

APPUNTI DI GEOMETRIA

MANUEL DEODATO



INDICE

1	Geometria proiettiva	3
1.1	Introduzione agli spazi proiettivi	3
1.1.1	Trasformazioni proiettive	4
1.1.2	Sottospazi proiettivi	6
2	Spazi metrici, topologici e applicazioni continue	7
2.1	Spazi metrici	7
2.1.1	Insiemi aperti	7
2.1.2	Continuità in spazi metrici	7
2.1.3	Distanze equivalenti	8
2.1.4	Alcuni risultati sulla continuità	10
2.1.5	Isometrie e omeomorfismi	11
2.2	Spazi topologici	11

1 GEOMETRIA PROIETTIVA

1.1 Introduzione agli spazi proiettivi

DEFINIZIONE 1.1 (SPAZIO PROIETTIVO). Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{K} ; il suo *spazio proiettivo* è dato da:

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim$$

dove $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda v$.

Dalla definizione, uno spazio proiettivo collassa tutti i vettori di uno spazio vettoriale che appartengono alla stessa retta in un punto. In questo senso, $\mathbb{P}(V)$ è l'insieme delle rette di V .

ESEMPIO 1.1. Si nota che $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset / \sim = \emptyset$, mentre per $v \neq 0$, si ha:

$$\mathbb{P}(\text{Span } v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} / \sim = \{[v]\}$$

dove $[v]$ rappresenta la classe di equivalenza di v ; questo significa che lo spazio proiettivo dello span di un elemento è composto da un solo punto.

DEFINIZIONE 1.2 (DIMENSIONE DI UNO SPAZIO PROIETTIVO). La dimensione di uno spazio proiettivo è

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$$

Intuitivamente, questa definizione è dovuta al fatto che gli spazi proiettivi collassano le rette in punti, abbassando di 1 la dimensione dello spazio vettoriale.

DEFINIZIONE 1.3 (PUNTI, RETTE E PIANI PROIETTIVI). Si definisce *punto proiettivo* uno spazio proiettivo di dimensione 0, *retta proiettiva* uno spazio di dimensione 1 e *piano proiettivo* uno spazio di dimensione 2.

DEFINIZIONE 1.4 (SPAZIO PROIETTIVO STANDARD). Sia \mathbb{K} un campo; si definisce lo *spazio proiettivo standard* come

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$$

1.1.1 Trasformazioni proiettive

Analogamente al caso dei gruppi e degli anelli, si studiano quelle mappe che preservano la struttura di spazio proiettivo.

DEFINIZIONE 1.5 (TRASFORMAZIONE PROIETTIVA). Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ è detta *trasformazione proiettiva* se $\exists \varphi : V \rightarrow W$ applicazione lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

In questa definizione, si dice che f è *indotta* da φ e, talvolta, si scrive che $f = [\varphi]$.

PROPOSIZIONE 1.1. Se f è una trasformazione proiettiva indotta da φ , allora φ è iniettiva.

Dimostrazione. Per assurdo, $\ker \varphi \neq \{0\}$ e sia $v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$; allora $f([v]) = [0]$, ma $[0] \notin \mathbb{P}(W)$ per definizione di spazio proiettivo, quindi f non sarebbe ben definita. \square

PROPOSIZIONE 1.2. Ogni applicazione lineare iniettiva $\varphi : V \rightarrow W$ induce una trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ tramite l'associazione $[v] \mapsto [\varphi(v)]$.

Dimostrazione. Se $v \neq 0$, allora $\varphi(v) \neq 0$ perché φ è iniettiva. Se, invece, $[v] = [w]$, allora, per definizione, $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$[\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)]$$

\square

PROPOSIZIONE 1.3. Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

Dimostrazione. Sia $f([v]) = f([w])$ e sia φ l'applicazione lineare che induce f ; allora l'uguaglianza si traduce in $[\varphi(v)] = [\varphi(w)]$, ma per come sono definite queste classi di equivalenza, questo vuol dire che $\varphi(v) = \lambda \varphi(w) = \varphi(\lambda w)$. Essendo φ iniettiva, però, si ottiene che $v = \lambda w$, cioè $[v] = [\lambda w]$. \square

PROPOSIZIONE 1.4. La trasformazione $\text{id}_{\mathbb{P}(V)}$ è proiettiva ed è indotta da id_V .

Dimostrazione. Tale trasformazione deve essere tale per cui $\text{id}_{\mathbb{P}(V)}([v]) = [v] = [\text{id}_V v]$, quindi è indotta da id_V ; essendo quest'ultima iniettiva, anche $\text{id}_{\mathbb{P}(V)}$ è iniettiva. \square

PROPOSIZIONE 1.5. Siano $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ e $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ due trasformazioni proiettive; allora $g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Se φ induce f e ψ induce g , allora $\psi \circ \varphi$ induce $g \circ f$:

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g([\varphi(v)]) = g \circ f([v])$$

□

Si passa, ora, a caratterizzare gli isomorfismi di spazi proiettivi; il seguente teorema giustificherà la definizione di isomorfismo proiettivo.

TEOREMA 1.1. Sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ una trasformazione proiettiva; allora, le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti.

- (a). f è suriettiva.
- (b). f è biiettiva.
- (c). $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$.
- (d). f è invertibile e $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è proiettiva.

Dimostrazione. Il fatto che (a) \iff (b) è dato dal fatto che f è proiettiva, quindi è iniettiva.

Per mostrare che (b) \implies (c), si prende φ che induce f e si fa vedere che è suriettiva. Visto che $\varphi(0) = 0$, basta mostrare che $W \setminus \{0\} \subset \text{Im } \varphi$. Sia, dunque, $w \in W \setminus \{0\}$, quindi $[w] \in \mathbb{P}(W)$; visto che f è suriettiva, $\exists [v] \in \mathbb{P}(V) : f([v]) = [w] = [\varphi(v)]$. Allora $w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \implies w \in \text{Im } \varphi$. Questo significa che φ è un isomorfismo tra V e W , per cui

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W)$$

Ora si mostra che (c) \implies (d), quindi sia φ lineare che induce f . Si sa, dunque, che φ è iniettiva e che $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$, il che implica che $\dim V = \dim W$, pertanto φ è un isomorfismo; in quanto tale, φ^{-1} è ben definita ed è ancora un isomorfismo di spazi vettoriali. Rimane da mostrare che φ^{-1} induce f ; a questo scopo, si nota che:

$$\begin{aligned} [\varphi^{-1}]f([v]) &= [\varphi^{-1}][\varphi(v)] = [\varphi^{-1}\varphi(v)] = [v] \\ f[\varphi^{-1}]([v]) &= f([\varphi^{-1}(v)]) = [\varphi\varphi^{-1}(v)] = [v] \end{aligned}$$

Infine, (d) \implies (a) perché, essendo f invertibile, è anche suriettiva. □

DEFINIZIONE 1.6 (ISOMORFISMO PROIETTIVO). Una trasformazione proiettiva che sia anche suriettiva è detta *isomorfismo proiettivo*.

DEFINIZIONE 1.7 (PROIETTIVITÀ). Ogni trasformazione proiettiva $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ è detta *proiettività*; si indica con $\mathbb{P}GL(V)$ l'insieme delle proiettività di V .

Da questa definizione, si può notare che ogni proiettività è un isomorfismo perché, se f è indotta da φ , allora vale la formula della dimensione

$$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V \implies \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$$

Inoltre, si può mostrare che equipaggiando $\mathbb{P}GL(V)$ con l'operazione di composizione, questo è un gruppo.

OSSERVAZIONE 1.1 (PUNTI FISSI). Sia f una proiettività indotta da φ , con $[v]$ punto fisso, cioè

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)]$$

Allora $\lambda v = \varphi(v)$, cioè v è un autovettore di φ , con autovalore λ ; analogamente, se v è un autovettore di φ , allora $[v]$ è un punto fisso per lo stesso motivo.

1.1.2 Sottospazi proiettivi

Riprendere da pagina 7

2 SPAZI METRICI, TOPOLOGICI E APPLICAZIONI CONTINUE

2.1 Spazi metrici

DEFINIZIONE 2.1 (SPAZIO METRICO). Sia X un insieme non vuoto; allora X si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $d(x, x') \geq 0$ e $d(x, x') = 0 \iff x = x'$;
- $d(x, x') = d(x', x)$;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$.

Dato uno spazio metrico (X, d_X) e un insieme $Y \subset X$, si può definire un sottospazio di (X, d_X) restringendo la distanza al solo Y :

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'), \quad \forall y, y' \in Y$$

Quindi (Y, d_Y) è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di (X, d_X) , il quale è detto *spazio ambiente* di Y .

2.1.1 Insiemi aperti

In uno spazio metrico (X, d) , si può definire un *disco aperto* di raggio r e centro x come

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

DEFINIZIONE 2.2 (INSIEME APERTO). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

2.1.2 Continuità in spazi metrici

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$

È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

DEFINIZIONE 2.3 (CONTINUITÀ IN SPAZI METRICI). Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione, con (X, d_X) , (Y, d_Y) spazi metrici. Si dice che f è continua in $x \in X$ se $\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon)$ tale che:

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon, \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \quad (2.1.1)$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

TEOREMA 2.1. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è continua $\iff \forall A \subset Y$ aperto, l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni.

- (\implies) Si assume che f sia continua. Si prende $f(x) \in A$, con $A \subset Y$ aperto, per qualche $x \in f^{-1}(A)$. Essendo A aperto $\implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset A$; allo stesso tempo, per continuità di f , dato ε scelto prima, deve esistere $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

quindi $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$. Valendo $\forall x \in f^{-1}(A) \implies f^{-1}(A)$ è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- (\impliedby) Si assume che $\forall A \subset Y$ aperto, la funzione f sia tale che l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto. Per $f(x) \in Y$, esiste $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$; essendo questo aperto, deve essere aperto anche $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$. Dunque, dato $x \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$, $\exists \delta(\varepsilon) : B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$, quindi vuol dire che $f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$, ossia:

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon, \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

Valendo $\forall x \in X$, allora f è continua.

□

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

2.1.3 Distanze equivalenti

DEFINIZIONE 2.4 (Distanze topologicamente equivalenti). Due distanze d, \bar{d} su X si dicono *topologicamente equivalenti* se hanno gli stessi insiemi aperti, cioè se generano la stessa topologia.

Se $d(x, y) = r\bar{d}(x, y)$, per $r > 0$, si hanno due distanze equivalenti perché, evidentemente, $\forall \varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(x) = \bar{B}_{r\varepsilon}(x)$$

cioè le due distanze d, \bar{d} identificano le stesse palle aperte, quindi gli stessi insiemi aperti. In \mathbb{R}^n , le distanze

$$\begin{aligned} d_2(x, x') &= \|x - x'\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} \\ d_1(x, x') &= \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \\ d_\infty(x, x') &= \max_i \{|x_i - x'_i|\} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

sono equivalenti e si ha

$$d_\infty(x, x') \leq d_2(x, x') \leq d_1(x, x') \leq n d_\infty(x, x') \tag{2.1.3}$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza è giustificata da:

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} \geq \sqrt{\max_i \{(x_i - x'_i)^2\}} = \max_i \{|x_i - x'_i|\} = d_\infty(x, x')$$

La seconda, invece, è vera perché:

$$[d_2(x, x')]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \right]^2 = [d_1(x, x')]^2$$

L'ultima disuguaglianza è immediata. □

Da questo segue direttamente che¹

$$B_\varepsilon^{(\infty)}(x) \supset B_\varepsilon^{(2)}(x) \supset B_\varepsilon^{(1)}(x) \supset B_{\varepsilon/n}^{(\infty)}(x) \tag{2.1.4}$$

Questo mostra che se A è aperto rispetto ad una distanza, lo è anche rispetto alle altre.

¹ Apparentemente, la distanza più grande dovrebbe includere più elementi, quindi i simboli \supset dovrebbero essere dei \subset , invece, avendo fissato il raggio ε , quella che permette di creare la palla più grande è la distanza più piccola perché avvicina i punti tra di loro, quindi più elementi rientrano in tale raggio.

2.1.4 Alcuni risultati sulla continuità

PROPOSIZIONE 2.1. Siano (X, d_X) , (Y, d_Y) due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Dato $x \in X$, se esiste costante $M > 0$ tale che

$$d_Y(f(x'), f(x)) \leq M d_X(x', x), \quad \forall x' \in X$$

allora f è continua in x .

Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che, per ipotesi, definendo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$, si ha $f(D_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset D_\varepsilon(f(x))$. \square

PROPOSIZIONE 2.2. Ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua rispetto alle distanze euclidee.

Dimostrazione. Si usa Prop. ?? applicato alle distanze $d^{(1)}$, che sono topologicamente equivalenti alle distanze euclidee $d^{(2)}$. Inoltre, visto che ogni applicazione costante è continua, si esclude che L sia nulla. Si denota con $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ la matrice che rappresenta L ; se $x, x' \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} d^{(1)}(L(x), L(x')) &= \left| \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j - x'_j) \right| + \dots + \left| \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j - x'_j) \right| \\ &\leq \left(\max_j |a_{1j}| + \dots + \max_j |a_{mj}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j - x'_j| \leq M d^{(1)}(x, x') \end{aligned}$$

con $M = \max |a_{ij}|$, che è maggiore di 0 perché L è non-nulla. Da Prop. ??, segue la tesi. \square

La precedente proposizione può essere applicata al caso particolare di applicazioni lineari: le **proiezioni**. Una proiezione è generalmente definita come:

$$p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_i(x) = x_i \quad (2.1.5)$$

È possibile definire, più in generale, per $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n$, la proiezione

$$p_{i_1, \dots, i_m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad p_{i_1, \dots, i_m}(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \quad (2.1.6)$$

che è lineare e, quindi, continua.

2.1.5 Isometrie e omeomorfismi

DEFINIZIONE 2.5 (ISOMETRIA). Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \rightarrow Y$ è un'isometria se $\forall x, x' \in X$, si ha $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$.

Da Prop ??, segue che un'isometria è un'applicazione continua. Se fra due spazi metrici X, Y esiste un'isometria $f : X \rightarrow Y$, gli spazi si dicono **isometrici**.

Sono isometrie $\text{Id} : X \rightarrow X$, cioè l'applicazione identità, l'inversa di un'isometria e la composizione di isometrie. Questo porta al seguente.

PROPOSIZIONE 2.3. Un'isometria fra due spazi metrici è una relazione di equivalenza.

DEFINIZIONE 2.6 (OMEOMORFISMO). Dati X, Y spazi metrici, un'applicazione biettiva $f : X \rightarrow Y$ è un *omeomorfismo* se la sua inversa e f stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo $e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, questa ha un'inversa continua $\log(x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda $(-\infty, 0]$ in $(0, 1]$. Anche gli omeomorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

2.2 Spazi topologici

DEFINIZIONE 2.7 (TOPOLOGIA E SPAZIO TOPOLOGICO). Sia X un insieme non-vuoto. Una *topologia* su X è una famiglia non-vuota τ di sottoinsiemi di X , chiamati *insiemi aperti della topologia*. Questi soddisfano le seguenti condizioni:

- \emptyset, X sono aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un aperto.

Allora si definisce *spazio topologico* la coppia (X, τ) , dove X è detto *supporto* dello spazio topologico e i suoi elementi sono i *punti* dello spazio.

Dato (X, d) spazio metrico, la famiglia degli insiemi aperti rispetto a d è una topologia su X indotta da d stessa. In \mathbb{R}^n , si definisce **topologia euclidea** (o **naturale**) \mathcal{E} come quella indotta dalla distanza euclidea d_2 . Su \mathbb{C} , la topologia euclidea \mathcal{E} è quella indotta da $d(z, w) = |z - w|$; questa conclusione si può ottenere identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 da $z = x + iy \mapsto (x, y)$ e considerando la distanza euclidea di \mathbb{R}^2 . In modo del tutto

analogo, si identifica \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} e la distanza euclidea di \mathbb{R}^{2n} definisce, su \mathbb{C}^n , una distanza e, quindi, una topologia che è la topologia naturale di \mathbb{C}^n , \mathcal{E} . Su un qualunque insieme non-vuoto X , si possono sempre definire due topologie:

- la **topologia banale** $\mathcal{B} = \{X, \emptyset\}$, con (X, \mathcal{B}) **spazio topologico banale**;
- la **topologia discreta** ottenuta prendendo $\tau = \mathcal{P}(X)$, con $(X, \mathcal{P}(X))$ **spazio topologico discreto**.

DEFINIZIONE 2.8 (SPAZIO METRIZZABILE). Uno spazio topologico (X, τ) è detto *metrizzabile* se si può definire una distanza su X che induce la topologia τ .

Sia dato Y sottoinsieme non-vuoto di uno spazio metrizzabile (X, d_X) ; si sa già che d_Y , ottenuta come restrizione di d_X a Y , è una distanza su Y . In questo caso, la topologia indotta da d_Y su Y si dice *topologia indotta da X su Y* . Allora, se $y \in Y$: $B_\varepsilon^{(Y)}(y) = B_\varepsilon^{(X)}(y) \cap Y$; questo significa che gli aperti di Y sono della forma $A \cap Y$, con A aperto di X .