Compito 23 giugno 2022

Si consideri un sistema quantistico composto da un elettrone e un positrone (identico all'elettrone ma con carica opposta), che interagiscono attraverso il potenziale di Coulomb $U(r) = -\kappa/r$ dove r è la distanza tra le particelle e $\kappa = e^2$ (in CGS, oppure $\kappa = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ in SI), dove e è la carica dell'elettrone. I suoi stati legati formano il cosiddetto *positronio.*

(1) Scrivere l'operatore di Hamilton del sistema usando le coordinate $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ delle due particelle. Dire quali quantità del sistema si conservano.

(2) Riscrivere l'Hamitoniana usando la coppia di coordinate date dal vettore posizione $\boldsymbol{X}$ del centro di massa, e il vettore posizione relativa $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$. Scrivere gli autovalori dell'Hamiltoniano associati agli stati legati del sistema, senza trascurare i contributi associati al moto del centro di massa.

(3) Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale nel sistema del centro di massa e calcolare il raggio quadratico medio r_p del positronio nel suo stato fondamentale (cioè la distanza quadratica media tra le particelle, definita come $r_p = \sqrt{\langle|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^2\rangle}$).

(4) Scrivere le funzioni d'onda dei primi stati eccitati, con momento angolare $\ell = 0$ e $\ell = 1$, nel sistema del centro di massa, e calcolare il loro raggio quadratico medio.

(5) Supponiamo che il sistema sia nello stato fondamentale nel sistema di riferimento del centro di massa. Un osservatore in moto con velocità $\boldsymbol{V}$ rispetto al sistema del centro di massa come scriverebbe la funzione d'onda del positronio? A che autovalore della Hamiltoniana corrisponderebbe?

La probabilità di osservare l'annichilazione del positronio in fotoni è proporzionale alla probabilità che le due particelle vengano in contatto, e cioè siano ad una distanza più piccola di $\lambda_e = \hbar/(m_e c)$ dove c è la velocità delle luce (ricordatevi che il raggio di Bohr è dato da $r_B = \hbar/(m_e c\alpha) \approx 0.53 \times 10^{10}$m e $\alpha \approx 1/137$, quindi $\lambda = \alpha r_B$).

(6) Assumendo che il positronio sia nello stato fondamentale, calcolare la probabilità che le due particelle siano ad una distanza inferiore a λ_e. Dato che $\lambda_e \ll r_B$, nel calcolo è possibile usare approssimazioni, la cui validità deve essere debitamente giustificata.

(7) Assumendo adesso che il positronio sia in uno dei primi stati eccitati con momento angolare $\ell = 1$, calcolare la probabilità che le due particelle siano ad una distanza inferiore a λ_e. Dire come dipende tale risultato dal momento angolare L_z lungo l'asse $\hat{z}$.

Consideriamo adesso il fatto che l'elettrone e il positrone sono entrambe particelle di spin 1/2.

Assumiamo l'esistenza di un interazione spin-spin tra le particelle, cioè

$$H_{ss} = \beta\, \boldsymbol{s}_e \cdot \boldsymbol{s}_p$$

dove $\beta > 0$, e $\boldsymbol{s}_{e/p}$ sono gli operatori di spin dell'elettrone e del positrone.

(8) Descrivere lo spettro in presenza dell'interazione H_{ss}, e discuterne la degenerazione dei livelli.

Poniamo $\beta = 0$ e consideriamo adesso un interazione del tipo $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$, più precisamente

$$H_{ls} = \gamma\, \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}\,, \qquad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_e + \boldsymbol{s}_p\,,$$

dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare spaziale totale nel sistema del centro di massa.

(9) Discutere le leggi di conservazione in presenza di questa interazione. In particolare si conserva il momento angolare totale? Si conserva il momento angolare spaziale $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_e + \boldsymbol{L}_p$ (calcolato rispetto al centro di massa) e lo spin totale $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s}_e + \boldsymbol{s}_p$? Si conservano S^2 e L^2?

(10) Scrivere lo spostamento dei livelli energetici dei primi stati dello spettro assumendo l'interazione $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$ perturbativa, discutere i limiti di validità della approssimazione e la degenerazione dei livelli in presenza di questa perturbazione.

Alcune formule utili che riguardano le autofunzioni (parte radiale) del fondamentale e primi eccitati dell'atomo di idrogeno:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{r_B^{3/2}} e^{-r/r_B}\,, \qquad R_{20}(r) = \frac{1}{\sqrt{2} r_B^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2r_B}\right) e^{-r/(2r_B)}\,, \qquad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{24} r_B^{3/2}} \frac{r}{r_B} e^{-r/(2r_B)}\,.$$