

# DIVERGENZA DELLO SVILUPPO PERTURBATIVO PER L'OSCILLATORE ANARMONICO

MANUEL DEODATO

## INDICE

<b>1</b>	<b>Un esempio di divergenza</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Origine della divergenza</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Analiticità del dominio</b>	<b>5</b>
3.1	I teoremi di Kato e Kato-Rellich	5
3.2	Scaling di Symanzik	6

## I UN ESEMPIO DI DIVERGENZA

Molte serie perturbative in meccanica quantistica sono divergenti; l'origine di questa divergenza appare connessa con altri aspetti, apparentemente sconnessi, fra cui:

- la possibilità di ricostruire il risultato esatto da uno sviluppo asintotico;
- l'analiticità della struttura del problema in esame;
- la stabilità del sistema.

Si vuole studiare un esempio concreto per capire come approcciare il problema. A tal proposito, si usa, come sistema esempio, un oscillatore anarmonico descritto da

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4 \quad (1.1)$$

dove si sono scelti  $m = 1, \omega = 1$ . Esprimendo  $\hat{x}^4$  tramite gli operatori di creazione e distruzione, ci si convince che gli elementi di matrice della perturbazione possono connettere solamente stati che hanno  $|\Delta n| \leq 4$ . L'espansione perturbativa dell'energia è della forma  $E = 1/2 + \sum g^n E_n$ , mentre la funzione d'onda del fondamentale imperturbato è della forma  $\psi_0 \propto e^{-x^2/2}$ . Visto che la funzione d'onda dell' $n$ -esimo stato è un polinomio di grado  $n$  moltiplicato per  $\psi_0$ , si cerca soluzione della forma  $B(x)e^{-x^2/2}$  all'equazione differenziale

$$\left( -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}gx^4 \right) \psi = E\psi \quad (1.2)$$

Sostituendo l'*ansatz*, si trova

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - 2x \frac{dB}{dx} - gx^4 B + (2E - 1)B = 0$$

Essendo interessati particolarmente allo sviluppo dello stato fondamentale e visto che  $\hat{P}_a$  commuta con la perturbazione, lo stato fondamentale, che originariamente è pari, rimane pari; allora avrà senso la seguente scelta:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g^k B_k(x) \quad B_k(x) = \sum_{j=0}^{2k} A_{kj} x^{2j}$$

con  $A_{k0} = 1$  derivante dalla condizione  $B_k(0) = 1$ , che, a sua volta, serve a fissare il grado di libertà vacante del polinomio. Le energie si potranno scrivere come  $2E = \sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon_k g^k$ , dove  $\epsilon_0 = 1$ . La condizione di normalizzazione per queste funzioni d'onda è  $B_k(0) = 1$ . Sostituendo nell'equazione trovata per  $B$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} B_k'' - 2B_k' - x^4 B_{k-1} + \sum_{s=0}^k \epsilon_s B_{k-s} - B_k &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{2k} 2\ell(2\ell-1)A_{k,\ell}x^{2\ell-1} - 2 \sum_{j=1}^{2k} 2jA_{k,j}x^{2j} - \sum_{\ell=0}^{2k-2} A_{k-1,\ell}x^{2\ell+4} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{2k} A_{k,j}x^{2j} + \sum_{s=0}^k \epsilon_s \sum_{j=0}^{2k-2s} A_{k-s,j}x^{2j} = 0 \end{aligned}$$

Si adotta la convenzione per cui  $A_{k,j} = 0$  per  $j > 2k$ ; così facendo, sostituendo nella prima somma  $\ell = j + 1$  e nella terza  $\ell = j - 2$ , si trova che:

$$\sum_{j=0}^{2k} x^{2j} \left[ (2j+2)(2j+1)A_{k,j+1} - 4jA_{k,j} - A_{k-1,j-2} - A_{k,j} + \sum_{s=0}^k \epsilon_s A_{k-s,j} \right] = 0$$

Tutti i coefficienti di questo polinomio devono essere nulli. Usando che  $\epsilon_0 = 1$ , si trova che il termine  $s = 0$  cancella  $-A_{k,j}$ :

$$(2j+2)(2j+1)A_{k,j+1} - 4jA_{k,j} - A_{k-1,j-2} + \sum_{s=1}^k \epsilon_s A_{k-s,j} = 0 \quad (1.3)$$

Inoltre, il termine per  $s = k$  nella somma ha coefficiente  $A_{0,j}$ , che è pari a 1 per  $j = 0$  e nullo altrimenti; da questo, si ottiene una relazione ricorsiva per le energie  $\epsilon_k$ , quando siano noti i coefficienti  $A_{k,1}$ :

$$\epsilon_k = -2A_{k,1} - \sum_{s=1}^{k-1} \epsilon_s \quad (1.4)$$

Considerando, invece,  $j \neq 0$ :

$$(2j+2)(2j+1)A_{k,j+1} - 4jA_{k,j} - A_{k-1,j-2} + \sum_{s=1}^{k-1} \epsilon_s A_{k-s,j} = 0$$

Si nota che in questa espressione, il termine  $\epsilon_k$  non compare più. Si prende  $j = 2k$ , per cui  $A_{k,2k+1} = 0$ . Questo permette di trovare una relazione ricorsiva per  $A_{k,j}$ :

$$A_{k,j} = \frac{1}{4j} \left[ (2j+2)(2j+1)A_{k,j+1} - A_{k-1,j-2} + \sum_{s=1}^{k-1} \epsilon_s A_{k-s,j} \right] \quad (1.5)$$

con  $j = 2k, 2k-1, \dots, 1$ .

Trovati gli  $A_{k,1}$ , si possono determinare le energie  $\epsilon_k$ ; facendolo, si osserva che questi termini, di segno alterno, aumentano molto velocemente.

## 2 ORIGINE DELLA DIVERGENZA

Si considera lo studio della serie dell'energia relativa ad uno stato fondamentale (nello specifico, quello dell'oscillatore appena trattato); in generale, questa è data da:

$$E(g) = E_0 + \sum E_n g^n \quad (2.1)$$

Quando questa serie è divergente come nel caso trattato sopra (in cui  $E_n \sim n!$ ), questo vuol dire che  $E(g)$  non è analitica in  $g = 0$ . La motivazione per questa non-analiticità è proposta da Dyson e si basa sul fatto che, se fosse  $E(g)$  analitica in  $g = 0$ , esisterebbe un dominio di convergenza attorno a tale punto, sia questo  $|g| < R$ , e, in questo dominio, la somma della serie dovrebbe riprodurre esattamente  $E(g)$ . Tuttavia, per  $g < 0$ , l'Hamiltoniano non è limitato dal basso, quindi la funzione  $E(g)$  non può essere analitica.

Nel caso dell'oscillatore armonico imperturbato (quindi armonico), una particella nel fondamentale può decadere tramite effetto tunnel attraverso la barriera di potenziale e tale stato può essere unicamente metastabile; questo stesso effetto non può essere descritto tramite una teoria perturbativa, che

mantiene gli stati in  $\mathbb{L}^2$ . Allora, nel potenziale perturbato

$$V(x) = \frac{x^2 + gx^4}{2}$$

nel caso di  $g < 0$ , l'effetto tunnel è responsabile per la non-analiticità della funzione  $E(g)$ . Si afferma, inoltre, che la parte immaginaria di  $E(g)$  per  $g < 0$ , che restituisce lo spessore di linea e il tempo di dimezzamento, deve essere collegata con il comportamento divergente dei coefficienti perturbativi  $E_n$ . Questa relazione, si ottiene di seguito come relazione di dispersione.

### 3 ANALITICITÀ DEL DOMINIO

La mancanza di analiticità si può intendere come segue. Sia  $\hat{H}_0$  l'Hamiltoniano imperturbato al quale è associato un certo dominio  $D(\hat{H}_0) \subset \mathbb{L}^2$  dato da tutte quelle funzioni per cui  $\hat{H}_0$  risulta autoaggiunto. Per esempio, il dominio deve essere tale che  $\forall \psi \in D(\hat{H}_0)$

$$\int dx |\psi(x)|^2 x^2 < \infty$$

cioè il valore d'aspettazione del potenziale deve esistere. Sia, esempio,  $\psi_0 \sim 1/x^2$ ; per questa, si ha:

$$\int dx |\psi_0(x)|^2 x^2 < \infty \quad \int dx |\psi_0(x)|^2 x^4 \sim \int dx \frac{1}{x^4} x^4 \rightarrow \infty$$

In questo caso, la funzione  $\psi_0$  appartiene al dominio di  $\hat{H}_0$ , ma  $\psi_0 \notin D(\hat{H})$ . Questo discorso serve per dire che esistono stati perfettamente ammissibili dal punto di vista dall'Hamiltoniano imperturbato, ma che non lo sono da quello di  $\hat{H}$  perché, indipendentemente da quanto si prenda  $g$  piccolo, la perturbazione non potrà mai essere considerata tale.

#### 3.1 I teoremi di Kato e Kato-Rellich

##### TEOREMA 3.1 (KATO-RELLICH).

Sia  $\hat{H}(g)$  una famiglia di operatori con  $g \in S \subset \mathbb{C}$  e valgano i seguenti punti:

- (a).  $D(\hat{H}(g))$  è indipendente da  $g$ ;
- (b).  $\forall \psi \in D(\hat{H}(g))$ ,  $\langle \psi | \hat{H}(g) | \psi \rangle$  è una funzione analitica di  $g$  in  $S$ .

Allora  $\forall g_0 \in S$  e per ogni autovalore isolato  $E(g_0)$  relativo a  $\hat{H}(g_0)$ , esiste un intorno  $V_{g_0}$  tale che  $\hat{H}(g)$  ha un autovalore unico e isolato  $E(g)$  in un intorno di  $E(g_0)$ . La funzione  $E(g)$  è analitica in  $V_{g_0}$  ed esiste una funzione  $\psi_g$ , analitica in  $g$ , tale che

$$\hat{H}(g)\psi_g = E(g)\psi_g$$

Inoltre, la serie di Taylor di  $E(g)$  coincide con lo sviluppo perturbativo per  $\hat{H}(g)$ .

Questo teorema permette di concludere che, soddisfatte le sue condizioni, lo sviluppo perturbativo restituisce il risultato esatto. Una condizione sufficiente per la validità dei due punti del teorema è data dal seguente.

**TEOREMA 3.2 (KATO).**

Se esistono due numeri  $a, b$  tali che  $\forall \psi \in D(\hat{H}_0), \forall \psi \in D(\hat{V})$  risulta soddisfatta

$$\|\hat{V}\psi\| \leq a \|\hat{H}_0\psi\| + b \|\psi\| \quad (3.1)$$

allora le condizioni del teorema di Kato-Rellich sono soddisfatte.

Nel caso dell'oscillatore anarmonico, il problema sorge nella condizione (a) del teorema di Kato-Rellich: di fatto, la funzione  $E(g)$  non può essere espansa in  $g = 0$ , anche se è espandibile  $\forall g > 0$ . Quello che si verifica è che, man mano che si approssima lo zero, il raggio di convergenza dello sviluppo diventa sempre più piccolo fino a risultare nullo.

**3.2 Scaling di Symanzik**

Ora si considera la trasformazione di scaling  $\hat{U}(\lambda)\psi(x) = \lambda^{1/2}\psi(\lambda x)$ , che si nota essere unitaria<sup>1</sup>, tale che per un Hamiltoniano della forma  $\hat{H} = \hat{p}^2/2 + \alpha\hat{x}^2/2 + g\hat{x}^4/2$ , soddisfa:

$$\hat{U}(\lambda)\hat{H}(\alpha, g)\hat{U}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-2}\hat{H}(\alpha\lambda^4, g\lambda^6) \quad (3.2)$$

Per gli autovalori, si nota che prendendo  $\lambda = g^{-1/6}$ , si ha:

$$E_n(1, g) = g^{1/3}E_n(g^{-2/3}, 1) \quad (3.3)$$

Questa relazione permette di concludere che la singolarità per  $g = 0$  di  $E(g)$  è quella di una radice cubica; inoltre, per il criterio di Kato, l'espansione

$$E_n(g) = g^{1/3} \sum_k a_k g^{-2k/3}$$

è convergente e, asintoticamente, si ha  $E_n(g) \sim g^{1/3}$ .

---

<sup>1</sup>L'unitarietà si può vedere direttamente dal fatto che  $\langle \psi, \phi \rangle = \langle \hat{U}(\lambda)\psi, \hat{U}(\lambda)\phi \rangle$ ; infatti:

$$\langle \hat{U}(\lambda)\psi, \hat{U}(\lambda)\phi \rangle = \int \lambda \psi^*(\lambda x) \phi(\lambda x) dx = \int \psi^*(y) \phi(y) dy = \langle \psi, \phi \rangle$$