NOTE DI ANALISI 2

Manuel Deodato

Indice

1 Calcolo differenzialeciao in più variabili

1.1 Derivate parziali

Una funzione di più variabili $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ può essere derivata mantenendo fissa una variabile e derivando rispetto all'altra. Questo corrisponde al valutare la variazione di f lungo un asse specifico.

Definizione 1.1 (Derivata parziale)

Sia $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; la sua derivata parziale rispetto a x_k è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h} \tag{1.1.1}$$

Il vettore che ha per componenti le derivate di f rispetto a ciascuna delle sue variabili si chiama **gradiente** e si indica con ∇f.

1.1.1 Derivate direzionali

È possibile studiare la variazione di f lungo una particolare direzione individuata dal versore $\hat{n}$. Una retta parallela a $\hat{n}$ e passante per un punto $\vec{x}$ si individua con $\vec{x} + t\hat{n}$; fissando i punti $\vec{x}$ e $\hat{n}$, $g(t) := f(\vec{x} + t\hat{n})$ è una funzione di una variabile e $g'(0)$ è la derivata direzionale di f lungo $\hat{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(\vec{x}) = g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\hat{n}) - f(\vec{x})}{h} \tag{1.1.2}$$

Più in generale:

$$g'(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}_t + h\hat{n}) - f(\vec{x}_t)}{h} \equiv \frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(\vec{x}_t) \tag{1.1.3}$$

con $\vec{x}_t = \vec{x} + t\hat{n}$.

Osservazione 1.1. Conoscendo ∇f, si può calcolare la derivata direzionale di f come $\nabla f \cdot \hat{n}$.

Esempio 1.1. Si calcola la derivata direzionale di $f(x, y) = x^2 y - e^{x+y}$ lungo la direzione $\hat{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Svolgimento. Si ha

$$g(t) = f\left(x + \frac{t}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \exp\left[x + y + t\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{n}}(x, y) = g'(0) = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y}$$

Alternativamente $\nabla f = \left(2xy - e^{x+y}, x^2 - e^{x+y}\right)$, quindi $\partial_{\hat{n}} f = \nabla f \cdot \hat{n} = xy - \frac{1}{2}e^{x+y} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{x+y} = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y}$. ■

Riprendere da teorema 11.1