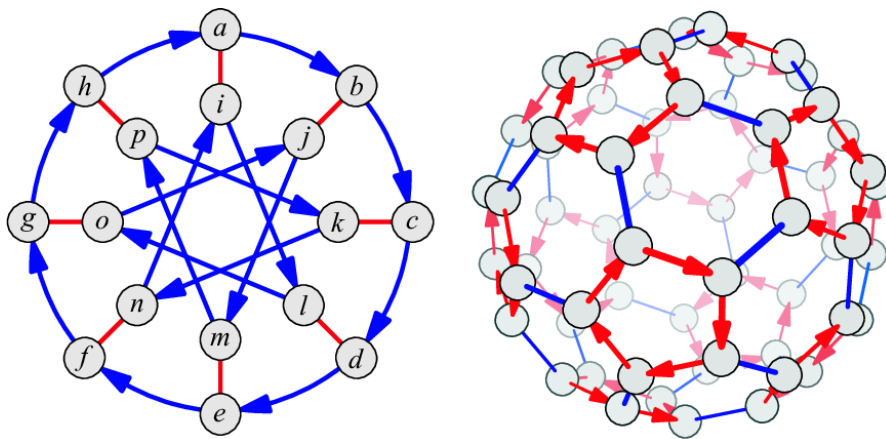


APPUNTI DI ALGEBRA

MANUEL DEODATO



INDICE

1	Gli interi	4
1.1	Proprietà di base	4
1.2	Massimo comune divisore	5
1.3	Fattorizzazione unica	8
1.4	Identità di Bézout e equazioni diofantee	9
1.4.1	Identità di Bézout	9
1.4.2	Equazioni diofantee	11
1.5	Relazioni di equivalenza e congruenza	12
1.5.1	Inversi in congruenze	14
1.5.2	Congruenze lineari in una incognita	15
1.5.3	Il piccolo teorema di Fermat	16
1.6	Il teorema cinese del resto e classi di resto	18
1.6.1	Il teorema cinese del resto	18
1.6.2	Classi di resto	20
1.7	La funzione di Eulero	21
2	Teoria dei gruppi	24
2.1	Introduzione	24
2.2	Mappe tra gruppi	27
2.3	Omomorfismi, isomorfismi e automorfismi	29
2.4	Permutazioni e gruppi simmetrici	34
2.5	Classi di coniugio	36
2.6	Classi laterali	37
2.7	Gruppi ciclici finiti	41
2.8	Sottogruppi normali e I teorema di omomorfismo	45
2.9	Approfondimenti sui gruppi	48
2.9.1	Il gruppo simmetrico e il gruppo alterno	48
2.9.2	Centralizzatore di un elemento	51
2.9.3	Quoziente di un gruppo ciclico	52
3	Teoria degli anelli	54
3.1	Definizioni preliminari	54
3.1.1	I quaternioni	55
3.1.2	Gli anelli \mathbb{Z}_m	56
3.2	Anelli di polinomi e algoritmo di Euclide	57
3.2.1	Il massimo comune divisore e il teorema di Bézout	58
3.2.2	Radici di un polinomio	60
3.2.3	Ciclicità dei sottogruppi moltiplicativi finiti di un campo	61
3.3	Proprietà di base degli anelli	62

3.3.1	Omomorfismi di anelli	64
3.3.2	Ideali e generatori	65
3.3.3	Anelli quoziente	66
3.3.4	Omomorfismi di valutazione	68
3.4	Quozienti di anelli di polinomi	69
3.4.1	Il quoziente $K[x]/\langle f(x) \rangle$	69
3.4.2	Polinomi irriducibili	71
3.4.3	Anelli Euclidei	72

1 GLI INTERI

1.1 Proprietà di base

Una proprietà dei numeri interi, che si prenderà come assiomatica, è quella del *buon ordinamento*:

Ogni insieme non-vuoto di interi maggiori o uguali a 0, ha un elemento minimo.

Da questa deriva la seguente.

Teorema 1.1 (Principio di induzione (prima forma))

Sia $A(n)$ un'affermazione valida per ogni intero $n \geq 1$. Se

(1). $A(1)$ è vera,

(2). $\forall n \geq 1$, se $A(n)$ è vera $\implies A(n+1)$ è vera,

allora, $\forall n \geq 1$, $A(n)$ è vera.

Dimostrazione. Sia S l'insieme di interi per cui $A(n)$ è falsa. Si mostra che S è l'insieme vuoto. Si assume per assurdo che $S \neq \emptyset \implies \exists n_0 \in S$, con n_0 minimo (esistente per il buon ordinamento), e, per assunzione, deve essere $n_0 \neq 1 \implies n_0 > 1$. Questo vuol dire che $n_0 - 1$ non è in S e, quindi, $A(n_0 - 1)$ è vera.

Per la proprietà (2), però, deve essere vera anche $A(n_0)$ perché $n_0 = (n_0 - 1) + 1$, il che è assurdo e, pertanto, $S = \emptyset$. \square

Osservazione 1.1. Nella dimostrazione sopra, si sarebbe potuto sostituire 1 con 0 e far partire il principio di induzione da $n = 0$ piuttosto che da $n = 1$ e non sarebbe cambiato nulla.

Il principio di induzione può essere espresso in una forma alternativa, come segue.

Teorema 1.2 (Principio di induzione (seconda forma))

Sia $A(n)$ affermazione vera $\forall n \geq 0$ e sia possibile mostrare che:

(1'). $A(0)$ è vera;

(2'). $\forall n > 0$, se $A(k)$ è vera $\forall 0 \leq k < n$, allora $A(n)$ è vera.

Allora $A(n)$ è vera $\forall n \geq 0$.

Dimostrazione. Sia ancora S l'insieme degli interi che non soddisfano $A(n)$. Ancora per assurdo, si prende $S \neq \emptyset$, quindi deve esistere, per il buon ordinamento, un $n_0 \in S$ minimo.

Per punto (1'), deve valere $n_0 \neq 0$ e, visto che n_0 è minimo, $\forall k$ intero tale che $0 \leq k < n_0$, $A(k)$ deve essere vera. Per il punto (2'), però, deve essere vera anche $A(n_0)$, arrivando nuovamente all'assurdo. \square

Un altro importante risultato del buon ordinamento è l'*algoritmo di Euclide*.

Teorema 1.3 (Algoritmo di Euclide)

Siano m, n interi, con $m > 0$; allora esistono interi q, r , con $0 \leq r < m$, tali che

$$n = qm + r \quad (1.1.1)$$

Inoltre, gli interi q, r sono univocamente determinati da tali condizioni.

Dimostrazione. Visto che l'insieme degli interi q tali per cui $qm \leq n$ è limitato superiormente per definizione, si può usare il buon ordinamento per affermare che esiste un elemento più grande^a tale che

$$qm \leq n < (q+1)m = qm + m$$

ossia $0 \leq n - qm < m$. Sia $r = n - qm$, per cui vale $0 \leq r < m$. Questo dimostra l'esistenza di r, q come descritti.

Per l'unicità, si assume che valga contemporaneamente

$$\begin{cases} n = q_1 m + r_1 & , 0 \leq r_1 < m \\ n = q_2 m + r_2 & , 0 \leq r_2 < m \end{cases}$$

con $r_1 \neq r_2$. Sia, per esempio, $r_2 > r_1$; allora, sottraendo le due, si ha $(q_1 - q_2)m = r_2 - r_1$. Però, si ha $r_2 - r_1 > 0$ e $r_2 - r_1 < m$, il che non è possibile perché $q_1 - q_2$ è un intero per cui $(q_1 - q_2)m > 0$, quindi si avrebbe $r_2 - r_1 = (q_1 - q_2)m \geq m$ e, quindi $r_2 - r_1 \geq m$. Pertanto, deve essere $r_1 = r_2$, che fra l'altro implica $q_1 m = q_2 m$, per cui $q_1 = q_2$. \square

^aBasta applicare il buon ordinamento all'elemento più piccolo dell'insieme $n - qm$.

Da questo teorema, si definisce r come il *resto della divisione di n per m* .

1.2 Massimo comune divisore

Siano n, d due interi diversi da 0. Si dice che d *divide* n se esiste q intero tale che $n = dq$; in questo caso, si scrive $d|n$. Se m, n sono interi non-nulli, per *divisore comune* di m e n si intende un intero $d \neq 0$ tale che $d|m$ e $d|n$. Allora si ha la seguente definizione.

Definizione 1.1 (Massimo comune divisore)

Per massimo comune divisore di m, n interi non nulli, si intende un intero $d > 0$, divisore comune di m e n , e tale che $\forall e$ intero positivo che divide m e n , si ha anche $e|d$.

Chiaramente, il massimo comune divisore è univocamente determinato e si mostrerà che esiste sempre. Per farlo, si dà prima la seguente definizione.

Definizione 1.2 (Ideale)

Sia $J \subseteq \mathbb{Z}$ un sottoinsieme degli interi. Si dice che J è un *ideale* se:

- $0 \in J$;
- $m, n \in J \implies m + n \in J$
- se $m \in J$ e n è un intero qualsiasi, allora $mn \in J$.

Osservazione 1.2. Di seguito, per ideale si intenderà sempre un sottoinsieme degli interi.

Siano m_1, \dots, m_r interi. Sia J l'insieme di tutti gli interi che si scrivono come

$$x_1 m_1 + \dots + x_r m_r$$

con x_1, \dots, x_r interi. Allora è automaticamente verificato che J è un ideale. Infatti

- se y_1, \dots, y_r sono interi, allora

$$\sum_{i=1}^r x_i m_i + \sum_{j=1}^r y_j m_j = (x_1 + y_1) m_1 + \dots + (x_r + y_r) m_r$$

che, quindi, appartiene a J ;

- se n è un intero, si ha

$$n \sum_{i=1}^r x_i m_i = n x_1 m_1 + \dots + n x_r m_r$$

che, quindi, appartiene a J ;

- si può scrivere 0 come $0m_1 + \dots + 0m_r$, quindi anche $0 \in J$.

In questo caso, si dice che J è **generato** dagli interi m_1, \dots, m_r e che questi sono i suoi **generatori**. L'insieme $\{0\}$ è esso stesso un ideale, chiamato **ideale nullo**. Inoltre, \mathbb{Z} è detto **ideale unità**. Ora si può dimostrare il seguente.

Teorema 1.4

Sia J un ideale di \mathbb{Z} . Allora esiste un intero d che è un generatore di J . Inoltre, se $J \neq \{0\}$, allora d è il più piccolo intero positivo in J .

Dimostrazione. Sia J l'ideale nullo; allora 0 è un suo generatore. Sia, ora, $J \neq \{0\}$; se $n \in J$, allora $-n = (-1)n$ è anche in J , quindi J contiene degli interi positivi. Si vuole dimostrare che d , definito come il più piccolo intero positivo, è un generatore. Per farlo, sia $n \in J$, con $n = dq + r$, $0 \leq r < d$; allora $r = n - dq \in J$ e, visto che vale $r < d$, segue che $r = 0^a$, quindi $n = dq$ e, allora, d è un generatore. \square

^aAltrimenti d non sarebbe il più piccolo intero positivo.

Teorema 1.5

Siano m_1, m_2 due interi positivi e sia d un generatore positivo per l'ideale generato da m_1, m_2 . Allora d è il massimo comune divisore di m_1, m_2 .

Dimostrazione. Per definizione, $m_1, m_2 \in J^a$, quindi esiste un intero q_1 tale che $m_1 = q_1 d$, per cui $d|m_1$. Analogamente $d|m_2$. Sia, poi, e un intero non-nullo che divide sia m_1 che m_2 come $m_1 = h_1 e$ e $m_2 = h_2 e$, con interi h_1, h_2 . Visto che d è nell'ideale generato da m_1, m_2 , esistono degli interi s_1, s_2 tali che $d = s_1 m_1 + s_2 m_2$, quindi

$$d = s_1 h_1 e + s_2 h_2 e = (s_1 h_1 + s_2 h_2) e$$

Quindi e divide d e il teorema è dimostrato. □

^aQuesto è ovvio perché $m_1 = 1m_1 + 0m_2$ e $m_2 = 0m_1 + 1m_2$.

Osservazione 1.3. La stessa esatta dimostrazione funziona per più di due interi, quindi se si considerassero m_1, \dots, m_r degli interi, con d generatore positivo dell'ideale da loro generato, d sarebbe anche il massimo comune divisore.

Questi due teoremi permettono di concludere i seguenti fatti.

- Ogni ideale J contiene un numero intero che lo genera interamente e questo coincide col più piccolo intero positivo in esso contenuto, quindi è l'unico generatore *singolo* dell'ideale.
- Ogni insieme di numeri interi ha un massimo comune divisore perché tale insieme genera un ideale, il quale, però, contiene un generatore (più piccolo numero intero in esso contenuto) che è un massimo comune divisore per l'insieme di interi iniziale.

Definizione 1.3 (Interi coprimi)

Siano m_1, \dots, m_r degli interi il cui massimo comune divisore è 1. Allora m_1, \dots, m_r si dicono *coprimi* e, per questi, esistono interi x_1, \dots, x_r tali che

$$x_1 m_1 + \dots + x_r m_r = 1$$

perché 1 appartiene all'ideale generato dagli m_i .

È immediato verificare per definizione di ideale che $1 \in J \iff J \equiv \mathbb{Z}$. Dalla definizione 1.3 segue direttamente che ogni insieme di interi coprimi genera \mathbb{Z} .

Osservazione 1.4. Si potrebbe pensare che se p è un numero primo, allora l'insieme $\{p\}$ generi \mathbb{Z} , cioè p generi \mathbb{Z} . Questo è ovviamente falso sia perché, evidentemente, J_p non contiene 1, sia perché p non è coprimo con se stesso, avendo come altro divisore proprio p oltre che 1.

1.3 Fattorizzazione unica

Definizione 1.4 (Numero primo)

Si dice che p è un numero primo se è un intero e $p \geq 2$ tale che, data una fattorizzazione $p = mn$, con interi positivi m, n , allora $m = 1$ o $n = 1$.

Osservazione 1.5. Il fatto che $p = mn$ con $m = 1$, o $n = 1$ implica p numero primo significa che p è diviso unicamente o da 1 o, da se stesso.

Ora si mostra che ogni numero intero ammette un'unica scomposizione in numeri primi. Per dimostrare l'unicità di tale scomposizione, si introduce il seguente lemma.

Lemma 1.1

Sia p un numero primo e siano m, n interi non-nulli e tali che p divide mn . Allora o $p|m$ o $p|n$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, si assume che p non divida m . Allora, il massimo comune divisore di p e m deve essere 1, pertanto esistono interi a, b tali per cui $1 = ap + bm$.

Ora, moltiplicando ambo i membri per n , si ha $n = nap + bmn$, ma $mn = pc$ per qualche intero c (essendo in assunzione mn divisibile per p), quindi

$$n = nap + bpc = (na + bc)p$$

il che implica che p divide n . □

Per evidenziare l'utilità del lemma nel seguente teorema, si nota che se p divide un prodotto di numeri primi $q_1 \dots q_s$, si hanno due possibilità: o p divide q_1 , o divide $q_2 \dots q_s$; se divide q_1 , allora $p \equiv q_1$, altrimenti si trova $p \equiv q_i$ procedendo induttivamente. Il caso interessante è quando si ha un'uguaglianza tra prodotti di numeri primi

$$p_1 \dots p_r = q_1 \dots q_s$$

dove ogni p_i divide il prodotto¹. Rinumerandoli, si può assumere senza perdita di generalità che $p_1 = q_1$ e, induttivamente, che $p_i = q_i$ e $r = s$, essendo due scomposizioni in numeri primi.

Teorema 1.6

Ogni intero positivo $n \geq 2$ ammette una fattorizzazione come prodotto di numeri primi (non necessariamente distinti) $n = p_1 \dots p_r$ e tale fattorizzazione è unica.

Dimostrazione. Si assume per assurdo che esista almeno un intero ≥ 2 che non possa essere espresso come prodotto di numeri primi. Sia m il più piccolo di

¹Per vederlo, è sufficiente prendere $c = p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_r$, quindi si ha $cp_i = q_1 \dots q_s$, che è la definizione di $p_i | q_1 \dots q_s$.

questi.

Per costruzione, m non può essere primo, quindi $m = de$, con $d, e > 1$. Visto che d ed e sono minori di m e visto che m è scelto per essere il più piccolo fra gli interi non fattorizzabili come numeri primi, allora sia d che e ammettono scomposizione in prodotto di numeri primi:

$$\begin{aligned} d &= p_1 \dots p_r \\ e &= p'_1 \dots p'_s \end{aligned} \implies m = p_1 \dots p_r p'_1 \dots p'_s$$

da cui l'assurdo.

Per mostrare l'unicità, si usa il lemma 1.1. Come conseguenza, diretta del lemma, se esistessero due scomposizioni in primi $p_1 \dots p_r$ e $p'_1 \dots p'_s$, varrebbe $p_1 \dots p_r = p'_1 \dots p'_s \implies p_i = p'_i$ e $r = s$, da cui l'unicità \square

1.4 Identità di Bézout e equazioni diofantee

1.4.1 Identità di Bézout

L'identità di Bézout non è altro che quanto espresso in teorema 1.5. Di seguito lo si enuncia senza ricorrere a tale trattazione.

Teorema 1.7 (Identità di Bézout)

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli, esistono altri due interi m, n tali che:

$$\gcd(a, b) = am + bn$$

Dimostrazione. Si considera l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari positive di a, b , dato da $CL^+(a, b) := \{ar + bs : r, s \in \mathbb{Z}, ar + bs > 0\}$. Questo è non-vuoto perché, assumendo senza perdita di generalità $a \neq 0$, esistono, per $s = 0$, degli $r \in \mathbb{Z}$ tali che $ra > 0$.

Visto che $CL^+(a, b) \subseteq \mathbb{N}$, per il principio del buon ordinamento, questo ammette un minimo d ; in quanto tale $\exists m, n \in \mathbb{Z} : d = am + bn$. Infine, si motra che $d = \gcd(a, b)$, cioè si mostrano i seguenti punti.

- Si ha $d|a$ e $d|b$.

Dividendo a per d , si ha $a = qd + r$, con $0 \leq r < d$, quindi

$$a = q(am + bn) + r$$

da cui

$$r = (-qm + 1)a + (-qn)b$$

In questo modo, r è combinazione lineare di a, b ed è minore di d , ma questo

è assurdo perché d era minimo per assunzione, quindi deve essere $r = 0$.
Allo stesso modo si mostra $d|b$.

- Se $c|a$ e $c|b \implies c \leq d$.

Questo è vero perché se $c|a$, $c|b$, allora (in particolare) $c|(am+bn)$, cioè $c|d \implies c \leq d$.

□

Osservazione 1.6. Il teorema afferma l'esistenza di una possibile coppia $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che soddisfa $\gcd(a, b) = am + bn$, ma non ne specifica l'unicità; di fatto, si vedrà che di coppie simili ce ne sono infinite.

Corollario 1.1

Dati $a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli e sia $c \in \mathbb{Z} : c|a$ e $c|b$; allora $c|\gcd(a, b)$.

Complessivamente, esattamente come riportato nel teorema 1.5, si è dimostrato che il massimo comune divisore di due interi a, b è la più piccola combinazione lineare positiva ottenibile dai due.

Corollario 1.2

Dati a, b non entrambi nulli e $\gcd(a, b)$ il loro massimo comune divisore, allora gli interi

$$a' = \frac{a}{\gcd(a, b)} \qquad b' = \frac{b}{\gcd(a, b)}$$

sono coprimi.

Dimostrazione. Si può dimostrare in due modi diversi. Nel primo, si assume per assurdo che esista un divisore comune $d > 1$ di a', b' ; se così fosse, però, $d \cdot \gcd(a, b)$ dividerebbe sia a che b e sarebbe più grande di $\gcd(a, b)$ stesso, il che è assurdo. Il secondo fa uso dell'identità di Bézout per cui $\gcd(a, b) = am + bn$; dividendo per $\gcd(a, b)$, si ha:

$$1 = a'm + b'n$$

per cui 1 è il più piccolo intero positivo ottenibile come combinazione lineare positiva di a', b' , quindi i due sono coprimi. □

Teorema 1.8

Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$; se $a|bc$ e $\gcd(a, b) = 1$, allora $a|c$.

Dimostrazione. Per Bézout, visto che $\gcd(a, b) = 1$, si ha $1 = an + bm$ per una coppia di numeri $m, n \in \mathbb{Z}$. Moltiplicando ambo i membri per c , ne segue che:

$$c = acn + bcm$$

quindi $a|c$ perché, ovviamente, $a|acn$, mentre $a|bcm$ perché, per ipotesi, $a|bc$,

quindi $a|(acn + bcm)$, cioè $a|c$. □

Il teorema appena dimostrato è alla base del fatto che la fattorizzazione di interi in numeri primi è unica.

1.4.2 Equazioni diofantee

Dati $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si dice **equazione diofantea** un'equazione del tipo

$$ax + by = c \tag{1.4.1}$$

La sua soluzione è una coppia di interi $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che la soddisfa.

Osservazione 1.7. L'equazione diofantea con $a = b = 0$ ha soluzione $\iff c = 0$ e ne ammette infinite, consistenti in tutte le possibili coppie $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, perché ogni coppia soddisfa $0x + 0y = c$.

Per il caso generale di a, b non entrambi nulli, si ha il seguente.

Teorema 1.9

L'equazione $ax + by = c$, con a, b non entrambi nulli, ha soluzione $\iff \gcd(a, b) | c$.

Dimostrazione. Per l'identità di Bézout, si sa che vi è soluzione all'equazione

$$ax + by = \gcd(a, b)$$

L'equazione da risolvere è diversa: al posto di $\gcd(a, b)$ c'è c ; allora la dimostrazione si basa sul capire se $\gcd(a, b)$ divide o meno c .

Nel caso in cui $\gcd(a, b) | c$ (per cui si ha $c = k \cdot \gcd(a, b)$ per qualche intero k), allora l'equazione diofantea ammette soluzione. Infatti, dopo aver trovato $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ che risolve $am + bn = \gcd(a, b)$, si ha che $(mk, nk) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ risolve l'equazione diofantea perché

$$k \cdot (am + bn) = akm + bkn = k \cdot \gcd(a, b) = c$$

Viceversa, se $\gcd(a, b)$ non divide c , allora non vi è soluzione. Se, per assurdo, vi fosse soluzione, sia questa (\bar{x}, \bar{y}) , allora $a\bar{x} + b\bar{y} = c$ implica che $\gcd(a, b) | c$ perché $\gcd(a, b)$ divide il membro di sinistra (essendo un divisore sia di a che di b). Questo, però, è assurdo perché si era nell'ipotesi in cui $\gcd(a, b) \nmid c$. □

Si considera il caso in cui l'equazione $ax + by = c$ ha soluzione; si vuole capire se la soluzione è unica, o se ve ne sono di più. Si considera, a tal proposito, l'**omogenea associata** $ax + by = 0$.

Osservazione 1.8. La comodità nel lavorare con l'omogenea associata sta nel fatto che se (\bar{x}, \bar{y}) risolve $ax + by = c$ e (γ, δ) risolve l'omogenea, allora $(\bar{x} + \gamma, \bar{y} + \delta)$ è ancora soluzione di $ax + by = c$.

L'obiettivo, ora, è di trovare il numero delle soluzioni per l'omogenea associata. Si nota che $ax + by = 0 \Rightarrow ax = -by$; si risolve

$$\frac{a}{\gcd(a, b)}x = -\frac{b}{\gcd(a, b)}y$$

Sia (γ, δ) una soluzione di questa; visto che $a/\gcd(a, b)$ e $b/\gcd(a, b)$ sono coprimi¹, il teorema 1.8 afferma che $a/\gcd(a, b)$ divide δ , quindi δ è della forma $\frac{a}{\gcd(a, b)}t$ e γ , analogamente, è della forma $-\frac{b}{\gcd(a, b)}t$.

Al contrario, si nota facilmente che una qualunque coppia della forma $(-\frac{b}{\gcd(a, b)}t, \frac{a}{\gcd(a, b)}t)$, con $t \in \mathbb{Z}$ è una soluzione dell'omogenea associata. Questo significa che le soluzioni dell'omogenea associata sono tutte di questa forma, pertanto sono infinite.

Da questo discorso, si può concludere che anche le soluzioni dell'equazione diofantea iniziale $ax + by = c$ sono infinite. Il teorema di seguito permette di concludere, ulteriormente, che *tutte* le soluzioni di $ax + by = c$ sono esprimibili tramite quelle dell'omogenea, quindi equazione originale e omogenea hanno lo stesso numero di soluzioni.

Teorema 1.10

Se l'equazione $ax + by = c$ ammette soluzione, allora ne ammette infinite. Data (\bar{x}, \bar{y}) una sua soluzione, l'insieme \mathcal{S} di tutte le soluzioni di $ax + by = c$ è ottenibile come

$$\mathcal{S} = \{(\bar{x} + \gamma, \bar{y} + \delta) : (\gamma, \delta) \text{ soluzione dell'omogenea associata}\}$$

Dimostrazione. Per quanto detto sopra, si conclude che

$$\{(\bar{x} + \gamma, \bar{y} + \delta) : (\gamma, \delta) \text{ soluzione dell'omogenea associata}\} \subseteq \mathcal{S}$$

Si deve mostrare l'inclusione inversa. Questo segue direttamente dal fatto che, se (α, β) è soluzione di $ax + by = c$, allora $(\alpha - \bar{x}, \beta - \bar{y})$ è soluzione dell'omogenea associata. □

1.5 Relazioni di equivalenza e congruenza

Definizione 1.5 (Relazione di equivalenza)

Sia S un insieme. Una relazione di equivalenza su S è una relazione indicata con $x \sim y$, $x, y \in S$, tale che:

ER 1. $\forall x \in S, x \sim x$;

¹Vedi corollario 1.2.

ER 2. se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora $x \sim z$;

ER 3. se $x \sim y$, allora $y \sim x$.

Se su S è definita una relazione di equivalenza \sim , le classi di equivalenza sono insiemi $C_x := \{y \in S : y \sim x\}$ partizionano S in insiemi disgiunti. Inoltre, dati due elementi $r, s \in S$, si ha $C_r \equiv C_s$, oppure C_r, C_s non hanno elementi in comune. Si sceglie un elemento che identifica la classe di equivalenza, ad esempio x per C_x , e tale elemento si chiama rappresentante della classe di equivalenza. Un esempio di relazione di equivalenza è la congruenza.

Definizione 1.6 (Congruenza)

Sia $m \in \mathbb{Z}^+$ e $a, b \in \mathbb{Z}$; si dice che a è congruente b modulo m se $\exists k \in \mathbb{Z} : a - b = km$. In tal caso, si scriverà $a \equiv b \pmod{m}$.

Osservazione 1.9. La definizione più esplicita di congruenza è che due numeri $a, b \in \mathbb{Z}$ di dicono congruenti modulo $m \in \mathbb{Z}^+$ se, divisi per m , restituiscono lo stesso resto. Di fatto, da questa discende la definizione data sopra: se $a = qm + r$, $b = pm + r \Rightarrow a - b = (q - p)m$.

Definizione 1.7 (Interi pari e dispari)

Si definiscono gli interi **pari** come quelli che sono congruenti a 0 (mod 2) (quindi $n = 2m$) e quelli **dispari** come gli interi che non sono pari, quindi della forma $2m + 1$, per qualche intero m .

Dalla definizione di congruenza, si ha che $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a - b = qm$, quindi $a - b$ appartiene all'ideale generato da m .

Inoltre, la stessa relazione implica che $m|(a - b)$; viceversa, se $a \not\equiv b \pmod{m}$, allora i due numeri divisi per m avrebbero resti diversi: $a = k_1m + r_a$, $b = k_2m + r_b$, il che implica che $a - b = (k_1 - k_2)m + (r_a - r_b)$, che non è divisibile per m ; allora si ha il seguente.

Proposizione 1.1

Siano $m \in \mathbb{Z}^+$ e $a, b \in \mathbb{Z}$; a e b sono congruenti se e soltanto se $m|(a - b)$.

Proposizione 1.2 (Addizione e moltiplicazione in congruenza)

Dati $a \equiv a' \pmod{m}$ e $b \equiv b' \pmod{m}$, si ha:

$$a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$$

$$ab \equiv a'b' \pmod{m}$$

Dimostrazione. Per definizione, si ha $a' = a + km$ e $b' = b + k'm$; quindi:

$$a' + b' = a + b + (k + k')m \Rightarrow a' + b' \equiv a + b \pmod{m}$$

Per la moltiplicazione, si nota che

$$a'b' = ab + m(kb + k'a) + kk'm^2$$

da cui si vede che $a'b' - ab$ è divisibile per m , quindi $a'b' \equiv ab \pmod{m}$. \square

La divisione in congruenza funziona diversamente; infatti $2 \cdot 7 \equiv 2 \cdot 4 \pmod{6}$, ma $7 \not\equiv 4 \pmod{6}$. Si ha il seguente.

Teorema 1.11 (Divisione in congruenza)

Sia $m \in \mathbb{Z}^+$; $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e dati $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, vale

$$ab_1 \equiv ab_2 \pmod{m} \iff b_1 \equiv b_2 \pmod{\frac{m}{\gcd(a, m)}}$$

Questo vuol dire che la divisione è ammessa a patto di dividere il modulo per $\gcd(a, m)$.

Dimostrazione. Si mostra l'implicazione verso destra. Per definizione, $m \mid (ab_1 - ab_2)$, quindi $\exists q \in \mathbb{Z} : mq = ab_1 - ab_2$. Dividendo per $\gcd(a, m)$:

$$\frac{a}{\gcd(a, m)}(b_1 - b_2) = \frac{m}{\gcd(a, m)}q$$

Ma $a/\gcd(a, m)$ e $m/\gcd(a, m)$ sono coprimi, quindi $(m/\gcd(a, m)) \mid (b_1 - b_2)$, il che implica che

$$b_1 \equiv b_2 \pmod{\frac{m}{\gcd(a, m)}}$$

Per l'implicazione inversa, si assume che

$$b_1 \equiv b_2 \pmod{\frac{m}{\gcd(a, m)}}$$

per cui $\exists t \in \mathbb{Z}$ tale che

$$t \frac{m}{\gcd(a, m)} = b_1 - b_2 \implies tm = (b_1 - b_2)\gcd(a, m)$$

quindi $m \mid (b_1 - b_2)\gcd(a, m)$. Usando che $\gcd(a, m) \mid a$, si ottiene che

$$m \mid (b_1 - b_2)a \implies ab_1 \equiv ab_2 \pmod{m}$$

\square

1.5.1 Inversi in congruenze

Gli unici inversi moltiplicativi in \mathbb{Z} sono $+1, -1$; operando con le congruenze, si riescono a trovare altri inversi moltiplicativi a patto di definire correttamente cosa vuol

dire.

Definizione 1.8 (Inverso in congruenza)

Sia $m \in \mathbb{Z}^+$; l'inverso di $a \in \mathbb{Z}$ è un certo $e \in \mathbb{Z}$ tale che

$$e \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

Esempio 1.1. Per esempio, 2 è l'inverso di 3 mod 5 perché $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$.

Osservazione 1.10. Quando un numero ammette inverso in congruenza, ne ammette infiniti; infatti, se a è l'inverso di $n \bmod m$, allora

$$n \cdot (a + km) \equiv n \cdot a + knm \equiv 1 + knm \equiv 1 \pmod{m}$$

Non sempre un numero ammette un inverso moltiplicativo per qualche modulo; di seguito, è riportata una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'inverso.

Teorema 1.12

Un numero $a \in \mathbb{Z}$ ha inverso mod m se e solo se $\gcd(a, m) = 1$.

Dimostrazione. Si assume che $\gcd(a, m) = 1$; per Bézout, si ha:

$$au + mv = 1$$

per qualche coppia $u, v \in \mathbb{Z}$. Questa uguaglianza, letta modulo m , diventa:

$$au \equiv 1 \pmod{m}$$

cioè u è inverso di $a \bmod m$.

Per l'implicazione inversa, si assume che a abbia inverso moltiplicativo u . Questo implica che $au \equiv 1 \pmod{m}$, che, a sua volta, diventa:

$$au - mk = 1$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Questo è sufficiente per affermare che $\gcd(a, m) = 1$. \square

1.5.2 Congruenze lineari in una incognita

Si cercano le soluzioni x alla congruenza $ax \equiv b \pmod{m}$. Si inizia col notare che se $\exists d \in \mathbb{Z}$ tale che $d|a$ e $d|m$, ma $d \nmid b$ allora l'equazione non ha soluzioni.

Dimostrazione. Se per assurdo ne avesse almeno una \bar{x} , allora sarebbe soddisfatta $a\bar{x} - b = qm$, per qualche $q \in \mathbb{Z}$. Ma, nonostante m sia divisibile per d , l'altro membro non risulta tale per via di b , il che è assurdo. \square

Da quanto appena notato, si conclude la condizione necessaria perché esista almeno una soluzione, ossia $\gcd(a, m)|b$.

Osservazione 1.11. Se $k|a, b$, allora l'equazione

$$\frac{a}{k}x \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{m}{\gcd(k, m)}}$$

è equivalente a $ax \equiv b \pmod{m}$, cioè hanno le stesse soluzioni. Si nota in particolare che, se s è un numero primo, allora l'equazione $sax \equiv sb \pmod{m}$ ha stesse soluzioni di quella di partenza.

Teorema 1.13

La congruenza $ax \equiv b \pmod{m}$ ha soluzione se e soltanto se $\gcd(a, m)|b$. Inoltre, il numero totale di soluzioni è $\gcd(a, m)$: le altre si ottengono sommandogli un multiplo di m .

Dimostrazione. La prima parte si è già dimostrata, quindi si dimostra solo quella relativa al numero di soluzioni. Assumendo che effettivamente $\gcd(a, m)|b$, allora $\gcd(a, m)$ è il massimo divisore comune di a, b, m ; allora, dividendo la congruenza per questo, si ha:

$$a'x \equiv b' \pmod{m'}$$

dove

$$a' = \frac{a}{\gcd(a, m)} \quad b' = \frac{b}{\gcd(a, m)} \quad m' = \frac{m}{\gcd(a, m)}$$

dove a' e m' sono coprimi per costruzione. Essendo coprimi, significa che a' ha inverso moltiplicativo mod m' ; sia questo e' , il quale soddisfa $a'e' \equiv 1 \pmod{m'}$. Si può guardare la relazione dal punto di vista per cui l'inverso moltiplicativo di e' è a' e e' è coprimo con m' ; in questo modo, si può moltiplicare per e' senza modificare il modulo:

$$e'a'x \equiv x \equiv e'b' \pmod{m'}$$

quindi le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole quelle della forma

$$x = e'b' + qm' = e'b' + \frac{q}{\gcd(a, m)}m$$

per qualche $q \in \mathbb{Z}$. Questa forma permette di notare che esistono esattamente $\gcd(a, m)$ interi che risolvono questa equazione che non sono multipli di m . \square

1.5.3 Il piccolo teorema di Fermat

Teorema 1.14 (Il piccolo teorema di Fermat)

Sia $p \in \mathbb{Z}$ un numero primo e $a \in \mathbb{Z}$ tale che $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, cioè a non è multiplo di p ; allora

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Dimostrazione. Per assunzione, $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, quindi i numeri

$$a, 2a, \dots, (p-1)a$$

sono, a due a due, non congrui mod p fra di loro; infatti, se così non fosse ed esistessero due numeri $i, j : 1 \leq i < j \leq p-1$ tali per cui $ia \equiv ja \pmod{p}$, allora $(i-j)a = qp$ per $q \in \mathbb{Z}$. Questo significa che, essendo a e p coprimi, per cui a ha inverso moltiplicativo b : $iab \equiv jab \pmod{m} \Rightarrow i \equiv j \pmod{m}$; questo non è possibile perché i e j erano stati assunti diversi e compresi tra 1 e $p-1$, quindi non possono avere stesso resto se divisi per p .

Allora, i resti dalla divisione per p di questi numeri sono nell'insieme $\{1, 2, \dots, p-1\}$ perché il resto deve essere strettamente compreso da 1 e $p-1$ e deve essere diverso per ciascuno di quei numeri, per quanto appena mostrato. Questo permette di scrivere la seguente congruenza:

$$a \cdot (2a) \cdot \dots \cdot ((p-1)a) \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

Raccogliendo a sinistra tutti i fattori a :

$$a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) \pmod{p}$$

Visto che ciascuno dei numeri è coprimo con p perché sono strettamente minori di p , si può moltiplicare questa congruenza per il loro inverso e arrivare a

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

□

^aQuesto basta per affermare che i due sono coprimi.

Corollario 1.3

Se $p \in \mathbb{Z}$ è primo, allora $\forall a \in \mathbb{Z}$ vale

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Dimostrazione. Nel caso $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, allora vale $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ per il teorema di Fermat; usando ancora che a e p sono coprimi, si ottiene direttamente per moltiplicazione $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Nel caso in cui $a \equiv 0 \pmod{p}$, invece, anche $a^p \equiv 0 \pmod{p}$; quindi, per transitività, si ha $a^p \equiv a \pmod{p}$. □

Corollario 1.4

Se $n \in \mathbb{Z}^{>1}$ è un intero tale che, per qualche $a \in \mathbb{Z}$, si ha $a^n \not\equiv a \pmod{n}$, allora n non è primo.

Osservazione 1.12. I numeri $n \in \mathbb{Z}^{>1}$ che soddisfano $a^n \equiv a \pmod{n}$ non sono necessariamente primi; questi sono noti come *falsi primi* e sono detti *numeri di Carmichael*.

1.6 Il teorema cinese del resto e classi di resto

1.6.1 Il teorema cinese del resto

Stabilisce una condizione per risolvere sistemi di congruenze. Si vuole risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m_1} \\ x \equiv b \pmod{m_2} \end{cases} \quad (1.6.1)$$

La soluzione della prima è data $x = a + km_1$, $k \in \mathbb{Z}$; inserendolo nella seconda (considerando k come variabile), si ottiene $a + km_1 \equiv b \pmod{m_2}$, da cui

$$m_1 k \equiv b - a \pmod{m_2} \implies km_1 - k'm_2 = b - a$$

che si sa avere soluzione (per th. 1.9) se e soltanto se $\gcd(m_1, m_2) \mid b - a$.

Si cerca di capire come trovare tutte le soluzioni una volta concluso che tale sistema ne ammette. A tale proposito, si considera una soluzione particolare k_0 di $km_1 \equiv b - a \pmod{m_2}$; quindi $x_0 = a + k_0 m_1$ risolve il sistema di partenza in eq. 1.6.1:

$$\begin{cases} x_0 \equiv a \pmod{m_1} \\ x_0 \equiv b \pmod{m_2} \end{cases}$$

Sia x_1 un'altra soluzione di tale sistema; prendendo la differenza, si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 \equiv 0 \pmod{m_1} \\ x_0 - x_1 \equiv 0 \pmod{m_2} \end{cases}$$

Quindi la differenza tra le soluzioni è sia multiplo di m_1 che di m_2 . Il più piccolo intero che soddisfa questa condizione è chiamato *minimo comune multiplo* di m_1 e m_2 e si indica con $\text{lcm}(m_1, m_2)$. Tutto questo si riassume nel seguente teorema.

Teorema 1.15 (Teorema cinese del resto)

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m_1} \\ x \equiv b \pmod{m_2} \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzione $\iff \gcd(m_1, m_2) \mid b - a$; in questo caso, data

x_0 una soluzione, tutte le altre soluzioni del sistema sono della forma

$$x_0 + s \cdot \text{lcm}(m_1, m_2), s \in \mathbb{Z}$$

Osservazione 1.13. Equivalentemente, si può scrivere che tutte le soluzioni del sistema sono le x tali che

$$x \equiv x_0 \pmod{\text{lcm}(m_1, m_2)} \quad (1.6.2)$$

Si nota, infine, che esiste un'unica soluzione x tale che $0 \leq x < \text{lcm}(m_1, m_2)$.

Quando i moduli delle equazioni sono primi fra loro, cioè dato il sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m_1} \\ x \equiv b \pmod{m_2} \end{cases}$$

con $\gcd(m_1, m_2) = 1$, il sistema ammette sempre soluzione e ne esiste un'unica x_0 tale che $0 \leq x_0 \leq m_1 \cdot m_2$; tutte le altre sono i numeri della forma

$$x_0 + 1 \cdot m_1 \cdot m_2, q \in \mathbb{Z} \quad (1.6.3)$$

Il teorema cinese del resto è generalizzabile ed enunciabile nella sua forma più classica, che è la seguente.

Teorema 1.16 (Teorema cinese del resto classico)

Dato il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

dove i moduli sono, a due a due, coprimi, cioè $\gcd(m_i, m_j) = 1, \forall i \neq j$. Il sistema ammette sempre soluzione ed esiste un'unica soluzione x_0 tale che $0 \leq x_0 < m_1 \cdot \dots \cdot m_n$. Tutte le altre soluzioni sono numeri della forma

$$x_0 + q \cdot m_1 \cdot \dots \cdot m_n, q \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. Si mostra a partire dal caso di un sistema di due congruenze, procedendo per induzione. □

1.6.2 Classi di resto

I possibili resti della divisione euclidea per 10 sono $0, 1, 2, \dots, 9$; ad esempio, i numeri che danno resto 1 sono $1, 11, 21, 31, \dots, -9, -19, 29, \dots$ e si indica con $[1]_{10}$ l'insieme di tutti questi numeri, cioè:

$$[1]_{10} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{10}\} \quad (1.6.4)$$

In generale, si indica con $[i]_{10}$ l'insieme degli interi che danno i come resto da divisione euclidea per 10. Gli insiemi per $i = 0, \dots, 9$ si chiamano *classi di resto modulo 10* e la loro unione coincide con \mathbb{Z} . L'insieme i cui elementi sono le classi di resto modulo 10 si indica con

$$\mathbb{Z}_{10} = \{[0]_{10}, [1]_{10}, \dots, [9]_{10}\} \quad (1.6.5)$$

Su questo insieme, si possono definire una somma e una moltiplicazione, ma prima è necessario estendere la notazione sviluppata finora perché al momento $[11]_{10}$ non è ben definito. Si sceglie di prendere $[11]_{10} = [1]_{10}$, o anche $[127]_{10} = [7]_{10}$ e, più in generale, $[s]_{10} = [i]_{10}$ qualora $s \equiv i \pmod{10}$.

In questo modo, la somma e il prodotto di elementi di \mathbb{Z}_{10} sono definiti come:

$$\begin{aligned} [a]_{10} \cdot [b]_{10} &= [ab]_{10} \\ [a]_{10} + [b]_{10} &= [a+b]_{10} \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Esempio 1.2. Si ha:

$$\begin{aligned} [7]_{10} \cdot [5]_{10} &= [35]_{10} = [5]_{10} \\ [6]_{10} + [8]_{10} &= [14]_{10} = [4]_{10} \end{aligned}$$

In realtà, la verifica di avere definiti una buona somma e una buona moltiplicazione richiede la verifica che se $[a]_{10} = [a']_{10}$, $[b]_{10} = [b']_{10}$, allora

$$\begin{aligned} [a]_{10} \cdot [b]_{10} &= [a']_{10} \cdot [b']_{10} \\ [a]_{10} + [b]_{10} &= [a']_{10} + [b']_{10} \end{aligned}$$

Dimostrazione. **DA DIMOSTRARE!** Suggestimento: da $[a']_{10} = [a]_{10} \Rightarrow a' = a + 10k$ per qualche k e l'analogo vale per b' . Per la moltiplicazione, per esempio:

$$[a']_{10} \cdot [b']_{10} = [(a + 10k)(b + 10t)]_{10} = [ab + 10bk + 10at + 100kt]_{10} = [ab]_{10} = [a]_{10} \cdot [b]_{10}$$

□

Con queste operazioni, \mathbb{Z}_{10} è un anello commutativo con unità; si nota che tali operazioni soddisfano la proprietà commutativa, associativa, distributiva, esistenza dell'elemento neutro e dell'opposto rispetto alla somma, eccetera. Una novità, invece, è che

$[2]_{10} \cdot [5]_{10} = [10]_{10} = [0]_{10}$, cioè il prodotto di due numeri non-nulli può fare zero: in questo caso, ad esempio, si dirà che $[2]_{10}, [5]_{10}$ sono divisori dello zero in \mathbb{Z}_{10} .

Questo discorso si può generalizzare per $m \in \mathbb{Z}^+$, cioè per $i = 0, 1, \dots, m-1$, si definisce la classe di resto $[i]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv i \pmod{m}\}$. Come nel caso $m = 10$, le classi di resto forniscono una partizione di \mathbb{Z} , cioè sono a due a due disgiunte e la loro unione restituisce proprio \mathbb{Z} . Si indica con \mathbb{Z}_m o $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ l'insieme di queste classi:

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \dots, [m-1]_m\} \quad (1.6.7)$$

che ha, dunque, cardinalità m . In modo del tutto analogo, si prende $[i]_m = [s]_m$ qualora $s \equiv i \pmod{m}$ e si definiscono le operazioni

$$\begin{aligned} [a]_m \cdot [b]_m &= [a']_m \cdot [b']_m \\ [a]_m + [b]_m &= [a']_m + [b']_m \end{aligned}$$

Verificando come nel caso precedente che sono ben definite, si ottiene che \mathbb{Z}_m è un anello commutativo con unità.

Osservazione 1.14. Il piccolo teorema di Fermat si può esprimere in modo equivalente tramite le classi di resto: dato p primo e la classe $[a]_p$ in \mathbb{Z}_p , con $[a]_p \neq [0]_p$, vale:

$$([a]_p)^{p-1} = [1]_p \quad (1.6.8)$$

Tramite questa osservazione, si vede che esiste un intero minimo $b \in \mathbb{Z}^+$ tale che $[a]_p^b = [1]_p$, con $b \leq p-1$; in questo caso, b sarà l'ordine moltiplicativo di $[a]_p$ in \mathbb{Z}_p . Questo b ha la proprietà per cui se $m \in \mathbb{Z}^+$ tale che $[a]_p^m = [1]_p$, allora $b|m$; in particolare, $b|p-1$.

Dimostrazione. Per vederlo, si usa la divisione euclidea per scrivere $m = qb + r$ e si ricava che $[a]_p^r = [1]_p$; a questo punto, si vede che deve essere $r = 0$ altrimenti verrebbe contraddetta la minimalità di b . \square

1.7 La funzione di Eulero

Definizione 1.9 (Funzione di Eulero)

La funzione ϕ di Eulero è definita come

$$\phi : \mathbb{N}^{>0} \rightarrow \mathbb{N}^{>0} \quad \phi(n) = \#\{a \leq n \mid \gcd(a, n) = 1\}$$

ossia rappresenta il numero degli interi positivi minori o uguali ad n che sono anche coprimi con n stesso.

Tramite questa, si enuncia un teorema che è la generalizzazione del piccolo teorema di Fermat.

Teorema 1.17

Sia $m \in \mathbb{Z}^{>0}$ e $a \in \mathbb{Z}$ tale che $\gcd(a, m) = 1$; allora

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Dimostrazione. Se $m = 1$, è ovvio perché tutti i numeri sono congrui fra loro modulo 1. Si può assumere, allora, $m \geq 2$ e si considerano le classi di resto $[a^0], [a^1], \dots$; visto che queste sono le classi di resto modulo m , devono essere tutte diverse fino a un certo k , che è il più piccolo numero per cui una classe di resto si ripete: $[a^j] = [a^k] \Rightarrow j = 0$, altrimenti $[a^{j-1}] = [a^{k-1}]$ che è assurdo perché k era il più piccolo. Quindi $[a^k] = [a^0]$, cioè $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. Si nota che se a è coprimo con m , allora anche tutte le sue potenze lo sono, il che vuol dire che le classi di resto distinte sono, al massimo, tante quante $\phi(m)$, cioè $k \leq \phi(m)$.

Se $k = \phi(m)$, il teorema è dimostrato. Si assume, altrimenti, che sia $k < \phi(m)$ e che sia $b < m$ un intero coprimo con m tale che $[b] \notin \{[a^0], [a^1], \dots, [a^{k-1}]\}$; allora gli elementi $[ba^0], \dots, [ba^{k-1}]$ sono tutti distinti fra loro e dai precedenti perché, essendo b coprimo con m per assunzione, se fosse $[ba^s] = [ba^t]$ per qualche $0 \leq s, t < k$, si avrebbe $[a^s] = [a^t]$ per le regole di divisione delle congruenze, da cui $s = t$. Invece, se fosse $[ba^s] = [a^t]$ per s, t come prima, moltiplicando per a^{k-s} (che è sempre coprimo con m), si ottiene $[b] = [a^{k-s+t}]$, il che è assurdo per costruzione di b .

In questo modo, si hanno $2k$ elementi distinti fra le $\phi(m)$ classi di resto coprime con m ; se $\phi(m) = 2k$, il teorema è dimostrato, altrimenti si ripete il procedimento finché non si esauriscono le classi di resto, ottenendo $kd = \phi(m)$ per qualche intero $d > 0$. A questo punto:

$$a^{\phi(m)} \equiv a^{kd} \equiv (a^k)^d \equiv 1^d \equiv 1 \pmod{m}$$

che dimostra il teorema. □

Osservazione 1.15. Si nota che per $m = p$ primo, si ritrova l'enunciato del piccolo teorema di Fermat, visto che $\phi(p) = p - 1$.

Vista l'importanza della funzione ϕ , si cerca un modo per poterla calcolare efficacemente.

Definizione 1.10 (Funzione aritmetica moltiplicativa)

Una funzione $f : \mathbb{N}^{>0} \rightarrow \mathbb{N}^{>0}$ si dice *aritmetica moltiplicativa* se $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \gcd(a, b) = 1 \Rightarrow f(ab) = f(a)f(b)$.

Proposizione 1.3

La funzione di Eulero ϕ è aritmetica moltiplicativa.

Dimostrazione. Si nota, preliminarmente, che dati s, t, m interi, con $m > 0$, tali

che $s \equiv t \pmod{m}$, si ha che s è coprimo con m se e solo se lo è t , visto che la congruenza è una relazione di equivalenza.

Sia, ora, $u \in \mathbb{Z}^{>0}$ coprimo con ab e $u < ab$; allora u è, in particolare, coprimo sia con a che con b , quindi risolve un sistema del tipo

$$\begin{cases} x \equiv v \pmod{a} \\ x \equiv w \pmod{b} \end{cases}$$

con $v \in \mathbb{Z}^{>0}$ coprimo con a e $v < a$ e $w \in \mathbb{Z}^{>0}$ coprimo con b e $w < b$. Viceversa, per il teorema cinese del resto, ogni sistema del genere ha una sola soluzione intera positiva minore di ab e, essendo coprima con a e con b , lo è anche con ab . Quindi i numeri interi positivi coprimi con ab e minori di ab sono tanti quanti i sistemi della forma di quello sopra, che sono $\phi(a)\phi(b)$, cioè il prodotto delle possibili scelte di v e w . \square

Teorema 1.18

Sia $m \in \mathbb{Z}^{>0}$; se $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ è la sua decomposizione in fattori primi, allora:

$$\phi(m) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) \cdots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1})$$

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente, si sa che $\phi(m)$ è il prodotto dei $\phi(p_i^{a_i})$; si deve, dunque, capire quanto vale $\phi(p^n)$, con p numero primo. Si nota che gli interi positivi minori di p^n sono tutti primi con p^n , tranne quelli che sono multipli di p ; tuttavia, i multipli di p minori di p^n sono proprio p^{n-1} , quindi $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$. \square

Esempio 1.3. Con la teoria finora sviluppata, si può calcolare subito la classe di resto di 2^{365} modulo 225; visto che $\phi(225) = (25 - 5)(9 - 3) = 120$, per il teorema 1.17, si ha:

$$2^{120} \equiv 1 \pmod{225}$$

quindi

$$2^{365} \equiv (2^{120})^3 \cdot 2^5 \equiv 2^5 \equiv 32 \pmod{225}$$

Si nota che $\phi(m)$ non è il minimo intero che soddisfa il teorema 1.17; infatti, per questo teorema, si ha $2^8 \equiv 1 \pmod{15}$, ma, d'altra parte, vale anche $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$. Questo si ha perché 1^n è congruo a 1 modulo m per qualunque n ; inoltre, se $m > 2$, si ha $\phi(m) \neq 1$.

2 TEORIA DEI GRUPPI

2.1 Introduzione

Definizione 2.1 (Gruppo)

Un gruppo G è un insieme su cui è definita una *legge di composizione* $*$: $G \rightarrow G$ che soddisfa le seguenti condizioni per gli elementi di G :

GR 1. $(x * y) * z = z * (y * z)$ (*associatività*);

GR 2. $\exists e \in G : x * e = e * x = x$ (elemento neutro);

GR 3. $\forall x \in G, \exists y \in G$ tale che $x * y = y * x = e$ (elemento inverso).

Quando $*$ è la moltiplicazione, G si dice **gruppo moltiplicativo**; quando $*$ è l'addizione, G si dice **gruppo additivo**.

Definizione 2.2 (Gruppo commutativo)

Un insieme G è detto *gruppo commutativo* se è un gruppo e se soddisfa ulteriormente

$$x * y = y * x, \forall x, y \in G$$

L'elemento neutro di ciascun gruppo è unico.

Dimostrazione. Sia e' un altro elemento neutro; si nota che: $e = ee' = e'$. □

L'elemento inverso di ciascun elemento di un gruppo G è unico.

Dimostrazione. Siano y, y' gli elementi inversi di x ; allora: $e = xy \implies y'e = y'xy \implies y' = y$. □

Questo elemento inverso si indica con x^{-1} ; per gruppo additivo, si indicherà con $-x$.

Esempio 2.1. I numeri reali \mathbb{R} e i numeri complessi \mathbb{C} sono entrambi gruppi additivi. I numeri reali diversi da 0, \mathbb{R}^* , e i numeri complessi diversi da 0, \mathbb{C}^* , sono gruppi moltiplicativi.

Esempio 2.2. L'insieme dei numeri complessi di modulo 1, $\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, è un gruppo moltiplicativo.

Definizione 2.3 (Prodotto diretto)

Siano G_1, \dots, G_n dei gruppi; si definisce *prodotto diretto* l'insieme

$$G_P = \prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

e contiene tutte le n -uple (x_1, \dots, x_n) , $x_i \in G_i$.

Prendendo un prodotto diretto di gruppi ed equipaggiandolo con il prodotto componente per componente, dove l'elemento unità è (e_1, \dots, e_n) , con e_i unità di G_i , si ottiene un gruppo moltiplicativo.

Definizione 2.4 (Gruppo finito)

Un gruppo G si dice *finito* se ha un numero limitato di elementi; si chiama **ordine** il numero di elementi di tale gruppo e si indica con $|G|$.

Definizione 2.5 (Sottogruppo)

Sia G un gruppo e $H \subset G$ un sottoinsieme di G . Si dice che H è un sottogruppo di G se:

- $e \in H$;
- $\forall x, y \in H, x * y \in H$;
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.

Definizione 2.6 (Generazione di un sottogruppo)

Sia $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset G$ un sottoinsieme di un gruppo G ; l'insieme $H := \{x \in G : x = x_1 * \dots * x_n\} \cup \{x^{-1} \in G : x \in S\} \cup \{e \in G\}$ è un sottogruppo di G ed è detto *generato* da S , dove gli elementi di S sono detti i *generatori* di H .

In questo caso, si scriverà che $H = \langle S \rangle \equiv \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Esempio 2.3. Si nota che $\{1\}$ è un generatore per il gruppo additivo degli interi, visto che ogni $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si può scrivere come $1 + 1 + \dots + 1$, o $-1 - 1 - \dots - 1$, mentre l'elemento neutro ne fa parte per definizione.

Definizione 2.7 (Centro di un gruppo)

Sia G un gruppo; si definisce il *centro* di G come l'insieme

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg, \forall h \in G\}$$

cioè è composto da tutti gli elementi di G che commutano con tutti gli altri elementi di G .

Proposizione 2.1

$Z(G)$ è un sottogruppo di G .

Dimostrazione. Intanto $e \in Z(G)$ perché l'unità rispetto all'operazione di G commuta con tutti gli altri elementi del gruppo; poi si nota che $Z(G)$ è chiuso sotto tale operazione perché se $h, k \in Z(G)$ e $g \in G$:

$$(hk)g = h g k = g(hk)$$

Infine, per $h \in Z(G)$, anche $h^{-1} \in Z(G)$ perché, dato $g \in G$:

$$g = h^{-1}hg = h^{-1}gh \iff [h^{-1}, g] = 0$$

□

Ora si definisce una notazione per indicare una ripetizione dell'operazione di composizione con lo stesso elemento. In generale, si scriverà:

$$x^n \equiv \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ volte}} \quad (2.1.1)$$

Se $n = 0$, si definisce $x^n = e$; invece, se $n = -m$, si ha la seguente definizione:

$$x^{-m} = (x^{-1})^m$$

Allora si possono verificare le seguenti:

- $x^{n+m} = x^n x^m$;
- $x^{-m} x^n = x^{n-m}$;
- $(x^n)^m = x^{nm}$.

Queste sono direttamente valide per la moltiplicazione, mentre per l'addizione si ha un qualcosa di analogo. Per cominciare $x^n \equiv nx$ nel caso dell'addizione, per definizione. Conseguentemente, le regole soddisfatte sono le seguenti:

$$(m+n)x = mx + nx ; (mn)x = m(nx)$$

Sia, G un gruppo e sia $a \in G$. Si definisce il sottogruppo H di G come quell'insieme avente tutti elementi del tipo a^n , $\forall n \in \mathbb{Z}$. In questo senso, H è generato da a . Per mostrare che è un gruppo, si nota che $e \in H$ perché $e = a^0$; dati, poi, $a^n, a^m \in H$, anche $a^{n+m} \equiv a^n a^m \in H$ perché $n+m \in \mathbb{Z}$. Infine, l'inverso di ciascun elemento a^n appartiene ad H perché $(a^n)^{-1} \equiv a^{-n}$, che appartiene ad H perché $-n \in \mathbb{Z}$.

Definizione 2.8 (Gruppo ciclico)

Sia G un gruppo; si dice che G è *ciclico* se esiste $a \in G : \forall g \in G, g = a^n$, per qualche intero n .

Riprendendo l'esempio 2.3, \mathbb{Z} è un gruppo additivo ciclico, con generatore 1. Visto che un sottogruppo di \mathbb{Z} è quello che si è chiamato *ideale*, si ha la seguente.

Proposizione 2.2

Sia H un sottogruppo di \mathbb{Z} . Se H non è il sottogruppo banale, sia d il più piccolo intero in esso contenuto; allora H contiene tutti elementi della forma nd , con $n \in \mathbb{Z}$, pertanto H è ciclico.

Sia G un gruppo ciclico e sia $a \in G$ il suo generatore; si hanno due casi possibili.

- *Caso 1:* non esiste $n \in \mathbb{Z}^{>0} : a^n = e$.

Allora per ogni intero $n \neq 0$, $a^n \neq e$ e, allora, G si dice **infinitamente ciclico**, o che a ha **ordine infinito** perché ogni elemento $a^n \in G$ è distinto dall'altro.

Dimostrazione. Si assume $a^r = a^s$ per qualche coppia di interi r, s ; allora $a^{s-r} = e \Rightarrow s - r = 0 \Rightarrow r = s$. \square

- *Caso 2:* $\exists m \in \mathbb{Z}^{>0} : a^m = e$.

In questo caso, a ha **ordine finito**. Evidentemente, il gruppo è finito perché i suoi elementi si ripetono periodicamente.

Sia J l'insieme degli $n \in \mathbb{Z}$ tali che $a^n = e$; allora J è un sottogruppo di \mathbb{Z} .

Dimostrazione. Si ha $0 \in J$ perché $a^0 = e$ per definizione. Se $m, n \in J$, allora $a^{m+n} = a^m a^n = e \Rightarrow m + n \in J$. Infine, visto che $a^{-m} = (a^m)^{-1} = e$, anche $-m \in J$. \square

Per il teorema 1.4, il più piccolo intero positivo contenuto in J genera J stesso; allora, per definizione, d è il più piccolo intero tale che $a^d = e$.

Definizione 2.9 (Periodo di un elemento)

Il più piccolo intero d tale che $a^d = e$ viene chiamato **periodo** di a . In quanto tale, se $a^n = e$ per qualche intero n , allora $n = ds$, per qualche intero s .

Osservazione 2.1. Alcune volte, il periodo di un elemento si dice anche ordine e si indica con $o(g)$, $g \in G$.

Teorema 2.1

Sia G un gruppo e sia $a \in G$ un elemento di periodo d ; allora a genera il sottogruppo ciclico di ordine d , i cui elementi sono e, a, \dots, a^{d-1} .

Dimostrazione. Per mostrare l'esistenza di tale sottogruppo, si nota che per $a \in G$, di periodo d , e per generico $n \in \mathbb{Z}$, l'algoritmo euclideo afferma che $n = qd + r$, con $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < d$, per cui vale $a^n = a^r$.

Ora si mostra che gli elementi sono distinti. Se fosse $a^r = a^s$, con $0 \leq r, s \leq d - 1$ e, per assunzione, $r \leq s$, allora $a^{s-r} = e$; però $0 \leq s - r < d$, quindi bisogna avere $s - r = 0$, da cui $r = s$. \square

2.2 Mappe tra gruppi

Dati S, S' due insiemi, una mappa fra questi è indicata con $f : S \rightarrow S'$; per $x \in S$, si indica con $f(x) \in S'$ l'immagine di x attraverso la mappa f . Per definire l'immagine di x attraverso f , si usa anche la notazione $x \mapsto f(x)$.

Data $f : S \rightarrow S'$ e $T \subset S$, si può definire una mappa che è la restrizione di f a T , assegnando $x \mapsto f(x)$, $\forall x \in T \subset S$; questa si indica con $f|_T : T \rightarrow S'$.

Una mappa $f : S \rightarrow S'$ si dice **iniettiva** se $\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Una mappa si dice **suriettiva** se $\forall y \in S', \exists x \in S : f(x) = y$. Infine, f è **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. Il fatto che f sia biettiva permette di individuare univocamente il suo inverso, la cui esistenza è assicurata dalla suriettività, mentre l'unicità dall'iniettività.

Definizione 2.10 (Mappa inclusione)

Sia S un insieme e $T \subset S$; la mappa identità di T , id_T , vista come mappa $\text{id}_T : T \rightarrow S$ è chiamata *inclusione* e si indica con il simbolo $T \hookrightarrow S$.

Definizione 2.11 (Composizione)

Date due mappe $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow U$, si definisce la *mappa composta* come:

$$g \circ f : S \rightarrow U, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Va notato che la composizione *non* è commutativa¹, invece è, per definizione, associativa².

Proposizione 2.3

Siano S, T, U insiemi e siano $f : S \rightarrow T, g : T \rightarrow U$ due mappe; allora:

- f, g iniettive $\Rightarrow g \circ f$ iniettiva;
- f, g suriettive $\Rightarrow g \circ f$ suriettiva.

Definizione 2.12 (Mappa inversa)

Data $f : S \rightarrow S'$ una mappa; la sua inversa è la mappa $f^{-1} : S' \rightarrow S$ tale che

$$(f \circ f^{-1})(x') = \text{id}_{S'}; (f^{-1} \circ f)(x) = \text{id}_S$$

Indicare l'inversa di f con f^{-1} presuppone che l'inversa sia unica, e infatti è così.

Dimostrazione. Sia $f : S \rightarrow S'$ e siano g_1, g_2 due mappe inverse per f ; ma allora:

$$\text{id}_{S'}(x') = (f \circ g_1)(x') \Rightarrow (g_2 \circ \text{id}_{S'})(x') \equiv g_2 = g_2 \circ (f \circ g_1) = (g_2 \circ f) \circ g_1 \equiv g_1$$

□

Proposizione 2.4

Sia $f : S \rightarrow S'$; allora f è biettiva se e solo se f ha un'inversa.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

¹se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$, si ha $g \circ f = x^2 + 1$, mentre $f \circ g = (x + 1)^2$.

²Infatti, se f, g, h sono tre mappe tali per cui $h(g(f(x)))$ è ben definita, allora si ha $h \circ (g \circ f) = h \circ (g(f(x))) = h(g(f(x)))$, ma anche $(h \circ g) \circ f = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$.

- (\Rightarrow) Si assume che f sia biettiva e si mostra che ha un'inversa.

La mappa f è tale che $\forall x' \in X', \exists! x \in X : f(x) = x'$; la mappa $x' \mapsto x$ è, allora, ben definita e questa coincide con l'inversa.

- (\Leftarrow) Si assume che f abbia un'inversa e si mostra che è biettiva.

Per l'iniettività, si nota che se $x_1 \neq x_2$, allora deve essere anche $x'_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = x'_2$, altrimenti, se si avesse $f(x_1) = f(x_2) = x'$, $f^{-1}(x')$ non sarebbe una mappa ben definita perché ad un singolo elemento, ne fa corrispondere due.

Per la suriettività, il discorso è analogo: $f^{-1} : S' \rightarrow S$ non sarebbe ben definita se si avesse $x'_0 \in S' : \nexists x \in X, f(x) = x'_0$, allora non varrebbe $(f \circ f^{-1})(x'_0) = \text{id}_{S'}$.

□

Nonostante la precedente proposizione, la notazione f^{-1} si usa anche quando $f : X \rightarrow Y$ non ha propriamente un'inversa. In questo caso, f^{-1} è definita come una mappa tra l'insieme dei sottoinsiemi di Y e l'insieme dei sottoinsiemi di X . Così facendo, si rende possibile avere sempre una f^{-1} perché il suo risultato può essere l'insieme vuoto (nel caso in cui f non sia suriettiva), oppure un insieme composto da più elementi nel caso in cui f non sia iniettiva.

Definizione 2.13 (Sistemi di coordinate)

Siano gli Y_1, \dots, Y_n degli insiemi; si definisce sistema di coordinate una mappa

$$f : X \rightarrow \prod_{i=1}^n Y_i = Y_1 \times \dots \times Y_n, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

dove $f_i : X \rightarrow Y_i, i = 1, \dots, n$.

2.3 Omomorfismi, isomorfismi e automorfismi

Definizione 2.14 (Omomorfismo)

Dati G, G' due gruppi, un omomorfismo $f : G \rightarrow G'$ è una mappa che conserva le operazioni di gruppo, cioè

$$\forall x, y \in G, \quad f(x *_G y) = f(x) *_G f(y)$$

con $*_G, *_G'$ leggi di composizione, rispettivamente, di G e G' .

Si ometteranno i pedici alle leggi di composizioni, ma la distinzione è sottintesa. Per brevità, invece di specificare che in $f : G \rightarrow G'$, G e G' sono gruppi, si dirà che $f : G \rightarrow G'$ è un *omomorfismo di gruppi*.

Esempio 2.4. Sia G un gruppo commutativo; allora la mappa $x \mapsto x^{-1} : G \rightarrow G$ è un omomorfismo. Si nota che la richiesta che G sia commutativo è fondamentale perché si abbia tale omomorfismo; infatti, $(x*y)^{-1} = x^{-1}*y^{-1}$ solamente se G è commutativo, altrimenti $x*y*(x*y)^{-1} = e \neq x*y*x^{-1}*y^{-1}$.

Esempio 2.5. La mappa $x \mapsto e^x : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ è un omomorfismo, infatti:

$$x + y \mapsto e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Questo è un esempio in cui le leggi di composizione di gruppo sono diverse perché i due gruppi sono fondamentalmente diversi.

Proposizione 2.5

Siano G, H due gruppi, con $H = \prod_{i=1}^n H_i$. La mappa $f : G \rightarrow H$ è un omomorfismo se e soltanto se $\forall i, f_i$ è un omomorfismo.

Proposizione 2.6

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Allora f conserva l'unità, nel senso che $f(e) = e'$, e conserva l'inversa, nel senso $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Dimostrazione. Per la prima, si nota che $f(e) = f(ee) = f(e) * f(e)$. Moltiplicando (nel senso della legge $*_{G'}$) ambo i membri per $f(e)^{-1}$, si ottiene $e' = f(e)$.

Per la seconda, sia $x \in G$ tale che $\exists f^{-1}(x)$; allora $e' = f(x * x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1})$.

Moltiplicando ambo i membri a sinistra per $f(x)^{-1}$, si ottiene $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. \square

Si nota che nella proposizione di sopra, si è usata la notazione $f(x)^{-1}$ per indicare l'elemento inverso nel gruppo, ossia quell'elemento tale che $f(x) *_{G'} f(x)^{-1} = e'$, ben diverso da $f^{-1}(x)$ funzione inversa, tale che $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

Proposizione 2.7

Siano $f : G \rightarrow G', g : G' \rightarrow G''$ due omomorfismi di gruppi; allora la loro composizione $g \circ f : G \rightarrow G''$ è un omomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Per calcolo diretto, si ha: $(g \circ f)(x*y) = g(f(x*y)) = g(f(x)*f(y)) = g(f(x)) * g(f(y))$. \square

Proposizione 2.8

Dato $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi, l'immagine di f è un sottogruppo di G' .

Dimostrazione. Dati due elementi $f(x) = x', f(y) = y' \in \text{Im}(f) \subset G'$, si ha:

$$x' * y' = f(x) * f(y) = f(x * y) \in \text{Im}(f)$$

Quindi $\text{Im}(f)$ è chiuso rispetto alla legge di composizione definita in G' . Anche

l'inverso appartiene a $\text{Im}(f)$ perché $x^{-1} \in G \Rightarrow f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in \text{Im}(f)$. Infine, anche l'identità vi appartiene sempre perché $e \in G \Rightarrow e' = f(e) \in \text{Im}(f)$. \square

Definizione 2.15 (Kernel di un omomorfismo)

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi; il suo kernel (o nucleo) è l'insieme

$$\text{Ker}(f) := \{x \in G : f(x) = e' \in G'\}$$

Proposizione 2.9

Il kernel di un omomorfismo di gruppi $f : G \rightarrow G'$ è un sottogruppo di G .

Dimostrazione. Se $x, y \in \text{Ker}(f)$, allora $x*y \in \text{Ker}(f)$ perché $f(x*y) = f(x)*f(y) = e'*e' = e'$. L'identità appartiene a $\text{Ker}(f)$ perché $f(e) = e'$ e, per finire, se $x \in \text{Ker}(f)$, anche x^{-1} vi appartiene perché $e' = f(e) = f(x*x^{-1}) = f(x)*f(x^{-1}) = e'*f(x^{-1}) \Rightarrow e' = f(x^{-1})$. \square

Si considera, ora, un gruppo G e si prende un suo elemento $a \in G$; si nota che la mappa $n \mapsto a^n$ è un omomorfismo di \mathbb{Z} in G . Questo è facile da dimostrare, ma più interessante è il fatto che il kernel di questo omomorfismo può essere composto o dal solo $0 \in \mathbb{Z}$, o è un sottogruppo generato dal periodo di a .

Proposizione 2.10

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi; allora $\text{Ker}(f) = \{e\}$ se e solo se f è iniettivo.

Dimostrazione. Si assume, quindi, che $\text{Ker}(f) = \{e\}$ e si mostra che f è iniettiva. Dati $x, y \in G$, $x \neq y$, se per assurdo, si avesse $f(x) = f(y)$, allora $e' = f(x)*f(y)^{-1} = f(x*y^{-1}) \Rightarrow x*y^{-1} \in \text{Ker}(f)$, con $x*y^{-1} \neq x*x^{-1} = e$ perché, per assunzione, $x \neq y$. Ne segue che f è iniettiva.

Il viceversa è banale perché se fosse $e \neq g \in \text{Ker}(f)$, si avrebbe un assurdo dal momento che, per definizione di kernel, $f(g) = f(e) = e'$, dove e è l'unità di G ed e' è quella di G' . \square

Un omomorfismo iniettivo fra due gruppi $G \rightarrow G'$ è chiamato **embedding** (o **iniezione**) e, come l'inclusione, si indica con $G \hookrightarrow G'$.

Proposizione 2.11

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo e sia $H' \subset G'$; prendendo $H = f^{-1}(H')$ come l'insieme delle $x \in G : f(x) \in H'$, allora H è un sottogruppo di G .

Si nota che nella proposizione sopra, per $H' = \{e'\}$, si ha $f^{-1}(H') \equiv \text{Ker}(f)$.

Definizione 2.16 (Isomorfismo di gruppi)

Dato $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi, si dice che è un *isomorfismo di gruppi* se esiste un altro omomorfismo di gruppi $g : G' \rightarrow G$ e tale che $f \circ g = \text{id}_{G'}$ e $g \circ f = \text{id}_G$. In tal caso, si dirà che $G \cong G'$.

Questo significa che se uno dei due ha delle proprietà esprimibili esclusivamente in termini delle operazioni di gruppo, allora anche ogni altro gruppo isomorfo a questo conserva le stesse proprietà. Alcune di queste sono:

- la ciclicità;
- l'ordine;
- l'essere abeliano.

Proposizione 2.12

Un omomorfismo di gruppi $f : G \rightarrow G'$ che è anche biiettivo è un isomorfismo.

Dimostrazione. L'esistenza di $f^{-1} : G' \rightarrow G$ è assicurata dal fatto che f è biettiva. Si deve mostrare che f^{-1} è un omomorfismo.

Siano dati $x, y \in G' : f(x) = x', f(y) = y' \Rightarrow f(x * y) = x' * y'$, visto che f è un omomorfismo; allora si nota che:

$$f^{-1}(x' * y') = x * y = f^{-1}(x) * f^{-1}(y)$$

□

Dalla precedente proposizione, si ottiene il seguente teorema che permette di capire se un omomorfismo è un isomorfismo.

Teorema 2.2

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Allora:

- se $\text{Ker}(f) = \{e\} \Rightarrow f$ è un isomorfismo da $G \rightarrow f(G) \equiv \text{Im}(f)$;
- $f : G \rightarrow G'$ è suriettiva e $\text{Ker}(f) = \{e\}$, allora f è un isomorfismo da $G \rightarrow G'$.

Dimostrazione. Si è già dimostrato che se il nucleo di f è banale, allora f è iniettiva; chiaramente f è sempre suriettiva dall'insieme di partenza nella sua immagine, quindi la tesi è verificata dalla proposizione 2.12.

Sempre per la stessa, segue direttamente il punto (b). □

Definizione 2.17 (Automorfismo)

Un *automorfismo di gruppi* è un isomorfismo $f : G \rightarrow G'$ con $G' \equiv G$.

Si indica con $\text{Aut}(G)$ l'insieme di tutti gli automorfismi definiti su G .

Definizione 2.18 (Traslazione)

Dato un gruppo G , la mappa che, per qualche $a \in G$, associa $x \mapsto a * x$, definita da $T_a : G \rightarrow G$, è chiamata *traslazione*. Questa, in particolare, è chiamata traslazione sinistra. La mappa inversa di una traslazione è $T_{a^{-1}}$, in quanto $x = a^{-1}ax$.

Si consideri la mappa che, per $a \in G$, associa $a \mapsto T_a : G \rightarrow \text{Perm}(G)$; questa è un omomorfismo perché dati $a, b \in G$, si ha $T_{ab}(x) = abx = (T_a \circ T_b)(x)$, cioè $T_{ab} = T_a \circ T_b$. Evidentemente, questo isomorfismo è anche iniettivo perché per $a \neq b$, si ha $T_a \neq T_b$, pertanto $a \mapsto T_a$ risulta un isomorfismo su G , la cui immagine non è necessariamente coincidente con $\text{Perm}(G)$.

Definizione 2.19 (Somma diretta)

Siano B_1, \dots, B_r dei sottogruppi di un gruppo abeliano additivo A ; si dice che A è *somma diretta* di questi se

$$A = \bigoplus_{i=1}^r B_i = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_r$$

cioè se $\forall x \in A, x = \sum_{i=1}^r b_i, b_i \in B_i$ è scritto *univocamente* come somma di elementi dei B_i .

In generale, se A è un gruppo additivo abeliano, con B, C suoi sottogruppi, allora $B + C$ forma un sottogruppo di A , i cui elementi sono tutti della forma $b + c, b \in B, c \in C$.

Teorema 2.3

Sia A un gruppo abeliano; questo è somma diretta di suoi sottogruppi B, C se e soltanto se $A = B + C$ e $B \cap C = \{0\}$. Questo è vero se e soltanto se la mappa $(b, c) \mapsto b + c : B \times C \rightarrow A$ è un isomorfismo.

Per finire, si considera l'insieme degli omomorfismi tra due gruppi abeliani additivi A, B , indicato con $\text{Hom}(A, B)$. È possibile rendere questo un gruppo, definendo $f + g : A \rightarrow B$, per $f, g \in \text{Hom}(A, B)$, come

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in A$$

Dimostrazione. Si mostra che questo, così definito, è un gruppo. Intanto si osserva l'*associatività*:

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) \\ (f + (g + h))(x) &= f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) \end{aligned}$$

da cui $f + (g + h) = (f + g) + h$. Si ha anche l'elemento unità rispetto a $+$, indicato con 0 , che ad ogni elemento di A , assegna l'elemento nullo di B , che risulta un omomorfismo.

Per finire, si definisce l'elemento $-f$ con la proprietà che $f + (-f) = 0$ e si mostra che $f + g$ e $-f$ sono omomorfismi:

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$$

e

$$(-f)(x + y) = -(f(x + y)) = -(f(x) + f(y)) = -f(x) - f(y)$$

Quindi $\text{Hom}(A, B)$ è un gruppo. □

2.4 Permutazioni e gruppi simmetrici

Definizione 2.20 (Permutazione)

Sia S un generico insieme; è chiamata *permutazione* di S una mappa biettiva $f : S \rightarrow S$ e si indica con $\text{Perm}(S)$ l'insieme delle permutazioni di S .

Le permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$ sono gli elementi di un gruppo, indicato con S_n , dove l'operazione è la legge di composizione di funzioni, come riportato di seguito.

Proposizione 2.13

L'insieme $\text{Perm}(S)$ è un gruppo, la cui legge di composizione è data dalla composizione di mappe.

Dimostrazione. Si è già mostrato che la composizione di mappe è associativa e, chiaramente, esiste la permutazione identità che è id_S .

Inoltre, se f, g sono permutazioni, allora $g \circ f, f \circ g : S \rightarrow S$ e sono biettive, quindi sono permutazioni. Questo mostra che $\text{Perm}(S)$ è chiuso sotto la composizione di mappe.

Infine, ogni permutazione f ha un'inversa f^{-1} perché f è biettiva per definizione. □

Questo risultato, più generale, afferma che l'insieme formato da qualunque permutazione su un insieme S è un gruppo, mentre i gruppi simmetrici S_n contengono solamente permutazioni dei primi n interi, cioè è il caso specifico di $S = \{1, \dots, n\}$. Generalmente, per la composizione di permutazioni, si scrive direttamente $\sigma\tau$, invece di $\sigma \circ \tau$.

Proposizione 2.14

Sia G un gruppo; l'insieme $\text{Aut}(G)$, equipaggiato con la legge di composizione delle funzioni, è un sottogruppo di $\text{Perm}(G)$.

Ora si caratterizzano le permutazioni nel caso del gruppo simmetrico S_n ; una nota-

zione possibile è la seguente nel caso di $\tau \in S_9$:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 7 & 2 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Tuttavia risulta ridondante perché basterebbe guardare la seconda riga, cioè invece di scrivere, per $\sigma \in S_n$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

si può semplicemente scrivere $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)$. Nel caso della permutazione τ scritta sopra, si avrebbe $\tau = 346172859$.

Un altro modo di rappresentare una permutazione è la *decomposizione in cicli disgiunti*:

$$\sigma = (1, 3, 6, 2, 4)(5, 7, 8)(9)$$

manda 1 in 3, 3 in 6, 6 in 2 e 4 in 1 e così via per i cicli successivi. In pratica, ogni elemento viene mandato in quello che lo segue, tranne l'ultimo che viene mandato nel primo (da qui "cicli"). L'ultimo ciclo afferma che il 9 viene mandato in se stesso, cioè viene lasciato fisso; in questi casi, è consuetudine non indicare elementi del genere, quindi la permutazione sopra si scriverebbe come $\sigma = (1, 3, 6, 2, 4)(5, 7, 8)$.

Si può dimostrare che ciascuna permutazione si può sempre scrivere come decomposizione di cicli disgiunti; il termine *disgiunti*, infatti, si riferisce proprio al fatto che all'interno di ciascun ciclo, un numero compare una sola volta. Inoltre, questa decomposizione non è unica; riprendendo l'esempio di $\sigma = (1, 3, 6, 2, 4)(5, 7, 8)$, questa è scrivibile anche come $\sigma = (5, 7, 8)(1, 3, 6, 2, 4) = (7, 8, 5)(6, 2, 4, 1, 3)$.

Definizione 2.21 (Trasposizione)

Si dice che τ è una trasposizione se è una permutazione che scambia due interi e lascia gli altri fissati. Questo significa che dati $i, j \in S_n : i \neq j \Rightarrow \tau(i) = j, \tau(j) = i$ e $\forall k \in S_n, k \neq i, j, \tau(k) = k$.

Si vede che se τ è una trasposizione, allora $\tau^2 = \text{Id}$; inoltre, vale il seguente. Le trasposizioni sono permutazioni relative decomponibili in 2-cicli.

Teorema 2.4

Ogni permutazione di S_n si scrive come prodotto di trasposizioni.

Dimostrazione. Si procede per induzione su n . Per $n = 1$, non c'è nulla da provare. Si assume che questo sia vero in generale per $n > 1$ e, in particolare, per $n - 1$, quindi si dimostra che vale per n . Sia σ una permutazione di S_n tale che $\sigma(n) = k$ e sia τ una trasposizione tale che $\tau(k) = n$ e $\tau(n) = k$; allora $\tau\sigma$ è una permutazione tale che $\tau\sigma(n) = \tau(k) = n$, cioè lascia n fissato. Questo vuol dire che può essere vista come permutazione di S_{n-1} che, per induzione, si può scrivere come

prodotto di trasposizioni $\tau_1, \dots, \tau_s \in S_{n-1}$: $\tau\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_s$. Conseguentemente, si ha $\sigma = \tau^{-1}\tau_1 \cdots \tau_s$, che è un prodotto di trasposizioni in S_n . \square

Esempio 2.6. Si considera S_{10} ; date $\sigma = (1, 3, 6, 2, 4, 7)(5, 8, 10)$ e $\tau = (1, 3)(2, 9)$, calcolare la decomposizione in cicli di $\tau\sigma$.

Svolgimento. La composizione delle due può essere calcolata notando preliminarmente che τ non modifica il ciclo $(5, 8, 10)$ di σ ; in pratica, τ agisce unicamente su $(1, 3, 6, 2, 4, 7)^a$:

$$\begin{aligned} (1, 3)(2, 9) \circ (5, 8, 10)(1, 3, 6, 2, 4, 7) &= (5, 8, 10)(2, 4, 7, 3, 6, 9)(1) \\ &= (5, 8, 10)(2, 4, 7, 3, 6, 9) \end{aligned}$$

^aSi ricorda che i cicli vanno applicati da sinistra verso destra. ■

2.5 Classi di coniugio

Definizione 2.22 (Coniugazioni)

Sia G un gruppo e sia $a \in G$; si definisce *coniugazione* la mappa $\varsigma_a : G \rightarrow G$ tale che $x \mapsto axa^{-1}$.

Proposizione 2.15

ς_a è un automorfismo di G , in particolare, si definisce **automorfismo interno**. La mappa $a \mapsto \varsigma_a$ è un omomorfismo di $G \rightarrow \text{Aut}(G)$, la cui legge di composizione è la composizione di funzioni.

Dimostrazione. Dato $g \in G$, si nota che ς_g è bigettiva perché ha un inverso dato da $\varsigma_{g^{-1}}$. Per mostrare che è un omomorfismo, quindi un automorfismo, si prendono $h, k \in G$ e si vede che:

$$\varsigma_g(hk) = ghkg^{-1} = ghg^{-1}gkg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) = \varsigma_g(h)\varsigma_g(k)$$

\square

Definizione 2.23 (Orbita rispetto al coniugio)

Dato G un gruppo e $\gamma \in G$, si definisce la *classe di coniugio* (o *orbita*) di γ l'insieme

$$\text{Orb}(\gamma) = \{g\gamma g^{-1} \mid g \in G\}$$

Le classi di coniugio formano una partizione di G , cioè ogni elemento di G appartiene ad una ed una sola classe di coniugio.

Dimostrazione. Si assume che esista un elemento comune ad entrambe le orbite $\text{Orb}(\gamma_1)$

e $\text{Orb}(\gamma_2)$, per esempio $g_1\gamma_1g_1^{-1} = g_2\gamma_2g_2^{-1}$. Da questo si ottiene che

$$\gamma_1 = (g_1^{-1}g_2)\gamma_2(g_2^{-1}g_1) = (g_1^{-1}g_2)\gamma_2(g_1^{-1}g_2)^{-1} = g'\gamma_2g'^{-1} \iff \gamma_1 \in \text{Orb}(\gamma_2)$$

Ma il fatto che $\gamma_1 \in \text{Orb}(\gamma_2) \Rightarrow \text{Orb}(\gamma_1) = \text{Orb}(\gamma_2)$. Questo dimostra che ogni elemento di G può appartenere ad un'unica classe di coniugio, altrimenti due classi distinte coinciderebbero e sarebbero comunque una sola. \square

Infatti, si può definire la relazione di equivalenza per cui $x \sim y \iff x = gyg^{-1}$ per $g \in G$, quindi il gruppo si partiziona sotto questa relazione di equivalenza.

Ora si studiano le classi di coniugio di S_n ; per farlo, date le permutazioni σ e τ si usa la decomposizione in cicli:

$$\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_{k_1})(b_1, b_2, \dots, b_{k_2}) \dots$$

Allora vale la seguente formula, utile per i calcoli:

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \dots, \tau(a_{k_1}))(\tau(b_1), \dots, \tau(b_{k_2})) \dots \quad (2.5.1)$$

Esempio 2.7. Se $\sigma, \tau \in S_5$, con $\sigma = (1, 3, 5)(2, 4)$ e $\tau = (1, 2, 4, 5)$, allora

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(3), \tau(5))(\tau(2), \tau(4)) = (4, 3, 1)(5, 2)$$

2.6 Classi laterali

Siano S, S' due sottoinsiemi di un gruppo $(G, *)$; il loro **prodotto** è:

$$S * S' = \{x \in G : x = s * s', s \in S, s' \in S'\}$$

Allora, se $S_1, S_2, S_3 \subset G$, vale $(S_1 * S_2) * S_3 = S_1 * (S_2 * S_3)$. Di seguito, alcune altre proprietà.

- Sia H sottogruppo di G ; allora $H * H = H$.

Dimostrazione. È sufficiente prendere l'elemento neutro di uno dei due e far variare tutti gli elementi dell'altro per ottenere tutto H . Non si può uscire da H perché H stesso è un gruppo, quindi è chiuso rispetto a $*$. \square

- Sia $S \subset H$ un generico sottoinsieme e H come sopra; allora $S * H = H$.

Dimostrazione. Corrisponde a traslare ciascun elemento di H , ma si riottiene comunque H . Per vederlo, sia $s \in S$ fissato; dato un generico $h_0 \in H$, si vuole mostrare che $\exists h \in H : s * h = h_0$.

Visto che H è un sottogruppo di G , H contiene l'inverso di qualunque suo elemento e di ogni elemento di S , pertanto è ben definito $h = s^{-1} * h_0$, che soddisfa la richiesta. \square

- Dati $S_1, S_2, S_3 \subset G$, allora $S_1 * (S_2 \cup S_3) = S_1 * S_2 \cup S_1 * S_3$.

Dimostrazione. Si indica con $S := S_1 * (S_2 \cup S_3)$ e con $\bar{S} := S_1 * S_2 \cup S_1 * S_3$.

Un generico elemento di S è il prodotto tra $s_1 \in S_1$ e un altro elemento che sta in S_2 o in S_3 . Un generico elemento di \bar{S} è o il prodotto tra $s_1 \in S_1$ e $s_2 \in S_2$, o $s_1 \in S_1$ e $s_3 \in S_3$. Allora $S = \bar{S}$. \square

Definizione 2.24 (Classe laterale)

Sia G un gruppo e sia H un suo sottogruppo. Dato $a \in G$, l'insieme di tutti gli elementi della forma ax , $x \in H$ è chiamato *classe laterale* di H in G . Si indicherà con aH .

Si nota che, essendo in generale G non-commutativo, la scrittura $aH \neq Ha$; la prima si chiama *classe laterale sinistra*, mentre la seconda sarà la *classe laterale destra*.

Osservazione 2.2. Più precisamente dovrebbe essere $a * H$, ma si elimina $*$ per alleggerire la notazione. Nel caso della somma, diventerebbe $a + H$.

Teorema 2.5

Siano aH e bH due classi laterali di H in G : o le due classi laterali sono uguali, o non hanno alcun elemento in comune.

Dimostrazione. Si assume che $\exists x, y \in H : ax = by$. Allora si osserva che, essendo $xH = H = yH$:

$$aH = axH = byH = bH$$

\square

È possibile decomporre un gruppo in classi laterali. Si considera il caso specifico di G gruppo finito; ogni elemento $x \in G$ appartiene ad una classe laterale, per esempio xH , con H sottogruppo di G . Allora, G si può scrivere come unione finita di classi laterali di H ¹:

$$G = \bigsqcup_{i=1}^r a_i H \quad (2.6.1)$$

dove ogni classe laterale è distinta dall'altra, altrimenti sarebbero uguali e non si sarebbe aggiunto nessun nuovo elemento di G . Ogni elemento ah , $h \in H$ è chiamato **rappresentante** della classe laterale aH .

¹Il simbolo \bigsqcup indica unione di insiemi disgiunti.

Lo stesso si può dire per gruppi infiniti, ma sono ammesse unioni di infinite classi laterali; indicando con I un certo insieme di indicizzazione potenzialmente infinito:

$$G = \bigsqcup_{i \in I} a_i H \quad (2.6.2)$$

con G finito o infinito.

Teorema 2.6

Sia G un gruppo e H un sottogruppo finito. Allora il numero di elementi di una certa classe laterale aH è il numero di elementi di H .

Dimostrazione. Siano $x, x' \in H : x \neq x'$; allora, $ax \neq ax'$ perché se fosse $ax = ax'$, si potrebbe moltiplicare ambo i membri per a^{-1} e ottenere $x = x'$, il che è falso per assunzione di partenza.

Ne segue che, prendendo $x_1, \dots, x_n \in H$ tutti diversi, anche ax_1, \dots, ax_n sono diversi, quindi il numero di elementi di una classe coincide col numero di elementi di H . \square

Dati G, H come al solito, si indica con G/H l'insieme di tutte le classi laterali sinistre di H in G . Si chiama **indice** il numero di tutte le distinte classi laterali di H in G e si indica con $(G : H)$. Se $|S|$ è il numero di elementi in S , allora $|(G/H)| = (G : H)$ e $|G| = (G : 1)$.

Teorema 2.7 (Teorema di Lagrange)

Sia G un gruppo finito e H un suo sottogruppo; allora

$$|G| = (G : H)|H|$$

Dimostrazione. Per teorema 2.5, ogni elemento di G sta in, esattamente, una classe laterale; se $g \in G \Rightarrow g \in gH$ perché $g * e \in gH$. Per teorema 2.6, ciascuna classe ha lo stesso numero di elementi.

La relazione segue direttamente da queste conclusioni perché ogni classe laterale contiene $|H|$ elementi distinti di G e diversi da tutte le altre che decompongono G stesso (altrimenti le classi sarebbero uguali), il cui numero è $(G : H)$. \square

Corollario 2.1

Sia G un gruppo finito e H un suo sottogruppo; allora $|H|$ divide $|G|$.

Corollario 2.2

Sia G un gruppo e $a \in G$ un suo elemento; il periodo di a , divide $|G|$.

Dimostrazione. Il periodo di a è il numero di elementi del sottogruppo generato da a stesso. \square

Corollario 2.3

Sia G un gruppo e siano $K \subset H \subset G$ due sottogruppi; allora $(G : K) = (G : H)(H : K)$.

Dimostrazione. Applicando due volte Lagrange:

$$|G| = (G : H)|H| = (G : H)(H : K)|K|$$

Allo stesso tempo, sempre per Lagrange, $|G| = (G : K)|K|$, quindi:

$$(G : K)|K| = (G : H)(H : K)|K| \implies (G : K) = (G : H)(H : K)$$

□

Si considera d'esempio il gruppo S_n delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$. Sia H il sottogruppo di S_n che contiene tutte le permutazioni σ della forma $\sigma(n) = n$; questo, come sottogruppo, coincide con S_{n-1} , $n > 1$. Si studiano le classi laterali di H ; più in dettaglio, vale il seguente.

Proposizione 2.16

Le sole classi laterali distinte di $H \equiv S_{n-1}$, $n > 1$ come sottogruppo di S_n sono

$$\tau_1 H, \dots, \tau_n H \quad (2.6.3)$$

con $\tau_i(n) = i$, $\tau_i(i) = n$ e tutti gli altri interi sono lasciati invariati.

Dimostrazione. Per prima cosa, si mostra che ogni elemento $\sigma \in S_n$ è contenuto in una classe laterale. Intanto si nota che H coincide con $\tau_n H$ perché τ_n è l'identità per definizione; allora, si prende un elemento che non sta in H e si mostra che appartiene ad una classe laterale. Senza perdita di generalità, quindi, sia $\sigma \in S_n$: $\sigma(n) = i$; allora

$$\tau_i^{-1} \circ \sigma(n) = \tau_i^{-1}(i) = n$$

Questo significa che $\tau_i^{-1} \sigma \in H \implies \sigma \in \tau_i H$. Questo dimostra che $S_n/H \equiv \{\tau_i H\}_{i=1}^n$; manca da mostrare che queste sono tutte distinte.

Per vederlo, si assume $i \neq j$ e si nota che, $\forall \sigma \in H$, $\tau_i \circ \sigma(n) = \tau_i(n) = i$ e $\tau_j \circ \sigma(n) = j$, quindi $\tau_i H$ e $\tau_j H$ non possono avere elementi in comune, □

Vista la proposizione 2.16, il teorema di Lagrange permette anche di concludere che $|S_n| = n|S_{n-1}|$; per induzione, si mostra che, in generale:

$$|S_n| = n! \quad (2.6.4)$$

Teorema 2.8

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi. Dato $a' \in \text{Im}(f) \subset G'$, con $a' = f(a)$ per qualche $a \in G$, allora l'insieme degli elementi $x \in G : f(x) = a'$ coincide con la classe laterale $a\text{Ker}(f)$.

Dimostrazione. L'idea è di mostrare che i due insiemi sono contenuti uno nell'altro.

Sia $x \in a\text{Ker}(f)$, cioè per qualche $h \in \text{Ker}(f)$, $x = ah$; allora:

$$f(x) = f(a) * f(h) = f(a)$$

cioè $x \in a\text{Ker}(f) \implies x \in \{y \in G : f(y) = a'\}$.

Sia ora $x \in \{y \in G : f(y) = a'\}$; allora:

$$f(a^{-1}x) = f(a)^{-1} * f(x) = a'^{-1} * a' = e'$$

cioè $a^{-1}x \in \text{Ker}(f)$, per esempio $h = a^{-1}x$, quindi $x = ah \implies x \in a\text{Ker}(f)$. \square

2.7 Gruppi ciclici finiti

Sia $o(x)$ l'ordine di un certo elemento $x \in G$, con G gruppo; per definizione, $x^{o(x)} = e$ ed è il più piccolo $n \in \mathbb{N}^{>0} : x^n = e$. Tutti gli elementi dell'insieme

$$\langle x \rangle = \{e, x, x^2, \dots, x^{o(x)-1}\}$$

sono diversi fra loro perché, altrimenti, esisterebbe $x^k = e$ con $k < o(x)$ che è assurdo. Questo insieme è quello generato da x ed è un sottogruppo ciclico di G , la cui cardinalità coincide proprio con $o(x)$; per il teorema di Lagrange: $o(x)$ divide $|G|$. Come altro corollario del teorema di Lagrange, quindi, si ha il seguente.

Corollario 2.4

Se $x \in G$, con $|G| < \infty$, si ha $x^{|G|} = e$.

Dimostrazione. Visto che $o(x)$ deve dividere $|G|$, si può scrivere che $|G| = ko(x)$, per qualche $k \in \mathbb{Z}$; da questo segue che: $x^{|G|} = x^{ko(x)} = (x^{o(x)})^k = e^k = e$. \square

Osservazione 2.3. Tramite questo, si può dare un'ulteriore dimostrazione del teorema 1.17; infatti, preso $a, m \in \mathbb{Z}^{>0} : \gcd(a, m) = 1$, l'elemento $[a]_m \in \mathbb{Z}_m^*$, per il corollario appena mostrato, è tale per cui

$$[a]_m^{\phi(m)} = [1]_m$$

visto che \mathbb{Z}_m^* ha esattamente $\phi(m)$ elementi.

Dato, ora, un gruppo ciclico G , ci si chiede quanti elementi complessivamente esistano che siano tali da generare G stesso, visto che, per definizione, ne è assicurato *almeno uno*.

Proposizione 2.17

Sia G un gruppo ciclico di n elementi; allora ci sono esattamente $\phi(n)$ generatori.

Dimostrazione. Sia $g \in G$ un generatore; allora gli elementi di g sono della forma g^i , $0 \leq i < n$. Indicando con d l'ordine di g^i , si sa per il teorema di Lagrange che $d \mid n$ e si osserva che $(g^i)^d = g^{id} = e$, quindi n divide di , visto che n è l'ordine di g . Se fosse $\gcd(i, n) = 1$, allora si dovrebbe avere che $n \mid d$, ossia che $n = d$, visto che n è l'ordine di G e d del sottogruppo generato da g^i . Questo permette di concludere che tutti gli elementi della forma g^i con $\gcd(i, n) = 1$ sono generatori di G , visto che hanno ordine n .

Se, invece, fosse $\gcd(i, n) > 1$, allora g^i non sarebbe un generatore perché non sarebbe possibile ottenere g come potenza di g^i ; infatti, se $(g^i)^s = g \Rightarrow g^{is-1} = e$, allora risulterebbe che $n \mid is - 1$, cioè

$$is \equiv 1 \pmod{n}$$

Però questo non è possibile perché l'equazione

$$ix \equiv 1 \pmod{n}$$

non ha soluzione, essendo che $\gcd(i, n) > 1$. □

Lemma 2.1

Per ogni intero $n \in \mathbb{N}^{>0}$, si ha:

$$\sum_{d \mid n} \phi(d) = n$$

Dimostrazione. Si considera la seguente lista di n frazioni:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$$

Si riducono queste frazioni ai minimi termini e si riportano in una lista separata; il numero di queste frazioni che rimane intatta è ottenuto dal numero di interi coprimi con n , quindi è esattamente $\phi(n)$.

Sia, ora, d un divisore di n : il numero di frazioni che, ridotte ai minimi termini, saranno della forma $\frac{j}{d}$ sono tutte quelle in cui $\gcd(j, d) = 1$, quindi sono $\phi(d)$.

Questo significa che le frazioni della lista originaria possono essere suddivise ed essere contate a gruppi a seconda del denominatore: per ogni gruppo individuato dal denominatore d , il numero di frazioni di questo gruppo è $\phi(d)$, il che vuol

dire che n , cioè il numero totale di frazioni, è proprio ottenuto da $\sum_{d|n} \phi(d)$. \square

Proposizione 2.18

Sia G un gruppo ciclico di n elementi; in G , ci sono esattamente $\phi(d)$ elementi di ordine d , con d intero che divide n .

Dimostrazione. Il caso $d = n$ è già stato mostrato precedentemente. Sia, allora, $d < n$; se g è un generatore di G , si considera l'elemento $g^{n/d}$ (con $d | n$ per assunzione). Il sottogruppo generato da $g^{n/d}$ è, evidentemente, di ordine d : $(g^{n/d})^d = g^n = e$; per la proposizione 2.17, questo sottogruppo ha esattamente $\phi(d)$ elementi di ordine d .

Questa procedura si può ripetere per ogni $d < n : d | n$, arrivando a scrivere un numero di elementi di G pari a $\sum_{d|n} \phi(d)$; per il lemma precedente, si sa che questa somma è pari proprio a n , quindi si sono elencati tutti gli elementi di G . Questo significa che se d divide n , il numero di elementi di ordine d in G sono esattamente quelli ottenuti dallo studio del sottogruppo $\langle g^{n/d} \rangle$, cioè non ve ne sono altri. \square

La seguente proposizione, invece, permette una caratterizzazione anche dei gruppi ciclici infiniti.

Proposizione 2.19

Sia G un gruppo ciclico e sia $H \subset G$ un suo sottogruppo; allora H è ciclico.

Dimostrazione. Sia $\langle g \rangle = G$ e sia k il minimo intero positivo tale che $g^k \in H$; allora, dato $g^a \in H$, per qualche $a \in \mathbb{Z}$, si ha $a = qk + r$ per divisione Euclidea. Si nota che: $(g^k)^{-q} g^a = (g^k)^{-q} g^{qk} g^r = g^r \in H$, visto che H è un sottogruppo. Questo, però, è assurdo perché $r < k$ e $g^r \in H$, quindi deve essere $r = 0$, da cui $\forall a \in \mathbb{Z} : g^a \in H$, si ha $a = qk$, per qualche intero q . Sostanzialmente: $\langle g^k \rangle = H$. \square

Ora si torna a studiare i gruppi ciclici finiti con la seguente proposizione.

Proposizione 2.20

Sia G un gruppo ciclico di n elementi; allora $\forall d$ divisore di n , esiste esattamente un sottogruppo di cardinalità d in G .

Dimostrazione. Sia $\langle g \rangle = G$ e $d | n$; il sottogruppo K generato da $g^{n/d}$ si sa avere esattamente d elementi e si sa contenere esattamente $\phi(d)$ elementi di ordine d . Sia, ora, H un sottogruppo di G con proprio d elementi; per la precedente proposizione, si sa che H è ciclico, quindi $\exists h \in G : \langle h \rangle = H$, con h di ordine d . Questo, però, significa anche che $h \in K$ e, quindi $H \subseteq K$, visto che K contiene tutte le potenze di h , essendo un sottogruppo. Visto che $H \subseteq K$ e hanno lo stesso numero di elementi, allora deve essere $H = K$. \square

Proposizione 2.21

Sia G un gruppo ciclico con n elementi e sia g un suo generatore; allora $\forall k \in \mathbb{Z}$ si ha $\langle g^k \rangle = \langle g^{\gcd(k,n)} \rangle$.

Dimostrazione. Sia $d = \gcd(k,n)$ e $k = cd$, per qualche $c \in \mathbb{Z}$; per il teorema di Bézout, esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che

$$d = xk + yn$$

Per semplicità di notazione, sia $K = \langle g^k \rangle$ e sia $D = \langle g^d \rangle$. Visto che $g^k = (g^d)^c$, si ha $g^k \in D \implies K \subseteq D$; inoltre:

$$g^d = (g^k)^x (g^n)^y = ((g^k)^x e^n) = (g^k)^x$$

quindi $g^d \in K$, da cui $D \subseteq K$. Complessivamente, si deve avere $D = K$. \square

Si riassumono tutte le proprietà dimostrate sui gruppi ciclici finiti.

- In un gruppo ciclico di n elementi, si hanno $\phi(n)$ generatori.
- In un gruppo ciclico di n elementi, ci sono $\phi(d)$ elementi di ordine d , con $d \mid n$.
- Ogni sottogruppo di un gruppo ciclico è anch'esso ciclico.
- In un gruppo ciclico di n elementi, per ciascun d divisore di n , esiste un unico sottogruppo di ordine d .
- Dato g il generatore di un gruppo G di n elementi, il sottogruppo ciclico generato da g^k è lo stesso di quello generato da $g^{\gcd(k,n)}$.

Di seguito, una proposizione che permette di collegare la ciclicità di un gruppo finito con la sua immagine attraverso un omomorfismo.

Proposizione 2.22

Siano G, G' due gruppi e $\alpha : G \rightarrow G'$ un omomorfismo. Se $g \in G$ è un elemento di ordine finito $o(g) = n$, allora $o(\alpha(g))$ è finito e divide n .

Dimostrazione. Visto che α è un omomorfismo, $\forall k \in \mathbb{Z}$ si ha $\alpha(g^k) = \alpha(g)^k$. Questo vuol dire che $\alpha(g)^n = \alpha(g^n) = \alpha(e_G) = e_{G'}$. Questo significa che $o(\alpha(g)) \leq n$ e $o(\alpha(g))$ deve dividere n . \square

2.8 Sottogruppi normali e I teorema di omomorfismo

Definizione 2.25 (Sottogruppo normale)

Sia G un gruppo e sia H un suo sottogruppo. Si dice che H è *normale* se soddisfa una delle due, equivalenti, condizioni:

NOR 1. $\forall x \in G, xH = Hx$, cioè $xHx^{-1} = H$;

NOR 2. H è il kernel di qualche omomorfismo di G in qualche altro gruppo.

Per indicare che H è un sottogruppo normale di G si scrive $H \triangleleft G$.

Intanto si nota che la condizione NOR 1 non coincide con la condizione $xhx^{-1} = h, \forall h \in H$ quando G non è commutativo. Nel caso di G commutativo, ogni sottogruppo H è normale e soddisfa la condizione più forte di NOR 1, cioè proprio $x^{-1}hx = h, \forall h \in H$.

Ora si dimostra che $\text{NOR 1} \iff \text{NOR 2}$. L'implicazione $\text{NOR 2} \implies \text{NOR 1}$ si vede di seguito.

Dimostrazione. Sia $H \equiv \text{Ker}(f)$, con $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi; allora:

$$f(xHx^{-1}) = f(x)f(H)f(x)^{-1} = e' \in G'$$

Da questo, segue che $xHx^{-1} \subset H, \forall x \in G$, quindi vale anche $x^{-1}Hx \subset H^1$, da cui (moltiplicando a sinistra per x e a destra per x^{-1}) si ha $H \subset xHx^{-1}$. \square

L'altra implicazione si dimostra nel seguente teorema e nel successivo corollario.

Teorema 2.9

Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo tale che $xH = Hx, \forall x \in G$. Se aH, bH sono due classi laterali di H , allora il prodotto $(aH) * (bH)$ è ancora una classe laterale. Inoltre, l'insieme delle classi laterali è esso stesso un gruppo, il cui prodotto è quello appena descritto.

Dimostrazione. La prima affermazione è immediata: $(aH) * (bH) = aHbH = abHH = abH$, usando che $xH = Hx$.

L'assioma GR 1 è osservata all'inizio di §2.6; GR 2 è soddisfatto da $eH = H$; GR 3, infine, è soddisfatto da $a^{-1}H$ come inverso di aH . \square

Il gruppo delle classi laterali G/H è chiamato **gruppo quoziente** e si dice anche **G modulo H** . Il poter trattare questo come un gruppo è dovuto all'assunzione $xH = Hx$.

Osservazione 2.4. Parlando di gruppo quoziente G/H si assumerà sempre che H è un sottogruppo normale di G .

È chiaro che per essere vero che G/H è un gruppo quoziente, H deve per forza essere

¹Visto che tale condizione vale $\forall x \in G$, si può mandare $x \rightarrow x^{-1}$ e, conseguentemente, $x^{-1} \rightarrow x$ e ottenere $x^{-1}Hx \subset H$.

un sottogruppo normale di G , da qui il motivo per cui lo si sottintende.

Esempio 2.8. Si considera il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ e il suo sottogruppo $\langle m \rangle = m\mathbb{Z}$, per qualche intero $m \in \mathbb{Z}$. Il relativo gruppo quoziente è $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$; questo è l'insieme delle classi laterali della forma $\{z + km : k \in \mathbb{Z}\}$ al variare di $z \in \mathbb{Z}$, cioè ogni classe laterale corrisponde agli interi che hanno resto z quando divisi per m . Questo gruppo quoziente è, pertanto, isomorfo a \mathbb{Z}_m : partendo dal gruppo infinito \mathbb{Z} , tramite quoziente si è ottenuto un gruppo finito \mathbb{Z}_m .

Corollario 2.5 (Omomorfismo canonico)

Sia G un gruppo e sia H un suo sottogruppo normale. Sia G/H il gruppo quoziente e $\pi : G \rightarrow G/H$ la mappa che, ad ogni $a \in G$, associa la classe laterale aH , cioè $\pi(a) = aH$. Allora π è un omomorfismo e $\text{Ker}(\pi) \equiv H$.

Dimostrazione. È evidente che π sia un omomorfismo dalla definizione di prodotto di classi laterali. Per il kernel, si vede che ogni elemento di H è automaticamente in $\text{Ker}(\pi)$ perché se $h \in H \Rightarrow \pi(h) = hH \equiv H$. Sia, invece, $x \in G : \pi(x) = xH$ sia l'elemento unità di G/H , quindi coincidente con il laterale H stesso: $xH = H$. Questo vuol dire che $xe = x$ è un elemento di H . Quindi H coincide con il kernel di π . \square

Proposizione 2.23

Dati $K \subset H \subset G$ sottogruppi normali di G , la mappa $xK \mapsto xH$, con $x \in G$ è un omomorfismo suriettivo $f : G/K \rightarrow G/H$; il suo kernel è H/K .

Dimostrazione. Intanto è ben definito: se $xK = yK \Rightarrow xH = yH$ perché $y^{-1}xK = K \Rightarrow f(y^{-1}xK) = y^{-1}xH = f(K) = H$, da cui $y^{-1}xH = H \Rightarrow xH = yH$.

Ora si verifica che è suriettivo; $\forall xH \in G/H$, si può prendere $f(xK) = xH$. Poi si verifica che è un omomorfismo; dati comunque $x, y \in G$:

$$f(xKyK) = f(xyK) = xyH = xHyH = f(xK)f(yK)$$

Il kernel è, infine, composto dagli elementi di G/K che vengono mappati in H , quindi

$$\text{Ker}(f) = \{xK \in G/K : f(xK) = H\} = \{xK \in G/K : x \in H\} = H/K$$

La forma del Kernel è anche il motivo per cui questo non è un isomorfismo (cioè perché non è iniettivo). \square

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo. Dato $x \in G$, allora, $\forall k \in \text{Ker}(f)$:

$$f(xk) = f(x)f(k) = f(x) \implies f(x\text{Ker}(f)) = f(x)$$

Quindi, ogni elemento in un laterale di $\text{Ker}(f)$ ha la stessa immagine sotto f .

Teorema 2.10 (Primo teorema di omomorfismo)

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo e sia $H = \text{Ker}(f)$; allora la mappa $x\text{Ker}(f) \mapsto f(x\text{Ker}(f))$ è un isomorfismo del gruppo quoziente G/H con l'immagine di f , cioè $G/H \xrightarrow{\cong} \text{Im}(f)$. In questo caso, si dice che l'isomorfismo \bar{f} è **indotto** da f .

Dimostrazione. Si definisce $\bar{f} : G/H \rightarrow G'$ t.c. $xH \mapsto f(xH)$. Ora si verifica che è un isomorfismo usando il teorema 2.2. Intanto si ha che \bar{f} è un omomorfismo, infatti:

$$\bar{f}(xHyH) = \bar{f}(xyH) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(xH)\bar{f}(yH)$$

È anche iniettiva perché il suo nucleo sono quei laterali xH tali che $f(xH) = e'$, quindi solamente H , che è l'unità di G/H . Infine si ha $\text{Im}(\bar{f}) = \text{Im}(f)$ per definizione di f . Quest'ultima considerazione permette di concludere che $G/H \cong \text{Im}(f)$. \square

Il primo teorema di omomorfismo si può esprimere in termini di un diagramma commutativo che permette di evidenziare le implicazioni del teorema.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \text{Im } f \\ \pi \downarrow & \nearrow \cong & \\ G/\text{Ker } f & & \end{array}$$

In questo modo, si ha $f = \bar{f} \circ \pi$.

Esempio 2.9. Si considera, come esempio, \mathbb{Z} come sottogruppo del gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$; il gruppo quoziente \mathbb{R}/\mathbb{Z} è chiamato **gruppo circolare**.

Dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, si dice che $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}}$ se $x - y \in \mathbb{Z}$; questa definisce una relazione di equivalenza, le cui classi di equivalenza sono esattamente i laterali di \mathbb{Z} in \mathbb{R} . Se è vero che $x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}}$, allora $e^{2\pi ix} = e^{2\pi iy}$ e la mappa $x \mapsto e^{2\pi ix}$ definisce un isomorfismo di \mathbb{R}/\mathbb{Z} nel gruppo moltiplicativo dei numeri complessi che hanno modulo unitario.

Esempio 2.10. Siano \mathbb{C}^* e \mathbb{R}^+ , rispettivamente, il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non-nulli e il gruppo moltiplicativo dei reali positivi.

Dato $\alpha \in \mathbb{C}^*$, vale $\alpha = ru$, con $r \in \mathbb{R}^+$ e $|u| = 1$ (si prende $u = \alpha/|\alpha|$). L'espressione di u è sempre determinata e la mappa $\alpha \mapsto \alpha/|\alpha|$ è un omomorfismo di \mathbb{C}^* in $\mathbb{C}_1 := \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$. Essendo il nucleo di questo omomorfismo proprio \mathbb{R}^+ , allora $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{C}_1$.

Dal primo teorema di omomorfismo, seguono immediatamente i due seguenti corollari.

Corollario 2.6

Sia $f : G_1 \rightarrow G_2$ un omomorfismo suriettivo; allora

$$G_1/\text{Ker}f \cong G_2$$

Corollario 2.7

Sia $f : G_1 \rightarrow G_2$ un omomorfismo iniettivo; allora

$$G_1 \cong \text{Im}f$$

2.9 Approfondimenti sui gruppi

2.9.1 Il gruppo simmetrico e il gruppo alterno

Data una permutazione $\sigma \in S_n$, si indica con la tupla $\lambda(\sigma) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ la lunghezza di ciascuno dei k cicli disgiunti in cui si decompone σ . Usando l'equazione 2.5.1, si può riscrivere l'orbita di σ come:

$$\text{Orb}(\sigma) = \{\tau \in S_n \mid \lambda(\tau) = \lambda(\sigma)\}$$

Secondo la formula in equazione 2.5.1, infatti, ciascuna permutazione in $\text{Orb}(\sigma)$ si decompone nello stesso numero di cicli di stessa lunghezza di σ . Si introduce, poi, il numero $m_i(\sigma)$ che indica il numero di cicli di lunghezza i in cui si decompone σ ; in notazione insiemistica, questo si scrive come:

$$m_i(\sigma) = \left| \left\{ j \mid \lambda_j = i, \forall \lambda_j \text{ ciclo di } \sigma \right\} \right|$$

Proposizione 2.24

Per ogni permutazione $\sigma \in S_n$, sottintendendo $m_i = m_i(\sigma)$, vale la formula

$$|\text{Orb}(\sigma)| = \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \dots n^{m_n} m_1! m_2! \dots m_n!}$$

Dimostrazione. Fissate le lunghezze dei cicli in cui si decompone σ , si hanno $\binom{n}{\lambda_1}$ modi di scegliere elementi nel primo ciclo, $\binom{n-\lambda_1}{\lambda_2}$ elementi nel secondo e così via fino a $\binom{\lambda_k}{\lambda_k}$ per l'ultimo ciclo. Questo restituisce un numero possibile di scelte dato da:

$$\binom{n}{\lambda_1} \binom{n-\lambda_1}{\lambda_2} \dots \binom{\lambda_k}{\lambda_k} = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_k!}$$

Tutto questo va moltiplicato, ancora, per le possibili scelte all'interno di un singolo ciclo λ_i ; cioè per ciascun λ_i , fissati gli elementi al suo interno, si hanno $(\lambda_i - 1)!$ possibili cicli diversi perché bisogna escludere quelli equivalenti fra loro (relativi a tutte le possibili rotazioni dello stesso ciclo). Così facendo, si rimane

con:

$$\frac{n!}{\lambda_1 \cdots \lambda_k} = \frac{n!}{1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}}$$

Così facendo, però, si stanno contando più volte le permutazioni che hanno cicli della stessa lunghezza; se, infatti, fosse $\lambda_i = \lambda_j$, per qualche coppia i, j , non importa se si prende prima λ_i o prima λ_j (per esempio, la permutazione $(1, 2)(3, 4) = (3, 4)(1, 2)$). Per risolvere, bisogna dividere per le possibili permutazioni dei cicli di stessa lunghezza, quindi si rimane con:

$$\frac{n!}{1^{m_1} \cdots n^{m_n} m_1! \cdots m_n!}$$

che coincide proprio col numero di possibili permutazioni con cicli di stessa lunghezza di σ , quindi con $|\text{Orb}(\sigma)|$. \square

Come già accennato, ogni permutazione è scomponibile in trasposizioni; per esempio

$$(2, 6, 3, 7, 5, 9, 10) \in S_{10}$$

si può scrivere come

$$\begin{aligned} (2, 6, 3, 7, 5, 9, 10) &= (2, 6)(6, 3)(3, 7)(7, 5)(5, 9)(9, 10) \\ &= (2, 10)(2, 9)(2, 5)(2, 7)(2, 3)(2, 6) \end{aligned}$$

da cui si osserva anche che la decomposizione non è unica, come non lo è neanche il numero di trasposizioni utilizzabili:

$$(1, 2) = (2, 3)(1, 3)(2, 3) \in S_3$$

Quello che non cambia, però, è la parità del numero di trasposizioni usate, che permette di definire il concetto di **parità** di una permutazione.

Teorema 2.11

Sia $\sigma \in S_n$, con $n \geq 2$; se σ si decompone sia in k trasposizioni che k' trasposizioni, allora $k \equiv k' \pmod{2}$.

Dimostrazione. Si fa agire S_n su $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, cioè l'insieme dei polinomi a coefficienti reali in n variabili nel seguente modo: presa $\sigma \in S_n$ e dato $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ si ha:

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

Si nota che l'identità $e \in S_n$ è quella che lascia il polinomio invariato e si nota anche che $\forall \sigma, \tau \in S_n, f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$:

$$(\sigma \circ \tau)f(x_1, \dots, x_n) = \sigma[\tau f(x_1, \dots, x_n)]$$

Questo è un esempio di *azione di gruppo su un insieme*. In questo caso particolare, si considera il polinomio

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

Per esempio, se $n = 3$, si ha $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$. Si considera la trasposizione $\tau = (a, b)$, $1 \leq a < b \leq n$ e si studia il risultato di $\tau p(x_1, \dots, x_n)$. Si nota che l'azione di τ non modifica i fattori $x_i - x_j$ in cui $i, j \neq a, b$, mentre per gli altri che contengono almeno a o b :

- $\forall i : 1 \leq i < a$, l'azione di τ scambia $(x_i - x_a)$ e $(x_i - x_b)$;
- $\forall i : b < i \leq n$, l'azione di τ scambia $(x_a - x_i)$ e $(x_b - x_i)$;
- $\forall i : a < i < b$, l'azione di τ scambia i fattori $(x_a - x_i)$ e $(x_i - x_b)$, ma scambiandone anche il segno, quindi il segno del prodotto rimane invariato;
- infine, l'azione di τ sul fattore $(x_a - x_b)$ ne cambia il segno.

Ne segue, dunque, che $\tau p(x_1, \dots, x_n) = -p(x_1, \dots, x_n)$, $\forall \tau \in S_n$, con τ trasposizione. Sfruttando che ogni $\sigma \in S_n$ permutazione generica è scrivibile in termini di k trasposizioni:

$$\sigma p(x_1, \dots, x_n) = (-1)^k p(x_1, \dots, x_n)$$

Ma allora, se σ si decompone anche in k' trasposizioni, significa che

$$\sigma p(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{k'} p(x_1, \dots, x_n)$$

il che implica che $(-1)^{k'} = (-1)^k \implies k \equiv k' \pmod{2}$. □

Questo teorema permette di dividere le permutazioni in due classi, a seconda della loro parità, definita di seguito.

Definizione 2.26 (Parità di una permutazione)

Si dice che $\sigma \in S_n$ è **pari** se può essere scritta come prodotto di un numero pari di trasposizioni, altrimenti verrà detta **dispari** se potrà essere scritta come prodotto di un numero dispari di trasposizioni.

Da questo teorema e dalla definizione di parità di una permutazione, si intende caratterizzare l'insieme delle permutazioni esclusivamente pari.

Definizione 2.27 (Gruppo alterno)

Si definisce l'insieme delle permutazioni pari $A_n \subset S_n$ come *gruppo alterno*.

Corollario 2.8

Per $n \geq 2$, il gruppo alterno A_n è un sottogruppo normale di S_n . Inoltre, vale che $|A_n| = n!/2$.

Dimostrazione. Si considera la funzione segno definita come $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, +1\}$, dove $\text{sgn}(\sigma) = 1 \Rightarrow \sigma$ è pari, mentre $\text{sgn}(\sigma) = -1 \Rightarrow \sigma$ è dispari. Come conseguenza del teorema 2.11, si ha che la funzione segno è un omomorfismo tra S_n e il gruppo moltiplicativo $\{-1, +1\}$ (il quale è, a sua volta, isomorfo a \mathbb{Z}_2). Allora il suo nucleo, che coincide proprio con A_n , è un sottogruppo normale di S_n .

Circa la cardinalità, invece, si nota che la mappa $\sigma \mapsto (1, 2)\sigma$ che va da S_n in se stesso è una biezione e cambia di segno a σ ; essendo una biezione e mandando le permutazioni pari in quelle dispari e viceversa (cioè ad ogni permutazione dispari se ne associa una pari e viceversa), significa che in S_n ci sono tante permutazioni pari quante dispari, il che vuol dire che $|A_n| = n!/2$. \square

Si nota che la classe laterale $(1, 2)A_n$ è composta da tutte le permutazioni dispari.

Inoltre, ricordando che in questa sezione si è trovato un algoritmo per scrivere ciascun ciclo di lunghezza j in termini del prodotto di $j - 1$ trasposizioni, si riesce a capire immediatamente, data la decomposizione in cicli disgiunti di una permutazione, se essa è pari o dispari. Infatti, se σ è una permutazione che si decompone in r cicli di lunghezza dispari e s di lunghezza pari, allora questa è pari se e solo se s è pari.

2.9.2 Centralizzatore di un elemento

Si ricorda che $Z(G)$ è il sottogruppo di G costituito da tutti gli elementi che commutano con tutti gli altri ed è anche facile convincersi che questo sia un suo sottogruppo normale per definizione. Fissato $\gamma \in G$, si considera, adesso, l'insieme di tutti gli elementi che commutano con tale γ .

Definizione 2.28 (Centralizzatore)

Sia G un gruppo e sia $\gamma \in G$; si indica il centralizzatore di γ con $C(\gamma)$ ed è l'insieme definito come

$$C(\gamma) = \{g \in G \mid g\gamma = \gamma g\}$$

Si nota che, equivalentemente, si sarebbe potuto definire come

$$C(\gamma) = \{g \in G \mid g\gamma g^{-1} = \gamma\}$$

Osservazione 2.5. Si nota che la seconda definizione permette di individuare il centralizzatore di γ come quell'insieme i cui elementi g soddisfano $C_g(\gamma) = \gamma$.

Si vede subito che se $\gamma \in Z(G)$, allora $C(\gamma) = G$.

Proposizione 2.25

Sia G un gruppo con $\gamma \in G$; vale $C(\gamma) < G$ (cioè $C(\gamma)$ è un sottogruppo di G).

Dimostrazione. L'identità vi appartiene perché l'identità commuta con tutti gli elementi di G , in particolare con γ . Successivamente, se $g_1, g_2 \in C(\gamma)$, allora:

$$g_1 g_2 \gamma = g_1 \gamma g_2 = \gamma g_1 g_2 \implies g_1, g_2 \in C(\gamma)$$

Infine, se $g \in C(\gamma)$, allora $g^{-1} \in C(\gamma)$ perché

$$\gamma = g^{-1} g \gamma = g^{-1} \gamma g \implies \gamma g^{-1} = g^{-1} \gamma$$

□

Teorema 2.12

Sia G un gruppo e sia $\gamma \in G$; allora esiste una biezione tra $G/C(\gamma)$ e $\text{Orb}(\gamma)$.

Dimostrazione. Si definisce la funzione

$$\begin{aligned} f : G/C(\gamma) &\longrightarrow \text{Orb}(\gamma) \\ gC(\gamma) &\longmapsto g\gamma g^{-1} \end{aligned}$$

f è ben definita perché se $kC(\gamma) = gC(\gamma)$, allora $k = gs$, per qualche $s \in C(\gamma)$, per cui:

$$f(kC(\gamma)) = k\gamma k^{-1} = (gs)\gamma(gs)^{-1} = gs\gamma s^{-1}g^{-1} = g\gamma g^{-1}$$

Questo mostra che la mappa è ben definita.

Per la suriettività, invece, si nota che per $g_1\gamma g_1^{-1} \in \text{Orb}(\gamma)$, basta prendere $g_1C(\gamma)$ nel dominio.

Infine, per l'iniettività, si assume che $f(gC(\gamma)) = f(hC(\gamma))$, cioè $g\gamma g^{-1} = h\gamma h^{-1}$; questo, però, implica che $h^{-1}g\gamma g^{-1}h = \gamma$, da cui segue che $h^{-1}g \in C(\gamma) \implies hC(\gamma) = hh^{-1}gC(\gamma) = gC(\gamma)$, cioè stessi elementi dell'immagine corrispondono a stessi elementi nel dominio. □

Corollario 2.9

Sia G un gruppo; allora $\forall \gamma \in G$:

$$|\text{Orb}(\gamma)| = \frac{|G|}{|C(\gamma)|}$$

2.9.3 Quoziente di un gruppo ciclico

Si considera un gruppo ciclico C (finito o infinito) generato da un elemento x , cioè $C = \langle x \rangle$. Un suo sottogruppo H sarà per forza normale, visto che C è commutativo; si vuole studiare il gruppo quoziente C/H .

A questo proposito, si considera l'omomorfismo canonico $\pi : C \rightarrow C/H$; visto che x genera C , allora $\pi(x) = xH$ genera C/H .

Dimostrazione. Usando che π è una mappa suriettiva e il fatto che $\pi(x^j) = \pi(x)^j$, visto che è un omomorfismo, si ottiene che una qualunque classe laterale $bH = x^k H$, per qualche intero k , è l'immagine di $\pi(x^k) = \pi(x)^k$, quindi si ottiene la tesi perché ogni classe laterale si ottiene tramite elevazione a potenza di $\pi(x)$. \square

Questo dimostra anche che C/H è ciclico. In quanto tale, si analizzano i vari scenari possibili.

- (a). Se $H = \{e\}$, allora π è una mappa sia iniettiva che suriettiva, pertanto è un isomorfismo e vale $C \cong C/H$.
- (b). Se $H = C$ (che equivale a dire che $x \in H$), allora C/H contiene la sola classe laterale eH .
- (c). Se $\{e\} \subsetneq H \subsetneq C$, allora necessariamente $x \notin H$; si considera m come il più piccolo intero positivo tale che $x^m \in H$. Usando quanto trovato sopra, cioè che C/H è ciclico ed è generato da xH , e aggiungendo anche l'informazione per cui $x^m H = H$ perché, per definizione, $x^m \in H$, si conclude che l'ordine di xH è proprio m , quindi C/H ha cardinalità m e i suoi elementi sono:

$$H, xH, x^2H, \dots, x^{m-1}H$$

3 TEORIA DEGLI ANELLI

3.1 Definizioni preliminari

Definizione 3.1 (Anello)

Un insieme R è detto *anello con unità* se possiede due operazioni, $+$ (addizione) e \cdot (moltiplicazione), che soddisfano le seguenti proprietà:

(r1). R è un gruppo commutativo rispetto a $+$;

(r2). $\forall a, b, c \in R$, vale $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (associatività rispetto al prodotto);

(r3). $\exists 1 \in R : \forall a \in R, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(r4). $\forall a, b, c \in R, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ e $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributività).

Per anello, si intenderà sempre un anello con unità, nonostante sia possibile una definizione anche senza unità.

Osservazione 3.1. La definizione ammette un anello della forma $A = \{0\}$, in cui tutte le operazioni sono quelle banali e lo 0 funziona sia da elemento neutro per la somma, che per la moltiplicazione.

Definizione 3.2 (Anello commutativo)

Un anello R tale che $\forall a, b \in R$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

è detto commutativo.

Definizione 3.3 (Divisore dello zero)

Sia R un anello commutativo. Si dice che $a \in R$ è un *divisore dello zero* se $\exists b \in R, b \neq 0$ tale che $ab = 0$.

In particolare, 0 è sempre un divisore dello zero. Inoltre, un anello commutativo R in cui $0 \neq 1$ e in cui l'unico divisore dello zero è 0 si dice **dominio** (o dominio di integrità).

Definizione 3.4 (Elemento invertibile)

Sia $u \in R$; u si dice *invertibile* se esiste $v \in R$ tale che $u \cdot v = v \cdot u = 1$. Si indica con R^* l'insieme degli elementi invertibili in R .

Proposizione 3.1

Sia R un anello; l'insieme R^* è un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

Dimostrazione. L'associatività è soddisfatta dall'assioma (r2) degli anelli, visto che $R^* \subset R$. Evidentemente esiste l'elemento neutro perché esso è invertibile, infatti $1 \cdot 1 = 1$. Infine, l'elemento inverso deve essere contenuto nell'insieme per-

ché $\forall a \in R^*, \exists a^{-1} \in R : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, ma a^{-1} è invertibile con inverso proprio a . \square

Definizione 3.5 (Elementi associati)

Siano $a, b \in R$ anello commutativo; questi si dicono *associati* se $a = bu$, per $u \in R^*$.

Definizione 3.6 (Corpo)

Un anello R in cui $0 \neq 1$ e in cui $\forall \in R \setminus \{0\}$ è invertibile è detto *corpo*.

Definizione 3.7 (Campo)

Un corpo è detto *campo* se è commutativo.

Alcuni esempi di *anelli commutativi* sono \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{Z}_m con $m > 1$. Gli anelli \mathbb{Q} e \mathbb{R} sono anche dei *campi*, mentre \mathbb{Z} no perché non possiede gli inversi rispetto alla moltiplicazione degli elementi diversi da $-1, 1$. Tuttavia, \mathbb{Z} è un esempio di *dominio*. Se R è un anello commutativo, anche l'insieme dei polinomi a coefficienti in R , $R[x]$, è un anello commutativo. Inoltre, se R è un dominio, anche $R[x]$ è un dominio.

Un anello non commutativo è l'anello $M_n(K)$ delle matrici $n \times n$, $n \geq 2$ a coefficienti in un campo K .

3.1.1 I quaternioni

Un esempio di corpo che non è un campo sono i quaternioni \mathbb{H} . Per descriverlo, si parte dal gruppo dei quaternioni, dato da (Q_8, \cdot)

$$Q_8 = \{1, -1, \mathbf{i}, (-1)\mathbf{i}, \mathbf{j}, (-1)\mathbf{j}, \mathbf{k}, (-1)\mathbf{k}\} \quad (3.1.1)$$

dove il prodotto è definito nel seguente modo:

- 1 è l'elemento neutro;
- valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} (-1)^2 &= 1 & i^2 &= j^2 = k^2 = -1 & \mathbf{ij} &= (-1)\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} &= (-1)\mathbf{kj} = \mathbf{i} & \mathbf{ki} &= (-1)\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned}$$

Si può verificare che, con questo prodotto, Q_8 è un gruppo non-commutativo nel quale sono presenti tre elementi di ordine 4; questo implica anche che non è isomorfo al gruppo diedrale di 8 elementi D_4 perché quest'ultimo ha solo due elementi di ordine 4.

Il corpo dei quaternioni è un'estensione del campo dei complessi. Per la sua costruzione, si parte dallo spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

dove la somma è data da

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) + (a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}) = (a + a') + (b + b')\mathbf{i} + (c + c')\mathbf{j} + (d + d')\mathbf{k}$$

Per conferirgli una struttura di anello, si deve definire una moltiplicazione; questa è definita distribuendo ciascun termine dei due fattori e usando le relazioni stabilite dal prodotto per Q_8 . In questo modo, \mathbb{H} ha una struttura di anello con unità ed è evidentemente non commutativo, visto che Q_8 non lo è.

Si nota che ogni elemento di $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ ha un inverso; infatti, dato $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, con a, b, c, d non tutti nulli, il suo inverso è dato da:

$$\frac{a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Se ne conclude, dunque, che \mathbb{H} è un corpo, ma non un campo.

3.1.2 Gli anelli \mathbb{Z}_m

Si nota che se m non è primo, allora \mathbb{Z}_m ha dei divisori dello zero che sono diversi da $[0]_m$, per cui non è un dominio. Se m non fosse primo, infatti, si potrebbe fattorizzare come $m = k \cdot s$, con $1 < k, s < m$ e varrebbe:

$$[k]_m[s]_m = [ks]_m = [m]_m = [0]_m$$

Ne segue che se m non è primo, allora \mathbb{Z}_m non è un campo perché, come si mostrerà, un campo è automaticamente un dominio. È facile vedere, però, che non esiste un inverso di $[k]_m$ e $[s]_m$.

Dimostrazione. Prendendo d'esempio k , la condizione che deve verificare per avere inverso modulo m è $\gcd(k, m) = 1$, ma chiaramente non sono coprimi perché m è, per definizione, un suo multiplo. \square

Teorema 3.1

Se p è un numero primario, allora \mathbb{Z}_p è un campo.

Dimostrazione. Sia $[a]_p \neq [0]_p$ in \mathbb{Z}_p ; visto che p non divide a , allora $\gcd(a, p) = 1$, per cui $ax \equiv 1 \pmod{p}$ ha soluzione, cioè a ha un inverso modulo p ; sia questo b . Conseguentemente, $[a]_p[b]_p = [ab]_p = [1]_p$, il che vuol dire che $\exists [b]_p \in \mathbb{Z}_p$ inverso di $[a]_p$. Pertanto, ogni elemento di \mathbb{Z}_p ha inverso. \square

3.2 Anelli di polinomi e algoritmo di Euclide

Sia K un campo; si considera l'insieme $K[x]$ dei polinomi a coefficienti in K . Un generico $f(x) \in K[x]$ è della forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

con $a_i \in K, \forall i = 0, 1, \dots, n$. In questa notazione, dire che $f(x)$ è non-nullo equivale a richiedere che almeno $a_n \neq 0$, dove a_n è chiamato *coefficiente direttore* di $f(x)$ e n è il grado del polinomio, indicato con $\deg f$.

■ **Osservazione 3.2.** Per convenzione, il polinomio costante 0 ha grado $-\infty$.

Proposizione 3.2

Dati $f, g \in K[x]$, vale

$$\deg fg = \deg f + \deg g$$

Dimostrazione. Il grado di un polinomio è dato dal massimo esponente di x ; evidentemente, il termine di massimo grado del prodotto è ottenuto dal prodotto dei termini di grado massimo, cioè da $x^{\deg f} \cdot x^{\deg g} = x^{\deg f + \deg g}$, da cui segue la tesi. \square

Teorema 3.2 (Algoritmo di Euclide)

Siano $f, g \in K[x]$ due polinomi e sia $\deg g \geq 0$; allora esiste un'unica coppia di polinomi $q(x), r(x) \in K[x]$ tali che

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

con $\deg r < \deg g$.

Dimostrazione. Sia $m = \deg g \geq 0$; i polinomi f, g sono della forma

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

con $b_m \neq 0$. Se $n < m$, allora si prende $q = 0$ e $r = f$ e il teorema è dimostrato. Si considera, ora, il caso $n \geq m$; sia, allora:

$$f_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) \implies \deg f_1 < \deg f$$

Ripetendo il procedimento finché non ci si trova nel caso $\deg f_k < \deg g$, caso in cui si prende $q = 0$ e $r = f_k$, si trovano dei polinomi q_1, r tali che

$$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r(x), \deg r < \deg g$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + f_1(x) \\ &= a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + q_1(x)g(x) + r(x) \\ &= (a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x))g(x) + r(x) \end{aligned}$$

Ora manca da mostrare l'unicità di questa decomposizione. Si suppone, allora, che valga

$$f = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$$

con $\deg r_1, \deg r_2 < \deg g$. Ma quindi si ha

$$(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$$

Questo vuol dire che o il grado del membro di sinistra è $\geq \deg g$, oppure è nullo e, contemporaneamente, o il membro di destra è nullo, oppure è $< \deg g$. Se ne conclude che l'unica possibilità è che siano entrambi nulli, quindi $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$. \square

Definizione 3.8 (Polinomio monico)

Un polinomio $f(x) \in K[x]$, con $\deg f(x) = n$, si dice *monico* se $a_n = 1$.

3.2.1 Il massimo comune divisore e il teorema di Bézout

Usando l'algoritmo di Euclide si può definire il **massimo comune divisore** per un polinomio, cioè dati $f(x), g(x) \in K[x]$, si costruisce $\gcd(f(x), g(x))$.

Si deve dimostrare che questo è ben definito; intanto, dati due polinomi e dato l'insieme dei loro divisori monici, se ne può sicuramente scegliere unico di grado maggiore; rimane da mostrare che questa scelta è unica.

Si prendono due polinomi $f(x), g(x) \in K[x]$; per l'algoritmo di Euclide, esistono unici $r_1(x), q_1(x) \in K[x]$ tali che

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x), \deg r_1 < \deg g$$

Se $r_1 = 0$, ci si ferma perché $\gcd(f, g) = g(x)$, altrimenti $\exists! q_2, r_2 \in K[x]$ tali che

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x), \deg r_2 < \deg r_1$$

Se $r_2 = 0$, ci si ferma perché $\gcd(f, g) = r_1(x)$, altrimenti si reitera. In generale, identificando $f = r_{-1}$ e $g = r_0$, si possono trovare delle sequenze uniche di polinomi in $K[x]$ tali che

$$r_{i-2}(x) = q_i r_{i-1}(x) + r_i(x)$$

con $\deg r_i \leq \deg r_{i-1}$, $\forall i$; proprio perché $\forall i$, il grado di r_i è minore strettamente di quello di r_{i-1} , allora esiste il più piccolo $k \geq 0 : r_{k+1}(x) = 0$. Conseguentemente, $r_k(x)$ differirà da $\gcd(f, g)$ a meno di un multiplo perché, ad ogni passaggio, ogni divisore comune di r_{i-2}, r_{i-1} deve esserlo anche di r_i , quindi, un divisore comune di f e g lo sarà anche di r_k . In particolare, quindi, $\gcd(f, g) \mid r_k(x)$.

Per quanto detto sopra, nell'assunzione che $r_{k+1} = 0$, si ha $r_{k-1}(x) = q_{k+1}(x)r_k(x) \Rightarrow r_k(x)$ divide $r_{k-1}(x)$. Inoltre si nota che $r_{k-2}(x) = q_k(x)r_{k-1}(x) + r_k(x)$, quindi r_k divide anche r_{k-2} ; iterando, si conclude che $r_k(x)$ divide tutti gli $r_i(x)$, quindi anche $r_{-1}(x) = f(x)$ e $r_0(x) = g(x)$.

Sia, ora, γ il coefficiente direttore di $r_k(x)$; questo vuol dire che $r_k(x)/\gamma$ ha coefficiente direttore unitario e divide $f(x)$ e $g(x)$. Allora, per definizione di massimo comune divisore, si ha

$$\deg \frac{r_k(x)}{\gamma} \leq \deg(\gcd(f, g))$$

ma, allo stesso tempo, deve valere anche che

$$\deg \frac{r_k(x)}{\gamma} \geq \deg(\gcd(f, g))$$

perché il m.c.d. divide $r_k(x)$, quindi anche $r_k(x)/\gamma$. Allora, visto che i polinomi $\gcd(f, g)$ e $r_k(x)/\gamma$ sono entrambi monici e hanno stesso grado; inoltre, il primo divide il secondo, pertanto devono essere uguali.

Per finire, bisogna dimostrare che tutti i polinomi che dividono $f(x), g(x)$ e hanno grado massimale sono associati fra loro, quindi differiscono per il prodotto per un valore di K , e che ne esiste uno solo che è monico. Per la prima, assumendo che $p(x), q(x)$ siano due divisori di grado massimale di f e g , si ha, per esempio

$$f = ap(x) = bq(x) \Rightarrow p(x) = \frac{b}{a}q(x)$$

perché $a^{-1} \in K$ (visto che K è un campo), per cui $b/a \in K$ per chiusura sotto moltiplicazione, quindi $p(x)$ e $q(x)$ sono associati. Assumendo, ora, che siano entrambi monici, le costanti a e b devono essere uguali perché, altrimenti, il termine di grado massimo nei due avrebbe due coefficienti diversi e non sarebbero uguali. Questo dimostra l'unicità, quindi la buona definizione, del massimo comune divisore per polinomi.

Anche per i polinomi, si ha un analogo del *teorema di Bézout*; infatti, partendo dall'ultima relazione dell'algoritmo di Euclide, si trovano due polinomi $y(x), z(x) \in K[x]$ tali che

$$y(x)f(x) + z(x)g(x) = r_k(x)$$

A questo punto, dividendo per il coefficiente direttore γ di $r_k(x)$, si trova proprio:

$$\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x) = \gcd(f, g) \tag{3.2.1}$$

con $\lambda(x) = y(x)/\gamma$ e $\mu(x) = z(x)/\gamma$.

Esempio 3.1. Siano $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 3$ e $g(x) = 2x^3 + x^2 + 4x + 2$ due polinomi. Si nota che, per l'algoritmo di Euclide:

$$f_1(x) = f(x) - xg(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 3$$

Essendo ancora $\deg f_1 \geq \deg g$, si reitera:

$$f_2(x) = f_1(x) - 2g(x) = f(x) - (x+2)g(x) = 4x^2 - 1$$

Visto che $\deg f_2 < \deg g \Rightarrow f_2$ è il resto; infatti:

$$f_2(x) = f(x) - (x+2)g(x) \Rightarrow f(x) = (x+2)g(x) + f_2(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

con $q_1(x) = x+2$ e $r_1(x) = 4x^2 - 1$. Applicando, ora, lo stesso algoritmo per scrivere $g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$, si trovano

$$q_2(x) = \frac{2x+1}{4} \quad r_2(x) = \frac{9(2x+1)}{4}$$

Applicando nuovamente l'algoritmo per scrivere $r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x)$, si trovano $q_3(x) = (8x-4)/9$ e $r_3(x) = 0$. Ne segue che

$$\gcd(f, g) = \frac{4}{18}r_2(x) = \frac{2x+1}{2}$$

Ora, a partire dalla relazione

$$\begin{aligned} r_2(x) &= g(x) - q_2(x)r_1(x) = g(x) - q_2(x)[f(x) - q_1(x)g(x)] \\ &= -q_2(x)f(x) + (1 + q_1(x)q_2(x))g(x) \end{aligned}$$

Si trovano

$$\lambda(x) = -\frac{4}{18}q_2(x) = -\frac{2x+1}{18} \quad \mu(x) = \frac{4}{18}(1 + q_1(x)q_2(x)) = \frac{2x^2 + 5x + 6}{18}$$

3.2.2 Radici di un polinomio

Definizione 3.9 (Radice di un polinomio)

Sia K un campo; una *radice* di un polinomio

$$f(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 \in K[x]$$

è un $x_0 \in K$ tale che $f(x_0) = 0$.

Lemma 3.1

Sia K un campo e sia $f(x) \in K[x]$, con $x_0 \in K$ una sua radice; allora

$$f(x) = (x - x_0)g(x)$$

con $g(x) \in K[x]$ e tale che $\deg g = \deg f - 1$.

Dimostrazione. Per l'algoritmo di Euclide, dividendo per $x - x_0$, si trovano unici $q(x), r(x) \in K[x]$ tali che

$$f(x) = q(x)(x - x_0) + r(x)$$

con $\deg r < \deg(x - x_0) = 1$. Quest'ultima disuguaglianza implica che $r(x)$ è un polinomio costante. Inoltre, si nota che, valutando tale espressione in $x = x_0$:

$$0 = q(x_0)(x_0 - x_0) + r(x_0) \implies r(x_0) = r(x) = 0$$

pertanto $g(x) = q(x)$ è il polinomio cercato. □

Teorema 3.3

Sia L un campo e sia $f(x) \in L[x]$ un polinomio di grado $n > 0$; allora f ha, al più, n radici distinte in L .

Dimostrazione. Se $f(x)$ non ha radici, allora l'enunciato è verificato. Se $f(x)$ ha radice $\alpha_1 \in L$, allora si sa che

$$f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x)$$

Continuando questa decomposizione finché non si arriva ad un polinomio $h(x)$ tale che

$$f(x) = \prod_{i=1}^t (x - \alpha_i)h(x)$$

con $h(x)$ che non ha radici in L , con $t \leq n$ per questioni di grado e con eventuali ripetizioni, si è sicuri che non vi siano altre radici; infatti, se vi fosse una diversa scomposizione con β_1 radice diversa da tutte le precedenti, il che porterebbe alla fattorizzazione

$$f(x) = \prod_{i=1}^s (x - \beta_i)\gamma(x)$$

con $\gamma(x) \in L[x]$ polinomio senza radici, questo risulterebbe in un assurdo: valutando $f(x)$ in β_1 , che si è assunta essere diversa da tutte le $\alpha_i, i = 1, \dots, t$, si ha una fattorizzazione per cui $f(x) = 0$ e un'altra (quella con le α_i) per cui $f(x) \neq 0$. □

3.2.3 Ciclicità dei sottogruppi moltiplicativi finiti di un campo

Il teorema 3.3 appena dimostrato permette di concludere il seguente.

Teorema 3.4

Sia K un campo e sia G un sottogruppo di K^* (quindi è un sottogruppo moltiplicativo), con $|G| < \infty$; allora G è ciclico.

Dimostrazione. Sia $|G| = n$; se $n = 1$, l'enunciato è banale, quindi si assume $n > 1$. Visto che $\forall n \in \mathbb{Z}^{>0}$ vale

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

con $d \in \mathbb{Z}^{>0}$, prendendo

$$X_d = \{a \in G \mid o(a) = d\}$$

con $d \mid n$, vale anche che

$$\sum_{d|n} |X_d| = n$$

Se G non fosse ciclico, allora $|X_n| = 0$, per cui dovrebbe esistere un intero $d > 0$ tale che $d \mid n \Rightarrow d < n$ e tale che $|X_d| > \phi(d) \geq 1$. Sia, allora, $g \in X_d$, per cui $o(g) = d$ e tutti gli elementi di $\langle g \rangle$ (sottogruppo ciclico di G generato da g) sono radici di $x^d - 1$. In $\langle g \rangle$, ci sono esattamente $\phi(d)$ elementi di ordine d , quindi, essendo $|X_d| > \phi(d)$, si trova $h \in X_d : h \notin \langle g \rangle$, con h radice di $x^d - 1$. A questo punto, però, $x^d - 1$ avrebbe $d + 1$ radici in K , il che è assurdo. \square

Corollario 3.1

Per ogni $p \in \mathbb{Z}$ numero primo, il gruppo \mathbb{Z}_p^* è ciclico, visto che è un sottogruppo moltiplicativo del campo \mathbb{Z}_p .

3.3 Proprietà di base degli anelli**Lemma 3.2**

Sia A un anello; allora $\forall a, b \in A$ vale:

- (a). $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
- (b). $\exists! -a \in A : a + (-a) = -a + a = 0$ e $-(-a) = a$;
- (c). $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ e, in particolare, $(-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a$;
- (d). $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ e, in particolare, $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Dimostrazione. Si dimostrano i vari punti.

- (a). Si nota che

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

Sottraendo $a \cdot 0$ ad ambo i membri, si rimane con $a \cdot 0 = 0$. L'altra si dimostra analogamente.

(b). Già mostrato per i gruppi.

(c). Per mostrare che $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, si mostra che $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$. Per la proprietà distributiva:

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

(d). Si applica due volte il punto (c):

$$(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$$

dove l'ultima deriva dal punto (b).

□

Osservazione 3.3. Si nota che, per la proprietà (a) appena dimostrata, nel momento in cui in un anello A si verifichi $1 = 0$, allora $\forall a \in A, 0 = a \cdot 0 = a \cdot 1 = a$. Questo vuol dire che A è l'anello banale.

Proposizione 3.3

Un campo è automaticamente anche un dominio.

Dimostrazione. Sia K un campo; se, per assurdo, fosse $br = 0$ per $b, r \in K, b, r \neq 0$, allora si possono moltiplicare ambo i membri per l'inverso di b , per esempio, e trovare che $r = 0$, il che è assurdo. □

Proposizione 3.4 (Legge di cancellazione)

In ogni dominio R vale la legge di cancellazione, cioè $\forall a \in R, a \neq 0$:

$$ab = ac \implies b = c$$

Dimostrazione. È sufficiente notare che $ab = ac \implies ab - ac = 0 \implies a(b - c) = 0$. Usando il fatto che $a \neq 0$ e che si è in un dominio, deve risultare $b - c = 0 \implies b = c$. □

La legge di cancellazione non vale in generale per qualunque anello, infatti, in \mathbb{Z}_{12} , $[3][4] = [3][8] \nRightarrow [4] = [8]$.

Definizione 3.10 (Sottoanello)

Sia R un anello; un suo sottoinsieme $T \subseteq R$ è detto *sottoanello* se:

(sr 1). $1 \in T$;

(sr 2). T è un sottogruppo di R rispetto a +;

(sr 3). $\forall a, b \in T \implies ab \in T$.

3.3.1 Omomorfismi di anelli

Definizione 3.11 (Omomorfismo di anelli)

Siano R, S due anelli; una mappa $\phi : R \rightarrow S$ è detta *omomorfismo di anelli* se $\forall a, b \in R$:

(or 1). $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$;

(or 2). $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$;

(or 3). $\phi(1_R) = 1_S$.

Se ϕ è biettiva, allora è un isomorfismo di anelli.

Definizione 3.12 (Kernel di un omomorfismo)

Il nucleo di $\phi : R \rightarrow S$ omomorfismo di anelli è definito come l'insieme

$$\ker \phi = \{a \in R \mid \phi(a) = 0_S\}$$

Essendo gli omomorfismi di anelli un caso particolare di omomorfismo di gruppi, vale la seguente proposizione esattamente come valeva per i gruppi.

Proposizione 3.5

Il nucleo di un omomorfismo di anelli $\phi : R \rightarrow S$ è un sottogruppo additivo di R .

In aggiunta a questa, il nucleo di un omomorfismo di anelli soddisfa anche la seguente proprietà, che lo renderà quello che sarà noto come **ideale**.

Proposizione 3.6

Sia $\phi : R \rightarrow S$ un omomorfismo di anelli; allora $\forall a \in \ker \phi$, si ha $ar \in \ker \phi$ e $ra \in \ker \phi$, $\forall r \in R$.

Dimostrazione. Visto che $a \in \ker \phi \Rightarrow \phi(a) = 0_S$; allora

$$\phi(ar) = \phi(a)\phi(r) = 0_S\phi(r) = 0_S \implies ar \in \ker \phi$$

Analogamente si verifica l'altro. □

Sempre perché un omomorfismo di anelli è un caso particolare di omomorfismo di gruppi, vale che $\phi : R \rightarrow S$ è iniettiva se e solo se $\ker \phi = \{0_R\}$. Si nota, comunque, che il nucleo non è un sottoanello di R in generale; infatti, dovendo soddisfare $\phi(1_R) = 1_S \Rightarrow 1_R \notin \ker \phi$, quindi non ha una struttura di anello perché non ha l'elemento neutro rispetto al prodotto. Tuttavia, vale la seguente.

Proposizione 3.7

Sia $\phi : R \rightarrow S$ un omomorfismo di anelli; allora $\phi(R)$ è un sottoanello di S .

Dimostrazione. Evidentemente $1_S \in \phi(R)$ per definizione di omomorfismo. È anche verificato che $\phi(R)$ è un sottogruppo additivo di S per quanto dimostrato sui gruppi. Infine, $\forall a, b \in \phi(R) \Rightarrow ab \in \phi(R)$ perché se $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$

$$ab = \phi(\alpha)\phi(\beta) = \phi(\alpha\beta) \Rightarrow ab \in \phi(R)$$

□

Proposizione 3.8

Dati $\phi : R \rightarrow S$, $\psi : S \rightarrow T$ due omomorfismi di anelli, la loro composizione $\psi \circ \phi : R \rightarrow T$ è ancora un omomorfismo di anelli.

3.3.2 Ideali e generatori**Definizione 3.13 (Ideale)**

Un sottoinsieme $I \subseteq R$, con R anello, è detto *ideale* se:

(D 1). I è un sottogruppo additivo di R ;

(D 2). $\forall r \in R, \forall h \in I$ si ha $hr \in I$ e $rh \in I$.

La proprietà moltiplicativa che caratterizza gli ideali, quindi, è tale da *assorbire* a destra e a sinistra gli elementi dell'anello di riferimento.

Osservazione 3.4. Si nota che la definizione data è riferita in particolare all'oggetto noto come **ideale bilatero**; avendo solamente a che fare con anelli commutativi per il resto della trattazione, non si farà differenza con il concetto di ideale non-bilatero.

Osservazione 3.5. Si nota che un ideale I non è un sottoanello di R a parte il caso in cui $I = R$. Infatti, se $1 \in I \Rightarrow I = R$ per la proprietà di assorbimento.

Definizione 3.14 (Ideale generato)

Dato R un anello commutativo e dato $a \in R$ un suo elemento, si definisce l'ideale generato da a come l'insieme

$$\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$$

Più in generale, se $a_1, \dots, a_k \in R$ sono k suoi elementi, l'ideale da loro generato è:

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \{r_1 a_1 + \dots + r_k a_k \mid r_1, \dots, r_k \in R\}$$

Definizione 3.15 (Ideale principale)

Sia $I \subseteq R$ un ideale di un anello R ; si dice che I è un *ideale principale* se $\exists a \in R : I = \langle a \rangle$.

Osservazione 3.6. In generale, non è detto che ogni ideale di un anello R sia principale; infatti in $\mathbb{Z}[x]$, l'ideale $\langle 3, x \rangle$ non è principale.

Osservazione 3.7. Come accennato precedentemente, il nucleo di un omomorfismo $\phi : R \rightarrow S$ è un ideale bilatero di R .

Proposizione 3.9

Se I e J sono due ideali di R anello, allora anche $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ e $I \cap J$ sono ideali di R .

Dimostrazione. Si è già dimostrato che somma ed intersezione di gruppi abeliani (ogni sottogruppo di un gruppo abeliano è ancora abeliano) restituisce ancora un gruppo. Per finire, si nota che $\forall r \in R, \forall i \in I, \forall j \in J$

$$r(i + j) = ri + rj = i' + j' \in I + J$$

dove $ri \in I$ e $rj \in J$ perché I, J sono ideali. Per l'intersezione, questa proprietà segue dalla definizione di intersezione stessa. \square

Proposizione 3.10

Se I e J sono due ideali dell'anello R , allora anche

$$IJ = \{i_1 j_1 + \dots + i_n j_n \mid i_1, \dots, i_n \in I, j_1, \dots, j_n \in J\}$$

è un ideale di R , con $IJ \subset I \cap J$. Inoltre, tale inclusione può essere stretta.

Dimostrazione. Sia $h = \sum_{k=1}^n i_k j_k$; evidentemente $\forall r \in R$

$$rh = r \sum_{k=1}^n i_k j_k = \sum_{k=1}^n r i_k j_k = \sum_{k=1}^n i'_k j_k$$

con $i'_k \in I, \forall k = 1, \dots, n$ perché I è un ideale, quindi $rh \in IJ$. È verificato che IJ è un sottogruppo perché I e J lo sono, infatti l'identità è ottenuta dal prodotto delle identità, l'elemento inverso di $ij \in IJ$ è dato da $-(ij) = (-i)j = i(-j)$ e la chiusura rispetto alla somma segue per costruzione di IJ . \square

3.3.3 Anelli quoziente

Sia I un ideale di un anello R ; si indica con R/I l'insieme delle classi laterali di I in R , considerando I come sottogruppo additivo di R . Allora gli elementi di R/I saranno insiemi (classi laterali) della forma $a + I$ al variare di $a \in R$.

Visto che I è un sottogruppo additivo di R , che è anche normale perché R è un gruppo additivo abeliano, allora R/I ha sicuramente una struttura da gruppo additivo, con somma data da

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

Per parlare di *anello quoziente*, è necessario dotare R/I di un prodotto; la scelta più naturale è:

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

Per verificare che sia un'operazione ben definita, si mostra che se $a + I = a' + I$ e $b + I = b' + I$, allora $ab + I = a'b' + I$.

Dimostrazione. Il fatto che $a + I = a' + I$ significa che $a' = a + i$, $i \in I$; analogamente $b + I = b' + I \Rightarrow b' = b + j$, $j \in I$. Allora

$$a'b' + I = (a + i)(b + j) + I = ab + aj + bi + ij + I$$

Ricordando che I è un ideale e che, quindi, possiede la proprietà di assorbimento, i termini $aj, bi, ij \in I$, quindi la classe laterale risultante è proprio $ab + I$. \square

Rimane da dimostrare che, con tali operazioni, R/I è un anello.

Dimostrazione. La parte della somma si è già fatta per il gruppo quoziente in quanto I è un sottogruppo additivo di R anello commutativo. Rimane da verificare che il prodotto appena definito rispetti le condizioni di prodotto per un anello.

- La proprietà associativa del prodotto è verificata da

$$\left((a + I)(b + I)\right)(c + I) = (ab + I)(c + I) = abc + I = (a + I)\left((b + I)(c + I)\right)$$

- L'elemento neutro è dato da $1 + I$, infatti:

$$(a + I)(1 + I) = a + I$$

- La distributività deriva da

$$(a + I)\left[(b + I) + (c + I)\right] = (a + I)\left[(b + c) + I\right] = a(b + c) + I = (ab + ac) + I = (ab + I) + (ac + I)$$

\square

A questo punto, è possibile riportare in teoria degli anelli il primo teorema di omomorfismo.

Teorema 3.5 (Primo teorema di omomorfismo)

Sia $\phi : R \rightarrow S$ un omomorfismo di anelli; allora

$$R/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga al caso dei gruppi. □

Anche in questo caso è possibile definire l'omomorfismo canonico $\pi : R \rightarrow R/I$, con R anello e $I \subseteq R$ un suo ideale; questo permette la costruzione di un diagramma commutativo analogo al caso dei gruppi. La costruzione di tale omomorfismo canonico permette anche di riportare ogni ideale come nucleo di un omomorfismo in base alla seguente.

Proposizione 3.11

Sia R un anello; ogni suo ideale I può essere visto come il nucleo di un omomorfismo.

Dimostrazione. Si considera la proiezione $\pi : R \rightarrow R/I$, cioè la mappa che ad ogni $r \in R$, associa la classe laterale di I , $r + I$. Si verifica che π è un omomorfismo di anelli e che $\ker \pi = I$. □

3.3.4 Omomorfismi di valutazione

Sia R un anello tale che $\exists A \subset R$ con A sottoanello commutativo di R . Allora, $\forall r \in R$ si può definire la mappa

$$V_r : A[x] \rightarrow R \quad V_r[f(x)] = f(r), \quad \forall f(x) \in A[x]$$

Questo è un omomorfismo di anelli.

Dimostrazione. Evidentemente

$$\begin{aligned} V_r[f(x)g(x)] &= f(r)g(r) = V_r[f(x)]V_r[g(x)] \\ V_r[f(x) + g(x)] &= f(r) + g(r) = V_r[f(x)] + V_r[g(x)] \\ V_r[u(x)] &= V_r[1_A] = 1_A \end{aligned}$$

□

Gli omomorfismi di valutazione possono aiutare la comprensione dei quozienti di anelli. Per capirne l'utilità, si considera il seguente esempio.

Esempio 3.2. Si prendono $K = \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{C}$. Successivamente si considera l'omomorfismo di valutazione $V_i : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{C}$. È evidente che tale omomorfismo è suriettivo perché ogni numero complesso $a + ib \in \mathbb{C}$ è raggiunto da $V_i[f(x)]$ con $f(x) = a + bx$. Ora se ne studia il nucleo; intanto è ovvio che $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ viene mappato in 0 per

costruzione, quindi $x^2 + 1 \in \ker V_i$. Conseguentemente, ogni multiplo di $x^2 + 1$ è anch'esso contenuto nel nucleo, quindi

$$\langle x^2 + 1 \rangle \subseteq \ker V_i$$

È possibile mostrare che $\langle x^2 + 1 \rangle \supseteq \ker V_i$; per farlo, si prende un generico $f(x) \in \ker V_i$ (cioè un polinomio tale che $f(i) = 0$) e se ne considera la divisione Euclidea per $x^2 + 1$:

$$f(x) = (x^2 + 1)q(x) + r(x)$$

dove $r(x) = 0$, oppure è un polinomio di grado ≤ 1 , quindi, in generale, avrà la forma $r(x) = a + bx$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Applicando l'omomorfismo di valutazione a questa relazione, si trova

$$f(i) = 0 \cdot q(x) + a + ib = a + ib = 0 \implies a = b = 0$$

visto che a, b sono reali. Questo mostra che $f(x)$ è multiplo di $x^2 + 1$, quindi $f(x) \in \langle x^2 + 1 \rangle$, pertanto $\ker V_i = \langle x^2 + 1 \rangle$.

Per il primo teorema di omomorfismo, segue che

$$\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \cong \mathbb{C}$$

3.4 Quozienti di anelli di polinomi

3.4.1 Il quoziente $K[x]/\langle f(x) \rangle$

Si studiano i quozienti della forma $K[x]/\langle f(x) \rangle$, con K campo e $f(x) \in K[x]$. Se $f(x) = 0 \implies \langle f(x) \rangle = \{0\}$, quindi $K[x]/\langle f(x) \rangle \cong K[x]$. Se, invece, $f(x) = a \in K$ costante, con $a \neq 0$, si ha $\langle a \rangle = K[x]$, quindi il quoziente è banale perché è composto da una sola classe laterale coincidente con tutto l'anello.

Si assume, allora, che $\deg f = n \geq 1$; l'idea è che nel quoziente si sta imponendo $f(x) = 0$ perché ciascun polinomio che è multiplo di $f(x)$ viene identificato con la classe di resto $[0]$. Per capirlo meglio, si considera il seguente esempio.

Esempio 3.3. Sia $K = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$; allora in $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$ vale la relazione $x^2 + 1 = 0$, cioè $x^2 = -1$, perché ogni multiplo di $x^2 + 1$ viene mandato in 0 (o meglio, in $[0]$) dal quoziente, che si occupa di classificare in classi di resto separate i valori del resto per divisione Euclidea dei vari polinomio di $K[x]$ con $x^2 + 1$. Considerando $p(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - \sqrt{3} \in \mathbb{R}[x]$, la sostituzione porta a:

$$3x^4 - 5x^3 + x - \sqrt{3} = -5x(-1) + 3(-1)^2 + x - \sqrt{3} = 6x + (3 - \sqrt{3})$$

Questo vuol dire che $p(x) \equiv 6x + (3 - \sqrt{3}) \pmod{x^2 + 1}$.

Il discorso appare più evidente se si considera il processo appena svolto come applicato alla divisione Euclidea; dato $p(x) \in K[x]$, questo si scrive come $p(x) = q(x)f(x) + r(x)$, ma se $f(x) = 0$, allora si rimane con il rappresentante della classe di equivalenza $r(x)$.

Questo permette di concludere che ogni elemento di $K[x]/\langle f(x) \rangle$ è il laterale di un polinomio di grado minore di quello di $f(x)$, analogamente a quanto succedeva per $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Proposizione 3.12

Sia K un campo e R un anello contenente K come sottoanello; allora R è uno spazio vettoriale su K con le ovvie operazioni di somma e prodotto per scalare.

Dimostrazione. Per definizione, R ha la struttura di gruppo additivo abeliano, perciò gli assiomi legati alla somma sono automaticamente soddisfatti.

Riguardo al prodotto per scalare, questo è definito come $\cdot : K \times R \rightarrow R$. Essendo $K \subset R$, valgono tutte le proprietà richieste dagli assiomi perché R è un anello e contiene K . \square

Proposizione 3.13

Sia K un campo e $f(x) \in K[x]$ un polinomio con $\deg f = n \geq 1$. Sia, poi, $K[x]/\langle f(x) \rangle \supset K' = \{c + \langle f(x) \rangle \mid c \in K\}$ il sottoinsieme delle classi laterali dei polinomi costanti; allora K' è un sottoanello di $K[x]/\langle f(x) \rangle$ che è isomorfo a K e $K[x]/\langle f(x) \rangle$ è uno spazio vettoriale su K' di dimensione n .

Dimostrazione. Si nota che la mappa $\phi : K' \rightarrow K$ tale che $\phi(c + \langle f(x) \rangle) = c$ è un omomorfismo. È, inoltre, possibile verificare che è suriettiva, in quanto $\forall c \in K$, $\phi(c + \langle f(x) \rangle) = c$, e che è iniettiva perché $\phi(c_0 + \langle f(x) \rangle) = 0 \iff c_0 = 0$ per definizione.

Visto che $K \cong K'$, significa che anche K' ha una struttura di campo, pertanto è un sottoanello di $K[x]/\langle f(x) \rangle$; allora, per la proposizione precedente, $K[x]/\langle f(x) \rangle$ è uno spazio vettoriale su K' . Quanto alla dimensione, si è dimostrato che in $K[x]/\langle f(x) \rangle$ ci sono polinomi di grado al massimo $n-1$ per l'algoritmo di Euclide; allora, visto che un polinomio di grado $n-1$ ha n gradi di libertà, la dimensione dello spazio è proprio n . \square

Esempio 3.4. Sia $K = \mathbb{Z}_2$ e $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Per quanto appena dimostrato, $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ è uno spazio vettoriale su $K = \{c + \langle x^2 + x + 1 \rangle \mid c \in \mathbb{Z}_2\} \cong \mathbb{Z}_2$ ed è di dimensione 2. I suoi elementi sono $\bar{0}, \bar{1}, \bar{x}$ e $\overline{x+1}$; inoltre, è possibile verificare che

$$\bar{x}(\overline{x+1}) = \bar{1} \iff x(x+1) \equiv 1 \pmod{x^2 + x + 1}$$

Segue che $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$ è un campo con 4 elementi.

Osservazione 3.8. Si scrive $\bar{g}(x)$ per indicare il laterale $g(x) + \langle f(x) \rangle \in K[x]/\langle f(x) \rangle$. Si

nota che $f(\bar{x}) = 0 \in K[x]/\langle f(x) \rangle$, infatti:

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}) &= a_n \bar{x}^n + \dots + a_1 \bar{x} + a_0 \\
 &= a_n(x^n + \langle f(x) \rangle) + \dots + a_1(x + \langle f(x) \rangle) + a_0(1 + \langle f(x) \rangle) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^n a_j \langle f(x) \rangle \\
 &= \sum_{i=0}^n a_i x^i + \langle f(x) \rangle = \overline{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0} \\
 &= \overline{f(x)} = \bar{0} \in K[x]/\langle f(x) \rangle
 \end{aligned}$$

Questo vuol dire che l'anello costruito, cioè $K[x]/\langle f(x) \rangle$, contiene K^a e ha una radice di $f(x) \in K[x]$.

^aCome notato precedentemente, $K[x]/\langle f(x) \rangle$ contiene un sottoanello isomorfo a K , cioè quello delle classi laterali dei polinomi costanti.

3.4.2 Polinomi irriducibili

Definizione 3.16 (Polinomio irriducibile)

Sia K un campo e $f(x) \in K[x]$ un polinomio di grado ≥ 1 . Si dice che $f(x)$ è *irriducibile* se gli unici divisori di $f(x)$ sono i polinomi costanti diversi da 0 e i polinomi associati a $f(x)$.

Una maniera equivalente per definire l'irriducibilità è dire che, quando in $K[x]$ si ha una relazione della forma

$$f(x) = a(x)b(x)$$

significa che uno fra $a(x)$ e $b(x)$ è un polinomio costante diverso da 0.

Teorema 3.6

Sia K un campo e $f(x) \in K[x]$; allora il quoziente $K[x]/\langle f(x) \rangle$ è un campo se e solo se $f(x)$ è un polinomio irriducibile.

Dimostrazione. Si mostra l'implicazione \Leftarrow ; siano, allora, $f(x) \in K[x]$ irriducibile e $I = \langle f(x) \rangle$. Per mostrare che $K[x]/I$ è un campo, è sufficiente mostrare che se $a(x) + I$ è un elemento di $K[x]/I$ diverso da $0 + I$, allora ammette un inverso. Si nota che $\gcd(a, f) = 1$ perché, essendo irriducibile, $f(x)$ ha 1 e $f(x)$ come unici divisori, a meno di associati; di questi, solo 1 divide anche $a(x)$, altrimenti $a(x) \equiv 0 \pmod{f(x)}$ e $a(x) \in 0 + I$, contrario a quanto assunto. Per Bézout

$$\lambda(x)a(x) + \mu(x)f(x) = 1$$

Questa relazione, permette di concludere che $\lambda(x) + I$ è l'inverso di $a(x) + I$ in

$K[x]/I$ perché

$$(a(x) + I)(\lambda(x) + I) = a(x)\lambda(x) + I = a(x)\lambda(x) + \mu(x)f(x) + I = 1 + I$$

visto che $\mu(x)f(x) + I = 0 + I$.

Per l'implicazione \Rightarrow , invece, si assume che $f(x)$ non sia irriducibile e si nota che ci si trova in uno dei seguenti casi.

- $f(x) = 0$, quindi $K[x]/\langle 0 \rangle \cong K[x]$, quindi non è un campo.
- $\deg f = 0 \Rightarrow f(x) = k \in K^*$, quindi $\langle f(x) \rangle = K[x] \Rightarrow K[x]/\langle f(x) \rangle \cong \{0\}$, che non è un campo.
- $f(x)$ si fattorizza come $f(x) = g_1(x)g_2(x)$, con $1 \leq \deg g_1, \deg g_2 < \deg f$; in questo caso, le classi $g_1(x) + I$ e $g_2(x) + I$ sono entrambe diverse da $0 + I$ per questioni di grado. Inoltre

$$(g_1(x) + I)(g_2(x) + I) = f(x) + I = 0 + I$$

Visto che in $K[x]$ ci sono dei divisori di 0 diversi da 0, $K[x]/I$ non solo non è un campo, ma non è neanche un dominio.

□

3.4.3 Anelli Euclidei

L'anello $K[x]$ permette una divisione con resto in analogia con quanto possibile in \mathbb{Z} con la divisione Euclidea. L'idea, ora, è di trovare una struttura per tutti quegli anelli che condividono tale analogia.

Definizione 3.17 (Anello Euclideo)

Un dominio D è detto *anello Euclideo* se esiste una mappa $g : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$, detta *grado*, tale che

(g 1). $\forall a, b \in D$, con $a, b \neq 0$, vale $g(a) \leq g(ab)$;

(g 2). $\forall a, b \in D$, con $b \neq 0$, esistono $q, r \in D : a = qb + r$, dove $r = 0$, oppure $g(r) < g(b)$.

Evidentemente, il grado per gli interi \mathbb{Z} è la funzione valore assoluto (dove si ignora il fatto che è ben definita anche per 0, mentre la funzione grado generica non lo è), mentre per i polinomi di $K[x]$, tale funzione, è il relativo grado.

Lemma 3.3

In un anello Euclideo D , per $a, b \in D$ con $a, b \neq 0$, se $b \mid a$ e $a \nmid b$, allora $g(b) < g(a)$.

Dimostrazione. Visto che $b \mid a$ per assunzione, sia $a = bc$. Se $a \nmid b$, allora $b = qa + r$, con $r \neq 0$ e $g(r) < g(a)$. D'altra parte, $r = b - aq = b - bcq = b(1 - cq) \Rightarrow g(r) \geq g(b)$, per cui $g(a) > g(b)$. \square

Proposizione 3.14

Sia D un dominio; allora $b \in D^* \iff \langle b \rangle = D$.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- (\Rightarrow) Sia b invertibile, cioè $b \in D^*$; allora $\forall d \in D$, $d = db^{-1}b = rb$, per $r = db^{-1} \in D$.
- (\Leftarrow) Sia $\langle b \rangle = D$; allora $\exists a \in D : ab = 1 \Rightarrow b$ è invertibile.

\square

Lemma 3.4

In un anello Euclideo D , vale $g(1) \leq g(b)$, $\forall b \in D$ e $g(b) = g(1) \iff b \in D^*$.

Dimostrazione. Per la prima affermazione, si nota che $\forall b \in D$, $g(b) = g(1b) \geq g(1)$. Per la seconda parte, invece, si usa che b è invertibile $\iff \langle b \rangle = D$.

- (\Rightarrow) Sia $g(b) = g(1)$ e sia $a \in D$; allora $a = qb + r$, con $r = 0$ o $g(r) < g(b)$, ma b ha grado minimo, quindi $r = 0$. Ne segue che $a \in \langle b \rangle$, $\forall a \in D \implies D = \langle b \rangle$.
- (\Leftarrow) Sia $b \in D^*$; allora $\langle b \rangle = D$, quindi $\forall a \in D$, si trova $r \in D$ tale che $a = rb$. Da questo, segue che $\forall a \in D$, $g(a) \geq g(b)$, quindi $g(b)$ ha il grado minore fra tutti, per cui $g(b) = 1$.

\square