APPUNTI DI
GEOMETRIA PROIETTIVA E TOPOLOGIA

Manuel Deodato

Indice

1 | Geometria proiettiva

1.1 Introduzione agli spazi proiettivi

Definizione 1.1 (Spazio proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$; il suo *spazio proiettivo* è dato da:

$$\mathbb{P}(V) = {}^{V \setminus \{0\}}\!/\!_{\sim}$$

dove $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda v$.

Dalla definizione, uno spazio proiettivo collassa tutti i vettori di uno spazio vettoriale che appartengono alla stessa retta in un punto. In questo senso, $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme delle rette di V.

Esempio 1.1. Si nota che $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset/\sim = \emptyset$, mentre per $v \neq 0$, si ha:

$$\mathbb{P}(\operatorname{Span} v) = {}^{\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0\}}\!/\!_{\sim} = \{[v]\}$$

dove $[v]$ rappresenta la classe di equivalenza di v; questo significa che lo spazio proiettivo dello span di un elemento è composto da un solo punto.

Definizione 1.2 (Dimensione di uno spazio proiettivo). La dimensione di uno spazio proiettivo è

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$$

Intuitivamente, questa definizione è dovuta al fatto che gli spazi proiettivi collassano le rette in punti, abbassando di 1 la dimensione dello spazio vettoriale.

Definizione 1.3 (Punti, rette e piani proiettivi). Si definisce *punto proiettivo* uno spazio proiettivo di dimensione 0, *retta proiettiva* uno spazio di dimensione 1 e *piano proiettivo* uno spazio di dimensione 2.

Definizione 1.4 (Spazio proiettivo standard). Sia $\mathbb{K}$ un campo; si definisce lo *spazio proiettivo standard* come

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{KP}^n$$

1.1.1 Trasformazioni proiettive

Analogamente al caso dei gruppi e degli anelli, si studiano quelle mappe che preservano la struttura di spazio proiettivo.

Definizione 1.5 (Trasformazione proiettiva). Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ è detta *trasformazione proiettiva* se $\exists \varphi : V \to W$ applicazione lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

In questa definizione, si dice che f è *indotta* da φ e, talvolta, si scrive che $f = [\varphi]$.

Proposizione 1.1. Se f è una trasformazione proiettiva indotta da φ, allora φ è iniettiva.

Dimostrazione. Per assurdo, $\ker \varphi \neq \{0\}$ e sia $v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$; allora $f([v]) = [0]$, ma $[0] \notin \mathbb{P}(W)$ per definizione di spazio proiettivo, quindi f non sarebbe ben definita. $\square$

Proposizione 1.2. Ogni applicazione lineare iniettiva $\varphi : V \to W$ induce una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tramite l'associazione $[v] \mapsto [\varphi(v)]$.

Dimostrazione. Se $v \neq 0$, allora $\varphi(v) \neq 0$ perché φ è iniettiva. Se, invece, $[v] = [w]$, allora, per definizione, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$[\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)]$$

$\square$

Proposizione 1.3. Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

Dimostrazione. Sia $f([v]) = f([w])$ e sia φ l'applicazione lineare che induce f; allora l'uguaglianza si traduce in $[\varphi(v)] = [\varphi(w)]$, ma per come sono definite queste classi di equivalenza, questo vuol dire che $\varphi(v) = \lambda\varphi(w) = \varphi(\lambda w)$. Essendo φ iniettiva, però, si ottiene che $v = \lambda w$, cioè $[v] = [\lambda w]$. $\square$

Proposizione 1.4. La trasformazione $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è proiettiva ed è indotta da Id_V.

Dimostrazione. Tale trasformazione deve essere tale per cui $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}([v]) = [v] = [\mathrm{Id}_V\, v]$, quindi è indotta da Id_V; essendo quest'ultima iniettiva, anche $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)}$ è iniettiva. $\square$

Proposizione 1.5. Siano $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ e $g : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Z)$ due trasformazioni proiettive; allora $g \circ f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(Z)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Se φ induce f e ψ induce g, allora $\psi \circ \varphi$ induce $g \circ f$:

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g\left([\varphi(v)]\right) = g \circ f\left([v]\right)$$

□

Si passa, ora, a caratterizzare gli isomorfismi di spazi proiettivi; il seguente teorema giustificherà la definizione di isomorfismo proiettivo.

Teorema 1.1. Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ una trasformazione proiettiva; allora, le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti.

(a). f è suriettiva.

(b). f è biettiva.

(c). $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.

(d). f è invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Il fatto che (a) $\iff$ (b) è dato dal fatto che f è proiettiva, quindi è iniettiva.

Per mostrare che (b) $\Rightarrow$ (c), si prende φ che induce f e si fa vedere che è suriettiva. Visto che $\varphi(0) = 0$, basta mostrare che $W \setminus \{0\} \subset \operatorname{Im} \varphi$. Sia, dunque, $w \in W \setminus \{0\}$, quindi $[w] \in \mathbb{P}(W)$; visto che f è suriettiva, $\exists [v] \in \mathbb{P}(V) : f([v]) = [w] = [\varphi(v)]$. Allora $w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow w \in \operatorname{Im} \varphi$. Questo significa che φ è un isomorfismo tra V e W, per cui

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W)$$

Ora si mostra che (c) $\Rightarrow$ (d), quindi sia φ lineare che induce f. Si sa, dunque, che φ è iniettiva e che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$, il che implica che $\dim V = \dim W$, pertanto φ è un isomorfismo; in quanto tale, φ^{-1} è ben definita ed è ancora un isomorfismo di spazi vettoriali. Rimane da mostrare che φ^{-1} induce f; a questo scopo, si nota che:

$$[\varphi^{-1}] f([v]) = [\varphi^{-1}][\varphi(v)] = [\varphi^{-1}\varphi(v)] = [v]$$
$$f[\varphi^{-1}]([v]) = f\left([\varphi^{-1}(v)]\right) = [\varphi\varphi^{-1}(v)] = [v]$$

Infine, (d) $\Rightarrow$ (a) perché, essendo f invertibile, è anche suriettiva. □

Definizione 1.6 (Isomorfismo proiettivo). Una trasformazione proiettiva che sia anche suriettiva è detta *isomorfismo proiettivo*.

Definizione 1.7 (Proiettività). Ogni trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ è detta *proiettività*; si indica con $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ l'insieme delle proiettività di V.

Da questa definizione, si può notare che ogni proiettività è un isomorfismo perché, se

f è indotta da φ, allora vale la formula della dimensione

$$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V \implies \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$$

Inoltre, si può mostrare che equipaggiando $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ con l'operazione di composizione, questo è un gruppo.

Osservazione 1.1 (Punti fissi). Sia f una proiettività indotta da φ, con $[v]$ punto fisso, cioè

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)]$$

Allora $\lambda v = \varphi(v)$, cioè v è un autovettore di φ, con autovalore λ; analogamente, se v è un autovettore di φ, allora $[v]$ è un punto fisso per lo stesso motivo.

1.1.2 Sottospazi proiettivi

Per semplicità di notazione, si introduce la proiezione

$$\pi : V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V) \tag{1.1.1}$$

che manda $V \setminus \{0\}$ sul suo quoziente con la relazione di equivalenza.

Definizione 1.8 (Grassmanniana). Sia V uno spazio vettoriale tale che $\dim V = n$ e sia $k \in \{0, \dots, n\}$; allora la *grassmanniana* k di V è l'insieme di tutti i sottospazi di V di dimensione k:

$$\mathrm{Gr}_k(V) = \{W \subseteq V \mid W \text{ spazio vettoriale con } \dim W = k\}$$

Si userà, inoltre, la seguente notazione:

$$\mathrm{Gr}(k, n) = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$$

Definizione 1.9 (Sottospazio proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale; un *sottospazio proiettivo* S di $\mathbb{P}(V)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$S = \pi(H \setminus \{0\})$$

per qualche H sottospazio vettoriale di V.

Osservazione 1.2. Dalla definizione, si deduce che uno sottospazio proiettivo è esso stesso uno spazio proiettivo, cioè $\pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$.

Definizione 1.10 (Iperpiano proiettivo). Un iperpiano di $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$\dim S = \dim \mathbb{P}(V) - 1$$

Teorema 1.2. Siano V uno spazio vettoriale e H un suo sottospazio. Sia $S = \pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$ un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$; allora $\pi^{-1}(S) = H \setminus \{0\}$. In sostanza, si ha una biezione tra i sottospazi vettoriali di V e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Si nota che

$$\pi^{-1}(S) = \bigcup_{[v]\in S} \pi^{-1}([v]) = \bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v])$$

Si dimostrerà il teorema per doppia inclusione. Avendo $\pi(v) = [v]$, allora $v \in \pi^{-1}([v])$, perciò

$$\bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v]) \supseteq H \setminus \{0\}$$

Si nota anche che

$$\pi^{-1}([v]) = \{w \mid [w] = [v]\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

pertanto $\forall w \in \pi^{-1}([v])$, si ha $w = \lambda v \in H \setminus \{0\}$, da cui segue che

$$\bigcup_{v\in H\setminus\{0\}} \pi^{-1}([v]) \subseteq H \setminus \{0\}$$

□

Il teorema appena mostrato permette di concludere che

$$\dim \mathbb{P}(H) = \dim H - 1 \iff \dim \pi^{-1}(S) \cup \{0\} = \dim S + 1$$

Dal punto di vista delle grassmanniane, si ha che

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{P}(V)) \cong \mathrm{Gr}_{k+1}(V)$$

dove le grassmanniane di uno spazio proiettivo sono ottenute tramite la definizione di dimensione per uno spazio proiettivo.

Si passa, ora, allo studio di somme e intersezioni di sottospazi proiettivi; in particolare, si ha il seguente.

Proposizione 1.6. Siano S_i, per $i \in I$ un certo insieme di indici, dei sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$; allora l'intersezione $\bigcap_{i\in I} S_i$ è ancora un sottospazio di $\mathbb{P}(V)$.

Dimostrazione. Si indicano con H_i i sottospazi vettoriali di V tali che $S_i = \mathbb{P}(H_i)$. Per conto diretto, si trova che:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in I} S_i = \bigcap_{i\in I} \pi(H_i \setminus \{0\}) &= \{[v] \mid \forall i \in I,\ [v] \in \pi(H_i \setminus \{0\})\} \\
&= \{[v] \mid \forall i \in I,\ \exists w_i \in H_i \setminus \{0\} \text{ t.c. } [w_i] = [v]\} \\
&= \{[v] \mid \forall i \in I,\ v \in H_i \setminus \{0\}\} = \pi\left(\bigcap_{i\in I} (H_i \setminus \{0\})\right) \\
&= \pi\left[\left(\bigcap_{i\in I} H_i\right) \setminus \{0\}\right] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} H_i\right)
\end{aligned}$$

□

La proposizione appena dimostrata permette di concludere che

$$\mathbb{P}(V) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(V \cap W) \tag{1.1.2}$$

Come nel caso degli spazi vettoriali, l'unione di spazi proiettivi non è, in generale, uno spazio proiettivo; l'idea, allora, è quella di definire anche in questo caso un concetto di somma.

Definizione 1.11 (Spazio proiettivo generato). Sia $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$. A partire da A, si può definire il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ contenente A come

$$L(A) = \bigcap \{S \subseteq \mathbb{P}(V) \mid A \subseteq S \text{ e } S \text{ sottospazio proiettivo}\}$$

Si nota che, per definizione, tale intersezione è non vuota perché $A \subseteq \mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo di se stesso.

In questo modo, si può trovare lo spazio proiettivo della somma di due sottospazi prendendo

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2) \tag{1.1.3}$$

Proposizione 1.7. Siano $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$ due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, con H_1, H_2 sottospazi vettoriali di V; allora

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

Dimostrazione. Si procede per doppia inclusione. Si mostra prima che $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$; per farlo, visto che $H_1 \subseteq H_1 + H_2$, si ha

$$S_1 = \mathbb{P}(H_1) = \pi(H_1 \setminus \{0\}) \subseteq \pi((H_1 + H_2) \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

In maniera del tutto analoga, si mostra che $S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$. Questo significa che $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$ è un sottospazio proiettivo contenente sia S_1, che S_2, quindi, per la minimalità di $L(S_1, S_2)$, deve valere $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$.

Per l'inclusione inversa, visto che $L(S_1, S_2)$ è un sottospazio proiettivo, si prende H sottospazio vettoriale di V tale che $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H) \Rightarrow H = \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\}$. Allora:

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \implies H_1 = \pi^{-1}(S_1) \cup \{0\} \subseteq \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\} = H$$

Analogamente si mostra che $H_2 \subseteq H$, quindi si ha $H_1 + H_2 \subseteq H$, da cui $\mathbb{P}(H_1 + H_2) \subseteq \mathbb{P}(H) = L(S_1, S_2)$. □

Proposizione 1.8. Sia $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$ e f una trasformazione proiettiva; allora $f(L(S)) = L(f(S))$.

Dimostrazione. Siano $H = \pi^{-1}(S)$ un sottoinsieme di V e $f = [\varphi]$. Si nota che $f(S) = f(\pi(H)) = \pi(\varphi(H))$, quindi

$$\begin{aligned} f(L(S)) &= f[\pi(\mathrm{Span}(H) \setminus \{0\})] = \pi[\varphi(\mathrm{Span}(H)) \setminus \{0\}] \\ &= \pi[\mathrm{Span}(\varphi(H)) \setminus \{0\}] = \pi\{\mathrm{Span}[\pi^{-1}(f(S))] \setminus \{0\}\} \\ &= L(f(S)) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3 (Formula di Grassmann). Siano S_1, S_2 due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$; allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

Dimostrazione. Siano H_1, H_2 i sottospazi di V tali che $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$ e $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$. Per la formula di Grassmann, si ha

$$\dim H_1 + H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$$

Dal punto di vista degli spazi proiettivi, questa si traduce in:

$$\dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) + 1 = (\dim \mathbb{P}(H_1) + 1) + (\dim \mathbb{P}(H_2) + 1) - \dim \mathbb{P}(H_1 \cap H_2) - 1$$
$$\Rightarrow \dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

□

Corollario 1.3.1. Se S_1, S_2 sono sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ tali che $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$, allora $S_1 \cap S_2 \neq 0$.

Dimostrazione. Usando la formula di Grassmann:

$$\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim \mathbb{P}(V) - \dim L(S_1, S_2) \geq 0$$

Visto che, per convenzione, $\dim \emptyset = -1$, si ha $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. □

Teorema 1.4. Sui piani proiettivi, non esistono *rette parallele*. Più precisamente, dati r_1, r_2 sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ e $\dim r_1 = \dim r_2 = 1$, si ha $r_1 = r_2$, oppure $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, dove P è un punto proiettivo.

Dimostrazione. Sia $r_1 \neq r_2$; allora $\dim L(r_1, r_2) = 2$ e

$$\dim r_1 \cap r_2 = \dim r_1 \dim r_2 - \dim L(r_1, r_2) = 1 + 1 - 2 = 0$$

quindi $r_1 \cap r_2$ è un punto proiettivo. □

1.1.3 Riferimenti proiettivi

L'idea è quella di estendere il concetto di indipendenza lineare e base agli spazi proiettivi.

Definizione 1.12 (Punti indipendenti). Siano $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{P}(V)$; questi sono detti *indipendenti* se per $v_1, \ldots, v_k \in V : [v_i] = P_i$, i $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

È anche facile convincersi che tale definizione è indipendente dai rappresentati scelti, visto che $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti $\iff \lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_k v_k$ lo sono.

Questa nozione di indipendenza per gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ permette di individuare tutte quelle rette di V che non si possono scrivere in combinazione lineare tra di loro.

Si nota, inoltre, che gli elementi di $\mathbb{P}(V)$ sono, a due a due, sempre indipendenti per costruzione, mentre non è vero in generale per un insieme di k punti, con $k > 2$. Infatti, prendendo $V = \mathbb{R}^2$, si osserva che non si potrà mai costruire un insieme di punti di $\mathbb{P}(V)$ che sia indipendente e che abbia più di due elementi perché $\mathbb{R}^2$ è ottenuto dallo span di esattamente due elementi indipendenti.

Definizione 1.13 (Posizione generale). Dati $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione $n+1$, questi sono detti essere in *posizione generale* se ogni loro sottoinsieme di $h \leq n+1$ elementi distinti è indipendente.

Osservazione 1.3. Se $k \leq n+1$, allora la nozione di posizione generale coincide con quella di indipendenza, mentre se $k > n+1$, la definizione richiede l'indipendenza di tutte le $(n+1)$-uple di punti.

Definizione 1.14 (Riferimento proiettivo). Sia V uno spazio vettoriale tale che $\mathbb{P}(V)$ è n-dimensionale. Un *riferimento proiettivo* di $\mathbb{P}(V)$ è una $(n+2)$-upla di punti in posizione generale.

L'ultimo punto nel riferimento è detto **punto unità**, mentre gli altri sono detti **punti fondamentali**.

Definizione 1.15 (Base normalizzata). Sia $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ un riferimento di $\mathbb{P}^n(V)$. Una *base normalizzata* di V associata a $\mathcal{R}$ è una base $\{v_0, \dots, v_n\}$ tale che

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \ [v_i] = P_i \text{ e } P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$$

Teorema 1.5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ tale che $\mathbb{P}(V)$ abbia dimensione n e sia $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$. Esiste sempre almeno una base normalizzata $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ e, se $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$ è un'altra base, allora $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $u_i = \lambda v_i$.

Dimostrazione. Sia $\{w_0, \dots, w_{n+1}\} \subset V$ un insieme di vettori, con $[w_i] = P_i$, $i = 0, \dots, n+1$. Visto che $\mathcal{R}$ è un riferimento proiettivo, i $w_0, \dots, w_n$ sono $n+1$ vettori linearmente indipendenti in V spazio $(n+1)$-dimensionale, quindi sono una base. Questo implica che $w_{n+1} = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_n w_n$, dove $\lambda_i \neq 0$, altrimenti i $w_0, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_{n+1}$ non sarebbero indipendenti e $\mathcal{R}$ non sarebbe un riferimento proiettivo. Si prendono, ora, $v_i = \lambda_i w_i$, $i = 0, \dots, n$, mentre $v_{n+1} = w_{n+1}$; in questo modo, $[v_i] = [w_i] = P_i$, mentre $v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i$ per costruzione. In questo modo, si è costruita $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ base normalizzata associata a $\mathcal{R}$.

Sia, ora, $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$ un'altra base normalizzata di $\mathcal{R}$; essendo che $[u_i] = P_i =$

$[v_i]$, allora $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : v_i = \mu_i u_i, \ i = 0, \dots, n+1$. Inoltre

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} \sum_{i=0}^{n} u_i = \mu_{n+1} u_{n+1} = v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} v_i = \sum_{i=0}^{n} \mu_i u_i \\ \Rightarrow 0 = \sum_{i=0}^{n} (\mu_i - \mu_{n+1}) u_i\end{aligned}$$

Visto che gli $u_0, \dots, u_n$ sono una base, per indipendenza lineare deve valere $\mu_i = \mu_{n+1}, \ \forall i$, cioè le due basi coincidono a meno di un fattore invertibile. □

Osservazione 1.4. Si nota che rispetto all'algebra lineare, in geometria proiettiva non è possibile estendere riferimenti proiettivi di sottospazi proiettivi a riferimenti di sottospazi che li estendono.

Sia, infatti, $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ un riferimento di un sottospazio S di H; allora si nota che i P_i non sono in posizione generale se visti come punti di H perché se la dimensione aumenta, le $(n+2)$-uple devono essere indipendenti, ma il punto unità è scritto come combinazione degli altri.

Con la teoria sviluppata finora, è possibile stabilire un criterio di uguaglianza per individuare trasformazioni proiettive uguali.

Teorema 1.6. Siano $f, g : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ due trasformazioni proiettive indotte, rispettivamente, da φ e da ψ e sia, inoltre, $\mathcal{R}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$; allora sono equivalenti le seguenti affermazioni.

(a). Si trova un coefficiente $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $\varphi = \lambda \psi$.

(b). Le due trasformazioni proiettive sono identiche: $f = g$.

(c). Per ogni punto $P \in \mathcal{R}$, si ha $f(P) = g(P)$.

Dimostrazione. Si dimostra che (a) $\Rightarrow$ (b). Per conto diretto:

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda \psi(v)] = [\psi(v)] = g(v)$$

Ora si mostra che (b) $\Rightarrow$ (c). Questo, però, è ovvio perché $f(P) = g(P), \ \forall P \in \mathbb{P}(V)$, incluso $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(V)$.

Infine, si mostra (c) $\Rightarrow$ (a). Per farlo, si prende $\{v_0, \dots, v_n\}$ base normalizzata riferita a $\mathcal{R}$. Si sa che

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = f(P_i) = [\psi(v_i)], \ \forall P_i \in \mathcal{R} \tag{1.1.4}$$

quindi $\exists \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i)$. Per concludere, si considera cosa succede al punto unità; per la relazione 1.1.4, deve valere $\varphi(v_{n+1}) = \lambda_{n+1}\psi(v_{n+1})$, per qualche $\lambda_{n+1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, ma, al contempo:

$$\lambda_{n+1}\sum_{i=0}^{n}\psi(v_i) = \sum_{i=0}^{n}\varphi(v_i) = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\psi(v_i) \implies \sum_{i=0}^{n}(\lambda_i - \lambda_{n+1})\psi(v_i) = 0$$

Visto che ψ è iniettiva, gli $\psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\forall i = 0, \dots, n,\ \lambda_{n+1} = \lambda_i$, il che vuol dire che $\lambda_{n+1}\psi = \varphi$ sui $v_0, \dots, v_n$; essendo questi una base, la relazione $\varphi = \lambda_{n+1}\psi$ vale su tutti i vettori dello spazio. □

Corollario 1.6.1. Si ha

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(V) \cong {}^{\mathrm{GL}(V)}\!/_{N}$$

con $N = \{\lambda\,\mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} \lhd \mathrm{GL}(V)$.

Dimostrazione. Si considera la mappa $\varphi \mapsto [\varphi] : \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$. Questa mappa è un omomorfismo suriettivo di gruppi e, se $[\varphi] = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(V)} = [\mathrm{Id}_V]$, allora $\varphi = \lambda\,\mathrm{Id}_V$ per il teorema 1.6 appena mostrato. Questo implica che il nucleo di tale omomorfismo è proprio N, quindi la tesi segue applicando il primo teorema di omomorfismo. □

Notazione 1.1 (Proiettività standard). Le proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ formano un gruppo indicato da $\mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$. L'$n+1$ come pedice indica la taglia delle matrici che rappresentano le proiettività, non la dimensione dello spazio su cui agiscono.

Teorema 1.7 (Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive). Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ due spazi proiettivi su $\mathbb{K}$ tali che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$. Fissati $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ e $\mathcal{R}' = \{P_0', \dots, P_{n+1}'\}$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente, esiste un'unica trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ tale che $f(P_i) = P_i'$, $i = 0, \dots, n+1$.

Dimostrazione. L'unicità è diretta conseguenza del teorema 1.6. Rimane da mostrare l'esistenza.

Siano, allora, $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_0, \dots, w_n\}$ due basi normalizzate associate a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ rispettivamente e sia $\varphi : V \to W$ la mappa tale che $\forall i,\ \varphi(v_i) = w_i$; si nota che φ è iniettiva perché ha rango massimo, quindi si può prendere $f = [\varphi]$. Per costruzione:

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = P_i'$$

mentre per i punti fondamentali:

$$f(P_{n+1}) = f([v_0 + \dots + v_n]) = [\varphi(v_0 + \dots + v_n]) = [w_0 + \dots + w_n] = P_{n+1}'$$

$\square$

1.1.4 Coordinate omogenee

Come per il caso degli spazi vettoriali, è utile ricorrere a sistemi di coordinate. Per capire come definirli, si considera il caso particolare di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$; questo, per definizione, è:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = {}^{\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}}\!/\!_{\sim} = \{[(x_0, \dots, x_n)] \mid \exists x_i \neq 0\}$$

Definizione 1.16 (Riferimento proiettivo canonico). Il *riferimento canonico* (o standard) di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è quel riferimento proiettivo che ha, come base normalizzata, la base canonica di $\mathbb{K}^{n+1}$.

In questo caso, si dirà che $[(x_0, \dots, x_n)]$ ha *coordinate omogenee* $[x_0 : \dots : x_n]$ rispetto al riferimento canonico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Ora si estende questa definizione a spazi proiettivi generali.

Definizione 1.17 (Coordinate omogenee). Sia $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}(V)$; dato $P \in \mathbb{P}(V)$, le sue *coordinate omogenee* rispetto a $\mathcal{R}$ sono date da una delle seguenti definizioni.

- Se $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è l'unico isomorfismo proiettivo che manda $\mathcal{R}$ nel riferimento canonico di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, allora le coordinate di omogenee di P sono $f(P)$.

- Se $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$ è una base normalizzata di $\mathcal{R}$ e $P = [v]$, si considera $v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i$; le coordinate omogenee di P rispetto a $\mathcal{R}$, allora, sono $[a_0 : \dots : a_n]$.

Come per gli spazi vettoriali, è possibile rappresentare le trasformazioni proiettive come matrici e i sottospazi proiettivi come i luoghi di zeri di equazioni.

Definizione 1.18 (Matrice associata). Sia $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ un isomorfismo proiettivo e siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$ rispettivamente, con $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ le rispettive basi normalizzate. Se φ induce f, allora f è rappresentata da

$$M = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{M}(n+1, \mathbb{K})$$

Osservazione 1.5 (Prodotto tra matrice e coordinate omogenee). Siano $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ e $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$, con $f = [\varphi]$. Sia M la matrice che rappresenta f e siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ due riferimenti di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(W)$, con basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Indicando il passaggio a coordinate omogenee rispetto a $\mathcal{R}$ con $[\cdot]_{\mathcal{R}}$ e il passaggio a coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ con $[\cdot]_{\mathcal{B}}$, si ha:

$$\begin{aligned}[f(P)]_{\mathcal{R}'} = [[\varphi(v)]]_{\mathcal{R}'} &= \left[[[M[v]_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}'}^{-1}]\right]_{\mathcal{R}'} = \left[[[[M[v]_{\mathcal{B}}]]_{\mathcal{R}'}^{-1}]\right]_{\mathcal{R}'} \\ &= [M[v]_{\mathcal{B}}]\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Notazione 1.2. Sia M una matrice e sia $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$; prendendo $\mathcal{R}$ un riferimento di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathcal{B}$ sua base normalizzata, si pone

$$M[P]_{\mathcal{R}} = [M][P]_{\mathcal{R}} := [M[v]_{\mathcal{B}}]$$

Definizione 1.19 (Equazioni cartesiane proiettive). Sia $S \subset \mathbb{P}(V)$ un sottospazio proiettivo e W il sottospazio di V tale che $S = \mathbb{P}(W)$. Fissato un riferimento $\mathcal{R}$ su $\mathbb{P}(V)$, si individua univocamente una base normalizzata di V, pertanto W si esprime come luogo degli zeri di $\dim V - \dim W$ equazioni. Queste equazioni si definiscono *equazioni cartesiane* per S rispetto a $\mathcal{R}$.

Si nota che il numero di equazioni cartesiane si può scrivere anche come

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim S = \dim V - \dim W$$

1.2 Spazi proiettivi e spazi affini

1.2.1 Carte affini

Definizione 1.20 (Iperpiano coordinato). Dato $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, si definisce il seguente suo sottoinsieme:

$$H_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0\}$$

con $i \in \{0, \ldots, n\}$. Tale sottoinsieme è noto come l'i-esimo *iperpiano coordinato.*

Se considerati come spazi proiettivi, allora

$$H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \tag{1.2.1}$$

Definizione 1.21 (Carta affine – Insieme). Si definisce l'i-esima *carta affine* come

$$U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H_i$$

Proposizione 1.9. Esiste una mappa biettiva tra U_i e $\mathbb{K}^n$, $\forall i = 0, \ldots, n$.

Dimostrazione. □

2 | Topologia generale

2.1 Spazi metrici

Definizione 2.1 (Spazio metrico). Sia X un insieme non vuoto; allora X si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, x') \geq 0$ e $d(x, x') = 0 \iff x = x'$;
- $d(x, x') = d(x', x)$;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Dato uno spazio metrico (X, d_X) e un insieme $Y \subset X$, si può definire un sottospazio di (X, d_X) restringendo la distanza al solo Y:

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'),\ \forall y, y' \in Y$$

Quindi (Y, d_Y) è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di (X, d_X), il quale è detto *spazio ambiente* di Y. In uno spazio metrico (X, d), si può definire un *disco aperto* di raggio r e centro x come

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

Definizione 2.2 (Insieme aperto). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

Equivalentemente, un insieme $\forall \subseteq X$ si dice aperto rispetto alla metrica d se $\forall x \in A,\ \exists \varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Lemma 2.0.1. Le palle aperte sono insiemi aperti relativamente alla metrica che le definisce.

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico e $x_0 \in X$; si dimostra che la palla $B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ è aperto rispetto a d. Si nota che, $\forall x \in B_r(x_0)$, è possibile definire $\delta = r - d(x, x_0)$ tale che $B_\delta(x) \subseteq B_r(x_0)$; infatti tutti i punti di $B_\delta(x)$ sono a distanza minore di ε da x, quindi, per disuguaglianza triangolare:

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + \underbrace{d(x, y)}_{<\delta} < r,\ \forall y \in B_\delta(x)$$

per definizione di δ. $\square$

Nello stesso spazio metrico, è possibile definire la distanza tra un punto $x \in X$ con un sottoinsieme $A \subseteq X$ come:

$$d_A(x) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} \tag{2.1.1}$$

2.1.1 Continuità in spazi metrici

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon,\ \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,\ \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$

È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

> **Definizione 2.3 (Continuità in spazi metrici).** Sia $f : X \to Y$ un'applicazione, con $(X, d_X),\ (Y, d_Y)$ spazi metrici. Si dice che f è continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon,\ \exists \delta(\epsilon)$ tale che:
>
> $$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon,\ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \tag{2.1.2}$$
>
> Questo si esprime equivalentemente come:
>
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(B_{d_X}(x, \delta)) \subseteq B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

> **Teorema 2.1.** Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\iff$ $\forall A \subset Y$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni.

- ($\Rightarrow$) Si assume che f sia continua. Si prende $f(x) \in A$, con $A \subset Y$ aperto, per qualche $x \in f^{-1}(A)$. Essendo A aperto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset A$; allo stesso tempo, per continuità di f, dato ε scelto prima, deve esistere $\delta(\varepsilon)$ tale che

  $$f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

  quindi $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Valendo $\forall x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- ($\Leftarrow$) Si assume che $\forall A \subset Y$ aperto, la funzione f sia tale che l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto. Per $f(x) \in Y$, esiste $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$; essendo questo aperto, deve essere aperto anche $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$. Dunque, dato $x \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$, $\exists \delta(\varepsilon) : B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$, quindi vuol dire che $f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$, ossia:

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon, \ \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

  Valendo $\forall x \in X$, allora f è continua.

$\square$

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

Negli spazi metrici, è possibile caratterizzare delle mappe che preservano le distanze; queste sono note come *immersioni isometriche.*

> **Definizione 2.4 (Immersione isometrica).** Sia $f : X \to Y$ una mappa tra spazi metrici; questa è detta immersione isometrica se
>
> $$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

Un'immersione isometrica deve necessariamente essere iniettiva:

$$f(x) = f(y) \implies d_Y(f(x), f(y)) = 0 = d_X(x, y) \iff x = y$$

Inoltre, la composizione di due immersioni isometriche è ancora un'immersione isometrica e l'identità ne è un esempio.

> **Definizione 2.5 (Isometria).** Sia $f : X \to Y$ un'immersione isometrica; allora se f è suriettiva, quindi biettiva, è detta *isometria.*

Le isometrie formano un gruppo con l'operazione di composizione, che si indica con $\mathrm{Isom}(X)$.

> **Definizione 2.6 (Omeomorfismo).** Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \to Y$ è un *omeomorfismo* se la sua inversa e f stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo $e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, questa ha un'inversa continua $\log(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda $(-\infty, 0]$ in $(0, 1]$. Anche gli omemorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

> **Definizione 2.7 (Mappa lipschitziana).** Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e

sia $f : X \to Y$ una mappa; si dice che f è *lipschitizana* se

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq k d_X(p, q), \;\; \forall p, q \in X$$

Proposizione 2.1. Se $f : X \to Y$ è lipschitizana, allora è continua.

Dimostrazione. Sia f una funzione k-lipschitziana; si fissa $\varepsilon > 0$ e si prende $\delta = \varepsilon/k$, per cui $\forall x' \in X$ tale che $d_X(x, x') < \delta$, si ha

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x') < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

$\square$

2.2 Spazi topologici

Allo scopo di giustificare la definizione e lo studio di spazi topologici, si considera il seguente risultato.

Proposizione 2.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:

(a). $\emptyset$ e X sono aperti;

(b). se A, B sono aperti, allora $A \cap B$ è aperto;

(c). se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di aperti, allora $\bigcup_{i\in I} A_i$ è aperto.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nei vari punti.

(a). X è ovviamente aperto, mentre per l'insieme vuoto non ci sono punti per cui bisogna verificare la richiesta, quindi è aperto.

(b). Sia $x_0 \in A \cap B$; questo significa che ci sono due palle di raggi ϵ_1, ϵ_2 interamente contenute in A e B rispettivamente, visto che sono aperti. Prendendo $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, si verifica immediatamente che $B_\epsilon(x) \subseteq A \cap B$, visto che è interamente contenuta sia in A che B.

(c). Evidentemente $\exists j \in I : x_0 \in A_j \implies \exists \epsilon : B_\epsilon(x_0) \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

$\square$

Si nota che l'intersezione arbitraria di aperit può non risultare aperta, come nel caso della famiglia $B_{1/n}(0)$ in $\mathbb{R}$.

Dalla precedente proposizione, è possibile giustificare la seguente definizione di topologia.

Definizione 2.8 (Topologia e spazio topologico). Sia X un insieme non-vuoto. Una *topologia* su X è una famiglia non-vuota $\tau \subseteq \mathcal{P}(x)$, chiamati *insiemi aperti della topologia.* Questi soddisfano le seguenti condizioni:

- $\emptyset$, X sono aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un aperto.

Allora si definisce *spazio topologico* la coppia (X, τ), dove X è detto *supporto* dello spazio topologico e i suoi elementi sono i *punti* dello spazio.

Dato (X, d) spazio metrico, la famiglia degli insiemi aperti rispetto a d è una topologia su X indotta da d stessa. In $\mathbb{R}^n$, si definisce **topologia euclidea** (o **naturale**) $\mathcal{E}$ come quella indotta dalla distanza euclidea d_2. Su $\mathbb{C}$, la topologia euclidea $\mathcal{E}$ è quella indotta da $d(z, w) = |z - w|$; questa conclusione si può ottenere identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ da $z = x + iy \mapsto (x, y)$ e considerando la distanza euclidea di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 2.9 (Topologia discreta). Sia X un insieme generico; allora l'insieme $\tau = \mathcal{P}(X)$ è una topologia di X, nota col nome di *topologia discreta.* Inoltre, si dice che (X, τ) è lo *spazio topologico discreto.*

Definizione 2.10 (Topologia banale). Sia X un insieme generico; allora l'insieme $\tau = \{\emptyset, X\}$ definisce una topologia su X, nota col nome di *topologia banale*, o *indiscreta.* Inoltre, si dice che (X, τ) è lo *spazio topologico banale.*

Definizione 2.11 (Topologia cofinita). Sia X un insieme; l'insieme

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X \mid |X \setminus A| \in \mathbb{N}\}$$

è una topologia su X, detta *topologia cofinita.* Questa ha, come chiusi, gli insiemi finiti e tutto lo spazio; quest'ultimo risulta sia chiuso che aperto.

In generale, una topologia non induce una distanza; per esempio, la topologia banale non è indotta da alcuna metrica per $|X| \geq 2$ perché se $x_1, x_2 \in X$ sono due punti distinti, allora $B(x_1, d(x_1, x_2)/2)$ e $B(x_2, d(x_1, x_2)/2)$ sono disgiunte e non-vuote, quindi sono aperte rispetto a questa distanza, ma la topologica banale prevede solo $\emptyset$ e X come aperti.

Definizione 2.12 (Spazio metrizzabile). Uno spazio topologico (X, τ) è detto *metrizzabile* se si può definire una distanza su X che induce la topologia τ.

Definizione 2.13 (Topologia di sottospazio). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme; la topologia di sottospazio è l'insieme degli aperti rispetto alla distanza $d|_Y$, rispetto a cui Y è uno spazio metrico.

Osservazione 2.1. Se $y \in Y$: $B_\varepsilon^{(Y)}(y) = B_\varepsilon^{(X)}(y) \cap Y$; questo significa che gli aperti di Y sono della forma $A \cap Y$, con A aperto di X.

Visto che la topologia di uno spazio (X, τ) permette di individuare gli insiemi aperti di X, allora si ha la seguente definizione.

Definizione 2.14 (Insieme chiuso). Sia (X, τ) uno spazio topologico; si dice che $C \subseteq X$ è chiuso se $X \setminus C \in \tau$.

Infine, avendo la possibilità di definire più topologie per uno spazio topologico X, è possibile metterle in relazione a seconda degli elementi che contengono.

Definizione 2.15 (Finezza di una topologia). Date τ_1, τ_2 due topologie dello spazio X, si dice che τ_1 è più fine di τ_2 se $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

La finezza induce un ordinamento parziale nell'insieme delle topologie di uno spazio topologico, dove la topologia discreta rappresenta la topologia più fine possibile, mentre la topologia banale quella meno fina.

Definizione 2.16 (Funzione continua). Una mappa fra spazi topologici $f : X \to Y$ si dice *continua* se $\forall A \in \tau_Y$, si ha $f^{-1}(A) \in \tau_X$.

Definizione 2.17 (Omeomorfismo). Sia $f : X \to Y$ una mappa continua; si dice che f è un *omeomorfismo* se è biunivoca e f^{-1} è continua.

Osservazione 2.2. Gli omeomorfismi e le funzioni continue biettive non coincidono; per esempio, dato X uno spazio topologico con τ_1 e τ_2 due sue topologie tali che $\tau_2 \subsetneq \tau_1$, allora $\mathrm{Id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ è continua, ma $\mathrm{Id} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ no.

2.2.1 Distanze equivalenti

Definizione 2.18 (Distanze topologicamente equivalenti). Due distanze $d, \overline{d}$ su X si dicono *topologicamente equivalenti* se generano la stessa topologia.

Proposizione 2.3. Siano d_1, d_2 due metriche definite nello spazio X, che inducono le topologie τ_1 e τ_2 rispettivamente; se $\exists k > 0$ tale che $d_1(x, y) \leq k d_2(x, y)$, allora τ_2 è più fine di τ_1.

Dimostrazione. Sia A un aperto secondo d_1, quindi $\forall x \in A$, $\exists B_{d_1}(x,r) \subseteq A$. Ora, se $d_2(x,y) < r/k$, si ha

$$d_1(x,y) \leq kd_2(x,y) < r \implies y \in B_{d_1}(x,r)$$

da cui si conclude che $B_{d_2}(x, r/k) \subseteq B_{d_1}(x,r) \subseteq A$, e, allora, A è aperto anche rispetto a d_2, cioè $A \in \tau_2$.

□

Se $d(x,y) = r\overline{d}(x,y)$, per $r > 0$, si hanno due distanze equivalenti perché, evidentemente, $\forall \varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(x) = \overline{B}_{r\varepsilon}(x)$$

cioè le due distanze $d, \overline{d}$ identificano le stesse palle aperte, quindi gli stessi insiemi aperti.

Corollario 2.1.1. Siano d_1, d_2 due distanze su X per cui $\exists h, k > 0$ tali che

$$d_1(x,y) \leq kd_2(x,y) \qquad d_2(x,y) \leq hd_1(x,y)$$

$\forall x, y \in X$; allora d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. È sufficiente applicare la proposizione 2.3 due volte: dalla prima maggiorazione, si ha $\tau_1 \subseteq \tau_2$, mentre dalla seconda si ha $\tau_2 \subseteq \tau_1$, quindi $\tau_1 = \tau_2$. □

Due funzioni come le distanze d_1, d_2 della tesi si dicono *bilipschitiziane* fra loro.

Corollario 2.1.2. In $\mathbb{R}^n$, le distanze

$$\begin{aligned} d_2(x,x') &= \|x - x'\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i')^2} \\ d_1(x,x') &= \sum_{i=1}^n |x - x_i| \\ d_\infty(x,x') &= \max_i \{|x_i - x_i'|\} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

sono equivalenti e si ha

$$d_\infty(x,x') \leq d_2(x,x') \leq d_1(x,x') \leq nd_\infty(x,x') \tag{2.2.2}$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è giustificata da:

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2} \geq \sqrt{\max_i \{(x_i - x_i')^2\}} = \max_i \{|x - x_i'|\} = d_\infty(x, x')$$

La seconda, invece, è vera perché:

$$[d_2(x, x')]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i')^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| \right]^2 = [d_1(x, x')]^2$$

L'ultima disuguaglianza è immediata. $\square$

Da questo segue direttamente che[1]

$$B_\varepsilon^{(\infty)}(x) \supset B_\varepsilon^{(2)}(x) \supset B_\varepsilon^{(1)}(x) \supset B_{\varepsilon/n}^{(\infty)}(x) \tag{2.2.3}$$

Questo mostra che se A è aperto rispetto ad una distanza, lo è anche rispetto alle altre.

Osservazione 2.3. Non tutte le distanze su uno spazio sono equivalenti. Ad esempio, considerando d_1 e d_∞ su $C([0,1])$, si ha, per $M = \|f\|_\infty$:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| \ dx \leq \int_0^1 M \ dx = M = \|f\|_\infty$$

Quindi $\tau_1 \subseteq \tau_\infty$. Si nota anche che l'insieme $B_\infty(0,1)$, cioè l'insieme delle funzioni che si discostano dalla funzione identicamente nulla al massimo 1, risulta aperto per d_∞, ma non per d_1. Infatti, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x/\varepsilon & , \ x \in [0, \varepsilon] \\ 0 & , \ \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha integrale ε, ma $\|f\|_\infty = 2$, cioè $f \notin B_\infty(0,1)$, quindi $B_1(0,\varepsilon) \not\subseteq B_\infty(0,1)$.

Definizione 2.19 (Limitatezza). Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$; allora Y è detto *limitato* se esistono $x \in X, \ R \in \mathbb{R}$ tali per cui $Y \subseteq B_R(x)$.

[1] Apparentemente, la distanza più grande dovrebbe includere più elementi, quindi i simboli $\supset$ dovrebbero essere dei $\subset$, invece, avendo fissato il raggio ε, quella che permette di creare la palla più grande è la distanza più piccola perché *avvicina* i punti tra di loro, quindi più elementi rientreranno in tale raggio.

Proposizione 2.4. Sia (X, d) uno spazio metrico; allora esiste una metrica d' su X tale che d e d' sono equivalenti e $d'(x, y) \leq 1$, $\forall x, y \in X$. Inoltre, X risulta limitato in (X, d').

Dimostrazione. Si definisce

$$d'(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

Per verificare che sono equivalenti, si osserva che:

- $\tau_{d'} \subseteq \tau_d$ perché $d'(x, y) \leq 1 \cdot d(x, y)$ per definizione;
- $\tau_d \subseteq \tau_{d'}$ perché se A è un aperto di (X, d), allora $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon_x > 0 : B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq A$, per cui
$$A = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon_x)$$
ma prendendo $\varepsilon'_x = \min \{\varepsilon_x, 1\}$, si trova che
$$A = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon'_x) = \bigcup_{x \in A} B_{d'}(x, \varepsilon'_x)$$
cioè A è aperto anche per $\tau_{d'}$.

$\square$

2.2.2 Chiusura e parte interna

Definizione 2.20 (Chiusura). Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Si definisce la *chiusura* di Y in X come il più piccolo chiuso che contiene Y, ossia

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{Y \subseteq C \\ C \text{ chiuso}}} C$$

Definizione 2.21 (Parte interna). Sia (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Si definisce *parte interna* di Y in X come il più grande aperto contenuto in Y, ossia

$$\operatorname{Int} Y = \bigcup_{\substack{A \in \tau \\ A \subseteq Y}} A$$

Visto che l'intersezione arbitraria di chiusi è chiusa e l'unione arbitraria di aperti è aperta, le definizioni di parte interna e chiusura sono sensate.

Osservazione 2.4. Valgono le due seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} Z &= X \setminus \overline{(X \setminus Z)} \\ \overline{Z} &= X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus Z) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Inoltre, Z coincide con la sua parte interna se e solo se è aperto, mentre coincide con la sua chiusura se e solo se è chiuso.

Definizione 2.22 (Frontiera). La *frontiera* di un insieme $Z \subset X$ è definita come

$$\partial Z = \overline{Z} \setminus \operatorname{Int} Z$$

Definizione 2.23 (Punti aderenti e di accumulazione). Siano $P \in X$ e $Z \subseteq X$. Si dice che:

- P è *aderente* a Z se $P \in \overline{Z}$;
- P è *di accumulazione* per Z se $P \in \overline{Z \setminus \{P\}}$.

Proposizione 2.5. Sia X uno spazio topologico e $Z \subseteq X$; allora $P \in \overline{Z}$ se e solo se $\forall A \subseteq X$ aperto è tale che $P \in A \implies A \cap Z \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Da dimostrare... □