APPUNTI DI ALGEBRA 2

Manuel Deodato

Indice

1 Teoria degli anelli

1.1 Nozioni di base

Definizione 1.1 (Anello)
Un insieme A si dice *anello* se è dotato di due operazioni, una somma $+$ e un prodotto $\cdot$, tali che:

(a). $(A, +)$ è un gruppo abeliano;

(b). il prodotto è associativo, ossia $(ab)c = a(bc), \ \forall a, b, c \in A$;

(c). prodotto e somma soddisfano la distributività, ossia $a(b+c) = ab + ac$ e $(a+b)c = ac + bc, \ \forall a, b, c \in A$.

Si parla di anello commutativo con unità se, rispettivamente, il prodotto è commutativo e se ha l'elemento neutro.

Tutti gli anelli trattati saranno commutativi con identità.

Definizione 1.2 (Omomorfismo di anelli)
Dati due anelli A, B, si dice che $f : A \longrightarrow B$ è un omomorfismo se:

(a). $f(a+b) = f(a) + f(b), \ \forall a, b \in A$;

(b). $f(ab) = f(a)f(b), \ \forall a, b \in A$;

(c). $f(1_A) = 1_B$.

Un *sottoanello* B di un anello A è un sottogruppo additivo, chiuso rispetto al prodotto e contenente l'unità.

Definizione 1.3 (Ideale)
Sia A un anello e $I \subseteq A$ un sottoinsieme; questo è detto *ideale* se:

(a). è un sottogruppo additivo;

(b). ha la proprietà di assorbimento, cioè se $\forall i \in I, \ \forall a \in A$, si ha $ai \in A$.

Osservazione 1.1. Lavorando con anelli commutativi, la richiesta $ai \in A$, oppure $ia \in A$ è equivalente e individua lo stesso elemento.

Dato $S \subseteq A$ un sottoinsieme, si indica con (S) il più piccolo ideale di A che contiene S. Visto che si lavora con anelli commutativi con identità, se $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, allora:

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \;\middle|\; a_i \in A \right\}$$

Se S è un insieme finito, allora (S) si dice *finitamente generato*; inoltre, se $S = s$, allora $(S) = (s)$ ed è detto *principale*.

Dato un ideale I di un anello A, l'insieme A/I si può dotare di una struttura di anello tramite le operazioni

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I \qquad (a + I)(b + I) = ab + I$$

Se $f : A \to B$ è un omomorfismo di anelli, il suo nucleo, $\operatorname{Ker} f$, è un ideale di A.

Teorema 1.1 (I teorema di omomorfismo)

Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli e $I \subseteq A$ un ideale di A, con $I \subseteq \operatorname{Ker} f$. Data la proiezione $\pi : A \to A/I$, allora esiste ed è unica $\tilde{f} : A/I \to B$ tale che $\tilde{f} \circ \pi = f$, che risulta iniettiva se e solo se $I = \operatorname{Ker} f$. Per $I = \operatorname{Ker} f$, quindi, si ha $A/I \cong \operatorname{Im} f$.

Teorema 1.2 (II teorema di omomorfismo)

ia A un anello e siano $I, J \subseteq A$ due ideali, con $I \subseteq J$. Ne segue che J/I è un ideale di A/I e $(A/I)(J/I) \cong A/J$.

Teorema 1.3 (Teorema di corrispondenza)

Dato A un anello e $I \subseteq A$ un suo ideale, la mappa $\pi : A \to A/I$ induce una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di A che contengono I e gli ideali di A/I.

Dato un anello A, un suo ideale proprio P è detto *primo* se

$$\forall a, b \in A : ab \in P \implies a \in P \text{ oppure } b \in P$$

Inoltre, un ideale proprio M di A è detto *massimale* se

$$\forall I \text{ ideale di } A : M \subseteq I \implies I = M \text{ oppure } I = A$$

Definizione 1.4 (Spettro di un anello)

Sia A un anello; si definisce il suo *spettro* come:

$$\operatorname{Spec} A := \{P \subset A \mid P \text{ ideale primo di } A\}$$

Sulla stessa linea della precedente definizione, si definisce anche

$$\operatorname{Max} A := \{M \subset A \mid M \text{ è un ideale massimale di } A\} \tag{1.1.1}$$

Si ricorda che P è un ideale primo se e solo se A/I è un dominio, mentre M è massimale se e solo se A/M è un campo. Ne segue che gli ideali massimali sono anche ideali primi.

Si ricorda, inoltre, che ogni anello non-banale ammette almeno un ideale massimale, quindi almeno un ideale primo. Allora, ogni ideale proprio e, in particolare, ogni elemento non-invertibile è contenuto in un ideale massimale.

Definizione 1.5 (Dimensione di Krull)
Sia A un anello; la sua *dimensione di Krull* è definita come

$$\dim A := \sup \{k \mid P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k,\ P_i \in \operatorname{Spec} A\}$$

cioè è la massima lunghezza di una catena di ideali primi di A.

Esempio 1.1.

- Se k è un campo, il suo unico ideale primo è (0) ed è massimale, quindi $\dim k = 0$.
- Se $A = \mathbb{Z}$ (o un qualunque altro PID), i primi di A sono (0) e i massimali, pertanto la più lunga catena è data da $(0) \subseteq M$, per quale M ideale massimale. Allora $\dim A = 1$.

1.2 Ideali