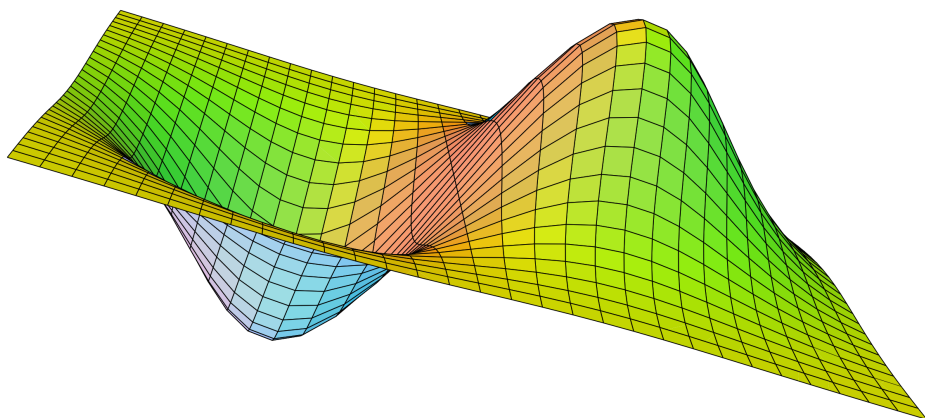


# NOTE DI ANALISI

MANUEL DEODATO



# INDICE

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Spazi metrici</b>                          | <b>4</b>  |
| 1.1      | Nozioni introduttive                          | 4         |
| 1.2      | Le norme $p$                                  | 4         |
| 1.3      | Nozioni di topologia                          | 9         |
| 1.4      | Compattezza e completezza                     | 10        |
| <b>2</b> | <b>Calcolo differenziale in più variabili</b> | <b>13</b> |
| 2.1      | Derivate parziali                             | 13        |
| 2.2      | Derivate direzionali                          | 13        |
| 2.3      | Derivate successive                           | 15        |
| 2.4      | Funzioni differenziabili                      | 16        |
| 2.5      | Funzioni composte                             | 17        |
| 2.6      | Massimi e minimi relativi                     | 18        |
| 2.7      | Convessità                                    | 19        |
| <b>3</b> | <b>Calcolo integrale in più variabili</b>     | <b>26</b> |
| 3.1      | Integrazione in dimensioni superiori          | 26        |
| 3.2      | Misura di insiemi                             | 27        |
| 3.2.1    | Insiemi generati da funzioni                  | 28        |
| 3.3      | Integrabilità di funzioni continue            | 29        |
| 3.4      | Integrali doppi                               | 30        |
| 3.5      | Integrali tripli                              | 32        |
| 3.6      | Cambiamento di variabili                      | 33        |
| 3.6.1    | Ammissibilità del cambiamento di variabili    | 34        |
| 3.6.2    | Matrice Jacobiana                             | 35        |
| 3.7      | Integrali impropri                            | 36        |
| 3.7.1    | Integrali in domini non limitati              | 36        |
| 3.7.2    | Integrali di funzioni non limitate            | 37        |
| <b>4</b> | <b>Curve e superfici</b>                      | <b>39</b> |
| 4.1      | Curve in $\mathbb{R}^n$                       | 39        |
| 4.2      | Lunghezza di una curva                        | 41        |
| 4.3      | Superfici                                     | 47        |
| 4.4      | Area di una superficie                        | 49        |
| 4.5      | Il teorema delle funzioni implicite           | 50        |
| 4.6      | Massimi e minimi vincolati                    | 53        |
| <b>5</b> | <b>Forme differenziali</b>                    | <b>58</b> |
| 5.1      | Lavoro di una forza                           | 58        |

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| 5.2      | Introduzione alle forme differenziali | 59        |
| 5.3      | Forme esatte                          | 61        |
| 5.4      | La formula di Gauss-Green             | 66        |
| 5.4.1    | Area di figure piane                  | 69        |
| 5.4.2    | Ancora sulle forme esatte             | 70        |
| 5.5      | La formula di Stokes                  | 70        |
| <b>6</b> | <b>Teoria della misura</b>            | <b>73</b> |
| 6.1      | Nozioni introduttive                  | 73        |
| 6.2      | Metodo di Carathéodory                | 75        |
| 6.3      | Misura di Lebesgue                    | 76        |

# 1 SPAZI METRICI

*L'idea dietro gli spazi metrici è quella di avere uno spazio sul quale è possibile misurare le distanze tra gli elementi di tale spazio, replicando la misurazione in spazi euclidei. Si definirà la nozione di distanza, che sarebbe un'indicazione di quanto due elementi dello spazio sono lontani tra loro.*

## 1.1 Nozioni introduttive

### Definizione 1.1 (Spazio metrico)

Sia  $X$  un insieme; si dice che  $(X, d)$  è uno spazio metrico se  $d$  è una distanza su  $X$ , ossia una funzione  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  tale che:

$$(d1). \quad d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x, y \in X;$$

$$(d2). \quad d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X;$$

$$(d3). \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X.$$

Si nota che, dato  $Y \subseteq X$ , con  $(X, d)$  spazio metrico, anche  $(Y, d|_Y)$  è uno spazio metrico. Una classe importante di spazi metrici sono gli spazi normati.

### Definizione 1.2 (Spazio normato)

Uno spazio normato è uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  sul quale è definita una norma  $\|\cdot\|$ , cioè una funzione  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$  tale che:

$$(n1). \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0;$$

$$(n2). \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K};$$

$$(n3). \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Uno spazio normato si indica con la notazione  $(V, \|\cdot\|)$ .

Si può dimostrare che la distanza  $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  è ben definita e rende  $(V, D)$  uno spazio metrico. Questo sta anche a significare che ogni spazio normato è anche uno spazio metrico con la distanza derivante dalla norma.

## 1.2 Le norme p

Seguono alcuni esempi di spazi normati. Sullo spazio vettoriale  $\mathbb{K}^n$ , con  $\mathbb{K}$  campo generico, si può definire la norma

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1.2.1)$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  e  $p \geq 1$ . Si può dimostrare che, nel limite  $p \rightarrow +\infty$ , la norma  $\|\cdot\|_p$  diventa:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \quad (1.2.2)$$

### Proposizione 1.1

Dato lo spazio normato  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ , nel limite  $p \rightarrow +\infty$ , la norma  $\|\cdot\|_p$  coincide con  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Dimostrazione.* L'idea è di racchiudere  $\|\mathbf{x}\|_p$  tra due valori che, per  $p \rightarrow +\infty$ , coincidono con  $\|\mathbf{x}\|_\infty$ . Si nota che se  $\|\mathbf{x}\|_\infty = M \Rightarrow$  esiste una direzione lungo cui  $\mathbf{x}$  raggiunge  $\pm M$ , cioè  $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i| = M$ . Questo significa che:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n M^p \right)^{1/p} = (nM^p)^{1/p} = n^{1/p} M$$

Allo stesso tempo

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \geq |x_i| = M$$

Quindi si ottiene che  $M \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq n^{1/p} M$ , dove  $n$  è evidentemente una costante. Ne segue che, nel limite  $p \rightarrow +\infty$ , si ha

$$M \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}\|_p \leq M \iff \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}\|_p = M = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = \|\mathbf{x}\|_\infty$$

□

Considerando lo spazio delle funzioni continue in  $[a, b]$ ,  $C([a, b])$ , si può definire la norma

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad (1.2.3)$$

Anche in questo caso, per  $p \rightarrow +\infty$ , si ha la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (1.2.4)$$

### Proposizione 1.2

Si consideri lo spazio normato  $C([a, b])$  con la norma  $\|\cdot\|_p$ ; per  $p \rightarrow +\infty$ , la norma  $\|\cdot\|_p$  coincide con  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Dimostrazione.* Le funzioni  $f \in C([a, b])$  assumono massimo perché sono continue in un compatto. Questo significa che  $M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$  è ben definito. Trovare la

stima superiore è facile:

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_a^b M^p dx \right)^{1/p} = (b-a)^{1/p} M$$

Per la stima inferiore, si sa che  $\exists x_0 \in [a, b] : |f(x)| = M$ ; questo vuol dire che, essendo  $f$  continua,  $\forall \varepsilon$  esiste un intorno di  $x_0$ ,  $I_\varepsilon$ , in cui  $|f(x)| \geq M - \varepsilon$ . Secondo questo ragionamento:

$$\left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \left( \int_{I_\varepsilon} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq \delta_\varepsilon^{1/p} (M - \varepsilon)$$

con  $\delta_\varepsilon = \int_{I_\varepsilon} dx$ . Conseguentemente, nel limite  $p \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \delta_\varepsilon^{1/p} (M - \varepsilon) = M - \varepsilon \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \|f(x)\|_p \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} (b-a)^{1/p} M = M$$

Visto che questo vale  $\forall \varepsilon$ , significa che, per  $p \rightarrow +\infty$ ,  $\|f(x)\|_p$  è arbitrariamente vicino a  $M$ , quindi:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f(x)\|_p = M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|f(x)\|_\infty$$

□

Ora si introducono alcune disuguaglianze come lemmi per poter dimostrare che le norme  $p$  sono effettivamente delle norme.

### Lemma 1.1 (Disuguaglianza di Young)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$  e  $\forall p, q > 0 : 1/p + 1/q = 1$  si ha:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

*Dimostrazione.* Si procede per conto diretto usando le proprietà dell'esponenziale:

$$ab = e^{\ln a} e^{\ln b} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p} e^{\frac{1}{q} \ln b^q} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

dove si è usato il fatto che  $f(x) = e^x$  è una funzione convessa, visto che ha derivata seconda sempre positiva. □

### Lemma 1.2 (Disuguaglianza di Hölder)

Dati comunque  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e dati  $p, q > 0$  tali che  $1/p + 1/q = 1$ , si ha:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$$

*Dimostrazione.* Si mostra che

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q \implies \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq 1$$

Si può usare la disuguaglianza di Young per i prodotti:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|^p}{p \|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \|\mathbf{y}\|_q^q} \right) = \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q}$$

È evidente che i termini al numeratore coincidono, rispettivamente, con  $\|\mathbf{x}\|_p^p$  e  $\|\mathbf{y}\|_q^q$ , lasciando  $1/p + 1/q$ , che si sa essere pari a 1 per assunzione. Questo dimostra la tesi.  $\square$

### Proposizione 1.3 (Le norme p sono ben definite)

Le norme  $\|\cdot\|_p$  e  $\|\cdot\|_\infty$  sono effettivamente delle norme su  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Si deve dimostrare che entrambe le norme soddisfino la definizione. Si nota che le prime due proprietà sono immediate per definizione, quindi si mostra la disuguaglianza triangolare. Nel caso della norma infinito, questa è di facile verifica perché

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) = \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

Per la generica norma  $p$ , con  $1 \leq p < +\infty$ :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}$$

Si usa la disuguaglianza di Hölder all'ultimo termine; per farlo, si distribuisce il prodotto e la si applica separatamente alle due somme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} &= \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \\ &\leq (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \left\| \begin{pmatrix} |x_1 + y_1|^{p-1} \\ \vdots \\ |x_n + y_n|^{p-1} \end{pmatrix} \right\|_q \\ &= (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \left( \sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p/q})^q \right)^{1/q} \\ &= (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p/q} \\ &= (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

dove si è usato che  $p - 1 = p/q$  alla terza riga. Con questo, si è fatto vedere che

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p \leq (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$$

Se  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p = 0$ , la tesi è immediata, altrimenti si può semplificare per  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$  per ottenere che:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$$

□

#### Proposizione 1.4 (Ordine delle norme)

La mappa  $p \mapsto \|\cdot\|_p$  è debolmente decrescente.

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrarlo per il caso  $\|\mathbf{x}\|_p = 1$  per qualche  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  perché il caso generico si ottiene tramite moltiplicazione per uno scalare. Si fa vedere, dunque, che se  $p' > p$ , allora  $\|\mathbf{x}\|_{p'} \leq 1$ . Per definizione:

$$\|\mathbf{x}\|_{p'} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p'} = 1^{p'/p} = 1$$

visto che  $\|\mathbf{x}\|_p = 1 \implies |x_i| \leq 1, \forall i$ , da cui  $p' > p \implies |x_i|^{p'} \leq |x_i|^p$

□

#### Proposizione 1.5

Per un generico  $n \in \mathbb{N}$ , valgono le seguenti disuguaglianze:

(a).  $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$ ;

(b).  $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due punti.

(a). Per conto diretto:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}\|_\infty^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$$

(b). Si costruisce il vettore  $\boldsymbol{\sigma}$  composto dai segni delle varie componenti del vettore  $\mathbf{x}$ , cioè  $\sigma_i = x_i/|x_i|$ ; in questo modo  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ . Usando la disuguaglianza di Hölder, si ha che  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\boldsymbol{\sigma}\|_2$ ; visto che

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n (\pm 1)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}$$

si ottiene la tesi.

□



### 1.3 Nozioni di topologia

Dato uno spazio metrico  $(X, d)$ , si ricordano le definizioni di palla aperta di centro  $x \in X$  e di raggio  $r > 0$ :

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

È analogamente possibile dare la definizione di palla chiusa come l'insieme

$$\overline{B}_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

che corrisponde alla palla aperta unita al suo bordo. A questo punto, si può dare una definizione di insieme aperto.

#### **Definizione 1.3 (Insieme aperto)**

Dato  $(X, d)$  spazio metrico, si dice che  $A \subset X$  è aperto se

$$\forall x \in A, \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A$$

#### **Definizione 1.4 (Intorno)**

Dato  $U \subset X$ , si dice che  $U$  è un intorno di  $x \in X$  se  $\exists A$  aperto contenente  $x$  e tale che  $A \subseteq U$ .

Gli insiemi aperti rimangono tali sotto unioni infinite e intersezioni finite, il che permette di dare una nozione più astratta e generale di cosa significhi per un insieme essere aperto. Intanto si dimostrano queste proprietà.

#### **Proposizione 1.6**

Sia  $F$  una famiglia di insiemi aperti; allora:

- (a). l'unione, anche infinita, di elementi di  $F$  è ancora un aperto;
- (b). l'intersezione di un numero finito di elementi di  $F$  è ancora un aperto.

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due punti.

- (a).  $\forall A \in F$  e  $x \in A$ , si ha  $r > 0 : B_r(x) \subseteq A$ , il che implica che questa sarà contenuta, a maggior ragione, nell'unione indipendentemente se sia finita o infinita.
- (b). Siano  $A, B \in F$  e  $x \in A \cap B$ ; visto che  $A$  e  $B$  sono aperti, esistono  $r_1, r_2 > 0$  tale che  $B_{r_1}(x) \subseteq A$ ,  $B_{r_2}(x) \subseteq B$ . Senza perdita di generalità, si può assumere  $r_1 \leq r_2$ , da cui

$$A \supseteq B_{r_1}(x) \subseteq B_{r_2}(x) \subseteq B \implies B_{r_1}(x) \subseteq A \cap B$$

Visto che  $x$  è un generico punto di  $A \cap B$ , questo vale per l'intera intersezione, quindi  $A \cap B$  è aperto. Per induzione, si ottiene che l'intersezione di un certo numero finito di insiemi aperti è ancora aperta.

Al contrario, considerando un'intersezione infinita, questo non è più vero: l'intersezione infinita della successione di insiemi  $B_{1/n}(x)$  converge al solo punto  $\{x\}$ , che non è aperto in generale (cioè a meno di non considerare la topologia discreta).

□

Per passaggio al complementare, si ottengono le seguenti proprietà per gli insiemi chiusi:

- se  $F$  è una famiglia finita di insiemi chiusi, allora  $\bigcup_{B \in F} B$  è chiuso;
- se  $F$  è una famiglia, anche infinita, di insiemi chiusi, allora  $\bigcap_{B \in F} B$  è chiuso;

Da queste considerazioni, si generalizza la concezione di insieme aperto con la definizione di topologia.

#### **Definizione 1.5 (Topologia)**

Sia  $X$  un insieme; un suo sottoinsieme  $\tau$  è detto *topologia* se:

- (T1).  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- (T2).  $\forall F \subseteq \tau, \bigcup_{A \in F} A \in \tau$ ;
- (T3).  $\forall F \subseteq \tau : |F| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , si ha  $\bigcap_{A \in F} A \in \tau$ .

### 1.4 Compattezza e completezza

#### **Definizione 1.6 (Successione convergente)**

Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , con  $(X, d)$  spazio metrico, è detta *convergente* a  $x$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon, x_n \in B_\varepsilon(x)$$

Equivalentemente, si può dire che  $\forall U$  intorno di  $x$ , esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n > n_0, x_n \in U$ .

In termini di distanza, si ha  $x_n \rightarrow x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$ .

#### **Definizione 1.7 (Successione uniformemente convergente)**

Dato uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$ , una successione di funzioni  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a valori in  $X$  è *uniformemente convergente* a  $f$  se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

Più in generale, data una successione di funzioni  $f_n : X \rightarrow Y$ , con  $X$  insieme generico e  $(Y, d)$  spazio metrico, si dice che questa è uniformemente convergente in  $Y$  ad una certa funzione  $f : X \rightarrow Y$  se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Cioè non è necessaria la struttura di spazio normato<sup>1</sup>.

### Proposizione 1.7 (Chiusura per successioni)

Un generico insieme  $C$  è chiuso  $\iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C : x_n \rightarrow x$ , si ha  $x \in C$ .

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- $(\Rightarrow)$  Si assume  $C$  chiuso e si considera una certa successione  $x_n \in C$ , con  $x_n \rightarrow x$ . Se non fosse  $x \in C$ , risulterebbe  $x \in A = \mathcal{C}(C)$  (complementare di  $C$ ), che è aperto per definizione, quindi si trova  $B_r(x) \subset A$  che contiene anche punti della successione  $x_n$  per definizione di convergenza, quindi si avrebbe anche  $x_n \in A$  per qualche  $n > N$ . Questo, però, è assurdo perché si è assunto che la successione fosse interamente contenuta in  $C$ .
- $(\Leftarrow)$  Si assume che  $\forall x_n \in C : x_n \rightarrow x$  valga  $x \in C$ . Si procede per assurdo, assumendo che  $C$  non sia chiuso e si mostra che questo non è possibile; infatti, la successione  $x_n$  che ha valori in  $B_{1/n}(x) \cap C$ , dove  $x \in \partial C$ , è sempre contenuta in  $C$  e converge ad un certo  $x$ , ma  $x \notin C$ , il che è assurdo. Dunque, si deve avere  $C$  chiuso.

□

### Teorema 1.1 (Teorema di Bolzano-Weierstrass)

Ogni sottoinsieme infinito e limitato di  $\mathbb{R}^n$  contiene almeno un punto di accumulazione, o, equivalentemente, ogni successione reale limitata ammette almeno una sotto-successione convergente.

### Definizione 1.8 (Spazio compatto)

Uno spazio topologico  $X$  è detto *compatto* se:

- ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un sotto-ricoprimento finito;
- ogni successione  $x_n$  in  $X$  ammette una sotto-successione  $x_{n_k}$  convergente in  $X$ .

### Teorema 1.2 (Teorema di Heine-Borel)

Ogni insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto  $\iff E$  è chiuso e limitato.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

<sup>1</sup>In realtà, la nozione di convergenza uniforme è ancor più generalizzabile usando spazi uniformi.

- ( $\Rightarrow$ ) Sia  $x_n \in E$  convergente a  $x \in X$ , con  $(X, d)$  spazio metrico generico.  $E$  è compatto, quindi  $\exists x_{n_k}$  convergente a  $y \in E$ , ma, per unicità del limite, si deve avere  $y = x$ , quindi ogni successione di  $E$  converge in  $E$ , il che vuol dire che  $E$  è chiuso.

Se  $E$  non fosse limitato, esisterebbe una successione  $x_n \in E \setminus B_n(x)$ ; per compattezza di  $E$ , esiste una sotto-successione  $x_{n_k} \rightarrow y \in E$ . Per costruzione, però,  $d(x_n, x) \rightarrow +\infty$  e, usando la disuguaglianza triangolare, si trova che  $d(x_{n_k}, x) \leq d(x_{n_k}, y) + d(x, y)$ , ma questo è assurdo perché se  $d(x_n, x) \rightarrow +\infty \Rightarrow d(x_{n_k}, x) \rightarrow +\infty$ , con  $d(x_{n_k}, y) \rightarrow 0$ , il che vuol dire che  $d(x, y) \rightarrow +\infty$ .

- ( $\Leftarrow$ ) Questa implicazione segue dal teorema di Bolzano-Weierstrass perché se  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  limitato, si trova una successione limitata  $x_n$  che ha sotto-successione  $x_{n_k}$  convergente in  $\mathbb{R}^n$ ; in particolare, se  $E$  è chiuso,  $x_{n_k}$  converge in  $E$ , quindi  $E$  è compatto.

□

La dimostrazione appena terminata mostra che è valida una versione più debole del teorema di Heine-Borel, cioè compatto  $\Rightarrow$  chiuso e limitato, ma il viceversa non è vero in generale perché, nell'altra implicazione, si fa uso del teorema di Bolzano-Weierstrass, limitandone la validità a  $\mathbb{R}^n$ .

## 2 CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

### 2.1 Derivate parziali

Una funzione di più variabili  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  può essere derivata mantenendo fissa una variabile e derivando rispetto all'altra. Questo corrisponde al valutare la variazione di  $f$  lungo un asse specifico.

#### Definizione 2.1 (Derivata parziale)

Sia  $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; la sua derivata parziale rispetto a  $x_k$  è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h} \quad (2.1.1)$$

Il vettore che ha per componenti le derivate di  $f$  rispetto a ciascuna delle sue variabili si chiama **gradiente** e si indica con  $\nabla f$ .

### 2.2 Derivate direzionali

È possibile studiare la variazione di  $f$  lungo una particolare direzione individuata dal versore  $\hat{n}$ . Una retta parallela a  $\hat{n}$  e passante per un punto  $x$  si individua con  $x + t\hat{n}$ ; fissando i punti  $x$  e  $\hat{n}$ ,  $g(t) := f(x + t\hat{n})$  è una funzione di una variabile e  $g'(0)$  è la derivata direzionale di  $f$  lungo  $\hat{n}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x) = g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\hat{n}) - f(x)}{h} \quad (2.2.1)$$

Più in generale:

$$g'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_t + h\hat{n}) - f(x_t)}{h} \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_t) \quad (2.2.2)$$

con  $x_t = x + t\hat{n}$ .

**Osservazione 2.1.** Conoscendo  $\nabla f$ , si può calcolare la derivata direzionale di  $f$  come  $\nabla f \cdot \hat{n}$ .

**Esempio 2.1.** Si calcola la derivata direzionale di  $f(x, y) = x^2y - e^{x+y}$  lungo la direzione  $\hat{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

*Svolgimento.* Si ha

$$g(t) = f\left(x + \frac{t}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \exp\left[x + y + t\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x, y) = g'(0) = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y}$$

Alternativamente  $\nabla f = (2xy - e^{x+y}, x^2 - e^{x+y})$ , quindi  $\partial_{\hat{n}} f = \nabla f \cdot \hat{n} = xy - \frac{1}{2}e^{x+y} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{x+y} = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y}$ . ■

### Teorema 2.1

Se  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ha un massimo o minimo relativo in  $x_0$  interno ad  $A$  e se ammette derivata lungo  $\hat{n}$  in  $x_0$ , allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0) = 0 \quad (2.2.3)$$

*Dimostrazione.* Si prende  $g(t) = f(x_0 + t\hat{n})$  che, per costruzione, ha un minimo in  $t = 0$ , quindi  $g'(0) = 0$ , da cui segue la tesi. □

In particolare, se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , tutte le derivate parziali si annullano in quel punto; in questo caso,  $x_0$  è detto **punto stazionario**.

**Osservazione 2.2.** Nel caso a una variabile, i punti di massimo/minimo che cadevano sulla frontiera di un insieme erano, solitamente, un numero finito; qua chiaramente non è più così.

**Esempio 2.2.** Calcolare massimi e minimi di  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y}$  nel cerchio chiuso centrato nell'origine e di raggio 1.

*Svolgimento.* Sul bordo del cerchio  $x^2 + y^2 = 1$ , quindi  $f \equiv 0$ . All'interno:

$$\begin{aligned} f_x &= 2xe^{x+y} + (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} \\ f_y &= 2ye^{x+y} + (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} \end{aligned}$$

che si annullano quando

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

Sostituendo  $x = y$  nella prima equazione, ad esempio, si ottengono due soluzioni, una sola delle quali appartiene al cerchio; questo corrisponderà al punto di minimo della funzione:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = (1 - \sqrt{3})e^{\sqrt{3}-1} < 0$$

In più dimensioni vale un analogo del teorema di Lagrange:

**Teorema 2.2**

Sia  $f(x) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in A$ , con  $I(x_0, r) \subset A$ . Considerando una direzione  $\hat{n}$ , si definisce  $g(s) = f(x_0 + s\hat{n})$  per  $|s| < r$ . Vale l'analogo del teorema di Lagrange:

$$f(x_0 + s\hat{n}) - f(x_0) = g(s) - g(0) = sg'(\tau) = s \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0 + \tau\hat{n}) \quad (2.2.4)$$

**2.3 Derivate successive**

Sia  $f$  una funzione per cui esistono le derivate prime e sono anch'esse derivabili; le derivate seconde potranno essere derivate prima rispetto a  $x_i$  e poi rispetto a  $x_j$  o viceversa. In generale se  $f$  è una funzione di  $m$ , si hanno  $m^n$  derivate di ordine  $n$ . Per le derivate seconde miste<sup>1</sup> vale il seguente.

**Teorema 2.3 (Teorema di Schwarz)**

Sia  $f$  una funzione derivabile in un intervallo  $I$  del punto  $(x, y)$  e siano queste continue nello stesso intervallo; allora  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ .

*Dimostrazione.* Siano  $h, k \in \mathbb{R} : (x + h, y + k) \in I$  e sia

$$A(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$

Prendendo  $p(t) = f(t, y + k) - f(t, y)$ , si ha  $A(h, k) = p(x + h) - p(x)$ ; per Lagrange:

$$A(h, k) = p'(\xi)h = [f_x(\xi, y + k) - f_x(\xi, y)]h, \quad x < \xi < x + h$$

Applicando nuovamente Lagrange, si ha  $A(h, k) = f_{yx}(\xi, \eta)hk$ ,  $y < \eta < y + k$ . Ripetendo il discorso con  $q(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$ , si trova  $A(h, k) = f_{xy}(\sigma, \tau)hk$ , quindi  $f_{yx}(\xi, \eta) = f_{xy}(\sigma, \tau)$ , dove  $x < \sigma < x + h$  e  $y < \tau < y + k$ . Prendendo il limite per  $h, k \rightarrow 0$ , risulta  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  per continuità delle derivate seconde. □

Come per funzioni di una variabile, vale la formula di Taylor.

**Teorema 2.4 (Formula di Taylor)**

Sia  $f(x)$  di classe  $C^2$  in  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $x_0$  punto interno ad  $A$ ; in un intorno di  $x_0$ , allora, si ha:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + R_2(x; x_0) \quad (2.3.1)$$

<sup>1</sup>Chiaramente il risultato vale in generale, ma si affronta per funzione di due variabili nel caso delle derivate seconde miste per semplicità.

con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x; x_0)}{\|x - x_0\|^2} = 0$$

## 2.4 Funzioni differenziabili

Una funzione derivabile, anche in ogni direzione, non è necessariamente continua in più variabili.

**Esempio 2.3.** La funzione  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq 0 \\ 0 & , (x, y) = 0 \end{cases}$  ha derivate in ogni direzione nel punto  $(0, 0)$ , ma non è continua; prendendo  $x_k = (1/k, 1/k^2)$  per  $k \rightarrow \infty$ , si ha  $x_k \rightarrow (0, 0)$ , ma  $f(x_k) = \frac{1/k^4}{2/k^4} \rightarrow \frac{1}{2}$ .

### Definizione 2.2 (Differenziabilità)

Una funzione  $f(x)$  si dice differenziabile in  $x_0$  se è derivabile in  $x_0$  e se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (2.4.1)$$

Questa definizione impone che una funzione sia differenziabile in punto se esiste un piano tangente che la approssima precisamente nel punto stesso.

### Teorema 2.5

Una funzione  $f(x)$  differenziabile in  $x_0$  è continua in  $x_0$  ed è derivabile in ogni direzione.

*Dimostrazione.* Si mostra che è continua:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\| + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Per  $x \rightarrow x_0$  il primo termine di destra va a 0 per assunzione di differenziabilità e l'altro anche perché diventa un prodotto scalare per 0, quindi si verifica  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Data generica direzione  $\hat{v}$  con  $x = x_0 + t\hat{v}$ , usando ancora definizione di differenziabilità:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\hat{v}) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), t\hat{v} \rangle}{t} = 0$$

Visto che  $\langle \nabla f(x_0), t\hat{v} \rangle = t\langle \nabla f(x_0), \hat{v} \rangle$ , si ottiene la tesi.  $\square$

La direzione di massimo incremento di una funzione è quella del gradiente. Per mostrarlo, si parte da  $x_0$ , assumendo che non sia un punto stazionario; si definisce, allora,  $\hat{n} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ , da cui:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \hat{n} \rangle = \|\nabla f(x_0)\|$$



Prendendo altra direzione generica  $\hat{v}$ , si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \hat{v} \rangle \leq \|\nabla f(x_0)\| \|\hat{v}\| = \|\nabla f(x_0)\| \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x_0)$$

Dalla definizione di funzione differenziabile il piano  $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$  è quello che meglio approssima la funzione in  $(x_0, y_0)$ .

Si è concluso che una funzione differenziabile è derivabile in ogni direzione, ma una funzione derivabile non è differenziabile in generale. Vale, però, il seguente.

### **Teorema 2.6 (Teorema del differenziale totale)**

Sia  $f(x)$  derivabile in  $x_0$  e siano le sue derivate continue nello stesso punto; allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

*Dimostrazione.* Si vuole dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x - x_0) - f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Si usa il teorema di Lagrange per riscrivere  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y_0) - f(x_0, y_0) &= f_x(\xi, y_0)(x - x_0), \quad x_0 < \xi < x \\ f(x, y) - f(x, y_0) &= f_y(x, \eta)(y - y_0), \quad y_0 < \eta < y \\ \Rightarrow f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

Il limite scritto sopra si riscrive come:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} & \left[ f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0) \right] \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \\ & + \left[ f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0) \right] \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \end{aligned}$$

Essendo le frazioni  $\leq 1$  e visto che le quantità fra parentesi quadre, questo limite si maggiora con la somma delle parentesi quadre, che tende a 0 per  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .  $\square$

## **2.5 Funzioni composte**

Data una funzione  $x(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si definisce, per una generica direzione  $v$ :

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial v} \right)^\top \quad (2.5.1)$$

Vale il seguente per la derivata della funzione composta.

**Teorema 2.7**

Siano  $E \subset \mathbb{R}^k$ ,  $F \subset \mathbb{R}^n$  e  $x(t) : E \rightarrow F$ ,  $f(x) : F \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni di classe  $C^1$ . Allora la funzione composta  $g(t) = f(x(t)) : E \rightarrow \mathbb{R}$  è di classe  $C^1$  e per ogni direzione  $v$ :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(t) = \left\langle \nabla f(x(t)), \frac{\partial x}{\partial v}(t) \right\rangle \quad (2.5.2)$$

*Dimostrazione.* Si ha  $g(t+ hv) - g(t) = f(x(t+ hv)) - f(x(t)) = f(x(t) + [x(t+ hv) - x(t)]) - f(x(t))$ . Si prende  $s = \|x(t+ hv) - x(t)\|$  e la direzione  $w = \frac{x(t+ hv) - x(t)}{s}$  e si usa il teorema di Lagrange:

$$g(t+ hv) - g(t) = f(x(t) + sw) - f(x(t)) = s \frac{\partial f}{\partial w}(x(t) + \tau w) = s \langle \nabla f(x(t) + \tau w), w \rangle$$

con  $0 < \tau < s$ . Dividendo per  $h$  e prendendo il limite  $h \rightarrow 0$ , per definizione  $s \rightarrow 0$  e, quindi,  $\tau \rightarrow 0$ , mentre  $\frac{x(t+ hv) - x(t)}{h} \rightarrow \frac{\partial x}{\partial v}(t)$  quindi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+ hv) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \nabla f(x(t) + \tau w), \frac{x(t+ hv) - x(t)}{h} \right\rangle = \left\langle \nabla f(x(t)), \frac{\partial x}{\partial v}(t) \right\rangle$$

□

Nel caso particolare  $k = 1$ ,  $x(t)$  è una curva e  $g(t)$  è funzione di una sola variabile con

$$g'(t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(x(t)) x'_h(t) \equiv \left\langle \nabla f(x(t)), x'(t) \right\rangle$$

Spesso si prende  $x(t) = x + tv$ , cioè retta passante per  $x$  lungo direzione  $v$ ; in questo caso  $g'(t) = \nabla f(x + tv) \cdot v$ . Se le derivate seconde sono continue, le derivate prime sono differenziabili e si può scrivere:

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{d}{dt} D_i f(x + tv) = \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n v_j D_{ij} f(x + tv) \quad (2.5.3)$$

Indicando con  $Hf = \nabla f \nabla^\top$  la matrice Hessiana di  $f$ , allora  $\sum_j v_j D_{ij} f(x + tv) \equiv [Hf(x + tv)v]_i$ , cioè è la componente  $i$ -esima del vettore tra parentesi quadre, essendo  $Hf$  una matrice. Allora:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \nabla f(x) \cdot v \\ g''(0) &= \langle Hf(x)v, v \rangle \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

**2.6 Massimi e minimi relativi**

Perché una funzione  $f$  di più variabili abbia un punto di massimo o di minimo in  $x_0$ , è condizione necessaria che per ogni direzione  $v$ , valga  $g'(0) = 0$  e  $g''(0) \leq 0$  o  $g''(0) \geq 0$ ,

cioè:

$$\begin{aligned}\langle Hf(x_0)v, v \rangle &\leq 0 \text{ punto di massimo} \\ \langle Hf(x_0)v, v \rangle &\geq 0 \text{ punto di minimo}\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

Allora vale il seguente.

### Teorema 2.8

Sia  $f(x)$  una funzione con derivate seconde continue; se in  $x_0$ ,  $\nabla f(x_0) = 0$  e la matrice Hessiana è tale che  $Hf(x_0) > 0$  (definita positiva), allora  $x_0$  è di minimo relativo per  $f$ . Se fosse  $Hf(x_0) < 0$ ,  $x_0$  sarebbe di massimo relativo.

Possono verificarsi altri due casi:

- se  $\langle Hf(x_0)v, v \rangle$  assume sia valori positivi che negativi al variare di  $v$ , si ha un **punto di sella**;
- se la matrice Hessiana è semidefinita, ma non definita, non si può concludere niente e bisogna esaminare cosa accade attorno a  $x_0$ .

## 2.7 Convessità

La nozione di convessità in riferimento agli insiemi si svilupperà all'interno di spazi vettoriali in quanto è necessaria una struttura algebrica per combinazioni lineari. Questo discorso, comunque, è generalizzabile ad altri spazi rivedendo la definizione. Inoltre, si parlerà di convessità per funzioni.

### Definizione 2.3 (Segmento)

Dati  $x, y \in V$ , con  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , si indica con  $[x, y] = [y, x]$  il *segmento* che congiunge i due punti, ossia l'insieme:

$$[x, y] = \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$$

### Definizione 2.4 (Insieme convesso)

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  e  $C \subseteq V$ ; si dice che  $C$  è convesso se  $\forall x, y \in C$ ,  $[x, y] \subseteq C$ .

Si osserva che l'intersezione di convessi è ancora convessa perché per  $x, y \in A \cap B$ , con  $A, B$  convessi, si ha  $[x, y] \subseteq A$  e  $[x, y] \subseteq B \Rightarrow [x, y] \subseteq A \cap B$ .

### Definizione 2.5 (Combinazione convessa)

Siano  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ ; si definisce *combinazione convessa* la somma  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , con  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

**Proposizione 2.1**

Un insieme  $C$  è convesso se e soltanto se è chiuso per combinazioni convesse.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ( $\Leftarrow$ ) Se  $C$  è chiuso per combinazioni convesse, significa che ogni combinazione convessa di due punti è contenuta all'interno di  $C$ , per ciascuna coppia di punti in  $C$ . Ma visto che l'insieme delle combinazioni convesse di due punti coincide con un segmento, significa che ogni segmento è contenuto in  $C$ , quindi, per definizione,  $C$  è convesso.
- ( $\Rightarrow$ ) Si procede per induzione su  $n$ . Per  $n = 1$ ,  $n = 2$  la tesi vale per definizione; assumendo che valga per  $n$ , si mostra che vale anche per  $n + 1$ . Si considera, quindi, una combinazione convessa di  $x_1, \dots, x_{n+1}$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_{n+1} x_{n+1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Indicando con  $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , si nota che  $\sum_{i=1}^n \lambda_i / \lambda_0 = 1$ , quindi  $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i$  è una combinazione convessa di  $n$  termini che, per ipotesi induttiva, restituisce un  $y \in C$ . Usando questo e inserendolo nella combinazione convessa di  $n + 1$  termini, si trova che

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda_0 y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

Ora, visto che  $\lambda_0 + \lambda_{n+1} = 1$  perché la combinazione iniziale era convessa e visto che  $y, x_{n+1} \in C$ , si rimane con una combinazione convessa di  $n = 2$  punti, che è convessa.

□

**Definizione 2.6 (Involuppo convesso)**

Sia  $S$  un insieme; il suo involuppo convesso è definito come il più piccolo insieme convesso che contiene  $S$  e si indica con  $\text{co}(S)$ .

L'involuppo convesso di un insieme si ottiene tramite unione di tutte le combinazioni convesse dei punti di  $S$ .

**Definizione 2.7 (Funzione convessa)**

Sia  $\Omega$  un insieme convesso; una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa se  $\forall x, y \in \Omega$  e  $\forall t \in [0, 1]$ , vale

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

La seguente definizione e la seguente proposizione servono a dare un significato geome-

trico al concetto di convessità.

### Definizione 2.8 (Epigrafico)

Data  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , il suo epigrafico è l'insieme definito come:

$$\text{Ep}(f) = \{(x, a) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}$$

Geometricamente parlando, l'epigrafico è la regione dello spazio che sta *sopra* al grafico di  $f$ .

### Proposizione 2.2

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega$  convesso, è convessa se e solo se  $\text{Ep}(f) \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$  è convesso.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- $(\Rightarrow)$  Siano  $(x_0, a_0), (x_1, a_1) \in \text{Ep}(f)$ ; queste sono due coppie di punti tali che  $f(x_0) \leq a_0$  e  $f(x_1) \leq a_1$ . Visto che  $f$  è convessa per assunzione, allora  $\forall t \in [0, 1]$ :

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0) \leq ta_1 + (1-t)a_0$$

Questo significa che ogni punto che congiunge  $(x_0, a_0)$  e  $(x_1, a_1)$  al variare di  $t \in [0, 1]$  sta al di sopra del grafico di  $f$ , pertanto è nel suo epigrafico.

- $(\Leftarrow)$  Siano  $x_0, x_1 \in \Omega$ ; si nota che i punti  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$  appartengono al grafico di  $f$ , quindi anche al suo epigrafico. Visto che, per assunzione, l'epigrafico è convesso, significa che  $\forall t \in [0, 1]$ :

$$(tx_0 + (1-t)x_1, tf(x_0) + (1-t)f(x_1)) \in \text{Ep}(f)$$

Questo implica che

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

per cui  $f$  è convessa.

□

**Osservazione 2.3.** Al contrario della differenziabilità, la convessità è una proprietà unidimensionale, cioè se  $\Omega$  è convesso e si considera una funzione su  $\Omega$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , questa è convessa se e solo se la restrizione di  $f$  a ciascuna retta di  $\Omega$  è convessa.

È possibile caratterizzare la convessità di funzioni in base alle loro derivate; per questo, si hanno i due seguenti teoremi.

**Teorema 2.9**

Se  $f \in C^1(\Omega)$ , si ha che  $f$  è convessa se e solo se  $\forall x_0, x_1 \in \Omega$  vale

$$(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0))(x_1 - x_0) \geq 0$$

*Dimostrazione.* Si considera  $x_t = tx_1 + (1-t)x_0$  e  $\varphi(t) = f(x_t)$ . Da questa definizione,  $f$  è convessa se e solo se  $\varphi(t)$  è convessa  $\forall x_0, x_1$ . Inoltre, la derivata prima di  $\varphi$  è:

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}f(x_t) = \nabla f(x_t) \frac{d}{dt}x_t = \nabla f(x_t)(x_1 - x_0)$$

Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ( $\Rightarrow$ ) Il fatto che  $f$  sia convessa implica che  $\varphi'$  è crescente, per quanto si sa sulle funzioni convesse di una variabile (infatti  $f$  convessa  $\iff \varphi$  convessa); in particolare  $\varphi'(1) - \varphi'(0) \geq 0$ , da cui

$$0 \leq \nabla f(x_1)(x_1 - x_0) - \nabla f(x_0)(x_1 - x_0) = (\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0))(x_1 - x_0)$$

- ( $\Leftarrow$ ) Sia  $t > s$ , con  $t, s \in [0, 1]$  e siano  $x'_0 = x_s$ ,  $x'_1 = x_t$ . Visto che

$$(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0))(x_1 - x_0) \geq 0, \quad \forall x_1, x_0 \in \Omega$$

vale anche, in particolare, per  $x'_0, x'_1$ , quindi:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_t - x_s) = (\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_1 - x_0)(t - s) \\ &\leq (\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_1 - x_0) = \varphi'(t) - \varphi'(s) \end{aligned}$$

dove si è usato che  $1 \geq t - s > 0$ . Per arbitrarietà di  $t$  ed  $s$ , con  $t > s$ , si conclude che  $\varphi'(t)$  è crescente, quindi  $\varphi(t)$  è convessa, quindi  $f$  è convessa.

□

**Teorema 2.10**

Sia  $f \in C^2(\Omega)$ ; allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- (a).  $f$  è convessa;
- (b).  $\forall x \in \Omega$ , la matrice Hessiana in  $x$  è semi-definita positiva;
- (c).  $\forall x_0, x_1 \in \Omega$ ,  $f(x_1) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x_1 - x_0)$ .

*Dimostrazione.* Si usano le stesse considerazioni fatte nel preambolo della dimostrazione del teorema precedente.

Visto che  $f$  è di classe  $C^2$ , significa che  $\varphi''$  è ben definita e continua. Per funzioni di una variabile, si sa che  $f$  è convessa se e solo se  $\varphi''(t) \geq 0$ ,  $\forall t \in [0, 1]$  e  $\forall x_0, x_1 \in \Omega$ .

Si osserva che

$$\begin{aligned}\varphi'' &= \frac{d}{dt}\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\nabla f(x_t)(x_1 - x_0) = \nabla^2 f(x_t)\frac{dx_t}{dt}(x_1 - x_0) \\ &= \nabla^2 f(x_t)(x_1 - x_0)^2 = (x_1 - x_0)^\top H_f(x_t)(x_1 - x_0)\end{aligned}$$

Si divide la dimostrazione nelle varie implicazioni.

- (a  $\iff$  b) Si osserva che,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $x_0, x_1 \in \Omega$ ,  $f$  è convessa se e solo se  $\varphi''(t) \geq 0$  se e solo se  $(x_1 - x_0)^\top H_f(x_t)(x_1 - x_0) \geq 0$  se e solo se  $H_f(x_t)$  è semi-definita positiva se e solo se  $H_f$  è semi-definita positiva su  $\Omega$ . L'ultima è data dal fatto che per  $x \in \Omega$ , per cui  $x = tx + (1 - t)x \Rightarrow x_t \in \Omega$ .
- (b  $\Rightarrow$  c) Si considera l'espansione in serie di Taylor con resto di Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(\xi)(x - x_0)^2$$

con  $\xi \in [x, x_0]$ . Visto che  $H_f$  è semi-definita positiva su  $\Omega$ , l'ultimo addendo è non-negativo, quindi:

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

Per  $x = x_1$ , si ottiene l'implicazione voluta.

- (c  $\Rightarrow$  a) Si rammenta che  $f$  è convessa se e solo se il suo epigrafoico è convesso. Definendo

$$h_{x_0}(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

si nota che

$$\text{Ep}(f) = \bigcap_{x_0 \in \Omega} \text{Ep}(h_{x_0}(x))$$

Infatti, se  $(x_0, a)$  non appartiene all'epigrafoico di  $f$ , l'iperpiano  $h_{x_0}(x)$  ha epigrafoico che lo esclude. Visto che l'intersezione di convessi è convessa e visto che l'epigrafoico di un iperpiano è convesso, allora  $f$  è convessa.

□

Ora si mette in relazione la convessità e la continuità di funzioni, cioè si cerca di capire quando è possibile dire che una funzione convessa è continua.

### Definizione 2.9 (Locale limitatezza)

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega$  aperto, si dice *localmente limitata* se  $\forall x \in \Omega$ ,  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$  e  $f|_{B_\varepsilon(x)}$  è limitata.

**Teorema 2.11**

Se  $\Omega$  è convesso e aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa e localmente limitata, allora  $f$  è localmente lipschitziana.

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità, si assume che  $0 \in \Omega$  e  $f(0) = 0$ . Per la locale limitatezza, esistono  $r, M > 0$  tali che  $\sup_{|x| \leq r} f(x) \leq M$ . Sia  $v \in \overline{B}_r(0)$  e

$$w = \begin{cases} rv/|v| & \text{se } v \neq 0 \\ 0 & \text{se } v = 0 \end{cases}$$

Si nota che per  $\lambda = |v|/r \in [0, 1]$ , si ha  $v = \lambda w + (1 - \lambda)0$ , quindi, visto che  $f$  è convessa, si trova che:

$$f(v) \leq \lambda f(w) + (1 - \lambda)f(0) = \frac{|v|}{r} f(w) \leq \frac{M}{r} |v|$$

Visto che  $0 = \mu v + (1 - \mu)(-w)$ , con  $\mu = r/(|v| + r) \in (0, 1]$ , si ha, nuovamente, che:

$$f(v) \geq -\frac{1 - \mu}{\mu} f(-w) = \frac{\mu - 1}{\mu} f(-w) = -\frac{|v|}{r} f(-w) \geq -\frac{M}{r} |v|$$

In questo modo, si trova, dalle due disuguaglianze, che  $|f(v)| \leq \frac{M}{r} |v|$ , per cui:

$$|f(v_1 - v_2)| \leq \frac{M}{r} |v_1 - v_2|$$

il che vuol dire che  $f$  è localmente lipschitziana. □

**Corollario 2.1**

Sotto le ipotesi del teorema 2.11, il fatto che  $f$  sia localmente lipschitziana implica che  $f$  è continua.

La locale limitatezza è una condizione necessaria perché esistono spazi in cui le mappe lineari non sono continue, ma sono convesse per definizione. Si nota, inoltre, che se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa e  $B = \text{co}(F)$ , con  $F$  finito, si ha

$$\sup_{x \in B} f(x) = \max_{x \in F} f(x)$$

Se la dimensione dello spazio vettoriale in cui è contenuto  $\Omega$  è finita, allora l'ipotesi di locale limitatezza non è più necessaria; infatti, si ha la seguente.

**Proposizione 2.3**

Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un aperto convesso e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa, allora  $f$  è localmente limitata.

*Dimostrazione.* Visto che  $\Omega$  è aperto,  $\forall p \in \Omega, \exists r > 0 : \overline{B}_r(p) \subset \Omega$ . Visto che tutte le norme sono equivalenti su  $\mathbb{R}^n$ , si considerano le palle in norma 1. Sia



$F = \{p, p \pm re_j : 1 \leq j \leq n\}$  l'insieme che contiene il punto  $p$  e tutti i punti che distano da esso  $r$  in ciascuna direzione di  $\mathbb{R}^n$ , positiva e negativa. Si nota che  $\forall x \in \overline{B_r}(p)$ ,  $x \in \text{co}(F)$ , cioè

$$x = \sum_{i=1}^{|F|} \lambda_i \xi_i$$

per  $\xi_i \in F$ ; per convessità di  $f$ :

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{|F|} \lambda_i f(\xi_i) \leq \max_{\xi \in F} f(\xi)$$

quindi  $f$  è localmente limitata. □

### 3 CALCOLO INTEGRALE IN PIÙ VARIABILI

#### 3.1 Integrazione in dimensioni superiori

Per le definizioni di base, si deve definire cos'è un rettangolo.

**Definizione 3.1**

Dati due intervalli  $[a, b]$  e  $[c, d]$ , il rettangolo che identificano è definito come  $R = [a, b] \times [c, d]$ , con  $a \leq x < b$  e  $c \leq y < d$ .

Si suddividono due intervalli in intervalli più piccoli, cioè  $[a, b]$  si suddivide in  $n$  sotto-intervalli  $I_h = [x_{h-1}, x_h]$ , con  $x_0 = a, \dots, x_n = b$  e  $[c, d]$  in  $m$  sotto-intervalli  $J_k = [y_{k-1}, y_k]$ . Allora il rettangolo sarà suddiviso in  $n \times m$  sotto-rettangoli  $R_{hk} = I_h \times J_k$ .

Una funzione semplice  $\varphi(x)$  è una funzione che assume un valore costante su ogni sotto-rettangolo e che vale 0 fuori da  $R$ . Indicando con  $\lambda_{hk}$  il valore costante che assume in  $R_{hk}$ :

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} \chi_{R_{hk}}(x) \quad (3.1.1)$$

con  $\chi_D$  funzione caratteristica del dominio  $D$ . L'integrale di funzioni simili è dato da:

$$\int \varphi(x) dx dy = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} m(R_{hk}) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} m(I_h) m(J_k) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} (x_h - x_{h-1}) (y_k - y_{k-1}) \quad (3.1.2)$$

È necessario dare anche la definizione di supporto di una funzione:

**Definizione 3.2**

Il supporto di una funzione  $f$  è la chiusura dell'insieme in cui  $f \neq 0$ , cioè:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \quad (3.1.3)$$

Infine, si indica con  $\mathcal{S}^+(D)$  la classe delle funzioni semplici  $\varphi$  che maggiorano  $f$  in  $D$  e  $\mathcal{S}^-(D)$  la classe delle funzioni semplici  $\psi$  che minorano  $f$  in  $D$ ; da questo, si ha la seguente definizione di integrale di Riemann.

**Definizione 3.3 (Integrazione di funzioni a supporto compatto)**

Sia  $f$  una funzione a supporto compatto, con  $\text{supp}(f) \subset K$ ;  $f$  è integrabile secondo Riemann se:

$$\sup_{\psi \in \mathcal{S}^-(K)} \int \psi dx dy = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}^+(K)} \int \varphi dx dy \quad (3.1.4)$$

dove

$$\begin{aligned}\int_* f(x) dx &= \inf_{\varphi \in \mathcal{S}^+(K)} \int \varphi dx dy \quad \text{integrale inferiore} \\ \int^* f(x) dx &= \sup_{\psi \in \mathcal{S}^-(K)} \int \psi dx dy \quad \text{integrale superiore}\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

La condizione di integrabilità si può esprimere come:

$$\int_* f(x) dx = \int^* f(x) dx \tag{3.1.6}$$

**Osservazione 3.1.** Anche per più variabili, è condizione sufficiente e necessaria perché  $f$  a supporto compatto sia integrabile che  $\forall \varepsilon > 0$ , esistono funzioni semplici  $\varphi, \psi$  tali che:

$$\int \varphi dx dy - \int \psi dx dy < \varepsilon \tag{3.1.7}$$

### 3.2 Misura di insiemi

L'integrabilità di una funzione su un certo insieme  $E$  è legata alla misura dell'insieme stesso.

#### Definizione 3.4 (Misurabilità di insiemi)

Un insieme  $E$  è *misurabile* (secondo Peano-Jordan) se la sua funzione caratteristica  $\varphi_E$  è integrabile. In questo caso, la misura è:

$$m(E) = \int \varphi_E d\mathbf{x}$$

Se  $\varphi_E$  è integrabile, allora  $\forall \varepsilon > 0$ , si avrebbero  $\psi, \varphi$  funzioni semplici con  $\psi \leq \varphi_E \leq \varphi$  tali che:

$$\int \varphi d\mathbf{x} - \int \psi d\mathbf{x} < \varepsilon$$

L'idea è suddividere il piano  $x, y$  in rettangoli  $R_{hk}$  dove  $\varphi = 1$  nei rettangoli  $R_{hk}$  che hanno punti in comune con  $E$  ed è nulla negli altri, mentre si prende  $\psi = 1$  nei rettangoli contenuti in  $E$  e pari a 0 negli altri. Così facendo, l'integrale di  $\varphi$  è la somma delle misure dei rettangoli  $R_{hk}$  che hanno punti in comune con  $E$ , mentre quello di  $\psi$  è la somma delle misure degli  $R_{hk}$  contenuti in  $E$ . Il risultato della differenza è la somma delle misure dei rettangoli che hanno punti in comune con  $E$ , ma che non vi sono contenuti, quindi sarà la somma delle misure dei rettangoli che hanno punti in comune con la frontiera di  $E$ .

Si definisce **plurirettangolo** l'unione  $P$  di un numero finito di rettangoli senza punti comuni, la cui misura coincide con la somma delle misure dei rettangoli che lo compongono; si ha la seguente.

**Proposizione 3.1**

Un insieme  $E$  è misurabile  $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists$  un plurirettangolo  $P$  contenuto in  $E$  e un plurirettangolo  $Q$  che contiene  $E$  tali che  $m(Q) - m(P) < \varepsilon$ .

Usando Prop 3.1, se  $P, Q$  plurirettangoli t.c.  $P \subset E \subset Q$ , con  $m(Q - P) = m(Q) - m(P)$ , si ha che:

*Un insieme  $E$  è misurabile  $\iff \forall \varepsilon > 0$  esiste  $Z$  plurirettangolo che contiene  $\partial E$ , con  $m(Z) < \varepsilon$ .*

Quindi:

*Un insieme  $E$  è misurabile (secondo Peano-Jordan)  $\iff$  la sua frontiera  $\partial E$  ha misura nulla.*

**Proposizione 3.2**

Se due insiemi  $A, B$  sono misurabili, allora sono misurabili anche  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e  $A \setminus B$ .

*Dimostrazione.*  $A, B$  misurabili  $\implies \partial A, \partial B$  sono contenute in plurirettangoli  $Z_A, Z_B$  che hanno misura minore di  $\varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , quindi  $m(Z_A \cup Z_B) < 2\varepsilon$ . Questo vuol dire che  $m(\partial A \cup \partial B) = 0$ , quindi le frontiere di  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e  $A \setminus B$  hanno misura nulla.  $\square$

**3.2.1 Insiemi generati da funzioni**

Siano  $g(x) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  e  $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x)\}$ . Se  $g$  è integrabile, l'insieme  $G$  è misurabile, con

$$m(G) = \int_a^b g(x) dx \quad (3.2.1)$$

*Dimostrazione.* Essendo  $g$  integrabile,  $\forall \varepsilon > 0$ , esistono  $\varphi, \psi$  con  $\int (\varphi - \psi) dx < \varepsilon$ . Considerando i plurirettangoli

$$\Phi := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(x)\}, \quad \Psi := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \psi(x)\}$$

per i quali

$$m(\Phi) = \int \varphi dx, \quad m(\Psi) = \int \psi dx$$

si ha  $\Psi \subset G \subset \Phi$  con  $m(\Phi) - m(\Psi) < \varepsilon \implies G$  misurabile. Inoltre, per quanto detto, sia  $m(G)$  che  $\int g dx$  sono contenuti tra  $m(\Phi)$  e  $m(\Psi)$ , cioè:

$$\left| m(G) - \int_a^b g(x) dx \right| < m(\Phi) - m(\Psi) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \implies m(G) = \int_a^b g(x) dx$$

$\square$

Siano, ora,  $g, h$  due funzioni integrabili in  $[a, b]$  con  $0 \leq g(x) \leq h(x)$ . L'insieme  $E := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$  è misurabile per quanto detto sopra, essendo  $E$  dato dalla differenza degli insiemi  $H, G$  definiti come sopra e misurabili a loro volta. Inoltre, sempre applicando quanto detto sopra alla differenza di  $H, G$ :

$$m(E) = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx$$

**Osservazione 3.2.** Questo è valido anche per  $g, h$  non-positive; è, infatti, sufficiente applicare il ragionamento alle funzioni  $h + c, g + c$ , con  $c$  preso in modo che siano entrambe positive e osservando che  $E_c$  corrisponde a  $E$  traslato di  $c$  verso l'alto.

### 3.3 Integrabilità di funzioni continue

#### Teorema 3.1

Sia  $f(\mathbf{x})$  continua in rettangolo chiuso  $R$  e sia  $E$  un insieme misurabile con  $E \subset R$ . Allora  $f$  è integrabile in  $E$ .

*Dimostrazione.* Si mostra che  $f\varphi_E$  è integrabile. Per Weierstrass,  $f$  è uniformemente continua in  $R$ , quindi  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  t.c. la divisione di  $R$  in rettangoli  $R_{hk}$  di diametro minore di  $\delta(\varepsilon)$ , risulta:

$$M_{hk} - m_{hk} = \sup_{R_{hk}} f - \inf_{R_{hk}} f < \varepsilon$$

Inoltre,  $f$  ha massimo e minimo in  $R$ , indicati, rispettivamente, con  $M$  e  $m$ . Allo stesso tempo,  $E$  è misurabile, quindi  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  suddivisione di  $R$  in  $R_{hk}$ , assunta di diametro inferiore di  $\delta(\varepsilon)$ , tale che la misura dei rettangoli che hanno almeno un punto in comune con  $\partial E$  è minore di  $\varepsilon$ .

Con questa suddivisione, si classificano con  $\mathcal{I}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$  rispettivamente i rettangoli interni, esterni e a contatto con la frontiera di  $E$ . Per la misurabilità di  $E$ :

$$\sum_{R_{jk} \in \mathcal{F}} m(R_{hk}) < \varepsilon$$

Si definiscono:

- funzione maggiorante  $\varphi$  che è nulla nei rettangoli esterni,  $\phi = \max \{M, 0\}$  in quelli di frontiera e  $\phi = M_{hk}$  in quelli interni.
- funzione minorante  $\psi$  che è nulla in quelli esterni,  $\psi = \min \{m, 0\}$  in quelli di frontiera e  $\psi = m_{hk}$  in quelli interni.

Quindi  $\psi \leq f \varphi_E \leq \varphi$  e

$$\begin{aligned} \int (\varphi - \psi) \, dxdy &= (\max \{M, 0\} - \min \{m, 0\}) \sum_{R_{hk} \in \mathcal{F}} m(R_{hk}) + \sum_{R_{hk} \in \mathcal{I}} (M_{hk} - m_{hk}) m(R_{hk}) \\ &< (|M| + |m|) \varepsilon + \varepsilon \sum_{R_{hk} \in \mathcal{I}} m(R_{hk}) < \varepsilon (|M| + |m| + m(R)) \end{aligned}$$

Allora  $f$  è integrabile su  $E$ .  $\square$

Più in generale, vale il seguente.

### Teorema 3.2

Sia  $f$  limitata in un rettangolo  $R$ . Questa è integrabile in  $E \subset R$  se l'insieme  $D$  dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla.

*Dimostrazione.* Si ripete la dimostrazione precedente con  $D$  al posto di  $\partial E$ .  $\square$

## 3.4 Integrali doppi

Si analizza prima caso per funzioni semplici. Si considera suddivisione del rettangolo  $R = I \times J$  in rettangoli  $R_{hk} = I_h \times J_k$ . Sia  $\varphi = \sum \lambda_{hk} \varphi_{R_{hk}}$  funzione semplice; fissando  $x \in I_h$ , si considera  $\varphi$  come funzione della sola  $y$  e:

$$\int \phi(x, y) \, dy = \sum_k \lambda_{hk} m(J_k)$$

L'integrale a primo membro è costante per  $x \in I_h$ , pertanto è a sua volta una funzione semplice; integrandolo rispetto a  $x$ :

$$\int dx \int \phi(x, y) \, dy = \sum_h m(I_h) \sum_k \lambda_{hk} m(J_k) = \sum_{h,k} \lambda_{hk} m(I_h) m(J_k) = \sum_{h,k} \lambda_{hk} m(R_{hk}) = \int \varphi \, dxdy$$

Il discorso è analogo integrando prima rispetto a  $x$  e poi rispetto a  $y$ . Si generalizza con il seguente.

### Teorema 3.3 (Teorema di Fubini)

Sia  $f(x, y)$  integrabile in  $R = [a, b] \times [c, d]$  e sia questa integrabile  $\forall x \in [a, b]$  rispetto alla variabile  $y \in [c, d]$ . Allora la funzione  $F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$  è integrabile in  $[a, b]$  e

$$\int_R f(x, y) \, dxdy = \int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy$$

*Dimostrazione.* Visto che  $f$  è integrabile in  $R$ , allora esistono  $\psi, \varphi$  funzioni semplici

t.c.

$$\psi \leq f\varphi_R \leq \varphi, \text{ con } \int (\varphi - \psi) \, dxdy < \varepsilon$$

Integrando le disuguaglianze rispetto alla  $y$ , si ottiene:

$$\Psi(x) = \int_c^d \psi \, dy \leq F(x) = \int_c^d f \, dy \leq \int_c^d \varphi \, dy = \Phi(x) \quad (3.4.1)$$

Le funzioni  $\Phi, \Psi$  sono ancora funzioni semplici, rispettivamente maggiorante e minorante di  $F$ , per le quali vale

$$\int_a^b (\Phi - \Psi) \, dx = \int (\varphi - \psi) \, dxdy < \varepsilon$$

Quindi  $F(x)$  è integrabile in  $[a, b]$ . Ora, integrando in  $[a, b]$  l'eq. 3.4.1, si ha:

$$\int_R \psi \, dxdy \leq \int_a^b F(x) \, dx \leq \int_R \varphi(x, y) \, dxdy$$

Allo stesso tempo, integrando la disuguaglianza iniziale su  $R$ :

$$\int_R \psi \, dxdy \leq \int_R f \, dxdy \leq \int_R \varphi \, dxdy$$

Unendo le due disuguaglianze:

$$\left| \int_R f(x, y) \, dxdy - \int_a^b F(x) \, dx \right| \leq \int_R (\varphi - \psi) \, dxdy < \varepsilon$$

Valendo  $\forall \varepsilon > 0$ , si ottiene la tesi. □

Questo teorema si applica anche a integrali su *insiemi normali rispetto all'asse  $y$* <sup>1</sup>

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

con  $g, h$  continue in  $[a, b]$ . Per quanto visto,  $E$  è misurabile e, se  $f$  è continua su  $E$ , è anche integrabile in  $E$  stesso. In generale, la funzione  $f^* = f\varphi_E$  è integrabile in ogni rettangolo  $R = [a, b] \times [c, d] \supset E$ .

Fissata  $x \in [a, b]$ , la funzione  $f^*(x, y)$  vale  $f(x, y)$  se  $g(x) \leq y \leq h(x)$  e 0 altrimenti, quindi è continua tranne, al più, nei punti  $g(x), h(x)$ . Allora  $f^*$  è integrabile e si può applicare Fubini:

$$\int_R f^*(x, y) \, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y) \, dy \implies \int_E f \, dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f \, dy$$

---

<sup>1</sup>Insiemi, la cui intersezione con la retta verticale  $x = \text{cost.}$  è un segmento o un punto.

**Esempio 3.1.** Calcolare

$$\int_E x^2 y \, dx dy, \quad E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

con  $E$  semicirconferenza di raggio 1 e centro l'origine.

*Svolgimento.* L'insieme è normale rispetto all'asse  $y$  e, per Fubini:

$$\begin{aligned} \int_E x^2 y \, dx dy &= \int_{-1}^{+1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [x^2 y^2]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x^2 (1-x^2) \, dx = \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

■

### 3.5 Integrali tripli

Il teorema di Fubini si applica anche nel caso di tre o più variabili: se  $f(x, y, z)$  è integrabile nel parallelepipedo  $P = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$  e,  $\forall (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$ , è integrabile rispetto a  $z$ , allora:

$$\int_P f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_R dx dy \int_r^s f(x, y, z) \, dz$$

In particolare, se  $f$  è continua in  $E$  insieme normale rispetto a  $z$ , cioè della forma  $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$ , si ha:

$$\int_E f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_R dx dy \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) \, dz \quad (3.5.1)$$

Ovviamente il ragionamento si può poi applicare quando si dovrà calcolare l'integrale doppio.

**Esempio 3.2.** Per  $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 2\}$ , calcolare

$$\int_E (x + y - z) \, dx dy dz$$

*Svolgimento.* L'insieme è normale rispetto a  $z$ , quindi:

$$\int_E (x + y - z) \, dx dy dz = \int_T dx dy \int_0^{2-x-y} (x + y - z) \, dz$$

con  $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2, 0 < y < 2 - x\}$ . L'ultimo integrale è:

$$\int_0^{2-x-y} (x + y - z) \, dz = \left[ xz + yz - \frac{z^2}{2} \right]_0^{2-x-y} = 4(x + y) - \frac{3}{2}(x + y)^2 - 2$$



L'integrale doppio rimanente si può nuovamente spezzare con Fubini:

$$\begin{aligned}\int_T \left[ 4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2 \right] dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left[ 4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2 \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[ 4xy + 2y^2 - \frac{3}{2} \left( x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) - 2y \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \right) dx = \left[ \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

■

L'eq. 3.5.1 si può usare nel calcolo di volumi degli insiemi normali. Dato

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in F, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

e posto  $f = 1$  in eq. 3.5.1, si ha:

$$m(E) = \int_F [h(x, y) - g(x, y)] dx dy \quad (3.5.2)$$

**Esempio 3.3.** Per  $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ , calcolare il volume dell'insieme

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, x + y \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$$

*Svolgimento.* Usando direttamente eq. 3.5.2, si ha:

$$\begin{aligned}m(E) &= \int_Q (1 + x^2 + y^2 - x - y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 (1 + x^2 + y^2 - x - y) dx \\ &= \int_0^1 \left( 1 + \frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{2} - y \right) dy = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

■

### 3.6 Cambiamento di variabili

Si inizia con il caso di  $f(x, y)$  funzione di due variabili, integrabile e a supporto compatto. Nell'ipotesi che valga il teorema di Fubini:

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int (x, y) dy$$

Si fissa  $x$  nell'ultimo integrale e si cambia variabile con  $y = \varphi(x, v) \Rightarrow dy = \varphi_v(x, v) dv$ , da cui

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int f(x, \varphi(x, v)) |\varphi_v(x, v)| dv$$

Usando il teorema di Fubini due volte, si può scrivere l'ultimo integrale prima come integrale doppio e poi come integrale prima rispetto a  $x$  e poi rispetto a  $v$ :

$$\int f(x, y) \, dx dy = \int f(x, \varphi(x, v)) |\varphi(x, v)| \, dx dv = \int dv \int f(x, \varphi(x, v)) |\varphi_v(x, v)| dx$$

Nell'ultimo integrale, si fissa  $v$  e si cambia variabile con  $x = x(u, v) \Rightarrow dx = x_u(u, v) du$ :

$$\int f(x, y) \, dx dy = \int dv \int f(x(u, v), \varphi(x(u, v), v)) |\varphi_v(x(u, v), v) x_u(u, v)| \, du$$

Infine, si prendono:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = \varphi(x(u, v), v) = y(u, v) \end{cases} \implies \begin{cases} y_u(u, v) = \varphi_x(x(u, v), v) x_u(u, v) \\ y_v(u, v) = \varphi_x(x(u, v), v) x_v(u, v) + \varphi_v(x(u, v), v) \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} \varphi_v(x(u, v), v) x_u(u, v) &= [y_v(u, v) - \varphi_x(x(u, v), v) x_v(u, v)] x_u(u, v) \\ &= y_v(u, v) x_u(u, v) - y_u(u, v) x_v(u, v) \end{aligned}$$

Sostituendo nell'integrale, si ottiene:

$$\int f(x, y) \, dx dy = \int f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| \, du dv \quad (3.6.1)$$

Questa si adatta agli integrali su insieme  $E$ , notando che questo corrisponde a integrare  $f \varphi_E$ :

$$\int_E f(x, y) \, dx dy = \int f(x(u, v), y(u, v)) \varphi_E(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| \, du dv$$

Visto che  $\varphi_E$  vale 1 se  $(x(u, v), y(u, v)) \in E$  e 0 altrimenti, essa è la funzione caratteristica dell'insieme  $F$ , immagine inversa di  $E$  attraverso la trasformazione  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . Quindi:

$$\int_E f(x, y) \, dx dy = \int_F f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| \, du dv \quad (3.6.2)$$

### 3.6.1 Ammissibilità del cambiamento di variabili

Si vuole capire quando è possibile trovare  $\varphi(x, v)$  tale che  $y(u, v) = \varphi(x(u, v), v)$ . Questo è possibile quando  $x = x(u, v)$  si può risolvere rispetto a  $u$ , quindi se esiste  $u = \gamma(x, v)$ . L'equazione che occorre è  $\varphi(x, v) = y(\gamma(x, v), v)$ , infatti  $\gamma(x(u, v), v) = u \Rightarrow \varphi(x(u, v), v) = y(u, v)$ . L'equazione  $x = x(u, v)$  si può risolvere se  $\forall v$ ,  $x(u, v)$ , considerata come funzione della sola  $u$ , è monotona, cioè se  $x_u(u, v) \neq 0$ ,  $\forall u, v$ .

L'altra ipotesi necessaria è  $\varphi_v(x, v) \neq 0$  che, dovendo valere  $x_u(u, v) \neq 0$ , equivale a richiedere  $\varphi_v(x, v)x_u(u, v) \neq 0$ , ossia  $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ .

Complessivamente, il cambio di variabili è lecito se sono verificate

$$\begin{cases} x_u \neq 0 \\ x_u y_v - x_v y_u \neq 0 \end{cases} \quad (3.6.3)$$

Visto che lo stesso risultato si sarebbe ottenuto iniziando col cambio di variabili  $y = \psi(x, u)$ , dovendo comunque valere  $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ , si può sostituire  $x_u \neq 0$  con  $x_v \neq 0$ . Per questo, è sufficiente che  $x_u, x_v$  non si annullino contemporaneamente<sup>1</sup> (altrimenti anche  $x_u y_v - x_v y_u = 0$ ).

Siano, ora,  $x_u, x_v$  continue in rettangolo chiuso  $R \supset F$ . Si può dividere  $R$  in numero finito di rettangoli  $R_1, \dots, R_N$ , in ognuno dei quali o  $x_u$ , o  $x_v$  è diversa da 0. Allora si riscrive la formula del cambio di variabili in  $F_k = F \cap R_k$ :

$$\int_{E_k} f(x, y) \, dx dy = \int_{F_k} f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| \, du dv$$

con  $E_k$  immagine di  $F_k$  tramite la trasformazione  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ . Sommando su  $k$ :

$$\sum_{k=1}^N \int_{E_k} f(x, y) \, dx dy = \int_F f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| \, du dv$$

Se gli  $E_k$  sono tutti disgiunti, ossia se il cambio di variabili è invertibile, la somma dell'integrale al primo membro diventa un integrale su  $E$  e si riottiene l'eq. 3.6.2. Questa, quindi, risulta valida solo nell'ipotesi che l'applicazione  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  sia iniettiva e che  $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$  sempre. Allora vale il seguente.

#### **Teorema 3.4**

Sia  $f(x, y)$  integrabile in  $E \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  un'applicazione biunivoca di classe  $C^1$ , con inversa che va da un rettangolo  $R \subset \mathbb{R}^2$  a un insieme contenente  $E$  e tale che  $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$  in  $R$ . Allora, indicando con  $F$  l'immagine inversa di  $E$ , l'equazione 3.6.2 è valida.

### **3.6.2 Matrice Jacobiana**

Il ragionamento fatto per il caso di due variabili si generalizza a più variabili: se in  $\int_E f(\mathbf{x}) \, dx_1 \dots dx_n$  si esegue la sostituzione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , la formula di cambio variabili diventa:

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, dx_1 \dots dx_n = \int_F f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) |\det J(\mathbf{u})| \, du_1 \dots du_n \quad (3.6.4)$$

---

<sup>1</sup>Cioè negli stessi punti.

dove  $\det J(\mathbf{u})$  è il determinante della *matrice Jacobiana* della trasformazione, definita come:

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(\mathbf{u})}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_2(\mathbf{u})}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n(\mathbf{u})}{\partial u_n} \end{pmatrix} \quad (3.6.5)$$

### 3.7 Integrali impropri

Si distinguono i casi in cui il dominio di integrazione non è limitato e quelli in cui la funzione non è limitata nelle vicinanze di uno o più punti.

#### 3.7.1 Integrali in domini non limitati

Si analizza prima il caso particolare di  $f$  positiva. L'idea è di tagliare il dominio di integrazione con una sfera di raggio  $r$ , integrare sull'insieme risultante e far tendere, poi,  $r \rightarrow +\infty$ . Si ha la seguente definizione.

##### **Definizione 3.5**

Sia  $f(\mathbf{x})$  una funzione definita in  $E \subset \mathbb{R}^n$ , con  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\forall x \in E$ . Si assume che per ogni intorno dell'origine (al variare di  $r$ )  $I_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\}$ ,  $f$  sia integrabile in  $E \cap I_r$ .

Si dice che  $f$  è integrabile in senso improprio su  $E$  se

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < +\infty$$

In tal caso, varrà:

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (3.7.1)$$

Avendo assunto  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ , la funzione  $F(r) = \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$  è crescente, quindi il limite esiste sempre ed è uguale all'estremo superiore:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sup_{r > 0} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

**Osservazione 3.3.** Se si avesse  $E$  limitato, da un certo  $r_0$  in poi, si avrà  $E \subset I_r \Rightarrow E \cap I_r = E$ , quindi l'integrale per  $r \rightarrow +\infty$  coinciderebbe con l'usuale integrale su  $E$ .

Eliminando la condizione  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ , l'esistenza del limite non sarebbe più garantita, ma si potrebbe aggiungere alla condizione di integrabilità, oltre alla richiesta di limite finito, l'esistenza stessa del limite.

Il problema risiede, però, nel fatto che se invece di tagliare il dominio di integrazione con delle sfere, si usassero dei cubi (per esempio), il limite potrebbe divergere con le sfere e convergere con i cubi, o convergere con entrambe, ma dare un risultato diverso. Questo non accade se  $f$  è positiva.

*Dimostrazione.* Si considerano per esempio le sfere  $I_r$  e i cubi  $Q_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \max\{|x_1|, \dots, |x_n| < t\}\}$ . Ogni sfera è contenuta in un cubo (infatti si ha proprio  $I_r \subset Q_r$ ) e, viceversa, ogni cubo  $Q_h$  è contenuto in una sfera  $I_s$ , con  $s = \sqrt{n}h$ .

Visto che l'integrando è positivo:

$$\int_{I_r} f \, d\mathbf{x} \leq \int_{Q_t} f \, d\mathbf{x} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{Q_t} f \, d\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \int_{Q_h} f \, d\mathbf{x} \leq \int_{I_s} f \, d\mathbf{x} \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{I_s} f \, d\mathbf{x}$$

Mandando  $r \rightarrow +\infty$  nella prima e  $h \rightarrow +\infty$  nella seconda:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{I_r} f \, d\mathbf{x} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{Q_t} f \, d\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{Q_h} f \, d\mathbf{x} \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{I_s} f \, d\mathbf{x}$$

quindi i due limiti coincidono. □

### 3.7.2 Integrali di funzioni non limitate

Similmente al caso precedente, per  $f$  non limitata attorno all'origine (per esempio), si taglia il dominio di integrazione  $E$  con una sfera  $I_r$  e si calcola l'integrale su  $E \setminus I_r$ , per poi far tendere  $r \rightarrow 0^+$ .

#### **Definizione 3.6**

Sia  $f(\mathbf{x})$  definita su  $E \subset \mathbb{R}^n$ , con  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in E$ . Sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione per  $E$  e che per ogni intorno  $I_r$  di  $\mathbf{x}_0$ , la funzione  $f$  sia integrabile in  $E \setminus I_r$ . Allora si dice che  $f$  è integrabile in senso improprio su  $E$  se il limite

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{E \setminus I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sup_{r > 0} \int_{E \setminus I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

è finito. In questo caso:

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{E \setminus I_r} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \tag{3.7.2}$$

Se  $f(\mathbf{x})$  fosse di segno variabile, si possono considerare le due funzioni non negative

$$\begin{aligned} f^+(\mathbf{x}) &= \max\{f(\mathbf{x}), 0\} \\ f^-(\mathbf{x}) &= \max\{-f(\mathbf{x}), 0\} \end{aligned} \implies f^+ - f^- = f$$

Allora si dirà che  $f$  è integrabile in senso improprio su  $E$  se ambedue le funzioni  $f^+$ ,  $f^-$  lo sono e

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_E f^+(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_E f^-(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (3.7.3)$$

**Esempio 3.4.** Dato  $E$  l'insieme esterno al cerchio di raggio 1, calcolare

$$\int_E \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

*Svolgimento.* Se  $r > 1$ , l'insieme  $E \cap I_r$  è la corona circolare  $C_r$  di raggi 1 e  $r$ . In coordinate polari, per  $\alpha \neq 1$ :

$$\int_{C_r} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \int_1^r \frac{\rho \, d\rho}{\rho^{2\alpha}} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_1^r \rho^{1-2\alpha} \, d\rho = 2\pi \left. \frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right|_1^r = \frac{\pi}{1-\alpha} (r^{2-2\alpha} - 1)$$

Se  $\alpha = 1$ , ripetendo un calcolo analogo, si ottiene  $2\pi \log r$ . Mandando  $r \rightarrow +\infty$ , quest'ultimo diverge a  $+\infty$ , come anche quello precedente per  $\alpha < 1$ . Se, invece,  $\alpha > 1$ :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha - 1}$$

■

## 4 CURVE E SUPERFICI

### 4.1 Curve in $\mathbb{R}^n$

#### Definizione 4.1 (Curva e parametrizzazione)

Una curva è un'applicazione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . L'equazione parametrica della curva è un'equazione della forma  $\mathbf{x} = \gamma(t)$ .

**Esempio 4.1.** L'equazione  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  è l'equazione parametrica in  $\mathbb{R}^2$  della circonferenza di raggio 1 e centro l'origine.

Si vede  $t$  come variabile temporale, per cui  $\gamma(t)$  è la posizione al tempo  $t$  di un punto mobile nello spazio  $\mathbb{R}^n$ . Si fissano due istanti  $t_0, t$ ; nel tempo  $t - t_0$  che intercorre fra i due istanti, la velocità media (vettoriale) del punto è data da  $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$ . Facendo tendere  $t \rightarrow t_0$ , se le componenti della curva  $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$  sono derivabili in  $t_0$ , si ottiene la velocità istantanea del punto in  $t_0$ :

$$\mathbf{v}(t_0) \equiv \gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

Se  $\gamma'(t_0) \neq 0$ , la retta tangente alla curva nel punto  $\gamma(t_0)$  è  $\mathbf{x} = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$ , infatti la relazione

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - \mathbf{v}(t - t_0)}{t - t_0} = 0 \iff \mathbf{v} = \gamma'(t_0) \neq 0$$

Quindi, perché esista la retta tangente a  $\gamma$ , è necessario che la derivata esista e sia anche diversa da 0, altrimenti la curva non avrebbe una direzione ben definita in tale punto. Da qui la seguente definizione.

#### Definizione 4.2 (Regolarità di una curva)

Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *regolare* se ha derivata continua, che non si annulla in nessun punto di  $(a, b)$ .

La curva  $\gamma$  si dice *regolare a tratti* se è continua e si può dividere l'intervallo  $[a, b]$  in un numero finito di intervalli, in ognuno dei quali  $\gamma$  è regolare.

**Esempio 4.2.** Sia  $f(x) \in C^1([a, b])$ ; la curva piana di equazioni  $x(t) = t$ ,  $y(t) = f(t)$  è regolare perché il vettore velocità  $(1, f'(t))$  ha prima componente sempre pari a 1. Il suo sostegno coincide con il grafico della funzione  $f$ .

Supponendo che la curva sia di classe  $C^1$  senza assumere che  $\gamma'(t)$  sia diversa da zero, il suo sostegno può avere dei punti angolosi. Ad esempio, nel caso di

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

si ha  $\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$ , che si annulla per  $t = 0$ . Eliminando  $t$  dalle precedenti equazioni, si verifica che il sostegno della curva ha, effettivamente, una cuspidine nell'origine; infatti da  $t = \sqrt[3]{x}$ , si ottiene  $y = x^{2/3}$ , che ha una cuspidine nell'origine.

**Osservazione 4.1.** Un altro modo per convincersi della necessità di richiedere  $\gamma' \neq 0$  è dovuto al fatto che se un punto si muove con velocità non-nulla, non può cambiare direzione della velocità senza avere una discontinuità nella velocità stessa; se, invece, ad un certo istante avesse velocità nulla, potrebbe riprendere il moto in direzione generica senza discontinuità.

Si considera una curva piana  $(x(t), y(t))$ ; l'equazione della retta ad essa tangente nel punto  $(x(t_0), y(t_0))$  è, quindi:

$$\begin{aligned}x &= x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\y &= y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)\end{aligned}$$

Se  $y'(t_0) \neq 0$ <sup>1</sup>, si ricava

$$t - t_0 = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

che sostituito nella prima, permette di concludere che

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) = x'(t_0)(y - y(t_0)) \quad (4.1.1)$$

**Esempio 4.3.** Calcolare la retta tangente alla curva  $\gamma$  di equazioni<sup>a</sup>

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

in  $P = (\pi/2 - 1, 1)$ .

*Svolgimento.* Intanto si deve verificare che il punto  $P$  si trovi sulla curva, cioè che corrisponda a qualche  $t_0$ . Sia  $y(t_0) = 1 - \cos t_0 \stackrel{!}{=} 1 \iff t_0 = \pi/2 + k\pi$ . Da questa condizione, si ottiene

$$x(t_0) = t_0 - \sin t_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi - 1 \stackrel{!}{=} \frac{\pi}{2} - 1 \iff k = 0$$

Allora il punto si trova sulla curva in corrispondenza di  $t_0 = \pi/2$ . Per finire, si ha  $x'(t) = 1 - \cos t$  e  $y'(t) = \sin t$ , quindi  $x'(t_0) = 1$  e  $y'(t_0) = 1$ . La retta tangente, allora, è:

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 2$$

■

<sup>1</sup> Altrimenti, si ricava  $t - t_0$  dalla prima perché deve essere  $x'(t_0) \neq 0$  altrimenti la curva non sarebbe regolare.



<sup>a</sup>Questa curva è detta cicloide ed è quella descritta da un punto su una circonferenza di raggio 1 che rotola su una retta.

### Definizione 4.3 (Curve equivalenti)

Due curve regolari  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dicono equivalenti se esiste una funzione  $p : [a, b] \rightarrow [c, d]$ , di classe  $C^1$ , suriettiva e sempre diversa da 0, tale che  $\varphi(t) = \gamma(p(t))$ .

Due curve equivalenti hanno, evidentemente, stesso sostegno. Inoltre, se  $p' > 0$ , allora  $p(t)$  è crescente e, quindi,  $p(c) = a$ ,  $p(d) = b$ ; in questo caso, le curve hanno stesso verso, mentre se fosse  $p' < 0$ , avrebbero verso opposto con estremi scambiati, cioè  $p(c) = b$ ,  $p(d) = a$ .

### Definizione 4.4 (Versore tangente)

Il versore tangente ad una curva regolare  $\varphi$  è definito come

$$\tau_\varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

Questo ha stesso verso e direzione della velocità della curva e ha lunghezza unitaria.

### Teorema 4.1

Se due curve  $\varphi, \gamma$  sono equivalenti e hanno lo stesso verso, allora i loro versori tangenti coincidono.

*Dimostrazione.* Si abbia, allora,  $\varphi'(t) = \gamma'(p(t))p'(t)$  e  $\|\varphi'(t)\| = \|\gamma'(p(t))\|p'(t)$ , visto che, per assunzione, le curve hanno stesso verso (ossia  $p' > 0$ ).

La tesi è dimostrata per calcolo diretto:

$$\tau_\varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{\gamma'(p(t))p'(t)}{\|\gamma'(p(t))\|p'(t)} = \frac{\gamma'(p(t))}{\|\gamma'(p(t))\|} \equiv \tau_\gamma(p(t))$$

□

## 4.2 Lunghezza di una curva

### Definizione 4.5 (Lunghezza di una curva)

Sia  $\gamma(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  una curva di classe  $C^1$ . La sua lunghezza è data da:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Si nota che

$$\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \gamma'(t) dt \equiv \gamma(b) - \gamma(a)$$

non coincide sempre con la lunghezza della curva perché questo rappresenta lo spostamento: se la curva avesse estremi coincidenti, questo integrale restituirebbe 0. Quindi si ha il seguente.

**Teorema 4.2**

La lunghezza di una curva è sempre maggiore o uguale della norma dello spostamento, cioè:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \geq \left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\| \equiv \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$$

*Dimostrazione.* Se lo spostamento è nullo, questo è automaticamente verificato. Nel caso di  $\Delta x \neq 0$ , allora, si ha, per generico vettore  $\mathbf{u}$ :

$$\int_a^b \gamma'(t) dt \cdot \mathbf{u} = \int_a^b \gamma'(t) \cdot \mathbf{u} dt \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \|\mathbf{u}\| dt = \|\mathbf{u}\| L$$

con  $\cdot$  prodotto scalare. Nel caso particolare di  $\mathbf{u} = \int_a^b \gamma'(t) dt$ , si ha:

$$\left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\|^2 \leq \left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\| L$$

da cui segue la tesi. □

Sia  $\gamma$  il segmento che unisce due punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ; questo ha equazione parametrica  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Allora  $\gamma'(t) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , pertanto:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$$

Allora la lunghezza di un segmento che unisce due punti è uguale alla distanza tra i punti stessi.

**Esempio 4.4.** Si considera nuovamente la curva di equazioni

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Calcolare la lunghezza di tale curva per  $0 \leq t \leq a$ , con  $a > 0$ .

*Svolgimento.* Per calcolo diretto, si ha:

$$L = \int_0^a \sqrt{9t^4 + 4t^2} dt = \int_0^a t\sqrt{9t^2 + 4} dt$$

Per  $u = t^2$ , si ottiene:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \sqrt{9u+4} \, du = \frac{1}{27} (9u+4)^{3/2} \Big|_0^{a^2} = \frac{1}{27} \left[ (9a^2+4)^{3/2} - 8 \right]$$

■

Sia data la curva in coordinate polari

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

corrispondente alle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \rho(t) \cos \varphi(t) \\ y = \rho(t) \sin \varphi(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

Allora

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t) \cos \varphi(t) - \rho(t) \varphi'(t) \sin \varphi(t) \\ y'(t) = \rho'(t) \sin \varphi(t) + \rho(t) \varphi'(t) \cos \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow x'^2(t) + y'^2(t) = \rho'^2(t) + \rho^2(t) \varphi'^2(t)$$

La lunghezza della curva sarà, allora, data da:

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t) \varphi'^2(t)} \, dt \quad (4.2.1)$$

Talvolta, si prende come  $t$  lo stesso angolo  $\varphi$ ; in questo caso si ha  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ , quindi l'equazione diventa

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)} \, d\varphi \quad (4.2.2)$$

essendo  $\varphi' = 1$ .

**Esempio 4.5.** Si considera un *cardioide*, di equazione  $\rho = (1 + \cos \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Calcolarne la lunghezza.

*Svolgimento.* Si ha

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \varphi + (1 + \cos \varphi)^2} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} \, d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| \, d\varphi$$

Prendendo  $2u = \varphi$ :

$$L = 4 \int_0^{\pi} |\cos u| \, du = 8 \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = 8$$

### Teorema 4.3 (Lunghezza di curve equivalenti)

Due curve equivalenti  $\sigma, \gamma$  hanno stessa lunghezza.

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma(t) = \gamma(p(t))$ , con  $p'(t) \neq 0$ . Si assume, senza perdita di generalità,  $p' > 0$ , quindi  $\|\sigma'(t)\| = \|\gamma'(p(t))\| p'(t)$ , pertanto:

$$L(\sigma) = \int_c^d \|\sigma'(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma'(p(t))\| p'(t) dt$$

Cambiando variabili con  $u = p(t)$  e usando che  $p' > 0$ , per cui si ha  $p(c) = a$ ,  $p(d) = b$ , si ha:

$$L(\sigma) = \int_c^d \|\gamma'(p(t))\| p'(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du \equiv L(\gamma)$$

Se, invece, fosse  $p' < 0$ , si avrebbe un segno  $-$  dovuto a  $p'$ , ma gli estremi di integrazione verrebbero invertiti, quindi il risultato è consistente:

$$L(\sigma) = - \int_c^d \|\gamma'(p(t))\| p'(t) dt = \int_b^a \|\gamma'(u)\| du \equiv L(\gamma)$$

□

Inscrivendo in una circonferenza un poligono regolare, il perimetro dell'ultimo è sempre minore della lunghezza della circonferenza e la approssima tanto meglio, quanto più aumenta il numero di lati. Di fatto, la lunghezza della circonferenza si definisce come il limite dei perimetri dei poligono regolari inscritti.

Usando questo ragionamento, si ottiene la lunghezza di una curva approssimandola con delle spezzate con vertici sul suo sostegno.

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva di classe  $C^1$ . Si divide  $[a, b]$  in  $N$  sottintervalli con estremi  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ ; unendo i corrispondenti  $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_N)$ , si ottiene una spezzata  $\Sigma$ , i cui vertici sono sul sostegno della curva  $\gamma$ .

La lunghezza di  $\Sigma$  sarà, evidentemente, minore della lunghezza della curva perché, per quanto visto:

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \\ \Rightarrow L(\Sigma) &= \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

Tuttavia, prendendo  $t_i$  molto vicini fra loro, si può far avvicinare  $L(\Sigma)$  a  $L(\gamma)$  a piacimento. Per dimostrare questo, occorre il seguente lemma.

**Lemma 4.1**

Sia  $\mathbf{v}(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e sia  $\tau \in [\alpha, \beta]$ ; allora si ha:

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt \right\| \geq \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t)\| dt - 2 \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\| dt$$

*Dimostrazione.* Si ha:

$$\mathbf{v}(\tau)(\beta - \alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(\tau) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)] dt$$

Usando la disuguaglianza triangolare:

$$\|\mathbf{v}(\tau)\|(\beta - \alpha) \leq \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt \right\| + \left\| \int_{\alpha}^{\beta} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)] dt \right\| \leq \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt \right\| + \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\| dt$$

Sempre per la disuguaglianza triangolare, risulta  $\|\mathbf{v}(\tau)\| \geq \|\mathbf{v}(t)\| - \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\|$ , quindi, integrando:

$$\|\mathbf{v}(\tau)\|(\beta - \alpha) \geq \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t)\| dt - \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\| dt$$

Confrontando le due disuguaglianze ottenute, si ottiene direttamente la tesi.  $\square$

**Teorema 4.4**

La lunghezza di una curva regolare  $\gamma$  è l'estremo superiore delle lunghezze delle spezzate con i vertici sul suo sostegno.

*Dimostrazione.* La funzione  $\gamma'$  è continua in  $[a, b]$ , quindi è uniformemente continua nello stesso. Fissato, dunque,  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tale che se  $t, \tau \in [a, b]$ , allora  $|t - \tau| < \delta \Rightarrow \|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| < \varepsilon$ .

Si divide  $[a, b]$  in intervalli più piccoli, con estremi  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  in modo tale che ogni  $[t_{i-1}, t_i]$  abbia lunghezza  $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ .

Per il lemma 4.1, si ha:

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt - 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| dt$$

con  $\tau$  punto generico in  $[a, b]$ . Per costruzione, risulta  $\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| < \varepsilon$ , pertanto

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt - 2\varepsilon(t_i - t_{i-1})$$

Sommando su  $i = 1, \dots, N$  al primo membro, si ottiene la lunghezza della spezzata. Al secondo membro, la somma degli integrali restituisce la lunghezza della curva,

mentre quella dell'altro termine restituisce  $2\varepsilon(b-a)$ . In conclusione, si è trovato

$$L(\Sigma) \geq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - 2\varepsilon(b-a)$$

Conseguentemente, anche l'estremo superiore delle lunghezze delle spezzate è maggiore della stessa quantità; per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , tale sup è maggiore o uguale alla lunghezza della curva.

Avendo già mostrato la disuguaglianza opposta, segue l'uguaglianza e, al contempo, anche la tesi.  $\square$

Si definisce la lunghezza di una porzione di curva  $\gamma$  nell'estremo  $[a, t]$  come

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(r)\| dr$$

Al variare di  $t \in [a, b]$ ,  $s(t)$  varia in  $[0, L]$ ; se  $\gamma$  è regolare, allora  $s(t)$  è strettamente crescente, visto che  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ .

Sia, allora,  $t(s)$  la sua inversa, che mappa  $[0, L] \rightarrow [a, b]$  e

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)} \Big|_{t=t(s)} = \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$$

Ponendo  $\psi(s) = \gamma(t(s))$ , la curva  $\psi$  è equivalente a  $\gamma$  e ha stesso verso; inoltre

$$\psi'(s) = \gamma'(t(s))t'(s) = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|}$$

cioè  $\|\psi'(s)\| = 1$  e la velocità coincide col versore tangente.

Nel caso in cui  $\gamma$  è il grafico di una funzione  $y(x)$ , si ha  $s'(x) = \sqrt{1 + y'^2(x)}$ ; la quantità  $s$  è detta **ascissa curvilinea**. In casi del genere, la lunghezza della curva coincide con l'integrale  $\int_\psi ds$ .

In generale, la notazione  $\int_\gamma ds$  si può usare per indicare la lunghezza di una generica curva  $\gamma$ , essendo  $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ . Tale notazione è dovuta al fatto che la lunghezza del segmento infinitesimo tra i punti  $\gamma(t)$  e  $\gamma(t+dt)$  è

$$ds = \|\gamma(t+dt) - \gamma(t)\| = \|d\gamma(t)\| = \|\gamma'(t)\| dt$$

In questo modo, si può dare la definizione di **integrale curvilineo** di una funzione  $f$ .

#### Definizione 4.6 (Integrale curvilineo)

Sia  $f$  una funzione; il suo integrale curvilineo è definito come:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Se, poi,  $\gamma$  e  $\sigma$  sono due curve equivalenti, l'integrale curvilineo di  $f$  su  $\sigma$  coincide con quello su  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\sigma} f \, ds \quad (4.2.3)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma(t) = \gamma(p(t))$ . Per conto diretto, assumendo senza perdita di generalità che  $p' > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f \, ds &= \int_c^d f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt = \int_c^d f(\gamma(p(t))) \|\gamma'(p(t))\| p'(t) \, dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(r)) \|\gamma'(r)\| \, dr \equiv \int_{\gamma} f \, ds \end{aligned}$$

dove si è preso  $r = p(t) \Rightarrow dr = p'(t) \, dt$ . Se fosse  $p' < 0$ , si otterrebbe lo stesso risultato.  $\square$

**Esempio 4.6.** Calcolare, per  $\gamma$  arco di parabola di equazioni  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , l'integrale

$$\int_{\gamma} \sqrt{1 + 3x^2 + y} \, ds$$

*Svolgimento.* Si ha  $ds = \sqrt{1 + 4t^2} dt$ , quindi:

$$\int_{\gamma} \sqrt{1 + 3x^2 + y} \, ds = \int_0^1 (1 + 4t^2) \, dt = \frac{7}{3}$$

■

### 4.3 Superfici

Similmente alle curve, le superfici sono applicazioni di un insieme  $K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Per semplicità, si considererà sempre  $n = 3$  e si assumerà di avere a che fare con **superfici semplici**, cioè che non si intersecano, e **connesse**, che significa, a grandi linee, che sono composte da un unico corpo.

#### Definizione 4.7 (Superfici regolari)

Una superficie regolare è un'applicazione  $\varphi(u, v) : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $K$  ottenuto dalla chiusura di un aperto limitato e connesso, con le seguenti proprietà:

- (a).  $\varphi \in C^1(K)$ ;
- (b). la restrizione di  $\varphi$  all'interno di  $K$  è un'applicazione iniettiva;
- (c).  $\varphi_u(\mathbf{w}_0) \wedge \varphi_v(\mathbf{w}_0) \neq 0$ ,  $\forall \mathbf{w}_0 \in K^i$ .

L'immagine  $\varphi(K)$  è un insieme di  $\mathbb{R}^3$  detto **sostegno** della superficie.

**Osservazione 4.2** (Condizioni su  $K$ ). Volendo evitare che la superficie sia costituita da due parti staccate, o congiunte da una curva, l'ipotesi  $K := \overline{K^i}$  (cioè ottenuto come chiusura della sua parte interna), con l'aggiunta che sia connesso, risulta necessaria. Così facendo, la condizione  $K = \overline{K^i}$  esclude che il sostegno della superficie sia composto da due parti congiunte da una curva, mentre la connessione esclude che tale sostegno sia composto da due pezzi staccati.

Nelle curve regolari, si aveva la possibilità di definire una *retta tangente*; analogamente, nelle superfici regolari si può definire un *piano tangente*. Per farlo, si considera un punto  $\mathbf{w}_0 = (u_0, v_0) \in K^i$  e una curva regolare  $\mathbf{w}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  passante per  $\mathbf{w}_0$  stesso (cioè  $\exists t_0 \in (a, b) : \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0$ ).

L'applicazione composta  $\gamma(t) = \varphi(\mathbf{w}(t)) = \varphi(u(t), v(t))$  è una curva in  $\mathbb{R}^3$  passante per il punto  $\mathbf{x}_0 = \gamma(t_0) = \varphi(\mathbf{w}_0)$ <sup>1</sup>. La retta  $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$  è tangente al sostegno di  $\gamma$  in  $\mathbf{x}_0$ , con

$$\gamma'(t_0) = \varphi_u(\mathbf{w}_0)u'(t_0) + \varphi_v(\mathbf{w}_0)v'(t_0)$$

Da questo, si vede che  $\gamma'(t_0)$ , che è il vettore che dà la direzione della retta tangente, è combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{r} = \varphi_u(\mathbf{w}_0)$  e  $\mathbf{s} = \varphi_v(\mathbf{w}_0)$ , che dipendono dalla superficie  $\varphi$  e dal punto  $\mathbf{w}_0$ , ma non dalla curva  $\mathbf{w}(t)$ . Facendo variare la curva, il vettore  $\gamma'(t_0)$  descrive un piano fintanto che  $\mathbf{r}, \mathbf{s}$  sono linearmente indipendenti, da cui la condizione

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = \varphi_u(\mathbf{w}_0) \wedge \varphi_v(\mathbf{w}_0) \neq 0 \quad (4.3.1)$$

Quando questa è soddisfatta  $\forall \mathbf{w}_0 \in K^i$ , la superficie si dice regolare.

**Esempio 4.7.** La superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

è la sfera di raggio 1 e centro 0. Si ha

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u); \quad \varphi_v = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \\ \Rightarrow \varphi_u \wedge \varphi_v &= \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \end{aligned}$$

Quindi, nei punti interni a  $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , si ha  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = |\sin u| = \sin u > 0$ . Allora la superficie è regolare.

**Esempio 4.8.** Sia  $f(x, y) \in C^1$  e sia il suo grafico una superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$ ; in

<sup>1</sup>Questo perché sia  $u$  che  $v$ , cioè i gradi di libertà della superficie, dipendono direttamente da  $t$  e variano insieme, quindi complessivamente si ha una curva, avendo praticamente eliminato un grado di libertà.



questo caso, l'applicazione  $\varphi$  di componenti

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

con  $\varphi_x = (1, 0, f_x)$ ,  $\varphi_y = (0, 1, f_y) \Rightarrow \varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1)$  è una superficie regolare perché  $\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} > 0$ .

**Esempio 4.9.** Trovare il versore normale alla superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

*Svolgimento.* Si ha  $\varphi_u = (1, 1, 2u)$ ,  $\varphi_v = (1, -1, 2v)$ , per cui  $\varphi_u \wedge \varphi_v = (2v + 2u, 2u - 2v, -2)$ . Il versore è dato da:

$$\hat{n} = \frac{2(u + v, u - v, -1)}{\sqrt{4[(u + v)^2 + (u - v)^2 + 1]}} = \frac{(u + v, u - v, -1)}{\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}}$$

■

Se la superficie è il grafico di una funzione  $f(x, y)$ , usando come parametri le coordinate  $x, y$  stesse, per quanto visto, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1) &\implies \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \\ \implies \hat{n} &= \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \end{aligned}$$

Allora si può osservare che la terza componente di  $\hat{n}$  è sempre positiva, quindi  $\hat{n}$  punterà sempre *verso l'alto*.

#### 4.4 Area di una superficie

##### Definizione 4.8 (Area di una superficie)

Se  $\varphi : L \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una superficie regolare, la sua area è data da:

$$A(\varphi) = \int_K \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du dv$$

**Esempio 4.10.** Calcolare l'area della sfera di raggio 1, ossia della superficie

parametrizzata da

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}, \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

*Svolgimento.* Come visto in esempio 4.7,  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sin u$ , quindi l'area è:

$$\int_0^\pi \sin u \, du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \int_0^\pi \sin u \, du = 4\pi$$

■

Si considera superficie data dal grafico di una  $f(x, y)$ , per cui  $\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}$ . Se  $(x, y)$  variano in un insieme  $E \subset \mathbb{R}^2$ , l'area della superficie è data da:

$$\int_E \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \, dxdy \quad (4.4.1)$$

**Esempio 4.11.** Calcolare l'area del paraboloide  $z = x^2 + y^2$  con dominio il cerchio unitario  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

*Svolgimento.* Usando le coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy &= \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4s} \, ds = \frac{\pi}{6} (5^{3/2} - 1) \end{aligned}$$

■

## 4.5 Il teorema delle funzioni implicite

Un ulteriore modo di definire una curva è dando il luogo degli zeri di una funzione di due variabili. Sia  $F(x, y)$  una funzione; si definisce il sostegno di una curva  $\gamma$  come l'insieme

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

Si mostra che, anche definendo così una curva regolare, questa risulti localmente come grafico di una funzione.

### Teorema 4.5 (Teorema delle funzioni implicite)

Sia  $F(x, y) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  aperto, e tale che  $F \in C^1(A)$ . Sia  $(x_0, y_0) \in A$  e tale che

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono un intorno  $U$  di  $x_0$  e  $V$  di  $y_0$  tali che  $\forall x \in U, \exists! y = f(x) \in V : F(x, y) = 0$ .

La funzione  $f : U \rightarrow V$  così definita è di classe  $C^1(U)$  e

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

*Dimostrazione.* Sia, per esempio,  $F_y(x_0, y_0) > 0$ .  $F_y$  è continua per assunzione, quindi esiste un rettangolo chiuso  $W \times V$ , centrato in  $(x_0, y_0)$ , in cui  $F_y$  continua ad essere positiva. Sia  $V = (y_0 - h, y_0 + h)$ ; allora  $\forall x \in W, F(x, y)$ , considerata funzione solo di  $y$ , ha derivata positiva, quindi è strettamente crescente.

In particolare, sarà crescente la funzione  $F(x_0, y)$  e, visto che  $F(x_0, y_0) = 0$ , si ha

$$F(x_0, y_0 + h) > 0 \quad F(x_0, y_0 - h) < 0$$

Ora si considerano, come funzioni della sola  $x$ ,  $F(x, y_0 + h)$  e  $F(x, y_0 - h)$ ; queste sono continue in  $W$ , quindi, per la permanenza del segno, deve esistere un intorno  $U$  di  $x_0$  tale per cui  $\forall x \in U, F(x, y_0 + h) > 0$  e  $F(x, y_0 - h) < 0$ . Essendo che  $\forall x \in U, F$  è strettamente crescente in  $y$  e che  $F(x, y_0 - h) < 0, F(x, y_0 + h) > 0$ , si conclude che  $\exists! y \in (y_0 - h, y_0 + h)$  tale che  $F(x, y) = 0$ . Questo dimostra la prima parte.

Rimane da mostrare l'espressione per  $f'$ . Siano  $x, x_1 \in U$  due punti e sia

$$G(t) = F(x_1 + t(x - x_1), f(x_1) + t(f(x) - f(x_1)))$$

per cui  $G(0) = F(x_1, f(x_1)) = 0$  e  $G(1) = F(x, f(x)) = 0$ . Usando il teorema di Rolle, si trova un  $\tau \in (0, 1) : G'(\tau) = 0$ ; posti  $\xi = x_1 + \tau(x - x_1)$  e  $\eta = f(x_1) + \tau(f(x) - f(x_1))$ , si trova

$$\begin{aligned} F_x(\xi, \eta)(x - x_1) + F_y(\xi, \eta)(f(x) - f(x_1)) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &= -\frac{F_x(\xi, \eta)}{F_y(\xi, \eta)} \end{aligned}$$

Indicando  $R = U \times V$  e ricordando che  $F_y > 0$  in  $W \times V$ , per cui si ha  $F_y > 0$  anche in  $\bar{R}$  (chiusura di  $U \times V$ ), si conclude che il suo minimo in  $R$  è positivo e quindi, dalla relazione precedente:

$$|f(x) - f(x_1)| \leq \frac{\max_R |F_x|}{\min_R F_y} |x - x_1|$$

Questo implica che  $f$  è continua, perciò  $x \rightarrow x_1, f(x) \rightarrow f(x_1)$ , quindi  $\xi \rightarrow x_1$  e

$\eta \rightarrow f(x_1)$ . Per la continuità delle derivate di  $F$ , si ha:

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = -\frac{F_x(x_1, f(x_1))}{F_y(x_1, f(x_1))}$$

□

**Osservazione 4.3.** Indicando con  $Z$  l'insieme degli zeri di  $F$ , il teorema afferma che se  $(x_0, y_0) \in Z$  e tale che  $F_y \neq 0$ , allora si trova un rettangolo  $R = U \times V$  con centro  $(x_0, y_0)$  tale che  $Z \cap R$  è il grafico di una funzione  $y = f(x)$ , di classe  $C^1$ , la cui derivata è data da  $-\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$ .

**Osservazione 4.4.** Il vettore velocità, che è tangente alla curva, sarà dato da:

$$\mathbf{v} = (1, f'(x)) = \left(1, -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}\right) \quad (4.5.1)$$

e si vede che è anche ortogonale al gradiente di  $F$ :

$$\nabla F \cdot \mathbf{v} = F_x - F_y \frac{F_x}{F_y} = 0$$

Ovviamente se in un intorno di  $(x_0, y_0)$  fosse  $\partial_x F \neq 0$ , l'insieme  $Z$  sarebbe il grafico di una funzione del tipo  $x = g(y)$ , che soddisferebbe:

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} \quad (4.5.2)$$

Questo permette di concludere che se  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$ , allora esiste un rettangolo  $R$  centrato in  $(x_0, y_0)$  tale per cui  $Z \cap R$  è il grafico di una funzione di classe  $C^1$ . Gli eventuali punti singolari di  $Z$  si cercano fra gli  $(x, y) : F(x, y) = 0$  e  $\nabla F(x, y) = 0$ .

Un analogo di questo teorema si ottiene per le superfici a partire da funzioni di tre variabili. Se  $F(x, y, z)$  è una funzione di classe  $C^1$  e, in  $(x_0, y_0, z_0)$ , risulta

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ e } F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

allora, in un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$ , l'insieme degli zeri di  $F$  è il grafico di una funzione  $z = f(x, y)$  tale che:

$$\partial_x f(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} \quad \partial_y f(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} \quad (4.5.3)$$

In questo caso,  $\nabla F(x, y, f(x, y))$  è ortogonale alla superficie.

Il teorema delle funzioni implicite è esprimibile equivalentemente affermando che, prendendo per esempio  $\mathbb{R}^3$ , se le variabili  $(x, y, z)$  sono legate dall'equazione  $F(x, y, z) = 0$ , allora una di esse si scrive, localmente, tramite le altre due, sotto le opportune ipotesi.

Assumendo, ora, che  $x, y, z$  siano legate da due relazioni  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$ ,

ci si aspetta di poter esprimere due variabili in termini della terza, per esempio  $y = \varphi(x)$  e  $z = \psi(x)$ . Si vuole capire sotto quali condizioni questo è possibile. Sia  $\mathbf{x}_0$  tale che  $F(\mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0) = 0$  e  $F_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ; allora si trova un intorno  $W$  di  $\mathbf{x}_0$  in cui l'insieme degli zeri di  $F$ ,  $Z_F$ , è il grafico di una funzione  $z = f(x, y)$  e sono verificate le relazioni in eq. 4.5.3.

Un punto di  $Z_F \cap W$  appartiene a  $Z_G$  se e solo se  $\Phi(x, y) := G(x, y, f(x, y)) = 0$ , con  $\Phi(x, y)$  definita in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e  $\Phi(x_0, y_0) = 0$ . L'idea, ora, è di applicazione il teorema delle funzioni implicite a  $\Phi$ , per cui se

$$\Phi_y = G_y + G_z f_y = G_y - G_z \frac{F_y}{F_z} \neq 0 \text{ in } (x_0, y_0)$$

la  $y$  si può scrivere localmente come funzione di  $x$ :  $y = \varphi(x)$ . In questo caso, si potrà anche scrivere  $z = f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = \psi(x)$ .

Ricapitolando,  $y$  e  $z$  si possono scrivere localmente in funzione di  $x$  se:

$$F_z(\mathbf{x}_0)G_y(\mathbf{x}_0) - F_y(\mathbf{x}_0)G_z(\mathbf{x}_0) \neq 0 \quad (4.5.4)$$

Questa condizione impone che non valga contemporaneamente  $F_z(\mathbf{x}_0) = G_z(\mathbf{x}_0) = 0$  e, pertanto, permette di evitare di specificare la richiesta  $F_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Se fosse, infatti,  $F_z(\mathbf{x}_0) = 0$ , deve essere  $G_z(\mathbf{x}_0)$  e si può procedere equivalentemente usando  $G$ .

Questa condizione è la componente  $x$  del vettore  $\nabla F(\mathbf{x}_0) \wedge \nabla G(\mathbf{x}_0)$  e, quando questa è non-nulla, si possono esprimere  $y, z$  in funzione di  $x$ . Se risulta

$$\nabla F(\mathbf{x}_0) \wedge \nabla G(\mathbf{x}_0) \neq 0 \quad (4.5.5)$$

allora due qualunque delle variabili si possono esprimere in termini della terza.

Questa relazione impone che i due vettori, oltre ad essere non-nulli, non hanno la stessa direzione. Pertanto, le equazioni  $F(x, y, z) = 0$  e  $G(x, y, z) = 0$  individuano, in un intorno di  $\mathbf{x}_0$ , due superfici regolari passanti per tale punto. Inoltre, essendo  $\nabla F, \nabla G$  ortogonali a tali superfici, significa che le due superfici non sono tangenti; viceversa, due superfici regolari non tangenti identificano una curva regolare come loro intersezione.

## 4.6 Massimi e minimi vincolati

Si è visto che se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo interno per  $f$  e se quest'ultima è derivabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora questo deve essere un punto stazionario, cioè tale che  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ . I punti di massimo o di minimo di  $f$  in un insieme  $A$  possono cadere:

- nei punti interni in cui  $f$  non è derivabile;
- nei punti stazionari;
- sulla frontiera di  $A$ ,  $\partial A$ .

Rimane da vedere l'ultimo caso, per cui il termine **vincolo** farà riferimento proprio a  $\partial A$  e si dirà che un punto di massimo o di minimo è vincolato se è interno a  $\partial A$ .

**Esempio 4.12.** Si vogliono calcolare il punto di massimo e minimo di

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x$$

nel rettangolo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$$

*Svolgimento.* Si cercano i punti stazionari: si ha

$$f_x = 2x - 4y + 2 = 0 \quad f_y = 4y - 4x = 0$$

Dalla seconda, deve risultare  $x = y$ ; inserendola nella prima, si ottiene  $-2x + 2 = 0$ . L'unico punto stazionario, allora, è  $(1, 1)$ , che è interno ad  $R$  e tale che  $f(1, 1) = 1$ . Essendo  $f$  sempre derivabile, rimane solo da studiarne la frontiera.

- Per  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 3$ , si ha  $f(0, y) = 2y^2$ , la cui derivata è  $4y$  e si annulla solo in  $y = 0$ , che è l'estremo dell'intervallo.
- Per  $x = 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$ , si ha  $f(2, y) = 2y^2 - 8y + 8$ , con derivata  $4y - 8$ ; questa si annulla in  $y = 2$ , che è un punto interno all'intervallo, e si ha  $f(2, 2) = 0$ .
- Per  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , si ha  $f(x, 0) = x^2 + 2x$ , la cui derivata  $2x + 2$  si annulla in  $x = -1$ , che è esterno all'intervallo di definizione di  $f$ .
- Per  $y = 3$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , si ha  $f(x, 3) = x^2 - 10x + 18$ , con derivata  $2x - 10$  che si annulla per  $x = 5$ , che è esterno.

Per finire, rimangono i valori della funzione sui vertici:

$$f(0, 0) = 0 \quad f(0, 3) = 18 \quad f(2, 3) = 2 \quad f(2, 0) = 8$$

Si conclude che il massimo è 18, raggiunto nel punto  $(0, 3)$  al vertice del rettangolo, mentre il minimo è raggiunto nei punti  $(2, 2)$  e  $(0, 0)$ . ■

**Osservazione 4.5.** Lo svolgimento dell'esempio precedente è semplificato dal fatto che l'insieme da cui  $f$  prendeva valori era un rettangolo, mentre in generale la situazione è più complicata.

Ora si individua  $\partial A$  come una generica curva *regolare a tratti*, ossia composta da un numero finito di curve regolari; in questo caso, ci si può restringere a trattare il caso di una curva regolare, analizzando successivamente il comportamento della funzione su eventuali punti singolari. Sia  $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regolare e sia  $G$  il suo sostegno. Si considera la restrizione di  $f(x, y)$  a  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  e se ne vogliono calcolare i massimi e i minimi; questo equivale a calcolare massimi e minimi di  $F(t) = f(x(t), y(t))$ ,

i quali saranno tra i punti in cui  $F' = 0$ , cioè:

$$\nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0$$

Si conclude il seguente.

**Teorema 4.6**

La restrizione di  $f(\mathbf{x})$  al sostegno  $G$  di una curva regolare  $\mathbf{x}(t)$  ha un massimo o un minimo relativo in un certo  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in G$  se  $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}'(t_0) = 0$ .

**Esempio 4.13.** Si considera la restrizione di  $f(x, y) = x + y$  alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che è il sostegno di

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e se ne calcolano massimi e minimi.

*Svolgimento.* Si ha  $F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t$ , quindi  $F'(t) = -\sin t + \cos t$ , che si annulla per  $t = \pi/4$  e  $t = 5\pi/4$ . Per verifica, si ha  $\nabla f = (1, 1)$  e  $\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ , per cui  $\nabla f \cdot \mathbf{x}' = -\sin t + \cos t$ , che coincide con  $F'$  e si annulla negli stessi punti. ■

Il risultato si estende al caso  $n$ -dimensionale in cui  $f$  è una funzione di  $n$  variabili e viene ristretta al sostegno di una curva in  $\mathbb{R}^n$ . Per esempio, dato  $G$  il sostegno di una superficie  $\varphi$  di equazioni

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

si cercano i massimi e minimi della funzione

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

La condizione necessaria perché questa abbia un massimo o minimo relativo interno è che il suo gradiente si deve annullare, cioè devono essere verificate le condizioni

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \nabla f \cdot \varphi_u = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \nabla f \cdot \varphi_v = 0 \quad (4.6.1)$$

Visto che i vettori  $\varphi_u$  e  $\varphi_v$  determinano il piano tangente alla superficie, si conclude che  $\nabla f$  deve essere ortogonale alla superficie stessa.

**Teorema 4.7**

Sia  $G$  un vincolo e sia  $f \in C^1(A) : A \supset G$  aperto. Se  $f$  ha un massimo o minimo relativo vincolato in un punto  $\mathbf{x}_0$  interno a  $G$ , allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto stazionario vincolato, cioè  $\nabla f(\mathbf{x}_0)$  è ortogonale a  $G$ .

Nella pratica, il teorema precedente non aiuta. Il metodo usato è sempre quello di procedere studiando la funzione composta  $F(t) = f(\mathbf{x}(t))$ . Il teorema appena enunciato può essere riscritto in modo da essere usato quando il vincolo non è dato in termini di equazioni parametriche, ma in forma cartesiana.

Per capire meglio, si considera la funzione  $f(x, y)$  e si calcolano i suoi punti di massimo o minimo sulla curva di equazione cartesiana  $g(x, y) = 0$ .

**Osservazione 4.6.** Si ricorda che  $\nabla g$  è ortogonale alla curva definita da  $g(x, y) = 0$ ; infatti, se la curva è parametrizzata da  $\gamma = (x(t), y(t))$ , allora:

$$\frac{d}{dt}g(x(t), y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \nabla g \cdot \gamma' = 0$$

Quindi, essendo  $\nabla g$  ortogonale alla curva ed essendo  $\nabla f$  ortogonale alla stessa curva nei punti in cui ha un massimo o un minimo vincolato, significa che i due devono essere proporzionali nei punti in cui  $f$  ha massimo o minimo relativo:

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0$$

Essendo  $(x, y)$  sulla curva,  $g(x, y)$  è contemporaneamente soggetta a  $g(x, y) = 0$ , quindi i punti di massimo o minimo relativo vincolato di  $f$  sono tali da risolvere:

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4.6.2)$$

Questo è un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $x, y, \lambda$  e se ne deriva il seguente.

#### **Teorema 4.8 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange)**

Sia  $G$  il vincolo dato da  $g(x, y) = 0$ , con  $g(x, y) \in C^1$ , e sia  $f(x, y) \in C^1(A)$ , con  $A \supset G$  aperto. Allora i punti di massimo e minimo relativo vincolati di  $f$  interni a  $G$  sono soluzioni di

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

**Esempio 4.14.** Una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo senza coperchio ha una superficie di area 12. Trovare le lunghezze degli spigoli in modo che il volume sia massimo.

*Svolgimento.* Siano  $x, y$  i alti della base e  $z$  l'altezza. Si cerca di massimizzare la funzione  $f(x, y, z) = xyz$  sulla superficie di equazione  $xy + 2xz + 2yz = 12$  con le condizioni  $x, y, z > 0$ .



Il corrispondente sistema di quattro equazioni in quattro incognite è:

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + 2z) = 0 \\ xz + \lambda(x + 2z) = 0 \\ xy + 2\lambda(x + y) = 0 \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases}$$

Sottraendo le prime due, si ha  $(x - y)(z + \lambda) = 0$ , cioè o  $x = y$ , o  $\lambda = -z$ . L'ultima condizione non è possibile perché, sostituendola nella prima, si trova  $-2z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$ , che non è possibile avendo assunto  $z > 0$ .

Allora è  $x = y$ , quindi le equazioni rimanenti sono:

$$\begin{cases} xz + \lambda x + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + 4\lambda x = 0 \\ x^2 + 4xz = 12 \end{cases}$$

Dalla seconda, si ha  $x = -4\lambda$  (si scarta  $x = 0$  perché deve essere  $x > 0$ ), quindi si rimane con

$$\begin{cases} 4\lambda(z + \lambda) = 2\lambda z \\ 4\lambda(z - \lambda) = -3 \end{cases}$$

Sommandole, si ha  $8\lambda z = 2\lambda z - 3 \Rightarrow \lambda z = -1/2$ . Inserendo questo nella prima, si ha  $4\lambda^2 = 1$ , quindi  $\lambda = \pm 1/2$ , ma  $\lambda = 1/2$  non è possibile perché darebbe  $x = -2$ .

In definitiva, si ha  $\lambda = -1/2$ , per cui  $x = y = 2$  e  $z = 1$ . ■

## 5 FORME DIFFERENZIALI

### 5.1 Lavoro di una forza

Per un corpo in moto da un punto  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  sotto l'azione di una forza  $\mathbf{F}$  costante, questa compie un lavoro dato da  $\Lambda = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ .

Nel caso in cui  $\mathbf{F}$  non è più costante, ma dipende da  $\mathbf{x}$ , si prende  $\gamma = \mathbf{x}(t)$ , con  $a \leq t \leq b$ , che definisce il percorso seguito dal corpo e si spezza in l'intervallo  $[a, b]$  in  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_{N+1} = b$ . A questo punto, si uniscono i punti corrispondenti sulla curva  $\mathbf{x}_1 = \gamma(t_1), \dots, \mathbf{x}_{N+1} = \gamma(t_{N+1})$ , formando una serie di spezzate che approssima sempre meglio, al crescere di  $N$ , la curva  $\gamma$ .

Se  $\mathbf{F}$  è costante in ogni segmento  $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ , il lavoro compiuto è, complessivamente, dato da:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \quad (5.1.1)$$

Nel caso in cui  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  non fosse costante in questi intervalli, cosa che è ragionevole pensare, l'eq. 5.1.1 costituisce una buona approssimazione e, nel caso in cui  $\mathbf{F}$  sia continua<sup>1</sup>, tende al valore giusto per  $N \rightarrow \infty$ .

Per studiare questo limite, si riscrive l'eq. 5.1.1 usando la rappresentazione parametrica della curva:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) &= \mathbf{F}(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = \mathbf{F}(\gamma(t_i)) \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}(\gamma(t_i)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) dt \end{aligned}$$

Sommando su  $i$ :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) dt \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Si assumono sia  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  che  $\gamma(t)$  continue, quindi anche  $\mathbf{F}(\gamma(t))$  è continua. Avendola definita nell'intervallo chiuso  $[a, b]$ , essa è uniformemente continua. Questo implica che

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |t - s| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{F}(\gamma(t)) - \mathbf{F}(\gamma(s))\| < \varepsilon$$

Allora è chiaro che, prendendo  $N$  *sufficientemente* grande, ogni intervallo  $t_i, t_{i+1}$  ha

---

<sup>1</sup>Cioè ciascuna componente di  $\mathbf{F}$ ,  $F_i(\mathbf{x})$ , deve essere continua.

ampiezza minore di  $\delta$ ; così facendo, risulta  $\|\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))\| < \varepsilon$ , quindi

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt < \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$$

Reintroducendo la somma su  $i$ , si ottiene

$$\left| \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))] \cdot \gamma'(t) dt \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt \equiv \varepsilon L(\gamma)$$

con  $L(\gamma)$  lunghezza della curva. Questo (di)mostra che quando i lati della spezzata tendono a  $+\infty$ , quindi la lunghezza dei lati tende a 0,  $\Lambda$  converge al seguente integrale:

$$\mathcal{L} = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (5.1.3)$$

## 5.2 Introduzione alle forme differenziali

### Definizione 5.1 (Forma differenziale)

Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e date  $a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})$  delle funzioni continue in  $A$ , si definisce *forma differenziale* l'espressione

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$$

dove le funzioni  $a_i(\mathbf{x})$  sono dette componenti della forma.

### Definizione 5.2 (Integrale di una forma)

Data  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$  come sopra, il suo integrale su una curva regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  è definito come

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt$$

**Osservazione 5.1.** In realtà, l'integrale di una forma si può definire anche su una curva  $\gamma$  regolare a tratti usando la definizione per ogni intervallo in cui questa è regolare e sommando tutti i contributi.

**Esempio 5.1.** Il differenziale di una funzione

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

è una forma differenziale. Data  $\gamma$  curva regolare, l'integrale di questa forma è:

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i} \gamma'_i(t) dt$$

Definendo  $G(t) = f(\gamma(t))$ , si ha

$$G'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_i} \gamma'_i(t)$$

per cui

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Questo è valido anche per  $\gamma$  regolare a tratti, infatti, sommando i vari integrali, i termini intermedi si elidono.

Se le funzioni  $a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})$  sono le componenti di un campo vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  e indicando con  $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ , la forma  $\omega$  si può riscrivere come

$$\omega = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

per cui, data  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  una curva regolare:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \mathbf{V}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Usando che il versore tangente a  $\varphi$  è

$$\tau = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

si trova che

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \mathbf{V}(\varphi(t)) \cdot \tau(t) \|\varphi'(t)\| dt = \int_{\varphi} \mathbf{V} \cdot \tau ds \quad (5.2.1)$$

Il teorema di seguito è l'analogo di quanto visto per l'equivalenza di due integrali curvilinei della stessa funzione su due curve equivalenti.

### Teorema 5.1

Siano  $\varphi, \gamma$  due curve equivalenti; allora, se  $\varphi$  e  $\gamma$  hanno stesso verso

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

altrimenti

$$\int_{\varphi} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

*Dimostrazione.* Date, quindi,  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $p : [a, b] \rightarrow [c, d]$  tale

che  $\varphi(t) = \gamma(p(t))$ , si ha:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b \mathbf{V}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b \mathbf{V}(\gamma(p(t))) \cdot \gamma'(p(t))p'(t) dt$$

dove si è assunto  $p' > 0^a$ , per cui  $p(a) = c$  e  $p(b) = d$ . Prendendo  $u = p(t)$ :

$$\int_a^b \mathbf{V}(\gamma(p(t))) \cdot \gamma'(p(t))p'(t) dt = \int_c^d \mathbf{V}(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u) du = \int_{\gamma} \omega$$

Se, invece, fosse stato  $p' < 0$ , gli estremi di integrazione sarebbero risultati invertiti (cioè  $p(a) = d$  e  $p(b) = c$ ), quindi si sarebbe trovato

$$\int_{\varphi} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

proprio come atteso. □

---

<sup>a</sup>Altrimenti ci sarebbe dovuto essere  $|p'(t)|$ .

### 5.3 Forme esatte

Si è visto che

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Pertanto, se la curva è chiusa, cioè  $\gamma(b) = \gamma(a)$ , allora l'integrale è nullo. Inoltre, questo integrale è lo stesso per tutte le curve i cui estremi coincidono ordinatamente, cioè se il primo estremo di una curva è il primo dell'altra e il secondo della prima è il secondo dell'altra.

Da questo si ricava la definizione di forma esatta.

#### **Definizione 5.3 (Forma differenziale esatta)**

Una forma differenziale  $\omega = \sum_i a_i(\mathbf{x})dx_i$ , definita su  $A \subset \mathbb{R}^n$  aperto, è detta *esatta* se è il differenziale di qualche funzione.

In altre parole, se esiste  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(A)$  tale che  $\omega = df$ , o meglio se

$$a_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

allora  $\omega$  è esatta.

Se  $\omega$  è esatta, il campo vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}))$  è detto **conservativo**; in questo caso, la funzione  $f(\mathbf{x})$  si dice **primitiva** della forma  $\omega$ , o anche **funzione potenziale** del campo  $\mathbf{V}$ .

Come già accennato, se  $\omega$  è esatta, il suo integrale  $\int_{\gamma} \omega$  è lo stesso per ogni altra curva con gli stessi estremi. Dati  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ , sia  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  la classe di tutte le curve regolari

a tratti, con sostegno in  $A$ , che hanno  $\mathbf{x}_1$  come primo estremo e  $\mathbf{x}_2$  come secondo; se  $\omega$  è esatta in  $A$ ,  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ ,  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Da questo, si ha il seguente.

### **Teorema 5.2**

Sia  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  una forma differenziale continua in  $A^a$  aperto e connesso. Se comunque presi  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$  e due curve  $\gamma_1, \gamma_2$  con questi estremi, si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

allora  $\omega$  è esatta.

*Dimostrazione.* Si fissa  $\mathbf{x}_0 \in A$  e si definisce

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \omega$$

con  $\gamma \in \Gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ . Si vuole dimostrare che

$$a_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Sia  $\mathbf{e}_k$  il versore dell'asse  $x_k$  e sia  $\mathbf{x} \in A$ ; visto che  $A$  è aperto, si trova un intorno tutto contenuto in  $A$ :  $I(\mathbf{x}, r) \subset A$ .

Per  $|h| < r$ , il segmento che congiunge  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k$  è tutto contenuto in  $A$ . Per definizione

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) = \int_{\sigma} \omega$$

con  $\sigma$  generica curva regolare a tratti che congiunge  $\mathbf{x}_0$  con  $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k$ . Scegliendo

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & , \quad a \leq t \leq b \\ \mathbf{x} + (t - b)h\mathbf{e}_k & , \quad b \leq t \leq b + 1 \end{cases}$$

nell'intervallo  $b < t < b + 1$ , vale

$$\sigma'_i = h\delta_{ik} = \begin{cases} h & , \quad i = k \\ 0 & , \quad i \neq k \end{cases}$$

Conseguentemente, si trova che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) &= \int_{\sigma} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_b^{b+1} a_k(\mathbf{x} + (t-b)h\mathbf{e}_k) h \, dt \\ \Rightarrow \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} &= \int_b^{b+1} a_k(\mathbf{x} + (t-b)h\mathbf{e}_k) \, dt \end{aligned}$$

Per il lemma della media integrale, si trova  $\xi \in [b, b+1]$  tale che

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} = a_k(\mathbf{x} + (\xi - b)h\mathbf{e}_k)$$

Mandando  $h \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{x} + (\xi - b)h\mathbf{e}_k \rightarrow \mathbf{x}$  e, per continuità delle  $a_k$ , si ha

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = a_k(\mathbf{x})$$

□

---

<sup>a</sup>Cioè tutte le  $a_i(\mathbf{x})$  sono continue in  $A$ .

Questo teorema si può enunciare in maniera diversa come segue.

### Teorema 5.3

Sia  $\omega$  una forma differenziale continua in  $A$  aperto connesso. La forma  $\omega$  è esatta se e soltanto se per ogni curva chiusa  $\gamma$ , regolare a tratti e con sostegno in  $A$ , vale

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

*Dimostrazione.* Si è già visto che se  $\omega$  è esatta, il suo integrale su una curva chiusa è nullo, quindi si dimostra il viceversa.

Si assume, quindi, che  $\forall \gamma$  chiusa, regolare a tratti e a sostegno in  $A$  risulti

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Siano  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$  e  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow A$ ,  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow A$  due curve in  $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  tali che  $\gamma_1(a) = \gamma_2(c) = \mathbf{x}_1$  e  $\gamma_1(b) = \gamma_2(d) = \mathbf{x}_2$ . Sia, poi,  $\gamma_3 : [b, b+1] \rightarrow A$  una curva equivalente a  $\gamma_2$ , ma con verso opposto, definita come

$$\gamma_3(t) = \gamma_2(d + (t-b)(c-d))$$

Allora, la curva  $\gamma : [a, b+1] \rightarrow A$  data da

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \, a \leq t \leq b \\ \gamma_3(t) & , \, b \leq t \leq b+1 \end{cases}$$

è chiusa e regolare a tratti, quindi deve essere  $\int_{\gamma} \omega = 0$ . D'altra parte

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

visto che  $\gamma_3$  e  $\gamma_2$  hanno verso opposto. Ne segue che gli integrali di  $\omega$  su  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono uguali e, dunque,  $\omega$  soddisfa le ipotesi del teorema precedente (th. 5.2), risultando, pertanto, esatta.  $\square$

**Osservazione 5.2.** Questo risulta valido anche per curve semplici, o anche poligonali.

Questi teoremi non permettono agevolmente di capire se una forma è esatta o meno perché richiedono il calcolo degli integrali su tutte le possibili curve della forma stessa. Allora si introduce il seguente.

#### Teorema 5.4

Sia  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$  una forma di classe  $C^1(A)$ . Se  $\omega$  è esatta, allora

$$\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad \forall \mathbf{x} \in A, \quad \forall i, k = 1, \dots, n$$

*Dimostrazione.* Per assunzione,  $\omega = df$ , per cui  $a_i = \partial_{x_i} f$ ; applicando il teorema di Schwarz:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

$\square$

#### Definizione 5.4 (Forma differenziale chiusa)

Una forma differenziale  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$  su  $A$  è detta *chiusa* se

$$\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k(\mathbf{x})}{\partial x_i}, \quad \forall \mathbf{x} \in A, \quad \forall i, k = 1, \dots, n \quad (5.3.1)$$

Il teorema 5.4 afferma che ogni forma esatta è anche chiusa. Il viceversa non è vero; ad esempio

$$\omega = -\frac{y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2}$$

è chiusa, ma non esatta. Infatti, per  $\gamma$  di equazioni  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$ :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

Il motivo per cui non vale il viceversa è che  $\omega$  considerata non è definita in tutto il piano, ma solo in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\gamma$  circonda l'origine.

Ora si cerca una condizione sufficiente; per farlo, si parte dalla seguente definizione.



**Definizione 5.5 (Insieme stellato)**

Un insieme  $A$  si dice stellato rispetto ad un suo punto  $\mathbf{x}_0$  se  $\forall \mathbf{x} \in A$ , il segmento di estremi  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}$  è interamente contenuto in  $A$ .

**Teorema 5.5**

Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  è un aperto stellato, ogni forma chiusa definita in  $A$  è anche esatta.

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità, si assume che  $A$  sia stellato rispetto all'origine. Dato  $\mathbf{x} \in A$ , significa che il segmento di equazione  $\gamma(t) = t\mathbf{x}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  è interamente contenuto in  $A$  perché unisce  $\mathbf{x} \in A$  con l'origine.

Sia, poi

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(t\mathbf{x}) x_i dt$$

L'idea è di mostrare che  $f(\mathbf{x})$  è una primitiva di  $\omega$ , che, quindi, risulta esatta.

Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (a_i(t\mathbf{x}) x_i) dt$$

dove

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(t\mathbf{x}) x_i) = \begin{cases} \frac{\partial a_i(t\mathbf{x})}{\partial x_k} t x_i & , i \neq k \\ \frac{\partial a_k(t\mathbf{x})}{\partial x_k} t x_k + a_k(t\mathbf{x}) & , i = k \end{cases}$$

Sommando su  $i$ , allora, si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (a_i(t\mathbf{x}) x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(t\mathbf{x})}{\partial x_k} t x_i + a_k(t\mathbf{x})$$

Usando, ora, la definizione di forma chiusa, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_k(t\mathbf{x})}{\partial x_i} t x_i + a_k(t\mathbf{x}) \right) dt$$

Si prende  $g(t) = t a_k(t\mathbf{x})$ , per cui

$$g'(t) = a_k(t\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n t \frac{\partial a_k}{\partial x_i}(t\mathbf{x}) x_i$$

In conclusione, si trova che

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0) = a_k(\mathbf{x})$$

per cui  $df = \omega$ . □

## 5.4 La formula di Gauss-Green

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice<sup>1</sup> e chiusa, il cui sostegno è la frontiera di un certo insieme  $E \subset \mathbb{R}^2$ . Si dice che  $\gamma$  è **orientata positivamente** se, percorrendola nel senso di  $t$  crescente, il dominio  $E$  rimane alla sinistra.

Date due curve  $\gamma, \varphi$  che contornano lo stesso insieme  $E$ , ma hanno versi opposti, per sottolineare questo fatto si scriverà  $\partial^+ E$  al posto di  $\gamma$  e  $\partial^- E$  al posto di  $\varphi$ .

### Teorema 5.6 (Formula di Gauss-Green)

Se  $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$  è una forma differenziale di classe  $C^1$ , allora vale la formula di Gauss-Green:

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \int_E \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.4.1)$$

*Dimostrazione.* L'idea è di dimostrare separatamente le due seguenti relazioni, che poi portano alla formula di Gauss-Green:

$$\int_{\partial^+ E} M(x, y)dx = - \int_E \frac{\partial M}{\partial y} dx dy \quad \int_{\partial^+ E} N(x, y)dy = \int_E \frac{\partial N}{\partial x} dx dy$$

Per semplicità di calcolo, si assume che  $E$  sia un dominio normale rispetto all'asse delle  $y$ , cioè che sia della forma:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Così facendo, l'insieme  $E$  è composto da due funzioni i cui lati sinistro e destro sono uniti da due segmenti verticali, mentre la forma dei lati superiore e inferiore è determinata da  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$ .

In questo modo, si ha che  $dx = 0$  sui segmenti verticali di  $\partial E$ , cioè:

$$\int_{\partial^+ E} M(x, y)dx = \int_a^b M(x, \alpha(x))dx - \int_a^b M(x, \beta(x))dx$$

D'altra parte, si ha

$$M(x, \alpha(x)) - M(x, \beta(x)) = \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dy = - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dy$$

Quindi

$$\int_{\partial^+ E} M(x, y)dx = - \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = - \int_E \frac{\partial M}{\partial y} dx dy$$

---

<sup>1</sup>Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta semplice se non si interseca mai, quindi se è iniettiva in  $(a, b)$ .

che dimostra la prima relazione.

Per la seconda, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ E} N(x, y) dy &= \int_a^b N(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} N(b, y) dy - \int_a^b N(x, \beta(x)) \beta'(x) dx \\ &\quad - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} N(a, y) dy\end{aligned}$$

Si prende  $F(x, y) = \int_{\alpha(x)}^y N(x, t) dt$ , per cui  $\partial_y F(x, y) = N(x, y)$ , quindi

$$N(x, \alpha(x)) \alpha'(x) = \frac{d}{dx} F(x, \alpha(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, \alpha(x))$$

Da questo, segue che

$$\int_a^b N(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx = F(b, \alpha(b)) - F(a, \alpha(a)) - \int_a^b \frac{\partial F(x, \alpha(x))}{\partial x} dx$$

Analogamente, si trova che  $N(x, \beta(x)) \beta'(x) = d_x F(x, \beta(x)) - \partial_x F(x, \beta(x))$ , per cui

$$\int_a^b N(x, \beta(x)) \beta'(x) dx = F(b, \beta(b)) - F(a, \beta(a)) - \int_a^b \frac{\partial F(x, \beta(x))}{\partial x} dx$$

Allo stesso tempo, valgono

$$\begin{aligned}\int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} N(b, y) dy &= \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} \frac{\partial F(b, y)}{\partial y} dy = F(b, \beta(b)) - F(b, \alpha(b)) \\ \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} N(a, y) dy &= \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \frac{\partial F(a, y)}{\partial y} dy = F(a, \beta(a)) - F(a, \alpha(a))\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, molti termini si semplificano e si rimane con:

$$\int_{\partial^+ E} N(x, y) dy = \int_a^b \left( \frac{\partial F(x, \beta(x))}{\partial x} - \frac{\partial F(x, \alpha(x))}{\partial x} \right) dx$$

Per finire, essendo che

$$\frac{\partial F(x, \beta(x))}{\partial x} - \frac{\partial F(x, \alpha(x))}{\partial x} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial N}{\partial x} dy$$

si ottiene

$$\int_{\partial^+ E} N(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial N}{\partial x} dy = \int_E \frac{\partial N}{\partial x} dx dy$$

□

Si ricorda che, data una curva piana regolare  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  di componenti  $(x(t), y(t))$ ,

il versore tangente a  $\gamma$  è

$$\tau = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \left( \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \equiv (\tau_1, \tau_2)$$

Prendendo  $\nu = (\tau_2, -\tau_1)$ , si ottiene un versore tale che  $\nu \cdot \tau = 0$ , cioè il *versore normale* alla curva  $\gamma$ . Se  $\gamma = \partial^+ E$ , il versore normale  $\nu$  come definito sopra risulta puntare verso l'esterno di  $E$ . In questo modo:

$$\int_{\partial^+ E} M dx = \int_a^b M(\gamma(t)) \gamma'_1(t) dt = \int_a^b M(\gamma(t)) \frac{\gamma'_1(t)}{\|\gamma'_1(t)\|} \|\gamma'_1(t)\| dt = \int_{\gamma} M \tau_1 ds = - \int_{\partial E} M \nu_2 ds$$

**Osservazione 5.3.** Nell'ultimo integrale, si è scritto solo  $\partial E$  perché l'integrale curvilineo non dipende dall'orientazione.

Allo stesso modo si trova che

$$\int_{\partial^+ E} N dy = \int_{\partial E} N \nu_1 ds$$

Le relazioni che costituiscono la formula di Gauss-Green, usando queste relazioni, diventano:

$$\int_E \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \int_{\partial E} M \nu_2 ds \quad \int_E \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_{\partial E} N \nu_1 ds$$

Definendo, ora, il campo vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  in  $\mathbb{R}^2$  tale che  $\mathbf{V} = (V_1, V_2) = (N, M)$ , allora la formula di Gauss-Green diventa:

$$\int_E \nabla \cdot \mathbf{V} dx dy = \int_{\partial E} (V_1 \nu_1 + V_2 \nu_2) ds = \int_{\partial E} \mathbf{V} \cdot \nu ds \quad (5.4.2)$$

Questo è noto come **teorema della divergenza** e l'integrale al secondo membro è il *flusso* di  $\mathbf{V}$  attraverso  $\partial E$ .

Questo vale anche per tre o più dimensioni; in  $3D$ , soddisfa

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial E} f \nu_1 d\sigma \quad \int_E \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \int_{\partial E} f \nu_2 d\sigma \quad \int_E \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial E} f \nu_3 d\sigma$$

che si possono riscrivere in forma vettoriale come

$$\int_E \nabla \cdot \mathbf{V} dx dy dz = \int_{\partial E} \mathbf{V} \cdot \nu d\sigma \quad (5.4.3)$$

La dimostrazione è omessa (pag. 180, E. Giusti - *Analisi Matematica 2*).

### 5.4.1 Area di figure piane

Se in eq. 5.4.1, si prendono  $M = 0$ ,  $N = x$  e, poi, si prendono  $N = 0$ ,  $M = y$ , si ottengono, rispettivamente, le seguenti relazioni:

$$\int_{\partial^+ E} x dy = \int_E dx dy = m(E) \quad \int_{\partial^+ E} y dx = - \int_E dx dy = -m(E) \quad (5.4.4)$$

Evidentemente, prendendo  $M = -y/2$  e  $N = x/2$ :

$$m(E) = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ E} x dy - y dx \quad (5.4.5)$$

Queste formule si applicano bene quando l'insieme  $E$  di cui si vuole calcolare l'area è dato come l'insieme racchiuso da una curva.

**Esempio 5.2.** Calcolare l'area racchiusa dalla cicloide di equazioni

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e dall'asse delle  $x$ .

*Svolgimento.* Usando la prima formula in eq. 5.4.4, si trova

$$m(E) = \int_{\partial^+ E} x dy = - \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \pi + 2\pi = 3\pi$$

■

Nel caso in cui la curva sia data in coordinate polari, invece, è conveniente usare l'eq. 5.4.5. Infatti, per

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} dx = (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\varphi \\ dy = (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi) d\varphi \end{cases}$$

si ricava che

$$x dy - y dx = \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \rho^2 d\varphi \quad (5.4.6)$$

**Esempio 5.3.** Calcolare l'area racchiusa dalla cardioide di equazione  $\rho = 1 + \cos \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

*Svolgimento.* Applicando direttamente la formula trovata:

$$m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \pi$$

■

### 5.4.2 Ancora sulle forme esatte

La formula di Gauss-Green permette di aggiungere informazioni alla caratterizzazione delle forme esatte. Si è mostrato che, affinché una forma differenziale del tipo  $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$  sia esatta in un dominio  $A$  è che sia verificata la condizione

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Questa diventa sufficiente quando il dominio  $A$  soddisfa alcune condizioni geometriche, ad esempio l'essere *stellato*. Questo risultato può essere migliorato tramite la formula di Gauss-Green.

#### **Definizione 5.6 (Insieme semplicemente connesso)**

Un insieme connesso  $A \subset \mathbb{R}^2$  è semplicemente connesso se  $\forall \gamma$  curva chiusa e semplice con sostegno  $G \subsetneq A$ ,  $G$  è la frontiera di un insieme limitato interamente contenuto in  $A$ .

#### **Teorema 5.7**

Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  è semplicemente connesso, ogni forma chiusa in  $A$  è esatta.

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma$  una curva semplice e chiusa con sostegno  $G$  interamente contenuto in  $A$ ; essendo  $A$  semplicemente connesso, esiste un insieme  $E$  aperto interamente contenuto in  $A$  con  $\partial E = G$ . Per Gauss-Green, data  $\omega$  una forma chiusa in  $A$ :

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \int_E \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è garantita dal fatto che  $\omega$  è chiusa. Allo stesso tempo, a seconda che  $\gamma$  sia orientata positivamente o negativamente, si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \pm \int_{\partial^+ E} \omega = 0$$

che risulta nullo  $\forall \gamma$  chiusa e semplice con sostegno in  $A$ . Per il teorema 5.3 e per l'osservazione 5.2,  $\omega$  è esatta.  $\square$

## 5.5 La formula di Stokes

È l'analogo tridimensionale della formula di Gauss-Green. Di seguito si danno alcune definizioni preliminari.

Siano dati una superficie regolare  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  di equazioni  $\mathbf{x} = \varphi(u, v)$ , cioè

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in K$$

un insieme aperto  $A \subset K$  e  $\gamma : [a, b] \rightarrow K$  una curva semplice e chiusa di equazioni

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

con sostegno  $G = \partial A$ . L'insieme  $S = \varphi(A)$  è una superficie regolare con equazioni identiche a quelle di  $\Sigma$ , ma con  $(u, v) \in A$ . Il bordo di  $S$  coincide, allora, con l'immagine di  $\partial A$ , ossia  $\partial S = \varphi(\partial A)$ .

La curva  $\Gamma = \varphi \circ \gamma$  ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

e ha, come sostegno, l'insieme  $\partial S$ . Se  $\gamma$  è orientata positivamente, si dirà che  $\Gamma$  (il bordo di  $S$ ) è orientata positivamente, altrimenti vale il viceversa.

Sia, infine,  $\mathbf{V}(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$  un campo vettoriale; si definisce *rotore* di  $\mathbf{V}$  l'espressione

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \equiv \nabla \times \mathbf{V} \quad (5.5.1)$$

### **Teorema 5.8 (Teorema di Stokes)**

Sia  $S$  una superficie di classe  $C^2$ . Allora

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial^+ S} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} \quad (5.5.2)$$

dove  $\nu$  rappresenta il versore normale a  $S$ :

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

*Dimostrazione.* Il primo membro della formula diventa

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot \nu \, d\sigma &= \int_A \frac{1}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \left[ (Z_y - Y_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (X_z - Z_x)(z_u x_v - x_u z_v) + \right. \\ &\quad \left. + (Y_x - X_y)(x_u y_v - y_u x_v) \right] \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

dove le funzioni  $Z_y, Y_z, \dots$  sono calcolate in  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Si prende

$$\omega = (Xx_u + Yy_u + Zz_u)du + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)dv \equiv M(u, v)du + N(u, v)dv$$

Allora, passando attraverso qualche calcolo, si può dimostrare che l'argomento dell'integrale non è altro che  $\partial_u N - \partial_v M$ , da cui, per la formula di Gauss-Green, risulta:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial^+ A} \omega$$

Allo stesso tempo, si nota che

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ A} \omega &= \int_a^b [(Xx_u + Yy_u + Zz_u)u' + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)v'] dt \\ &= \int_a^b [X(x_u u' + x_v v') + Y(y_u u' + y_v v') + Z(z_u u' + z_v v')] dt \\ &= \int_{\partial^+ S} Xdx + Ydy + Zdz \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.  $\square$

**Osservazione 5.4.** Usando eq. 5.2.1, la formula di Stokes si può scrivere come

$$\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial^+ S} \mathbf{V} \cdot \tau \, ds \quad (5.5.3)$$

con  $\tau$  versore tangente alla curva  $\partial^+ S$ . Il teorema di Stokes, allora, lega la circuitazione di  $\mathbf{V}$  (il secondo integrale) e il flusso di  $\text{rot } \mathbf{V}$  attraverso  $S$  (il primo integrale).

Il teorema di Stokes permette di dimostrare il seguente, che è l'analogo di quanto visto con la formula di Gauss-Green. In  $\mathbb{R}^3$ , un  $A$  aperto semplicemente connesso è un insieme per cui ogni curva semplice e chiusa con sostegno in  $A$  fa da bordo a una superficie  $S$  con sostegno interamente contenuto in  $A$ .

### Teorema 5.9

Sia  $A \subset \mathbb{R}^3$  un insieme semplicemente connesso; allora ogni forma chiusa definita in  $A$  è anche esatta.

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma$  una curva semplice e chiusa e sia  $S$  la superficie da essa delimitata. Visto che  $\omega$  è chiusa per assunzione, il suo campo vettoriale associato  $\mathbf{V}$  è irrotazionale, cioè  $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ . Per Stokes, allora, si ha  $\int_\gamma \omega = 0$ . Per il teorema 5.3,  $\omega = Xdx + Ydy + Zdz$  è esatta.  $\square$



## 6 TEORIA DELLA MISURA

*L'obiettivo è quello di fornire uno strumento che permetta di calcolare il volume di un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  o, equivalentemente, fornire una nozione di integrale per funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che sia stabile quando si passa al limite.*

### 6.1 Nozioni introduttive

#### Definizione 6.1 ( $\sigma$ -algebra)

Sia  $X$  un insieme e  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ; si dice che  $\mathcal{E}$  è una  $\sigma$ -algebra se:

- (s1).  $\emptyset \in \mathcal{E}$ ;
- (s2).  $\forall E \in \mathcal{E}, X \setminus E = E^c \in \mathcal{E}$ , quindi, in particolare,  $X \in \mathcal{E}$ ;
- (s3). comunque dati degli  $E_i \in \mathcal{E}$ , questi soddisfano  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \mathcal{E}$ .

L'idea dietro una  $\sigma$ -algebra è di replicare un sottoanello con le operazioni di chiusura per unione e passaggio al complementare, cioè individuare quei sottoinsiemi di  $X$  che sono stabili per le operazioni topologiche fondamentali.

**Osservazione 6.1.** Si nota che, essendo una  $\sigma$ -algebra chiusa per passaggio al complementare e avendo richiesto che  $\forall \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ , risulti  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \in \mathcal{E}$  allora segue anche che

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i \in \mathcal{E} \quad (6.1.1)$$

Questo si dimostra usando le leggi di de Morgan.

Si nota che l'intersezione, anche infinita di  $\sigma$ -algre è ancora una  $\sigma$ -algebra; in particolare, dato  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ , si può definire la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente  $S$  come:

$$\sigma(S) = \bigcap \{ \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ è una } \sigma\text{-algebra e } S \subseteq \mathcal{E} \} \quad (6.1.2)$$

In questo caso, si dice che  $\sigma(S)$  è la  $\sigma$ -algebra generata da  $S$ .

#### Definizione 6.2 (Algebra di Borel)

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico; si dice  $\sigma$ -algebra di Borel la  $\sigma$ -algebra definita come:

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$$

**Osservazione 6.2.** Per differenza di cardinalità, si ha che  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(X)$ ; infatti  $|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^{|\mathbb{R}^n|} = 2^{\mathfrak{c}}$ , mentre  $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = \mathfrak{c}$ .

**Definizione 6.3 ( $\sigma$ -additività e  $\sigma$ -subadditività)**

Sia  $\mathcal{E}$  una  $\sigma$ -algebra e  $m : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ .

- Si dice che  $m$  è  $\sigma$ -subadditiva se  $\forall E_i \in \mathcal{E}$ :

$$m\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i m(E_i)$$

- Si dice che  $m$  è  $\sigma$ -additiva se dato  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E} : i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ , si ha

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(E_i)$$

**Definizione 6.4 (Misura e spazio di misura)**

Data una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}$  e  $m : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ , si dice che  $m$  è una funzione di misura se è  $\sigma$ -additiva su  $\mathcal{E}$ . In questo caso, si dice che  $(X, \mathcal{E}, m)$  è uno spazio di misura.

Una funzione di misura  $m$  ha le seguenti proprietà. Intanto  $m(\emptyset) = 0$  ed è subadditiva per definizione (visto che additiva  $\Rightarrow$  subadditiva). È monotona perché dati  $A, B \in \mathcal{E} : A \subseteq B$ , si ha  $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$ . Infine, se  $E_i \subseteq E_{i+1}$ , vale

$$m\left(\bigcup_i E_i\right) = \lim_i m(E_i) = \sup_i m(E_i) \quad (6.1.3)$$

e se  $E_i \supseteq E_{i+1}$ , con  $m(E_0) < +\infty$ , vale

$$m\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i m(E_i) = \inf_i m(E_i) \quad (6.1.4)$$

**Definizione 6.5 (Insieme trascurabile)**

Data una misura  $m$  e dato  $N \in \mathcal{E}$ , si dice che  $N$  è trascurabile se  $m(N) = 0$ .

Per monotonia delle funzioni di misura, segue che se  $N' \subseteq N$ , con  $N$  insieme trascurabile, allora anche  $N'$  è trascurabile.

**Definizione 6.6 (Spazio di misura completo)**

Uno spazio di misura  $(X, \mathcal{E}, m)$  si dice completo se

$$\forall N' \subseteq N, \text{ con } m(N) = 0 \implies N' \in \mathcal{E}$$

**Definizione 6.7 (Misura di Borel)**

Dato lo spazio di misura  $(X, \mathcal{E}, m)$ , se  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{E}$ , cioè  $m$  è definita sui Boreliani, allora si dice che  $m$  è una misura di Borel.

**Definizione 6.8 (Misura regolare)**

Dato  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  spazio di misura con  $X$  spazio metrico e  $\mu$  di Borel, si dice che  $\mu$  è regolare se  $\forall E \in \mathcal{E}$ :

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(A) \mid A \supseteq E \text{ aperto} \} = \sup \{ \mu(K) \mid K \subseteq E \text{ compatto} \}$$

**Definizione 6.9 (Misura  $\sigma$ -finita)**

Sia  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  uno spazio di misura; si dice che  $\mu$  è  $\sigma$ -finita se esiste un insieme al più numerabile di insiemi misurabili  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$  tali che

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mu(A_i) \in \mathbb{R} \text{ e } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = X$$

**6.2 Metodo di Carathéodory**

*Questo è uno dei metodi per costruire spazi di misura a partire da una certa funzione di misura.*

**Definizione 6.10 (Misura esterna)**

Una mappa  $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$  è detta misura esterna se è  $\sigma$ -subadditiva.

**Teorema 6.1 (Teorema di Carathéodory)**

Siano  $X$  un insieme e  $m$  una misura esterna; l'insieme definito come

$$\mathcal{E}_m = \{ E \subseteq X \mid \forall S \subseteq X, m(S) = m(S \cap E) + m(S \setminus E) \}$$

gode delle seguenti proprietà:

- (a).  $\mathcal{E}_m$  è una  $\sigma$ -algebra;
- (b).  $m|_{\mathcal{E}_m}$  è una misura;
- (c).  $(X, \mathcal{E}_m, m|_{\mathcal{E}_m})$  è uno spazio di misura completo.

**Teorema 6.2 (Metodo di Carathéodory)**

Se  $(X, \mathcal{E}, m)$  è uno spazio di misura, allora la funzione  $m^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  e tale che  $E \mapsto \inf \{ m(F) \mid F \supseteq E, F \in \mathcal{E} \}$  è una misura esterna e  $m^*|_{\mathcal{E}} = m$ .

**Osservazione 6.3.** In particolare, per il metodo di Carathéodory, si ha  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{m^*}$  e  $(X, \mathcal{E}_{m^*}, m^*|_{\mathcal{E}_{m^*}})$  è uno spazio di misura completo che estende  $(X, \mathcal{E}, m)$ .

Questo significa che, con tale metodo, è possibile completare gli spazi di misura.

Dato uno spazio di misura  $(X, \mathcal{E}, m)$ , si può definire la  $\sigma$ -algebra

$$\overline{\mathcal{E}} = \{ E \cup N' \mid E \in \mathcal{E} \text{ e } \exists N \text{ trascurabile} : N' \subseteq N \}$$

che contiene  $\mathcal{E}$  e tale che la misura  $\bar{m} : \bar{\mathcal{E}} \rightarrow [0, +\infty]$ , con  $E \cup N' \mapsto m(E)$  è una misura completa che estende  $m$ . Si nota che, in generale,  $\bar{\mathcal{E}} \neq \mathcal{E}_{m^*}$ , ma per il resto della trattazione, si ignorerà questo particolare.

### 6.3 Misura di Lebesgue