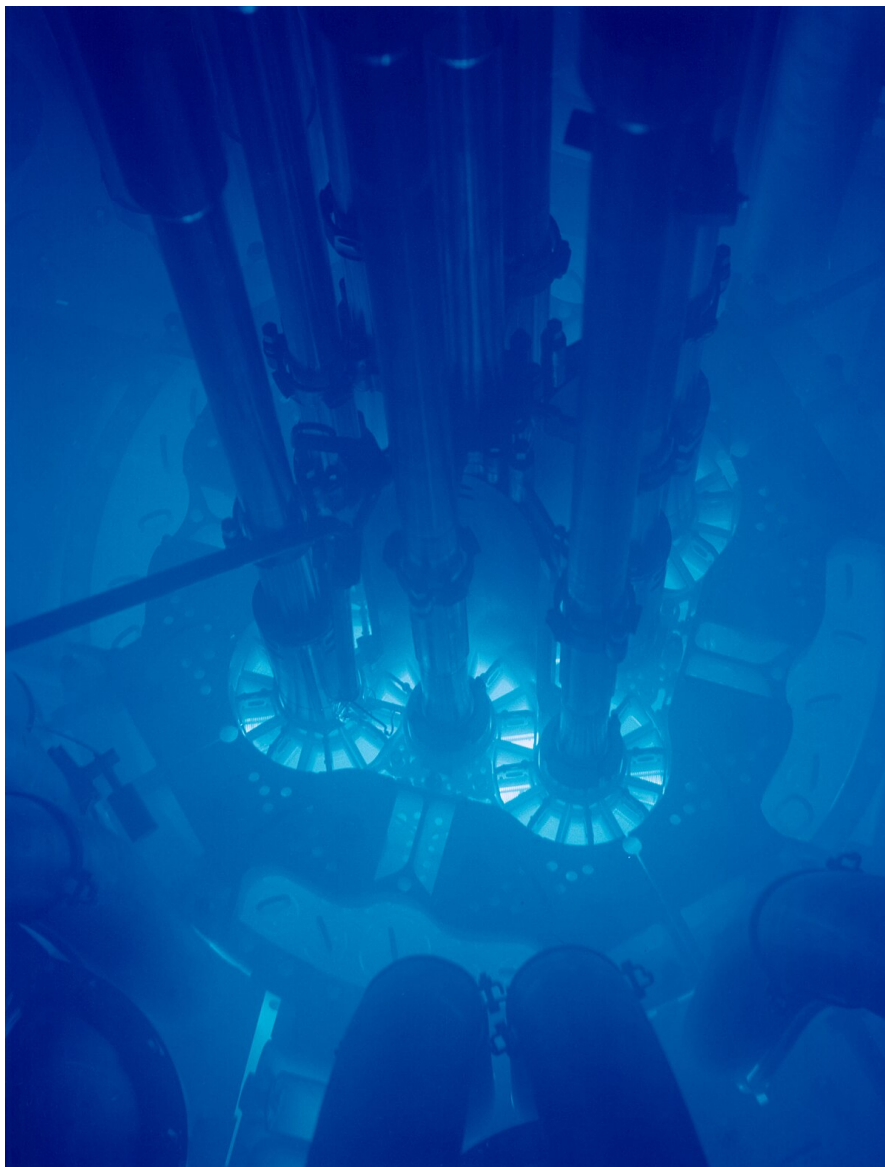


NOTE DI FISICA 3

MANUEL DEODATO



INDICE

1	Elettromagnetismo avanzato	4
1.1	Introduzione	4
1.1.1	Tensore dei campi	4
1.1.2	Invarianza di Gauge	5
1.1.3	Trasformazioni dei campi	6
1.2	Carica in moto rettilineo uniforme	6
1.2.1	Campi per calcolo diretto	6
1.2.2	Campi tramite 4-potenziale	7
1.2.3	Impulso trasferito	7
1.2.4	Equazioni del moto per carica in campo em	8
1.3	Tensore energia-impulso	8
1.3.1	Tensore densità di forza	8
1.3.2	Il tensore energia-impulso	9
1.3.3	Equazioni di conservazione	10
1.3.4	Caso dell'onda piana monocromatica	10
1.4	Potenziali ritardati e irraggiamento	11
1.4.1	I potenziali ritardati	11
1.4.2	Dipolo elettrico	12
1.4.3	Quadrupolo elettrico e dipolo magnetico	13
1.4.4	Campi di Liendard-Wiechert	14
1.4.5	Potenza irraggiata da una singola particella	15
1.5	Reazione di radiazione	16
1.5.1	Un primo approccio	16
1.5.2	Problemi e limiti della trattazione	16
1.5.3	Forza di Abraham-Lorentz	17
2	Indagine della materia con onde elettromagnetiche	19
2.1	Introduzione	19
2.1.1	Grandezze di interesse	19
2.1.2	Teoria sul dipolo elettrico	19
2.1.3	Onda incidente su schermo dielettrico e schermo opaco	19
2.1.4	Principio di Babinet	20
2.2	Teoria della diffrazione	20
2.2.1	Diffrazione da un ostacolo	20
2.2.2	Ampiezza di scattering per dipolo elettrico	21
2.2.3	Fattore di forma 2D	21
2.2.4	Fattore di forma 3D	22
2.3	Sezioni d'urto	23
2.3.1	Sezione d'urto totale	23
2.3.2	Il teorema ottico	23
2.3.3	Sezioni d'urto di assorbimento, elastica e inelastica	23
2.4	Scattering e risonanza	24
2.4.1	Modello dell'elettrone legato elasticamente	24
2.4.2	Sezione d'urto elastica	25
2.4.3	Limiti di σ_{el}	26
2.4.4	Sezione d'urto totale e d'assorbimento	26
2.4.5	Tempo di vita dello stato risonante	27
2.4.6	Caso della radiazione non polarizzata	27
2.4.7	Scattering Rayleigh	28
2.4.8	Sezione d'urto fotoelettrica	29
2.4.9	Sezione d'urto Compton	30
2.4.10	Sezioni d'urto di produzione di coppie	30

2.4.11	Esempio di sezioni d'urto per carbonio e piombo	30
3	Indagine della materia con particelle	32
3.1	Introduzione	32
3.1.1	Categorie di urti	32
3.1.2	Notazione chimica	32
3.1.3	Neutrone libero	32
3.1.4	Urti elettrone-protone	33
3.1.5	Classificazione delle particelle	33
3.1.6	Grandezze conservate negli urti	33
3.2	Sezioni d'urto per processi corpuscolari	34
3.2.1	Parametro di impatto e sezione d'urto per singolo proiettile	34
3.2.2	Sezione d'urto per densità di particelle su singolo bersaglio	34
3.2.3	Sezione d'urto per flussi di particelle che si scontrano	34
3.2.4	Sezione d'urto per flusso di particelle su lamina bersaglio	35
3.2.5	Sezione d'urto per interazione forte	36
3.2.6	Sezione d'urto per interazione elettrodebole	36
3.2.7	Sezione d'urto per interazione debole	37
3.2.8	Sezione d'urto Rutherford	37
3.2.9	Sezione d'urto Mott	38
3.2.10	Sezione d'urto Rosenbluth	39
3.2.11	Esperimento di Hofstadter	39
3.2.12	Fattore di forma e raggio quadratico medio	39
3.3	I nuclei atomici	40
3.3.1	Caratterizzazione	40
3.3.2	Modello a goccia del nucleo	40
3.3.3	Forze nucleari	40
3.3.4	Masse dei nuclei	41
3.3.5	Energia di legame dei nucleoni	41
3.3.6	Energia di separazione	43
3.4	Decadimenti nucleari	43
3.4.1	Introduzione	43
3.4.2	Tipi di decadimento	44
3.4.3	Decadimento β e termine di pairing	44
3.4.4	Produzione di stati eccitati ed effetto Mössbauer	44
3.4.5	Decadimento di tipo Mössbauer	46
4	Interazione fra particelle cariche e materia	47
4.1	Effetto Čerenkov	47
4.1.1	Radiazioni Čerenkov	47
4.1.2	Formula di Frank-Tamm	47
4.1.3	Rivelatori Čerenkov	48
4.1.4	Identificazione di particelle	49
5	Esercizi	50
5.1	Indagine della materia con onde elettromagnetiche	50
5.1.1	Fattore di forma fenditura 1D	50
5.1.2	Fattore di forma guscio sferico	50
5.1.3	Scattering su circuito resistivo	50
5.2	Indagine della materia con particelle	52
5.2.1	Rilascio di dose in acqua	52
5.2.2	Neutrini in impatto su superficie terrestre	52
5.2.3	Interazione forte	53
5.2.4	Q-valore per alcune reazioni di decadimento nucleare	53
5.3	Interazione della materia con particelle cariche	54
5.3.1	Energia persa da elettrone ultrarelativistico in materiale solido	54

1 ELETTROMAGNETISMO AVANZATO

1.1 Introduzione

Si usano

$$\begin{aligned} J^\mu &= (\rho c, \vec{j}); J_\mu = (\rho c, -\vec{j}) \\ A^\mu &= (\varphi, \vec{A}); A_\mu = (\varphi, -\vec{A}) \\ \partial_\mu &= \frac{d}{dx^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right); \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Eq. di continuità per la corrente è:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.1.2)$$

Le eq. per i potenziali si compattano in:

$$\partial_\mu [\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (1.1.3)$$

Infatti, per esempio, se $\nu = 0$:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial_\mu \partial^0 A^\mu = 4\pi\rho \Rightarrow -\Delta\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 4\pi\rho$$

1.1.1 Tensore dei campi

Definito come:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.1.4)$$

Si può scrivere $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$. Le sue componenti sono¹:

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \varphi)^i = -E_i \\ F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i = (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) \partial^m A^n = \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnk} \partial^m A^n = -\epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = -\epsilon^{ijk} B_k \end{aligned}$$

Essendo antisimmetrico:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

OSSERVAZIONE 1.1. A tensore di rango 2, si può associare un vettore polare e un vettore assiale; in questo caso, rispettivamente campo elettrico e campo magnetico, quindi $F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})$ e $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$.

Il tensore duale è:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \longrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{B}, -\vec{E}) \text{ e } \tilde{F}_{\mu\nu} = (\vec{B}, -\vec{E}) \quad (1.1.6)$$

¹ Per F^{ij} si è usato $\partial^m = (-\vec{\nabla})_m$, essendo $\partial^\mu = (c^{-1} \partial_t, -\vec{\nabla})$.

Le equazioni omogenee di Maxwell si riscrivono, quindi, come:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (1.1.7)$$

OSSERVAZIONE 1.2. Come le eq. di Maxwell omogenee in 3D permettono di introdurre i potenziali vettore e scalare, l'espressione $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ (per spazio sempl. connesso) permette che $F^{\mu\nu}$ si possa scrivere in termini di A^μ . Infatti¹:

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0 \quad (1.1.8)$$

La validità delle eq. omogenee di Maxwell si può riscrivere come:

$$0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{6} \epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}) \quad (1.1.9)$$

riscrivendo somma sugli indici muti e usando anti-simmetria di ϵ . Essendo antisimmetrica la combinazione nelle parentesi, perché l'espressione sia nulla, deve valere:

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0 \quad (1.1.10)$$

1.1.2 Invarianza di Gauge

Per $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f \Rightarrow F'^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu}$ ². La **Gauge di Lorenz** è data da $\partial_\mu A'^\mu = 0$; si ottiene per $\partial_\mu \partial^\mu f = \partial_\nu A^\nu$ e $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu f$. A^μ ancora non è univoco \rightarrow la condizione è invariante per $\partial_\mu \partial^\mu f = 0$.

In questa Gauge, le equazioni non omogenee sono eq. d'onda:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (1.1.11)$$

Nel vuoto (assenza di sorgenti) $\rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$, quindi si può usare libertà di Gauge rimasta e porre $A^0 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Si dimostra che è possibile:

Dimostrazione. Sia $A^\mu : \partial_\mu A^\mu = 0$ e $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$. Si prende $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu g$, con

$$g(t, \vec{r}) = c \int_0^t A^0(t', \vec{r}) dt' + h(\vec{r})$$

Così si ha $A'^0(t, \vec{r}) = 0$ e

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu g &= \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} - c \int_0^t \nabla^2 A^0 dt' - \nabla^2 h = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} - \int_0^t \frac{d^2}{dt'^2} A^0(t', \vec{r}) dt' - \nabla^2 h \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^0(0, \vec{r}) - \nabla^2 h \end{aligned}$$

con h.t.c. $\partial_\mu \partial^\mu g = 0$, per cui $\partial_\mu A'^\mu = 0$ e $\partial_\nu \partial^\nu A'^\mu = 0$. ■

La condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ è la **Gauge di Coulomb** e si ottiene combinando A^μ generico e $f : \nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Anche qui c'è libertà di Gauge residua, modificando f aggiungendo funzione solo del tempo.

¹L'ultima uguaglianza è perché, per $\mu \leftrightarrow \rho$, $\partial_\mu \partial_\rho$ è simmetrica mentre $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è antisimmetrico.

²Questo è facile da vedere se si scompone la trasformazione in parte temporale e spaziale, visto che coincide con la trasformazione di Gauge nel caso 3D.

1.1.3 Trasformazioni dei campi

Si ottengono da $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$. Si considera boost lungo \hat{x} . Per esempio:

$$F'^{01} = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} = (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) F^{01} \equiv F^{01}$$

Si ricava, in generale, che:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Usando $\vec{E}_{||} = \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})/\beta^2$, $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{||}$ e $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$, $(1 - \gamma)/\beta^2 = -\gamma^2(\gamma + 1)$:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \\ \vec{B}' &= \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Quelle inverse sono per $\vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$.

Si possono trovare espressioni invarianti, di cui due sono indipendenti: $I_1 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $I_2 = \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. In generale, dati due tensori antisimmetrici $A^{\mu\nu} = (\vec{p}, \vec{a})$ e $B^{\mu\nu} = (\vec{q}, \vec{b})$, si trova¹:

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = A^{0i} B_{0i} + A^{ij} B_{ij} = -2\vec{p} \cdot \vec{q} + \epsilon^{ijm} a_m \epsilon_{ijk} b^k = 2(\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{p} \cdot \vec{q})$$

Allora:

$$I_1 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2), \quad I_2 = -4\vec{B} \cdot \vec{E} \quad (1.1.14)$$

Da questi, si ricava una forma canonica dipendente da I_1, I_2 per i campi:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.15)$$

Prima valida se $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ e l'altra in tutti gli altri casi.

1.2 Carica in moto rettilineo uniforme

In S , carica e in moto rettilineo uniforme con $x = \beta ct$, $y = 0$, $z = 0$; S' SR solidale con e .

1.2.1 Campi per calcolo diretto

In S' , i campi nel punto \vec{R}' sono:

$$\vec{E}' = e \frac{\vec{R}'}{|\vec{R}'|^3}; \quad \vec{B}' = 0 \quad (1.2.1)$$

Trasformando in S , dove e ha velocità \vec{v} (quindi S ha velocità $\vec{V} = -\vec{v}$ rispetto a S'): $\vec{E}_{||} = \vec{E}'_{||}$, $\vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}$ e

$$\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times (\gamma \vec{E}') = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E} \quad (1.2.2)$$

¹ Visto che $\epsilon^{ijm} \epsilon_{ijk} a_m b^k = (3\delta_k^m - \delta_k^j \delta_j^m) a_m b^k = 2\delta_k^m a_m b^k$.

Per le coordinate, si ha $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, quindi:

$$R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2} = \gamma \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}$$

Da qui, per $R' = \gamma R_*$:

$$E_x = \frac{e(x - vt)}{\gamma^2 R_*^3}, E_y = \frac{ey}{\gamma^2 R_*^3}, E_z = \frac{ez}{\gamma^2 R_*^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{e\vec{R}}{R_*^3} \quad (1.2.3)$$

con $\vec{R} = (x - vt, y, z)$ posizione del punto di osservazione rispetto alla particella. Per osservatore in $x = 0$, $y = b$, $z = 0 \Rightarrow \vec{R} = (-vt, b, 0)$:

$$E_x = -\frac{e\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}; E_y = \frac{e\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}; E_z = 0 \quad (1.2.4)$$

Per $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}$, essendo $\vec{v} = (v, 0, 0)$, si ha:

$$B_x = B_y = 0; B_z = \frac{v}{c} E_y = \frac{\gamma\beta eb}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (1.2.5)$$

1.2.2 Campi tramite 4-potenziale

In S' , si sceglie:

$$A'^\mu = \left(\frac{e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, 0, 0, 0 \right) \quad (1.2.6)$$

In S , quindi:

$$A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu = \left(\frac{\gamma e}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\beta\gamma e}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}}, 0, 0 \right) \quad (1.2.7)$$

Da questi si ottengono i campi:

$$\begin{cases} E_x = \frac{e(x - vt)}{\gamma^2 [(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}} \\ E_y = \frac{ey}{\gamma^2 [(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}} \\ E_z = \frac{ez}{\gamma^2 [(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}} \end{cases} \quad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{-e\beta z}{\gamma^2 [(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}} \\ B_z = \frac{e\beta y}{\gamma^2 [(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)]^{3/2}} \end{cases}$$

1.2.3 Impulso trasferito

Per $\tau = \frac{1}{\gamma} \frac{b}{v}$, le espressioni per \vec{E} , \vec{B} in $P = (0, b, 0)$ diventano:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{e}{b^2} \frac{t/\tau}{(1 + t^2/\tau^2)^{3/2}} \\ E_y = \frac{e}{b^2} \frac{\gamma}{(1 + t^2/\tau^2)^{3/2}} \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = \frac{e}{b^2} \frac{\beta\gamma}{(1 + t^2/\tau^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Se carica $-e$ posta in P, assumendo che contribuisca solo il campo elettrico alla variazione di quantità di moto e che durante il passaggio della carica, $-e$ subisca uno spostamento trascurabile, la variazione è solo lungo y perché $E_z = 0$ e E_x è dispari in t, quindi:

$$\begin{aligned}\Delta p_y &= -e \int_{-\infty}^{+\infty} E_y dt = -\frac{e^2 \gamma}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2/\tau^2)^{3/2}} dt = -\frac{e^2 \gamma \tau}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{2e^2 \gamma \tau}{b^2} = -\frac{2e^2}{bv} = -\frac{2m_e c r_e}{b\beta}\end{aligned}\quad (1.2.8)$$

dove la primitiva dell'integrando è $\xi/\sqrt{1+\xi^2}$ e $r_e = e^2/(m_e c^2)$ è il raggio classico dell'elettrone.

Per $b \gg 2r_e/\beta \Rightarrow |\Delta p_y|/(m_e c) \ll 1 \Rightarrow$ elettrone non relativistico, per cui è giustificata l'ipotesi di trascurare il campo magnetico. Lo spostamento dell'elettrone è:

$$|\Delta y| \approx \frac{|\Delta p_y|}{m_e} \tau = \frac{2r_e}{\gamma \beta^2} \quad (1.2.9)$$

essendo τ tempo caratteristico dell'urto. L'ipotesi di spostamento trascurabile è $|\Delta y| \ll b$ se $b \gg 2r_e/(\gamma \beta^2)$, più debole di quella per trascurare il campo magnetico.

1.2.4 Equazioni del moto per carica in campo em

Per carica e di massa m : $\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$. Si cerca forma covariante, sapendo che il tensore $F^{\mu\nu}$ è lineare nei campi, quindi la **quadriforza** f^μ dovrà essere lineare nella 4-velocità e nel tensore di campo. Visto che $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$, il tensore $F^{\mu\nu}u_\nu$ ha componenti:

$$\begin{cases} F^{0\nu}u_\nu = F^{0i}u_i = \gamma\vec{E} \cdot \vec{v} \\ F^{i\nu}u_\nu = F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j = \gamma c E_i + \gamma e^{ijk} B_k v_j = c\gamma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)_i \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Avendo $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ e $dt = \gamma d\tau$, allora:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (1.2.11)$$

1.3 Tensore energia-impulso

1.3.1 Tensore densità di forza

Forza di Lorentz per unità di volume è:

$$\frac{d\vec{p}}{dt dV} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$$

Si introduce il 4-vettore

$$G^\mu = \frac{dp^\mu}{dt dV} = \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt dV}, \frac{d\vec{p}}{dt dV} \right) \quad (1.3.1)$$

che è un 4-vettore perché $dt dV$ è uno scalare di Lorentz. A parte fattore c^{-1} , la componente temporale è lavoro svolto dal campo per unità di tempo e volume. Visto che $dE = \vec{v} \cdot d\vec{p}$, si ha:

$$\frac{1}{c} \frac{dE}{dt dV} = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt dV} = \frac{1}{c} \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Allora, essendo $J^\mu = (c\rho, \vec{j})$:

$$G^\mu = \left(\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}, \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\nu \quad (1.3.2)$$

1.3.2 Il tensore energia-impulso

A partire da G^μ , usando $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$:

$$\frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \frac{1}{4\pi} [\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - (\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu}]$$

Indici contratti sono muti, quindi il secondo termine diventa:

$$(\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} + \frac{1}{2} (\partial^\nu F^{\mu\rho}) F_{\nu\rho} = \frac{1}{2} (\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu}) F_{\rho\nu} = -\frac{1}{2} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) F_{\rho\nu}$$

visto che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico e $\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0$. Allora:

$$\begin{aligned} G^\mu &= \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) + \frac{1}{2} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) F_{\rho\nu} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - \frac{1}{2} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) F_{\nu\rho} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) \right] = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho \left[F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} - \frac{1}{4} \delta_\rho^\mu F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \right] \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Si definisce il **tensore energia-impulso** come:

$$T^{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{\mu\nu} F^\rho{}_\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} F^{\rho\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \right] \quad (1.3.4)$$

Allora $\frac{1}{c} F^{\mu\nu} J_\nu = -\partial^\rho T^\mu{}_\rho = -\partial_\rho T^{\mu\rho}$, quindi:

$$G^\mu = -\partial_\rho T^{\mu\rho} \quad (1.3.5)$$

Il tensore $T^{\mu\nu}$ è simmetrico e a traccia nulla, quindi $T^\mu{}_\mu = 0$, con componenti date da:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \equiv W \\ T^{0i} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i = \frac{S_i}{c} \\ T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[-E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right] = \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

con W densità di energia em, $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ vettore di Poynting e σ_{ij} **tensore degli sforzi di Maxwell**¹. Quindi:

$$\begin{aligned} T^{\mu\rho} &= \begin{pmatrix} W & \vec{S}/c \\ \vec{S}/c & \sigma_{ij} \end{pmatrix}; \quad T_{\mu\rho} = \begin{pmatrix} W & -\vec{S}/c \\ -\vec{S}/c & \sigma_{ij} \end{pmatrix} \\ T^\mu{}_\rho &= \begin{pmatrix} W & -\vec{S}/c \\ \vec{S}/c & -\sigma_{ij} \end{pmatrix}; \quad T_\mu{}^\rho = \begin{pmatrix} W & \vec{S}/c \\ -\vec{S}/c & -\sigma_{ij} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

¹ Gli indici sono in basso perché è tridimensionale.

1.3.3 Equazioni di conservazione

L'equazione $G^\mu = -\partial_\rho T^{\mu\rho}$ contiene equazioni per la conservazione dell'energia e dell'impulso:

$$G^0 = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt dV} = -\partial_\rho T^{0\rho} = -\partial_0 T^{00} - \partial_i T^{0i} = -\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \Rightarrow \frac{dW}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{dE}{dt dV} = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} + \partial_j \sigma_{ij} + \frac{dp_i}{dt dV} = 0$$

Nella prima, $dE/(dt dV)$ lavoro svolto da campo em (energia trasferita alle cariche) e \vec{S} vettore flusso di energia \rightarrow equazione di conservazione dell'energia; nella seconda, $d\vec{p}/(dt dV)$ forza per unità di volume (impulso trasferito da campo em alle cariche per unità di tempo e di volume) e σ_{ij} flusso di impulso \rightarrow equazione di conservazione dell'impulso, con \vec{S}/c^2 densità di impulso.

Per calcolo dell'energia trasferita alle cariche o forza esercitata sulle cariche da campo em, si integrano le equazioni su volume occupato dalle cariche e integrali di volume delle divergenze si riscrivono come flussi (le normali sono uscenti).

1.3.4 Caso dell'onda piana monocromatica

Ci si mette in Gauge di Lorenz, quindi $\partial_\mu A^\mu = 0$. Valgono le equazioni di Maxwell $\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0$, alle quali si cerca soluzione del tipo $A_\mu(x) = \bar{A}_\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha}$, dove \bar{A}_μ 4-vettore costante complesso e $k_\mu = (\omega/c, \vec{k})$ 4-vettore costante reale.

Da $\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0$, si ottiene $k_\mu k^\mu = 0 \Rightarrow \vec{k}^2 = \omega^2/c^2$, mentre $\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow k_\mu \bar{A}^\mu = 0 \Rightarrow k_\mu A^\mu(x) = k_\mu A^{*\mu}(x) = 0$.

Il tensore del campo è:

$$F_{\mu\nu}(x) = \Re\{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} = \Re\{-ik_\mu A_\nu + ik_\nu A_\mu\} = \Im\{k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu\}$$

Ora si calcola il tensore energia-impulso, più precisamente la sua media temporale. Usando $k_\mu A^\mu(x) = k_\mu A^{*\mu}(x) = 0$, si ha $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0^1$, corrispondente a $|\vec{E}| = |\vec{B}|$, quindi si calcola

$$\begin{aligned} \langle F^{\mu\nu} F^\rho{}_\nu \rangle &= k^\mu k^\rho \langle \tilde{A}^\nu \tilde{A}_\nu \rangle = k^\mu k^\rho \left\langle \frac{A^\nu - A^{\nu*}}{2i} \frac{A_\nu - A_\nu^*}{2i} \right\rangle \\ &= -\frac{k^\mu k^\rho}{4} (-2 \langle A^\nu A_\nu^* \rangle) = \frac{k^\mu k^\rho}{2} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

con $\tilde{A}^\mu = \Im\{A^\mu\}$ e l'ultima uguaglianza è giustificata da $\langle A_\nu A^\nu \rangle = \langle A_\nu^* A^{\nu*} \rangle = 0$, a sua volta dato da $\int_0^T e^{-4\pi i t/T} dt = 0^2$, che è quello che deve essere mediato sul periodo T .

Da questo: $\langle T^{\mu\rho} \rangle = -\frac{k^\mu k^\rho}{8\pi} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle$. Si nota che da $T^{00} = W$, si ha $\langle W \rangle = -\frac{\omega^2}{8\pi c^2} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle$, quindi

$$\langle T^{\mu\rho} \rangle = \frac{\langle W \rangle c^2}{\omega^2} k^\mu k^\rho \quad (1.3.9)$$

Se $\hat{n} = c\vec{k}/\omega$ versore della direzione di propagazione dell'onda e $n^\mu = (1, \hat{n})$, si può scrivere:

$$\langle T^{\mu\rho} \rangle = \langle W \rangle n^\mu n^\rho \quad (1.3.10)$$

¹ Per farlo, si può usare che $F^{\mu\nu} = k^\mu \Im\{A^\nu\} - k^\nu \Im\{A^\mu\}$.

² Questo si ottiene dal prodotto degli esponenziali dei due 4-vettori, considerando solo l'esponente prodotto da $k_0 x^0 = \omega t$, con $\omega = 2\pi/T$.

1.4 Potenziali ritardati e irraggiamento

1.4.1 I potenziali ritardati

Distribuzione J^μ nel vuoto. In Gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, quindi si risolve $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$. Si usa la funzione di Green $G_R(\vec{r}, t)$ che soddisfa:

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) G_R(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t) \quad (1.4.1)$$

corrispondente ad un impulso di carica in un punto e tale che $G_R = 0$, $\forall t < 0$, $\forall \vec{r}$. Trasformata solo rispetto a r^1 :

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + k^2 \right) \tilde{G}_R(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(t) \quad (1.4.2)$$

Soluzione generale della forma $A(k) \cos(\omega_k t) + B(k) \sin(\omega_k t)$, con $\omega_k = ck$. Usando le condizioni al contorno ($G_R = 0$, $t < 0$), si integra l'equazione:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + k^2 \right) \tilde{G}_R(\vec{k}, t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(t) dt \Rightarrow \frac{1}{c^2} \partial_t \tilde{G}_R(\vec{k}, 0^+) = \frac{1}{(2\pi)^3}$$

dove $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} k^2 \tilde{G}_R dt \rightarrow 0$. Integrando nuovamente: $\tilde{G}_R(\vec{k}, 0^+) = 0$. Allora, da $\frac{1}{c^2} \partial_t \tilde{G}_R(\vec{k}, 0^+) = \frac{1}{(2\pi)^3}$ e imponendo la causalità:

$$\tilde{G}_R(\vec{k}, t) = \frac{c}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\omega_k t)}{k} \Theta(t) \quad (1.4.3)$$

Si anti-trasforma per trovare G_R , usando $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x)$:

$$\begin{aligned} G_R(\vec{r}, t) &= \frac{c\Theta(t)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(ckt)}{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k = \frac{c\Theta(t)}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(ckt)}{k} e^{ikr \cos \theta} d^3k \\ &= 2\pi \frac{c\Theta(t)}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk k \sin(ckt) \int_0^\pi d\theta e^{ikr \cos \theta} \sin \theta \\ &= \frac{c\Theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} dk k \sin(ckt) \int_{-1}^{+1} e^{ikr \alpha} d\alpha \\ &= \frac{c\Theta(t)}{(2\pi)^2} \frac{i}{kr} \int_0^{+\infty} k \frac{e^{ickt} - e^{-ickt}}{2i} (e^{-ikr} - e^{ikr}) dk \\ &= \frac{c\Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_0^{+\infty} (e^{ickt} - e^{-ickt}) (e^{-ikr} - e^{ikr}) dk \\ &= \frac{c\Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_0^{+\infty} (e^{i(ct-r)k} + e^{-i(ct-r)k} - e^{i(ct+r)k} - e^{-i(ct+r)k}) dk \\ &= \frac{c\Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i(ct-r)k} - e^{i(ct+r)k}) dk = \frac{c\Theta(t)}{4\pi r} [\delta(ct-r) - \delta(ct+r)] \\ &= \frac{c}{4\pi r} \delta(ct-r) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r/c) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

dove:

- nella terza uguaglianza si passa in coordinate sferiche $(|k|, \theta, \phi)$, dove θ angolo fra \vec{k}, \vec{r} , quindi $\det J = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$;
- nell'ottava disuguaglianza, si includono i termini per $k \rightarrow -k$ nell'integrale, estendendolo da $-\infty$ a $+\infty$;

¹Questo consente di imporre più facilmente le condizioni al contorno più in avanti.

- nell'ultima disuguaglianza, si è portato nella delta la c al numeratore del coefficiente, usando $\delta(ax) = \delta(x)/a$ (cambio di variabile della $\delta(x)$).

Allora la soluzione generale è ottenuta tramite convoluzione con G_R :

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' J^\mu(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J^\mu(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3r' dt' \quad (1.4.5) \\ &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{J^\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.3. Dalla prima uguaglianza, visto che A^μ, J^μ sono quadrivettori e l'elemento $d^3r' dt'$ è invariante, allora G_R deve essere un invariante di Lorentz almeno per trasformazioni di Lorentz proprie.

Usando $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$, si mostra che $\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \partial_t \phi/c + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Si vuole usare l'equazione di continuità, quindi a partire dalla soluzione A^μ appena trovata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_t \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial_t \rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') d^3r' \end{aligned}$$

Visto che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla} t' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'|$$

e che $\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \right]_{t'} - \frac{1}{c} \partial_{t'} \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'|$, allora $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{j} \right]_{t'} - \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}$, quindi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \right]_{t'} d^3r'$$

Il primo termine si trasforma in un integrale di superficie in \vec{j} , quindi si annulla, pertanto:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\partial_{t'} \rho(\vec{r}', t') + \left[\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \right]_{t'} \right) d^3r' = 0 \quad (1.4.6)$$

per l'equazione di continuità.

1.4.2 Dipolo elettrico

A partire da $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$, si assume $1/|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq 1/r$: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) d^3r'$. Visto che:

$$\begin{aligned} \int j_i(\vec{r}, t - r/c) d^3r' &= \int j_k(\vec{r}', t - r/c) (\partial'_k r'_i) d^3r' \\ &= \int \partial'_k (r'_i j_k(\vec{r}', t - r/c)) d^3r' - \int r'_i \partial'_k j_k(\vec{r}', t - r/c) d^3r' \\ &= \int r'_i \partial_t \rho(\vec{r}', t - r/c) d^3r' = \frac{d}{dt} \int r'_i \rho(\vec{r}', t - r/c) d^3r' \equiv \dot{p}_i(t - r/c) \end{aligned}$$

Si ha:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc} \dot{\vec{p}}(t - r/c) \quad (1.4.7)$$

Facendo uso di $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}', t - r/c) = -\frac{1}{c} \hat{n} \times \ddot{\vec{f}}(\vec{r}', t - r/c)$, con $\hat{n} = \vec{r}/r$, il campo magnetico in zona di radiazione ($kr \gg 1$) è:

$$\vec{B}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{rc} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}}(t - r/c) = -\frac{1}{rc^2} \hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \quad (1.4.8)$$

dove si sono trascurati termini $O(r^{-2})$. Invece, usando $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$ (trascurando ancora $O(r^{-2})$), si ha $(rc^3)^{-1} \hat{n} [\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)] = c^{-1} \partial_t \vec{E}$, quindi:

$$\vec{E}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc^2} \hat{n} \times [\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)] = -\frac{1}{rc^2} \ddot{\vec{p}}_{\perp}(t - r/c) \equiv -\hat{n} \times \vec{B}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) \quad (1.4.9)$$

con $\vec{p}_{\perp} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{p})$. Si calcola $\vec{S}_{\text{rad}} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}$; in coordinate polari con $\vec{p} \parallel \hat{z}$ e θ angolo tra \hat{n}, \vec{p} e $|\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{p})| = |\vec{p}| \sin \theta$:

$$P_{\text{rad}} = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int \vec{S} \cdot \hat{n} r^2 d\cos \theta d\phi = \frac{1}{2c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \int_{-1}^{+1} \sin^2 \theta d\cos \theta = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \quad (1.4.10)$$

Sia $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$. Per \vec{S} , si usa $\vec{E} \rightarrow (\vec{E} + \vec{E}^*)/2$ con $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \langle \vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B} \rangle^1$; sostituendo $\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$, si ha² $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}$, quindi:

$$\langle P \rangle = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 d\cos \theta d\phi = \frac{c}{4} k^4 |\vec{p}_0|^2 \int_{-1}^{+1} \sin^2 \theta d\cos \theta = \frac{c}{3} k^4 |\vec{p}_0|^2 \quad (1.4.11)$$

1.4.3 Quadrupolo elettrico e dipolo magnetico

In $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{j(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$ si usa $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{n} \cdot \vec{r}'$, con $\hat{n} = \vec{r}/r$. Quindi $\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \simeq \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c} \partial_t \vec{j}(\vec{r}', t)|_{t'=t-r/c}$. Se \vec{j} ha frequenza ω , il secondo termine è attenuato di $(a\omega)/c \simeq a/\lambda \simeq v/c$, con a dimensione caratteristica della distribuzione.

Dai calcoli col secondo termine si ottiene:

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \vec{\mu}(t - r/c) \times \hat{n} + \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}}(t - r/c) + \frac{1}{6cr^2} \hat{n} \partial_t^2 \int |\vec{r}'|^2 \rho(\vec{r}', t - r/c) d^3 r' \quad (1.4.12)$$

dove $Q_{ik}(t') = \int (3r'_i r'_k - \delta_{ik} |\vec{r}'|^2) \rho(\vec{r}', t') d^3 r'$ è il **momento di quadrupolo elettrico**, mentre $\vec{\mu}(t) = \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t) d^3 r'$ è il **momento di dipolo magnetico**.

In zona di radiazione ($r \gg \lambda$), trascurando le derivate di $1/r$ e \hat{n} perché si trascurano termini $O(r^{-2})$:

¹Quelli con stessa frequenza sono a media nulla.

²Si è usato $\vec{E} \times (\hat{n} \times \vec{E}^*) = (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \hat{n} - (\vec{E} \cdot \hat{n}) \vec{E}^*$, insieme al fatto che in campo di radiazione $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$. Si nota che \vec{E} è ancora quello complesso: la media della parte reale è inclusa nell'espressione.

$$\vec{B}^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\vec{\mu}}(t - r/c)) + \frac{1}{6c^3 r} \ddot{\vec{Q}}(t - r/c) \times \hat{n} \quad (1.4.13)$$

La potenza irradiata è ottenuta tramite $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{B}|^2 \hat{n}$ e si ha:

$$P = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 + \frac{1}{180c^5} \sum_{ij} \ddot{Q}_{ij}^2 + \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{\mu}}|^2 \quad (1.4.14)$$

con \vec{d} momento di dipolo elettrico ottenuto prima. Nel caso di campi oscillanti, come prima, la potenza media $\langle P \rangle = \frac{1}{2} P$.

1.4.4 Campi di Liendard-Wiechert

Carica e con legge oraria $\vec{s}(t)$; vale:

$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) ; \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = e\dot{\vec{s}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t))$$

I campi si ottengono usando l'espressione dei potenziali in termini della convoluzione delle sorgenti con funzione di Green G_R :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3r' dt' = \int \frac{e\delta(\vec{r}' - \vec{s}(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3r' dt' \\ &= \int \frac{e}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{s}(t')|/c) dt' \end{aligned}$$

Usando $\delta(f(t')) = \sum_i t'_i \frac{\delta(t' - t'_i)}{|f'(t'_i)|}$ ¹ e che $t_r = t' + |\vec{r} - \vec{s}(t')|/c$:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{e\delta(t' - t_r)}{|\vec{r} - \vec{s}(t')| - \frac{1}{c}(\vec{r} - \vec{s}(t')) \cdot \dot{\vec{s}}(t')} dt' = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{s}(t_r)| - \frac{1}{c}(\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \dot{\vec{s}}(t_r)} \\ &= \frac{e}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \Big|_{t_r} \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

con $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$ e $\hat{n} = \vec{R}/R$. Per il potenziale vettore:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e\vec{\beta}}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \Big|_{t_r} \quad (1.4.16)$$

In notazione quadridimensionale:

$$A^\mu(x) = e \frac{u^\mu(\tau_r)}{(x - s(\tau_r))_\nu u^\nu(\tau_r)} \quad (1.4.17)$$

¹Qui, i t'_i sono soluzioni di $f(t') = 0$. In questo caso, se $\dot{s} < c$, $f'(t') > 0$, quindi $f(t') = 0$ ha un'unica soluzione t_r .

con $(x - s(\tau_r))^2 = 0^1$. Per i campi si calcola il tensore di campo, nel quale si trascurano i termini in cui compare l'accelerazione:

$$F^{\mu\nu} = ec^2 \frac{(x-s)^\mu u^\nu - (x-s)^\nu u^\mu}{(u_\alpha(x-s)^\alpha)^3} \Big|_{t_r} \quad (1.4.18)$$

Visto che $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$, $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ e $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$, $\hat{n} = \vec{R}/R$:

$$\vec{E} = \frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r}; \quad \vec{B} = \hat{n} \times \vec{E} = -\frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{n} \times \vec{\beta}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \quad (1.4.19)$$

NOTA: questi sono validi per $\alpha = 0$, quindi **NON** validi in zona di radiazione.

Il tensore di campo completo è:

$$F_{rad}^{\mu\nu} = e \frac{(x-s)^\mu a^\nu - (x-s)^\nu a^\mu}{((x-s)_\alpha u^\alpha)^2} - e \frac{(x-s)^\mu u^\nu - (x-s)^\nu u^\mu}{(u_\alpha(x-s)^\alpha)^3} (x-s)_\rho a^\rho \quad (1.4.20)$$

con

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) \quad (1.4.21)$$

I campi sono:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} + \frac{e}{cR} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r}; \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{n} \times \vec{E}|_{t_r} \quad (1.4.22)$$

1.4.5 Potenza irradiata da una singola particella

Si considera il sistema di quiete della particella, in cui $\vec{E}_{rad} = \frac{e}{cR} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})$. Se θ angolo tra $\hat{n}, \dot{\vec{\beta}}$: $|\vec{E}_{rad}| = \frac{e a \sin \theta}{c^2 R}$. Visto che $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times (\hat{n} \times \vec{E}_{rad}) = \frac{c}{4\pi} E_{rad}^2 \hat{n}$ l'energia è il flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera di raggio R :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{e^2 a^2}{2c^3} \int_{-1}^{+1} (1 - \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \quad (1.4.23)$$

Questa è la **formula di Larmor**. Generalizzazione 4D della formula si ha con $d\mathcal{E} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} dt$ e $d\vec{\mathcal{P}} = 0$, che sono energia e impulso irradiati in tempo dt . Questa si può scrivere come:

$$d\mathcal{P}^\mu = -\frac{2e^2}{3c^5} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} u^\mu d\tau \quad (1.4.24)$$

In notazione 3D: $d\mathcal{P}^\mu = (d\mathcal{E}/c, d\vec{\mathcal{P}})$. In generico SR, allora:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} \quad (1.4.25)$$

Calcolando $a^\mu a_\mu$ e usando $(\vec{v} \times \vec{a})^2 = v^2 a^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2$, si ottiene:

¹Condizione di causalità tra coordinate e legge oraria $s^\mu(\tau)$. Visto che $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$, si ha $(x - s(\tau_r))_\nu u^\nu(\tau_r) = \gamma c R (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})|_{t_r}$.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left(a^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{a})^2 \right) \quad (1.4.26)$$

1.5 Reazione di radiazione

Carica soggetta a \vec{F}_{ext} conservativa accelera e irraggia, perdendo energia. Si corregge l'equazione del moto $\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{\text{ext}}$ con termine \vec{F}_{rad} dovuto dalla radiazione emessa.

1.5.1 Un primo approccio

Essendo legata a perdita di energia per irraggiamento, \vec{F}_{rad} deve essere una forza dissipativa; si impone che il lavoro da essa compiuto sia dato dalla formula di Larmor per la perdita di energia:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2 dt$$

Visto che $\dot{\vec{v}}^2 = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) - \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}}$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{rad}} \cdot \vec{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}} dt$$

Per un moto periodico, vale:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_{\text{rad}} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0$$

Possibile soluzione:

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}} \quad (1.5.1)$$

1.5.2 Problemi e limiti della trattazione

Con $\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}$, l'equazione del moto è $m(\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}}) = \vec{F}_{\text{ext}}$. La presenza di $\ddot{\vec{v}}$ implica il dover specificare un'ulteriore condizione iniziale.

Un problema si presenta prendendo $\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{\vec{v}}(t) = 0$, come la "soluzione di fuga" per $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$:

$$\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}} = 0 \implies \dot{\vec{v}}_{\text{ra}} = \vec{a}_0 e^{t/\tau} \quad (1.5.2)$$

Si può provare $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\vec{v}}(t) = 0$, valida quando \vec{F}_{ext} agisce per un tempo limitato, ma sorgono dei problemi di causalità. Per evidenziarli, si cerca un modo per imporre tale condizione, che si ottiene riscrivendo l'equazione differenziale come:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(e^{-t/\tau} m \dot{\vec{v}}(t) \right) &= \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \vec{F}_{\text{ext}}(t) \\ \implies m \dot{\vec{v}}(t) &= \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_t^{+\infty} e^{-t'/\tau} \vec{F}_{\text{ext}}(t') dt' = \int_0^{+\infty} e^{-s} \vec{F}_{\text{ext}}(t + \tau s) ds \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

con $\vec{F}_{\text{ext}}(t) = \vec{F}_{\text{ext}}(\vec{x}(t))$ e $s = (t' - t)/\tau$. Considerando $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_0 \Theta(t)$, con \vec{F}_0 costante, si ha:

$$m \dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}_0 \int_0^{+\infty} e^{-s} \Theta(t + \tau s) ds = \vec{F}_0 \int_{\max(0, -t/\tau)}^{+\infty} e^{-s} ds = \begin{cases} \vec{F}_0 & , t > 0 \\ \vec{F}_0 e^{t/\tau} & , t < 0 \end{cases} \quad (1.5.4)$$

cioè la carica accelera prima di sentire la forza.

Sia $\vec{F}_{\text{ext}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$, con $v \ll c$; si determina limite di applicabilità calcolando accelerazione da eq. del moto senza \vec{F}_{rad} e la si usa per stimare $|\vec{F}_{\text{rad}}|$. Si ha:

$$m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \implies \ddot{\vec{v}} = \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc}\dot{\vec{v}} \times \vec{B} + \frac{e}{mc}\vec{v} \times \dot{\vec{B}} \simeq \frac{e}{m}\dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{m^2c}\vec{E} \times \vec{B} \quad (1.5.5)$$

Nell'ultimo, si è sostituito $\dot{\vec{v}}$ dall'equazione del moto e si sono trascurati termini lineari in \vec{v} (assunta piccola).

Sostituendo $\ddot{\vec{v}}$ in \vec{F}_{rad} , si ha espressione indipendente da \vec{v} e affinché $|\vec{F}_{\text{rad}}| \ll |\vec{F}_{\text{ext}}|$, deve valere:

$$|\tau\dot{\vec{E}}| \ll |\vec{E}| \quad \text{e} \quad \frac{e^2\tau}{mc}|\vec{E} \times \vec{B}| \ll e|\vec{E}|$$

Usando $\dot{E} \sim \omega E$:

$$\lambda \gg r_e = \frac{e^2}{mc^2} \quad \text{e} \quad B \ll \frac{m^2c^4}{e^3} \quad (1.5.6)$$

OSSERVAZIONE 1.4. Trattazione non quantistica fallisce prima dei limiti trovati sopra; per trascurare effetti quantistici, si deve avere $\lambda \gg \lambda_C = \frac{h}{mc} \simeq 137r_e$. Al contempo, l'energia associata alla frequenza di ciclotrone $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ deve essere molto minore di mc^2 , cioè $B \ll \frac{m^2c^3}{eh}$, che ancora è $\simeq 137$ volte maggiore di quello ottenuto in equazione 1.5.6.

1.5.3 Forza di Abraham-Lorentz

Si parte da particella carica di massa m , carica e e inizialmente non puntiforme, con raggio tipico a . Si assume la validità di $m\dot{u}^\mu = F_{\text{ext}}^\mu + F_{\text{rad}}^\mu$ e si cerca espressione per F_{rad}^μ .

Si assume che F_{rad}^μ dipenda da u^μ e tutte le derivate di ordine superiore¹. Per assicurare trasversalità delle forze², si definisce:

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \quad (1.5.7)$$

Questa soddisfa $P^{\mu\nu}u_\nu = 0$ e $P^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}P^{\rho\sigma} = P^{\mu\sigma}$; si vede come proiettore sull'iperpiano ortogonale alla 4-velocità, quindi si scrive:

$$F_{\text{rad}}^\mu = P^{\mu\nu}G_\nu \quad (1.5.8)$$

dove G^μ non deve soddisfare trasversalità. Assumendo che G^μ dipenda da u^μ e derivate di ordine superiore e che sia analitica, si può sviluppare come³:

$$G_\mu = A\dot{u}_\mu + B\ddot{u}_\mu + C\dddot{u}_\mu + \dots + D\dot{u}_\mu(\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu) + \dots \quad (1.5.9)$$

dove si sono omissi termini $\propto u^\mu$ perché eliminati da $P^{\mu\nu}$. I coefficienti A, B, \dots dipendono solo da proprietà della particella (m, e, a) o costanti fondamentali (c) e si ricava tramite analisi dimensionale:

- $[A] = \text{massa} \Rightarrow$ si scrive tramite m e $e^2/(ac^2)$;
- $[B] = \text{massa} \times \text{tempo} \Rightarrow$ si scrive tramite ma/c e e^2/c^3 ;
- $[C] = \text{massa} \times \text{tempo}^2 \Rightarrow$ si scrive tramite ma^2/c^2 e e^2a/c^4 ;
- $[D] = \text{massa} \times \text{tempo}^3 / \text{velocità}^2 \Rightarrow$ si scrive tramite ma^2/c^4 e e^2a/c^6 .

¹Questo perché sono le uniche variabili che caratterizzano la particella nel limite $a \rightarrow 0$.

²Perché si continua a lavorare nel caso di moto periodico.

³La prima serie di punti sottintende la presenza di termini lineari di ordine di derivazione maggiore; la seconda termini contenenti potenze di grado più elevato di u^μ e delle sue derivate.

Per $\alpha \rightarrow 0$, sopravvivono solo A, B , ma $e^2/(\alpha c^2)$ diverge. Si assume α finito e piccolo; usando $G_\mu = A\dot{u}_\mu + B\ddot{u}_\mu$:

$$\begin{aligned} F_{\text{rad}}^\mu &= P^{m\nu} G_\nu = A\dot{u}^\mu + B \left(\ddot{u}^\mu - \frac{1}{c^2} u^\mu \ddot{u}_\nu u^\nu \right) = A\dot{u}^\mu + B \left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2} u^\mu \dot{u}_\nu \dot{u}^\nu \right) \\ \Rightarrow (m - A)\dot{u}^\mu &\equiv m_R \dot{u}^\mu = F_{\text{ext}}^\mu + B \left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2} u^\mu \dot{u}_\nu \dot{u}^\nu \right) \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

con $m_R = m - A$ massa rinormalizzata data da termine non-elettromagnetico m e termine elettromagnetico A ¹. Mantenendo costante m_R per $\alpha \rightarrow 0$:

$$m_R \dot{u}^\mu = F_{\text{ext}}^\mu + b \frac{e^2}{c^3} \left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2} u^\mu \dot{u}_\nu \dot{u}^\nu \right) \quad (1.5.11)$$

con b costante adimensionale assunta indipendente dalla forma della particella². Per trovare b , si impone che il lavoro compiuto da F_{rad}^μ sia tale da bilanciare energia irraggiata³:

$$L_{\text{rad}} = b \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} \, dt = -b \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\vec{v}}^2 \, dt \Rightarrow b = \frac{2}{3} \quad (1.5.12)$$

valido sotto l'assunzione di \vec{F}_{ext} nulla a grandi distanze ($\Rightarrow \dot{\vec{v}} = 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$).

¹Significa che una carica massiva possiede due tipi di masse, ma risulta importante solo m_R perché è quello che si misura sperimentalmente sempre, visto che il campo generato dalla carica non si elimina durante il suo moto (cioè A non si può rimuovere).

²Ci potrebbe dipendere perché per $\alpha \rightarrow 0$ si è tenuta la forma costante, ma in tale limite è ragionevole aspettarsi che sia indipendente.

³Qui si usa che la componente spaziale della reazione di radiazione è $b \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}}$ nel limite non-relativistico.

2 INDAGINE DELLA MATERIA CON ONDE ELETTROMAGNETICHE

2.1 Introduzione

2.1.1 Grandezze di interesse

Si investigano strutture atomiche ($\sim 10^{-10}$ m \equiv 1 Å) o subatomiche ($\sim 10^{-15}$ m \equiv 1 fm). Si usano fotoni, che hanno quantità di moto $|\vec{p}| = \hbar k = \hbar \omega / c$, dove $\hbar \simeq 1.0 \cdot 10^{-34}$ J.s. Una grandezza comune è $\hbar c = 197$ MeV · fm.

Si invia onda piana contro oggetto da investigare e si vede come diffonde la radiazione a grandi distanze. Se l'oggetto ha grandezza caratteristica α , si osservano i campi per $R \gg \alpha$.

2.1.2 Teoria sul dipolo elettrico

In zona di radiazione:

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\vec{p}})}{rc^2} \Big|_{t-r/c}$$

Dato un dipolo oscillante $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$, usando $\hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}) = (\hat{n} \cdot \ddot{\vec{p}})\hat{n} - \ddot{\vec{p}}$ (visto che $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$), definendo $\vec{p}_\perp = \vec{p} - (\hat{n} \cdot \vec{p})\hat{n}$, si ha:

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{\vec{p}_{0\perp} \omega^2}{rc^2} e^{-i(\omega t - \omega r/c)} = \frac{k_0^2}{r} \vec{p}_{0\perp} e^{-i(\omega t - k_0 r)} \quad (2.1.1)$$

Poi si ha $\vec{B}_{\text{rad}} = \hat{n} \times \vec{E}_{\text{rad}}$. Il vettore di Poynting è¹:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \Re\{\vec{E}\} \times \Re\{\vec{B}\} = \frac{c}{4\pi} \frac{k_0^4}{r^2} (\vec{p}_{0\perp} \times (\hat{n} \times \vec{p}_{0\perp})) \cos^2(\omega t - k_0 r) \\ &= \frac{c}{4\pi} \frac{k_0^4}{r^2} |\vec{p}_{0\perp}|^2 \hat{n} \cos^2(\omega t - k_0 r) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

L'intensità è $I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \frac{k_0^4}{r^2} |\vec{p}_{0\perp}|^2 = \frac{c}{8\pi} \frac{k_0^4}{r^2} |\vec{p}_{0\perp}|^2$, quindi, integrando su sfera di raggio r :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \langle |\vec{S}| \rangle r^2 d\cos\theta d\varphi = \frac{ck_0^4}{8\pi r^2} r^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} |\vec{p}_{0\perp}|^2 d\cos\theta d\varphi \\ &= \frac{ck_0^4}{8\pi} |\vec{p}_0|^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\cos\theta d\varphi = \frac{c}{3} k_0^4 |\vec{p}_0|^2 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

dove $|\vec{p}_{0\perp}| = |\vec{p}_0| \sin\theta$.

2.1.3 Onda incidente su schermo dielettrico e schermo opaco

Piano $z = 0$ è uno schermo dielettrico; su di esso incide onda em con $\vec{E}_{\text{inc}} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_0 z)} \parallel \hat{y}$. Il dielettrico si polarizza con polarizzazione $\vec{P} = \vec{P}_0 e^{-i\omega t}$. Polarizzazione variabile nel tempo \Rightarrow moto di cariche sulla superficie dello schermo, quindi corrente superficiale $\vec{K}_{\text{sup}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$. Questa genera campo magnetico variabile nel tempo, che genera campo elettrico, quindi il piano emette onda em.

¹ Usando che $\vec{p}_{0\perp} \times (\hat{n} \times \vec{p}_{0\perp}) = p_{0\perp}^2 \hat{n} - (\vec{p}_{0\perp} \cdot \hat{n}) \vec{p}_{0\perp}$.

Per distanze piccole dal piano ($z \ll \lambda$), si trova \vec{B} con legge di Ampère, considerando rettangolo di lato ℓ sulla direzione \hat{x} , per cui $2B_{x0}\ell = \mu_0 K_{\text{sup}}\ell$. Sostituendo K_{sup} :

$$B_{x0} = -\frac{i\omega\mu_0}{2}\mathcal{P}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.1.4)$$

subito vicino lo schermo¹. Allora i campi che si generano in $z > 0$ sono, in generale:

$$\vec{B} = -\frac{i\omega\mu_0}{2}\mathcal{P}_0\hat{x}e^{-i(\omega t - k_0 z)}; \quad \vec{E} = \frac{i\omega\mu_0 c}{2}\mathcal{P}_0\hat{y}e^{-i(\omega t - k_0 z)} \quad (2.1.5)$$

dove si è utilizzata la relazione per onde piane $|\vec{E}| = |\vec{B}|c$. Si usa $\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0$ e $k = \omega/c$, quindi si esprime campo elettrico in CGS:

$$E_y = 2\pi i k \mathcal{P}_0 e^{-i(\omega t - kz)} \Rightarrow B_x = 2\pi i k \mathcal{P}_0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2.1.6)$$

perché in CGS $|\vec{E}| = |\vec{B}|$. In $z < 0$, invece:

$$E_y = 2\pi i k \mathcal{P}_0 e^{-i(\omega t + kz)}; \quad B_x = 2\pi i k \mathcal{P}_0 e^{-i(\omega t + kz)} \quad (2.1.7)$$

Hanno stessa espressione perché direzione di propagazione è opposta. In notazione vettoriale:

$$\vec{E} = 2\pi i k \vec{\mathcal{P}}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)}, \quad \vec{\mathcal{P}}_0 \parallel \hat{y} \quad (2.1.8)$$

Nel semi-spazio $z > 0$ sono presenti, in generale, campo generato dallo schermo e campo incidente, quindi il campo trasmesso è:

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{inc}} + \vec{E}_{\text{gen}} = (\vec{E}_0 + 2\pi i k \vec{\mathcal{P}}_0) e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2.1.9)$$

Per **schermo opaco**, deve valere $\vec{E}_{\text{tot}} = 0$, quindi:

$$\vec{\mathcal{P}}_0 = -\frac{\vec{E}_0}{2\pi i k} \quad (2.1.10)$$

In condizione di schermo opaco, in $z < 0$ vale $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} [e^{ikz} - e^{-ikz}]$.

2.1.4 Principio di Babinet

Piano opaco Σ in $z = 0$ con apertura Σ' . Il campo incidente è $\vec{E}_{\text{in}} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_0 z)}$. In generico punto P per $z > 0$:

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{inc}} + \vec{E}_s = \underbrace{\vec{E}_{\text{inc}} + \vec{E}_s + \vec{E}_a}_{=0} - \vec{E}_a \quad (2.1.11)$$

dove \vec{E}_s è generato dallo schermo e \vec{E}_a dall'apertura², e si sommano a zero perché $\vec{E}_s + \vec{E}_a$ formano schermo opaco pieno. Allora $\vec{E}_{\text{tot}} = -\vec{E}_a \Rightarrow$ campo trasmesso è l'opposto di quello generato dall'apertura.

2.2 Teoria della diffrazione

2.2.1 Diffrazione da un ostacolo

Su piano $z = 0$ è presente ostacolo Σ' ; si cerca \vec{E} nel punto P a distanza \vec{r} dall'origine. Si considera campo generato da $d\Sigma'$ in posizione \vec{r}' rispetto a cui P è in posizione $\vec{r} - \vec{r}'$. Da equazione 2.1.1:

$$d\vec{E} = \frac{k_0^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\mathcal{P}}_{0\perp} e^{-i(\omega t - k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|)}$$

¹ Motivo per cui non si usa il tempo ritardato nell'espressione.

² Cioè sarebbe il campo elettrico generato dalla sola Σ' se l'apertura fosse piena per effetto di \vec{E}_{inc} .

Assumendo $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r}; \quad \hat{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r} \simeq \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \simeq \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'} \simeq r - \hat{n} \cdot \vec{r}'$$

per $\sqrt{a-b} \simeq \sqrt{a} - \frac{b}{2\sqrt{a}}$. Definendo $\vec{E}_{0\perp} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_0) = \vec{E}_0 - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{E}_0)$ e $\vec{k} = \hat{n}k_0 \Rightarrow |\vec{k}| = k_0$:

$$d\vec{E} \simeq \frac{k_0^2}{r} \vec{p}_{0\perp} d\Sigma' e^{-i(\omega t - k_0 r)} e^{-ik_0 \hat{n} \cdot \vec{r}'} = \frac{k_0^2}{r} \left(-\frac{\vec{E}_{0\perp}}{2\pi i k_0} \right) d\Sigma' e^{-i(\omega t - k_0 r)} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \quad (2.2.1)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \int_{\Sigma'} \frac{k_0}{2\pi i r} \vec{E}_{0\perp} e^{-i(\omega t - k_0 r)} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' = \frac{ik_0}{2\pi r} \vec{E}_{0\perp} e^{-i(\omega t - k_0 r)} \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma'$$

2.2.2 Ampiezza di scattering per dipolo elettrico

Per irraggiamento da dipolo elettrico, è definita da:

$$\vec{f}(\vec{k}) = \frac{ik_0 \vec{E}_{0\perp}}{2\pi} \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' \quad (2.2.2)$$

Questa contiene tutta la dipendenza angolare e permette di scrivere:

$$\vec{E} = \frac{e^{-i(\omega t - k_0 r)}}{r} \vec{f}(\vec{k}) \quad (2.2.3)$$

Quest'ultima forma, invece, è valida più in generale.

2.2.3 Fattore di forma 2D

Fattore di forma di una fenditura Σ' in 2D è definito da:

$$F(\vec{k}) = \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' \quad (2.2.4)$$

Per:

$$\mathbb{L}(x', y') = \begin{cases} 1 & , \text{ su } \Sigma' \\ 0 & , \text{ altrove} \end{cases} \Rightarrow F(\vec{k}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbb{L}(x', y') e^{-ik_x x'} e^{-ik_y y'} dx' dy' \quad (2.2.5)$$

La funzione $\mathbb{L}(x', y')$ è forma della fenditura; il suo fattore di forma è la trasformata di Fourier. Questo significa che, ottenuto $F(\vec{k})$, si ricava \mathbb{L} da trasformata inversa.

Trasformata inversa non sempre possibile: fissato k_0 , $-k_0 < k = k_0 \sin \theta < k_0$ e non si può svolgere integrale su tutto \mathbb{R} . Questo si approssima bene quando $k_0 \sin \theta \gg 2\pi/a \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \gg \frac{2\pi}{a} \Rightarrow \lambda \ll a \sin \theta$ con a ampiezza fenditura. Investigazione con "particelle ondulatorie" che hanno impulso $|\vec{p}| = k_0 \hbar$:

$$\hbar k_0 \sin \theta \gg \frac{2\pi \hbar}{a} \Rightarrow c|\vec{p}| \sin \theta \gg \frac{hc}{a}$$

Se $a \sim 1$ fm, servono onde em con energia ~ 1 GeV \Rightarrow raggi γ .

Sperimentalmente, si misura $I = \langle |\vec{S}| \rangle \propto |F(\vec{k})|^2$, quindi non si ottiene fase associata a $F(\vec{k}) \Rightarrow$ è necessario indovinarla.

2.2.4 Fattore di forma 3D

Onda \vec{E}_{inc} su oggetto puntiforme in 3D. La direzione seguita dal campo irraggiato da oggetto nel punto P si esprime in termini di angoli θ, φ in coordinate sferiche. Campo in P è¹:

$$\vec{E}_{punt} = \frac{\vec{f}_{punt}(\vec{k})}{r} e^{-i(\omega t - k_0 r)} \quad (2.2.6)$$

Ora si considera oggetto composto da N punti. Il punto i-esimo ha coordinata \vec{r}'_i , il punto P rispetto all'origine ha coordinata \vec{r} , rispetto al punto i-esimo ha coordinata $\vec{r} - \vec{r}'_i$. Campo incidente è $\vec{E}_{inc} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_0 z)}$; quello che incide sul punto i-esimo è: $\vec{E}_{inc,i} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - k_0 z'_i)}$. Contributo di i in P è²:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{\vec{f}_{punt}(\vec{k}')}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} e^{-i(\omega t - k_0 z'_i - k_0 |\vec{r} - \vec{r}'_i|)} \quad (2.2.7)$$

con $\vec{k}' = k_0 \hat{n}'$ e $\hat{n}' = \frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}$. Si usano le seguenti approssimazioni per $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'_i|$:

$$\hat{n} \simeq \hat{n}' ; \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} \simeq \frac{1}{r} ; \quad |\vec{r} - \vec{r}'_i| \simeq r - \hat{n} \cdot \vec{r}'_i$$

quindi:

$$\vec{E}_i \simeq \frac{\vec{f}_{punt}(\vec{k})}{r} e^{-i(\omega t - k_0 r)} e^{-i(k_0 \hat{n} \cdot \vec{r}'_i - k_0 z'_i)} \quad (2.2.8)$$

Se $\vec{k}_0 = (0, 0, k_0)$, $\vec{r}'_i = (x'_i, y'_i, z'_i) \Rightarrow \exp(-i(k_0 \hat{n} \cdot \vec{r}'_i - k_0 z'_i)) = \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r}'_i - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}'_i))$. Si definisce **impulso trasferito**

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0 \quad (2.2.9)$$

OSSERVAZIONE 2.1. $|\vec{q}|$ ha dimensioni di inverso di una lunghezza, ma $\hbar \vec{q} = \hbar \vec{k} - \hbar \vec{k}_0$ sono impulsi. Inoltre vale:

$$|\vec{q}| = \sqrt{(\vec{k} - \vec{k}_0)^2} = \sqrt{k^2 + k_0^2 - 2k_0^2 \cos \theta} = \sqrt{2k_0^2 - 2k_0^2 \cos \theta} \simeq 2k_0 \sin(\theta/2) \quad (2.2.10)$$

Allora:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \frac{\vec{f}_{punt}(\vec{k})}{r} e^{-i(\omega t - k_0 r)} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'_i} \equiv \vec{E}_{punt} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'_i} \\ \Rightarrow \vec{E}_{tot} &= \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_{punt} \sum_i e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'_i} \equiv \vec{E}_{punt} F(\vec{q}) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

con $F(\vec{q})$ **fattore di forma discreto** tridimensionale.

Per ostacolo continuo con $\rho(\vec{r}') = \frac{dN}{dV'}$:

$$F(\vec{q}) = \int_{V'} \rho(\vec{r}') e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} dV' \quad (2.2.12)$$

¹ Il campo puntiforme è $\vec{E} = \frac{k_0^2}{r} \vec{P}_{0\perp} e^{-i(\omega t - k_0 r)}$, con ampiezza di scattering puntiforme $\vec{f}(\vec{k}) = k_0^2 \vec{P}_{0\perp}$.

² Si deve considerare il tempo impiegato dall'onda ad andare da ciascun punto dell'ostacolo al punto P.

2.3 Sezioni d'urto

2.3.1 Sezione d'urto totale

Potenza assorbita dall'ostacolo è $P_{\text{abs}} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{\text{inc}}|^2 A = |\vec{S}_{\text{inc}}| A$, mentre quella diffusa è¹ $P_{\text{diff}} = |\vec{S}_{\text{inc}}| A$. Ne segue che la potenza totale rimossa dal fascio iniziale è: $P_{\text{tot}} = 2A |\vec{S}_{\text{inc}}|$.

Si definisce, allora, **sezione d'urto totale**:

$$\sigma_{\text{tot}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle P_{\text{tot}} \rangle}{\langle |\vec{S}_{\text{inc}}| \rangle} \quad (2.3.1)$$

Nel caso di ostacolo opaco (per cui vale Babinet): $\sigma_{\text{tot}} = 2A$.

2.3.2 Il teorema ottico

Da sezione precedente, si calcola ampiezza di scattering per $\vec{k} = \vec{k}_0 \Rightarrow \theta = 0^2$:

$$\vec{f}(\vec{k}_0) = \frac{ik_0}{2\pi} \vec{E}_0 \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}'} d\Sigma' = \frac{ik_0 \vec{E}_0}{2\pi} \int_{\Sigma'} d\Sigma' = \frac{ik_0 \vec{E}_0 A}{2\pi} \equiv \vec{f}(\vec{0}) \quad (2.3.2)$$

Da questa si verifica facilmente la validità del teorema ottico in questo caso. Vale il seguente:

TEOREMA 2.1 — TEOREMA OTTICO. Nel caso di onde elettromagnetiche, in cui la funzione d'onda è il campo elettrico:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k_0} \frac{\Im \left\{ \vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(\vec{0}) \right\}}{|\vec{E}_0|^2} \quad (2.3.3)$$

2.3.3 Sezioni d'urto di assorbimento, elastica e inelastica

Onda si propaga lungo z con $\vec{B} \parallel \hat{y}$, $\vec{E} \parallel \hat{x}$, quindi $\vec{S}_{\text{in}} \parallel \hat{z}$. L'onda è assunta monocromatica con ω , piana, linearmente polarizzata e con \vec{S}_{in} noto.

Questa incide su bersaglio ignoto e si misurano radiazioni da esso scatterate ad una distanza \vec{R} tramite rivelatore.

Una parte dell'onda incidente è **assorbita**, un'altra parte è **scatterata elasticamente** (stessa frequenza onda incidente) e la rimanente è **scatterata inelasticamente** (frequenze diverse).

OSSERVAZIONE 2.2. Per onda monocromatica si deve avere lunghezza di coerenza L infinita; verosimilmente, si assume $L \gg \lambda$.

In MKSA, si ha $\vec{E}_{\text{in}} = E_0 \hat{x} \cos(\omega t - kz)$, $\vec{B}_{\text{in}} = (E_0/c) \hat{y} \cos(\omega t - kz)$ e

$$\vec{S}_{\text{in}} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_{\text{in}} \times \vec{B}_{\text{in}}) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \hat{z} = \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kz) \hat{z} \quad (2.3.4)$$

con $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \simeq 377 \, \Omega$ **impedenza del vuoto**.

Si definisce **sezione d'urto di assorbimento**:

¹ Visto che l'ampiezza di scattering in $z > 0$, per Babinet, è quella dell'apertura, allora la potenza diffusa è quella che attraversa l'apertura (schermo con apertura Σ'), quindi si trova il risultato corrispondente.

² Si nota che in questo caso sparisce il trasverso \perp come pedice perché per $\theta = 0$, il campo è completamente trasverso.

$$\sigma_{\text{abs}} = \frac{\langle P_{\text{abs}} \rangle}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle} \quad (2.3.5)$$

Si definisce **sezione d'urto elastica**:

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{\langle P_{\text{el}} \rangle}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle} \quad (2.3.6)$$

Se \vec{S}_{el} attraverso superficie dA individuata da $d\Omega$ con raggio vettore \vec{R} , la potenza trasmessa per diffusione elastica è $dP_{\text{el}} = \langle |\vec{S}_{\text{el}}(\theta, \varphi)| \rangle R^2 d\Omega$; allora si definisce **sezione d'urto differenziale elastica**:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = R^2 \frac{\langle |\vec{S}_{\text{el}}(\theta, \varphi)| \rangle}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle} \quad (2.3.7)$$

Per verifica:

$$\sigma_{\text{el}} = \int_{\Omega} \left(\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} \right) d\Omega = \frac{1}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle} \int_{\Omega} \langle |\vec{S}_{\text{el}}(\theta, \varphi)| \rangle R^2 d\Omega \equiv \frac{1}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle} \langle P_{\text{el}} \rangle$$

Analogamente, si definisce **sezione d'urto inelastica**:

$$\sigma_{\omega_i} = \frac{\langle P_{\omega_i} \rangle}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle}; \quad \frac{d\sigma_{\omega_i}}{d\Omega} = \frac{R^2 \langle |\vec{S}_{\omega_i}(\theta, \varphi)| \rangle}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle} \quad (2.3.8)$$

OSSERVAZIONE 2.3. Un sistema che non presenta non-linearità non irraggia inelasticamente; ad esempio, un circuito RLC irraggia solo elasticamente. Per avere scattering inelastico, si può usare un diodo.

Infine la **sezione d'urto totale** è:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{abs}} + \sigma_{\text{el}} + \sum_i \sigma_{\omega_i} \quad (2.3.9)$$

Per processo di diffusione d , onda emessa è¹:

$$\vec{E}_d = \frac{\vec{f}(\theta, \varphi)}{R} e^{-i(\omega_d t + k_d R + \phi_d)} \quad (2.3.10)$$

da cui:

$$\frac{d\sigma_{\omega_d}}{d\Omega} = \frac{\langle |\vec{f}(\theta, \varphi)|^2 \rangle}{\langle |\vec{E}_{\text{in}}| \rangle} \quad (2.3.11)$$

2.4 Scattering e risonanza

2.4.1 Modello dell'elettrone legato elasticamente

Elettrone con carica q legato elasticamente a origine O vincolato nel piano (x, y) . Onda em ci incide sopra e si studia il suo irraggiamento nel punto P in posizione \vec{R} da O . \vec{R} forma angolo θ con \hat{y} (angolo di scattering) e angolo α con \hat{x} .

¹ Si aggiunge fase generica ϕ_d perché non è detto che l'irraggiamento avvenga in fase con onda incidente.

L'onda incidente si propaga lungo \hat{z} , con $\vec{E}_{\text{inc}} = E_0 e^{-i\omega t} \hat{z}$ ¹. Forze agenti su elettrone:

- $\vec{F}_C = q\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ forza di Coulomb²;
- $\vec{F}_{\text{el}} = -m\omega_0^2 \vec{x}$, con $\omega_0 = \sqrt{k_{\text{el}}/m} \sim 10^{14}$ Hz;
- $\vec{F}_{\text{visc}} = -m\Gamma' \dot{\vec{x}}$, con $\Gamma' \sim 10^9 - 10^{11}$ Hz, forza viscosa \rightarrow somma forze dissipative tranne reazione di radiazione;
- $\vec{F}_{\text{rad}} = m\tau \ddot{\vec{x}}$ reazione di radiazione, con $\tau = 2r_e/(3c) \simeq 6 \cdot 10^{-24}$ s.

Allora:

$$\frac{q\vec{E}_0}{m} e^{-i\omega t} = -\tau \ddot{\vec{x}} + \vec{x} + \Gamma' \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} \quad (2.4.1)$$

Cercando soluzione $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$:

$$\vec{x}_0 = \frac{e\vec{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \underbrace{\left[\Gamma' + \tau \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]}_{\Gamma_{\text{tot}}}} = \frac{q\vec{E}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \Gamma_{\text{tot}}(\omega)} \quad (2.4.2)$$

dove $\Gamma_{\text{tot}}(\omega) = \Gamma' + \tau \omega_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \equiv \Gamma' + \Gamma \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Γ e Γ' sono definite **larghezze parziali** mentre Γ_{tot} **larghezza totale**; le prime sono legate alla dissipazione di energia per diffusione elastica, mentre la seconda alla dissipazione di energia per assorbimento. Il valore $\Gamma + \Gamma'$ definisce la larghezza della campana di σ_{el} attorno alla risonanza.

OSSERVAZIONE 2.4. Da questa, si possono ricavare $\vec{P} = nq\vec{x} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$ e $\epsilon_r = 1 + \chi$ vettore di polarizzazione e permittività elettrica relativa.

2.4.2 Sezione d'urto elastica

Quindi, è nota:

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{q\vec{E}}{m} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega \Gamma_{\text{tot}}}$$

In MKS, si ricava $\langle P \rangle = \frac{\langle |\vec{p}|^2 \rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3}$, perciò:

$$\begin{aligned} \langle P_{\text{el}} \rangle &= \frac{q^2 \langle |\vec{a}|^2 \rangle}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \langle |\vec{E}|^2 \rangle \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2} \\ \sigma_{\text{el}} &= \frac{\langle P_{\text{el}} \rangle}{\epsilon_0 c \langle |\vec{E}|^2 \rangle} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2} \\ &= \frac{8}{3} \pi \underbrace{\frac{q^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 m^2}}_{=r_e^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Quindi si ottiene la **formula di Breit-Wigner**

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2} \quad (2.4.4)$$

dove si definisce **sezione d'urto Thomson**:

¹Non c'è termine k_z perché l'onda incide il piano $z = 0$ su cui è vincolato l'elettrone.

²Si trascura contributo della forza magnetica.

$$\sigma_{th} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \simeq 0.66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \equiv 0.66 \text{ barn} \quad (2.4.5)$$

OSSERVAZIONE 2.5 — TERMINE DI RADIAZIONE. Tutti i termini a parte reazione di radiazione sono validi per qualunque sistema che presenti tali caratteristiche. Quello di radiazione è approssimato a dipolo elettrico, quindi non sarà valido per irraggiamento d'altro tipo.

Inoltre, visto che questo rientra direttamente in Γ_{tot} , si ottengono informazioni riguardo la natura dell'oggetto scatterante a partire dalla larghezza di σ_{el} .

2.4.3 Limiti di σ_{el}

- Per $\omega \ll \omega_0$:

$$\sigma_{el} = \sigma_{th} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2} \simeq \sigma_{th} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \quad (2.4.6)$$

- Per $\omega \sim \omega_0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \sigma_{th} \frac{\omega^4}{(\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + \omega^2 \left(\Gamma' + \Gamma \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \\ &\simeq \sigma_{th} \frac{\omega_0^4}{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_0^2(\Gamma + \Gamma')^2} = \sigma_{th} \frac{\omega_0^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma + \Gamma'}{2} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Funzione **lorentziana** (curva a campana). La larghezza FWHM¹ è $\Delta\omega = \pm \frac{\Gamma + \Gamma'}{2}$. Si nota che:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \tau\omega_0^2 \approx 6.2 \cdot 10^{-24} \text{ s} \cdot (10^{15})^2 \text{ s}^{-2} = 6.2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \\ \Gamma' &\approx 10^{10} \text{ s}^{-1} \end{aligned} \Rightarrow \Gamma' \gg \Gamma \quad (2.4.8)$$

- Per $\omega \gg \omega_0$ ²:

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \sigma_{th} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2} \\ &\simeq \sigma_{th} \frac{\omega^4}{\omega^4 + \omega^2 \Gamma'^2 + \omega^6 \tau^2 + 2\tau \Gamma' \omega^4} = \sigma_{th} \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Per $\omega \sim 1/\tau$ c'è una zona non esplorabile: $\tau \approx 6 \cdot 10^{-24} \text{ s} \Rightarrow 1/\tau \approx 1.7 \cdot 10^{23} \text{ Hz}$. Energia necessaria per fotoni è $\hbar\omega \approx 10^{-34} \cdot 1.2 \cdot 10^{23} \text{ J s} \approx 100 \text{ MeV}$.

2.4.4 Sezione d'urto totale e d'assorbimento

Forza esercitata da onda incidente su elettrone è $\vec{F} = -e\vec{E}$; allora, per $\vec{v} = \dot{\vec{x}} = -i\omega\vec{x}_0 e^{-i\omega t}$:

$$\begin{aligned} \langle P_{tot} \rangle &= q \left\langle \left(\frac{\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}}^*}{2} \right) \left(\frac{\vec{E} + \vec{E}^*}{2} \right) \right\rangle = \frac{q}{2} \Re \{ \dot{\vec{x}} \cdot \vec{E}^* \} \\ &= \frac{q^2 |\vec{E}_0|^2 \omega}{2m} \Re \left\{ \frac{-i[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\Gamma_{tot}]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2} \right\} = \frac{q^2 \omega^2 |\vec{E}_0|^2 \Gamma_{tot}}{2m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2]} \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$\equiv D$

¹Si trova ponendo $\sigma_{max}/2 = \sigma_{th} \frac{\omega_0^4/4}{\Delta\omega^2 + (\Gamma + \Gamma')^2/4}$, con $\sigma_{max} = \sigma_{el}(\omega \sim \omega_0)|_{\omega=\omega_0}$, e risolvendo per $\Delta\omega = |\omega - \omega_0|$.

²Il termine $2\tau\Gamma'\omega^4$ si trascura perché $\tau\Gamma' \approx 10^{-24} \cdot 10^{11} \ll 1$. Il termine $\omega^2\Gamma'^2$ si approssima perché $\sim \omega^2$.

Quindi:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\langle P_{\text{tot}} \rangle}{\langle |\vec{S}_{\text{in}}| \rangle} = \frac{q^2 \omega^2 |\vec{E}_0|^2 \Gamma_{\text{tot}}}{2mD} \frac{1}{\frac{\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}_0|^2} = \frac{4\pi c}{4\pi c D} \frac{1}{\epsilon_0 m c} q^2 \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2 = \frac{4\pi c r_e \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}}{D} \quad (2.4.11)$$

Si ricava $\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{el}}$. Per $\omega = \omega_0$ si trova:

$$\sigma_{\text{el}}(\omega = \omega_0) = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma'} \right)^2 ; \quad \sigma_{\text{abs}}(\omega = \omega_0) = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma \Gamma'}{(\Gamma + \Gamma')^2} ; \quad \sigma_{\text{abs}}(\omega = \omega_0) = \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma'}$$

Si definiscono:

$$\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma'} \equiv B_{\text{el}} ; \quad \frac{\sigma_{\text{abs}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \frac{\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'} \equiv B_{\text{abs}} \quad (2.4.12)$$

Queste sono **branching functions elastica e di assorbimento**; indicano probabilità di decadimento elastico o non-elastico dello stato risonante per $\omega \sim \omega_0$. Valori numerici: $B_{\text{el}} \approx 10^{-4}$, $B_{\text{abs}} \approx 1 - 10^{-4} = 0.9999$.

2.4.5 Tempo di vita dello stato risonante

Da eq. 2.4.1, si toglie forzante (onda em) e si risolve

$$\begin{cases} -\tau \ddot{\vec{x}} + \ddot{\vec{x}} + \Gamma' \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = 0 \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (2.4.13)$$

con le assunzioni $\Gamma' \ll \omega_0 \ll 1/\tau \Rightarrow \Gamma = \tau \omega_0^2 \ll \omega_0$. Si cercano soluzioni smorzate del tipo $\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i(\omega_0 t - i\gamma t/2)}$:

$$-\tau(-i)^3 \left(\omega_0 - i\frac{\gamma}{2} \right)^3 \vec{x} + (-i)^2 \left(\omega_0 - i\frac{\gamma}{2} \right)^2 \vec{x} - i\Gamma' \left(\omega_0 - i\frac{\gamma}{2} \right) \vec{x} + \omega_0^2 \vec{x} = 0$$

Si cerca soluzione per $\gamma \ll \omega_0$, quindi si rimuovono tutti i termini che contengono il prodotto di γ, Γ, Γ' (essendo tutti $\ll \omega_0$); si rimane con $\gamma = \Gamma + \Gamma'$, da cui:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-(\Gamma + \Gamma')t/2} \quad (2.4.14)$$

Spostamento da equilibrio è smorzato con tempo caratteristico $2/(\Gamma + \Gamma')$, mentre energia totale $E = \frac{1}{2} k \vec{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$ smorzata con tempo $1/(\Gamma + \Gamma')$.

OSSERVAZIONE 2.6. Si determina larghezza di σ_{el} dal tempo di decadimento dell'energia e viceversa.

2.4.6 Caso della radiazione non polarizzata

Onda che si propaga lungo $\hat{k} = (0, 0, 1)$; per θ angolo di scattering tra \hat{k}, \hat{k}' e ϕ angolo azimutale: $\hat{k}' = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Visto che il vettore di polarizzazione dell'onda deve sempre essere ortogonale alla direzione di propagazione, si parametrizza come: $\hat{x}_0 = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$, quindi:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &\equiv \hat{x}_0 \cdot \hat{k}' = \sin \theta \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi = \sin \theta \cos(\psi - \phi) \\ \Rightarrow \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\psi - \phi) \end{aligned}$$

Essendo $\langle \vec{S}_{in} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 \hat{k}$, usando espressione di \vec{E} in campo di radiazione:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{out} &= \frac{-e}{c^2 r} \hat{k}' \times (\hat{k}' \times \vec{a}) = \frac{e\omega^2}{c^2 r} \hat{k}' \times (\hat{k}' \times \vec{x}_0) e^{-i\omega t_r} \\ \Rightarrow \langle \vec{S}_{out} \rangle &= \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_{out}|^2 \hat{k}' = \frac{c}{8\pi} \frac{e^2 \omega^4}{c^4 r^2} |\vec{x}_0|^2 \langle \sin^2 \alpha \rangle_\psi \hat{k}'\end{aligned}$$

dove $\langle \sin^2 \alpha \rangle_\psi$ indica media su ψ perché onda ha polarizzazione generica. Da questi si ha:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{r^2 \langle |\vec{S}_{out}| \rangle}{\langle |\vec{S}_{in}| \rangle} = \frac{e^2 \omega^4}{c^4} \frac{|\vec{x}_0|}{|\vec{E}_0|^2} \langle \sin^2 \alpha \rangle_\psi = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2} \langle \sin^2 \alpha \rangle_\psi, \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2}$$

Visto che

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle_\psi \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha \, d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\psi - \phi)] \, d\psi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}$$

si ha:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \quad (2.4.15)$$

Dove la sezione d'urto elastica è indipendente dalla polarizzazione perché si ritrova ancora:

$$\int_{-1}^{+1} d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1 + \cos^2 \phi}{2} = \frac{8}{3} \pi$$

2.4.7 Scattering Rayleigh

Onda incidente su intero atomo \rightarrow interferenza onde prodotte da centri diffusori precedenti con successivi. Si considera dapprima caso di 2 centri diffusori, con scattering elastico $\Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}'| \equiv k$; per P_1, P_2 centri diffusori, la differenza di cammino ottico è:

$$\Delta \ell = \vec{r} \cdot \frac{\vec{k}'}{k} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{k}' - \vec{k})}{k} \equiv \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}}{k}$$

con \vec{r} che unisce P_1 con P_2 . A grandi distanze, lo sfasamento tra P_1 e P_2 è $\Delta \ell k$. Per Z centri diffusori uguali¹, lo sfasamento relativo è $\phi_i - \phi_j = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{q}$, quindi in zona di radiazione vale, a meno di una fase globale, *:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 e^{-i\phi_1} + \vec{E}_2 e^{-i\phi_2} + \dots \stackrel{*}{=} \vec{E}_1 \sum_i e^{-i\vec{r}_i \cdot \vec{q}} \equiv \vec{E}_1 F(\vec{q})$$

con $F(\vec{q})$ fattore di forma discreto. La fase globale è $e^{-i\phi_1}$ che viene moltiplicata per la differenza di fase rispetto agli altri centri diffusori $\sum_{i=1}^N e^{-i\vec{r}_i \cdot \vec{q}}$; questo prodotto restituisce la somma $\sum_{i=1}^N e^{-i\phi_i}$, portando alla seconda uguaglianza, dove si è compiuta l'approssimazione di trascurare tale fase globale. Il vettore \vec{r}_i rappresenta il raggio vettore che va dal centro diffusore 1 al centro diffusore i -esimo.

Per passaggio al continuo si usa la definizione:

$$F(\vec{q}) = \frac{\int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 r}{\int \rho(\vec{r}) d^3 r} \stackrel{\square}{=} \frac{1}{Q} \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 r$$

con Q carica totale, \square a indicare che vale in caso di particelle cariche e $\rho(\vec{r})$ distribuzione di carica. Allora campo diffuso dal sistema è quello diffuso da carica Q puntiforme. Usando eq. 2.2.11:

¹ Cioè che si comportano allo stesso modo.

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \Big|_e |ZF(\vec{q})|^2 \quad (2.4.16)$$

dove $|_e$ indica che è relativa alla singola carica. Si risale a fattore di forma e distribuzione di carica tramite misura di sezione d'urto.

OSSERVAZIONE 2.7. Si ha $F(0) = 1$. La motivazione è che quando $q \rightarrow 0$ (o meglio $qa \ll 1$, con a grandezza caratteristica del sistema), l'onda em non ha energia sufficiente per risolvere il sistema da indagare e lo vede come puntiforme.

Nel caso specifico di $\rho(\vec{r}) = \begin{cases} Q/(\frac{4}{3}\pi a^3) & , |\vec{r}| \leq a \\ 0 & , |\vec{r}| > a \end{cases}$, in coordinate polari r, θ', ϕ' :

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \frac{1}{Q} \int \rho(r) r^2 e^{-i\vec{r} \cdot \vec{q}} \sin \theta' d\theta' d\phi' dr = \frac{2\pi}{Q} \int \rho(r) r^2 e^{-irq \cos \theta'} d \cos \theta' dr \\ &= \frac{4\pi}{Q} \int \rho(r) r^2 \frac{\sin(rq)}{rq} dr = \frac{3}{a^3 q} \int_0^a r \sin(rq) dr = \frac{3}{a^3 q} \left[-\frac{r}{q} \cos(rq) + \frac{1}{q^2} \sin(rq) \right]_0^a \\ &= 3 \left(\frac{\sin(aq)}{(aq)^3} - \frac{\cos(aq)}{(aq)^2} \right) \end{aligned}$$

Assumendo $aq \ll 1$, per cui $\sin x \simeq x - x^3/6$ e $\cos x \simeq 1 - x^2/2$:

$$F(q) \simeq 1 - \frac{(aq)^2}{10}$$

Si studia caso opposto, per $aq \gg 1$, per cui $F(q) \rightarrow 0$; ricordando che per scattering elastico

$$|\vec{q}|^2 = (\vec{k}' - \vec{k})^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow q = 2k \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

e, quindi, sotto l'assunzione di fotoni energetici ($ka \gg 1$), volendo esprimere F in termini di θ , si può approssimare come:

$$F(\theta) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } 0 \leq \theta \leq 1/(ak) \\ 0 & , \text{ se } 1/(ak) \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (2.4.17)$$

visto che tende a decrescere velocemente. Da questo:

$$\begin{aligned} \sigma_{el}(ak \gg 1) &= \int \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \Big|_e |ZF(\theta)|^2 d\phi \sin \theta \\ &= 2\pi Z^2 r_e^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} |F(\theta)|^2 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \pi Z^2 r_e^2 \int_0^{1/ak} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\pi Z^2 r_e^2}{(ak)^2} \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

2.4.8 Sezione d'urto fotoelettrica

Legata all'effetto fotoelettrico e si indica con σ_{pe} . L'effetto si basa sul fatto che un atomo emette elettroni quando incide onda em con fotoni a energia sufficiente. In particolare, quando fotone incidente ha energia esatta per liberare un elettrone di un certo orbitale, σ_{pe} ha dei picchi, dove gli ultimi picchi sono relativi a orbitali più interni.

Si hanno picchi perché il fotone riesce a trasferire tutta la sua energia all'elettrone per liberarlo, ma sono più bassi degli altri perché:

- fotone potrebbe essere schermato da elettroni in orbitali più esterni;
- gli elettroni più interni sono più vicini al nucleo e localizzati \Rightarrow più difficili da colpire;
- gli orbitali più interni sono meno popolati.

2.4.9 Sezione d'urto Compton

Fotone incidente su elettrone libero e in quiete che viene diffuso con cambio di frequenza: $\gamma + e^- \rightarrow \gamma' + e^-$. In unità naturali ($\hbar = 1$, $c = 1$), $P_\gamma = \omega(1, \hat{n})$. Conservazione quadrimpulso $\Rightarrow P_\gamma - P'_\gamma = P'_e - P_e$, con γ riemesso con frequenza $\omega' < \omega$ per conservazione dell'energia. Essendo $P_e = (m, 0)$ e θ angolo di scattering, quadrato dell'equazione precedente è:

$$-2\omega\omega'(1 - \cos \theta) = 2m^2 - 2mE' = 2m^2 - 2m(\omega + m - \omega') = -2m(\omega - \omega') \quad (2.4.19)$$

In unità fisiche:

$$\omega - \omega' = \frac{\hbar\omega\omega'}{mc^2}(1 - \cos \theta) \quad (2.4.20)$$

La relazione dell'effetto Compton si scrive in termini di $\lambda = 2\pi c/\omega$:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (2.4.21)$$

con $\lambda_c = \hbar/mc \approx 2.4 \cdot 10^{-12}$ m è la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone.

OSSERVAZIONE 2.8. Tra sezione d'urto Rayleigh e Compton c'è un fattore Z di differenza: $\sigma_R \sim Z^2$ e $\sigma_c \sim Z$.

2.4.10 Sezioni d'urto di produzione di coppie

Per produzione di coppie su nuclei κ_{nuc} , si considera processo $\gamma + Z \rightarrow Z + e^+ + e^-$, con Z nucleo generico. Per nucleo a riposo: $P_\gamma = (E_\gamma, E_\gamma, 0, 0)$ e $P_{\text{nuc}} = (M, 0, 0, 0)$; usando l'invariante¹

$$\begin{aligned} s &= (P_\gamma + P_{\text{nuc}})^2 = (E_\gamma + M)^2 - E_\gamma^2 = (P'_Z + P'_{e^-} + P'_{e^+})^2 = (E'_Z + E'_{e^-} + E'_{e^+})^2 \stackrel{!}{\geq} (M + 2m_e)^2 \\ \Rightarrow E_\gamma^2 + M^2 + 2ME_\gamma - E_\gamma^2 &\geq M^2 + 4m_e^2 + 4Mm_e \Rightarrow E_\gamma \geq 2m_e + \frac{2m_e^2}{M} \approx 1.02 \text{ MeV} \end{aligned}$$

dove $2m_e \approx (0.5 \text{ MeV})^2$, $M \sim \text{GeV}$, quindi è trascurabile.

OSSERVAZIONE 2.9. Il nucleo non rimane immobile, ma la quantità di moto che acquisisce è minima perché $\text{GeV} \leq M \gg E_\gamma \approx 10 \text{ MeV} \Rightarrow K_Z = \frac{P_Z^2}{2M} \leq \frac{E_\gamma^2}{2M} \ll 1$.

Analogamente per κ_e si ha $\gamma + e^- = e^- + e^+ + e^-$; usando invariante s come sopra, si arriva a:

$$E_\gamma \geq 4m_e \approx 2.04 \text{ MeV}$$

2.4.11 Esempio di sezioni d'urto per carbonio e piombo

¹ Dove i 4-vettori energia-impulso finali sono relativi al CM, quindi $\sum \vec{p} = 0$.

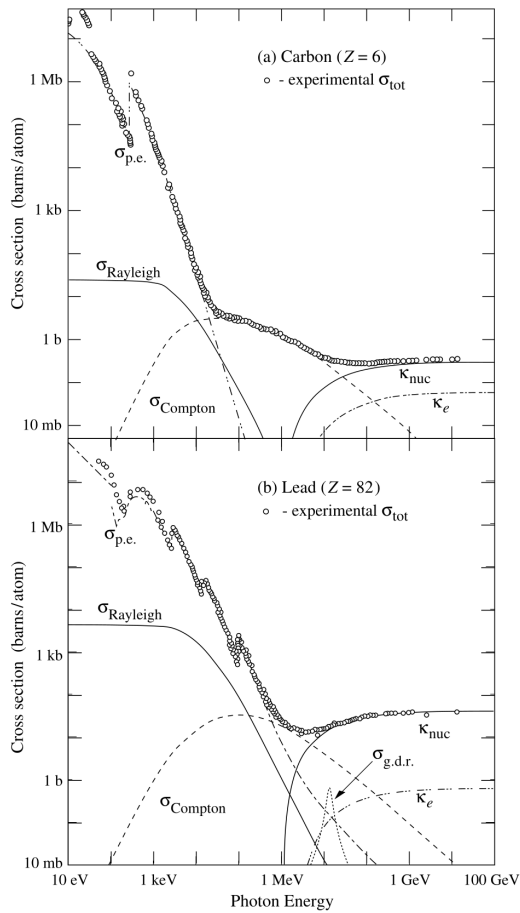


Figura 6.1: Sezione d'urto totale di un fotone incidente su un atomo di carbonio (alto) e piombo (basso) per diversi valori dell'energia del fotone.

Sono in particolare mostrati i contributi specifici dei vari processi:

$\sigma_{p.e.}$ effetto fotoelettrico,
 $\sigma_{Rayleigh}$ scattering Rayleigh sull'atomo,
 $\sigma_{Compton}$ scattering Compton su elettrone,
 κ_{nuc} produzione di coppie su nucleo,
 κ_e produzione di coppie su elettrone,
 $\sigma_{g.d.r.}$ interazioni fotonucleari ed in particolare Giant Dipole Resonance.

Da [22] §33 "Passage of particles through matter".

3 INDAGINE DELLA MATERIA CON PARTICELLE

3.1 Introduzione

3.1.1 Categorie di urti

Si classificano:

- urto elastico: $a + b \rightarrow a + b \rightarrow$ non modifica natura delle particelle;
- urto inelastico (o anelastico): $a + b = \sum_{i=1}^N p_i \rightarrow$ cambia natura e/o numero delle particelle.

Si definisce **Q-valore**

$$Q = \sum m_{in} c^2 - \sum m_{fin} c^2 \quad (3.1.1)$$

Gli urti possono essere:

- esotermici: $Q > 0 \Rightarrow$ viene liberata energia;
- endotermici: $Q < 0 \Rightarrow$ è richiesta energia per il processo;
- inclusivi: si misurano solo alcune caratteristiche delle particelle coinvolte nell'urto (per motivi di interesse o impossibilità sperimentali);
- esclusivi: si misurano tutti i valori che caratterizzano l'urto.

3.1.2 Notazione chimica

La notazione per le **specie atomiche** è ${}_Z^A X_N$ dove:

- Z è il **numero di protoni**;
- N è il **numero di neutroni**;
- $A = Z + N$ è il **numero di nucleoni**;
- X elemento chimico che dipende solo da Z .

Ad esempio:

- ${}_1^1 H_0$ atomo di idrogeno $\rightarrow {}_1^1 H_0^+ \equiv p$ protone;
- ${}_1^2 H_1$ atomo di deuterio $\rightarrow {}_1^2 H_2^+ \equiv d$ **deutone**;
- ${}_2^4 He_2$ atomo di elio $\rightarrow {}_2^4 He_2^{++} \equiv \alpha$ **particella alfa**.

3.1.3 Neutrone libero

Alla massa del neutrone si può togliere quella del protone e dell'elettrone, da cui avanzano 0.78 MeV $\Rightarrow Q > 0$ e quindi di base il neutrone dovrebbe decadere secondo $n \rightarrow p + e^-$.

Questo non è possibile perché non si conserva il **numero leptonico**, quindi serve particella neutrina con massa < 0.78 MeV. Si trova essere l'anti-neutrino elettronico $\bar{\nu}_e$, per cui un neutrone libero:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.1.2)$$

3.1.4 Urti elettrone-protone

Un urto elastico $e^- + p \rightarrow e^- + p$ permette misura del fattore di forma del protone $F(\vec{q})$. Si può avere un urto inelastico con produzione di fotone: $e^- + p \rightarrow e^- + p + \gamma$ se e^- non urta p , ma viene deflesso dal suo campo, quindi soggetto ad accelerazione e irraggia γ .

Un altro è: $e^- + p \rightarrow e^- + p + \pi_0$, con π_0 **pione neutro**. In questo urto, si misura sezione d'urto, da cui si ricava Γ_{π_0} e suo tempo di vita medio a partire da $1/\Gamma_{\pi_0}$. Il π_0 decade in due fotoni: $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

3.1.5 Classificazione delle particelle

Sono raggruppate a seconda di come interagiscono. Le interazioni fondamentali sono **gravitazione**, **elettromagnetismo**, **forza debole** e **forza forte**. Elettromagnetismo e forza debole sono collegate e unificate con **forza elettrodebole**. I tre gruppi di particelle sono:

Classificazione	Simbolo	Nome	Carica (e)	Massa	Spin
Leptoni	e^-	Elettrone	-1	0.511 MeV/c ²	1/2
	e^+	Positrone	+1	0.511 MeV/c ²	1/2
	μ^-	Muone	-1	105.7 MeV/c ²	1/2
	τ^-	Tauone	-1	1776.86 MeV/c ²	1/2
	ν_e	Neutrino elettronico	0	< 2 eV/c ²	1/2
	ν_μ	Neutrino muonico	0	< 2 eV/c ²	1/2
	ν_τ	Neutrino tauonico	0	< 2 eV/c ²	1/2
Bosoni	γ	Fotone	0	0	1
	W^+, W^-	Bosone W	± 1	80.379 GeV/c ²	1
	Z^0	Bosone Z	0	91.1876 GeV/c ²	1
	g	Gluone	0	0	1
	H	Bosone di Higgs	0	125.1 GeV/c ²	0
Adroni (Barioni)	p	Protone	+1	938.27 MeV/c ²	1/2
	\bar{p}	Anti-protone	-1	938.27 MeV/c ²	1/2
	n	Neutrone	0	939.57 MeV/c ²	1/2
	Λ	Lambda	0	1115.68 MeV/c ²	1/2
	Σ^+	Sigma positivo	+1	1189.37 MeV/c ²	1/2
	Σ^0	Sigma neutro	0	1192.64 MeV/c ²	1/2
	Σ^-	Sigma negativo	-1	1197.45 MeV/c ²	1/2
	Δ^{++}	Delta doppio positivo	+2	1232 MeV/c ²	3/2
Adroni (Mesoni)	π^+, π^-	Pioni	± 1	139.57 MeV/c ²	0
	π^0	Pione neutro	0	135 MeV/c ²	0
	K^+, K^-	Kaoni	± 1	493.68 MeV/c ²	0

3.1.6 Grandezze conservate negli urti

A parte le **energia**, **quantità di moto**, **momento angolare**, **carica elettrica**, si conservano delle grandezze additive:

- **Numero barionico**: ad ogni particella barionica si assegna un numero barionico +1, mentre per le rispettive antiparticelle il numero barionico è -1.
- **Numero leptonico**: è sempre conservato il numero leptonico totale¹, dato da numeri leptonici per ciascuna famiglia di leptoni:
 - numero leptonico elettronico: vale +1 per e^- e ν_e , -1 per le anti-particelle;

¹ Per il fenomeno di **oscillazione dei neutrini**, si conserva solo il numero leptonico totale.

- numero leptonico muonico: vale +1 per μ^- e ν_μ , -1 per le rispettive anti-particelle;
- numero leptonico tauonico: vale +1 per τ^- e ν_τ , -1 per le rispettive anti-particelle,

3.2 Sezioni d'urto per processi corpuscolari

Corpi incidenti saranno punti materiali, mentre i bersagli sono generici. Si definisce una regione che circonda i bersagli come **regione di interazione**: al di fuori di questa le particelle vanno di moto rettilineo uniforme. Al di fuori di tale regione, si individua un piano π ortogonale alla velocità dei proiettili.

3.2.1 Parametro di impatto e sezione d'urto per singolo proiettile

Si distingue per bersaglio puntiforme e non. Nel primo caso, si ha A incidente su B e il parametro di impatto b è la distanza che separa la direzione parallela a \vec{v}_A e la retta parallela a \vec{v}_A e passante per B.

Quando B ha dimensioni, proietta il bersaglio su π e si individua la congiungente tra la direzione su cui giace \vec{v}_A e la retta che passa per il CM di B e rimane parallela a \vec{v}_A . La congiungente si individua, allora, dandone la lunghezza b e l'angolo rispetto alla verticale ϕ .

Se b, ϕ parametri per cui si realizza lo stato finale f , si definisce

$$d^2\sigma_f = b db d\phi \Rightarrow \sigma_f = \int_f b db d\phi \quad (3.2.1)$$

che è l'elemento di superficie su π individuato variando b, ϕ tali che si realizza ancora f .

3.2.2 Sezione d'urto per densità di particelle su singolo bersaglio

Per densità di particelle n_A uniforme in un certo volume ΔV , con velocità \vec{v}_A . Si definisce **densità di particelle** $\vec{j}_A = n_A \vec{v}_A$.

Per un certo numero di urti, si verifica stato finale f per $\frac{dN_f}{dt}$ volte per unità di tempo; si definisce, allora:

$$\sigma_f = \frac{\frac{dN_f}{dt}}{|\vec{j}_A|} \quad (3.2.2)$$

3.2.3 Sezione d'urto per flussi di particelle che si scontrano

Ci si mette in S.R. in densità \vec{j}_B in quiete, per cui si considera velocità relativa $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$. Se in un volume ΔV , n_A, n_B sono uniformi e si verifica $\frac{dN_f}{dt}$ volte per unità di tempo lo stato f , si deve avere:

$$\frac{dN_f}{dt} = |\vec{j}_A| \sigma_f \cdot n_B \Delta V = n_A |\vec{v}_{rel}| \sigma_f \cdot n_B \Delta V \Rightarrow \frac{dn_f}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \frac{N_f}{\Delta V} = n_A n_B |\vec{v}_{rel}| \sigma_f \quad (3.2.3)$$

quindi:

$$\sigma_f(v_{rel}) = \frac{1}{n_A n_B v_{rel}} \frac{dn_f}{dt} \quad (3.2.4)$$

OSSERVAZIONE 3.1 — DISTRIBUZIONE DI VELOCITÀ. Se la velocità \vec{v}_{rel} non è distribuita uniformemente ma secondo $f(v_{rel})$ (tipicamente distribuzione di Boltzmann), con $\int_0^{+\infty} f(v_{rel}) dv_{rel} = 1$, si ha:

$$\frac{dn_f}{dt} = n_A n_B \int_0^{+\infty} v_{rel} \sigma_f(v_{rel}) f(v_{rel}) dv_{rel} \quad (3.2.5)$$

3.2.4 Sezione d'urto per flusso di particelle su lamina bersaglio

Si considera densità di particelle n_A incidente su una lamina di spessore Δx e sezione ΔS che contiene bersagli puntiformi con densità n_B .

Fascio di proiettili con $\vec{j}_A = n_A \vec{v}_A$ (con flusso $\Phi_A = |\vec{j}_A| \Delta S$) realizza stato f un numero di volte per unità di tempo dato da eq. 3.2.3:

$$\frac{dN_f}{dt} = n_B \Delta V j_{A\alpha} \sigma_f = n_B \Delta S \Delta x j_{A\alpha} \sigma_f = \Phi_A n_s \sigma_f = \Phi_A P_f \quad (3.2.6)$$

con $n_s = n_B \Delta x$ densità superficiale di bersagli e $P_f = n_s \sigma_f$ probabilità di riprodurre f per singolo proiettile.

Per certi valori, si ottiene $P_f > 1$, non contando che la probabilità complessiva di interazione è $P_{tot} = \sum_f P_f = \sum_f n_s \sigma_f = n_s \sigma_{tot}$.

Allora eq. 3.2.6 è valida solo nel limite di "lamina sottile"¹ per cui $P_{tot} = n_B \Delta x \sigma_{tot} \ll 1$, ossia $\Delta x \ll \ell = 1/(n_B \sigma_{tot})$. Questa è detta **lunghezza di estinzione** del fascio di proiettili.

Nel caso di lamina non-sottile, per tenere in considerazione la variazione di $\Phi_A(x)$, la si divide in spessori di lunghezza dx e per ciascuno di questi la probabilità di interazione è $dP_{int} = \frac{dx}{\ell}$. Se $P(x)$ probabilità di non-interazione dopo aver attraversato spessore x (con $P(0) = 1$), si ha:

$$P(x + dx) = P(x)(1 - dP_{int}) = P(x) \left(1 - \frac{dx}{\ell}\right) \Rightarrow \frac{dP}{dx} = -\frac{P}{\ell} \quad (3.2.7)$$

quindi $P(x) = e^{-x/\ell}$. Da questa, numero medio di proiettili che, per unità di tempo, escono da Δx senza aver interagito è:

$$\frac{dN_0}{dt} = \Phi_A(0) e^{-\Delta x/\ell} \quad (3.2.8)$$

Numero di eventi per unità di tempo nello stato f in Δx è:

$$\frac{dN_f}{dt} = \Phi_A(0) \frac{\sigma_f}{\sigma_{tot}} (1 - e^{-\Delta x/\ell}) \quad (3.2.9)$$

Si distinguono $\sigma_{el,in}$ da $\sigma_{el,out}$ perché potrebbero esserci urti elastici che, rispettivamente, non modificano o modificano la traiettoria delle particelle, facendole uscire dal flusso; in questo senso:

$$\sigma_{tot} \equiv \sigma_{ext} = \sigma_{el,out} + \sum_{inelastici} \sigma_f \quad (3.2.10)$$

con σ_{ext} **sezione d'urto d'estinzione** (si rinomina quella totale).

OSSERVAZIONE 3.2 — CONCENTRAZIONE SOSTANZA MONOMOLECOLARE. Per sostanza monomolecolare di massa M , in volume V , di densità di massa ρ , densità di molecole n , con molecole di peso atomico A vale:

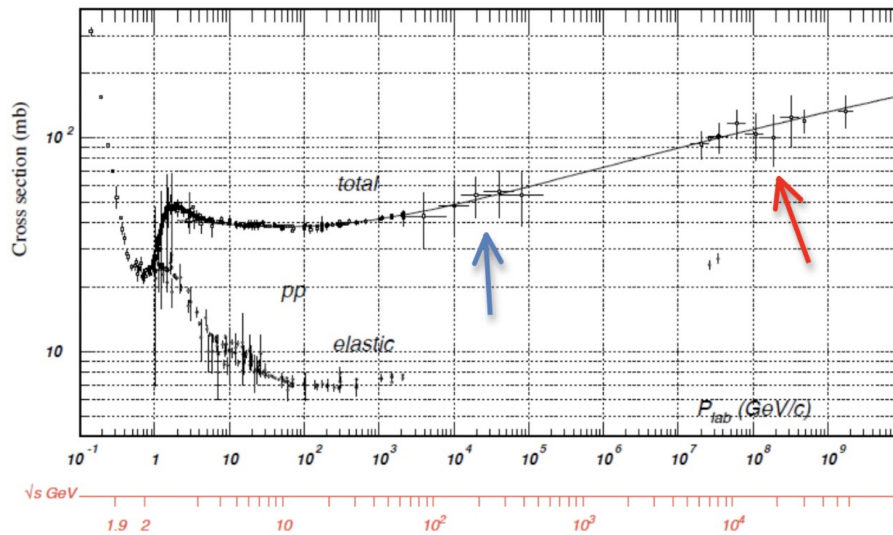
$$n = \frac{1}{V} \frac{M}{M_{mole}} N_{av} = N_{av} \frac{\rho}{M_{mole}} \quad (3.2.11)$$

con $N_{av} \approx 6 \cdot 10^{23}$ numero di Avogadro e M_{mole} massa di una mole di sostanza, dato da A espresso in grammi.

¹Questo perché a circa ogni interazione, le particelle vengono deviate via dal flusso, diminuendo Φ_A man mano che le particelle avanzano nell'interno della lamina.

3.2.5 Sezione d'urto per interazione forte

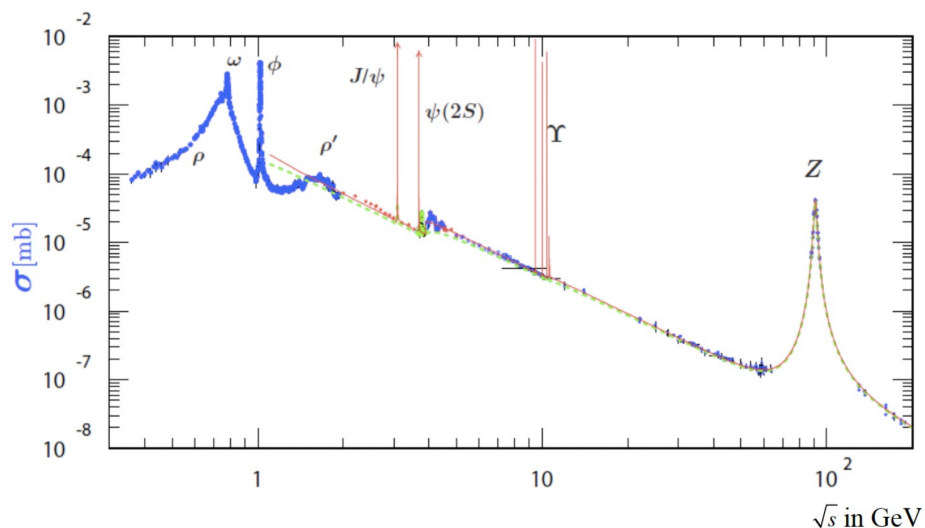
Protoni (come altri adroni) interagiscono tramite interazione forte, il cui raggio di azione, o **raggio di interazione** è ~ 1 fm. In figura, si osserva σ_{tot} per processo $p + p$:



Inizialmente, per energie $\lesssim 2$ GeV, $\sigma_{\text{tot}} \simeq \sigma_{\text{el}}$; ad energie più alte, si iniziano a sviluppare processi inelastici come produzione di particelle come pioni, ad esempio in $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$. σ_{el} non va mai a zero per teorema ottico.

3.2.6 Sezione d'urto per interazione elettrodebole

Si studia sezione d'urto di $e^+ + e^- \rightarrow$ adroni, in funzione di energia \sqrt{s} nel CM. In figura, si osservano diversi picchi, relativi a stati risonanti:



Queste risonanze sono sintomo della proprietà ondulatoria delle particelle; in corrispondenza di queste, si può approssimare la sezione d'urto con una Breit-Wigner.

In questa figura, la componente elettromagnetica è responsabile di decrescita $\sim 1/s$, mentre la componente debole che contribuisce alle risonanze, come alla Z.

3.2.7 Sezione d'urto per interazione debole

Si considera la sezione d'urto per i processi $\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X$ o $\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \mu^+ + X$, dove N è un nucleone (protone o neutrone) mentre X è una serie di particelle che non interessa specificare.

Questo processo è detto di corrente debole carica perché numero leptone è invariato, ma cambia la carica del leptone.

Sezioni d'urto per entrambi i processi, sopra un valore di soglia E_{thr} , hanno andamento lineare; per $\sigma_{\nu_\mu} \simeq (7 \text{ fb}) E_{\nu_\mu} (\text{GeV})^1$, mentre $\sigma_{\bar{\nu}_\mu} \simeq (3.5 \text{ fb}) E_{\bar{\nu}_\mu} (\text{GeV})$. Incertezze su sezione d'urto diminuiscono con aumento energia perché aumenta la sezione d'urto e ci sono più interazioni possibili.

3.2.8 Sezione d'urto Rutherford

Urto fra particelle $\alpha \equiv {}^4_2\text{He}^{++}$ a vel. \vec{v}_0 su nucleo atomico assunto puntiforme e con massa tale da renderlo bersaglio fisso.

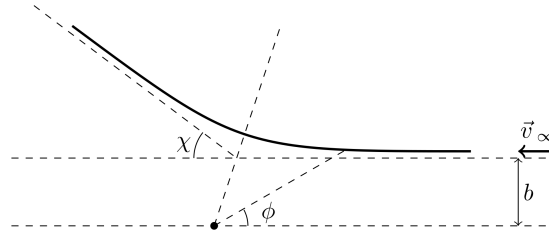


Figura 1: Da ∞ arriva particella α (ze); nel punto nero, è presente nucleone Ze .

Si assume $|\vec{v}_\infty| = |\vec{v}_f|$, con \vec{v}_f velocità finale, e il processo è non-relativistico perché $m_\alpha \approx 4 \text{ GeV}$ e si inviano con $K_\alpha \approx 10 \text{ MeV}$. Se m_α massa part. α , la variazione di quantità di moto è:

$$\Delta p = |\Delta \vec{p}| = \sqrt{(m\vec{v}_f - m\vec{v}_i)^2} = m\sqrt{2v_0^2 - 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_f} = \sqrt{2v_0^2 - 2v_0^2 \cos \chi} = 2mv_0 \sin \frac{\chi}{2}$$

Sezione d'urto in funzione del parametro d'impatto b , per eq. 3.2.1, è:

$$d^2\sigma = b db d\varphi \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d^2\sigma}{d\cos\chi d\varphi} = \frac{b db d\varphi}{d\cos\chi d\varphi} = b \frac{db}{d\cos\chi} = -\frac{b}{\sin\chi} \frac{db}{d\chi}$$

Si cerca relazione tra b e χ . Su α agisce forza di Coulomb \vec{F} generata da Ze , scomponibile in $\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$, ma solo \vec{F}_\perp , con $F_\perp = F \cos \beta$, contribuisce a Δp^2 . Allora:

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{F}_\perp| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F \cos \beta dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \beta dt$$

Conservazione momento angolare: $L_{z,i} = mv_0 b$, $L_{z,f} = m(\vec{r} \times \vec{v}_f)_z = mr^2 \frac{d\beta}{dt} \Rightarrow v_0 b dt = r^2 d\beta$:

$$\Delta p = \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \beta \frac{r^2}{v_0 b} d\beta = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 bv_0} [\sin \beta]_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}}$$

Dalla figura, si vede che $\beta_{\max} - (-\beta_{\max}) + \chi = \pi \Rightarrow \beta_{\max} = \frac{\pi - \chi}{2}$, quindi

$$\Delta p = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 bv_0} \left(\cos \frac{\chi}{2} - \left(-\cos \frac{\chi}{2} \right) \right) = \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 bv_0} \cos \frac{\chi}{2}$$

All'inizio si è trovato $\Delta p = 2mv_0 \sin(\chi/2)$; eguagliando le due:

¹L'unità fb sta per femtobarn.

²Si è assunto che la velocità non cambi in modulo, quindi non ci possono essere forze parallele alla traiettoria di α .

$$b(\chi) = \frac{d}{2} \cot \frac{\chi}{2} \quad (3.2.12)$$

con

$$d = \frac{\hbar c}{\hbar c} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0(mv_0^2/2)} \equiv zZ \frac{\alpha\hbar c}{T}, \quad T = \frac{1}{2}mv_0^2$$

dove $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 1/137$ è la **costante di struttura fine**. La sezione d'urto, allora, è:

$$\frac{d\sigma_{\text{ruth}}}{d\Omega}(\chi, T) = -\frac{b}{\sin \chi} \frac{db}{d\chi} = \frac{(zZ\alpha\hbar c)^2}{16} \frac{1}{T^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad (3.2.13)$$

Approssimazione valida per corpi puntiformi e interazione Coulombiana. Aumentando χ, T , non è più valida perché prevale la forza nucleare forte; ad esempio per ${}^4\text{He}^{++} + {}^{206}\text{Pb}^1$ non vale per $T \simeq 26 \text{ MeV}$, $\chi \simeq 60^\circ$.

L'interazione forte agisce su scala del fm, quindi si può dire che se il parametro di impatto di α e N è maggiore di $R_\alpha + R_N$ (raggi atomici), si può trascurare. La distanza minima di avvicinamento $x = R_\alpha + R_N$ è ottenibile dalle conservazioni:

$$\begin{aligned} \begin{cases} mv_0 b = mxv \Rightarrow v = v_0 \cdot b/x \\ T + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 x} \end{cases} &\Rightarrow T = \frac{1}{2}mv_0^2 \frac{b^2}{x^2} + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 x} \\ \Rightarrow x^2 - x d - b^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\chi}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Sezione d'urto Rutherford σ_{ruth} va a infinito; integrando in $d\Omega$ sez. d'urto differenziale, per $\chi \ll 1$ si approssima come d^2/χ^4 , quindi diverge. Per risolverlo, si deve limitare χ con χ_{min} .

Questo si può fare individuando χ_{min} come l'angolo minore misurabile sperimentalmente per questioni di precisione sulla strumentazione, oppure teoricamente imponendo $\exists b_{\text{max}} : b < b_{\text{max}} \equiv r_{\text{atomico}} \Rightarrow \exists \chi_{\text{min}}$ da $b = \frac{d}{2} \cot \frac{\chi}{2}$.

3.2.9 Sezione d'urto Mott

Per sezione d'urto Rutherford si è assunto: non-relativistica, proiettili puntiformi, solo interazione coulombiana, bersaglio con $M \rightarrow \infty$. Per $z = 1$ (elettrone come proiettile): $\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{ruth}} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$.

- La correzione per oggetti **non-puntiformi** si ottiene moltiplicando per fattore di forma.
- La correzione **relativistica** si ha esplicitando $|\vec{p}||\vec{v}|$ per utilizzare la definizione relativistica $|\vec{p}| = m\gamma|\vec{v}|$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{ruth}} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4\frac{1}{2}mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{2|\vec{p}||\vec{v}|} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (3.2.15)$$

- La correzione $M < \infty$ e **comprensiva di spin** restituisce la **sezione d'urto Mott**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{mott}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{ruth}} \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \theta/2} \quad (3.2.16)$$

dove il numeratore è la correzione per lo spin e il denominatore per massa finita.

¹Qua si intende un nucleo di piombo, che ha 82 protoni, quindi è difficile indicare che è ionizzato :).

3.2.10 Sezione d'urto Rosenbluth

Si ottiene dalla sezione d'urto Mott per **correzione con momento magnetico**:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{ros}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{mott}} (A + B \tan^2 \theta/2) \quad (3.2.17)$$

3.2.11 Esperimento di Hofstadter

→ Misura fattore di forma del protone da scattering con elettrone. Sperimentalmente, si misurerà:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{ros}} |F(\theta)|^2$$

da cui si ricava $|F(\theta)|^2$. In realtà, si misura $\frac{d\sigma}{d|t|}$ con t seconda variabile di Mandelstam.

Per scattering elastico di e^- su p , con θ angolo di scattering di e^- , indicando $p_e = (E, \vec{p})$ prima dell'urto e $p'_e = (E', \vec{p}')$ dopo, si ha $E' = E$ e $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ nel centro di massa, quindi:

$$t \equiv (p - p')^2 = -(\vec{p} - \vec{p}')^2 = -p^2 - p'^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{p}' = -2p^2(1 - \cos \theta) = -4p^2 \sin^2 \theta/2$$

In unità naturali, in assunzione $M \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow 1$:

$$\frac{d\sigma_{\text{mott}}}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4|\vec{p}|^2 |\vec{v}|^2} \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} \simeq \frac{Z^2 \alpha^2}{4p^2 v^2} \frac{1 - \sin^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2}$$

Integrando questa rispetto a φ ¹ e riscrivendo i seni usando $|t| = 4p^2 \sin^2 \theta/2$:

$$\frac{d\sigma_{\text{mott}}}{d|t|} = \frac{4\pi Z^2 \alpha^2}{t^2} \left(1 - \frac{|t|}{4p^2}\right) \sim \frac{1}{t^2}$$

Per particelle non-puntiformi, si deve moltiplicare la sezione d'urto per modulo quadro del fattore di forma; da questa si ottiene sezione d'urto Rosenbluth moltiplicando per l'apposito fattore.

3.2.12 Fattore di forma e raggio quadratico medio

Se \vec{q} impulso trasferito e $|\vec{q}|a \ll 1$ ², con a dimensione caratteristica del bersaglio, si approssima il fattore di forma come:

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \frac{\iiint_V \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} dV}{\iiint_V \rho(\vec{r}) dV} = \frac{\iiint \rho(r) e^{-iqr \cos \beta} r^2 dr d(\cos \beta) d\alpha}{\iiint \rho(r) r^2 dr d(\cos \beta) d\alpha} \\ &\simeq \frac{\iint \rho(r) \left[1 - iqr \cos \beta - \frac{q^2}{2} r^2 \cos^2 \beta + \dots\right] r^2 dr d(\cos \beta)}{\iint \rho(r) r^2 dr d(\cos \beta)} = \frac{\int \rho(r) \left[\cos \beta - \frac{q^2 r^2}{2} \cos^3 \beta\right]_{-1}^{+1} r^2 dr}{2 \int \rho(r) r^2 dr} \\ &= \frac{\int \rho(r) \left[2 - \frac{q^2 r^2}{3}\right] r^2 dr}{2 \int \rho(r) r^2 dr} = 1 - \frac{q^2}{6} \frac{\int \rho(r) r^4 dr}{\int \rho(r) r^2 dr} \equiv 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + \dots \end{aligned}$$

dove per lo sviluppo, si è usato $qr \ll 1$ e si è definito il **raggio quadratico medio** $\langle r^2 \rangle$.

¹Questa integrazione è responsabile per il fattore 2π .

²Questa ha senso perché si sottintende che q sia dato dalla differenza dei vettori d'onda delle particelle e non direttamente dagli impulsi.

3.3 I nuclei atomici

3.3.1 Caratterizzazione

Caratterizzati da:

- massa;
- carica elettrica;
- spin;
- momento magnetico;
- momento di quadrupolo elettrico.

Formato da $A = N + Z$, dove N numero neutroni e Z numero protoni. Diversi tipi di nuclei:

- **isobari**: hanno stesso A , ma diverso N , Z diversi, come ${}^3_1\text{H}_2$ isobaro di ${}^3_2\text{He}_1$;
- **isotopi** hanno stesso Z , con A , N diversi, ad esempio ${}^3_1\text{H}_2$ isotopo di ${}^2_1\text{H}_1$;
- **isotoni** hanno stesso N , ma A , Z diversi, ad esempio ${}^3_1\text{H}_2$ isotono di ${}^4_2\text{He}_2$.

3.3.2 Modello a goccia del nucleo

Per nucleo $A \geq 4$, il raggio è dato da:

$$R_A = r_0 A^{1/3} + r_{\text{skin}}, \quad r_0 \approx 1.25 \text{ fm}, \quad r_{\text{skin}} \approx 2 \text{ fm} \quad (3.3.1)$$

Si basa su modello a goccia del nucleo, secondo cui i suoi costituenti si distribuiscono cercando di ottenere una forma sferica approssimativamente piena, cioè volume occupato è $\frac{4}{3}\pi r^3 = V_{\text{nucl}} \equiv AV_1$ ¹. Da questo, si ha $r \propto A^{1/3}$ con r_0 coeff. di proporzionalità.

Quanto a r_{skin} , si ottiene da correzione dovuta a impossibilità, per principio di esclusione, di distribuire costituenti in volume sferico e solitamente è tenuta in considerazione in nuclei "pesanti".

3.3.3 Forze nucleari

I nuclei non possono essere tenuti insieme da interazione Coulombiana e per forza nucleare si attende una componente attrattiva. Se esistesse solo componente attrattiva, i nuclei collasserebbero, quindi necessaria parte repulsiva. Si può creare modello approssimato a buca di potenziale come:

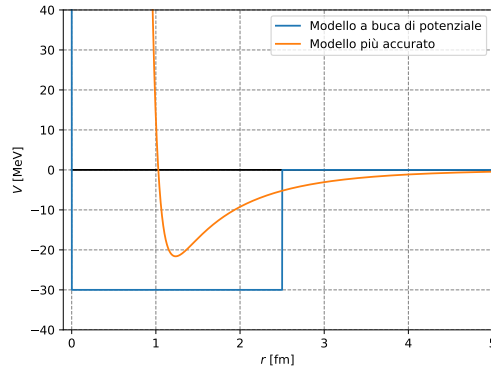
$$V(r) = \begin{cases} \infty & , r = 0 \\ -30 & , 0 < r \lesssim 2.5 \\ 0 & , r \gtrsim 2.5 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Altrimenti un modello più realistico è:

$$V(r) = \frac{A}{r^{12}} - B \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \mu \approx 0.7 \text{ fm}^{-1} \quad (3.3.3)$$

dove μ parametro di Yukawa.

¹ V_1 è il volume del singolo costituente del nucleo.



3.3.4 Masse dei nuclei

Misurazione tramite spettrometro di massa. Si basa sull'accelerazione di ioni prodotti da una certa sorgente tramite differenza di potenziale ΔV ; questi passano attraverso una fenditura per collimare il raggio con velocità data da $\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$ per entrare in regione in cui sono presenti campo elettrico e magnetico. Questi si possono prendere tali che $\vec{F}_L = q\vec{E}_v + q\vec{v} \times \vec{B}_v = 0 \Rightarrow v = E/B$ (selettore di velocità). Dopo un'altra collimazione, si entra in regione con solo campo magnetico dove le cariche sono in moto circolare uniforme $m\frac{v^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$, da cui si misura massa noto R (con rivelatore che individua dove arrivano le particelle).

Per massa dei nuclei si riporta spesso massa atomica; per esprimerla, si definiscono:

- B_i^e energia di legame dell' i -esimo e^- in un atomo, con $i = 1, \dots, Z$;
- $B_{A,Z}$ energia di legame dei nucleoni nel nucleo;
- m_u unità di massa atomica $\equiv \frac{1}{12}M_{12C}$.

Massa atomica è¹:

$$M_{A,Z}^{\text{at}} = M_{A,Z}^{\text{nuc}} + Zm_e - \sum_{i=1}^Z B_i^e \approx M_{A,Z}^{\text{nuc}} + Zm_e = Zm_p + Nm_n - B_{A,Z} + Zm_e \quad (3.3.4)$$

$$\approx ZM_H^{\text{at}} + Nm_n - B_{A,Z}$$

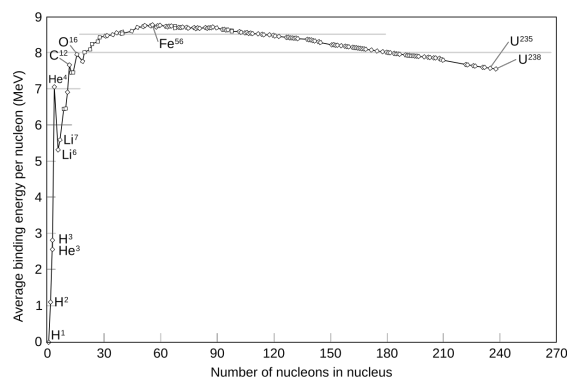
perché spesso energie elettroni risultano trascurabili. Alcuni valori numerici:

- trascurando energia di legame: $M_{\text{at}}^H \approx m_e + m_p = 938.783 \text{ MeV}/c^2$;
- $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2$;
- $m_n = 939.565 \text{ MeV}/c^2$;
- $m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}/c^2$;
- $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$.

3.3.5 Energia di legame dei nucleoni

Si cerca andamento $B_{A,Z}/A$ in funzione di A (energia media per nucleone in funzione del numero di nucleoni). Questa curva ha massimo per $A = 56$, che corrisponde al ferro, quindi è l'elemento più stabile.

¹L'energia di legame è energia per separare il legame, data da massa totale del sistema (quindi energia totale del sistema) a cui si toglie la massa dei singoli costituenti, motivo per cui è presente. All'ultimo passaggio, si trascurano 13.6 eV dell'energia di legame dell'atomo di idrogeno.



Per la maggior parte degli elementi, $B_{A,Z}/A$ vale $\simeq 8$ MeV, quindi proporzionale a costante $\Rightarrow B_{A,Z} \propto A$, quindi più nucleoni, maggiore è energia, quindi la forza nucleare è una forza a **corto raggio**. Contrariamente, forza elettromagnetica è a lungo raggio $B \sim Z^2$.

OSSERVAZIONE 3.3. Dall'andamento di $B_{A,Z}$ è possibile produrre energia da destra verso sinistra (fissione nucleare) o da sinistra verso destra (fusione nucleare).

Si definisce **difetto di massa**

$$\Delta_{A,Z} = M_{A,Z} - A m_u \quad (3.3.5)$$

Rappresenta differenza tra massa del nucleo e massa del nucleo come calcolata se energia media per nucleone fosse quella del carbonio-12.

Da questa definizione, visto che $M_{A,Z} \approx Z M_H^{\text{at}} + N m_n - B_{A,Z} = A m_u + \Delta_{A,Z}$, allora:

$$\begin{aligned} B_{A,Z} &\approx Z M_H^{\text{at}} + N m_n - A m_u - \Delta_{A,Z} = Z(m_p + m_e - m_u) + N(m_n - m_u) \\ &\approx (7.29 \text{ MeV}) \cdot Z + (8.07 \text{ MeV}) \cdot N - \Delta_{A,Z} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Dal modello a goccia si ricava **formula semi-empirica di massa**, composta da diversi termini. Il primo si ottiene per il contributo della forza forte sviluppata tra ogni nucleone che viene a contatto, ciascuno dei quali contribuisce per 2 MeV; si trova $B_{A,Z} \simeq a_V A$, con $a_V \approx 12$ MeV¹ perché in configurazione di massimo impacchettamento, un nucleone viene in contatto con altri 12. Risulta in accordo con valore sperimentale di $a_V \approx 15.5$ MeV.

La prima correzione è dovuta al fatto che nucleoni al bordo non toccano altri nucleoni su ogni lato, quindi si toglie termine proporzionale alla superficie: $B_{A,Z} \simeq a_V A - a_S A^{2/3}$; sperimentalmente $a_S \approx 16.8$ MeV.

Si considera repulsione Coulombiana che porta termine proporzionale a Z^2 (carica del nucleo) e inversamente proporzionale al raggio (a sua volta proporzionale a $A^{1/3}$: $B_{A,Z} \simeq a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$. Costante ottenuta da energia di sfera uniformemente carica con carica totale Ze e raggio $R_A \approx r_0 A^{1/3}$:

$$\frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R_A} = \frac{3}{5} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \frac{\alpha\hbar c}{r_0} \approx -(0.69 \text{ MeV}) \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

in accordo con $a_C \approx 0.72$ MeV. Ci sono **altre correzioni** dovute a effetti quantistici: un termine di simmetria $\propto a_{\text{sym}}$ dovuto al fatto che i nucleoni sono fermioni e per questi vale principio di esclusione di Pauli, quindi più pesanti sono nuclei più stati a maggiore energia sono riempiti \Rightarrow aumento energia del sistema; allora il termine penalizza stati con grandi differenze di numero tra neutroni e protoni perché quelli più presenti non avrebbero sufficiente controparte con cui interagire tramite interazione forte, cosa che aumenta energia cinetica. Infine è presente

¹ Il risultato va diviso per 2 per non contare la stessa coppia due volte.

un termine di pairing che aggiunge stabilità al sistema quando Z, N^1 sono entrambi pari e la rimuove quando sono entrambi dispari, mentre vale 0 quando $A = Z + N$ è dispari (uno pari, l'altro dispari). Questo è motivato dal fatto che coppie di nucleoni possono riempire stesso stato energetico (dovendo obbedire al principio di esclusione) e rende configurazione finale più stabile. Complessivamente:

$$B_{A,Z} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(Z - N)^2}{A} + \delta_{\text{pair}} \quad (3.3.7)$$

con²

$$\delta_{\text{pair}} = \begin{cases} \pm a_\delta A^{-3/4} & , N, Z \text{ pari/dispari} \\ 0 & , A \text{ dispari} \end{cases}, \quad a_\delta \approx 34 \text{ MeV} \quad (3.3.8)$$

3.3.6 Energia di separazione

Energia necessaria per separare nucleone dal nucleo; definita, rispettivamente per protone e neutrone, come:

$$\begin{aligned} S_p({}^A_Z X) &= \left[m({}^{A-1}_{Z-1} X) + m({}^1_1 \text{H}) - m({}^A_Z X) \right] c^2 \\ S_n({}^A_Z X) &= \left[m({}^{A-1}_Z X) + m_n - m({}^A_Z X) \right] c^2 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

OSSERVAZIONE 3.4. Non esistono nuclei stabili con $A = 5, A = 8$: per $A = 5$ si ha ${}^5\text{Li}$ e ${}^5\text{He}$ che, rispettivamente, hanno $S_p < 0, S_n < 0$; per $A = 8$ si ha ${}^8\text{Be}$ con $m({}^8\text{Be}) > 2m({}^4\text{He})$, quindi decade rapidamente in 2α .

3.4 Decadimenti nucleari

3.4.1 Introduzione

Ogni nucleo che decade rispetta la **legge di decadimento radioattivo**:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (3.4.1)$$

con N numero di atomi/nuclei del campione e λ **costante di decadimento**. Si definisce **larghezza totale di decadimento** $\Lambda = \hbar\lambda$.

L'**attività** di una sorgente è il numero di decadimenti per unità di tempo; si misura in Becquerel (1 Bq = 1 decadimento/s).

La legge di decadimento radioattivo restituisce numero di atomi/nuclei nel tempo:

$$N(t) = N_0 e^{-t\lambda} \equiv N_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \quad (3.4.2)$$

con τ **vita media**. Si definisce **tempo di dimezzamento**:

$$\tau_{1/2} : N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 \approx 0.693\tau \quad (3.4.3)$$

¹Numero di protoni e neutroni rispettivamente.

²Il valore di a_δ dipende dalla parametrizzazione, non è univoco.

3.4.2 Tipi di decadimento

Si distinguono:

- decadimento β^- : nel nucleo $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, quindi ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y_{N-1}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$;
- decadimento β^+ : nel nucleo $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ ¹, quindi ${}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y_{N+1}^- + e^+ + \nu_e$;
- cattura elettronica: nel nucleo $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$, quindi $e^- + {}^A_ZX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y_{N+1} + \nu_e$;
- transizione isomerica: nucleo in stato eccitato² decade a energia più bassa ${}^A_ZX^* \rightarrow {}^A_ZX + \gamma$;
- n-decay: ${}^A_ZX_N \rightarrow {}^A_ZY_{N-1} + n$;
- p-decay: ${}^A_ZX_N \rightarrow {}^A_{Z-1}Y_N + p$;
- decadimento α : ${}^A_ZX_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y_{N-2} + \alpha$.
- fissione nucleare: ${}^A_ZX_N \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}X_{1N_1} + {}^{A_2}_{Z_2}X_{2N_2} + N_3$, con $A = A_1 + A_2$, $Z = Z_1 + Z_2$, $N = N_1 + N_2 + N_3$;
- doppio decadimento β : ${}^A_ZX_N \rightarrow {}^{A}_{Z+2}Y_{N-2}^{++} + e^- + e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_e$;
- triplo decadimento α ;
- decadimenti β seguiti da decadimento p, n o α .

3.4.3 Decadimento β e termine di pairing

Si considera nucleo $M_{A,Z}^{\text{at}} = ZM_H^{\text{at}} + Nm_n - B_{A,Z}$; sostituendo espressione $B_{A,Z}$ formula semi-empirica di massa ad A costante (si studiano nuclei isobari):

$$M_{A,Z} = \text{cost}(A) + Z(M_H^{\text{at}} - m_n) + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} - \delta_{\text{pair}}$$

Se A dispari si ha una sola parabola; se A pari, invece, si possono avere N, Z pari $\Rightarrow \delta > 0$, oppure N, Z dispari $\Rightarrow \delta < 0$.

Nel primo caso, gli elementi più in alto nella parabola tenderanno a decadere, tramite decadimenti β (β^- da sinistra e β^+ da destra) all'elemento più vicino al minimo della parabola.

Nel secondo caso, cosa simile ma si possono verificare doppi decadimenti β e, sotto alcune condizioni³, si possono verificare decadimenti da una parabola all'altra. In questo caso, si verificano doppi decadimenti β perché elementi si dispongono alternativamente sulle due parabole e due elementi sulla stessa distano di un 2 per il termine di pairing.

3.4.4 Produzione di stati eccitati ed effetto Mössbauer

L'effetto Mössbauer consiste nell'emissione di raggi γ da un nucleo e dal conseguente assorbimento di questi da parte di un altro nucleo. L'emissione di γ da nucleo può avvenire come ${}^A_ZX_N^* \rightarrow {}^A_ZX_N + \gamma$ oppure con

$${}^A_ZX_N^{**} \rightarrow \begin{cases} {}^A_ZX_N^* + \gamma \\ {}^A_ZX_N + \gamma \end{cases}$$

¹Questa reazione può avvenire solo nel nucleo e non nel vuoto.

²Indicato con *.

³La reazione deve risultare conveniente dal punto di vista energetico e possibile dal punto di vista quantistico per il momento angolare del nucleo in cui decadrebbero (visto che questo si deve conservare). Quando salti da una parabola all'altra non sono consentiti, si verificano dei doppi decadimenti β .

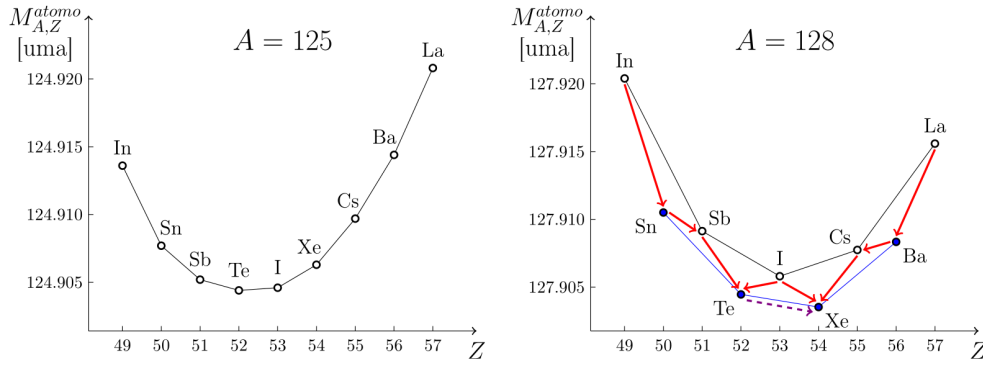
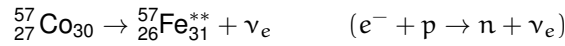
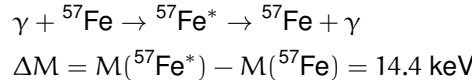


Figura B.5: Dipendenza da Z delle masse atomiche per $A = 125$ (dispari) e $A = 128$ pari. Nel caso $A = 128$ sono anche indicate con frecce rosse i possibili decadimenti β^- (freccia verso destra) e β^+ (freccia verso sinistra), mentre la freccia tratteggiata corrisponde ad decadimento doppio β .

i fotoni emessi in un caso e in un altro hanno energie diverse. La produzione di nuclei eccitati avviene in vari modi, come per decadimento β o cattura elettronica:



Un'altra possibilità è tramite risonanza con γ a energia pari a ΔM ; nel caso del ${}^{57}\text{Fe}$:



Per semplicità, si considera ${}^{57}\text{Co} \rightarrow {}^{57}\text{Fe}^* \rightarrow {}^{57}\text{Fe} + \gamma$ con fotone da $E_0 = 14.4 \text{ keV}$, dove $\tau_{1/2}({}^{57}\text{Fe}^*) \approx 97 \text{ ns}$. Allo stato eccitato corrisponde una larghezza di risonanza $\Gamma = \hbar/\tau = \hbar \ln 2 / \tau_{1/2} \approx 4.6 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$, da cui $\Gamma/E_0 \sim 10^{-13} \Rightarrow$ risonanza molto stretta $\Rightarrow E_0$ deve essere molto precisa per tale risonanza¹, quindi molto improbabile riuscire a farla verificare.

Quando ${}^{57}\text{Fe}^*$ torna allo stato non-eccitato tramite emissione γ , nel CM, l'impulso del ferro è $\vec{p} = -\vec{p}_\gamma$, con $E_\gamma = |\vec{p}_\gamma| \neq E_0$. L'energia a riposo del ferro eccitato, corrispondente a $M^* = M + E_0$ dove M è la massa del ferro non-eccitato, è, per conservazione dell'energia, anche pari a $E_\gamma + \sqrt{M^2 + p^2} = E_\gamma + \sqrt{M^2 + p_\gamma^2}$, quindi:

$$(M + E_0 - E_\gamma)^2 = M^2 + p_\gamma^2 = M^2 + E_\gamma^2$$

$$\Rightarrow E_\gamma = E_0 \frac{E_0/2 + M}{E_0 + M} = E_0 \frac{1 + E_0/2M}{1 + E_0/M} \simeq E_0 \left(1 - \frac{E_0}{2M}\right) \approx E_0 - 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

che cade fuori dalla larghezza Γ . La differenza tra E_0 ed E_γ è dovuta al rinculo subito dal ferro nell'emissione di γ .

L'effetto **Mössbauer** si verifica in cristalli quando altri atomi del reticolo assumono tale rinculo e la massa al denominatore di $E_0^2/2M$ fa divenire il termine trascurabile. La probabilità con cui si verifica è:

$$f = \exp\left(-\frac{E_0^2/2M}{E_{ph}}\right)$$

dove E_{ph} è una costante relativa a ciascun cristallo dovuta all'energia dei fononi. Sperimentalmente, è possibile che si verifichi per $E_0 = 14.4 \text{ keV}$, ma è improbabile per $E_0 \sim 100 \text{ keV}$, cioè per ${}^{57}\text{Fe}^{**} \rightarrow {}^{57}\text{Fe} + \gamma$.

¹ Significa che per produrre ${}^{57}\text{Fe} + \gamma \rightarrow {}^{57}\text{Fe}^*$ è necessario che l'energia del fotone sia molto precisa.

3.4.5 Decadimento di tipo Mössbauer

Si considerano due lastre di cristallo, una sorgente montata su una base che oscilla con $v \ll c$ e una passiva che assorbe fotoni emessi dalla prima. La lastra passiva scherma un rivelatore dai fotoni provenienti da alcuni atomi di ferro eccitati $^{57}\text{Fe}^*$.

Fotoni emessi dalla sorgente sono soggetti a effetto Doppler perché la lastra è in moto: $E_\gamma \simeq (1 + \beta)E_0$ al primo ordine.

La velocità v della lastra è solitamente un'onda triangolare, quindi quando $v = 0$ e si verifica effetto Mössbauer (cioè la sorgente emette fotone a E_0 e la lastra passiva assorbe e riemette casualmente su tutto l'angolo solido) il rivelatore non osserverà niente perché è improbabile che il fotone riemesso dalla lastra passiva vada proprio sul rivelatore; contrariamente, quando v supera una certa soglia, per effetto Doppler, l'energia del fotone emesso non è tale da eccitare atomi nella lastra passiva e passa al rivelatore¹. Perché si osservino fotoni, il valore di soglia della velocità è dato da $\beta E_0 \gg \Gamma \Rightarrow |\vec{v}| \gg c\Gamma/E_0 \approx 10^{-4} \text{ m/s}$.

¹ Vedi immagine appunti.

4 INTERAZIONE FRA PARTICELLE CARICHE E MATERIA

4.1 Effetto Čerenkov

→ Emissione di onde em da parte di materiale attraversato da particelle cariche a velocità v maggiori di quelle della luce nel mezzo. Per questo, il materiale deve avere $\Re\{n\} > 1$. Condizione sulla velocità della particella è $v > c/n \Rightarrow \beta > 1/n$. La necessità di questa richiesta è perché in questo modo le onde hanno modo di sovrapporsi coerentemente fra loro senza sfuggire prima che il passaggio della particella possa generarne altre.

4.1.1 Radiazioni Čerenkov

L'effetto è descritto dalla formula per l'angolo di emissione della radiazione:

$$\cos \theta_c = \frac{1}{\beta n(\omega)} \quad (4.1.1)$$

con θ_c **angolo Čerenkov** di emissione della radiazione. La curva di $n(\omega)$ è tale che $\exists \omega_1, \omega_2 : n(\omega_1)\beta = n(\omega_2)\beta = 1$.

Dimostrazione. Si fissa $t = 0$ da quando la particella entra nel materiale e la sua posizione a $t = 0$ si indica con O . Dopo Δt , ha percorso una distanza $v\Delta t$. La radiazione Čerenkov emessa a $t = 0$ ha percorso $\Delta c/n$ fino a un punto H su una circonferenza. Se A è la posizione della particella dopo Δt , il triangolo formato da OA - OH - HA è tale per cui:

$$\cos \theta_c \equiv \frac{OH}{OA} = \frac{\Delta tc/n}{v\Delta t} = \frac{1}{\beta n}$$

■

Se $\vec{R} = \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{AH} = \vec{v}\Delta t + \vec{\rho}$:

$$\begin{aligned} R^2 &= \beta^2 c^2 \Delta t^2 + \rho^2 + 2c\Delta t \vec{\beta} \cdot \vec{\rho} = \beta^2 c^2 \Delta t^2 + \rho^2 + 2\beta \rho c \Delta t \cos \alpha \\ &\Rightarrow c^2 \left(\beta^2 - \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{\Delta t}{\rho} \right)^2 + 2\beta c \cos \alpha \left(\frac{\Delta t}{\rho} \right) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Se $\beta > 1/n$ e dovendo valere (vedi immagine appunti) $\cos \alpha < 0$, dalla richiesta

$$\frac{\Delta}{4} = \beta^2 c^2 \cos^2 \alpha - c^2 \left(\beta^2 - \frac{1}{n^2} \right) \geq 0 \Rightarrow \beta^2 (\cos^2 \alpha - 1) + \frac{1}{n^2} > 0$$

si ha:

$$|\sin \alpha| \leq \frac{1}{n\beta} \quad (4.1.2)$$

Quando $|\sin \alpha| < 1/n\beta$ ci sono due soluzioni; quando vale l'uguaglianza, ce n'è una sola ed è proprio $\cos \theta_c = 1/n\beta$. Ne segue che la radiazione è emessa nel cono.

4.1.2 Formula di Frank-Tamm

Materiale di spessore dx attraversato a velocità costante $\Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_f$. La formula di Frank-Tamm restituisce distribuzione del numero di fotoni emessi per lunghezza ed energia:

$$\frac{d^2 N_\gamma}{dx dE_\gamma} = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2 \theta_c = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2 (E_\gamma/\hbar)} \right) \quad (4.1.3)$$

con $n(\omega) \equiv n(E_\gamma/\hbar)$. Da questa:

$$\frac{dN_\gamma}{dx} = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \int_{E_1=\hbar\omega_1}^{E_2=\hbar\omega_2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) dE_\gamma \quad (4.1.4)$$

Si può anche trovare l'energia persa per effetto Čerenkov:

$$\Delta E = \int_0^{\Delta x} \int_{E_1}^{E_2} z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) E_\gamma dE_\gamma \quad (4.1.5)$$

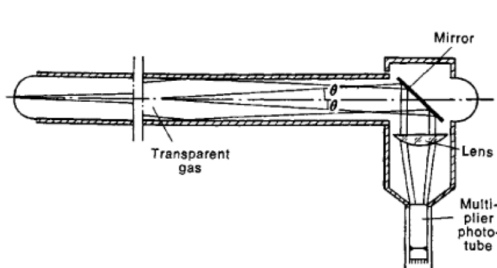
che coincide con numero di fotoni per energia del singolo fotone.

4.1.3 Rivelatori Čerenkov

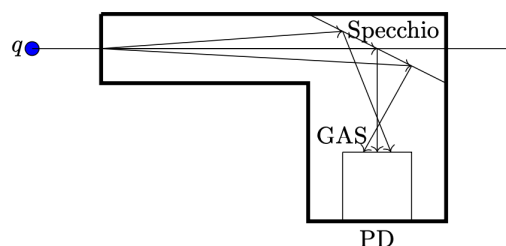
Misurano N_γ e si dividono in due tipi a seconda se si misura θ_c o no.

- **A soglia.**

Si basano su tunnel di gas con $n \gtrsim 1$ (tra 1.001 e 1.010) con sistema di specchi per deflettere fotoni emessi dal passaggio della carica nel gas e inviarli su un rivelatore di fotoni che conta N_γ .



(a) Rivelatore a soglia



(b) Schema di funzionamento di rivelatore a soglia

- **Rivelatori RICH (Ring Imaging Čerenkov).**

Tramite muro di fotomoltiplicatori, si rivela anello Čerenkov prodotto da una carica passante nella materia e si misura θ_c .

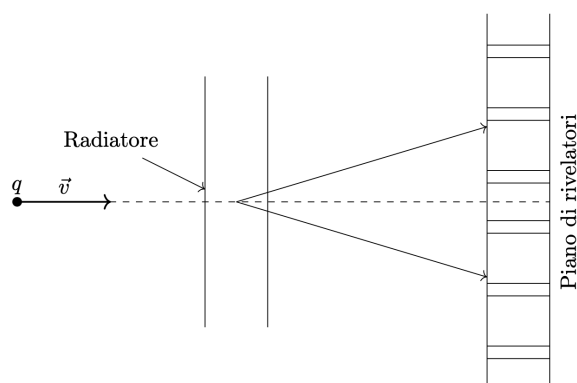


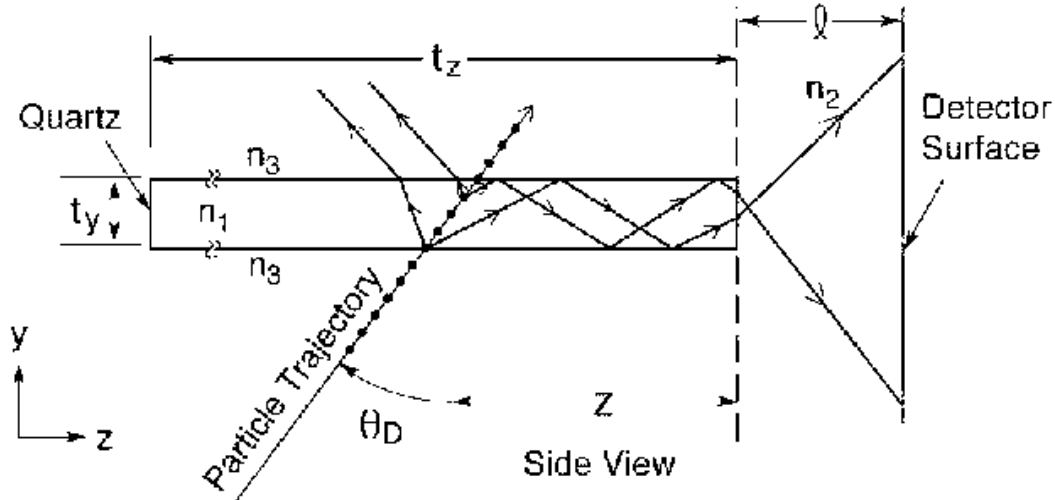
Figura 11.8: Schema funzionamento rivelatore RICH

Passando da radiatore a un mezzo con $n \sim 1$, l'angolo θ_{out} con cui radiazione incide su rivelatore è diverso da θ_c . I vincoli che si hanno sono $\cos \theta_c = 1/\beta n$ e legge di Snell

$\sin \theta_{\text{out}} = n \sin \theta_c$; inoltre deve valere $\sin \theta_{\text{out}} < 1$ per evitare riflessione totale, quindi $n \sin \theta_c < 1 \Rightarrow n < \sqrt{1 + 1/\beta^2}$ e, se $\beta \sim 1$, si ha $n < 1.41$.

- **Rivelatori DIRC (Deflection of Internal Reflected Čerenkov light).**

Al contrario dei RICH, usano radiatori con $n > 1.4$ in modo da riflettere i fotoni Čerenkov e trasmetterli, attraverso una serie di riflessioni totali, ad un materiale che aggiusta l'indice di rifrazione e li invia su fotomoltiplicatori.



4.1.4 Identificazione di particelle

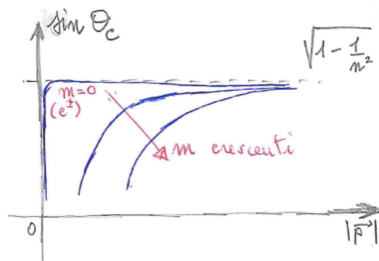
Le particelle si discriminano in base alla massa, quindi si misurano β e p : il primo tramite rivelatori Čerenkov, il secondo tramite spettrometri. Allora la massa è data da:

$$m = p \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \quad (4.1.6)$$

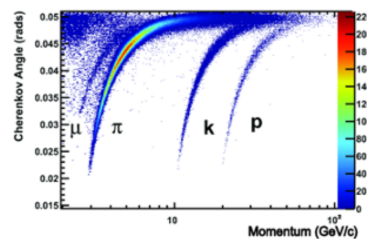
Il grafico è in funzione di p ; usando $1/\beta^2 = E^2/p^2 = (m^2 + p^2)/p^2$:

$$\sin \theta_c = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \frac{1}{\beta^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 - \frac{m^2}{p^2}} \quad (4.1.7)$$

L'intersezione con asse x si ha per $p = m/\sqrt{n^2 - 1}$. Prima di μ , si ha la distribuzione di e^\pm .



(a) Andamento di Eq. (11.6.2)



(b) Dati reali

Figura 11.12: Angolo Čerenkov in funzione dell'impulso per la Particle Identification

5 ESERCIZI

5.1 Indagine della materia con onde elettromagnetiche

5.1.1 Fattore di forma fenditura 1D

In $z = 0$ schermo con un certo spessore e apertura che si estendono in tutto y . Nel piano (x, z) , fenditura ha semi-apertura di $a/2$ e $\vec{E}_{inc} \parallel \hat{y}$. Per definizione:

$$\begin{aligned} F(\vec{k}) &= \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_x x'} e^{-ik_y y'} dx' dy' \\ &= \underbrace{\left(\int_{-a/2}^{+a/2} e^{-ik_x x'} dx' \right)}_{\equiv F(k_x)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_y y'} dy' \right) = 2\pi \delta(k_y) F(k_x) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

La $\delta(k_y) \Rightarrow k_y = 0$, quindi non c'è diffrazione lungo y . Infine:

$$F(k_x) = \left[\frac{e^{-ik_x x'}}{-ik_x} \right]_{-a/2}^{+a/2} = -\frac{2i \sin(k_x a/2)}{-ik_x} = a \frac{\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\frac{k_x a}{2}} \quad (5.1.2)$$

Anti-trasformando questa, si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x) e^{ik_x x'} dk_x = \Theta(x' + a/2) - \Theta(x' - a/2) \quad (5.1.3)$$

che è proprio la forma della fenditura lungo x .

5.1.2 Fattore di forma guscio sferico

In coordinate sferiche, con $\rho(\vec{r}') = N/(4\pi a'^2) \delta(r' - a)$ e misura $r'^2 dr' d\cos\beta d\alpha$:

$$F(\vec{q}) = \int_0^{+\infty} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{N}{4\pi a^2} \delta(r' - a) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} r'^2 dr' d\cos\beta d\alpha = N \frac{\sin(qa)}{qa}, \quad q = 2k_0 \sin\theta/2$$

IMPORTANTE: usare angoli diversi da θ, φ per coordinate sferiche perché si potrebbero confondere con quelli della diffrazione.

5.1.3 Scattering su circuito resistivo

Spira quadrata con resistenza R , lato ℓ e normale \hat{n} ; si assume onda incidente con $\lambda \gg \ell$ per considerare campi uniformi su tutta la spira. L'onda incidente è definita da:

$$\vec{E}_{in} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{x}; \quad \vec{B}_{in} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \hat{y}; \quad \vec{S}_{in} = \frac{E_0^2}{Z_0} \cos^2(\omega t - kz)$$

Visto che¹ $\Phi(\vec{B}) = (E_0 \ell^2 / c) \cos(\omega t) \Rightarrow \epsilon = (E_0 \ell^2 \omega / c) \sin(\omega t) \equiv \epsilon_0 \sin(\omega t)$. Questa genera $I(t)$ variabile nel tempo che genera dipolo magnetico variabile nel tempo $\vec{\mu}(t) = \ell^2 I(t) \hat{n} \Rightarrow$ irraggiamento di dipolo magnetico:

$$P_{irr} = \frac{|\ddot{\vec{\mu}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{\ddot{I}(t)^2 \ell^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{[-\omega^2 I(t)]^2 \ell^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{\omega^4 I^2(t) \ell^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} \quad (5.1.4)$$

¹Non si inserisce kz perché onda uniforme sulla spira.

Per trovare $I(t)$:

$$RI^2 + \frac{\omega^4 \ell^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} I^2 = \epsilon I \quad (5.1.5)$$

dove la prima è potenza dissipata da R , la seconda potenza irradiata e terza potenza trasmessa al circuito. Si può definire **resistenza di irraggiamento**:

$$R_{\text{irr}} \equiv \frac{\omega^4 \ell^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} \quad (5.1.6)$$

Quindi:

$$I(t) = \frac{\epsilon_0 \sin(\omega t)}{R + R_{\text{irr}}} \quad (5.1.7)$$

Potenza assorbita e diffusa elasticamente sono:

$$P_{\text{abs}} = RI^2 = \frac{R}{(R + R_{\text{irr}})^2} \epsilon^2; \quad R_{\text{el}} = \frac{R_{\text{irr}}}{(R + R_{\text{irr}})^2} \epsilon^2 \quad (5.1.8)$$

OSSERVAZIONE 5.1. $R_{\text{irr}} \neq 0$ sempre a parte per $\omega = 0$, quindi non ci può essere assorbimento senza diffusione elastica.

Si ottengono le sezioni d'urto¹:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{abs}} &= \frac{\frac{R}{(R + R_{\text{irr}})^2} \frac{\epsilon_0^2}{2}}{\frac{E_0^2}{2Z_0}} = \frac{Z_0 \omega^2 \ell^2 B_0^2}{c^2 B_0^2} \frac{R}{(R + R_{\text{irr}})^2} = \frac{4\pi^2 Z_0 \ell^4}{\lambda^2} \frac{R}{(R + R_{\text{irr}})^2} \\ \sigma_{\text{el}} &= \frac{4\pi^2 Z_0 \ell^4}{\lambda^2} \frac{R_{\text{irr}}}{(R + R_{\text{irr}})^2} \\ \Rightarrow \sigma_{\text{tot}} &= \frac{4\pi^2 \ell^4}{\lambda^2} \frac{Z_0}{(R + R_{\text{irr}})^2} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

¹In quella di assorbimento, $\epsilon_0/2$ e $E_0^2/2$ si trovano da media temporale.

5.2 Indagine della materia con particelle

5.2.1 Rilascio di dose in acqua

Fascio di fotoni da $E_\gamma = 10$ keV penetrano in acqua; ad una distanza x dalla superficie, si individua un parallelepipedo di lato Δx e superficie ΔS . Il flusso di fotoni è $\Phi_0 = 10^9$ fotoni/cm².

Si cerca la dose rilasciata nel volume $\Delta V = \Delta x \Delta S$, indicata con $D(x)$ e data da energia/massa, le cui unità di misura sono $[D] = \text{J/kg} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gy} = \text{Gray}$.

Svolgimento. Si indica con ρ la densità dell'acqua e con M la sua massa molare.

Per quanto visto su flusso di particelle incidenti su lamina di spessore Δx , si ha $\Phi(x) = \Phi_0 e^{-n\sigma_{\text{tot}}x} \equiv \Phi_0 e^{-x/\ell}$. Usando sito sulle sezioni d'urto, per l'acqua:

$$\frac{1}{\ell} = n\sigma_{\text{tot}} = \frac{\rho N_{\text{Av}}}{M} \sigma_{\text{tot}} \equiv \rho \lambda(E_\gamma) \approx 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 5.3 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \Rightarrow \ell \approx 1.9 \text{ mm}$$

dove $\lambda(E_\gamma)$ è **coefficiente di attenuazione di massa** e dipende da E_γ per σ_{tot} . Si cerca $\Delta N/\Delta M$ rapporto tra densità di fotoni e massa in ΔV .

La seconda è $\rho \Delta V$, mentre per la prima si sa che $\Phi(x)$ è il flusso non assorbito per interazione, pertanto $-\frac{d\Phi}{dx}$ aumenta quando Φ diminuisce, cioè quando si verificano interazioni dei fotoni con l'acqua. Allora, il numero di fotoni interagenti che producono elettroni liberi in ΔV è $(-\frac{d\Phi}{dx} \Delta x) \Delta S$, dove la parentesi è il numero di fotoni che hanno interagito in Δx e, quindi, moltiplicato per ΔS rappresenta il numero di fotoni interagenti in ΔV . Sotto l'assunzione che gli elettroni liberati in ΔV tendano a rimanerci:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{\Delta V} &= \frac{-\frac{d\Phi}{dx} \Delta x \Delta S}{\rho \Delta V} = \frac{1}{\rho} = \lambda \Phi_0 e^{-x/\ell} \\ \Rightarrow D(x) &= (E_\gamma - |E_{\text{leg}}|) \lambda \Phi_0 e^{-x/\ell} = E_\gamma \lambda \Phi_0 e^{-x/\ell} \approx (8.5 \text{ mGy}) e^{-x/\ell} \end{aligned}$$

dove non tutta l'energia del fotone va in energia dell'elettrone, ma in parte viene utilizzata per rompere il legame. In questo caso, la differenza è circa uguale a E_γ . ♠

5.2.2 Neutrini in impatto su superficie terrestre

Diametro Terra $D \approx 1.3 \cdot 10^9$ km. Incidono 1 GeV su superficie terrestre e si vuole sapere se riescono ad attraversare la Terra.

Svolgimento. La probabilità di interazione, in assunzione di lamina sottile¹, è $P_{\text{int}} = n D \sigma_{\text{tot}}$ ²; sapendo che

$$n = \frac{\langle \rho \rangle N_{\text{Av}} \langle A \rangle}{\langle M \rangle}$$

con $\langle \rho \rangle$ densità media, $\langle A \rangle$ valore medio di nucleoni per atomo e $\langle M \rangle$ valore medio di massa molare (vale per definizione $\langle M \rangle / \langle A \rangle = 1$ g), si ha:

$$P_{\text{int}} \approx \frac{5.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 6 \cdot 10^{23}}{1 \text{ g}} (1.3 \cdot 10^9 \text{ cm}^2) (7 \cdot 10^{-39} \text{ cm}^2) \approx 3 \cdot 10^{-5}$$

Quindi un neutrino vede la Terra come fosse trasparente, cioè probabilità di interazione trascurabile. ♠

¹ Si sa in anticipo che è valida, quindi la si usa direttamente, altrimenti si può verificare a posteriori osservando se il numero di interazioni è talmente alto da invalidarla.

² Si sta considerando flusso di neutrini collimato lungo il diametro.

5.2.3 Interazione forte

Calcolare T_{\min} per far toccare un protone con ^{12}C (si intende nucleo di carbonio) nei casi $\theta = \pi$, $\theta = \pi/3$, $\theta = 100 \text{ mrad}$.

Svolgimento. Si ha $x \approx 6 \text{ fm}$ e, al contempo:

$$6 \text{ fm} \approx x = \frac{1}{2}(1.44 \text{ MeV}) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

Allora per $\theta = \pi \Rightarrow 1.44 \text{ MeV}$; $\theta = \pi/3 \Rightarrow 2.1 \text{ MeV}$; $\theta = 0.1 \text{ rad} \Rightarrow 14.7 \text{ MeV}$. ♠

5.2.4 Q-valore per alcune reazioni di decadimento nucleare

Per $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ con $\tau_n \approx 15 \text{ min}$ e $\tau_{n,1/2} \approx 10 \text{ min}$. Per il Q-valore¹:

$$m_n = m_p + m_e + Q \approx m(^1\text{H}) + Q \Rightarrow \Delta_n + A m_n = \Delta_{^1\text{H}} + A m_n$$

con $A = 1$; allora

$$Q = \Delta_n - \Delta_{^1\text{H}} \approx 0.782 \text{ MeV} > 0$$

quindi la reazione avviene spontaneamente.

OSSERVAZIONE 5.2. Processo nel nucleo può essere inibito da forza nucleare forte.

Si considera decadimento β del trizio $^3_1\text{H}_2 \rightarrow ^3_2\text{He}_1^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, da cui

$$Q = \Delta_{3,1} - \Delta_{3,2} \approx 19 \text{ keV} > 0$$

Un altro decadimento è $^2_1\text{H}_1 \rightarrow ^1_1\text{H}_0 + p + e^- + \bar{\nu}_e$, per cui si ha:

$$Q \approx -1.442 \text{ MeV} < 0$$

che non avviene spontaneamente.

¹Si può utilizzare il difetto di massa per calcolare il Q-valore in modo più esplicito, ma si può fare anche direttamente tramite le masse degli elementi.

5.3 Interazione della materia con particelle cariche

5.3.1 Energia persa da elettrone ultrarelativistico in materiale solido

Calcolare N_γ , ΔE per e^- con velocità $\beta \rightarrow 1$ in materiale di spessore $\Delta x = 1$ cm e

$$n = \begin{cases} 1.5 & , 0 < E_\gamma < 10 \text{ eV} \\ 1 & , E_\gamma > 10 \text{ eV} \end{cases}$$

Si considera $\beta = 0.9999$.

Svolgimento. Dalla formula di Frank-Tamm, considerando solo intervallo in cui la radiazione nel materiale non si comporta come nel vuoto, cioè solo per $0 < E_\gamma < 10$ eV:

$$N_\gamma = \Delta x \int_{0 \text{ eV}}^{10 \text{ eV}} \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{(1.5 \cdot 0.9999)^2} \right) dE_\gamma \approx 2000$$

quindi, si può scrivere:

$$\Delta E = N_\gamma E_{\max} = N_\gamma \cdot 10 \text{ eV} \approx 20000 \text{ eV}$$

