NOTE DI ANALISI FUNZIONALE

Manuel Deodato

Indice

1 Strutture fondamentali in analisi funzionale 3

1.1 Spazi vettoriali e dimensioni di spazi 3

1.2 Spazi metrici e spazi normati 3

1.3 Alcuni spazi importanti 5

1 Strutture fondamentali in analisi funzionale

1.1 Spazi vettoriali e dimensioni di spazi

Si ricorda che uno spazio vettoriale V su un certo campo $\mathbb{K}$, come $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, ha definite due operazioni:

$$+ : V \times V \to V \text{ (addizione tra vettori)}$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V \text{ (prodotto per uno scalare)}$$

Alcuni campi vettoriali sono $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$ eccetera, ma anche l'insieme delle funzioni continue in un intervallo:

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ è continua}\} \tag{1.1.1}$$

La differenza tra i primi e quest'ultimo è la *dimensione*, che non si riferisce alla cardinalità dell'insieme.

Definizione 1.1 (Dimensione finita)
Uno spazio vettoriale V è detto avere dimensione finita se ogni insieme linearmente indipendente di vettori di V è finito in termini di cardinalità.

Uno spazio vettoriale infinito-dimensionale, allora, è uno che non ha dimensione finita. L'insieme $C([0,1])$ ha dimensione infinita perché

$$E = \{f_n(x) = x^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \tag{1.1.2}$$

è linearmente indipendente e ha cardinalità infinita.

1.2 Spazi metrici e spazi normati

Definizione 1.2 (Norma e spazio normato)
Una norma su uno spazio vettoriale V è una funzione

$$\|\cdot\| : V \to [0, +\infty) \tag{1.2.1}$$

che soddisfa:

(n1). $\|v\| = 0 \iff v = 0, \ \forall v \in V$;

(n2). $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall v \in V$;

(n3). $\forall v_1, v_2 \in V,\ \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

Uno spazio vettoriale V equipaggiato con $\|\cdot\|$ è detto *spazio normato*.

Definizione 1.3 (Semi-norma)

Una semi-norma è sempre una funzione $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ che soddisfa (n2) e (n3), ma non necessariamente (n1).

Definizione 1.4 (Distanza)

Sia X un insieme; la funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ è detta distanza se soddisfa:

(d1). $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(d2). $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$;

(d3). $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Teorema 1.1 (Metrica indotta da una norma)

Se $\|\cdot\|$ è una norma su uno spazio vettoriale V, allora

$$d(v, w) := \|v - w\| \tag{1.2.2}$$

è una distanza.

Dimostrazione. Evidentemente (n1) $\Leftarrow$ (d1). Da (n2), invece, si nota che

$$\|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1|\,\|w - v\| = \|w - v\|$$

quindi soddisfa (d2). Infine, da (n3) si ottiene (d3) perché:

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|v - w + u - u\| \leq \|v - u\| + \|u - w\| = d(v, u) + d(u, w)$$

$\square$

Prendendo $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, la **norma Euclidea** è data da:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \tag{1.2.3}$$

Un'altra norma che si può definire su questi spazi è:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \tag{1.2.4}$$

Più in generale, si può definire un'intera famiglia di norme su questi spazi:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \;,\; 1 \leq p < \infty \tag{1.2.5}$$

Si può dimostrare anche che per x fissato, mandando $p \to +\infty$, la norma $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$.

1.3 Alcuni spazi importanti

Sia X uno spazio metrico; lo spazio

$$C_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ continua e limitata}\} \tag{1.3.1}$$

Per esempio, $C_\infty([0,1]) = C([0,1])$; inoltre, vale il seguente.

Teorema 1.2

$C_\infty(X)$ è uno spazio vettoriale e

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in X} |u(x)| \tag{1.3.2}$$

è una norma su $C_\infty(X)$.

Dimostrazione. È facile verificare che sia uno spazio vettoriale; si mostra che $\|u\|_\infty$ è una norma su $C_\infty(X)$. Si nota che (n1) e (n2) sono immediate, mentre per (n3) si può usare la disuguaglianza triangolare del modulo:

$$|u(x) + v(x)| \leq |u(x)| + |v(x)| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

per cui

$$\|u+v\|_\infty = \sup_{x \in X} |u(x) + v(x)| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$$

visto che $\|u\|_\infty$ è un numero. □

Osservazione 1.1. Si nota che $u_n \to u$ in $C_\infty(X)$ è equivalente a richiedere che $u_n \to u$ uniformemente perché

$$\|u_n - u\|_\infty \to 0,\, n \to +\infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\, \forall x \in X,\, |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$$

che è la definizione di convergenza uniforme in X.

Ora si considera lo spazio

$$\ell^p = \left\{ \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \mid \|a\|_p < \infty \right\} \tag{1.3.3}$$

dove la norma è:

$$\begin{aligned} \|a\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |a_j|^p \right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty \\ \|a\|_\infty &= \sup_{1 \leq j \leq \infty} |a_j| \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Ad esempio, la successione $\{1/j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^p$ per $p > 1$, ma non per $p = 1$ perché non sarebbe convergente.

Riprendere da 48:00