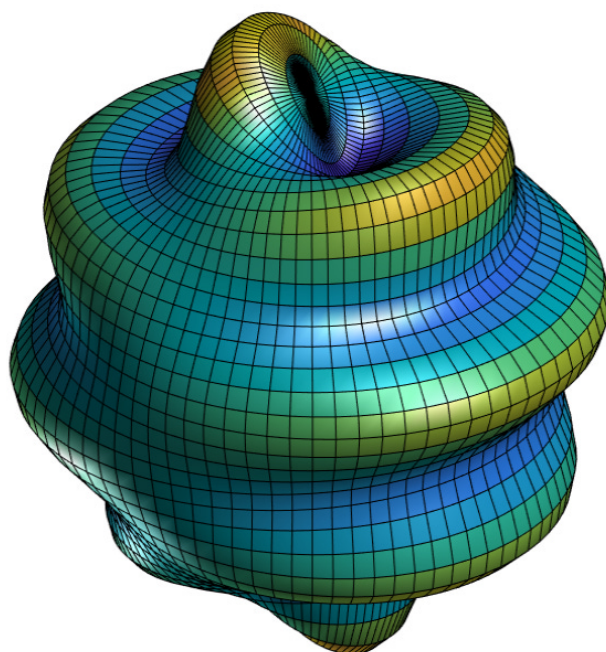


# APPUNTI DI GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

MANUEL DEODATO



# INDICE

<b>1</b>	<b>Teoria delle curve</b>	<b>3</b>
1.1	Introduzione	3
1.2	Riferimento ed equazioni di Frenet	7

# 1 | TEORIA DELLE CURVE

## §1.1 Introduzione

**Definizione 1.1 (Curva parametrizzata).** Una *curva parametrizzata* è un'applicazione  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^\infty(I)$ , con  $I$  intervallo aperto. Data  $t \in I$ , si può scrivere in componenti come

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con  $x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$  tutte di classe  $C^\infty(I)$ .

**Osservazione 1.1.** La necessità di definire la curva su un aperto, o quantomeno di poter estendere l'intervallo di definizione ad un aperto, deriva dal fatto che, in questo modo, si può effettivamente parlare di derivata piena anche per gli estremi, potendo trovare, infatti, un aperto che contiene interamente i punti di frontiera dell'intervallo di definizione. Se non si avesse questa possibilità, nel caso di  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , per esempio, non si potrebbe calcolare la derivata tradizionale in  $a$ , o  $b$ , perché si potrebbe solamente calcolare il limite destro o sinistro.

Si nota che, nel caso in cui  $I$  non fosse aperto, si estende l'intervallo di definizione ad  $A \supset I$  aperto.

Si parla di *traccia* della curva in riferimento all'immagine che genera dell'intero intervallo:  $\text{Tr } \alpha = \alpha(I)$ . La traccia rappresenta l'unione di ciascun punto di  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\forall t \in I$ . Per *velocità* della curva, invece, si intende la grandezza

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (1.1.1)$$

In realtà, questo rappresenta il *vettore velocità*, mentre la velocità vera e propria è data dalla sua norma  $\|\alpha'(t)\|$ .

**Esempio 1.1 (Retta parametrizzata).** Siano  $P, Q \in \mathbb{R}^3$ , con  $P \neq Q$ , due punti dello spazio; si definisce, allora, *retta parametrizzata* la curva

$$\alpha(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$$

La sua traccia è la retta affine passante per  $P$  e  $Q$ , e ha vettore velocità  $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$ ,

da cui  $\|\alpha'(t)\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$ , che è costante.

**Esempio 1.2 (Circonferenza parametrizzata).** Dato  $a \in \mathbb{R}$ , con  $a > 0$ , si definisce *circonferenza parametrizzata* come

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$$

il cui vettore velocità è dato da  $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$ , che non risulta costante, mentre la sua velocità  $\|\alpha'\| = a > 0$  sì. La traccia corrisponde ad una circonferenza nel piano  $z = 0$ , di centro l'origine e raggio  $a$ .

**Definizione 1.2 (Curva regolare).** Una curva parametrizzata  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  è detta *regolare* se  $\alpha'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ .

**Definizione 1.3 (Lunghezza d'arco).** Sia  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva; si definisce *lunghezza d'arco* la funzione

$$s : \begin{array}{ll} [a, b] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \end{array}$$

La lunghezza dell'intera curva  $\alpha$  è data da  $L(\alpha) = s(b)$ .

**Osservazione 1.2.** Si nota che per  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ , valendo  $\|\alpha'(t)\| = a$ , si ha:

$$s(t) = a \int_0^t du = ta \implies s(2\pi) = 2\pi a$$

Sia dato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $P \in \mathcal{P}([a, b])$  una sua partizione, tale che  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ ; allora la lunghezza di una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  approssimata a tale partizione è data da:

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \quad (1.1.2)$$

Si nota, dunque, che la lunghezza effettiva della curva coincide con

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([a, b])} L(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du \quad (1.1.3)$$

Si considera, una curva regolare  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ; visto che  $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ , allora

$s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ . Si può pensare alla lunghezza d'arco come  $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\alpha)]$ , che, essendo monotona perché si è appena osservato che  $s'(t) > 0$ , allora ha anche inversa  $t : [0, L(\alpha)] \rightarrow [a, b]$ . È, quindi, possibile definire la funzione

$$\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.1.4)$$

tale che  $\text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha)$  e  $\beta(s) = \alpha(t(s))$ , per cui

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t)\|}$$

per cui  $\|\beta'(s)\| = 1$ .

**Definizione 1.4 (Curva p.l.a.).** Se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva tale che  $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ , allora si dice che è *parametrizzata tramite lunghezza d'arco*, o *pla*.

**Osservazione 1.3.** In base a quanto detto prima, ogni curva regolare è *riparametrizzabile tramite lunghezza d'arco*.

**Esempio 1.3 (Elica).** Sia  $a > 0$ ; allora la mappa

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, z) &\longmapsto (a \cos u, a \sin u, z) \end{aligned}$$

definisce un cilindro di raggio  $a$  attorno all'asse  $z$ . Preso  $b > 0$  e presi i punti  $\{(t, bt)\}_{t \in \mathbb{R}}$ , relativi ad una retta passante per l'origine, aperto, si può definire la curva

$$\alpha(t) = \varphi(t, bt) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

che descrive un'elica destrorsa, visto che si è preso  $b > 0^a$ , di raggio  $a$  e passo  $b$ . Si nota che

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

da cui  $\alpha$  è regolare. Restringendola a  $[0, +\infty)$ , cioè considerando  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si ha:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t(s) \sqrt{a^2 + b^2} \implies t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

quindi:

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \alpha(t(s)) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ &= \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\end{aligned}$$

con  $\beta$  pla e, conseguentemente,  $\beta(\mathbb{R}) = \text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha) = \alpha(\mathbb{R})$ .

<sup>a</sup>Fosse stato  $b < 0$ , sarebbe stata un'elica sinistrorsa.

**Esempio 1.4 (Ellisse).** Siano  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e sia

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole definire una curva  $\alpha$  tale che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$

*Svolgimento.* Si nota che  $(x/a, y/b) \in S^1$ , cioè

$$\frac{x}{a} = \cos t \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

con  $S^1$  circonferenza unitaria e  $t \in [0, 2\pi)$ . Sia, allora

$$\begin{aligned}\alpha: [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (a \cos t, b \sin t, 0)\end{aligned}$$

e si vede che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$ . ■

**Esempio 1.5.** Sia

$$\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^3\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire  $\alpha$  tale che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{C}$ .

*Svolgimento.* Se si considera la secante  $y = tx$ , allora  $t^2 x^2 = x^3$ , ossia  $x = t^2$  e  $y = t^3$ . Ne segue che la curva che soddisfa la richiesta è  $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ . ■

**Esempio 1.6.** Sia

$$\mathcal{C} = \{(x, y, 0) \mid y^2 = x^3 + x^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire una curva  $\alpha$  tale che  $\text{Tr } \alpha = \mathcal{C}$ .

*Svolgimento.* Si considera, come prima,  $y = tx$ , da cui  $x^3 + x^2(1 - t^2) = 0$ , e si vede che  $x = t^2 - 1$  e  $y = t^3 - t$ , quindi  $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t, 0)$ . ■

**Lemma 1.0.1.** Se  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono due mappe, allora

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{i=1}^3 f_i(t)g_i(t)$$

quindi

$$(f(t) \cdot g(t))' = \sum_{i=1}^3 [f'_i(t)g_i(t) + f_i(t)g'_i(t)]$$

□

**Definizione 1.5 (Versore tangente).** Data una curva riparametrizzabile  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e la sua riparametrizzazione tramite lunghezza d'arco  $\beta(s)$ , si definisce il *versore tangente* ad  $\alpha$  come  $T(s) = \beta'(s)$ .

**Proposizione 1.1.** Se  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva pla, allora  $T'(s) \cdot T(s) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per quanto visto,  $\|T(s)\|^2 = T(s) \cdot T(s) = 1$ ; per il lemma precedente 1.0.1, si ha  $2T'(s) \cdot T(s) = (T(s) \cdot T(s))' = 0$ . □

**Definizione 1.6 (Curvatura).** Data una curva pla  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e il suo versore tangente  $T(s)$ , allora se ne definisce la *curvatura* come

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

## §1.2 Riferimento ed equazioni di Frenet

**Definizione 1.7 (Curva di Frenet).** Una curva regolare  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è detta *di Frenet* se la sua pla  $\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è tale che  $k(s) > 0$ ,  $\forall s \in [0, L(\alpha)]$ .

Visto che  $k(s) = \|T'(s)\|$ , allora si può scrivere

$$T'(s) = k(s)N(s) \tag{1.2.1}$$

che è nota come **l'equazione di Frenet**. Si nota che  $N(s)$  deve avere norma unitaria perché la norma di  $T'(s)$  è data interamente da  $k(s)$ ; inoltre,  $N(s)$  è un versore ortogonale a  $T(s)$  perché si è dimostrato (prop. 1.1) che  $T(s) \perp T'(s)$ . Se ne ricava la seguente definizione.

**Definizione 1.8 (Versori normale e binormale).** Dato  $T(s)$  versore tangente di una certa curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si definiscono  $N(s)$  *versore normale principale* e  $B(s) = T(s) \times N(s)$  *versore binormale*.

Evidentemente, si ha  $\|N(s)\| = \|B(s)\| = 1$  e  $T(s) \cdot N(s) = T(s) \cdot B(s) = N(s) \cdot B(s) = 0$ . Ne segue che  $(T(s), N(s), B(s))$ ,  $\forall s \in I$  forma una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ , nota col nome di **riferimento di Frenet**.

Si nota che, essendo un versore, si ha  $N(s) \cdot N(s) = 1$ , quindi  $N'(s) \cdot N(s) = 0$  (per lo stesso ragionamento della prop. 1.1), dunque  $N'(s) \in \langle T(s), B(s) \rangle$ ; inoltre, essendo  $T(s) \cdot N(s) = 0$ , si ha

$$T'(s) \cdot N(s) + T(s) \cdot N'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot N(s)}_{=1} + T(s) \cdot N'(s) = 0$$

perciò si trova  $\tau(s)$  tale per cui

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad (1.2.2)$$

Questa è nota come **II equazione di Frenet**.

**Definizione 1.9 (Torsione).** Data una curva regolare  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta$  la sua pla, si definisce  $\tau(s)$  come la *torsione* di  $\beta$  nel punto  $s$ .

Ripetendo lo stesso ragionamento, si ha  $B(s) \cdot B(s) = 1 \Rightarrow B'(s) \cdot B(s) = 0$ , da cui  $B'(s) \in \langle T(s), N(s) \rangle$  e, essendo  $N(s) \cdot B(s) = 0$ , dalla derivata di  $T(s) \cdot B(s) = 0$ , si ha

$$T'(s) \cdot B(s) + T(s) \cdot B'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot B(s)}_{=0} + T(s) \cdot B'(s) = 0$$

quindi  $B'(s) \in \langle N(s) \rangle$ . Usando  $T(s) \cdot B(s) = 0$  e derivando  $N(s) \cdot B(s) = 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} N'(s) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) &= (-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) \\ &= \tau(s) \underbrace{B(s) \cdot B(s)}_{=1} + N(s) \cdot B'(s) = 0 \end{aligned}$$

cioè

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) \quad (1.2.3)$$

che è nota come **III equazione di Frenet**. Ricapitolando, le equazioni di Frenet stabiliscono delle relazioni tra le derivate dei versori ortonormali del riferimento di Frenet



e i versori stessi e sono:

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Ora si applicano i concetti visti alle curve studiate nella sezione precedente.

**Esempio 1.7.** Sia  $\alpha(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$  una curva parametrizzata (con  $P, Q \in \mathbb{R}^3$  e  $P \neq Q$ ). Si ha  $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$ , quindi la curva è regolare, quindi se ne può trovare una pla:

$$s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{PQ}\| du = t\|\overrightarrow{PQ}\| \implies t = \frac{s}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

quindi si ha  $\beta(s) = P + s \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$ . Allora il versore tangente è dato da

$$T(s) = \beta'(s) = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \implies T'(s) = 0$$

perciò  $k(s) = 0$  e, quindi,  $\alpha$  non è una curva di Frenet perché non ha curvatura positiva.

**Esempio 1.8.** Per  $a > 0$ , sia  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$  una circonferenza parametrizzata di raggio  $a$ . Evidentemente, si può vedere come un caso particolare di elica parametrizzata per  $b = 0$ , quindi si può fare uso del risultato trovato in precedenza:

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \left( a \cos \left( \frac{s}{a} \right), a \sin \left( \frac{s}{a} \right), 0 \right) \implies T(s) = \left( -\sin \frac{s}{a}, \cos \frac{s}{a}, 0 \right) \\ \Rightarrow T'(s) &= \underbrace{\frac{1}{a}}_{k(s)} \underbrace{\left( -\cos \frac{s}{a}, -\sin \frac{s}{a}, 0 \right)}_{N(s)} \end{aligned}$$

Si conclude che  $N(s) \perp z$  e punta proprio verso  $z$ ; inoltre, la circonferenza parametrizzata è una curva di Frenet perché ha curvatura positiva, essendo  $1/a > 0$  perché

$a > 0$  per assunzione. Infine:

$$B(s) = \begin{pmatrix} -\sin s/a \\ \cos s/a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/a \\ -\sin s/a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -\tau(s)N(s) = B'(s) = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0$$

**Esempio 1.9.** Si considera l'elica parametrizzata  $\alpha = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , con raggio  $a \in \mathbb{R}^{>0}$  e passo  $b \in \mathbb{R}$ . La sua pla è già stata ricavata; dato  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , si ottiene:

$$\beta(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{\sqrt{c}} \right), a \sin \left( \frac{s}{\sqrt{c}} \right), \frac{b}{\sqrt{c}} s \right)$$

da cui

$$T(s) = \frac{1}{c} \left( -a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right) \Rightarrow T'(s) = \underbrace{\frac{a}{c^2}}_{k(s)} \underbrace{\left( -\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right)}_{N(s)}$$

quindi, come nel caso della circonferenza,  $N(s) \perp z$  e punta verso di esso. Si ha:

$$B(s) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -a \sin s/c \\ a \cos s/c \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/c \\ -\sin s/c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} b \sin s/c \\ -b \cos s/c \\ a \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \Rightarrow \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = \frac{b}{c^2}$$

Da questo, si vede che

- se  $b > 0$ , allora l'elica è destrorsa e  $\tau(s) > 0$ ,
- se  $b < 0$ , allora l'elica è sinistrorsa e  $\tau(s) < 0$ ,
- se  $b = 0$ , si ha una circonferenza e  $\tau(s) = 0$ , con  $k(s) = 1/a$ .

Fissando  $a$ , si nota che, per  $b \rightarrow \pm\infty$ , si ha  $\tau(s) \rightarrow 0$  e  $k(s) = a/(a^2 + b^2) \rightarrow 0$ .

**Proposizione 1.2.** Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regolare; allora  $k_\alpha = 0 \iff \alpha(I)$  è contenuta in una retta.

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ( $\Leftarrow$ ) Se  $\alpha(I) \subseteq P + \langle v \rangle$ , per  $v$  versore generico, si considera il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} J & \xleftarrow{s} & I & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ & & & \searrow & \\ & & & \beta & \end{array}$$

cioè  $\alpha(I) = \beta(J) \subseteq P + \langle v \rangle$ , con  $\beta$  pla di  $\alpha$  (continuare ...).

□