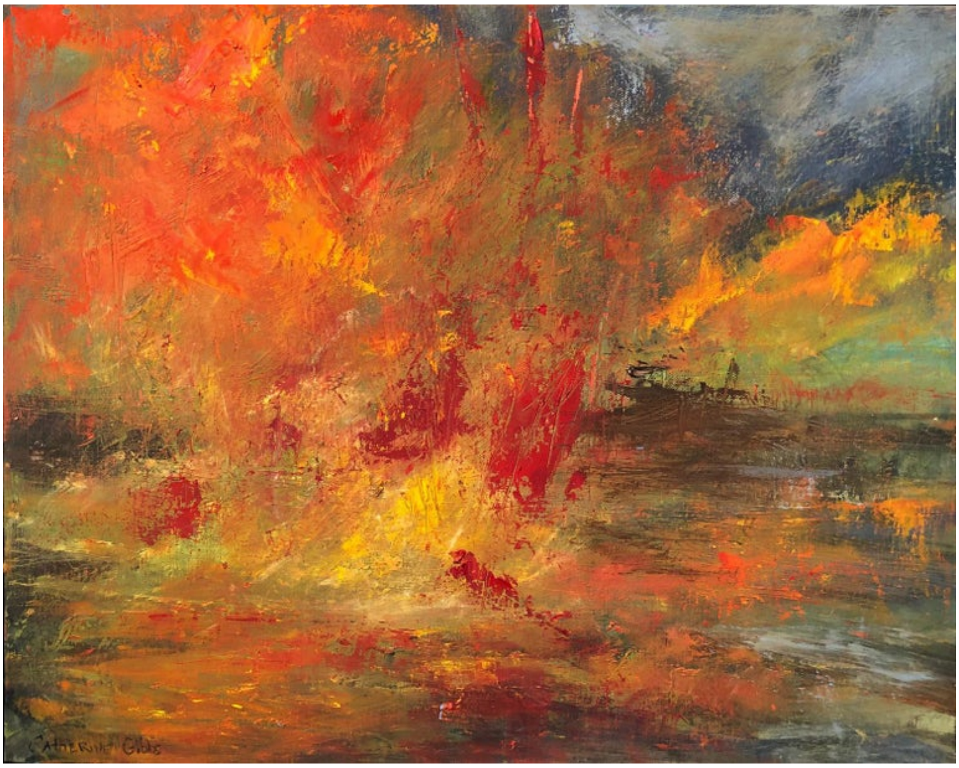
APPUNTI DI
ANALISI 3

MANUEL DEODATO



Indice

1 Teoria della misura e dell'integrazione

Si costruisce una teoria della misura per spazi euclidei che sia compatibile con i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

1.1 Misura esterna

Si considerano gli oggetti fondamentali di $\mathbb{R}^d$, al variare di d, cioè, rettangoli per $d = 2$, parallelepipedi per $d = 3$ e così via. Questi sono della forma

$$I = \prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}^d$$

con $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, dove ogni $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo reale. Il loro volume è dato da

$$|I| = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

Definizione 1.1 (Misura esterna). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme generico. Dato un suo generico ricoprimento di plurintervalli chiusi $S = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ e data la funzione

$$\sigma(S) = \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k|$$

si definisce la misura esterna di E come

$$|E|_e := \inf_{S} \sigma(S)$$

che ha valori in $[0, +\infty]$.

Osservazione 1.1. Questa funzione misura esterna è ben definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, cioè su ogni possibile sottoinsieme di $\mathbb{R}^d$ e ha valori in $[0, +\infty]$. Per costruire una buona misura e arrivare alla misura di Lebesegue, si vorrà limitare l'intervallo di definizione della misura esterna ad una certa porzione di *sottoinsiemi buoni* di $\mathbb{R}^d$, che si chiameranno *insiemi misurabili* (secondo Lebesgue).

Ora si analizzano alcune proprietà della misura esterna.

Definizione 1.2 (Insiemi non sovrapposti). Dati due plurintervalli I_k, I_j, questi si dicono *non sovrapposti* se $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_j = \emptyset$, per $k \neq j$, cioè la frontiera non conta.

Teorema 1.1. Sia I un plurintervallo; allora $|I|_e = |I|$, cioè la misura esterna coincide con la misura usuale.

Teorema 1.2. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, con $A \subseteq B$; allora $|A|_e \leq |B|_e$.

Corollario 1.2.1. Siano $E, E' \subseteq \mathbb{R}^d$, con $E' \subseteq E$ e $|E|_e = 0$; allora $|E'|_e = 0$.

Da queste prime proprietà, si può vedere che, dato un insieme numerabile di $\mathbb{R}^d$

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x_k\}\,,\ x_k \in \mathbb{R}^d$$

allora $|E|_e = 0$.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, si trova un ricoprimento di E dato da $S_\varepsilon = \{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ tale che $|I_k| = \varepsilon/2^k$; allora

$$\sigma(S_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| = \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon$$

quindi, per definizione:

$$|E|_e \leq \sigma(S_\varepsilon) = \varepsilon$$

quindi si può rendere piccola a piacere, da cui la tesi. □

Da questa osservazione, segue direttamente che l'insieme dei numeri razionali è un insieme *piccolo*, nel senso che ha misura esterna nulla.

Teorema 1.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^d$; allora, fissato $\varepsilon > 0$, si trova un insieme aperto $G \subseteq \mathbb{R}^d$ tale che $E \subseteq G$ e

$$|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato; allora esiste un ricoprimento chiuso $S_\varepsilon = \{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ di E tale che

$$\sigma(S_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \leq |E|_e + \frac{\varepsilon}{2}$$

Tale ricoprimento esiste perché, per definizione

$$|E|_e = \inf_S \sigma(S)$$

quindi si può prendere il ricoprimento che soddisfa tale estremo inferiore e *allargarlo di ε*. Ora si costruiscono degli intervalli I_k^* tali che $I_k \subset \mathring{I}_k^*$ e che

$$|I_k^*| \leq |I_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

per cui si può definire

$$G := \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathring{I}_k^*$$

che è aperto perché tutti gli $\mathring{I}_k^*$ sono aperti. Si vede che soddisfa $E \subset G$ per costruzione e

$$|G|_e \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k^*| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| + \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \leq |E|_e + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = |E|_e + \varepsilon$$

da cui la tesi. □

Teorema 1.4. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^d$; allora $\exists H \subseteq \mathbb{R}^d$ della forma

$$H = \bigcap_{j=1}^{+\infty} G_j$$

con G_j aperti, tale che $E \subseteq H$ e $|E|_e = |H|_e$.

Dimostrazione. Per il teorema precedente (1.3), dato $\varepsilon = 1/k$, si trova una famiglia numerabile di aperti $G_k \supseteq E$ tali che

$$|G_k|_e \leq |E|_e + \frac{1}{k}$$

Preso $H := \bigcap_{k=1}^{+\infty} G_k$, allora $G_k \supseteq H \supseteq E,\ \forall k$, quindi

$$|E|_e \leq |H|_e \leq |G_k|_e \leq |E|_e + \frac{1}{k}$$

Prendendo il limite per $k \to +\infty$, visto che $|E|_e$ e $|H|_e$ non dipendono da k, si rimane con $|E|_e \leq |H|_e \leq |E|_e$, da cui la tesi. □

Osservazione 1.2. Un insieme ottenuto come intersezione numerabile di aperti è chiamato G_δ; il teorema sopra, quindi, permette di trovare sempre un certo insieme G_δ che ha stessa misura dell'insieme in questione e lo contiene. Il vantaggio è legato alla struttura che gli insiemi G_δ hanno rispetto a sottoinsiemi generici di $\mathbb{R}^d$, che spesso è preferibile. Si nota, infine, che insiemi ottenuti come unione numerabile di chiusi si indica con F_σ.

1.2 Misurabilità

Definizione 1.3 (Insieme misurabile). Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, con $G \supseteq E$, tale che $|G \setminus E|_e < \varepsilon$. In questo caso, la misura di E è data da $|E| := |E|_e$.

Di seguito, si enunciano alcune proprietà degli insiemi misurabili.

Proposizione 1.1. Se $E \subseteq \mathbb{R}^d$ è aperto, allora è misurabile. Inoltre, se $E \subseteq \mathbb{R}^d$ è tale che $|E|_e = 0$, allora è misurabile.

Dimostrazione. Per vedere il secondo punto, si osserva che, per il teorema 1.3, si trova un aperto $E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^d$ tale che $|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon = \varepsilon$, quindi[1] $|G \setminus E|_e \leq |G|_e \leq \varepsilon$. $\square$

Osservazione 1.3. Si è visto che per $E \subseteq \mathbb{R}^d$, si può trovare sempre una aperto che lo contiene tale che $|G|_e \leq |E|_e + \varepsilon$, ma questa condizione non coincide con quella di misurabilità. Infatti, si nota che

$$G = E \cup (G \setminus E) \implies |G|_e \leq |E|_e + |G \setminus E|_e$$

ma non si riesce a dedurre che $|G \setminus E|_e < \varepsilon$.

Teorema 1.5. Valgono i seguenti punti.

(a). Se $\{E_k\}_{k=1}^{+\infty}$ sono misurabili, allora $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ è misurabile.

(b). Se F è chiuso, allora è misurabile.

(c). Se I è un intervallo, allora $I = \mathring{I} \cup \partial I$ e $|\partial I| = 0$.

Dimostrazione 1.5a. Visto che gli E_k sono tutti misurabili, allora $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G_k \supset E_k$ aperto tale che $|G_k \setminus E_k|_e < \varepsilon / 2^k$; definendo

$$G := \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k$$

questo è aperto per costruzione e[2]

$$E_k \subset G_k \Rightarrow E \subset G \ ; \quad G \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} (G_k \setminus E_k)$$

[1] La prima disuguaglianza fa uso del fatto che $G \setminus E \subseteq G$.

[2] Infatti $\forall k$, $E_k \subset G_k \Rightarrow \bigcup_k E_k \subset \bigcup_k G_k$. Inoltre, $x \in G \setminus E$ implica che $\exists k_0$ tale che $x \in G_k$ e che $\forall k$, $x \notin E_k$; allora $x \in \bigcup_k (G_k \setminus E_k)$ perché $x \in G_{k_0} \setminus E_{k_0}$.

Allora

$$|G \setminus E|_e \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |G_k \setminus E_k|_e \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

da cui la tesi. $\square$

Per dimostrare che ogni chiuso è misurabile (1.5b), si usa il seguente lemma.

> **Lemma 1.5.1.** Siano $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ due sottoinsiemi tali che $d(E_1, E_2) > 0$; allora $|E_1 \cup E_2|_e = |E_1|_e + |E_2|_e$

Dimostrazione. Sia $\delta = d(E_1, E_2) > 0$; allora, nell'inf della definizione di $|E_1 \cup E_2|_e$, ciascun ricoprimento S candidato all'essere l'estremo inferiore si può sostituire con un S' tale che ogni rettangolo I_k abbia diametro

$$\operatorname{diam} I_k := \sup \{|x - y| \mid x, y \in I_k\}$$

pari o inferiore a un certo arbitrario $\varepsilon < \delta$. Questo è sempre possibile farlo perché si ha $\sigma(S) = \sigma(S')$, visto che si è solo spezzato ogni rettangolo in sotto-rettangoli più piccoli che, quindi, restituiscono stessa area di quelli originari. In questo modo, però, non può esistere alcun rettangolo I_k che sia tale da intersecare entrambi gli insiemi, quindi si può spezzare un ricoprimento S in base a quale dei due insiemi tocca:

$$|E_1 \cup E_2|_e = \inf_S \sigma(S) = \inf_{S_1, S_2} [\sigma(S_1) + \sigma(S_2)] = \inf_{S_1} \sigma(S_1) + \inf_{S_2} \sigma(S_2) = |E_1|_e + |E_2|_e$$

da cui la tesi. $\square$

Dimostrazione 1.5b. Si assume preliminarmente F compatto, per poi estendere il risultato al caso generale. Sia $G \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto contenente F e tale che $|G| \leq |F|_e + \varepsilon$, per $\varepsilon > 0$; si deve arrivare a mostrare che $|G \setminus F|_e < \varepsilon$. Intanto si nota che, grazie alla compattezza di F, si può usare il lemma 1.5.1:

$$G = (G \setminus F) \cup F \implies |G| = |F|_e + |G \setminus F|_e \implies |G \setminus F|_e = |G| - |F|_e$$

Ma visto che $|G| \leq |F|_e + \varepsilon$, allora si ottiene la tesi. Ora si deve estendere la dimostrazione a F chiuso, senza la condizione che sia necessariamente limitato, quindi compatto; per farlo, si scrive

$$F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(F \cap \overline{B}_k(0)\right)$$

con $\overline{B}_k(0)$ palla chiusa di centro l'origine e raggio k. Si nota che ogni F_k è chiuso, perché intersezione di chiusi, e limitato perché $\overline{B}_k(0)$ è limitato. Ne segue che ogni F_k è compatto, quindi misurabile per quanto appena detto; per il teorema 1.5a, allora, anche F è misurabile. $\square$

Da questi risultati appena visti, si ottengono, come corollario, i seguenti punti.

Corollario 1.5.1. Valgono i seguenti punti.

(a). Se A è misurabile, allora $\mathbb{R}^d \setminus A$ è misurabile.

(b). Se gli A_i sono misurabili, allora $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ è misurabile.

(c). Se $E_1 \subset E_2$ sono misurabili, allora $|E_2 \setminus E_1| = |E_2| - |E_1|$ e, quindi, $E_2 \setminus E_1$ è misurabile.

Il punto 1.5.1a permette di dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 1.2. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ è misurabile $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F \subseteq \mathbb{R}^d$ chiuso con $F \subset E$ tale che $|E \setminus F| < \varepsilon$.

Dimostrazione. Per il corollario 1.5.1a, E è misurabile se e solo se E^c[1] è misurabile, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$, si trova un aperto $G \supset E^c$ tale che $|G \setminus E^c|_e < \varepsilon$. Ora, G è aperto, quindi misurabile e, dunque, il suo complementare $F := G^c$ è un chiuso misurabile. Inoltre, visto che $E^c \subset G$, allora $E \supset F$ ed essendo $G \setminus E^c = E \setminus F$, si ha la tesi. $\square$

Teorema 1.6. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^d$; allora sono equivalenti i seguenti punti:

(a). E è misurabile;

(b). $E = H \setminus Z$ con $|Z| = 0$ e H è un G_δ;

(c). $E = H' \cup Z'$, con $|Z'| = 0$ e H' è un F_σ.

Il seguente teorema fornisce una visione alternativa e più generale (perché indipendente dalla struttura dello spazio in cui si lavora) per definire la misurabilità.

Teorema 1.7 (Teorema di Carathéodory). Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^d$ è misurabile se e solo se $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, si ha

$$|A|_e = |A \cap E|_e + |A \setminus E|_e$$

Teorema 1.8. Sia $\{E_k\}_{k=1}^{+\infty}$ una famiglia di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^d$; allora valgono i seguenti punti:

(a). se $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$, allora $\left|\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right| = \sum_{k=1}^{+\infty} |E_k|$;

[1] Con c all'apice si intende il complementare.

(b). se $E_k \nearrow E$, cioè $E_k \subseteq E_{k+1}$ per ogni k, definendo $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$, allora $|E| = \lim\limits_{k\to+\infty} |E_k|$;

(c). se $E_k \searrow E$, cioè $E_{k+1} \subseteq E_k$ per ogni k, con $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$, e se, inoltre, $\exists k : |E_k| < +\infty$, allora $|E| = \lim\limits_{k\to+\infty} |E_k|$.

Dimostrazione 1.8a. Per ogni k, si usa la prop. 1.2 per dire che si trova un F_k tale che $|E_k \setminus F_k| < \varepsilon/2^k$. Visto che gli F_k sono disgiunti per definizione, allora si può usare il lemma 1.5.1 per dire che

$$\left|\bigcup_{k=1}^{m} F_k\right| = \sum_{k=1}^{m} |F_k|, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

Inoltre

$$\bigcup_{k=1}^{m} F_k \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \implies \sum_{k=1}^{m} |F_k| \leq \left|\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right|, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

Visto che vale $\forall m \in \mathbb{N}$, allora è anche vero che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |F_k| \leq \left|\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right|$$

da cui

$$\left|\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right| \geq \sum_{k=1}^{+\infty} |F_k| > \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|E_k| - \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} |E_k| - \varepsilon, \ \forall \varepsilon$$

da cui $\left|\bigcup_k E_k\right| \geq \sum_k |E_k|$. Al contempo, però, è sempre vera la disuguaglianza

$$\left|\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |E_k|$$

da cui la tesi. $\square$

Dimostrazione 1.8b. Visto che $\forall k,\ E_k \subseteq E_{k+1}$, si può definire equivalentemente

$$E := E_1 \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} (E_{k+1} \setminus E_k)$$

in modo che siano tutti disgiunti. Si può, quindi, usare il corollario 1.5.1c, assumendo che $\forall k, |E_k| < +\infty$, e il punto 1.8a per scrivere che

$$|E| = |E_1| + \sum_{k=1}^{+\infty} |E_{k+1} \setminus E_k| = |E_1| + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(|E_{k+1}| - |E_k|\Big)$$

Questa espressione è tale da elidere ciascun termine tranne "l'ultimo", perciò:

$$|E| = \lim_{k \to +\infty} |E_k|$$

da cui la tesi.

Per dimostrarlo nel caso generale in cui non si assume che ogni E_k abbia misura finita, si usa un'altra strada; intanto si definiscono gli $F_k := E_k \setminus E_{k-1}$, con $E_0 = \emptyset$, per cui

$$E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k$$

Ora, gli F_k sono a due a due disgiunti, pertanto si può usare il punto 1.8a per scrivere che

$$|E| = \sum_{k=1}^{+\infty} |F_k|$$

In maniera del tutto analoga, si ha che

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \implies |E_n| = \sum_{k=1}^{n} |F_k|$$

Prendendo il limite di questa espressione, si vede che

$$\lim_{n \to +\infty} |E_n| = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} |F_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} |F_k| = |E|$$

da cui la tesi. □

Dimostrazione 1.8c. Si usa il fatto che $\exists k_0 : E_{k_0}$ ha misura finita per ricondurre la dimostrazione al punto precedente, cioè al caso crescente. Infatti, avendo tutti insiemi di misura finita da k_0 in poi e avendo definito E come l'intersezione di questi, si può far partire tale intersezione direttamente da $k = k_0$. A questo punto, per tradurre il caso (c) al caso (b), dopo aver rinominato gli indici prendendo $k_0 = 1$ e tutti gli altri di seguito, si definisce

$$F_k := E_1 \setminus E_k$$

Visto che gli E_k sono decrescenti, F_k è crescente e, quindi, per il punto (b) e il corollario 1.5.1c:

$$|F| = \lim_{k \to +\infty} |E_1 \setminus E_k| = |E_1| - \lim_{k \to +\infty} |E_k|$$

Però si nota che

$$F = \lim_{k \to +\infty} E_1 \setminus E_k = E_1 \setminus E \implies |F| = |E_1| - |E|$$

Combinando le due espressioni, si ottiene la tesi. $\square$

1.3 Misurabilità di funzioni

Definizione 1.4 (Misurabilità di una funzione). Dato $E \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile, si dice che $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione *misurabile* (secondo Lebesgue) se, $\forall a \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{x \in E \mid f > a\}$ è misurabile.

Più semplicemente, la notazione per $\{x \in E \mid f > a\}$ si indicherà con $\{f > a\}$.

Proposizione 1.3. Sia f misurabile; allora sono equivalenti i seguenti punti:

(a). $\{f \geq a\}$ è misurabile;

(b). $\{f < a\}$ è misurabile;

(c). $\{f \leq a\}$ è misurabile.

Osservazione 1.4. La misurabilità di una funzione, allora, è verificata anche per cambiamenti della funzione stessa su insiemi a misura nulla.

Proposizione 1.4. Siano f, g due funzioni misurabili; allora:

(a). $f + c$ è misurabile;

(b). cf è misurabile;

(c). $f + g$ è misurabile;

(d). f/g è misurabile se $g \neq 0$ q.o.

Teorema 1.9. Sia $\{f_k\}_k$ una successione di funzioni misurabili; allora $\sup_k f_k$ e $\inf_k f_k$ sono misurabili e anche

$$\limsup_k f_k \qquad \liminf_k f_k$$

sono misurabili e, quindi, anche $\lim_k f_k$ è misurabile.

Teorema 1.10. Sia $\phi \in C(\mathbb{R})$ e sia f finita quasi ovunque; se f è misurabile, allora $\phi \circ f$ è misurabile.

Alcuni esempi importanti di applicazione del teorema precedente è dato dalle funzioni $\phi \circ f$ della forma $|f|$, $|f|^p$, oppure $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \min\{f, 0\}$, quindi con $f = f^+ - f^-$.

Definizione 1.5 (Funzione semplice). Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; si dice che f è *semplice* se esistono $N \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$ e $E_k \subset E$ disgiunti tali che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}(x)$$

Proposizione 1.5. Data f semplice, questa è misurabile $\iff$ gli insiemi E_k sono misurabili.

Teorema 1.11. Valgono i seguenti punti.

(a). Data $f : E \to \mathbb{R}$, questa è limite puntuale di funzioni semplici. In altri termini, $\forall f : E \to \mathbb{R}$, esiste una successione $\{f_k\}$, con f_k semplici, tale che $f_k(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$.

(b). Se $f \geq 0$, allora la successione al punto (a) si può costruire crescente, cioè tale che $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$.

(c). Se f è misurabile, allora la successione al punto (a) si può scegliere in modo tale che le funzioni f_k siano misurabili.

Dimostrazione 1.11b. Sia $f \geq 0$; si definiscono gli intervalli

$$\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right]$$

e si definisce la successione

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{j-1}{2^k} & , \text{ se } \dfrac{j-1}{2^k} \leq f(x) \leq \dfrac{j}{2^k} \\ \\ k & , \text{ se } f \geq k \end{cases}$$

con $j = 1, \dots, k2^k$. Allora, per definizione, si ha:

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{\left[\frac{j-1}{2^k} \leq f \leq \frac{j}{2^k}\right]} + k\chi_{\{f \geq k\}}$$

Riprendere dalla lezione 3