RIASSUNTI DI ALGEBRA

Manuel Deodato

Indice

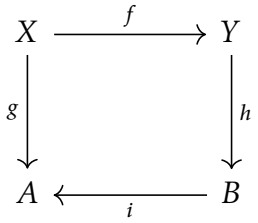
1 | Nozioni fondamentali

§1.1 Applicazioni

Proposizione 1.1. Sia $f : X \to Y$; valgono le seguenti proprietà:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

Un diagramma è detto **commutativo** se e soltanto se ogni cammino con stessa partenza e stesso arrivo danno lo stesso risultato per composizione. Nel caso del diagramma



questo è commutativo se e solo se $(h \circ f)(x) = (i \circ g)(x)$.

§1.2 Relazioni

Sia X un insieme e $R \subseteq X \times X$. Si dice che ad R è associata una **relazione** $\sim_R$ (o più semplicemente $\sim$ quando non vi è ambiguità) su X se $x \sim_R y \iff (x, y) \in R$.

Un esempio, sono le relazioni di equivalenza, cioè relazioni che soddisfano le proprietà *riflessiva* ($x \sim x$), *simmetrica* ($x \sim y \iff y \sim x$) e *transitiva* ($x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$).

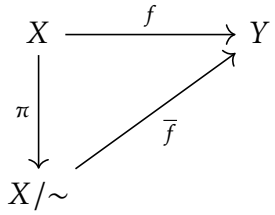
Teorema 1.1. Se $\sim$ è una relazione di equivalenza su X, allora la famiglia delle sue classi di equivalenza è una partizione di X. Viceversa, se $\mathcal{P}$ è una partizione di X, allora induce, su X, una relazione di equivalenza data da

$$x \sim y \iff \exists C \in \mathcal{P} : x, y \in C$$

che ha, per classi, gli insiemi C della partizione $\mathcal{P}$.

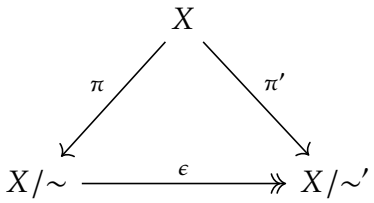
Definizione 1.1. $f : X \to Y$ è *compatibile* con $\sim$ su X se $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

Data $X \xrightarrow{f} Y$ compatibile con $\sim$ su X e $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ *proiezione al quoziente*, allora **esiste un'unica applicazione** $f = \overline{f} \circ \pi$ che rende



commutativo.

Se $\sim$ e $\sim'$ sono due relazioni su X, con $x \sim y \Rightarrow x \sim' y$, allora la partizione $\mathcal{P}$ indotta da $\sim$ è più fine di $\mathcal{P}'$, cioè quella indotta da $\sim'$. Questo significa che per ogni classe $C \in \mathcal{P}$, $\exists C' \in \mathcal{P}'$ tale che $C \subseteq C'$; in questo senso, la corrispondenza $C \longmapsto C'$ è un'applicazione suriettiva ϵ che rende commutativo il seguente diagramma:



Definizione 1.2 (Insieme di rappresentanti). Dato X un insieme e $\sim$ relazione di equivalenza su X, un insieme $\mathcal{R} \subseteq X$ è un *insieme di rappresentanti* se

$$\pi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \subseteq X \longrightarrow X/\sim$$

è biettiva.

Questo vuol dire che, per ogni classe di equivalenza, si è scelto un singolo elemento di X ad essa associato tramite la proiezione al quoziente π.

§1.3 Divisibilità tra interi

Proposizione 1.2 (Algoritmo di Euclide). Siano a, b due interi non negativi, con $a \geq b$. Si prendono $r_0 = a$ e $r_1 = b$; se, per $k \geq 1$, $r_k > 0$, allora si definisce ricorsivamente r_{k+1} come il resto della divisione di r_{k-1} per r_k. Essendo $r_0 > r_1 > \ldots \geq 0$, in un numero finito di passi, siano n per esempio, si ottiene $r_n = 0$. Allora $(a, b) = r_{n-1}$.

2 | Teoria dei gruppi 2

§2.1 Automorfismi e azioni

Proposizione 2.1. Dato un gruppo G, si ha che $\operatorname{Int} G \triangleleft \operatorname{Aut} G$ e $\operatorname{Int} G \cong G/Z(G)$.

Definizione 2.1 (Azione). Un'azione di G gruppo su X insieme è un omomorfismo

$$\gamma : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ biettiva}\} \\ g & \longmapsto & \psi_g : \psi_g(x) = g \cdot x \end{array}$$

Cioè un'azione di G permette di identificare un modo in cui un elemento del gruppo può agire (tramite una permutazione) sull'insieme X.

Un'azione di gruppo è ben definita se:

(a). $e \cdot x = x,\ \forall x \in X$, con $e \in G$ identità;

(b). $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$, per $g, h \in G$ e $x \in X$.

Relativamente ad un'azione $\gamma : G \to S(X)$, si definiscono:

- **orbita:** dato $x \in X$, la sua orbita è l'insieme $\operatorname{Orb} x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$;
- **stabilizzatore:** dato $x \in X$, il suo stabilizzatore è l'insieme

$$\operatorname{Stab} x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} < G$$

Le orbite partizionano X, visto che $x \sim_\gamma y \iff \operatorname{Orb} x = \operatorname{Orb} y$, quindi:

$$|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\operatorname{Orb} x|$$

Lemma 2.0.1 (Orbita-stabilizzatore). Esiste una biezione $\operatorname{Orb} x \longrightarrow G/\operatorname{Stab} x$ definita da $g \cdot x \longmapsto g \operatorname{Stab} x$.

§2.1.1 Azioni per coniugio

Per $X = G$ e $\gamma : G \longrightarrow \operatorname{Int} G \subset S(G)$ si ha l'azione per coniugio. Le orbite sono le **classi di coniugio** $\mathrm{Cl}(x)$ e gli stabilizzatori sono detti **centralizzatori** $Z(x)$. Per il lemma orbita-stabilizzatore, si ha $|G| = |\mathrm{Cl}(x)||Z(x)|$.

Si può far agire G su $X = \{H \leq G\}$ con $g \cdot H = gHg^{-1}$. In questo caso, le orbite non hanno un nome particolare, ma gli stabilizzatori si dicono **normalizzatori** $N_G(H)$. In questo senso, $H \lhd G \iff N_G(H) = G$. Questo significa che $N_G(H)$ contiene tutti i generatori $g_1, \dots, g_n$ di G, quindi $g_i H g_i^{-1} = H,\ \forall i$.

Dall'azione per coniugio, si ottiene la **formula delle classi di coniugio**:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z(x)|}$$

§2.2 I p-gruppi

Definizione 2.2. Un p-gruppo è un gruppo G di ordine p^n per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 2.2. Il centro di un p-gruppo è non-banale.

Proposizione 2.3. Un gruppo di ordine p^2 è abeliano.

Teorema 2.1. Ogni p-gruppo G di ordine p^n ha sottogruppi G_k di ordine p^k, $k = 0, \dots, n$ tali che

$$\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G$$

§2.3 Teoremi di Cauchy e Cayley

Teorema 2.2 (Cauchy). Sia p un primo e G un gruppo finito; se $p \mid |G|$, allora G ha un elemento di ordine p.

Teorema 2.3 (Cayley). Ogni gruppo G è isomorfo a un sottogruppo di $S(G)$. Se $|G| = n$, allora $G \hookrightarrow S_n$.

§2.4 Commutatore e gruppo derivato

Definizione 2.3 (Derivato). Dato G gruppo, si definisce il derivato come

$$G' = [G : G] := \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle$$

cioè è il più piccolo sottogruppo di G contenente tutti i commutatori.

Le sue proprietà sono le seguenti:

- $G' = \{e\} \iff G$ abeliano;
- $G' \triangleleft G$;
- G' caratteristico in G;
- se $H \triangleleft G$ è tale che G/H è abeliano, allora $G' \subset H$.

Proposizione 2.4. Sia G un gruppo e G' il suo derivato. Allora $G_{\text{ab}} = G/G'$ è abeliano ed è il più grande quoziente abeliano di G.

§2.5 Il gruppo diedrale

Proposizione 2.5. Tutti gli elementi di D_n si scrivono come $\sigma\rho^i$, oppure come ρ^i, per $i = 0, \dots, n-1$.

Proposizione 2.6. In D_n, il numero di elementi di ordine k è dato da:

$$\begin{cases} n+1 & , \text{ se } k = 2,\ n \text{ pari} \\ n & , \text{ se } k = 2,\ n \text{ dispari} \\ \phi(k) & , \text{ se } k \mid n \\ 0 & , \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Di seguito, si riportano tutte le caratteristiche riguardanti la struttura di D_n.

- **Sottogruppi.** Un sottogruppo di D_n può essere composto da sole rotazioni, caso in cui coincide con un sottogruppo di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, oppure ha, in egual numero, rotazioni e riflessioni, caso in cui è isomorfo a D_m, per qualche m.
- **Sottogruppi normali.** Visto che $[D_n : C_n] = 2$, allora $C_n \triangleleft D_n$. Ogni sottogruppo di C_n è caratteristico in C_n perché unico, quindi è automaticamente normale in

D_n. Se n è pari, si può definire $H = \langle \rho^2 \rangle \sqcup \tau \langle \rho^2 \rangle$, per cui $[D_n : H] = 2 \Rightarrow H \triangleleft D_n$. In questo caso, sottogruppi di questa forma sono $\langle \rho^2, \sigma \rangle$ e $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$. Se n è dispari, invece, un sottogruppo normale contenente una riflessione, le deve contenere tutte, quindi coincide con D_n.

- **Sottogruppi caratteristici.** Per $n \geq 3$, C_n e i suoi sottogruppi di ordine $d > 2$, $d \mid n$ sono gli unici ad essere sempre caratteristici. Per gli n pari, $\langle \rho^2, \sigma \rangle$ e $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$ non sono caratteristici perché $\tau : D_n \to D_n$ con $\tau(\rho) = \rho$ e $\tau(\sigma) = \sigma\rho$ è un automorfismo ben definito che scambia i due sottogruppi.
- **Centro.** Se n è dispari, $Z(D_n) = \{e\}$, mentre, se n è pari, $Z(D_n) = \left\{e, \rho^{n/2}\right\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- **Quozienti.** Questi sono in corrispondenza biunivoca con i sottogruppi normali. In generale, si ha $D_n/\langle \rho^m \rangle \cong D_m$. Per n pari, invece, i quozienti relativi a $\langle \rho^2, \sigma \rangle$ e $\langle \rho^2, \sigma\rho \rangle$ hanno indice due, quindi sono isomorfi a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- **Automorfismi.** Un automorfismo di D_n è della forma

$$\gamma : \begin{array}{ccc} D_n & \longrightarrow & D_n \\ \rho & \longmapsto & \rho^i \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\rho^j \end{array}, \qquad \gcd(i, n) = 1$$

  Allora $|\mathrm{Aut}(D_n)| = n\phi(n)$.

$$D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

§2.6 Il gruppo simmetrico

Proposizione 2.7. Ogni k-ciclo ha k scritture equivalenti.

Proposizione 2.8. I cicli di una permutazione di S_n sono le orbite degli elementi di $X = \{1, \dots, n\}$ formate dall'azione indotta da tale permutazione.

Corollario 2.3.1. S_n è generato dai cicli.

Proposizione 2.9. Ogni permutazione si scrive come composizione di trasposizioni.

L'applicazione **segno** è definita da

$$\operatorname{sgn} : \begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & \{\pm 1\} \\ \sigma & \longmapsto & \displaystyle\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} \end{array}$$

ed è un omomorfismo di gruppi. Vale -1 sulle trasposizioni; infatti, restituisce la parità del numero di trasposizioni presenti nella decomposizione di una permutazione. Il suo nucleo coincide con $A_n \lhd S_n$.

> **Teorema 2.4.** Due permutazioni id S_n sono coniugate se e solo se hanno lo stesso tipo di decomposizione in cicli disgiunti.

Di seguito, la caratterizzazione di S_n e dei suoi elementi.

- **Numero di un certo tipo di permutazioni con precisa decomposizione.** In S_n, il numero complessivo di k-cicli è ottenuto tramite

  $$\binom{n}{k}(k-1)!$$

  Volendo cercare quante permutazioni con una precisa decomposizione in cicli disgiunti ci sono, si procede come da esempio. In S_{12}, il numero di permutazioni date dalla composizione di due 3-cicli e tre 2-cicli è

  $$\binom{12}{3}\frac{3!}{3}\binom{9}{3}\frac{3!}{3}\binom{6}{3}\frac{2!}{2}\binom{4}{3}\frac{2!}{2}\binom{2}{3}\frac{2!}{2}\frac{1}{3!2!}$$

  Questo si generalizza nella seguente formula:

  $$\frac{n!}{\prod_{k\ge 1}\left[k^{m_k}(m_k!)\right]}$$

  con m_k numero di k-cicli.

- **Ordine di una permutazione.** Un k-ciclo ha ordine k; se una permutazione è composta da ℓ cicli disgiunti σ_i, allora il suo ordine è

  $$\operatorname{lcm}\big(\operatorname{ord}(\sigma_1),\dots,\operatorname{ord}(\sigma_\ell)\big)$$

- **Centralizzatore di una permutazione.** Sapendo che due permutazioni sono coniugate se e solo se hanno lo stesso tipo di decomposizione in cicli disgiunti, si

sa calcolare $|\mathrm{Cl}(\sigma)|$ tramite la formula al primo punto. Per orbita-stabilizzatore, si ha $|Z(\sigma)||\mathrm{Cl}(\sigma)| = n!$, quindi si può calcolare $|Z(\sigma)|$.

Proposizione 2.10. Per la formula delle classi, $|Z_{S_n}(\sigma)||\mathrm{Cl}_{S_n}(\sigma)| = n!$ e $|Z_{A_n}(\sigma)||\mathrm{Cl}_{A_n}(\sigma)| = n!/2$, con:

$$Z_{A_n}(\sigma) = Z_{S_n}(\sigma) \cap A_n$$

Per la stessa formula, nel passare da $\mathrm{Cl}_{S_n}(\sigma)$ a $\mathrm{Cl}_{A_n}(\sigma)$ e da $Z_{S_n}(\sigma)$ a $Z_{A_n}(\sigma)$, uno dei due dimezza di ordine, mentre l'altro rimane invariato.

Proposizione 2.11. Dato $H < S_n$, allora o $H \subset A_n$, quindi $|H \cap A_n| = |H|$, oppure $|H \cap A_n| = |H|/2$.

Proposizione 2.12. I 3-cicli sono tutti coniugati in A_n, per $n \geq 5$.

Proposizione 2.13. I 5-cicli in A_5 NON sono tutti coniugati.

Proposizione 2.14. A_4 non ha sottogruppi di ordine 6.

Teorema 2.5. A_n è semplice $\forall n \geq 5$.

$$S_n \cong A_n \rtimes \langle \tau \rangle, \text{ con } \tau \text{ trasposizione}$$

§2.7 I quaternioni

Il gruppo è definito come $Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = 1,\ i^2 = j^2,\ ij = j^3 i \rangle$. $i^4 = 1$ e $i^2 = j^2$, allora $j^4 = 1$, quindi $\mathrm{ord}(j) \mid 4$. Poi $\mathrm{ord}(j^2) = \mathrm{ord}(i^2) = 2$, quindi $\mathrm{ord}(j) = 4$. Allora Q_8 ha due gruppi ciclici di ordine 4: $\langle i \rangle$ e $\langle j \rangle$, con $\langle i \rangle \cap \langle j \rangle = \{1, i^2 = j^2\}$. Visto che $\langle i \rangle, \langle j \rangle < Q_8$ e $|\langle i \rangle \langle j \rangle| = 8$, allora

$$Q_8 = \langle i \rangle \langle j \rangle = \{1, i, i^2, i^3, j, j^3, ij, i^3 j\}$$

visto che $\langle i \rangle, \langle j \rangle \triangleleft Q_8$ (hanno indice 2).

Osservazione 2.1. Q_8 non è abeliano: $ij = j^3 i = j^{-1} i \neq ji$.

Di seguito, la caratterizzazione strutturale del gruppo.

- **Sottogruppi.** $\langle i \rangle, \langle j \rangle \triangleleft Q_8$ perché hanno indice 2. Anche $\langle i^2 \rangle = \langle j^2 \rangle \triangleleft Q_8$ perché i^2 (quindi j^2) commuta con i generatori.
- **Centro.** Si ha $\langle i^2 \rangle = Z(Q_8)$ perché $\langle i^2 \rangle$ ha ordine 2, quindi contenuto in $Z(Q_8)$; al contempo, $|Z(Q_8)| \in \{2, 4, 8\}$, ma, se non fosse 2, Q_8 sarebbe abeliano.

- **Elementi.** Prendendo $k = ij$ e $i^2 = -1$, si ha

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

  Si ha $i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = -i \Rightarrow i^3 j = -ij = -k$. Quindi: $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ e $ji = -k$, $ik = -j$ e $kj = -i$. Infine, $k^2 = (ij)^2 = ijij = i^2$, quindi $\text{ord}(k) = 4$. In questi termini, $\langle -1 \rangle = Z(Q_8)$.

- **Sottogruppi normali e caratteristici.** Per quanto detto, $\langle -1 \rangle = Z(Q_8)$ quindi è caratteristico e, in particolare, normale. Invece $\langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle \triangleleft Q_8$, ma non sono caratteristici. Allora ogni sottogruppo di Q_8 è normale.

- **Prodotto semi-diretto.** Si nota che Q_8 non si può ottenere come prodotto semi-diretto perché ogni coppia di sottogruppi non si interseca mai solo in 1, ma anche -1.

§2.8 Prodotti diretti

Teorema 2.6 (Decomposizione diretta). Sia G un gruppo e siano $H, K \triangleleft G$; se $HK = G$ e $H \cap K = \{e\}$, allora $G \cong H \times K$.

Corollario 2.6.1. In un prodotto diretto, i fattori commutano fra loro.

Corollario 2.6.2. Se $G = H \times K$, allora $Z(H \times K) \cong Z(H) \times Z(K)$, visto che $Z(H) \times \{e_k\}$ e $\{e_H\} \times Z_k$ sono sottogruppi normali di $Z(H \times K)$. Questo implica che

$$\text{Int}(H \times K) \cong \frac{H \times K}{Z(H \times K)} \cong H/Z(H) \times K/Z(K) \cong \text{Int}(H) \times \text{Int}(K)$$

Teorema 2.7. Si ha $\text{Aut}(H \times K) \cong \text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K)$ se e soltanto se $H \times \{e_K\}$ e $\{e_H\} \times K$ sono caratteristici in $H \times K$. Altrimenti $\text{Aut}(H) \times \text{Aut}(K) \hookrightarrow \text{Aut}(H \times K)$.

Corollario 2.7.1. Sia $G = H \times K$, con $|H| = n$ e $|K| = m$; se $\gcd(n, m) = 1$, allora $H \times \{e_K\}$, $\{e_H\} \times K$ sono caratteristici in G.

§2.9 Prodotti semi-diretti

Definizione 2.4 (Prodotto semi-diretto). Siano H, K due gruppi e $\gamma : K \to \text{Aut}(H)$ un omomorfismo tale che $\gamma(k) = \gamma_k \in \text{Aut}(H)$. Allora si definisce $H \rtimes_\gamma K$ il gruppo

$H \times K$ la cui operazione di gruppo è definita da

$$(h,k) * (h',k') = \left(h\gamma_k(h'), kk'\right)$$

Il prodotto diretto è dato da $\gamma(K) = \mathrm{Id}_H$.

Proposizione 2.15. Si considera $H \rtimes_\gamma K$ e si definiscono $\overline{H} = H \times \{e_K\}$ e $\overline{K} = \{e_H\} \times K$. Per costruzione, $\overline{K}, \overline{H} \lhd H \times K$, mentre:

- $\overline{H} \lhd H \rtimes_\gamma K$ sempre;
- $\overline{K} \lhd H \rtimes_\gamma K \iff$ il prodotto è diretto.

Teorema 2.8 (Decomposizione semi-diretta). Sia G un gruppo e siano $H \lhd G$ e $K < G$. Se $HK = G$ e $H \cap K = \{e\}$, allora $G \cong H \rtimes_\gamma K$, con $\gamma : K \to \mathrm{Aut}(H)$ e $\gamma(k) = khk^{-1}$.

§2.10 Teorema di struttura per gruppi abeliani finiti

§2.11 Risultati sulle classificazioni

- **Classificazione dei gruppi di ordine 6.**
- **Classificazione dei gruppi di ordine pq.**

§2.12 Risultati vari sui gruppi

Proposizione 2.16. $G/Z(G)$ ciclico $\iff$ G abeliano.

Proposizione 2.17. Se $H, K < G$, allora $HK < G \iff HK = KH$; in questo caso, $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

Proposizione 2.18. Se $H, K \lhd G$, con $H \cap K = \{e\}$, allora $hk = kh,\ \forall h \in H,\ \forall k \in K$.

Proposizione 2.19. Sia $H < G$ con $[G : H] = 2$; allora $H \lhd G$.

Proposizione 2.20. Siano $H \lhd G$ e K sottogruppo caratteristico di H; allora $K \lhd G$.

Proposizione 2.21. Sia $H < G$, con $|H| = 2$; allora H è normale se e solo se $H < Z(G)$.

3 | Esercizi

§3.1 Esercizi su gruppi 1

Esercizio 3.1. Sia $G = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$; determinare il numero degli omomorfismi $f : G \to G$. Inoltre, dati $n \in \mathbb{N}$ e $f_n : G \to G$ l'omomorfismo dato da $f_n(x) = nx$, determinare:

(a). per quali valori di n, $\operatorname{Ker} f_n$ è ciclico;

(b). per quali valori di n, $\operatorname{Im} f_n$ è ciclico.

§3.2 Esercizi su campi e anelli 1

Esercizio 3.2. Sia $f(x) = x^4 + x^3 - 3 \in \mathbb{F}_7[x]$. Determinare il numero di divisori dello zero e l'inverso di $\overline{x+1}$ in $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$.

Svolgimento. Si scompone $f(x)$ in $\mathbb{F}_7[x]$; per farlo, si vede se ha radici, calcolando $f(a)$, per $a = 0, 1, \dots, 6$. Provando, si vede che:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= -3 \equiv 4 \pmod 7 \\
f(1) &= -1 \equiv 6 \pmod 7 \\
f(2) &= 16 + 8 - 3 = 21 \equiv 0 \pmod 7 \\
f(3) &= 81 + 27 - 3 = 105 \equiv 0 \pmod 7 \\
f(4) &= 256 + 64 - 3 = 317 = 280 + 37 \equiv 2 \pmod 7 \\
f(5) &= 625 + 125 - 3 = 747 = 735 + 12 \equiv 5 \pmod 7 \\
f(6) &= 1296 + 216 - 3 = 1509 = 1498 + 11 \equiv 4 \pmod 7
\end{aligned}
$$

Per effettuare la fattorizzazione di $f(x)$, si usa Ruffini. Iniziando con $(x-2)$, visto che $f(x) = x^4 + x^3 - 3 \equiv x^4 + x^3 + 4 \bmod 7$, si ottiene:

2	1	1	0	0	4
		2	6	5	3
	1	3	6	5	0

$$f(x) = (x-2)\left(x^3 + 3x^2 + 6x + 5\right) = (x-2)g(x)$$

Evidentemente, $g(3) = 0 \implies (x-3) \mid g(x)$; usando ancora Ruffini, si ha:

3	1	3	6	5
		3	4	2
	1	6	3	0

$$f(x) = (x-2)g(x) = (x-2)(x-3)\left(x^2+6x+3\right)$$

dove si nota che x^2+6x+3 non si annulla né per $x=2$, né per $x=3$, quindi è irriducibile in $\mathbb{F}_7[x]$ (altrimenti $f(x)$ avrebbe una radice diversa da $x=2,3$, che è assurdo per i calcoli svolti sopra). In questo modo, si può studiare nel dettaglio $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$. Intanto, visto che $f(x)$ è un polinomio di grado 4 in $\mathbb{F}_7[x]$, tale quoziente sarà composto da tutti i polinomi della forma

$$ax^3+bx^2+cx+d,\ a,b,c,d \in \mathbb{F}_7$$

pertanto avrà un totale di 7^4 elementi. Le unità di $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$ sono tutte quelle classi $\overline{h(x)}$ tali che $\big(f(x),h(x)\big)=1$; per studiare meglio questo fatto, si usa il teorema cinese del resto per anelli a partire dall'osservazione che $x-2$, $x-3$ e x^2+6x+3 sono coprimi tra loro:

$$\frac{\mathbb{F}_7[x]}{\langle (x-2)(x-3)(x^2+6x+3)\rangle} \cong \mathbb{F}_7[x]/\langle x-2\rangle \times \mathbb{F}_7[x]/\langle x-3\rangle \times \mathbb{F}_7[x]/\langle x^2+6x+3\rangle$$

Per studiare il numero delle unità complessive di $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$, si studia singolarmente ciascun fattore:

- $\mathbb{F}_7[x]/\langle x-2\rangle \cong \mathbb{F}_7$, quindi ha 7 elementi, per un totale di 6 unità;
- $\mathbb{F}_7[x]/\langle x-3\rangle \cong \mathbb{F}_7$, quindi ha 6 unità;
- $\mathbb{F}_7[x]/\langle x^2+6x+3\rangle$ è un campo perché x^2+6x+3 è irriducibile in $\mathbb{F}_7[x]$ e ha un totale di $7^2=49$ elementi, quindi è isomorfo a $\mathbb{F}_{49}$, con un totale di 48 unità.

Da questo si conclude che il numero totale di unità in $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$ è $6\cdot 6\cdot 48 = 1728$ unità. Essendo interessati ai divisori dello zero, sapendo che divisori dello zero e unità partizionano l'anello (a parte lo zero), si ha che, in totale, sono $7^4 - 1728 = 2401 - 1728 = 673$ incluso lo zero.

Per finire, si calcola l'inverso di $\overline{x+1}$ in $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$. Intanto si nota che $x+1$ è coprimo con $f(x)$ perché si annulla in $-1 \equiv 6 \bmod 7$, quindi l'inverso in $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$

esiste. Si cerca un polinomio $a(x) \in \mathbb{F}_7[x]$ che soddisfa

$$a(x)(x+1) + b(x)f(x) = 1$$

cosicché, in $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$, $\overline{a(x)}(\overline{x+1}) = 1$. Per iniziare, si divide $f(x)$ per $x+1$ (usando $-1 \equiv 6 \bmod 7$):

$$\begin{array}{c|ccccc} 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)x^3 + 4$$

In $\mathbb{F}_7[x]$, $4^{-1} \equiv 2 \bmod 7$, quindi, moltiplicando tutto per 2 in $\mathbb{F}_7[x]/\langle f(x)\rangle$, si ha:

$$1 = 2f(x) - 2(x+1)x^3 \implies \overline{1} = \overline{-2}(\overline{x+1})\overline{x^3}$$

da cui l'inverso di $\overline{x+1}$ è proprio $\overline{-2x^3} \equiv \overline{5x^3}$, visto che $-2 \equiv 5 \bmod 7$. ■

Esercizio 3.3. Sia m un numero intero e sia

$$f_m(x) = (x^2 - m)(x^4 - 25)$$

Determinare, per ogni valore intero di m, il grado del campo di spezzamento di $f_m(x)$ su $\mathbb{Q}$.

Svolgimento. Il campo di spezzamento per $f_m(x)$ si ottiene aggiungendo a $\mathbb{Q}$ le radici dei due fattori $x^2 - m$ e $x^4 - 25$. Si può notare che

$$x^4 - 25 = (x^2 + 5)(x^2 - 5)$$

Da qui, si ottiene che le radici di $x^4 - 25$ sono $\pm\sqrt{5}$ e $\pm i\sqrt{5}$, quindi il suo campo di spezzamento corrisponde con $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$. Per finire, si osserva che $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$ e $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$, per cui $[K : \mathbb{Q}] = 4$, dato che $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Visto che K è indipendente da m, rimarrà fisso per il resto dell'esercizio.

Quanto al fattore $x^2 - m$, le sue radici sono $\pm\sqrt{m}$, ma qui il campo di spezzamento dipende dalla scelta dell'intero m.

- Se $m = 0$, le radici di $x^2 - m$ sono già contenute in $\mathbb{Q}$ poiché è proprio lo zero.
- Se m è un quadrato perfetto positivo, allora $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ e, anche in questo caso, $\mathbb{Q}$ contiene già le radici.

- Se $m < 0$, invece, le radici sono date da $\pm i\sqrt{|m|}$; in questo caso, se $m = -n^2$, per qualche intero n, allora il suo campo di spezzamento coincide con $\mathbb{Q}(i)$, visto che $\sqrt{|m|} \in \mathbb{Q}$. Altrimenti, il suo campo di spezzamento sarà dato da $\mathbb{Q}(i\sqrt{|m|})$.
- Infine, se $m > 0$ non è un quadrato perfetto, il campo di spezzamento è ottenuto aggiungendo $\sqrt{m}$, quindi coincide con $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Allora, il campo di spezzamento per questo fattore, al variare di $m \in \mathbb{Z}$, è dato da:

$$L = \begin{cases} \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}(i\sqrt{m}) \\ \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \end{cases}$$

Visto che i è già stato aggiunto per la radice del secondo fattore, ci si può concentrare sul trattare i casi in cui $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ o $L = \mathbb{Q}$.

Per concludere, quindi, il campo di spezzamento del polinomio $f_m(x)$ su $\mathbb{Q}$ è dato da $E = KL$, con le varie possibilità per L al variare di $m \in \mathbb{Z}$:

- se $m = 0$, m (positivo o negativo) quadrato perfetto, oppure $m = \pm 5$, allora $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$;
- se m (positivo o negativo) NON è un quadrato perfetto e $|m| \neq 5$, allora $E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{|m|}, i)$.

Nel primo caso, il grado dell'estensione rimane quello di K, ossia $[E : \mathbb{Q}] = 4$, mentre, nel secondo caso, $[E : \mathbb{Q}] = 2^3 = 8$. ■

Esercizio 3.4. Siano $f(x) = x^3 + 3x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2$.

(a). Se α è una radice complessa di $f(x)$, determinare il polinomio minimo di $1/(\alpha + 2)$ su $\mathbb{Q}$.

(b). Determinare l'insieme dei numeri primi p tali che $f(x)$ e $g(x)$, considerati a coefficienti in $\mathbb{F}_p$, hanno una radice comune.

Svolgimento. Si divide lo svolgimento nei due punti.

(a). Sia α una radice complessa di $f(x)$. Si cerca il polinomio minimo di

$$\beta = \frac{1}{\alpha + 2} \implies \alpha\beta + 2\beta = 1 \implies \alpha = \frac{1}{\beta} - 2$$

Visto che $f(\alpha) = 0$, allora:

$$\left(\frac{1}{\beta} - 2\right)^3 + 3\left(\frac{1}{\beta} - 2\right) - 1 = 0$$

Espandendo e riordinando si ottiene un polinomio in β:

$$\frac{1}{\beta^3} - 8 - \frac{6}{\beta^2} + \frac{12}{\beta} + \frac{3}{\beta} - 6 - 15 = 0 \implies \frac{1}{\beta^3} - \frac{6}{\beta^2} + \frac{15}{\beta} = 15$$
$$\implies 15\beta^3 = 1 - 6\beta + 15\beta^2 \implies 15\beta^3 - 15\beta^2 + 6\beta - 1 = 0$$

In questo modo, si ricava il polinomio $p(x) = 15x^3 - 15x^2 + 6x - 1$, che è a coefficienti razionali, ha β come radice ed è di grado 3. Usando Eisenstein con $p = 3$ su $f(x)$, si conclude che è irriducibile su $\mathbb{Q}$, quindi $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$. Infine, visto che $\beta \in Q(\alpha)$ e, viceversa, $\alpha \in Q(\beta)$, si conclude che $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$, pertanto $p(x)$ coincide proprio con il polinomio minimo di β.

(b). Si cercano i primi p tali per cui $\exists a \in \mathbb{F}_p$ con $f(a) = g(a) = 0$. Si nota che $g(a) = 0 \implies a^2 = 2$ in $\mathbb{F}_p$. Passando alla condizione $f(a) = 0$, si ha $a^3 + 3a - 1 = 0$; moltiplicando tutto per a, si ottiene $a^4 + 3a^2 - 1 = 0$. Sostituendo la condizione trovata prima, cioè $a^2 = 2$, si ottiene $4 + 6 - a = 0$, quindi $a = 10$ in $\mathbb{F}_p$.

In questo modo, si ricava che a deve soddisfare due condizioni in $\mathbb{F}_p$: $a \equiv 10 \bmod p$ e $a^2 \equiv 2 \bmod p$, cioè

$$100 \equiv 2 \pmod{p} \implies p \mid 98 = 2 \cdot 7^2$$

Allora le possibilità sono $p = 2$, oppure $p = 7$. Si nota che, per $p = 2$, $g(x) = x^2$ e $f(x) = x^3 + x + 1$, che non hanno radici comuni. Perciò, ci si convince facilmente che l'unico p che soddisfa la richiesta è $p = 7$.

■

Esercizio 3.5. Sia $f(x) = x^6 + 4x^3 + 2$.

(a). Detta α una radice complessa di $f(x)$, determinare il polinomio minimo di $1/\alpha^2$ su $\mathbb{Q}$.

(b). Determinare il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{F}_7$.

Svolgimento. Si divide lo svolgimento nei due punti.

(a). Si nota preliminarmente che $f(x)$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein con $p = 2$. Inoltre, $f(\alpha) = 0$, quindi $\alpha^6 + 2 = -4\alpha^3$; elevando al quadrato, si ottiene che:

$$\alpha^{12} + 4 + 4\alpha^6 = 16\alpha^6 \implies \alpha^{12} - 12\alpha^6 + 4 = 0$$

In questo modo, sostituendo $y = \alpha^2$, si trova $y^6 - 12y^3 + 4 = 0$, quindi $y = \alpha^2$ soddisfa $p(y) = 0$, con $p(x) = x^6 - 12x^3 + 4$. Ora si deve mostrare che $p(x)$ è irriducibile per far vedere che è il polinomio minimo per α^2. Visto che $\mathbb{Q}(\alpha^2) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$, allora $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^2)] \leq 2$, quindi $[\mathbb{Q}(\alpha^2) : \mathbb{Q}] = 3, 6$; si vuole escludere il caso in cui il grado sia 3. In questo caso, è facile convincersi che $p(x)$ dovrebbe scomporsi in due fattori cubici; riducendolo modulo 2, poi, si vede che $\overline{p(x)} = \overline{x^6}$, pertanto i polinomi di grado 3, $A(x)$ e $B(x)$, in cui si scompone $p(x)$ devono avere coefficienti pari, ad eccetto del primo. Svolgendo il prodotto, si vede anche che i termini noti dei due polinomi devono essere $c = c' = \pm 2$, quindi

$$A(x) = x^3 + ux^2 + vx \pm 2 \qquad B(x) = x^3 + u'x^2 + v'x \pm 2$$

con $u, v, u', v' \equiv 0 \bmod 2$. Svolgendo il prodotto, si ottengono le condizioni $u' = -u$, $v' = -u$ per i termini di grado 1 e 5, mentre si ottiene $u^2 = v^2 = 0$ per quelli di grado 4 e 2, da cui l'assurdo. Pertanto, $\mathbb{Q}(\alpha^2) = \mathbb{Q}(\alpha)$ e, visto che $\mathbb{Q}(1/\alpha^2) = \mathbb{Q}(\alpha^2)$, si conclude che il polinomio minimo di $\beta = 1/\alpha^2$ ha grado 6. Riprendendo l'espressione $\alpha^{12} - 12\alpha^6 + 4 = 0$ trovata prima e sostituendo $\alpha^2 = 1/\beta$, si trova:

$$\frac{1}{\beta^6} - \frac{12}{\beta^3} + 4 = 0 \implies 4\beta^6 - 12\beta^3 + 1 = 0 \implies \beta^6 - 3\beta^3 + \frac{1}{4} = 0$$

da cui $P(x) = x^6 - 3x^3 + 1/4$ è il polinomio minimo di β perché soddisfa $P(\beta) = 0$ e ha stesso grado dell'estensione $\mathbb{Q}(\beta)$.

(b). Bisogna capire se $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_7$. Si osserva che, ponendo $t = x^3$, si ottiene $t^2 + 4t + 2 = 0$, con $\Delta = 16 - 8 = 8 \equiv 1 \bmod 7$, che è un quadrato in $\mathbb{F}_7$, pertanto $f(x)$ non è irriducibile. Si nota, poi, che $-3 \equiv 4 \bmod 7$ e $-5 \equiv 2 \bmod 7$, per cui le radici di $t^2+4t+2 = 0$ sono $t = 1, 2$. Tale polinomio, quindi, si scompone in

$$t^2 + 4t + 2 = (t - 1)(t - 2) \implies f(x) = x^6 + 4x^3 + 2 = (x^3 - 1)(x^3 - 2)$$

Si osserva, ora, che gli elementi di $\mathbb{F}_7^\times$ soddisfano $x^6 = 1$; tramite la mappa $\varphi : \mathbb{F}_7^\times \to \mathbb{F}_7^\times$ tale che $x \longmapsto x^3$, si ottiene che $x^2 = 1$. In questo modo, si possono capire quali sono i cubi di $\mathbb{F}_7$; da tale relazione, si trova che questi sono $x = \pm 1$,

cioè $1, 6$. Questo significa che 1 è un cubo e, pertanto, $x^3 - 1$ è riducibile, mentre $x^3 - 2$ no. Le radici di $x^3 = 1$ sono gli elementi di $\mathbb{F}_7^\times$ che hanno ordine 3; visto che $3 \mid 6$, ci sono sicuramente elementi del genere e sono dati da $1, 2, 4$, quindi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-4)(x^3-2)$$

è la scomposizione in irriducibili di $f(x)$. Visto che le radici dei fattori di primo grado sono già in $\mathbb{F}_7$, $\mathrm{Spl}_{\mathbb{F}_7} f(x) = \mathrm{Spl}_{\mathbb{F}_7} x^3 - 2$. Essendo $x^3 - 2$ irriducibile di grado 3, allora, se ξ è una radice $x^3 - 2$, si ha $\mathbb{F}_7(\xi) \cong \mathbb{F}_{7^3}$. Questo permette di concludere che $\mathrm{Spl}_{\mathbb{F}_7} f(x) = \mathbb{F}_{7^3}$.

■

Esercizio 3.6. Determinare il campo di spezzamento di $x^6 - 4$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{F}_{11}$.

Svolgimento. Si inizia col determinarlo su $\mathbb{Q}$. Per farlo, è necessario capire se $x^6 - 4$ è irriducibile; si nota, però, che $x^6 - 4 = (x^3 - 2)(x^3 + 2)$. Questi due fattori, poi, sono irriducibili per Eisenstein con $p = 2$, quindi il campo di spezzamento di $x^6 - 4$ è determinato dai campi di spezzamento di questi due polinomi di grado 3 su $\mathbb{Q}$. Visto che sono irriducibili, la loro estensione avrà grado 3:

- per $\mathrm{Spl}_{\mathbb{Q}} x^3 - 2$, si ha $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, con $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ radice cubica dell'unità;
- per $\mathrm{Spl}_{\mathbb{Q}} x^3 + 2$, si ha lo stesso campo di spezzamento $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, visto che $(-\sqrt[3]{2})^3 = -2$.

Se ne conclude che il campo di spezzamento di $x^6 - 4$ su $\mathbb{Q}$ è dato da $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ ed è un'estensione di grado 6 perché prodotto di un'estensione di grado 2, $\mathbb{Q}(\zeta_3)$, e di un'estensione di grado 3, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Quanto al caso su $\mathbb{F}_{11}$, il procedimento è analogo: si cerca di capire se $x^6 - 4$ ha qualche radice, o se è irriducibile. Si deve capire se $\exists x \in \mathbb{F}_{10}^\times$ tale che $x^6 = 4$, sapendo che gli elementi di tale campo soddisfano $x^{10} = 1$. Pertanto $x^6 = 4$ è soddisfatta se e solo se $4^{10/\gcd(10,6)} = 1$ in $\mathbb{F}_{11}$; visto che $\gcd(10, 6) = 2$, si verifica che $4^5 = 1024 \equiv 1 \bmod 11$. Si nota che:

$$4^2 = 16 \equiv 5 \pmod{11} \qquad 4^4 \equiv 5^2 = 25 \equiv 3 \pmod{11}$$
$$4^5 \equiv 3 \cdot 4 = 12 \equiv 1 \pmod{11}$$

Quindi $x^6 - 4$ si decompone in $\mathbb{F}_{11}$. Per trovare le radici di questo polinomio ci sono due vie: partendo dal fatto che ci sono due elementi che soddisfano $x^6 - 4 = 0$ in $\mathbb{F}_{11}$,

essendo $\gcd(10,6) = 2$, si procede a trovarle manualmente e si usa che, se a è una radice, allora anche $-a$ lo è, oppure si usa che 2 è un generatore di $\mathbb{F}_{11}^{\times}$, quindi

$$x^6 = 4 \iff (2^k)^6 = 2^2 \iff 6k \equiv 2 \pmod{10}$$

che si riduce, dividendo per 2, a $3k \equiv 1 \bmod 5$. Usando che l'inverso di 3 modulo 5 è 2, si ha la congruenza $k \equiv 2 \bmod 5$, che, modulo 10, si traduce in $k = 2, 7$. In questo modo, gli elementi che soddisfano $x^6 - 4 = 0$ sono $2^2 = 4$ e $2^7 = 128 \equiv 7 \bmod 11$. Se ne conclude che $x^6 - 4 = (x-4)(x-7)p(x)$, dove la divisione per $x-2$ restituisce (usando che $-4 \equiv 7 \bmod 11$):

4	1	0	0	0	0	0	7
		4	5	9	3	1	4
	1	4	5	9	3	1	0

$$x^6 - 4 = (x-4)\left(x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 3x + 1\right)$$

Applicando nuovamente Ruffini, si ottiene:

7	1	4	5	9	3	1
		7	0	2	0	10
	1	0	5	0	3	0

$$x^6 - 4 = (x-4)(x-7)\left(x^4 + 5x^2 + 3\right)$$

Allora il campo di spezzamento su $\mathbb{F}_{11}$ di $x^6 - 4$ coincide con quello di $x^4 + 5x^2 + 3$. Per trovare il campo di spezzamento di questo polinomio, si prende $t = x^2$, per cui si ottiene $t^2 + 5t + 3 = 0$, da cui

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{2} \equiv \frac{6 \pm \sqrt{2}}{2} = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{F}_{11}(\sqrt{2}) \cong \mathbb{F}_{11^2}$$

Ne segue che il campo di spezzamento di $x^6 - 4$ è proprio $\mathbb{F}_{11^2}$, in quanto, contenendo t_1 e t_2, contiene anche le rispettive radici quadrate $\pm\sqrt{t_1}$ e $\pm\sqrt{t_2}$. ■

Esercizio 3.7. Calcolare i gradi delle estensioni $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - \sqrt{5})/\mathbb{Q}$. Poi, trovare i polinomi minimi di $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ e di $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - 1$ su $\mathbb{Q}$.

Svolgimento. Per calcolare $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$, si nota che una possibile base è data da $\left\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{3}\sqrt{5}\right\}$. Questo significa che tale estensione ha grado 4. Si nota che quella

esposta è effettivamente una base perché $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ sono indipendenti Per calcolare il grado della seconda estensione, si tiene a mente quanto appena visto; si farà vedere che $\sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$. Per farlo, è sufficiente osservare che $1/(\sqrt{3}-\sqrt{5}), (3-5) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$, per cui:

$$\frac{3-5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$$

Ma allora

$$\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2} \qquad \sqrt{5} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

quindi $\sqrt{3}, \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$. Visto che $\sqrt{3}-\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, si conclude facilmente che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$, da cui $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}-\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$.

Per trovare il polinomio minimo di $\sqrt{3}-\sqrt{5}$, si prende $x = \sqrt{3}-\sqrt{5}$; allora si nota che:

$$\begin{aligned} &x^2 = 3+5-2\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{x^2-8}{2} \\ &\Rightarrow 15 = \frac{1}{4}\left[x^4+64-16x^2\right] \implies x^4-16x^2+4=0 \end{aligned}$$

In questo modo, il candidato polinomio minimo di $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ è proprio $p(y) = y^4-16y^2+4$ perché è stato costruito in modo tale che $p(x) = 0$, $x = \sqrt{3}-\sqrt{5}$. Visto che l'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt{3}-\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ ha grado 4 e che $p(y)$ è un polinomio di grado 4 a coefficienti razionali che ha $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ come radice, allora è automaticamente il polinomio minimo.

Per $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-1$, si procede in maniera analoga, ponendo $\beta = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-1 \Rightarrow \beta+1 = \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; in questo modo, si ha:

$$\begin{aligned} &(\beta+1)^2 = \sqrt{3}-\sqrt{5} \Rightarrow (\beta+1)^4 = 3+5-2\sqrt{15} \\ &\Rightarrow \sqrt{15} = \frac{8-(\beta+1)^4}{2} \Rightarrow 15 = \frac{1}{4}\left[64+(\beta+1)^8-16(\beta+1)^4\right] \\ &\Rightarrow (\beta+1)^8-16(\beta+1)^4+4=0 \end{aligned}$$

Questo permette di ottenere un polinomio monico di grado 8 a coefficienti razionali e con β come radice; per concludere che è il polinomio minimo, è sufficiente mostrare che il grado dell'estensione è 8. Si osserva che, per $\alpha = \sqrt{3}-\sqrt{5}$, si ha $\beta+1 = \sqrt{\alpha}$,

quindi $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$. Perciò

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}(\alpha)]$$

con $[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 2$ perché ottenuta aggiungendo una radice quadrata. Si può mostrare che questa estensione ha grado esattamente 2; infatti, se α fosse un quadrato, avrebbe tutti coniugati positivi, visto che $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un campo totalmente reale, però un possibile coniugato è $-\sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$, quindi α non può essere un quadrato. Allora $[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}] = 8$ e, dunque, quello trovato è proprio il polinomio minimo di β.

■

Esercizio 3.8. Determinare il grado del campo di spezzamento di $f(x) = x^4 - 2$ su $\mathbb{Q}$, su $\mathbb{F}_3$ e su $\mathbb{F}_{17}$.

Svolgimento. Per $\mathrm{Spl}_{\mathbb{Q}} x^4 - 2$, si nota che ha radici date da $\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\zeta_4, \sqrt[4]{2}\zeta_4^2, \sqrt[4]{2}\zeta_4^3$, con $\zeta_4 = i$ radice quartica dell'unità. Evidentemente, il suo campo di spezzamento è dato da $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \zeta_4)$, dove $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$ e $[\mathbb{Q}(\zeta_4) : \mathbb{Q}] = 2$; essendo queste estensioni indipendenti, il grado complessivo dell'estensione è 8.

Per $\mathrm{Spl}_{\mathbb{F}_3} x^4 - 2$, si nota che tale polinomio è irriducibile: $-2 \not\equiv 0 \bmod 3$, $-1 \not\equiv 0 \bmod 3$ e $2^4 - 2 = 14 \equiv 2 \not\equiv 0 \bmod 3$. Inoltre, $x^4 - 2$ non si scompone neanche in fattori quadratici in $\mathbb{F}_3$ perché, altrimenti, 2 dovrebbe essere un quadrato, ma $2^2 = 1$ e $1^2 = 1$. Allora $x^4 - 2$ è irriducibile di grado 4 su $\mathbb{F}_3$, il che vuol dire che si decompone completamente in $\mathbb{F}_{3^4}$.

Per $\mathrm{Spl}_{\mathbb{F}_{17}} x^4 - 2$, infine, si usa il fatto che un elemento di $\mathbb{F}_{17}^\times$ soddisfa $x^{16} = 1$, per cui vale $x^4 = 2$ se e soltanto se è verificata la relazione $2^4 \equiv 1 \bmod 17$, ma questa non è verificata perché $2^4 = 16$. Inoltre, $x^4 - 2$ non si può scomporre in fattori quadratici; se così fosse, infatti, dovrebbe essere soddisfatta la relazione $x^2 = 2 \iff 2^8 \equiv 1 \bmod 17$, ma $2^8 = 4^4 = 256 \equiv 8 \bmod 17$. Quindi $x^4 - 2$ è irriducibile di grado 4 anche in $\mathbb{F}_{17}$, per cui il suo campo di spezzamento sarà $\mathbb{F}_{17^4}$.

Nota: si può dimostrare che $x^4 - a$ è riducibile in un certo campo K se e soltanto se a è una potenza quarta in tale campo, oppure è un quadrato. Questo permette di giustificare i passaggi nell'esercizio e la dimostrazione si basa sul proseguire per conto diretto, assumendo una generica decomposizione in fattori quadratici. ■

§3.3 Esercizi su gruppi 2

Esercizio 3.9. Sia $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ definito da $\phi(1) = -1 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

(a). Per ogni intero n, contare gli elementi di ordine n in G.

(b). Dimostrare che $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c). Calcolare G' e la classe di isomorfismo di $G_{\mathrm{ab}} := G/G'$.

Svolgimento. Si divide lo svolgimento nei vari punti.

(a). I possibili n sono $1, 2, 4, 8, 16$.

Per $n = 1$, si ha evidentemente l'identità $(0, 0)$.

Per $n = 2$, si osserva che:

$$(a, b)^2 = (0, 0) \iff \Big(a + (-1)^b a, 2b\Big) = (0, 0)$$

Conviene dividere i casi in cui b è pari o dispari. Se b pari (cioè $b = 0, 2$), allora il quadrato è pari a $(2a, 2b)$ e questo coincide con $(0, 0)$ se e soltanto se $a, b \in \{0, 2\}$. Escludendo l'identità stessa, ci sono tre possibilità: $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$. Se b è dispari, invece, il quadrato è pari a $(0, 2b)$; questo risulterebbe pari a $(0, 0)$ se $b \equiv 0 \bmod 2$, ma questo è impossibile perché si è assunto b dispari.

Per $n = 4$, invece, si impone $(a, b)^4 = (0, 0)$, cioè:

$$\Big(a + (-1)^b a, 2b\Big)\Big(a + (-1)^b a, 2b\Big) = \begin{cases} (0, 4b) \equiv (0, 0) \mod 4 & , \ b \text{ dispari} \\ (4a, 4b) \equiv (0, 0) \mod 4 & , \ b \text{ pari} \end{cases}$$

Questo conteggio permette di concludere che tutti gli elementi di G che non sono di ordine 1 o 2 sono di ordine 4. Visto che l'identità e gli elementi di ordine 2 sono quattro in totale, si conclude che quelli di ordine 4 sono 12.

(b). Per il lemma orbita-stabilizzatore, $|Z(G)| \mid |G|$, quindi le possibili cardinalità sono $1, 2, 4, 8, 16$. G è un p-gruppo, quindi 1 non è ammissibile; inoltre, 8 e 16 non sono possibili in quanto G risulterebbe abeliano, che è assurdo. Allora $|Z(G)| \in \{2, 4\}$. Tuttavia, neanche $|Z(G)| = 2$ è possibile perché $Z(G)$ contiene tutti gli elementi

di ordine 2; infatti, dato $(a,b) \in G$ con $a, b \equiv 0 \bmod 2$, si ha:

$$(c,d)(a,b) = \Big(c + (-1)^d a, d + b\Big)$$
$$(a,b)(c,d) = \Big(a + (-1)^b c, b + d\Big) = \Big(a + c, b + d\Big)$$

Questi coincidono per ogni elemento $(c,d) \in G$ se e solo se $a + c = c - a$; però si è assunto $a \equiv 0 \bmod 2$, quindi verifica $a \equiv -a \bmod 4$ e, allora, $(c,d)(a,b) = (a,b)(c,d)$, $\forall (c,d) \in G$. Se ne conclude che $|Z(G)| = 4$, dove tre elementi sono id ordine 2 e l'ultimo è l'identità. Essendo un gruppo di ordine 4 per forza abeliano, il teorema di struttura assicura che $Z(G) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, oppure $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; per quanto appena detto sugli ordini degli elementi di $Z(G)$, l'unica possibilità è proprio quella richiesta: $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c). Per costruire G', si nota che i quozienti

$$G/Z(G) \qquad \frac{G}{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{0\}}$$

sono abeliani (visto che il quoziente ha cardinalità 4), quindi

$$G' \subseteq Z(G) \cap \Big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{0\}\Big) \cong \Big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\Big) \cap \Big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \{0\}\Big) = \{(0,0),(1,0)\}$$

Quindi $|G'| = \{1,2\}$; visto che G non è abeliano, $|G'| = 2$ e, quindi, $G' = \{(0,0),(2,0)\}$, dato che $Z(G)$ contiene gli elementi di G di ordine 2. In questo modo, G_{ab} ha cardinalità 8 ed è abeliano, quindi le classi di isomorfismo possibili, per il teorema di struttura, sono le seguenti:

$$\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)^3 \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

Però G_{ab} ha elementi di ordine 4 e non ha elementi di ordine 8, quindi l'unica possibilità rimanente è $G_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

■

§3.4 Esercizi su anelli 2

Esercizio 3.10. Siano $I = (4, 3x+1)$ e $J = (3, x^2+1)$, ideali dell'anello $Z[x]$. Contare gli ideali massimali di $Z[x]/IJ$.