

DIVERGENZA DELLE SERIE PERTURBATIVE IN MECCANICA QUANTISTICA

LAURENDO
MANUEL DEODATO

RELATORE
CLAUDIO BONATI

LONG ABSTRACT

L'obiettivo della tesi è quello di investigare tali evenienze per capire le motivazioni che dietro tali comportamenti. A scopo di esempio, si utilizzerà un oscillatore armonico soggetto a perturbazione quartica; in questo caso particolare, si mostrerà come il problema risiede nella dipendenza dal parametro infinitesimo di questa perturbazione.

Studiando l'esempio proposto, si può arrivare allo sviluppo perturbativo per lo stato fondamentale notando che ogni stato eccitato per l'oscillatore armonico è scrivibile come un polinomio per una gaussiana. Tramite argomenti di parità, si conclude che la perturbazione, essendo pari, non può mischiare stati con parità diversa, quindi lo stato fondamentale in particolare verrà collegato solo a stati pari. Inoltre, scrivendo la potenza quartica del potenziale in termini degli operatori di salita e discesa, si nota che uno stato si collega con un altro il cui livello energetico dista massimo quattro livelli dal primo. Usando queste regole di selezione per caratterizzare il polinomio e inserendo tutto nell'equazione di partenza, si ottiene una relazione per gli ordini perturbativi dell'energia; tramite calcolo numerico, si trova che il loro valore è legato al fattoriale dell'ordine di sviluppo a cui appartengono.

La divergenza di questo sviluppo è inevitabilmente sinonimo di una mancata convergenza nell'intorno dello zero del parametro infinitesimo della perturbazione: di fatto, il potenziale quartico in cui si immerge la particella, nel caso in cui il relativo parametro sia negativo, risulta non più limitato inferiormente, il che permetterebbe alla particella di liberarsi dal potenziale per effetto tunnel. In questo caso, l'effetto tunnel – il quale non è descrivibile perturbativamente – è il motivo per cui lo sviluppo in serie delle energie attorno allo zero fallisce nel convergere.

È possibile caratterizzare ulteriormente questa divergenza tramite lo scaling di Symanzik: tramite una trasformazione unitaria, si trova una relazione che lega l'energia in funzione del parametro perturbativo con un'altra funzione con coefficiente la radice cubica di tale parametro. Questo permette di evidenziare ulteriormente la causa della divergenza dello sviluppo in serie attorno allo zero.

La divergenza è legata all'analiticità del dominio, il quale è formato dagli stati per cui l'Hamiltoniano risulta Hermitiano. Una condizione è che il potenziale ammetta valore medio sugli stati, cioè che l'integrale associato sia convergente. Prendendo una funzione d'onda che va come l'inverso di una potenza quadratica nella posizione, questa è valida dal punto di vista dell'Hamiltoniano imperturbato, ma non della perturbazione quartica perché il prodotto tra il modulo quadro della funzione d'onda e il potenziale quartico si semplificherebbero, facendo divergere l'integrale. Questa divergenza del valore medio della perturbazione sugli stati ammissibili dal punto di vista dell'Hamiltoniano imperturbato è sinonimo del fatto che, indipendentemente da quanto piccolo si prende il parametro associato alla perturbazione stessa, gli effetti che questa ha sul sistema non è mai tale.

Questo si generalizza tramite il teorema di Kato-Rellich, il quale stabilisce due condizioni che, se rispettate, assicurano tale sviluppo, e usando il teorema di Kato, che fornisce una condizione sufficiente per rientrare nelle condizioni del primo.