Compitino 17 decembre 2022

Si consideri una particella che si muove lungo una retta in presenza di una forza armonica, la cui Hamiltoniana è

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2\,\hat{x}^2\,, \tag{1}$$

(1) Scrivere l'Hamiltoniana in termini di operatori di distruzione e costruzione a e $a^\dagger$, e scrivere i suoi autovalori.

(2) Calcolare gli elementi di matrice degli operatori $\hat{x}$ e $\hat{x}^2$ tra i primi due autostati $|0\rangle$ e $|1\rangle$ di $\hat{H}$ (suggerimento: usare la relazione tra $\hat{x}$, $\hat{x}^2$ e gli operatori a e $a^\dagger$).

(3) Calcolare la distanza quadratica media dal centro definita come $\Delta_x = \sqrt{\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle}$, e l'impulso quadratico medio definito come $\Delta_p = \sqrt{\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle}$, nello stato fondamentale (suggerimento: usare anche per $\hat{p}^2$ la relazione con gli operatori a e $a^\dagger$). Confrontare i risultati con il principio di indeterminazione $\Delta_x\,\Delta_p \geq \hbar/2$.

(4) Calcolare la densità di probabilità che la particella si trovi ad una distanza $d = \ell_\omega = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$, nello stato fondamentale e nel primo stato eccitato.

Si consideri l'atomo di idrogeno assumendo il nucleo fisso, dove l'elettrone è soggetto al potenziale di Coulomb $U(r) = -\kappa/r$, e $\kappa = e^2$ (in CGS, oppure $\kappa = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ in SI), dove e è la carica dell'elettrone.

(5) Calcolare la probabilità di trovare l'elettrone all'interno della regione $r \leq r_B$, dove $r_B = \hbar/(m\alpha c)$ è il raggio di Bohr, nello stato fondamentale.

(6) Calcolare i valori medi degli operatori di posizione $\hat{\boldsymbol{x}}$ e impulso $\hat{\boldsymbol{p}}$ dei primi livelli energetici $|1,0,0\rangle$, $|2,0,0\rangle$, e $|2,1,m\rangle$ (suggerimento: usare argomenti basati sulla parità degli stati).

Riportiamo per referenza le funzioni d'onda in rappresentazione di Schrödinger dei primi due livelli dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}}\frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}}\,, \qquad \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}}\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\frac{x}{\ell_\omega} e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}}\,,$$

dove $\ell_\omega = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico.

Riportiamo anche alcune formule che riguardano le autofunzioni (parte radiale) del fondamentale e primi eccitati dell'atomo di idrogeno:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{r_B^{3/2}} e^{-r/r_B}\,, \qquad R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}r_B^{3/2}}\left(1 - \frac{r}{2r_B}\right) e^{-r/(2r_B)}\,, \qquad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24}r_B^{3/2}}\frac{r}{r_B} e^{-r/(2r_B)}\,.$$