Compito 26 maggio 2022

Si consideri una particella di massa m che si muove sul piano, confinata da una forza centrale armonica, la cui Hamiltoniana è

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\alpha\,\hat{r}^2\,, \qquad \hat{p}^2 \equiv \sum_i \hat{p}_i^2\,, \quad \hat{r}^2 \equiv \sum_i \hat{x}_i^2\,.$$

(a) Definire le unità naturali del problema, che permettono di riscrivere l'equazione di Schrödinger in termini di quantità adimensionali. In particolare, scrivere la scala di lunghezza, di tempo e di energia del problema.

(b) Calcolare lo spettro energetico e le degenerazioni dei livelli.

(c) Scrivere esplicitamente le funzioni d'onda dello stato fondamentale e dei primi stati eccitati.

(d) Calcolare la posizione media e l'impulso medio della particella nello stato fondamentale e nei primi stati eccitati. Calcolare la distanza media dal centro per il livello fondamentale.

(e) Calcolare la probabilità che la particella nello stato fondamentale si trovi ad una distanza $r \leq r_\star$, e la probabilità che abbia un impulso $|\mathbf{p}| > p_\star$ ($r_\star > 0$ e $p_\star > 0$ sono valori generici).

La particella è adesso soggetta ad una forza aggiuntiva costante F lungo uno degli assi.

(f) Assumendo F piccola, calcolare le correzioni allo spettro, al primo ordine in F, sullo stato fondamentale e i primi stati eccitati.

(g) Assumendo F piccola, calcolare al secondo ordine in F la correzione allo spettro per il livello fondamentale. Discutere la validità dell'approssimazione al secondo ordine.

(h) Calcolare esattamente lo spettro in presenza di F. Confrontare con il calcolo perturbativo.

Consideriamo adesso due particelle identiche fermioniche di spin 1/2 soggette al potenziale armonico introdotto sopra, la cui Hamiltoniana è

$$\hat{H}_2 = \sum_{a=1}^{2} \left(\frac{\hat{p}_a^2}{2m} + \frac{1}{2}\alpha\,\hat{r}_a^2 \right)\,.$$

(i) Assumendo che l'Hamiltoniana delle due particelle non dipenda dallo spin, scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale e dei primi stati eccitati, tenendo conto degli stati di spin.

(l) Rispondere alla stessa domanda in (i), assumendo un'interazione spin-spin del tipo

$$\hat{H}_{\rm spin} = \kappa\, \boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2\,,$$

con $\kappa > 0$.

Riportiamo per referenza le funzioni d'onda in rappresentazione di Schrödinger dei primi due livelli dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \;\;;\quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\frac{x}{\gamma} e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$$

dove γ è la lunghezza caratteristica dell'oscillatore armonico.