. Si è visto che la probabilità di transizione da uno stato  $a$  ad uno stato  $b$  è:

$$P_{a \rightarrow b} \propto \left| \left\langle E_b^{(0)} \left| \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{e}} \right| E_a^{(0)} \right\rangle \right|^2$$

con

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_i q_i \hat{\mathbf{x}}_i$$

è il momento di dipolo, che per l'atomo di idrogeno è  $-e\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{e}$  rappresenta la polarizzazione dell'onda. Si studieranno i casi (regole di selezione) in cui questo elemento di matrice è non-nullo, il che implica una probabilità non-nulla di transizione. Le seguenti regole saranno rivolte principalmente alle transizioni nell'atomo di idrogeno in approssimazione di dipolo elettrico, ma per lo più sono regole generali.

- (a). **Parità.** In questo contesto, si immagina di avere una transizione tra stati che hanno parità definita. Si immagina una transizione tra due stati  $|p_1\rangle, |p_2\rangle$ <sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Si traccia via 2 dalla matrice densità completa.

<sup>2</sup>Visto il discorso, si indica, come numero quantico, solo quello relativo alla parità, ma questi stati, in generale, saranno caratterizzati da altri numeri quantici, come  $n, \ell, m$  per l'atomo di

cioè tali che  $\hat{\mathcal{P}}|p_i\rangle = p_i|p_i\rangle$ ; in questo caso, la transizione è permessa se

$$0 \neq \langle p_1|\hat{d}_i|p_2\rangle = \langle p_1|\hat{\mathcal{P}}^+\hat{\mathcal{P}}\hat{d}_i\hat{\mathcal{P}}^+\hat{\mathcal{P}}|p_2\rangle = -p_1p_2\langle p_1|\hat{d}_i|p_2\rangle$$

dove si è usato che  $\hat{d}_i$  è dispari sotto parità (essendo proporzionale alla posizione). È vero che questo elemento di matrice è non-nullo se  $p_1 \neq p_2$ , cioè se  $|p_1\rangle$  e  $|p_2\rangle$  hanno parità opposta.

- (b). **Momento angolare  $\hat{L}_z$ .** Si considerano stati che abbiano  $m$  come numero quantico, cioè tali che  $\hat{L}_z|m\rangle = m|m\rangle$ . Anche in questo caso, si riporta solo il numero quantico rilevante per il caso specifico in esame.

Si vuole capire quando  $\langle m'|\hat{d}_i|m\rangle \neq 0$ . Per farlo, si usano

$$\hat{d}_+ = \hat{d}_x + i\hat{d}_y \quad \hat{d}_- = \hat{d}_x - i\hat{d}_y \quad \hat{d}_z$$

Si possono mostrare le regole di commutazione

$$[\hat{L}_z, \hat{d}_\pm] = \pm\hbar\hat{d}_\pm \quad [\hat{L}_z, \hat{d}_z] = 0$$

**OSSERVAZIONE 6.2.** Queste regole di commutazione sono, in realtà, verificate per ogni operatore che trasforma come un vettore rispetto a  $\hat{L}_z$  e la trattazione non è specificatamente legata al caso in esame della radiazione che incide sull'atomo di idrogeno, quindi come operatore il momento di dipolo.

Utilizzando i commutatori, si ha che:

$$\begin{aligned} \langle m'|[\hat{L}_z, \hat{d}_\pm]|m\rangle &= \pm\hbar\langle m'|\hat{d}_\pm|m\rangle \\ &= \langle m'|\hat{L}_z\hat{d}_\pm - \hat{d}_\pm\hat{L}_z|m\rangle = (m' - m)\langle m'|\hat{d}_\pm|m\rangle \end{aligned}$$

Mettendo insieme le due uguaglianze, si ottiene la condizione

$$(m' - m \mp 1)\langle m'|\hat{d}_\pm|m\rangle = 0 \quad (6.1.8)$$

Ripetendo gli stessi passaggi anche per  $\hat{d}_z$ , usando che  $[\hat{L}_z, \hat{d}_z] = 0$ , si trova che:

$$(m' - m)\langle m'|\hat{d}_z|m\rangle = 0 \quad (6.1.9)$$

**OSSERVAZIONE 6.3.** In tutti i conti sopra, si è preso  $\hbar = 1$ .

---

idrogeno.

Per la relazione in eq. 6.1.8, dalla richiesta che tale elemento di matrice sia diverso da 0, si ottiene la condizione  $m' - m = \pm 1$ . Da questa, esplicitando  $\hat{d}_x, \hat{d}_y$  come combinazioni di  $\hat{d}_\pm$ , si ottiene l'analogha condizione  $\Delta m = \pm 1$ .

Dalla relazione in eq. 6.1.9, invece, si ottiene la condizione  $m' - m = 0$ .

Da questo, si conclude che  $\hat{d}_x, \hat{d}_y$  connettono stati con autovalore di  $\hat{L}_z$  che differiscono di 1 e che  $\hat{d}_z$  connette stati che hanno stesso  $m$ .

- (c). **Momento angolare  $\hat{L}^2$ .** Si considerano stati della forma  $|\ell\rangle$  tali che  $\hat{L}^2 = \ell(\ell + 1)|\ell\rangle$  (sempre ponendo  $\hbar = 1$ ) e ci si chiede quando  $\langle \ell' | \hat{d}_i | \ell \rangle \neq 0$ . Per farlo, si usa la relazione

$$[\hat{L}^2, [\hat{L}^2, \hat{x}_k]] = 2\hbar^2 (\hat{L}^2 \hat{x}_k + \hat{x}_k \hat{L}^2) \quad (6.1.10)$$

Prendendo  $\hbar = 1$ , si ottengono, separatamente, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \langle \ell' | [\hat{L}^2, [\hat{L}^2, \hat{x}_k]] | \ell \rangle &= 2 \langle \ell' | \hat{L}^2 \hat{x}_k + \hat{x}_k \hat{L}^2 | \ell \rangle \\ &= 2 [\ell(\ell + 1) + \ell'(\ell' + 1)] \langle \ell' | \hat{x}_k | \ell \rangle \\ \langle \ell' | \hat{L}^2 [\hat{L}^2, \hat{x}_k] - [\hat{L}^2, \hat{x}_k] \hat{L}^2 | \ell \rangle &= [\ell'(\ell' + 1) - \ell(\ell + 1)] \langle \ell' | [\hat{L}^2, \hat{x}_k] | \ell \rangle \\ &= [\ell'(\ell' + 1) - \ell(\ell + 1)]^2 \langle \ell' | \hat{x}_k | \ell \rangle \end{aligned}$$

Visto che sono risultato della stessa espressione di partenza, eguagliandole e usando che

$$\begin{aligned} \ell'(\ell' + 1) - \ell(\ell + 1) &= (\ell' + \ell + 1)(\ell' - \ell) \\ 2[\ell(\ell + 1) + \ell'(\ell' + 1)] &= (\ell' + \ell + 1)^2 + (\ell' - \ell)^2 - 1 \end{aligned}$$

si ottiene la condizione

$$[(\ell' + \ell + 1)^2 - 1][(\ell' - \ell) - 1] = 0 \implies \ell', \ell \neq 0 \text{ \& } \ell' - \ell = \pm 1 \quad (6.1.11)$$

- (d). **Teorema di Wigner-Eckart.** Le regole di selezione si possono ricavare direttamente dal teorema di Wigner-Eckart. Dato, quindi, un tensore irriducibile  $\hat{T}_m^{(\ell)}$ , con  $m = -\ell, \dots, +\ell$ , si ha

$$\langle \ell'' m'' | \hat{T}_m^{(\ell)} | \ell' m' \rangle = C_{\ell m; \ell' m'}^{\ell'' m''} \langle \ell'' | \hat{T}^{(\ell)} | \ell' \rangle$$



I coefficienti di Clebsch-Gordan che figurano in questo teorema pongono le condizioni per le regole di selezione:

$$|\ell_i - \ell_f| \leq 1 \quad |m_i - m_f| \leq 1 \quad \ell_i + \ell_f \neq 0$$

## 6.2 Sistemi a due livelli

### 6.2.1 Generalità sui sistemi a due livelli

Le matrici di Pauli sono:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.2.1)$$

Queste soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i^\dagger & \sigma_i^2 &= \text{Id} & [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ \sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij}\text{Id} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k & \text{tr } \sigma_i &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Le matrici Hermitiane  $2 \times 2$  formano uno spazio vettoriale quadridimensionale sui reali e la forma più generale di una matrice Hermitiana si può scrivere tramite le matrici di Pauli:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & c + id \\ c - id & b \end{pmatrix}, \quad a, c, b, d \in \mathbb{R} \\ A &= a_0 \text{Id} + \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Un sistema a due livelli prende stati in uno spazio di Hilbert bidimensionale a coefficienti su  $\mathbb{C}$ . Una possibile base completa è:

$$\mathcal{B} = \left\{ |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (6.2.4)$$

Lo stato più generale del sistema si scrive, tramite la base scelta, come

$$|\psi\rangle = a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle$$

dove  $|a_+|^2 + |a_-|^2 \stackrel{!}{=} 1$  per la condizione di normalizzazione.

La matrice densità associata allo stato  $|\psi\rangle$  è scritta, in forma operatoriale, come  $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ . La matrice densità soddisfa le seguenti proprietà:

$$\rho = \rho^\dagger \quad \text{tr } \rho = 1 \quad \rho^2 = \rho \quad (6.2.5)$$

dove l'ultima ( $\rho^2 = \rho$ ) è verificata unicamente per stati puri. Se  $|i\rangle, |j\rangle$  sono elementi di base, la matrice densità si può rappresentare anche in forma matriciale come

$$\rho_{ij} = \langle i|\rho_\psi|j\rangle \implies \rho_\psi = |i\rangle \rho_{ij} \langle j| \quad (6.2.6)$$

Si nota che l'operatore  $\hat{M} = \sigma_3$  è tale per cui

$$M_{ij} = \langle i|\hat{M}|j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

come si è scelta la base.

È possibile calcolare il valore di aspettazione di un osservabile  $\hat{O}$  su uno stato generico (anche non puro) usando la matrice densità tramite la relazione  $\langle \hat{O} \rangle = \text{tr } \rho \hat{O}$ .

#### ESERCIZIO 6.1.

Scrivere il più generale Hamiltoniano per un sistema a due livelli.

*Svolgimento.* Un Hamiltoniano deve essere un operatore Hermitiano, quindi si usa l'espressione della più generale matrice Hermitiana  $2 \times 2$  riportata in eq. 6.2.3. ♠

#### ESERCIZIO 6.2.

Scrivere il più generale Hamiltoniano che ha  $|+\rangle, |-\rangle$  come autostati.

*Svolgimento.* Partendo dall'espressione di  $\hat{H}$  in eq. 6.2.3, si impone che  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  siano autostati:

$$\begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c-id \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c-id=0$$

$$\begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+id \\ b \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff c+id=0$$

Quindi si richiede  $c = d = 0$ . Questo significa che la più generale espressione di  $\hat{H}$  che abbia  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$  come autostati è:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a_0 \text{Id} + a_3 \sigma_3 \quad (6.2.7)$$

dove  $a_0$  e  $a_3$  scelti in modo tale che sulla diagonale escano  $a, b$ . ♠

### ESERCIZIO 6.3.

Calcolare la matrice densità  $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  per gli stati

- $|\psi\rangle = |+\rangle$ ;
- $|\psi\rangle = |-\rangle$ ;
- $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ .

*Svolgimento.* Se  $|\psi\rangle = |+\rangle$ , allora  $\rho_+ = |+\rangle\langle+|$ , il che significa che, per l'ortonormalità degli elementi di base, vale

$$\rho_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente si trova  $\rho_-$ . Se  $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ , invece, si ha

$$\begin{aligned} \langle+| (a|+\rangle + b|-\rangle) (\langle+| a^* + \langle-| b^*) |+\rangle &= |a|^2 & \langle+|\rho_\psi|-\rangle &= ab^* \\ \langle-| (a|+\rangle + b|-\rangle) (\langle+| a^* + \langle-| b^*) |-\rangle &= |b|^2 & \langle-|\rho_\psi|+\rangle &= a^*b \\ \Rightarrow \rho_{ij} &= \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In quest'ultimo caso, si nota che  $|\psi\rangle$  è normalizzato  $\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow \text{tr } \rho = 1$ .

Inoltre  $\rho = \rho^+$  e

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^4 + |a|^2|b|^2 & |a|^2ab^* + ab^*|b|^2 \\ a^*b(|a|^2 + |b|^2) & |a|^2|b|^2 + |b|^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix} = \rho$$

♠

### ESERCIZIO 6.4.

Scrivere la più generale matrice densità. NOTA: le proprietà più generali sono quelle per stati qualsiasi, non necessariamente puri, quindi  $\text{tr } \rho = 1$ ,  $\rho = \rho^+$  e  $\text{tr } \rho^2 \leq 1$ .

*Svolgimento.* Facendo uso della più generale espressione di una matrice Hermitiana riportata in eq. 6.2.3, si ha il punto di partenza

$$\rho_{ij} = a_0 \text{Id} + \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i$$

Visto che deve risultare  $\text{tr } \rho = 1$ , si deve avere  $a_0 + a_3 + a_0 - a_3 = 2a_0 \stackrel{!}{=} 1$ , quindi  $a_0 = 1/2$ .

Infine, si calcola  $\rho^2$  per imporre  $\text{tr } \rho^2 \leq 1$ , ricordando che  $\sigma_i^2 = 1$ . Per farlo, si nota che, ridefinendo  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  in modo che  $\rho = \frac{1}{2} (\text{Id} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$ , si trova<sup>1</sup>:

$$\rho^2 = \frac{1}{4} (\text{Id} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\text{Id} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1+a^2}{4} \text{Id} + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$$

Si nota che  $\rho$  descrive uno stato puro  $\iff a^2 = 1$ , per cui si verifica  $\rho = \rho^2$ . In generale, visto che  $\text{tr } \sigma_i = 0$ , si ha  $\text{tr } \rho^2 = \frac{1+a^2}{2} \leq 1 \iff a^2 \leq 1$ . L'espressione più generica per la matrice densità è:

$$\rho = \frac{1}{2} (\text{Id} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$$

con  $a^2 \leq 1$ . ♠

#### ESERCIZIO 6.5.

Calcolare il valore di aspettazione  $\hat{M} = \sigma_3$  su uno stato generico individuato da  $\rho = \frac{1}{2} (\text{Id} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$ .

*Svolgimento.* Per conto diretto:

$$\text{Tr } \rho \hat{O} = \sum_i \rho_{ii} M_{ii} = \frac{1}{2} (1 + a_3) M_{11} + \frac{1}{2} (1 - a_3) M_{22} = \frac{1}{2} (1 + a_3) - \frac{1}{2} (1 + a_3) = a_3$$

Più efficientemente, si sarebbe potuto notare che, visto che  $\text{Tr } \sigma_i = 0$ :

$$\text{Tr} \left[ \frac{1}{2} (\text{Id} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \sigma_3 \right] = \text{Tr} \frac{1}{2} a_3 \sigma_3^2 = \text{Tr} \frac{1}{2} a_3 \text{Id} = a_3$$
♠

#### ESERCIZIO 6.6.

Scrivere la più generale  $\rho$  tale per cui  $\langle \hat{M} \rangle = 0$ .

---

<sup>1</sup>La seconda uguaglianza è da dimostrare.

*Svolgimento.* Dall'esercizio precedente, si ricava la condizione  $a_3 = 0$ ; allora la  $\rho$  più generica è:

$$\rho = \frac{1}{2} (\text{Id} + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2)$$

♠

### ESERCIZIO 6.7.

Trovare il più generico stato puro  $|\psi\rangle$  tale per cui  $\langle\psi|\hat{M}|\psi\rangle = 0$ .

*Svolgimento.* Prendendo  $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ , con  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , si ha

$$\langle\psi|\hat{M}|\psi\rangle = \langle\psi|\sigma_3|\psi\rangle = |a|^2 - |b|^2$$

Quindi si deve imporre  $|a|^2 = |b|^2$ . Dalla condizione di normalizzazione, si ottiene che deve essere  $|a|^2 = 1/2$ , quindi, in generale:

$$|\psi\rangle = e^{i\theta} \left( \frac{|+\rangle + e^{i\varphi} |-\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

ha  $\langle\hat{M}\rangle = 0$ .

♠

### 6.2.2 Sistema di qubit

Si considera un singolo sistema di due qubit. Come base si usano autovettori di  $\sigma_3$ , ossia

$$\left\{ |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si considera l'Hamiltoniano

$$\hat{H} = \text{Id} + \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di questa sono  $\epsilon_1 = 0$  e  $\epsilon_2 = 2$  perché ha determinante 0 ( $\Rightarrow \epsilon_1 = 0$ ) e la traccia è conservata, quindi l'altro autovalore deve essere 2. I relativi autovettori normalizzati sono:

$$|\epsilon_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \quad |\epsilon_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

A questo punto, un generico stato si può scrivere come:

$$|\psi\rangle = a|\epsilon_1\rangle + b|\epsilon_2\rangle = \bar{a}|1\rangle + \bar{b}|2\rangle$$

Volendo studiare sua evoluzione temporale, conviene usare la base delle autoenergie perché gli autovettori di  $\hat{H}$  sono stazionari; di fatto:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \left[ a |\epsilon_1\rangle + b |\epsilon_2\rangle \right] = a e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} |\epsilon_1\rangle + b e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} |\epsilon_2\rangle \quad (6.2.8)$$

**OSSERVAZIONE 6.4.** Risulta più comodo usare la base degli autostati di  $\hat{H}$  perché  $[\hat{H}, \sigma_3] \neq 0$  perché  $[\sigma_1, \sigma_3] = -2i\sigma_2$ , il che vuol dire che  $\sigma_3$  e  $\hat{H}$  non hanno base comune.

Ora si assume che  $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ . Volendo scrivere evoluzione temporale in termini delle autoenergie, si scrive  $|1\rangle$  in termini di  $|\epsilon_1\rangle$  e  $|\epsilon_2\rangle$ :

$$\frac{1}{2} |\epsilon_1\rangle + \frac{1}{2} |\epsilon_2\rangle = \frac{1}{2} (|1\rangle - |2\rangle) + \frac{1}{2} (|1\rangle + |2\rangle) = |1\rangle \equiv |\psi(t=0)\rangle$$

cioè  $a = b = 1/\sqrt{2}$ . Sostituendo questi in eq. 6.2.8, si ottiene l'evoluzione temporale per  $|\psi(t)\rangle$ . Considerando  $\sigma_3$  come osservabile, si vuole vedere il suo valore medio a  $t = 0$  nello stato  $|\psi\rangle$ , quindi si calcola

$$\langle \psi(0) | \sigma_3 | \psi(0) \rangle \equiv \langle 1 | \sigma_3 | 1 \rangle = 1$$

Ora, più in generale, si calcola  $\langle \psi(t) | \sigma_3 | \psi(t) \rangle$ . Per farlo, conviene esprimere  $|\psi(t)\rangle$  in termini di  $|1\rangle, |2\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} |\epsilon_1\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} |\epsilon_2\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \right) |1\rangle + \left( e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \right) |2\rangle \right] \equiv a(t) |1\rangle + b(t) |2\rangle \end{aligned}$$

Visto che  $\sigma_3 |1\rangle = |1\rangle$ , mentre  $\sigma_3 |2\rangle = -|2\rangle$ , si ha  $\langle \psi(t) | \sigma_3 | \psi(t) \rangle = |a(t)|^2 - |b(t)|^2$ , dove

$$\begin{aligned} |a(t)|^2 &= \frac{1}{4} \left[ 2 + e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_1 - \epsilon_2)t} + e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_2 - \epsilon_1)t} \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\hbar} t \right] \\ |b(t)|^2 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\hbar} t \right] \\ \Rightarrow \langle \psi(t) | \sigma_3 | \psi(t) \rangle &= |a(t)|^2 - |b(t)|^2 = \cos \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\hbar} t \end{aligned}$$

### 6.2.3 Sistema di due qubit interagenti

Per  $a = 1, 2$  (a seconda di quale sistema di qubit si considera), si individua l'operatore

$$\hat{M}_a = \sigma_3^{(a)}, \text{ con } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questo fornisce base per il sistema  $a$  data da  $|1\rangle^{(a)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $|2\rangle^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Si indica con  $|k\rangle$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  la base completa dello spazio di Hilbert dei due sistemi di qubit, cioè:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(2)} ; |2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(1)} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(2)} \\ |3\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(2)} ; |4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(1)} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Si studia il sistema sotto l'Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \left( \vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)} \right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)}$$

con  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , dove la seconda uguaglianza è ottenuta dal fatto che, per una generica matrice di Pauli, vale  $\sigma_i^2 = \text{Id} \Rightarrow \vec{\sigma}^2 = 3 \text{Id}^1$ .

Il prossimo passo è scrivere  $\hat{H}$  in forma matriciale in modo da poterne calcolare gli autovalori. Quindi se  $|q\rangle, |k\rangle$  sono elementi della base dello spazio completo, si calcola  $H_{qk} = \langle q | \hat{H} | k \rangle$ , che sarà una matrice  $4 \times 4$ . Si ha:

$$H_{qk} = \frac{3}{2} \overbrace{\langle q | \text{Id}^{(1)} \otimes \text{Id}^{(2)} | k \rangle}^{\equiv \langle q | k \rangle = \delta_{qk}} + \frac{1}{2} \langle q | \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} | k \rangle = \frac{3}{2} \delta_{qk} + \frac{1}{2} \langle q | \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} | k \rangle$$

Si nota che

$$\langle q | \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} | k \rangle = \langle i |^{(1)} \langle j |^{(2)} \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} | i' \rangle^{(1)} | j' \rangle^{(2)} = \langle i | \vec{\sigma}^{(1)} | i' \rangle \cdot \langle j | \vec{\sigma}^{(2)} | j' \rangle$$

---

<sup>1</sup>Il risultato  $3/2$  in  $\hat{H}$  deriva dal fatto che, nonostante  $[\vec{\sigma}^{(1)}]^2 = 3 \text{Id}^{(1)}$ , in realtà un generico operatore  $\hat{A}^{(1)}$ , cioè agente solo su 1, equivale a  $\hat{A}^{(1)} \otimes \text{Id}^{(2)}$ . Nelle parentesi tonde di  $\hat{H}$ , si avrebbe

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \left( 3 \text{Id}^{(1)} \otimes \text{Id}^{(2)} + 3 \text{Id}^{(1)} \otimes \text{Id}^{(2)} + 2 \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{\sigma}^{(2)} \right)$$

da cui il  $3/2$ , che è sarebbe più correttamente da moltiplicare per  $\text{Id}^{(1)} \otimes \text{Id}^{(2)}$ , ma si sottintende per non appesantire la notazione.

dove si è sottinteso il prodotto tensore, con  $i, i', j, j' = 1, 2$ . Svolgendo il calcolo, si trova

$$H_{qk} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da questa rappresentazione, si vede che gli elementi di base  $|1\rangle, |4\rangle$  sono autostati con autovalore 2; considerando il blocco centrale e ricordando autovalori e autovettori trovati in §6.2.2, si ha:

$$\begin{aligned} \lambda = 2 : & \left\{ |\epsilon_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\epsilon_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\epsilon_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} \\ \lambda = 0 : & |\epsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

**OSSERVAZIONE 6.5.** In questo caso, si ha una degenerazione pari a 3; la presenza di degenerazione non permette di distinguere, dal punto di vista energetico, i vari stati perché una misura di energia restituisce lo stesso valore (autoenergia) per tre stati.

È necessario trovare un'altra base che permetta di avere autovalori dell'energia diversi, quindi bisogna trovare un altro operatore, che commuta con l'Hamiltoniano, e che non abbia degenerazione nello spettro.

Si studia l'operatore

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \left( \sigma_3^{(1)} + \sigma_3^{(2)} \right) \quad (6.2.11)$$

e si vede se riesce a distinguere gli autostati. Intanto si verifica che commuta con  $\hat{H}$ ; per farlo, si osserva che, definendo  $\hat{S}_i = \frac{1}{2} \left( \sigma_i^{(1)} + \sigma_i^{(2)} \right)$ , si ha  $\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \hat{S}_i^2$ .



Visto che  $[\hat{S}_i, \hat{S}_3] = i\varepsilon_{i3k}\hat{S}_k$ <sup>1</sup>, allora<sup>2</sup>  $[\hat{S}_i^2, \hat{S}_3] = i\varepsilon_{i3k}(\hat{S}_i\hat{S}_k + \hat{S}_k\hat{S}_i)$ . Quindi:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{S}_3] &= i \sum_{i,k} \varepsilon_{i3k}(\hat{S}_i\hat{S}_k + \hat{S}_k\hat{S}_i) \\ &= i \sum_{i,k} \varepsilon_{k3i}(\hat{S}_i\hat{S}_k + \hat{S}_k\hat{S}_i) \implies [\hat{H}, \hat{S}_3] = 0 \\ &= -i \sum_{i,k} \varepsilon_{i3k}(\hat{S}_i\hat{S}_k + \hat{S}_k\hat{S}_i) \end{aligned}$$

Andando a calcolare  $\langle \epsilon_i | \hat{S}_3 | \epsilon_i \rangle$  con gli  $|\epsilon_i\rangle$  definiti in eq. 6.2.10, si trova  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = -1$  e  $\epsilon_3 = 0$ , quindi ha risolto la degenerazione osservata prima.

Ora si considera in particolare lo stato fondamentale  $|\epsilon_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|12\rangle - |21\rangle)$ <sup>3</sup>. Si vuole guardare lo stato fondamentale del solo sistema 1; allora si definisce  $\rho = |\epsilon_0\rangle\langle\epsilon_0|$  e si calcola  $\rho^{(1)} = \text{Tr}^{(2)} \rho$  (cioè si traccia sul secondo sottosistema).

---

<sup>1</sup>Qui è sufficiente usare le regole di commutazione delle matrici di Pauli che definiscono gli  $\hat{S}_i$ , ricordando che in questi è presente un fattore 1/2.

<sup>2</sup>Qui si è usata la proprietà del commutatore  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ .

<sup>3</sup>Riprendendo la notazione per gli elementi di base per singolo sistema di due qubit, si ha  $|12\rangle = |1\rangle \otimes |2\rangle$ .

**ESERCIZIO 6.8 — (FACOLTATIVO).**

Per esercizio (non sarà utile nel seguito), si calcola la forma matriciale di  $\rho$ , indicata con  $\rho_{qk} = \langle q|\rho|k\rangle$ .

*Svolgimento.* Questa matrice avrà evidentemente tutti 0 nei posti in cui  $|k\rangle$  o  $|q\rangle$  sono diversi da  $|12\rangle$  o  $|21\rangle$ ; allora la matrice sarà composta da tutti zeri tranne un blocco quadrato  $2 \times 2$ .

Sfruttando le proprietà  $\text{Tr } \rho = 1$  e  $\rho = \rho^\dagger$ , è sufficiente calcolare gli elementi  $\langle 12|\rho|12\rangle$  e  $\langle 12|\rho|21\rangle$  per dedurre conseguentemente gli altri. I vari elementi di matrice si calcolano facilmente ad occhio: i braket  $\langle 12|12\rangle = \langle 21|21\rangle = 1$ , mentre  $\langle 12|21\rangle = \langle 21|12\rangle = -1$  perché il coefficiente di  $|21\rangle$  in  $|\epsilon_0\rangle$  è  $-1$ . Ne segue che gli elementi fuori diagonale nel blocco  $2 \times 2$  hanno un segno negativo, mentre quelli sulla diagonale hanno segno positivo. Tutti questi sono moltiplicati per  $1/2$  derivante dal prodotto dei due  $1/\sqrt{2}$  in  $\rho = |\epsilon_0\rangle\langle\epsilon_0|$ . Complessivamente:

$$\rho_{qk} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.12)$$

Ad occhio si vede che soddisfa anche le proprietà  $\rho = \rho^\dagger$ ,  $\text{Tr } \rho = 1$ . Ora si calcola  $\rho^2$  per vedere se soddisfa  $\text{Tr } \rho^2 = 1$ .

$$\rho^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede subito che  $\text{Tr } \rho^2 = 1$ . ♠

Ora si calcola  $\rho^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \sum_j \langle j|^{(2)} (|\epsilon_0\rangle\langle\epsilon_0|) |j\rangle^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_j \langle j| \left( |1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle \right) \left( \langle 1|\langle 2| - \langle 2|\langle 1| \right) |j\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle 1| \left( |1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle \right) \left( \langle 1|\langle 2| - \langle 2|\langle 1| \right) |1\rangle + \frac{1}{2} \langle 2| \left( |1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle \right) \left( \langle 1|\langle 2| - \langle 2|\langle 1| \right) |2\rangle \\ &= \frac{1}{2} [ |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 1| ] \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE 6.6.** Nel calcolo precedente, prestare attenzione a far agire  $|j\rangle$  e

$\langle j|$  solamente sugli stati del sottosistema 2.

In forma matriciale, evidentemente:

$$\rho_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{Id}$$

Si vede facilmente che soddisfa  $\text{Tr } \rho^{(1)} = 1$  e  $\rho^{(1)} = (\rho^{(1)})^\dagger$ , mentre

$$(\rho^{(1)})^2 = \frac{1}{4} \text{Id} \implies \text{Tr } (\rho^{(1)})^2 = \frac{1}{2} < 1$$

quindi lo stato che rappresenta non è puro.

Volendo calcolare il valore di aspettazione dell'operatore  $\hat{M}$  sul sottosistema 1, si nota ad occhio che  $\langle M \rangle^{(1)} = \text{Tr } \rho^{(1)} \hat{M} = 0$ .

#### 6.2.4 Dinamica di un sistema a due livelli

Si considera  $\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$ , dove  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$  e  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma \hat{\mathbf{S}}$  e  $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  vettore delle tre matrici di Pauli, quindi:

$$\hat{H} = -\gamma \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z B_0 \quad (6.2.13)$$

Vista la forma di  $\hat{\sigma}_z$ ,  $\hat{H}$  ha autostati  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ , con autovalori, rispettivamente,  $-\gamma \frac{\hbar}{2} B_0$  e  $\gamma \frac{\hbar}{2} B_0$ . Conseguentemente, se  $\gamma, B_0 > 0$ , lo stato fondamentale è  $|\uparrow\rangle$  (in quanto autostato dell'Hamiltoniano con autovalore più basso).

Si considera generico stato  $|\psi\rangle$  e si vuole scrivere evoluzione temporale a partire da  $|\psi_0\rangle = a_1 |\uparrow\rangle + a_2 |\downarrow\rangle$ , con  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ . L'evoluzione è data da:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= a_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\uparrow} t} |\uparrow\rangle + a_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\downarrow} t} |\downarrow\rangle \rightarrow \left[ a_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\uparrow} t} |\uparrow\rangle + a_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\downarrow} t} |\downarrow\rangle \right] e^{\frac{i}{2\hbar} (E_{\uparrow} + E_{\downarrow}) t} \\ \Rightarrow |\psi(t)\rangle &= a_1 e^{i\omega_0 t/2} |\uparrow\rangle + a_2 e^{-i\omega_0 t/2} |\downarrow\rangle, \quad \omega_0 = \frac{E_{\downarrow} - E_{\uparrow}}{\hbar} \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

dove freccia  $\rightarrow$  è per indicare la moltiplicazione per una fase.

Si calcolano valori medi delle componenti di  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ . Si nota che:

$$\langle \hat{\mu}_x \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} (a_1^* a_2 e^{-i\omega_0 t} + a_2^* a_1 e^{i\omega_0 t}) = \gamma \hbar \Re \{ a_2 a_1^* e^{-i\omega_0 t} \} \quad (6.2.15)$$

dove si è usato che  $\hat{\mu}_x = \gamma \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x$  e come agisce  $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  su  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  (eq. ??).

Prendendo, poi,  $a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2}$ , si trova  $\hat{\mu}_x$  e analogamente anche gli altri:

$$\langle \hat{\mu}_x \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} \cos(\omega_0 t), \quad \langle \hat{\mu}_y \rangle = -\gamma \frac{\hbar}{2} \sin(\omega_0 t), \quad \langle \hat{\mu}_z \rangle = 0 \quad (6.2.16)$$

Infine:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\boldsymbol{\mu}} \rangle = -\frac{\omega_0 \hbar}{2} \gamma \begin{pmatrix} \sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix} = \langle \hat{\boldsymbol{\mu}} \rangle \times \omega_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (6.2.17)$$

### 6.2.5 Dinamica di un sistema a due livelli tramite rappresentazione di Heisenberg

In questa:  $\hat{H} \rightarrow \hat{H}(t)$ . Dato operatore in rappresentazione di Shrödinger  $\hat{O}_S$ , in rappresentazione di Heisenberg diventa:

$$\langle \psi(t) | \hat{O}_S | \psi(t) \rangle = \left\langle \psi_0 \left| e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \right| \psi_0 \right\rangle \equiv \langle \psi_0 | \hat{O}_H | \psi_0 \rangle \Rightarrow \hat{O}_H = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$$

Conseguentemente:

$$\frac{d}{dt} \hat{O}_H = \frac{i}{\hbar} \hat{H} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} - \frac{i}{\hbar} \hat{H} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \equiv \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}_H] \quad (6.2.18)$$

Per gli operatori di seguito, si sottintende che sono in rappresentazione di Heisenberg. Per calcolare  $\frac{d}{dt} \hat{\mu}_x$ , bisogna calcolare  $\frac{d}{dt} \hat{S}_x = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{S}_x]$  per la formula sopra. Essendo  $\hat{H} \propto \hat{S}_z$  e  $[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar \hat{S}_y$ , si ottiene facilmente il risultato.

Considerando  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , invece, si ottiene il risultato più generale per cui  $[\hat{H}, \hat{S}_x] = B_y [\hat{S}_y, \hat{S}_x] + B_z [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar (B_z \hat{S}_y - B_y \hat{S}_z)$ . Questa si generalizza a:

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}} \times \gamma \mathbf{B} \quad (6.2.19)$$

#### Metodo alternativo

Si considera solito  $\hat{H} = -\gamma \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}$  e generico stato  $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi(0)\rangle$ , con  $|\psi(0)\rangle$  dato. Si riscrive  $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} = e^{\frac{i}{2} \mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} t} = e^{i\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}}$ , con  $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} (B_x, B_y, B_z)$  e  $\alpha = \frac{|\mathbf{B}| t}{2}$ . Usando questa espressione:

$$e^{i\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\alpha \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^k$$

Si svolge calcolo per  $k = 2$  ad esempio:  $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 = \sum_{i,j} n_i n_j \sigma_i \sigma_j$ . Essendo che

$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma$  e  $\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta} \text{Id}$ , allora:

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta = \text{Id}\delta_{\alpha\beta} + i\sum_{\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma \Rightarrow (\hat{n} \cdot \hat{\sigma})^2 = \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta (\text{Id}\delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma) \quad (6.2.20)$$

Si nota che  $\sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta (i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma) = 0$  perché  $n_\alpha n_\beta$  è simmetrico per scambio di indici, mentre  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  è antisimmetrico, perciò la somma è nulla. Allora:

$$(\hat{n} \cdot \hat{\sigma})^2 = \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \text{Id}\delta_{\alpha\beta} = (\hat{n} \cdot \hat{n}) \text{Id} = \text{Id} \quad (6.2.21)$$

Quindi:

$$(\hat{n} \cdot \hat{\sigma})^k = \begin{cases} \hat{n} \cdot \hat{\sigma} & , k \text{ pari} \\ \text{Id} & , k \text{ dispari} \end{cases} \quad (6.2.22)$$

Allora:

$$e^{i\alpha\hat{n} \cdot \hat{\sigma}} = \text{Id} \cos \alpha + i\hat{n} \cdot \hat{\sigma} \sin \alpha \quad (6.2.23)$$

Ritornando all'evoluzione temporale, questa si scrive come:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\psi(0)\rangle = \left[ \cos\left(\frac{|\mathbf{B}|t}{2}\right) \text{Id} + i \sin\left(\frac{|\mathbf{B}|t}{2}\right) \hat{n} \cdot \hat{\sigma} \right] |\psi(0)\rangle \quad (6.2.24)$$

Quindi per operatore di spin in rappresentazione di Heisenberg:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \hat{S}_x(0) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \\ &= \left[ \cos\left(\frac{|\mathbf{B}|t}{2}\right) \text{Id} - i \sin\left(\frac{|\mathbf{B}|t}{2}\right) \hat{n} \cdot \hat{\sigma} \right] \hat{S}_x(0) \left[ \cos\left(\frac{|\mathbf{B}|t}{2}\right) \text{Id} + i \sin\left(\frac{|\mathbf{B}|t}{2}\right) \hat{n} \cdot \hat{\sigma} \right] \end{aligned}$$

## 6.2.6 Risonanza di spin

Si prende  $\mathbf{B} = B_0\hat{z} + \mathbf{B}_1(t)$ , con  $\mathbf{B}_1(t) = \hat{x}B_1 \cos \omega t + \hat{y}B_1 \sin \omega t$ . Scegliendo come Hamiltoniano  $\hat{H} = -\gamma\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\gamma B_0 \hat{S}_z - \gamma B_1 \hat{\mathbf{S}} \cdot (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t) \\ &= -\gamma B_0 \hat{S}_z - \gamma B_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_z} \hat{S}_x e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_z} \end{aligned} \quad (6.2.25)$$

L'ultima uguaglianza si può dimostrare per calcolo diretto usando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff, ma non si fa. Per risolvere  $i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(0)\rangle$ , si moltiplica per una fase  $e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_z}$ :

$$\Rightarrow i\hbar e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_z} \partial_t |\psi(t)\rangle = \left[ -\gamma B_0 \hat{S}_z e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_z} - \hat{S}_x e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_z} \right] |\psi(0)\rangle$$

Si prende  $|\phi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\omega t \hat{S}_z} |\psi(t)\rangle$ , che equivale a mettersi in SR rotante; allora:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t |\phi\rangle &= \underbrace{[-(\gamma B_0 + \omega)\hat{S}_z - \gamma B_1 \hat{S}_x]}_{\equiv \hat{H}_{\text{eff}}} |\phi\rangle \\ \Rightarrow |\phi\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{eff}}t} |\phi\rangle \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

con  $\hat{H}_{\text{eff}}$  indipendente dal tempo. Si riscrive

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}\hbar[(\omega_0 + \omega)\hat{\sigma}_z + \omega\hat{\sigma}_x], \quad \omega_0 = \gamma B_0 \text{ e } \omega_1 = \gamma B_1 \quad (6.2.27)$$

e si assume  $|\phi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \Rightarrow |\psi(T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega T \hat{S}_z} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{eff}}T} |\uparrow\rangle$ . Ora si deve calcolare  $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{eff}}t}$ ; per farlo, si prende  $\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}\hbar\alpha\hat{n} \cdot \hat{\sigma}$ , con  $\hat{n} = \frac{1}{\alpha}(\omega_1, 0, \omega_0 + \omega)$  e  $\alpha = (\omega_1^2 + (\omega_0 + \omega)^2)^{1/2}$ . Allora:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{eff}}t} &= e^{\frac{i}{2}\alpha t \hat{n} \cdot \hat{\sigma}} = \cos\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \text{Id} + i(\hat{n} \cdot \hat{\sigma}) \sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha t}{2} + i \frac{\omega_0 + \omega}{\alpha} \sin \frac{\alpha t}{2} & i \omega_1 \sin \frac{\alpha t}{2} \\ i \frac{\omega_1}{\alpha} \sin \frac{\alpha t}{2} & \cos \frac{\alpha t}{2} - i \frac{\omega_0 + \omega}{\alpha} \sin \frac{\alpha t}{2} \end{pmatrix} \equiv A \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

Da questa, si ottiene:

$$|\phi(t)\rangle = A |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha t}{2} + i \frac{\omega_0 + \omega}{\alpha} \sin \frac{\alpha t}{2} \\ i \frac{\omega_1}{\alpha} \sin \frac{\alpha t}{2} \end{pmatrix} = A_{11} |\uparrow\rangle + A_{21} |\downarrow\rangle \quad (6.2.29)$$

quindi l'espressione per  $|\psi\rangle$  è:

$$|\psi(T)\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega T} A_{11} |\uparrow\rangle + e^{-\frac{i}{2}\omega T} |\downarrow\rangle \quad (6.2.30)$$

Se al tempo  $T$ , il campo magnetico rotante cessa:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{2}\omega_0(t-T)} e^{-\frac{i}{2}\omega T} A_{11}(T) |\uparrow\rangle + e^{-\frac{i}{2}\omega_0(t-T)} e^{\frac{i}{2}\omega T} A_{12}(T) |\downarrow\rangle \quad (6.2.31)$$

**ESERCIZIO 6.9 — PROBABILITÀ CHE PER  $t > T$ , LA PARTICELLA SIA IN  $|\downarrow\rangle$ .**

Si ha:

$$P_{\downarrow} = |\langle \downarrow | \psi(t > T) \rangle|^2 = |A_{21}|^2 = \left| \omega_1 \frac{\sin(\alpha T/2)}{\alpha} \right|^2 \quad (6.2.32)$$

La dipendenza da  $T$  è data dal fatto che per  $t > T$ , il campo magnetico rotante che permette il passaggio da  $|\uparrow\rangle$  a  $|\downarrow\rangle$  cessa di agire. Inoltre, la probabilità ha

massimo per  $T = \pi/\alpha$ , con

$$\frac{\omega_1^2}{(\omega_0 + \omega)^2 + \omega_1^2} \leq 1 \quad (6.2.33)$$

L'uguaglianza vale nel caso di risonanza, cioè per  $\omega = \omega_0$ .

### 6.2.7 Effetto Landau-Zener

Su un sistema a due livelli, si studia l'effetto di un Hamiltoniano dipendente dal tempo:

$$\hat{H} = \Delta \sigma_x + \alpha t \sigma_z = \begin{pmatrix} \alpha t & \Delta \\ \Delta & -\alpha t \end{pmatrix} \quad (6.2.34)$$

Se  $\Delta = 0 \Rightarrow \hat{H} \propto \sigma_z$ , quindi si conoscono gli autostati, pari a  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ , con autovalori, rispettivamente,  $\pm \alpha t$ . Se, invece,  $t = 0, \Delta \neq 0 \Rightarrow \hat{H} \propto \sigma_x$ , quindi gli autostati sono della forma

$$|\rightarrow\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad |\leftarrow\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

mentre gli autovalori sono, rispettivamente,  $\pm \Delta$ .

Si assume, per il momento, che sia  $\Delta = 0$ ; l'andamento delle energie dei singoli stati nel tempo è crescente per  $|\uparrow\rangle$  e decrescente per  $|\downarrow\rangle$ . Le funzioni  $\alpha t$  (autoenergia di  $|\uparrow\rangle$ ) e  $-\alpha t$  (autoenergia di  $|\downarrow\rangle$ ) si incontrano in  $t = 0$  e si scambiano.

Si vuole studiare la dinamica del sistema. Si prepara il sistema nello stato  $|\uparrow\rangle$  e si parte da  $t = -\infty$  per vedere cosa succede quando  $t \rightarrow +\infty$ .

#### ESERCIZIO 6.10.

Considerando  $\Delta, t \neq 0$ , calcolare autovalori e autovettori di  $\hat{H}$  con  $\Delta = 0$  per un  $t$  generico fissato, senza usare l'equazione di Shrödinger time-dependent.

*Svolgimento.* Gli autovalori sono dati da:

$$\begin{vmatrix} \alpha t - \lambda & \Delta \\ \Delta & -\alpha t - \lambda \end{vmatrix} = -(\alpha t)^2 + \lambda^2 - \Delta^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow E_{\pm} = \pm \sqrt{\alpha^2 t^2 + \Delta^2}$$

Gli autostati si ottengono dalla seguente relazione:

$$(\alpha t - E_{\pm})x + \Delta y = 0 \Rightarrow y = x \frac{E_{\pm} - \alpha t}{\Delta}$$

Quindi saranno della forma

$$|\psi_{\pm}\rangle = \left(1, \frac{\pm\sqrt{\alpha^2 t^2 + \Delta^2} - \alpha t}{\Delta}\right)$$

Avendo visto che, per  $\Delta \neq 0$ , le energie valgono  $\pm\Delta$ , significa che non si incontrano più come il caso  $\Delta = 0$ ; l'andamento per  $t \rightarrow \pm\infty$  è uguale perché  $\Delta$  diventa trascurabile.

Va notato, comunque, che gli autostati ottenuti vanno normalizzati. ♠

#### ESERCIZIO 6.11.

Risolvere l'equazione di Shrödinger time-dependent per l'evoluzione temporale del sistema, assumendo che in  $t \rightarrow -\infty$ , il sistema stesso si trovi in  $|\uparrow\rangle$ .

*Svolgimento.* Si risolve

$$i\hbar\partial_t |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

con generico  $|\psi(t)\rangle = c_1(t)|\uparrow\rangle + c_2(t)|\downarrow\rangle$  e  $|\psi(t = -\infty)\rangle = |\uparrow\rangle \Rightarrow |c_1(t = -\infty)|^2 = 1$  e  $c_2(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

Inserendo  $\hat{H}$  in forma matriciale, l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t (c_1(t)|\uparrow\rangle + c_2(t)|\downarrow\rangle) &= \begin{pmatrix} \alpha t & \Delta \\ \Delta & -\alpha t \end{pmatrix} (c_1(t)|\uparrow\rangle + c_2(t)|\downarrow\rangle) = \begin{pmatrix} \alpha t & \Delta \\ \Delta & -\alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha t c_1(t) + \Delta c_2(t) \\ \Delta c_1(t) - \alpha t c_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} i\hbar\dot{c}_1(t) = \alpha t c_1(t) + \Delta c_2(t) \\ i\hbar\dot{c}_2(t) = \Delta c_1(t) - \alpha t c_2(t) \end{cases}$$

Non si risolve esattamente, ma si scrive un'equazione del secondo ordine per uno dei due coefficienti. Per farlo, si moltiplica la prima equazione per  $\alpha t$  e la seconda per  $\Delta$ , dopo averle combinate (tramite somma o sottrazione), si ottiene

$$\ddot{c}_1 + \left[ \frac{\Delta^2}{\hbar^2} + \frac{i\alpha}{\hbar} + \frac{\alpha^2 t^2}{\hbar^2} \right] c_1 = 0$$



Altrimenti, quella per  $c_2$  è simile:

$$\ddot{c}_2 + \left[ \frac{\Delta^2}{\hbar^2} + \frac{\alpha^2 t^2}{\hbar^2} - \frac{i\alpha}{\hbar} \right] c_2 = 0$$

La soluzione, in questo caso riportata per  $c_2$ , si esprime tramite funzioni speciali (funzioni cilindriche paraboliche)  $D_\nu(z)$ ; più in particolare, si è interessati a

$$D_{-1-\frac{i\Delta}{2\alpha\hbar}} \left( \pm (-1)^{1/4} \sqrt{\frac{2\alpha}{\hbar}} t \right)$$

dove il segno  $\pm$  è dovuto al fatto che entrambe sono soluzione. Tuttavia, volendo che  $c_2$  vada a 0 per  $t \rightarrow -\infty$ , si deve tenere solo la soluzione col segno meno davanti. Si indicano con  $v_0, z_0$  gli argomenti della soluzione, cioè

$$v_0 = -1 - \frac{i\Delta}{2\alpha\hbar} \quad z_0 = -(-1)^{1/4} \sqrt{\frac{2\alpha}{\hbar}} t$$

Per cui  $c_2 = BD_{v_0}(z_0)$ , con  $B$  costante da determinare. Questa si determina imponendo che  $|c_1|^2 = 1$ ; per farlo, si ricava  $c_1$  dal sistema di equazioni:

$$c_1(t) = \frac{i\hbar\dot{c}_2 + \alpha t c_2}{\Delta} \implies |c_1(t \rightarrow -\infty)| = B \frac{\sqrt{2\alpha\hbar}}{\Delta} \exp\left(\frac{5\pi\Delta^2}{8\hbar\alpha}\right)$$

Quindi  $B = \Delta e^{-5\pi\Delta^2/(8\hbar\alpha)} / \sqrt{2\alpha\hbar}$ . ♠

#### ESERCIZIO 6.12.

Calcolare la probabilità che, per  $t \rightarrow +\infty$ , il sistema sia ancora in  $|\uparrow\rangle$ .

*Svolgimento.* Per assunzione  $|\psi(-\infty)\rangle = |\uparrow\rangle$  e si vuole calcolare  $|\psi(+\infty)\rangle$  visto che si conosce  $|\psi(t)\rangle$ . Per calcolare la probabilità, si nota che  $P_{|\uparrow\rangle}(t \rightarrow +\infty) = |c_1(+\infty)|^2$ .

Per questi calcoli, si farà uso del fatto che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} D_{-1-n} \left( i(-1)^{3/4} R \right) = e^{\frac{3}{4}\pi(n+1)i} e^{-iR^2/4} R^{-n-1} + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1)} e^{\frac{1}{4}\pi ni} e^{iR^2/4} R^n$$

Usandola, si ottiene che

$$P_{|\uparrow\rangle}(t \rightarrow +\infty) = e^{-\pi\Delta^2/(\hbar\alpha)}$$

Per  $\alpha \rightarrow 0 \implies P_{|\uparrow\rangle} \rightarrow 0$ ; questo è il limite **adiabatico**: si ha uno switch allo stato opposto. Nel limite opposto ( $\alpha \rightarrow +\infty$ ), il sistema rimane nello stesso stato. ♠

### 6.3 Buca di potenziale $V_0$

Si considera

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > \frac{a}{2} \\ -V_0 & , |x| \leq \frac{a}{2} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}^{>0}$$

L'Hamiltoniano è  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$  e si risolve  $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ , ossia

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (6.3.1)$$

*Svolgimento.* Si assume  $E > 0$ . Fuori dalla buca ( $|x| > a/2$ ) vale  $V(x) = 0$ , quindi:

$$\psi_{\text{out}}(x) = A \exp\left(i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) + B \exp\left(-i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) \quad (6.3.2)$$

Se  $|x| = a/2$ , invece, si ha:

$$\psi_{\text{bound}}(x) = A' \exp\left(i\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}x\right) + B' \exp\left(-i\frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}x\right) \quad (6.3.3)$$

Si rigetta, allora, la possibilità  $E > 0$  perché si è interessati al caso di **stati legati**.

D'ora in avanti, si considererà  $E < 0$ . Si nota, inoltre, che  $E \geq -V_0$  perché:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}^2}{2m}|\psi\rangle + V(\hat{x})|\psi\rangle &= E|\psi\rangle \implies \left\langle\psi\left|\frac{\hat{p}^2}{2m}\right|\psi\right\rangle + \langle\psi|V(\hat{x})|\psi\rangle = E \\ \implies \left\langle\psi\left|\frac{\hat{p}^2}{2m}\right|\psi\right\rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x)V(x)\psi(x) &\geq \left\langle\psi\left|\frac{\hat{p}^2}{2m}\right|\psi\right\rangle + \min_x V(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x)|^2 \end{aligned}$$

Per condizione di normalizzazione, si trova che:

$$E \geq \left\langle\frac{\hat{p}^2}{2m}\right\rangle + \min_x V(x) \implies E \geq \min_x V(x) \equiv -V_0 \quad (6.3.4)$$

Si è interessati al caso di una particella all'interno della buca di potenziale, la cui posizione decresce esponenzialmente al di fuori, pertanto il range di interesse è  $-V_0 \leq E < 0$ .

- Soluzione fuori dalla buca.

Qui  $V(x) = 0$ , quindi la funzione d'onda è della forma  $\psi(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$ , con  $\lambda = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(-E)}$ <sup>1</sup>. Si indicherà la soluzione per  $|x| < a/2$  con 1 e con 3 quella per  $|x| > a/2$ .

---

<sup>1</sup>Si nota che  $-E > 0$ , quindi  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Soluzione nella buca.

Qui  $V(x) = -V_0$ , quindi per  $\eta = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$ , si ha  $\psi(x) = A_2 e^{i\eta x} + B_2 e^{-i\eta x}$ .  
Visto che  $E > -V_0 \Rightarrow \eta > 0$ .

Si devono raccordare le soluzioni. Intanto si eliminano i termini non fisicamente pertinenti, come  $B_1 e^{-\lambda x}$  e  $A_3 e^{\lambda x}$  perché fanno divergere le soluzioni. Le condizioni di raccordo sono:

$$\begin{aligned}\psi_1\left(-\frac{a}{2}\right) &= \psi_2\left(-\frac{a}{2}\right) ; \quad \psi_1'\left(-\frac{a}{2}\right) = \psi_2'\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \psi_2\left(\frac{a}{2}\right) &= \psi_3\left(\frac{a}{2}\right) ; \quad \psi_2'\left(\frac{a}{2}\right) = \psi_3'\left(\frac{a}{2}\right)\end{aligned}$$

Da quelle nella prima riga, si ha  $A_1 e^{-\lambda \frac{a}{2}} = A_2 e^{i\eta \frac{a}{2}} + B_2 e^{-i\eta \frac{a}{2}}$  e  $\lambda A_1 e^{\lambda \frac{a}{2}} = i\eta A_2 e^{i\eta} - i\eta B_2 e^{-i\eta \frac{a}{2}}$ . Risolvendo per  $A_2, B_2$ :

$$A_2 = \frac{i\eta + \lambda}{2i\eta} A_1 e^{-(\lambda - i\eta)\frac{a}{2}} ; \quad B_2 = \frac{i\eta - \lambda}{2i\eta} A_1 e^{-(\lambda + i\eta)\frac{a}{2}}$$

In modo analogo, dalle altre si ottengono due espressioni per  $B_3$ :

$$B_3 = \begin{cases} \left( e^{i\eta a} \frac{\lambda + i\eta}{2i\eta} - e^{-i\eta a} \frac{\lambda - i\eta}{2i\eta} \right) A_1 \\ \left( -e^{i\eta a} \frac{\lambda + i\eta}{2\lambda} - e^{-i\eta a} \frac{\lambda - i\eta}{2\lambda} \right) A_1 \end{cases} \Rightarrow e^{i\eta a} \frac{\lambda^2 + 2i\lambda\eta - \eta^2}{2i\lambda\eta} = e^{-i\eta a} \frac{\lambda^2 - 2i\lambda\eta - \eta^2}{2i\lambda\eta}$$

da cui

$$e^{2i\eta a} \frac{(\lambda + i\eta)^2}{(\lambda - i\eta)^2} = 1 \Rightarrow \frac{\lambda - i\eta}{\lambda + i\eta} = \pm e^{i\eta a} \quad (6.3.5)$$

Si distinguono i casi negativo (caso a) e positivo (caso b).

- Caso a.

La condizione si riscrive come:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda/\eta - i}{\lambda/\eta + i} &= -e^{i\eta a} \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta}(1 + e^{i\eta}) = i(1 - e^{i\eta a}) \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta} &= \tan\left(\frac{\eta a}{2}\right)\end{aligned} \quad (6.3.6)$$

In questo caso, i coefficienti verificano

$$\frac{A_1}{B_3} = -e^{i\eta a} \frac{\lambda + i\eta}{\lambda - i\eta} = 1 ; \quad \frac{A_2}{B_2} = e^{i\eta a} \frac{\lambda + i\eta}{2i\eta} = 1$$

cioè le autofunzioni sono simmetriche rispetto allo zero, quindi sono pari:  
 $\psi_a(x) = \psi_a(-x)$ . In definitiva:

$$\psi_a(x) = \begin{cases} A_1 e^{\lambda x} & , x < -a/2 \\ B_2(e^{i\eta x} + e^{-i\eta x}) = 2B_2 \cos(\eta x) & , |x| < a/2 \\ A_1 e^{-\lambda x} & , x > a/2 \end{cases} \quad (6.3.7)$$

- Caso b.

Analogamente, al caso precedente, si ottiene:

$$\frac{\lambda}{\eta} = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\eta a}{2}\right)} \quad (6.3.8)$$

Questa volta si ha  $\frac{A_1}{B_3} = -1$  e  $\frac{A_2}{B_2} = -1$ , quindi  $\psi_b(x) = -\psi_b(-x)$ . In definitiva:

$$\psi_b(x) = \begin{cases} A_1 e^{\lambda x} & , x < -a/2 \\ B_2(e^{i\eta x} - e^{-i\eta x}) = 2iB_2 \sin(\eta x) & , |x| < a/2 \\ -A_1 e^{-\lambda x} & , x > a/2 \end{cases} \quad (6.3.9)$$

♠

### 6.3.1 Buca di potenziale con parità

Si risolve problema della sezione precedente usando l'operatore parità.

*Svolgimento.* Invece di verificare alla fine le proprietà di parità delle autofunzioni, si poteva osservare fin da subito che, dato  $\hat{\mathcal{P}}$  operatore di parità rispetto allo zero, si ha  $[\hat{\mathcal{P}}, V(\hat{x})] = 0$ , il che è sufficiente per dire che:

$$[\hat{\mathcal{P}}, \hat{H}] = 0 \quad (6.3.10)$$

Questo implica che esiste una base comune di autovettori di  $\hat{\mathcal{P}}, \hat{H}$ , quindi le autofunzioni cercate devono avere parità definita<sup>1</sup>, quindi, rispetto a  $\hat{\mathcal{P}}$ , avere autovalore +1 o -1 a seconda se sono pari o dispari rispettivamente.

Questo si traduce in  $A_1 = B_3$  e  $A_2 = B_2$  per parità positiva e  $A_1 = -B_3$  e  $A_2 = -B_2$  per parità negativa. In questo modo, si trovano subito le equazioni 6.3.7 e 6.3.9, dalle quali si ricavano le equazioni 6.3.6 e 6.3.8. ♠

---

<sup>1</sup>Con questo, si intende che devono essere o pari o dispari rispetto a 0.

### 6.3.2 Spettro energetico

Si cercano i livelli energetici. Per autofunzioni pari, bisogna imporre contemporaneamente:

$$\begin{aligned} \lambda &= \eta \tan\left(\eta \frac{a}{2}\right) \\ k_0 &\equiv \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = \sqrt{\lambda^2 + \eta^2} \Rightarrow \eta \tan\left(\eta \frac{a}{2}\right) = \sqrt{k_0^2 - \eta^2} \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Nel caso dispari, analogamente si ha:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-\eta}{\tan\left(\eta \frac{a}{2}\right)} \Rightarrow \frac{-\eta}{\tan\left(\eta \frac{a}{2}\right)} = \sqrt{k_0^2 - \eta^2} \\ k_0 &= \sqrt{\lambda^2 + \eta^2} \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Queste non sono facilmente risolubili analiticamente e si usa metodo grafico come mostrato di seguito: Si nota che a prescindere dai parametri del sistema,

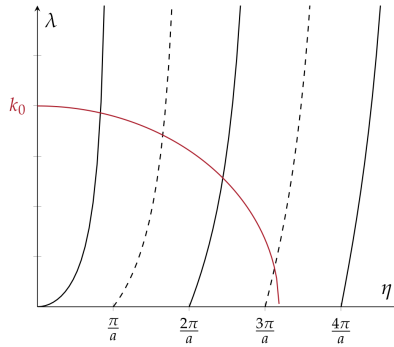


Figura 2: Rappresentazione grafica dell'intersezione delle condizioni. Soluzioni pari in linea continua, mentre soluzioni dispari in linea tratteggiata.

esisterà sempre un'energia fondamentale relativa al primo stato pari. Detti  $P, D$  numeri delle soluzioni, rispettivamente, pari e dispari, si ha  $N = P + D$  numero complessivo di autofunzioni, dalla figura si nota che:

$$\begin{aligned} P &= \left\lceil \frac{k_0 a}{2\pi} \right\rceil = 1 + \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ n : \frac{2\pi}{a} n \leq k_0 \right\} \\ D &= \left\lfloor \frac{1}{2} \left( \frac{k_0 a}{\pi} - 1 \right) \right\rfloor = \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ n : \frac{(2n+1)\pi}{a} \leq k_0 \right\} \\ N &= \left\lceil \frac{k_0 a}{\pi} \right\rceil = 1 + \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ n : \frac{\pi}{a} n \leq k_0 \right\} \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

### 6.3.3 Buca di potenziale infinita

Si manda  $V_0 \rightarrow \infty$ , per cui  $k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2} \rightarrow +\infty$ . Per questo motivo, le soluzioni (sia pari che dispari) coincidono con gli asintoti:

$$\lambda'_n = \begin{cases} \frac{2n+1}{a}\pi & , \text{ caso pari} \\ \frac{2n}{a}\pi & , \text{ caso dispari} \end{cases} \quad (6.3.14)$$

A queste, corrispondono i livelli energetici  $E_n = \frac{\hbar^2 \lambda'^2}{2m} - V_0$ , quindi si deve risolvere il problema di  $V_0 \rightarrow \infty$  in questa espressione.

Per correggere espressione, si considera il problema speculare in cui:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , |x| > a/2 \\ 0 & , |x| \leq a/2 \end{cases}$$

La soluzione è data da

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), |x| \leq \frac{a}{2} \Rightarrow \psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (6.3.15)$$

e  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ ; dall'imposizione che  $\psi(x) = 0, |x| > a/2$ , si deve imporre  $\psi(\pm a/2) = 0$ . Così facendo, si trovano due famiglie di soluzioni:

- soluzioni pari date da  $\cos(k_n x)$  con  $k_n = 2n\pi/a$ ;
- soluzioni dispari date da  $\sin(k_n x)$  con  $k_n = (2n+1)\pi/a$ .

Si unificano scrivendo  $k_n = n\pi/a$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Allora  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$ . La normalizzazione impone che i coefficienti delle soluzioni siano  $\sqrt{2/a}$ .

## 6.4 Positronio (prova d'esame)

Il sistema consiste di un elettrone e un positrone legati insieme da potenziale di Coulomb  $U(r) = -k/r$ , con  $k = e^2$ .

(1). **Scrivere l'Hamiltoniano del sistema ed elencare le quantità conservate.**

Si ha  $\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} - \frac{k}{\hat{r}}$ . Visto che  $\hat{H}$  non dipende dal tempo, si conserva. L'Hamiltoniano è anche invariante sotto traslazioni globali  $\Rightarrow$  si conserva l'impulso del CM ed è invariante per rotazioni, quindi si conserva il momento angolare.

- (2). **Scrivere l'Hamiltoniano in coordinate del CM e relativa, poi trovare le energie degli stati legati del sistema.**

Nel CM, l'Hamiltoniano diventa:  $\hat{H} = \frac{\hat{p}_{\text{CM}}^2}{2M} + \frac{\hat{p}_r^2}{2\mu} - \frac{k}{\hat{r}}$ , con  $M = 2m$  e  $\mu = m/2$ . Allora il CM compie un moto libero, essendo che il potenziale dipende solo dalla coordinata relativa; si osserva meglio notando che l'Hamiltoniano si può disaccoppiare:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_{\text{CM}}^2}{2M} + \left( \frac{\hat{p}_r^2}{2\mu} - \frac{k}{\hat{r}} \right) \Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_{\text{CM}} + \hat{H}_r$$

dove  $\hat{H}_{\text{CM}}$  non contiene alcun potenziale, quindi il centro di massa compie moto libero. Essendo  $\hat{H}$  separabile nelle due coordinate, la funzione d'onda si può scrivere come  $\psi = \psi_{\text{CM}}\psi_r$ , con  $\psi_{\text{CM}} = e^{i\mathbf{k}_{\text{CM}} \cdot \mathbf{x}_{\text{CM}}}$  e  $\mathbf{k}_{\text{CM}} = \frac{\mathbf{p}_{\text{CM}}}{\hbar}$ . Per il seguito, quindi, si studia solamente  $\psi_r$ .

Quanto ad  $\hat{H}_r$ , questo è lo stesso Hamiltoniano studiato nel caso dell'atomo di idrogeno, quindi, con l'accortezza di sostituire  $m_e \rightarrow \mu$ , si ha:

$$E_n = -\frac{\mu k^2}{2(\hbar n)^2} \quad (6.4.1)$$

- (3). **Ricavare funzione d'onda dello stato fondamentale e calcolare il raggio quadratico medio.**

Riprendendo trattazione dell'atomo di idrogeno, ogni autostato è della forma  $|n, \ell, m\rangle$ , con  $\ell$  associato a  $\hat{L}^2$  e  $m$  associato a  $\hat{L}_z$ , ossia  $\hat{L}^2 |n, \ell, m\rangle = \ell(\ell+1) |n, \ell, m\rangle$  e  $\hat{L}_z |n, \ell, m\rangle = m |n, \ell, m\rangle$ . Si ricorda che  $-\ell \leq m \leq +\ell$ , quindi lo stato fondamentale sarà non-degenere, mentre gli altri sì e con degenerazione pari a  $n^2$ , visto che, fissato  $n$ , si ha  $\ell = 0, \dots, n-1$  e  $m \in [-\ell, \ell]$ :

$$\deg(|n, \ell, m\rangle) = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = n^2$$

dove  $2\ell+1$  sono i valori di  $m$ . In generale, nella rappresentazione delle coordinate,  $\psi_{n,\ell,m}(r, \theta, \varphi) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ ; si è interessati a  $|1, 0, 0\rangle$ , associato a  $R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \varphi)$ , dove:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad R_{10} = \frac{2}{r_B^{3/2}} e^{-r/r_B}$$

in cui  $r_B = \hbar/(\mu\alpha c)$  è il raggio di Bohr.

Per il raggio quadratico medio

$$r_p = \sqrt{\langle |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 \rangle}$$

con  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \equiv r$ , si ha:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \langle 100 | r^2 | 100 \rangle = \int d^3x \psi_{100}^*(\mathbf{x}) r^2 \psi_{100}(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} dr r^4 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi |Y_{00}|^2 |R_{10}|^2 \\ &= \int_0^{+\infty} dr r^4 \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi |Y_{00}|^2 \frac{4}{r_B^3} e^{-2r/r_B} = \frac{4}{r_B^3} \int_0^{+\infty} r^4 e^{-2r/r_B} dr \end{aligned}$$

dove si è usato che  $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$  è correttamente normalizzata. L'integrale rimanente si può risolvere per parti, oppure notando che per  $\alpha = r/r_B$  si ha  $\frac{d^4}{d\alpha^4} e^{-\alpha r} = r^4 e^{-\alpha r}$ , quindi:

$$\langle r^2 \rangle = 3r_B^2 \Rightarrow r_p = \sqrt{3}r_B \quad (6.4.2)$$

- (4). **Ripetere il punto (3) per i primi stati eccitati con  $n = 2$ , corrispondenti a  $\ell = 1$  e  $\ell = 0$ .** Si ha:

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}r_B^{3/2}} \left( 1 - \frac{r}{2r_B} \right) e^{-r/(2r_B)}; \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}r_B^{3/2}} \frac{r}{r_B} e^{-r/(2r_B)}$$

Le armoniche sferiche non sono date perché tanto sono normalizzate, quindi non rientrano nel calcolo, esattamente come nel punto precedente. Come prima:

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle_{200} &= \int r^2 |\psi_{200}|^2 d^3x = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 |\psi_{200}|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{+\infty} r^4 R_{20}^2 dr = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{r^4}{r_B^3} \left( 1 - \frac{r}{2r_B} \right)^2 e^{-r/r_B} dr = \frac{r_B^2}{2} \int_0^{+\infty} u^4 \left( 1 - \frac{u}{2} \right)^2 e^{-u} du \\ &= \frac{r_B^2}{2} \int_0^{+\infty} \left( u^4 - u^5 + \frac{u^6}{4} \right) e^{-u} du = \frac{r_B^2}{2} \left( 4! - 5! + \frac{6!}{4} \right) = 42r_B^2 \end{aligned}$$

dove si è preso  $u = \alpha r$ .

Per gli stati  $|2, 1, m\rangle$ , invece, per il fatto che l'integrale del raggio quadratico medio coinvolge una grandezza indipendente da  $m$ , il risultato è analogo per tutti gli stati al variare di  $m = -1, 0, 1$ . Ripetendo un calcolo analogo, si trova  $\langle r^2 \rangle_{21} = 30r_B^2$ .

- (5). **Scrivere funzione d'onda in SR in moto con velocità  $\mathbf{V} = v\hat{x}$  costante**



rispetto al CM.

Occorre compiere una traslazione sull'impulso del centro di massa. L'operatore unitario che compie tale traslazione è  $\hat{U} = e^{\frac{i}{\hbar} p \hat{X}_{\text{CM}}} = e^{\frac{i}{\hbar} M V \hat{X}_{\text{CM}}}$ , quindi:

$$\psi \rightarrow e^{\frac{i}{\hbar} M V \hat{X}_{\text{CM}}} \psi \quad (6.4.3)$$

- (6). **Il positronio può decadere in due fotoni. Si assume che questo possa avvenire quando la distanza tra le due particelle è minore della lunghezza d'onda Compton  $\lambda = \alpha r_B$ . Valutare la probabilità dell'evento nello stato fondamentale, secondo la stima  $P_{\text{decay}} \sim P(r < \lambda)$ , usando  $\lambda \ll r_B$ .**

Si cambia variabile in  $x = r/\lambda$ . Allora:

$$\begin{aligned} P(r \leq \lambda) &= \int_0^\lambda dr \int d\Omega r^2 |\psi_{100}|^2 = \int_0^\lambda r^2 R_{10}^2 dr = \int_0^\lambda \frac{4r^2}{r_B^3} e^{-2r/r_B} dr = 4 \frac{\lambda^3}{r_B^3} \int_0^1 x^2 e^{-2\lambda x/r_B} dx \\ &\simeq 4 \frac{\lambda^3}{r_B^3} \int_0^1 x^2 \left(1 - 2x \frac{\lambda}{r_B}\right) dx = 4 \frac{\lambda^3}{r_B^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{2r_B}\right) \simeq \frac{4}{3} \frac{\lambda^3}{r_B^3} = \frac{4}{3} \alpha^3 \end{aligned}$$

dove si è sviluppato l'esponenziale per  $\lambda \ll r_B$ .

- (7). **Si aggiunge all'Hamiltoniano del sistema una componente di spin  $\hat{H}_{\text{spin}} = \beta \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ , con 1 relativo a  $e^-$  e 2 a  $e^+$ . Descrivere come cambiano le funzioni d'onda.**

L'aggiunta di spin comporta il passaggio ad uno spazio di Hilbert prodotto  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{orb}} \otimes \mathcal{H}_{\text{spin}}$ , dove  $\mathcal{H}_{\text{spin}}$  è lo spazio di Hilbert per gli spin di entrambe le particelle, che essendo di spin 1/2, ha dimensione 4, e  $\mathcal{H}_{\text{orb}}$  è lo spazio di Hilbert usato finora. Quindi  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow |\psi\rangle = |\psi_{\text{orb}}\rangle \otimes |\psi\rangle_{\text{spin}}$ .

Si potrebbe pensare di usare una base del tipo  $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$  per gli stati di  $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ , ma questa non diagonalizza l'Hamiltoniano complessivo  $\hat{H} = \hat{H}_{\text{orb}} + \hat{H}_{\text{spin}}$ ; infatti si è visto che in questa base

$$\hat{H}_{\text{spin}} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ottenibile applicando  $\hat{H}_{\text{spin}}$  ai 4 vettori di base. Il modo più semplice per trovare altra base è utilizzare che  $\hat{S}^2 = (\hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2)^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2$ , da cui:

$$\hat{H}_{\text{spin}} = \frac{\beta}{2} (\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2) \quad (6.4.4)$$

Gli autostati di  $\hat{S}^2$  diagonalizzano  $\hat{H}_{\text{spin}}$  perché per le proprietà delle matrici di Pauli  $\hat{S}_1^2, \hat{S}_2^2$  sono banali:  $\hat{\sigma}_j^2 = \text{Id}$ , quindi

$$\hat{S}_i^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 (\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2) = \frac{3}{4}\hbar^2 \text{Id}, \quad i = 1, 2$$

Sia  $|S\rangle$  autostato di  $\hat{S}^2$ , quindi (per  $\hbar = 1$ )  $\hat{S}^2 |S\rangle = s(s+1) |S\rangle$ ; allora:

$$\hat{H}_{\text{spin}} |S\rangle = \frac{\beta}{2} (\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2) |S\rangle = \frac{\beta}{2} \left[ s(s+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] |S\rangle$$

Nota: visto che  $[\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0$ , si può trovare base di autostati comune.

Ora si studia lo spettro di  $\hat{S}^2$ . Per regola di addizione dei momenti angolari, ricordando che  $s_1 = s_2 = 1/2$ :

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2 \quad (6.4.5)$$

Quindi  $s = 0$  oppure  $s = 1$ . L'autovalore  $s = 1$  ha degenerazione 3 perché ad esso possono corrispondere le proiezioni lungo  $z$  con valori  $s_z = 0, 1, -1$ , cioè si distinguono tre stati diversi  $|s = 1, s_z = 1\rangle, |s = 1, s_z = 0\rangle, |s = 1, s_z = -1\rangle$ . Per  $s = 0$ , si può avere solo  $s_z = 0$ , quindi è un singoletto.

Si dimostra che una scelta di base completa che diagonalizza  $\hat{H}_{\text{spin}}$  è:

$$\begin{aligned} |s = 1, s_z = 1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle; |s = 1, s_z = -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \\ |s = 1, s_z = 0\rangle &= \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}; |s = 0, s_z = 0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Per i primi due è semplice: per due particelle di spin  $1/2$ , le uniche combinazioni per cui  $s_z = \pm 1$  si hanno quando entrambe hanno spin concordi.

Nel seguito i ket con numeri tipo  $|01\rangle$  si riferiscono a spin totale, mentre quelli con le frecce tipo  $|\uparrow\downarrow\rangle$  agli spin distinti. Si studiano, quindi,  $|00\rangle, |10\rangle$ , per i quali  $\hat{S}^2 |00\rangle = 0$  e  $\hat{S}^2 |10\rangle = 2 |10\rangle$ .

Si cercano i coefficienti  $\alpha, \beta$  tali che

$$\hat{S}^2 (\alpha |\uparrow\downarrow\rangle + \beta |\downarrow\uparrow\rangle) = (\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2) (\alpha |\uparrow\downarrow\rangle + \beta |\downarrow\uparrow\rangle) = \gamma (\alpha |\uparrow\downarrow\rangle + \beta |\downarrow\uparrow\rangle) \equiv \gamma |\psi\rangle$$

con  $\gamma = 0, 2$ . Si nota che per spin  $1/2$ , l'operatore  $\hat{S}_i^2$  agisce come  $\hat{S}_i^2 \alpha |\uparrow\downarrow\rangle = \frac{3}{4} \alpha |\uparrow\downarrow\rangle$  e  $\hat{S}_i^2 \beta |\downarrow\uparrow\rangle = \frac{3}{4} \beta |\downarrow\uparrow\rangle$ ,  $i = 1, 2$ , visto che moltiplicano il ket per  $s(s+1) = 3/4$ .

Per spin 1/2, come già accennato,  $\hat{S}_i = \hat{\sigma}_i/2$ , quindi:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 |\uparrow\downarrow\rangle &= \frac{1}{4} \left[ \hat{\sigma}_{1x} \hat{\sigma}_{2x} |\uparrow\downarrow\rangle + \hat{\sigma}_{1y} \hat{\sigma}_{2y} |\uparrow\downarrow\rangle + \hat{\sigma}_{1z} \hat{\sigma}_{2z} |\uparrow\downarrow\rangle \right] = \frac{1}{4} \left[ |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} |\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{4} |\uparrow\downarrow\rangle\end{aligned}$$

Analogamente:  $\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 |\downarrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{4} |\downarrow\uparrow\rangle$ . Mettendo tutto insieme:

$$\hat{S}^2 |\psi\rangle = \frac{3}{2} \alpha |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{3}{2} \beta |\downarrow\uparrow\rangle + \alpha \left( |\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle \right) + \beta \left( |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2} |\downarrow\uparrow\rangle \right) = (\alpha + \beta) |\uparrow\downarrow\rangle + (\alpha + \beta) |\downarrow\uparrow\rangle$$

Si dividono i due casi, a seconda del valore di  $\gamma$ :

- se  $\gamma = 0$ , le componenti della combinazione sopra devono annullarsi, quindi  $\alpha = -\beta$ , quindi

$$|00\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (6.4.7)$$

comprensivo di normalizzazione;

- se  $\gamma = 2$ , deve risultare  $\alpha = \beta$ , quindi

$$|10\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad (6.4.8)$$

anche questo comprensivo di normalizzazione.

## 6.5 Teoria delle perturbazioni

### 6.5.1 Oscillatore armonico 2D

Si ha

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

- Calcolare le energie dei livelli più bassi del sistema e stabilirne la degenerazione.
- Si perturba il sistema con un potenziale

$$\hat{V} = \delta m \omega^2 \hat{x} \hat{y}, \quad \delta \ll 1$$

Studiare i primi 3 livelli del sistema per capire come reagiscono alla perturbazione, con uno sviluppo al primo ordine.

(c). Infine, risolvere esattamente il problema (in questo caso è possibile).

*Svolgimento.* Si divide lo svolgimento nei punti richiesti.

(a). Si usano operatori di creazione e annichilazione:

$$\hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + i \frac{\hat{p}_x}{m\omega} \right) \quad \hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - i \frac{\hat{p}_x}{m\omega} \right)$$

L'analogo si fa per  $y$ . Questi operatori soddisfano  $[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] = 1$  (lo stesso vale per  $\hat{a}_y$ ) e, ovviamente  $[\hat{a}_x, \hat{a}_y] = 0$ .

Come fatto per l'oscillatore armonico classico, si definiscono gli operatori numero come

$$\hat{N}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x, \quad \hat{N}_y = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y \implies \hat{N} = \hat{N}_x + \hat{N}_y$$

Si riscrive l'Hamiltoniano in termini di questi operatori:

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2)$$

che si ottiene notando che i termini in  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono indipendenti e che, per quello unidimensionale, si ha  $\hat{H}_0^{1D} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2)$ . Come per il caso  $1D$ , si ricavano i commutatori  $[\hat{N}_x, \hat{a}_x] = -\hat{a}_x$  e  $[\hat{N}_x, \hat{a}_x^\dagger] = \hat{a}_x^\dagger$ .

Rispetto al caso unidimensionale, gli stati saranno  $|n_x n_y\rangle$ , con  $\hat{N}_x |n_x\rangle = n_x |n_x\rangle$ , cioè  $\hat{N} |n_x n_y\rangle = (n_x + n_y) |n_x n_y\rangle$ . Pertanto:

$$\hat{H}_0 |n_x n_y\rangle = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2) |n_x n_y\rangle = \hbar\omega(n_x + n_y + 1/2) |n_x n_y\rangle \equiv E^{(0)} |n_x n_y\rangle$$

Lo stato fondamentale è raggiunto per  $|n_x n_y\rangle = |00\rangle$  e ha energia  $E_{00}^{(0)} = \hbar\omega/2$ ; gli stati eccitati si creano, conseguentemente, con gli operatori di creazione e annichilazione:

$$\hat{a}_x^\dagger |n_x n_y\rangle = \sqrt{n_x + 1} |n_x + 1, n_y\rangle \quad \hat{a}_x |n_x n_y\rangle = \sqrt{n_x} |n_x - 1, n_y\rangle$$

Il primo stato eccitato è  $E_{10}^{(0)} = E_{01}^{(0)} = 3\hbar\omega/2$ , che, quindi, ha degenerazione 2. Il secondo stato eccitato è  $E_{20}^{(0)} = E_{02}^{(0)} = E_{11}^{(0)} = 5\hbar\omega/2$ , che ha quindi degenerazione 3. La degenerazione della costante è  $n + 1$ .

(b). Ora si considera  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \delta m\omega^2 \hat{x}\hat{y}$  e se ne studiano gli effetti sui livelli energetici.

Il primo ordine di approssimazione, per lo stato fondamentale, si ottiene da  $\langle n_x n_y | \hat{V} | n_x n_y \rangle$  e si ha:

$$\begin{aligned} \langle 00 | \hat{x} \hat{y} | 00 \rangle &= \langle 00 | (\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger) | 00 \rangle \\ &= \langle 00 | \hat{a}_x \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger | 00 \rangle = 0 \end{aligned}$$

È nullo perché  $|n_x n_y\rangle$  è una base completa e  $\hat{a}_x \hat{a}_y$  si possono far agire a sinistra prendendone il croce. Ne segue che  $E_{00} \simeq E_{00}^{(0)} + E_{00}^{(1)} = E_{00}^{(0)}$  al primo ordine dello sviluppo.

Nel caso del primo livello eccitato  $E_1 = 2\hbar\omega$ , relativo agli stati  $|\psi_1\rangle = |01\rangle$  e  $|\psi_2\rangle = |10\rangle$ , non si può procedere come prima in quanto vi è degenerazione. La correzione al primo ordine si ottiene risolvendo la seguente equazione agli autovalori:

$$\sum_{k=1}^2 \langle \psi_m | \hat{V} | \psi_k \rangle \langle \psi_k | \psi_\ell \rangle = E_1^{(1)} \langle \psi_m | \psi_\ell \rangle$$

Per il calcolo, si deve calcolare l'elemento di matrice  $M_{ij} = \langle \psi_i | \hat{V} | \psi_j \rangle$ . Per farlo, è sempre conveniente esprimere il potenziale in termini degli operatori di salita e discesa:  $\hat{V} = \frac{\delta\hbar\omega}{2}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)$ . In questo modo, sopravvivono solo gli elementi  $\langle 10 | \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y | 01 \rangle$  e  $\langle 01 | \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger | 10 \rangle$  e si trova

$$M_{ij} = \frac{\delta\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, gli autovalori sono  $\pm \frac{\delta\hbar\omega}{2}$ , con autostati  $|\pm\rangle = \frac{|0,1\rangle \pm |1,0\rangle}{\sqrt{2}}$ . Questo implica che il livello energetico  $2\hbar\omega$ , appena soggetto a perturbazione, si divide in due livelli energetici  $\hbar\omega(2 \pm \delta/2)$ , pertanto la degenerazione si elimina.

Per il secondo stato eccitato  $E_2 = 3\hbar\omega$ , si ha degenerazione pari a 3, con stati  $|0,2\rangle, |2,0\rangle, |1,1\rangle$ . Il procedimento è analogo al precedente, solo che questa volta  $\langle \psi_i | \hat{V} | \psi_j \rangle$  sarà una matrice  $3 \times 3$  ed è facile convincersi che i termini sulla diagonale sono nulli e sono nulli anche tutti quei termini in cui uno dei due stati non è  $|11\rangle$ . Si conclude che la matrice è la seguente:

$$M_{ij} = \frac{\delta\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove si sono ordinati gli stati nel seguente modo:  $|02\rangle, |11\rangle, |20\rangle$ . Il calcolo del determinante porta, come autovalori, (sottintendendo il fattore  $\delta\hbar\omega/2$ )  $\lambda = 0, \lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2}$ . Con qualche calcolo, si trovano anche gli autostati:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|02\rangle - |20\rangle) \quad |\pm\rangle = \frac{1}{2}(|02\rangle \pm \sqrt{2}|11\rangle + |20\rangle)$$

In questo caso, il livello energetico  $3\hbar\omega$  si divide in tre livelli:  $E_{\pm} = \hbar\omega(3 \pm \delta)$ ,  $E_0 = 3\hbar\omega$ .

(c). Si riscrive l'Hamiltoniano totale tramite il potenziale totale

$$\begin{aligned} \hat{V}' &= m\omega^2 \left[ \frac{1}{2} (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \delta \hat{x} \hat{y} \right] \\ &= m\omega^2 \left[ \frac{1}{4} ((\hat{x} + \hat{y})^2 + (\hat{x} - \hat{y})^2) + \frac{\delta}{4} ((\hat{x} + \hat{y})^2 - (\hat{x} - \hat{y})^2) \right] \end{aligned}$$

Si fa il seguente cambio di variabili:

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + \hat{y}) & \hat{p}'_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p}_x + \hat{p}_y) \\ \hat{y}' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y}) & \hat{p}'_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p}_x - \hat{p}_y) \end{aligned}$$

Si può verificare che la trasformazione è canonica perché  $[\hat{i}', \hat{p}'_j] = i\hbar\delta_{ij}$ . In questo modo, l'Hamiltoniano totale diventa:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}'_x{}^2 + \hat{p}'_y{}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} [(1 + \delta)\hat{x}'^2 + (1 - \delta)\hat{y}'^2]$$

Tramite questo cambio di variabili, ci si è ricondotti all'Hamiltoniano di un oscillatore armonico, il quale, tuttavia, risulta anisotropo rispetto a quello di partenza; di fatto, le frequenze di oscillazione lungo le due direzioni sono  $\omega_x = \omega\sqrt{1 + \delta} \neq \omega_y = \omega\sqrt{1 - \delta}$ .

A questo punto, i livelli energetici possono essere calcolati esplicitamente e confrontati con lo sviluppo perturbativo; per esempio, si ha  $E_{10} = \hbar\omega + \hbar\omega_x = \hbar\omega (1 + \sqrt{1 + \delta})$ . Sviluppando per  $\delta \ll 1$ :

$$E_{10}^{(1)} \simeq \hbar\omega \left[ 1 + \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right) \right] = 2\hbar\omega + \frac{\delta\hbar\omega}{2}$$

♠

### 6.5.2 Effetto Stark

Atomo di idrogeno perturbato da un campo elettrico. Si considerano

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{\hat{r}} \quad \hat{H}_1 = -\hat{d} \cdot \vec{E} = e\hat{r} \cdot \vec{E}$$

con  $\hat{d} = -e\hat{r}$  operatore momento di dipolo elettrico<sup>1</sup>. Approssimando  $\mu \approx m_e$ , cioè sostituendo  $\mu$  con la massa dell'elettrone si commette un'errore di  $\sim 10^{-3}$ .

I livelli energetici dell'atomo di idrogeno si identificano con  $E_n$ , dipendenti dal numero quantico principale  $n$ ; il loro andamento con  $n$  è stabilito in termini della costante di Rydberg  $R_y = 13.6$  eV:

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2} \quad (6.5.1)$$

La costante di Rydberg  $R_H$  vera e propria è legata a  $R_y$  tramite  $\hbar c R_H = R_y$ , con  $R_H = 1.09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

Questi livelli energetici sono degeneri e la loro degenerazione è dovuta alla simmetria per rotazioni; il livello  $n$ -esimo ha degenerazione  $n^2$ .

Si prendono gli assi di modo che il campo elettrico sia direzionato lungo  $z$ , per cui  $\hat{H}_1 = eE\hat{z}$  (qui  $\hat{z}$  è l'operatore posizione lungo l'asse  $z$ ). Si cercano le correzioni agli autostati dovute a questo termine  $\hat{H}_1$ ; per il generico livello  $n$ , si ha:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + \dots$$

**Primo ordine del ground state.** La correzione, al primo ordine dello sviluppo, per l'energia del ground state è:

$$E_1^{(1)} = eE \langle 100 | \hat{z} | 100 \rangle = eE \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{100}^*(r, \theta, \varphi) \hat{z} \psi_{100}(r, \theta, \varphi) d^3x = 0$$

Questo si annulla perché il prodotto delle funzioni d'onda è pari, mentre l'operatore posizione è dispari, quindi è l'integrale di una funzione dispari.

Per calcolare il secondo ordine dello sviluppo, essendo questo livello energetico non-degenere, si può usare l'eq. 3.1.7, da cui  $E_1^{(2)} = \langle 100 | \hat{H}_1 | 100 \rangle_1$ , dove si è indicato con  $|100\rangle_1$  la correzione al primo ordine dell'autostato  $|100\rangle$  relativo al ground state. L'obiettivo, ora, è quello di calcolare  $|100\rangle_1$ .

<sup>1</sup>Il momento di dipolo per un sistema di cariche è definito come  $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ , con  $q_i$  carica nella posizione  $\vec{r}_i$  rispetto a un'origine fissata. Prendendo come origine il protone,  $\vec{r}$  è il raggio vettore che unisce il protone con l'elettrone nel caso dell'atomo di idrogeno e si ha  $\vec{d} = -e\vec{r}$  perché  $-e$  è la carica in posizione  $\vec{r}$ .

Usando il fatto che  $E_1^{(1)} = 0$ :

$$(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)(|100\rangle + |100\rangle_1) = E_1^{(0)}(|100\rangle + |100\rangle_1)$$

Conservando solo le correzioni al primo ordine<sup>1</sup>, si rimane con

$$(\hat{H}_0 - E_1^{(0)})|100\rangle_1 = -\hat{H}_1|100\rangle \quad (6.5.2)$$

In rappresentazione delle coordinate:  $\langle \vec{x}|\hat{H}_0 - E_1^{(0)}|100\rangle_1 = -\langle \vec{x}|\hat{H}_1|100\rangle$ . Si usa come *ansatz* il fatto che la correzione che soddisfa questa equazione si possa esprimere in funzione dell'autostato imperturbato  $|100\rangle$ . Si prende la seguente correzione:

$$\langle \vec{x}|100\rangle_1 = f(r, \theta) \langle \vec{x}|100\rangle \quad \text{con} \quad f(r, \theta) = (A + Br + Cr^2) \cos \theta e^{-r/r_B}$$

Inserendo questa assunzione in eq. 6.5.2, si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) - E_1^{(0)} \right] f(r, \theta) \psi_{100}^{(0)}(\vec{x}) = -eEr \cos \theta \psi_{100}^{(0)}(\vec{x}) \quad (6.5.3)$$

con  $V(\vec{x})$  potenziale elettrostatico dell'atomo di idrogeno. Si passa in coordinate sferiche, usando il fatto che  $\psi_{100}^{(0)}$  risolve

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) - E_1^{(0)} \right] \psi_{100}^{(0)} = 0$$

pertanto si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ 2\nabla \psi_{100}^{(0)} \cdot \nabla f(r, \theta) + \psi_{100}^{(0)} \nabla^2 f(r, \theta) \right] = -eEr \cos \theta \psi_{100}^{(0)}$$

Però si sa che  $\psi_{100}^{(0)}(r) = e^{-r/r_B} / \sqrt{\pi r_B^3}$  che è indipendente da  $\theta$  e  $\varphi$ , quindi  $\nabla \psi_{100}^{(0)} = \hat{r} \partial_r \psi_{100}^{(0)} = -\hat{r} \psi_{100}^{(0)} / r_B$  (in questo caso  $\hat{r}$  è il versore radiale dovuto al gradiente). Ne segue che il prodotto scalare tra i gradienti nell'equazione differenziale è

$$\nabla \psi_{100}^{(0)} \cdot \nabla f(r, \theta) = -\frac{1}{r_B} \psi_{100}^{(0)} \partial_r f(r, \theta)$$

Allora, semplificando i fattori  $\psi_{100}^{(0)}$  (sempre diversi da 0) nell'equazione diffe-

---

<sup>1</sup>Cioè si elimina  $E_1^{(0)}|100\rangle$  con  $\hat{H}_0|100\rangle$ , mentre il rimanente è ignoto e rimane.



renziale, si ha:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \nabla^2 f(r, \theta) - \frac{2}{r_B} \partial_r f(r, \theta) \right] = eEr \cos \theta \quad (6.5.4)$$

Una volta risolta questa, si può determinare la correzione al primo ordine dell'autostato del ground state:

$$\psi_{100}^{(1)}(r, \theta, \varphi) = -\frac{meEr_B}{2\hbar^2} \sqrt{\pi} r_B^3 (r^2 + 2r_B r) e^{-r/r_B} \cos \theta \quad (6.5.5)$$

Con questo, si può calcolare  $E_1^{(2)} = \langle 100 | \hat{H}_1 | 100 \rangle_1$ :

$$E_1^{(2)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dr r^2 \sin \theta \psi_{100}^{(0)*} (eEr \cos \theta) \psi_{100}^{(1)} = -\frac{9me^2 E^2 r_B^4}{4\hbar^2} \quad (6.5.6)$$

**Primo ordine del primo stato eccitato.** La degenerazione in questo caso è 4 e la base di questo autospazio è  $\mathcal{B} = \{|200\rangle, |210\rangle, |211\rangle, |21-1\rangle\}$ , corrispondenti ai livelli  $2s, 2p_z, 2p_y, 2p_x$ , e rinominati rispettivamente  $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle$ .

Per ottenere la correzione al primo ordine, bisogna ricavare gli elementi di matrice  $\langle i | \hat{H}_1 | j \rangle$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , che è una matrice  $4 \times 4$ . L'idea è di capire se questi elementi possono essere ridotti, prima di procedere al calcolo.

Tramite argomenti di parità, essendo che  $\hat{H}_1 \propto \hat{z}$ , gli unici elementi di matrice potenzialmente non-nulli sono quelli i cui stati hanno parità diversa. Se, infatti, avessero stessa parità, il prodotto delle loro funzioni d'onda sarebbe pari, mentre  $\hat{z}$  è dispari, portando a un integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$  di una funzione complessivamente dispari, che è nullo. La parità di uno stato dell'atomo di idrogeno dipende direttamente da  $\ell$  (perché i polinomi di Legendre sono funzione di quest'ultimo) e si ha che:

$$\langle 2\ell'm' | -\hat{H}_1 | 2\ell m \rangle = \langle 2\ell'm' | \hat{\mathcal{P}}^\dagger \hat{H}_1 \hat{\mathcal{P}} | 2\ell m \rangle = (-1)^{\ell'+\ell} \langle 2\ell'm' | \hat{H}_1 | 2\ell m \rangle$$

Pertanto la matrice si riduce a dover calcolare solo 6 elementi:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora si usa l'invarianza per rotazioni attorno all'asse  $z$  di cui gode  $\hat{H}_1$ , cioè  $[\hat{L}_z, \hat{H}_1] = 0$ . Per sfruttare questo risultato, si calcola il valore di aspettazione

del commutatore con due elementi di base dell'autospazio legato a  $n = 2$ :

$$0 = \langle n\ell'm' | [\hat{L}_z, \hat{H}_1] | n\ell m \rangle \propto (m - m') \langle n\ell'm' | \hat{z} | n\ell m \rangle = 0$$

Pertanto si trova che  $\langle n\ell'm' | \hat{z} | n\ell m \rangle \neq 0$  se  $m = m'$ , pertanto la matrice si riduce a:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Visto che la matrice deve essere Hermitiana (perché associata all'operatore Hermitiano  $\hat{H}_1$ ), i due elementi saranno uno il complesso coniugato dell'altro. Si calcola, per esempio,  $\langle 200 | \hat{H}_1 | 210 \rangle$ ; per calcolare l'integrale associato, cioè ottenuto inserendo un proiettore delle posizioni, è necessario costruire le rispettive funzioni d'onda di ciascuno stato. Si ha:

$$\begin{aligned} R_{21}(r) &= \frac{r}{(2r_B)^{3/2}(\sqrt{3}r_B)} e^{-r/2r_B} & Y_{10}(\theta) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ R_{20}(r) &= \frac{1}{(2r_B)^{3/2}} \left( 2 - \frac{r}{r_B} \right) e^{-r/2r_B} & Y_{00}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \langle 200 | \hat{H}_1 | 210 \rangle &= eE \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_{200}^*(\vec{x}) z \psi_{210}(\vec{x}) \\ &= 2\pi eE \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dr \psi_{200}^*(r, \theta) r \cos \theta \psi_{210}(r, \theta) (r^2 \sin \theta) \\ &= 2\pi eE \int_0^\pi Y_{00}^*(\theta) Y_{10}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} r^3 R_{20}^*(r) R_{21}(r) dr \\ &= 2\pi eE \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}_{=2/3} \int_0^{+\infty} \frac{r^4 e^{-r/r_B}}{\sqrt{3}r_B(2r_B)^3} \left( 2 - \frac{r}{r_B} \right) dr \\ &= \frac{eE}{24r_B^4} \int_0^{+\infty} r^4 e^{-r/r_B} \left( 2 - \frac{r}{r_B} \right) dr \end{aligned}$$

Questo si risolve prendendo  $\rho = r/r_B$  e usando  $\int_0^{+\infty} \rho^k e^{-\alpha\rho} d\rho = k!/\alpha^{k+1}$ , da cui risulta che  $\langle 200 | \hat{H}_1 | 210 \rangle = \frac{eE}{24} r_B (2 \cdot 4! - 5!) = -3eEr_B$ . Essendo reale, la matrice

risultante è

$$[\hat{H}_1]_{\mathcal{B}} = -3eEr_B \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si diagonalizza, ora,  $\hat{H}_1$  nel sottospazio  $\text{Span}\{|200\rangle, |210\rangle\}$ , la cui soluzione si sa già essere:

$$E_2^{(1)\pm} A = \mp 3eEr_B \quad |v_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|210\rangle \pm |200\rangle)$$

Nella base  $\mathcal{B}' = \{|v_+\rangle, |v_-\rangle, |211\rangle, |21-1\rangle\}$ , facendo uso della definizione di  $|v_{\pm}\rangle$ , si conclude che:

$$[\hat{H}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} E_2^{(0)} - 3eEr_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} + 3eEr_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad (6.5.7)$$

### 6.5.3 Perturbazione spin-posizione

Si considera un atomo di idrogeno soggetto ad una perturbazione  $\hat{W} = \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{r}}$ , quindi con Hamiltoniano complessivo dato da  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{W}$ . Lo spin è rappresentato dalle matrici di Pauli  $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  e  $\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ .

Si considera, inizialmente, come base dello spazio di Hilbert del sistema quella data da  $|n\ell m\rangle \otimes |ss_z\rangle \equiv |n\ell m s s_z\rangle$ , con  $s$  e  $s_z$  riferiti, rispettivamente, a  $\hat{S}^2$  e  $\hat{S}_z$ . In questo caso, si avrà  $s = 1/2$  per via dello spin dell'elettrone. L'obiettivo è calcolare la correzione al primo livello energetico eccitato ( $n = 2$ ).

Si ricorda che la degenerazione di questo sistema, per via dello spin, è  $2n^2$ ; per  $n = 2$ , si ha degenerazione 8, il che porta al calcolo di una matrice di 64 elementi totali per studiare il primo ordine perturbativo, la cui espressione è

$$W_{\ell, \ell', s_z, s'_z} = \left\langle \ell m \frac{1}{2} s_z \left| \hat{W} \right| \ell' m' \frac{1}{2} s'_z \right\rangle$$

In questa espressione si è trascurato il numero quantico  $n = 2$  perché superfluo, visto che si intende rimanere nell'autospazio associato alla sua degenerazione.

L'obiettivo, ora, è di individuare le regole di selezione del problema per evitare il calcolo dei 64 elementi di matrice. Di questi, si sa subito che 36 sono indipendenti perché la matrice è Hermitiana, quindi ci sono 8 gradi di libertà

reali sulla diagonale e  $n(n-1)/2 = 28$  gradi di libertà complessi fuori diagonale, per un totale di 36 elementi.

**Parità.** Si nota che, sotto parità,  $\hat{W}$  è dispari:

$$\hat{\mathcal{P}} \hat{S} \cdot \hat{r} \hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}} \hat{S} \hat{\mathcal{P}} \cdot \hat{\mathcal{P}} \hat{r} \hat{\mathcal{P}} = -\hat{S} \cdot \hat{r}$$

visto che  $\hat{S}$  è invariante sotto parità. Visto che gli operatori scalari rispetto al momento angolare orbitale sono invarianti per parità, allora  $\hat{W}$  non è scalare rispetto a  $\hat{L}$  (questo si userà più avanti).

Gli stati della base scelta hanno parità definita da  $\ell$  e si sa che

$$\langle \ell m | \hat{W} | \ell' m' \rangle = (-1)^{\ell+\ell'+1} \langle \ell m | \hat{W} | \ell' m' \rangle$$

quindi quelli stati con  $\ell + \ell' + 1$  dispari hanno elemento di matrice nullo. Avendo  $n = 2$ , sono possibili  $\ell = 0, 1$ , quindi si ha

$$\langle \ell = 0, m = 0 | \hat{W} | \ell' = 0, m' = 0 \rangle = 0 \quad \langle \ell = 1, m | \hat{W} | \ell' = 1, m' \rangle = 0$$

In questo modo, si devono calcolare solo elementi di matrice per  $\ell \neq \ell'$ , per un totale di 12 elementi della forma

$$\left\langle \ell = 0, m = 0, \frac{1}{2}, s_z \left| \hat{W} \right| \ell' = 1, m', \frac{1}{2}, s_z \right\rangle$$

**Commutazione con il momento angolare.** Nella trattazione dell'effetto Stark, si è visto che

$$[\hat{L}_z, \hat{V}] = 0 \implies \langle \ell' m' | \hat{V} | \ell m \rangle \propto \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (6.5.8)$$

Si vorrebbe sfruttare questa proprietà in questo caso, ma, sottintendendo la somma sugli indici ripetuti:

$$[\hat{L}_i, \hat{W}] = [\hat{L}_i, \hat{S}_j \hat{r}_j] = \hat{S}_j [\hat{L}_i, \hat{r}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_j \hat{r}_k$$

visto che  $[\hat{L}_i, \hat{S}_j] = 0$ . Questo implica che  $[\hat{L}_z, \hat{W}] = i\hbar(\hat{S}_x \hat{y} - \hat{S}_y \hat{x})$ , che è diverso da 0: come si era accennato prima,  $\hat{W}$  non è scalare rispetto a  $\hat{L}$ .

Tuttavia, si nota che  $\hat{W}$  è scalare rispetto a  $\hat{J}$ :

$$[\hat{J}_i, \hat{S}_j \hat{r}_j] = [\hat{L}_i + \hat{S}_i, \hat{S}_j \hat{r}_j] = \hat{S}_j [\hat{L}_i, \hat{r}_j] + [\hat{S}_i, \hat{S}_j] \hat{r}_j = i\hbar \varepsilon_{ijk} (\hat{S}_j \hat{r}_k + \hat{S}_k \hat{r}_j) = 0$$

L'espressione finale risulta nulla perché, sotto scambio di indici,  $\epsilon_{ijk}$  è antisimmetrico, mentre la parentesi è simmetrica.

La relazione che viene soddisfatta in questo caso è

$$[\hat{J}_z, \hat{W}] = 0 \implies \langle JM | \hat{W} | J'M' \rangle \propto \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (6.5.9)$$

Si utilizzerà, allora, la base  $|n\ell s JM\rangle$  per sfruttare questa regola di selezione e poi si tornerà all'originale tramite i coefficienti di Clebsch-Gordan. Anche nella nuova base, la precedente regola di selezione salva solamente gli stati con  $\ell$  diverso, quindi si calcolano elementi della forma

$$\left\langle 0, \frac{1}{2}, J, M \left| \hat{W} \right| 1, \frac{1}{2}, J', M' \right\rangle$$

Applicando l'attuale regola di selezione, gli elementi di sopra devono necessariamente essere della forma

$$\left\langle 0, \frac{1}{2}, J, M \left| \hat{W} \right| 1, \frac{1}{2}, J, M \right\rangle$$

Per  $\ell = 0$ , si ha  $m = 0$ ; valendo anche  $s_z = \pm 1/2$  ed essendo  $M = m + s_z$ , allora  $J = 1/2$ ; pertanto si distinguono soltanto due elementi di matrice da calcolare:

$$\phi_{\pm} = \left\langle 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, M = \pm \frac{1}{2} \left| \hat{W} \right| 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, M = \pm \frac{1}{2} \right\rangle \quad (6.5.10)$$

Ora si usano i coefficienti di Clebsch-Gordan per tornare alla base precedente. Tramite le apposite tavole, si trovano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \left| 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle &= \left| 0, 0, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \left| 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} \left| 1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

Si svolge il procedimento per  $\phi_+$  perché analogo per  $\phi_-$ . Si nota che la matrice  $W$  sarà a blocchi in  $\phi_{\pm}$ , cioè sarà composta da un blocco  $2 \times 2$  con  $\phi_+$  e  $\phi_+^*$  sull'anti-diagonale e da un'altra matrice  $2 \times 2$  con  $\phi_-$  e  $\phi_-^*$  sull'anti-diagonale, mentre tutti gli altri elementi sono nulli.

Per il calcolo dell'elemento di matrice, è conveniente introdurre gli operatori di salita e discesa

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y \quad \hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$$

Ricordando che  $\hat{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$ , questi operatori soddisfano

$$\hat{S}_+ |\downarrow\rangle = \hbar |\uparrow\rangle \quad \hat{S}_- |\uparrow\rangle = \hbar |\downarrow\rangle \quad \hat{S}_- |\downarrow\rangle = \hat{S}_+ |\uparrow\rangle = 0$$

con  $|\uparrow\rangle = |s = 1/2, s_z = 1/2\rangle$  e  $|\downarrow\rangle = |s = 1/2, s_z = -1/2\rangle$ . Tramite gli operatori di salita e discesa, si possono riscrivere

$$\hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} \quad \hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i}$$

per cui

$$\hat{S} \cdot \hat{r} = \hat{S}_x \hat{x} + \hat{S}_y \hat{y} + \hat{S}_z \hat{z} = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} \hat{x} + \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i} \hat{y} + \hat{S}_z \hat{z}$$

Infine, ricordando che gli operatori di spin agiscono unicamente sullo spazio degli stati di spin, si ottiene:

$$\begin{aligned} \phi_+ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \left\langle \uparrow \left| \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} \right| \downarrow \right\rangle \langle 0, 0 | \hat{x} | 1, 1 \rangle + \left\langle \uparrow \left| \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i} \right| \downarrow \right\rangle \langle 0, 0 | \hat{y} | 1, 1 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle \uparrow | \hat{S}_z | \downarrow \rangle \langle 0, 0 | \hat{z} | 1, 1 \rangle \right] - \sqrt{\frac{1}{3}} \left[ \left\langle \uparrow \left| \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} \right| \downarrow \right\rangle \langle 0, 0 | \hat{x} | 1, 0 \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \uparrow \left| \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i} \right| \downarrow \right\rangle \langle 0, 0 | \hat{y} | 1, 0 \rangle + \langle \uparrow | \hat{S}_z | \downarrow \rangle \langle 0, 0 | \hat{z} | 1, 0 \rangle \right] \\ \Rightarrow \phi_+ &= \hbar \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle 0, 0 \left| \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{2} \right| 1, 1 \right\rangle - \hbar \sqrt{\frac{1}{3}} \left\langle 0, 0 \left| \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{2} \right| 1, 0 \right\rangle \end{aligned}$$

Questi ultimi elementi si possono calcolare seguendo quanto fatto sull'atomo di idrogeno.

#### 6.5.4 Hamiltoniano di Heisenberg con campo magnetico

Si considera l'Hamiltoniano<sup>1</sup>

$$\hat{H} = J\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (6.5.11)$$

relativo a due qubits (1 e 2), con i campi magnetici  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \parallel \hat{z}$ . Si prenderà, come Hamiltoniano imperturbato, il termine  $\hat{H}_0 = J\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ , mentre la perturbazione

<sup>1</sup>Qui  $J$  non è il momento angolare, è solamente una generica costante reale.

sarà la parte legata al campo magnetico, cioè  $\hat{V} = B_1\sigma_z^{(1)} + B_2\sigma_z^{(2)}$ .

(a). Scrivere l'Hamiltoniano  $\hat{H}_0$  in forma matriciale e calcolarne gli autovalori.

*Svolgimento.* Per farlo, è necessario scegliere una base e si prende quella fornita da

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con autovalori, rispettivamente, 1, -1. Per scrivere  $\hat{H}_0$ , si ricordano le azioni delle altre matrici di Pauli su questa base:

$$\begin{aligned} \sigma_x |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle & \sigma_x |\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle \\ \sigma_y |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i |\downarrow\rangle & \sigma_y |\downarrow\rangle &= -i |\uparrow\rangle \end{aligned}$$

Il sistema è composto da 2 qubits, quindi la base sarà il prodotto tensore:  $\mathcal{B} = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ . Indicando con  $\sigma_a = \sigma_a^{(1)} \otimes \sigma_a^{(2)}$ , si nota che:

$$\langle ij | \sigma_x | mn \rangle = \langle ij | \overline{mn} \rangle = \delta_{i\overline{m}} \delta_{j\overline{n}}$$

dove  $\overline{m}, \overline{n}$  sono  $m, n$  flippati. Questa relazione implica che  $i = \overline{m}, j = \overline{n}$ , cioè  $m, n$  devono essere rispettivamente  $i, j$  flippati. Allora la componente con  $\sigma_x$  non ha termini diagonali. Lo stesso vale per  $\sigma_y$ , eccetto gli opportuni coefficienti prodotti. I termini diagonali sono  $\pm 1$  per via di  $\sigma_z$ , a seconda che gli stati di spin siano misti o meno, visto che  $\sigma_z$  ha autovalore -1 su  $|\downarrow\rangle$ . Procedendo al calcolo, si trova che i termini dovuti a  $|\uparrow\uparrow\rangle$  con  $|\downarrow\downarrow\rangle$  si annullano perché  $\sigma_x$  produce 1 e  $\sigma_y$  un -1, quindi si sottraggono e si annullano. Al contrario, i termini misti si sommano e viene una sotto-matrice quadrata con dei 2 sull'anti-diagonale:

$$\hat{H}_0 = J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per gli autovalori, si ha  $\lambda_0 = 1$  con molteplicità 2, al momento. Per gli altri, si studia la sotto-matrice quadrata, i cui autovalori sono dati da

$$(1 + \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda_{\pm} = -1 \pm 2$$

Quindi, in realtà, l'autovalore  $\lambda_0 = 1$  ha molteplicità 3 e un altro autovalore è  $\lambda_1 = -3$ .

**Svolgimento alternativo.** In alternativa a tutto questo procedimento, si sarebbe potuto notare, prendendo  $\hbar = 1$ , che:

$$\hat{H}_0 = 4J\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 = 4J \left( \frac{S_{\text{tot}}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2}{2} \right) = 2J (\hat{S}_{\text{tot}}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2)$$

Avendo a che fare con due spin  $1/2$ , usando i coefficienti di Clebsch-Gordan, la base  $|S_{\text{tot}}, S_{\text{tot},z}\rangle$  è:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle & |1, -1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) & |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

Quindi, per esempio, si ha  $\hat{S}_{\text{tot}}^2 |\uparrow\uparrow\rangle = s_{\text{tot}}(s_{\text{tot}} + 1) |\uparrow\uparrow\rangle = 2 |\uparrow\uparrow\rangle$ . Applicando tutto l'Hamiltoniano, invece:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 |1, 1\rangle &= 2J \left[ 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] |\uparrow\uparrow\rangle = J |\uparrow\uparrow\rangle \\ \hat{H}_0 |1, -1\rangle &= J |\downarrow\downarrow\rangle \\ \hat{H}_0 |1, 0\rangle &= J |1, 0\rangle \\ \hat{H}_0 |0, 0\rangle &= 2J \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right] |\downarrow\uparrow\rangle = -3J |0, 0\rangle \end{aligned}$$

I primi 3 devono per forza essere così perché  $S_{\text{tot}} = 1$ , quindi i due spin devono essere separatamente  $1/2$  in ciascuno di questi.

In termini dei proiettori, l'Hamiltoniano si può scrivere come

$$\hat{H}_0 = J \left( |1, 1\rangle \langle 1, 1| + |1, -1\rangle \langle 1, -1| + |1, 0\rangle \langle 1, 0| \right) - 3J |0, 0\rangle \langle 0, 0|$$

Andando a sostituire questi ket nella base di  $\sigma_z$  tramite i Clebsch-Gordan scritti sopra, si ottiene la matrice trovata tramite il procedimento fatto all'inizio. ♠

(b). Considerazioni sugli autovalori.

Le autoenergie trovate, quindi, sono  $J, J, J, -3J$ ; questo significa che, per  $J > 0$ , lo stato fondamentale ha energia  $-3J$  ed è un singoletto. In questo caso, il comportamento del sistema è detto **anti-ferromagnetico**.



Se  $J < 0$ , allora il sistema è detto **ferromagnetico** e il ground state ha energia  $J$  e i tripletti che compongono lo stato fondamentale hanno spin diverso da 0 complessivamente, quindi il comportamento complessivo del sistema ha tendenze ferromagnetiche.

- (c). Si accende il potenziale e si considera l'Hamiltoniano completo  $\hat{H}$ . Calcolare la forma matriciale esatta di  $\hat{H}$ , quindi senza usare la teoria perturbativa. Successivamente, calcolarne gli autovalori.

*Svolgimento.* Essendo che  $\sigma_z^{(1)} = \sigma_z^{(1)} \otimes \text{Id}^{(2)}$  e, analogamente,  $\sigma_z^{(2)} = \sigma_z^{(2)} \otimes \text{Id}^{(1)}$ , gli unici elementi non nulli del potenziale sono quelli sulla diagonale; complessivamente, si trova:

$$[\hat{V}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 - B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(B_1 + B_2) \end{pmatrix} \quad (6.5.12)$$

Quindi, la matrice associata all'Hamiltoniano completo è:

$$[\hat{H}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J + B_1 + B_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 - J - B_2 & 2J & 0 \\ 0 & 2J & B_2 - J - B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J - B_1 - B_2 \end{pmatrix} \quad (6.5.13)$$

Seguendo il procedimento per  $\hat{H}_0$ , gli autovalori si modificano in

$$J + B_1 + B_2 \quad J - B_1 - B_2 \quad -J \pm \sqrt{(B_1 - B_2)^2 + 4J^2}$$

♠

- (d). Calcolare l'effetto del potenziale sul ground state come fosse una perturbazione, nel caso  $J > 0$ .

*Svolgimento.* Per trattare  $\hat{V}$  come perturbazione, si stanno assumendo  $|B_1|, |B_2| \ll 1$ . Il ground state di energia  $-3J$  è  $|00\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ , quindi il primo ordine perturbativo è dato da:

$$\langle 00 | B_1 \sigma_z^{(1)} + B_2 \sigma_z^{(2)} | 00 \rangle = 0$$

Questo risultato è giustificato dal fatto che

$$\sigma_z^{(1)} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

quindi, applicando il bra a sinistra, i due sono ortogonali e si ottiene 0. Lo stesso vale per  $\sigma_z^{(2)}$ . Questo era anche intuibile perché sviluppando la radice per  $B_1, B_2$  piccoli, si vede che la correzione è quadratica in  $B_1$  e  $B_2$ . ♠

- (e). Calcolare l'effetto della perturbazione al secondo ordine, sempre nel caso  $J > 0$  e sempre per il ground state.

*Svolgimento.* Si calcola

$$E_0^{(2)} = \sum_{n>0, m} \frac{|\langle nm | \hat{V} | 00 \rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_{nm}^{(0)}}$$

Ricordando che le  $\sigma_z$  agiscono mandando  $|00\rangle$  in  $|10\rangle$ , solo il termine  $\langle 10 | \hat{V} | 00 \rangle$  sarà non-nullo. Visto che

$$\langle 10 | B_1 \sigma_z^{(1)} | 00 \rangle = B_1 \quad \langle 10 | \sigma_z^{(2)} | 00 \rangle = -B_2$$

e che  $E_0^{(0)} - E_{10}^{(0)} = -4J$ , si ha:

$$E_0^{(2)} = -\frac{(B_1 - B_2)^2}{4J}$$

♠

- (f). Considerare, ora,  $\hat{H}_0 = B_1 \sigma_z^{(1)} + B_2 \sigma_z^{(2)}$  e trattare il termine  $\hat{H}_1 = J \sigma_1 \cdot \sigma_2$  come perturbazione. In sostanza, calcolare prima la forma matriciale di  $\hat{H}_0$  e relativi autovalori, per poi calcolare gli effetti della perturbazione  $\hat{H}_1$  sugli stessi.

*Svolgimento.* La forma matriciale è riportata in eq. 6.5.12, quindi con autovalori  $B_1 + B_2, B_1 - B_2, B_2 - B_1, -B_1 - B_2$ . Ora si assume  $J$  piccolo per trattare  $\hat{H}_1$  come perturbazione; di questa, si sono già calcolati i vari elementi di matrice nel punto (a), quindi se ne conoscono automaticamente gli effetti perturbativi sui livelli energetici appena riportati (che corrispondono agli elementi diagonali di tale matrice). ♠

### 6.5.5 Atomo di idrogeno in campo elettrico

Si considera un tempo elettrico  $E = E_0 e^{-t/\tau}$  agente su un atomo di idrogeno per  $t > 0$ ; si sa che in  $t = 0$ , il sistema è nello stato fondamentale  $|100\rangle$ . Si cerca la probabilità che il sistema compia una transizione allo stato  $2p$ , cioè  $|2, 1, \ell_z\rangle$ , con  $\ell_z = -1, 0, +1$ .

*Svolgimento.* La formula generale per il calcolo della probabilità di transizione da stato iniziale a stato finale è:

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t dt' \langle f^{(0)} | \hat{H}'(t') | i^{(0)} \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_f^{(0)} - E_i^{(0)})(t' - t_0)} \right|^2 \quad (6.5.14)$$

con  $\hat{H}'$  perturbazione che, in questo caso, è  $\hat{H}'(t) = -eE_0 \hat{z} e^{-t/\tau}$ . In questo caso specifico, la formula diventa:

$$P_{1s \rightarrow 2p}(t) = \frac{e^2 E_0^2}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1)t'} e^{-t'/\tau} \langle 210 | \hat{z} | 100 \rangle \right|^2$$

dove si è lasciato solamente lo stato  $2p$  relativo a  $\ell_z = 0$ ,  $|210\rangle$ , perché tutti gli altri restituiscono 0 per la regola di selezione. Inoltre, per parità, si ha una regola di selezione anche su  $\ell$ : perché l'elemento di matrice sia diverso da 0, i due stati devono avere parità opposta, cosa che è verificata in questo caso perché la parità di uno stato è data da  $(-1)^\ell$ .

Le funzioni d'onda utili sono:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} e^{-r/r_B} \quad \psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_B^3}} \frac{r}{r_B} e^{-r/2r_B} \cos \theta$$

da cui l'elemento di matrice è:

$$\begin{aligned} \langle 210 | \hat{z} | 100 \rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}r_B^4} \int_0^{+\infty} r^4 e^{-\frac{3}{2}\frac{r}{r_B}} dr \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}r_B^4} \frac{2}{3} 4! \left(\frac{2}{3}r_B\right)^5 \\ &= \frac{r_B 4!}{3\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \end{aligned}$$

Prendendo  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar = \frac{3e^2}{8\hbar r_B}$ , si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^t dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t'} e^{-t'/\tau} \langle 210|\hat{z}|100\rangle &= \frac{r_B 4!}{3\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \int_0^t \exp\left[t' \left(\frac{i}{\hbar}(E_2 - E_1) - \frac{1}{\tau}\right)\right] dt' \\ &= \frac{r_B 4!}{3\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \int_0^t e^{i(\omega+i/\tau)t'} dt' \\ &= \frac{1}{i(\omega + i/\tau)} \frac{r_B 4!}{3\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^5 [e^{i\omega t - t/\tau} - 1]\end{aligned}$$

Conseguentemente:

$$P_{1s \rightarrow 2p} = \frac{e^2 E_0^2 r_B^2}{2\hbar^2} \left(\frac{256}{243}\right)^2 \frac{1 - 2e^{-t/\tau} \cos \omega t + e^{-2t/\tau}}{\omega^2 + 1/\tau^2} \quad (6.5.15)$$

Si nota che, nel limite  $t \gg \tau$ :

$$P_{1s \rightarrow 2p} \sim \frac{1}{\omega^2 + 1/\tau^2} \frac{r_B^2 e^2 E_0^2}{\hbar^2}$$

♠

### 6.5.6 Oscillatore armonico 1D in campo elettrico

Si considera un oscillatore armonico che, in  $t = 0$  è nello stato fondamentale, mentre per  $t > 0$  è soggetto ad una forza  $F = F_0 e^{-t/\tau}$ . L'Hamiltoniano imperturbato è  $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$ , il quale è soggetto alla perturbazione  $\hat{V}(t) = -F_0 x e^{-t/\tau}$ ; si calcola la probabilità di transizione ad uno stato eccitato.

*Svolgimento.* Si svolge il problema per intero, senza ricorrere a formule. Gli stati dell'Hamiltoniano imperturbato sono della forma

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle$$

Sostituendo nell'equazione di Shrödinger, si trova:

$$i\hbar \partial_t c_n(t) = \sum_m V_{nm} e^{i\omega_{nm}t} c_m(t)$$

dove si è preso  $V_{nm} = \langle n|\hat{V}|m\rangle = -F_0 e^{-t/\tau} \langle n|\hat{x}|m\rangle$  e  $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar =$

$\omega(n - m)$ , visto che  $E_n^{(0)} = \hbar\omega(n + 1/2)$ . L'elemento di matrice è:

$$\langle n|\hat{x}|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( \sqrt{n}\delta_{n,m-1} + \sqrt{n+1}\delta_{n,m+1} \right)$$

che si ottiene riscrivendo  $\hat{x}$  in termini degli operatori di salita e discesa. L'equazione di Schrödinger diventa:

$$i\hbar\partial_t c_n(t) = -F_0 e^{-t/\tau} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[ \sqrt{n+1} e^{-i\omega t} c_{n+1}(t) + \sqrt{n} e^{i\omega t} c_{n-1}(t) \right] \quad (6.5.16)$$

Questa si può risolvere perturbativamente: si prende  $c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + \dots$  con l'assunzione  $\partial_t c_n^{(0)} = 0 \Rightarrow c_n^{(0)} = \delta_{n,0}$ . In questo modo, si ottiene

$$c_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int dt' \sum_m V_{nm}(t') e^{i\omega_{nm}t'} c_n^{(0)} \quad (6.5.17)$$

che, in questo caso, è pari a:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^t dt' e^{-t'/\tau} \left( \sqrt{n+1} e^{-i\omega t'} c_{n+1}^{(0)} + \sqrt{n} e^{i\omega t'} c_{n-1}^{(0)} \right)$$

Dalla condizione  $c_n^{(0)} = \delta_{n,0}$ , però, si trova che deve essere  $n = 1$  e sopravvive solamente il termine con  $c_{n+1}^{(0)}$ :

$$c_1^{(1)} = -\frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_0^t dt' e^{i\omega t' - t'/\tau} = \frac{F_0}{i\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{1}{i\omega - 1/\tau} \left( 1 - e^{(i\omega - 1/\tau)t} \right) \quad (6.5.18)$$

**OSSERVAZIONE 6.7.** Nel limite per  $t \gg \tau$ , tende allo stesso limite trovato per l'atomo di idrogeno.

♠

### 6.5.7 Buca di potenziale infinita con campo elettrico

Si considera una buca di potenziale con

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , |x| < L \\ +\infty & , |x| > L \end{cases}$$

L'Hamiltoniano imperturbato è  $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/2m + V(\hat{x})$ . Si immagina, poi, di immergere la particella in un campo elettrico, per cui si avrà una perturbazione della forma  $\hat{H}_1 = -q\mathcal{E}\hat{x}$ .

Questo potenziale modifica la forma della buca: se prima vi era assenza di potenziale per  $-L < x < +L$ , ora è presente un potenziale che aumenta (o diminuisce a seconda del segno della carica) linearmente con  $x$ .

- (a). Calcolare il primo e il secondo ordine perturbativo per l'energia dello stato fondamentale  $E_1$ .

*Svolgimento.* La funzione d'onda per la buca di potenziale è

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) & , n \text{ pari} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(k_n x) & , n \text{ dispari} \end{cases}, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Le relative energie sono date da  $E_n = \hbar\omega_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ . Per la correzione al primo ordine, si ha  $\langle \psi_1(x) | \hat{H}_1 | \psi_1(x) \rangle$ , con  $\hat{H}_1 \propto \hat{x}$  quindi:

$$\langle \psi_1 | \hat{x} | \psi_1 \rangle = \frac{2}{L} \int_{-L}^{+L} x \cos(k_1 x) dx = 0$$

che è nullo perché l'integrando è dispari. Al primo ordine, non vi è correzione.

Per il secondo ordine, invece, si calcola

$$E_1^{(2)} = \sum_{n>1} \frac{|\langle \psi_n(x) | \hat{H}_1 | \psi_1(x) \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_n^{(0)}}$$

Visto che  $\psi_1(x)$  è pari, la regola di selezione per l'elemento di matrice è che sia  $n$  pari, così il seno in  $\psi_n(x)$  compensa la disparità dell'integrando  $x\psi_1(x)$ . Allora la correzione al secondo ordine sarà della forma

$$E_1^{(2)} = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{|\langle \psi_{2v}(x) | \hat{H}_1 | \psi_1(x) \rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_{2v}^{(0)}}$$

Ciascun elemento di matrice, allora, si può calcolare con segue:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \hat{H}_1 | \psi_{2v} \rangle &= -q\mathcal{E} \langle \psi_1 | \hat{x} | \psi_{2v} \rangle = -\frac{q\mathcal{E}}{4L} \int_{-L}^{+L} dx \left[ e^{\frac{i\pi x}{2L}} + e^{-\frac{i\pi x}{2L}} \right] x \left[ e^{\frac{i\pi x v}{L}} - e^{-\frac{i\pi x v}{L}} \right] \\ &= (-1)^v q\mathcal{E} \frac{32iLv}{(1-4v^2)^2\pi^2} \end{aligned}$$

Da questo, si può calcolare la correzione al secondo ordine, che ammette un risultato finito alla serie. ♠

- (b). Si modifica la perturbazione con  $\hat{H}_1 = -q\mathcal{E}_0 e^{-t/\tau} x$ ; calcolare la probabilità di transizione  $P_{1 \rightarrow n}(t)$ .

*Svolgimento.* La probabilità di transizione è data da:

$$P_{1 \rightarrow n}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{i\omega_{n1}t'} \langle \psi_n | \hat{H}_1 | \psi_1 \rangle \right|^2 = \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{t'(i\omega_{n1} - 1/\tau)} \langle \psi_n | \hat{x} | \psi_1 \rangle \right|^2$$

Usando la stessa regola di selezione usata prima, si conclude che le uniche transizioni che possono avvenire dal ground state sono ad un livello energetico con  $n$  pari ( $n = 2\nu$ ). Si ricorda il risultato dell'elemento di matrice:

$$|\langle \psi_1 | \hat{x} | \psi_{2\nu} \rangle|^2 = \left( \frac{32L\nu}{(1 - 4\nu^2)^2 \pi^2} \right)^2$$

In definitiva, pertanto, la probabilità di transizione è:

$$P_{1 \rightarrow 2\nu}(t) = \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2}{\hbar^2} \left( \frac{32L\nu}{(1 - 4\nu^2)^2 \pi^2} \right)^2 \frac{\tau^2}{(\omega\tau)^2 + 1} \left[ e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau} \cos(\omega_{n1}t) + 1 \right] \quad (6.5.19)$$

♠

### 6.5.8 Due particelle identiche di spin 1 in potenziale armonico

Si considerano due particelle identiche di spin 1 (bosoniche) in 3D, immerse nel potenziale

$$V(r_1, r_2) = \frac{1}{2} m \omega^2 (r_1^2 + r_2^2)$$

Si perturba questo sistema con una perturbazione della forma

$$W = \lambda(2x_1 + 3y_1 + 4z_1)(2x_2 + 3y_2 + 4z_2)$$

- (a). Calcolare l'energia dello stato fondamentale  $E_0$  e l'energia del primo stato eccitato  $E_1$ .

*Svolgimento.* Il sistema è un oscillatore armonico 3D per due particelle; l'energia del livello  $n$ -esimo per il singolo oscillatore armonico 3D è  $\hbar\omega(n + 3/2)$ , con  $n = n_x + n_y + n_z$ , quindi l'energia del livello  $N$ -esimo del sistema

complessivo è  $E_N = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 3) = \hbar\omega(N + 3)$ , con  $n_1$  riferito alla particella 1 e  $n_2$  alla particella 2.

In particolare, lo stato fondamentale ha energia  $E_0 = 3\hbar\omega$ , mentre il primo stato eccitato, invece, ha energia  $E_1 = 4\hbar\omega$ . ♠

(b). Calcolare gli effetti della perturbazione sul primo stato eccitato.

*Svolgimento.* Si hanno due particelle identiche, cosa di cui si deve tenere conto nella determinazione della funzione d'onda dello stato, visto che deve risultare simmetrica per scambio delle due particelle. Per questa ragione, quella del primo stato eccitato si ottiene da:

$$|\psi_1(r_1, r_2)\rangle = \frac{|\psi_0(r_1)\rangle |\psi_1(r_2)\rangle \pm |\psi_0(r_2)\rangle |\psi_1(r_1)\rangle}{\sqrt{2}} |\phi_{\pm}\rangle$$

dove  $|\phi_{\pm}\rangle$  è lo stato di spin che va composto con la parte orbitale; i segni  $\pm$  indicano, rispettivamente, lo stato simmetrico e lo stato anti-simmetrico, cosicché la composizione di parte orbitale e parte di spin sia sempre simmetrica. In particolare, gli stati di spin pari sono quelli per  $S = 0, 2$ , mentre quelli anti-simmetrici sono per  $S = 1$ .

Il numero totale di stati per il primo livello energetico è 27 perché per spin 0, si ha un solo stato di spin, per spin 1 se ne hanno 3 e per spin 2 se ne hanno 5, per un totale di 9. Per la parte orbitale, invece, visto che uno stato eccitato è dato da  $n = n_x + n_y + n_z = 1$ , si hanno 3 combinazioni per ottenerlo, quindi il numero totale di stati è  $9 \cdot 3 = 27^1$ .

Prima di calcolare gli elementi di matrice per la correzione dell'energia, si riscrive il potenziale come segue:

$$W = 29\lambda(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{u})(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2, 3, 4)$$

dove  $1/\sqrt{29}$  è la costante di normalizzazione. Ora, scegliendo gli assi di modo che  $\hat{z} \parallel \mathbf{u}$ , si ottiene:

$$W = \lambda' z_1 z_2 \quad (6.5.20)$$

In questo modo, esprimendo  $z$  in termini degli operatori di salita e discesa per i singoli oscillatori, la correzioni all'energia si vede facilmente essere

---

<sup>1</sup>Qui, chiaramente, non si distinguono  $n_1 = 1, n_2 = 0$  e  $n_1 = 0, n_2 = 1$  perché sono la stessa identica cosa, visto che le due particelle sono identiche e lo stato è conseguentemente simmetrico per scambio.



determinata da soli 4 termini non-nulli:

$$E_1^{(1)} = \pm \frac{\lambda'}{2} \frac{\hbar}{m\omega} \left( \langle P_1, 0, 0, 1 | \hat{a}_{z_1}^\dagger | P_1, 0, 0, 0 \rangle \langle P_2, 0, 0, 0 | \hat{a}_{z_2} | P_2, 0, 0, 1 \rangle + \right. \\ \left. + \langle P_1, 0, 0, 0 | \hat{a}_{z_1} | P_1, 0, 0, 1 \rangle \langle P_2, 0, 0, 1 | \hat{a}_{z_2}^\dagger | P_2, 0, 0, 0 \rangle \right)$$

dove si sono indicati con  $|P_1, n_{x_1}, n_{y_1}, n_{z_1}\rangle$  uno stato della particella 1 e con  $|P_2, n_{x_2}, n_{y_2}, n_{z_2}\rangle$  uno stato della particella 2. Visto che tutti gli elementi di matrice valgono 1, si trova

$$E_1^{(1)} = \pm \lambda' \frac{\hbar}{m\omega}$$

Si conclude che 9 stati di spin per 2 orbitali, per un totale di 18 stati, hanno correzione nulla al primo ordine per via del fatto che quando  $n_x$  o  $n_y$  sono 1, l'elemento di matrice è nullo perché l'operatore di salita/discesa non collega stati uguali. Inoltre, gli stati con  $S = 0, 2$  hanno correzione positiva perché sono pari e sono un totale di 6 stati, mentre quelli per  $S = 1$  hanno correzione negativa e sono 3 stati. ♠

**OSSERVAZIONE 6.8.** Evidentemente si è interessati all'effetto della perturbazione sul primo stato eccitato perché la funzione d'onda dello stato fondamentale ha parità definita e l'elemento di matrice sarebbe nullo, visto che la perturbazione è proporzionale all'operatore posizione.

## 6.6 Problemi di scattering

### 6.6.1 Ionizzazione per atomo di idrogeno soggetto a potenziale

Si considera atomo di idrogeno, inizialmente nello stato fondamentale, soggetto ad una perturbazione dipendente dal tempo:

$$W(\mathbf{x}, t) = V_0 \cos(kz - \omega t) = \frac{V_0}{2} [e^{i(kz - \omega t)} + e^{-i(kz - \omega t)}] \equiv V e^{i\omega t} + V^\dagger e^{-i\omega t}$$

Si vuole calcolare la probabilità che l'atomo si ionizzi  $P_{g \rightarrow f}(t)$ , dove  $|g\rangle$  è lo stato fondamentale e

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

è lo stato finale, corrispondente ad un'onda piana. Nello scrivere lo stato finale, si è assunto che il sistema si trovi in una scatola di lato  $L$  e che l'elettrone sia

emesso con impulso  $\mathbf{p}$  fuori dal sistema, contemporaneamente col fatto che non sia più soggetto al potenziale del protone una volta liberato, in modo da poter schematizzare il suo moto come onda piana. Calcolare, inoltre, la distribuzione angolare dell'elettrone.

*Svolgimento.* Il coefficiente  $n$ -esimo al primo ordine di approssimazione è dato da:

$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t'} \left( V_{fi} e^{i\omega t'} + V_{fi}^\dagger e^{-i\omega t'} \right) \\ &= \frac{1}{\hbar} \left[ \frac{1 - e^{i(\omega + \omega_{fi})t}}{\omega + \omega_{fi}} V_{fi} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} - \omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} V_{fi}^\dagger \right] \end{aligned}$$

con  $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ . La probabilità di transizione è data da:

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - (E_i + \hbar\omega))$$

Si deve calcolare l'elemento di matrice  $\langle f | e^{ikz} | 100 \rangle$  per ottenere  $V_{fi}$ . Considerando che allo stato finale è associata l'onda piana  $e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}}$  e che la funzione d'onda dello stato fondamentale è

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} e^{-r/r_B}$$

L'elemento di matrice consiste nel seguente integrale:

$$\begin{aligned} \langle f | e^{ikz} | 100 \rangle &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dr r^2 \sin \theta e^{-ik_f r \cos \theta} e^{ikr \cos \theta} \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} e^{-r/r_B} \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{r_B^{3/2}} \int_0^\pi d\theta \int_0^{+\infty} dr r^2 \sin \theta e^{-iqr \cos \theta} e^{-r/r_B} \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{r_B^{3/2}} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^\pi e^{-iqr \cos \theta} \sin \theta d\theta \right) r^2 e^{-r/r_B} dr \\ &= \frac{4\sqrt{\pi}}{qr_B^{3/2}} \int_0^{+\infty} r \sin(qr) e^{-r/r_B} dr = \frac{8}{(1 + r_B^2 q^2)^2} \sqrt{\pi r_B^3} \end{aligned}$$

dove si è definito  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - k\hat{z}$  e lo si è assunto parallelo all'asse  $\hat{z}$ , il che significa aver preso gli assi tali che  $\mathbf{k}_f \parallel \hat{z}$ . Nello svolgere l'integrale rispetto a  $\theta$ , si è preso  $y = \cos \theta \Rightarrow dy = -\sin \theta d\theta$ . L'integrale rispetto a  $r$  si risolve usando eq.

7.1.4. Usando eq. 5.5.3, si trova la probabilità di transizione come:

$$d\omega_{i \rightarrow f} = \frac{V_0^2}{\hbar} \frac{32\pi^2}{r_B^5} \frac{1}{\left(\frac{1}{r_B^2} + q^2\right)^4} \frac{d^3 p_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

con  $p_f = \hbar k_f$ . Da questa, si cerca di ricavare la distribuzione angolare per l'emissione dell'elettrone; per farlo, si riscrive in coordinate polari come segue:

$$d\omega_{i \rightarrow f} = \frac{32\pi^2 V_0^2}{r_B^5} \frac{1}{(1/r_B^2 + |\mathbf{k}_f - k\hat{z}|^2)^4} \frac{k_f^2}{(2\pi\hbar)^3} dk_f d\Omega$$

Usando che

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_f - k\hat{z})^2 &= [(k_f \cos \theta - k)\hat{z} + k_f \sin \theta (\cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y})]^2 \\ &= k_f^2 \cos^2 \theta + k^2 - 2kk_f \cos \theta + k_f^2 \sin^2 \theta \\ &= k_f^2 + k^2 - 2kk_f \cos \theta \end{aligned}$$

si ottiene tutta la dipendenza angolare della probabilità di transizione. ♠

## 6.6.2 Sezione d'urto per potenziale esponenzialmente decrescente

Si considera il potenziale

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-r/R}$$

Calcolare, in approssimazione di Born, la relativa sezione d'urto.

*Svolgimento.* Usando eq. 5.4.1, si trova l'ampiezza di scattering:

$$f(\theta) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2 q} \int_0^{+\infty} \sin(qr) e^{-r/R} dr = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \frac{R^2}{1 + q^2 R^2}$$

Ne segue che la sezione d'urto, ottenuta da  $|f(\theta)|^2$ , è:

$$\sigma(\theta) = \frac{4m^2 \alpha^2}{\hbar^4} \frac{R^4}{(1 + q^2 R^2)^2} \quad (6.6.1)$$

Si nota che la dipendenza angolare della sezione d'urto è contenuta all'interno di  $q^2$ , visto che  $q = 2k \sin \theta/2$ . ♠

### 6.6.3 Scattering inelastico di un elettrone su un atomo di idrogeno

In questo processo, si considera l'atomo a riposo e nello stato fondamentale. La posizione dell'elettrone proiettile viene indicata con  $\mathbf{r}$  e si prende, come origine del sistema di riferimento, il protone dell'atomo di idrogeno. Si indica, poi, con  $\mathbf{r}_e$  la posizione dell'elettrone dell'atomo di idrogeno, sempre rispetto al protone.

L'elettrone incidente è modellizzato come un'onda piana  $e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$ , così come è un'onda piana l'elettrone uscente dopo l'interazione, che verrà deflesso con un altro impulso  $\mathbf{p}'$ , quindi si scriverà come  $e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}}$ . Si è interessati a studiare i vari casi prodotto del processo.

**Cosa succede all'atomo?** Se lo stato finale  $|f\rangle$  dell'atomo è ancora il ground state  $|1\rangle$ , allora significa che l'elettrone incidente non ha ceduto energia e, quindi, che  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ , che corrisponde al caso di **scattering elastico**.

Se, invece,  $|f\rangle = |n\rangle \neq |1\rangle$ , significa che l'elettrone ha ceduto dell'energia e  $|\mathbf{p}'| \neq |\mathbf{p}|$ . In questo caso, è anche possibile che l'atomo di idrogeno si ionizzi. Per studiare il problema, si parte dalla regola d'oro di Fermi:

$$d\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n, \mathbf{p}' | \hat{U} | 1, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta \left( \frac{p'^2 - p^2}{2m} + E_n - E_1 \right) \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \quad (6.6.2)$$

dove la  $\delta$  assicura la conservazione dell'energia. Il potenziale  $\hat{U}$  contiene sia la parte di interazione Coulombiana tra elettrone e protone nell'atomo, sia la parte di interazione Coulombiana legata all'elettrone che incide, quindi è della forma

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) = -\frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|}$$

Si prende l'onda incidente  $\psi_p$  con normalizzazione  $\sqrt{m/p}$  per richiedere che il flusso incidente sia unitario; per l'onda dell'elettrone scatterato, si lascia coefficiente unitario<sup>1</sup>. In complessivo:

$$\psi_p = \sqrt{\frac{m}{p}} e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \quad \psi_{p'} = e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}}$$

Visto che questa normalizzazione assicura un flusso incidente unitario, è possibile affermare che  $d\omega$  coincide con la sezione d'urto, vista la relazione  $d\omega = |\mathbf{J}_i| d\sigma$ .

<sup>1</sup>In ogni caso, qualunque scelta di normalizzazione finirebbe per elidersi, in quando dovrebbe comparire anche al denominatore dell'elemento di spazio delle fasi.

Passando in coordinate polari, si riscrive eq. 6.6.2 come

$$d\sigma = \frac{2\pi m}{\hbar p} |\langle n, \mathbf{p}' | \hat{U} | 1, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta \left( \frac{p'^2 - p^2}{2m} + E_n - E_1 \right) \frac{p'^2 dp' d\Omega'}{(2\pi\hbar)^3}$$

dove il fattore  $m/p$  deriva dall'aver esplicitato la condizione di normalizzazione scelta per lo stato dell'onda incidente. Si integra rispetto a  $p'$ , operazione tramite cui si può eliminare la  $\delta$ , facendo uso della formula

$$\int g(x) \delta(f(x)) dx = \sum_i \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|}$$

dove gli  $x_i$  sono tali che  $f(x_i) = 0$ ,  $f'(x_i) \neq 0$ . Quindi si ha:

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \frac{p'}{p} |\langle n, \mathbf{p}' | \hat{U} | 1, \mathbf{p} \rangle|^2 d\Omega'$$

dove  $p'$ , ora, è vincolato dalla relazione fornita dalla  $\delta$ :  $(p'^2 - p^2)/2m + E_n - E_1 = 0$ . Svolgendo l'elemento di matrice, definendo  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ , si ha:

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \frac{p'}{p} \left| \iint U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \psi_n^*(\mathbf{r}_e) \psi_1(\mathbf{r}_e) d^3r d^3r_e \right|^2 d\Omega'$$

**Caso elastico.** Si considera il caso di scattering elastico; in questo caso, quindi, si avrebbe:

$$d\sigma_{\text{el}} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \iint U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} |\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2 d^3r d^3r_e \right|^2 d\Omega'$$

Si nota che l'integrale rispetto a  $\mathbf{r}$  corrisponde con la trasformata di Fourier del potenziale:

$$\tilde{U}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_e) \equiv \int d^3r U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

per cui la sezione d'urto differenziale elastica si può scrivere come

$$d\sigma_{\text{el}} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int \tilde{U}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_e) |\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2 d^3r_e \right|^2 d\Omega'$$

Il potenziale Coulombiano soddisfa l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) = -4\pi \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e)$$

dove  $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) = e\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e)$  e la densità volumica di carica si può scrivere tramite

delle  $\delta$  di Dirac:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) = e\delta(\mathbf{r}) - e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$$

Tenendo conto del fatto che  $\mathcal{F}[\nabla^2 f(\mathbf{r})] = -q^2 \mathcal{F}[f(\mathbf{r})]$ , con  $q = |\mathbf{q}|$ , si ha:

$$\begin{aligned} \int d^3r \nabla^2 U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} &= -q^2 \int d^3r U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \\ &= -4\pi e \int d^3r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_e) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = -4\pi e^2 \left(1 - e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}\right) \end{aligned}$$

Questo implica che

$$\tilde{U}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_e) = \frac{4\pi e^2}{q^2} \left(1 - e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}\right)$$

In questo modo, l'espressione della sezione d'urto elastica diventa (**controllare esponente di  $\hbar$** ):

$$d\sigma_{\text{el}} = \frac{4m^2 e^4}{\hbar^2 q^4} \left| 1 - \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_e e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e} |\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2 \right|^2 d\Omega' \quad (6.6.3)$$

- **Impulsi  $q$  molto piccoli.**

Per *scattering elastico* si sa valere la relazione  $q = 2p \sin \theta/2$ ; per questa, a  $p$  fissato, la richiesta di impulsi  $q$  molto piccoli si traduce nella richiesta di angoli molto piccoli. Tramite questa approssimazione, si ottiene la relazione linearizzata  $q \simeq p\theta$ .

Ora si cerca di dare un senso all'affermazione *impulsi piccoli*. Una grandezza caratteristica con cui eseguire il confronto nel caso dell'atomo di idrogeno è il raggio di Bohr; tramite la sostituzione  $p = mv$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{qr_B}{\hbar} &\simeq \frac{p\theta r_B}{\hbar} = \frac{mv\theta r_B}{\hbar} \\ \Rightarrow mv \frac{\theta r_B}{\hbar} &\ll 1 \Rightarrow v \ll \frac{\hbar}{m\theta r_B} \end{aligned}$$

Si può prendere  $\theta = 1$  rad (angolo non piccolo in questo contesto) per ottenere una relazione che, se verificata, soddisfa anche quella per  $\theta$  generico; questa nuova relazione è scritta in termini della velocità tipica dell'elettrone nell'atomo di idrogeno  $v_0 = \hbar/(mr_B) = \alpha c$ :

$$v \ll v_0 = \frac{\hbar}{mr_B} \quad (6.6.4)$$

Si assume, quindi, che l'elettrone incidente proceda ad una velocità  $v$  molto inferiore a quella dell'elettrone nell'atomo; in questo regime, è possibile

sviluppare l'esponenziale nella sezione d'urto:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e} \simeq 1 - i \left( \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e}{\hbar} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e}{\hbar} \right)^2 \equiv 1 - i\xi - \frac{1}{2}\xi^2$$

dove si è definito  $\xi = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e / \hbar$ . Il termine di ordine zero semplifica l'1 presente nel modulo, mentre il termine al primo ordine, che è dispari rispetto allo zero, annulla l'intero integrale, visto che è moltiplicato per il termine pari  $|\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2$ . Il primo contributo non-nullo è dato dal termine al secondo ordine; trascurando ordini superiori, si rimane con (**controllare le espressioni precedenti della sezione d'urto per errore negli esponenti dei coefficienti**):

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega'} \simeq \frac{4m^2e^2}{\hbar^4q^4} \left| \int \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e)^2 |\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2 d^3r_e \right|^2$$

Questo integrale si può ridurre alla forma

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega'} \simeq \frac{m^2e^4}{9\hbar^4} \left| \int d^3r_e r_e^2 |\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2 \right|^2 = \frac{1}{9r_B^2} \left| \int r_e^2 |\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2 d^3r_e \right|^2$$

dove si è usato che, in CGS,  $r_B = \hbar^2/me^2$ . L'integrale con cui si rimane è quello del raggio quadratico medio  $\langle r_e^2 \rangle = 3r_B^2$ ; allora il valore della sezione d'urto differenziale nel caso di piccoli impulsi è

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega'} \simeq \frac{r_B^2}{3} \quad (6.6.5)$$

- **Impulsi  $q$  molto grandi.**

In questo caso, ci si mette nel limite opposto:  $qr_B/\hbar \gg 1$ ; per questo regime, la fase  $e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e}$  oscilla molto rapidamente. Questo comportamento permette di trascurare l'integrale e trovare rapidamente che, in questo regime, la sezione d'urto differenziale è data da:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega'} = \frac{4m^2e^4}{\hbar^2q^4} \quad (6.6.6)$$

Usando  $p = mv$  e  $q = 2p \sin \theta/2$ , si ottiene l'espressione della sezione d'urto differenziale Rutherford:

$$\left( \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega'} \right)_{\text{ruth}} = \left( \frac{e}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (6.6.7)$$

- **Soluzione esatta.**

Partendo nuovamente da eq. 6.6.3, sostituendo

$$\psi_1(\mathbf{r}_e) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} e^{-r/r_B}$$

e integrando, si ottiene:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3r_e e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_e} |\psi_1(\mathbf{r}_e)|^2 = \left(1 + \frac{r_B^2 q^2}{4\hbar^2}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{\zeta}{4}\right)^{-2}$$

con  $\zeta = (r_B q / \hbar)^2$ . In questo modo, si ottiene:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega'} = 4e^4 \frac{(8 + \zeta)^2}{(4 + \zeta)^4} \quad (6.6.8)$$



## 7 FORMULARIO

### 7.1 Integrali utili

$$\int_0^{r_*} r e^{-\alpha r^2} dr = \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha r_*^2}) \quad (7.1.1)$$

$$\int_0^{+\infty} r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad (7.1.2)$$

$$\int_0^{+\infty} r^2 e^{-\alpha r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-3/2} \quad (7.1.3)$$

$$\int_0^{+\infty} r e^{-\alpha r} \sin(\beta r) dr = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad \Re\{\alpha\} > 0 \quad (7.1.4)$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(qr) e^{-r/R} dr = \frac{qR^2}{1 + q^2 R^2} \quad (7.1.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2 + by} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} \quad (7.1.6)$$

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2}{3} \quad (7.1.7)$$

### 7.2 Trucchi utili

*Vedere svolgimento prove d'esame in mqnotes per alcuni suggerimenti.*

- **Funzione d'onda negli impulsi.**

Quando l'Hamiltoniano è speculare in impulso e posizione, è possibile ottenere le funzioni d'onda nello spazio degli impulsi definendo dei parametri in modo che l'impulso assuma stessa forma delle posizioni (*stando attenti a ridefinire tutti i parametri nella funzione d'onda, di modo che eventuali funzioni degli impulsi risultino adimensionali*).

**ESEMPIO 7.1.**

Per oscillatore armonico 2D con  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2 \hat{x}^2/2$ , la funzione d'onda nelle posizioni dello stato fondamentale è  $\pi^{-1/2} \gamma^{-1} e^{-(x^2+y^2)/2\gamma^2}$ , con  $\gamma^2$  lunghezza caratteristica del sistema; nello spazio degli impulsi, questa diventa  $\pi^{-1/2} \gamma'^{-1} e^{-(p_x^2+p_y^2)/2\gamma'^2}$ , dove  $\gamma'$  è l'impulso caratteristico del sistema, dato da  $\hbar/\gamma$ .

- **Soluzione esatta a Hamiltoniano con perturbazione.**

Quando viene chiesto un calcolo esatto, invece che approssimazione perturbativa, probabilmente c'è la possibilità di riarrangiare l'Hamiltoniano e di ricondurlo ad uno di una forma analoga a quello imperturbato.

- **Operatore prodotto scalare tra due spin.**

Nello studio di un Hamiltoniano di spin  $\hat{H}_s = \kappa \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2$ , torna utile la relazione

$$\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 = \frac{\hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2}{2} \quad (7.2.1)$$

dove  $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$ .

- **Quantità conservate.**

Le quantità di cui verificare la commutazione con l'Hamiltoniano sono:  $\hat{p}, \hat{L}, \hat{J}, \hat{P}, \hat{T}$ . In generale, sono sufficienti le prime tre (se non le prime due nel caso in cui non vi sia un termine di spin nell'Hamiltoniano).