Meccanica Quantistica, Corso B, Compito del 24 Giugno 2024

Si consideri il moto tridimensionale di due particelle di massa m e spin 1/2, la cui Hamiltoniana è data da

$$\hat{H}(\omega,\kappa,\beta) = \hat{H}_1(\omega) + \hat{H}_2(\omega) + \hat{H}_{12a}(\kappa) + \hat{H}_{12b}(\beta), \tag{1}$$
$$\hat{H}_i(\omega) = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\boldsymbol{r}}_i^2, \qquad \hat{H}_{12a}(\kappa) = \frac{1}{4}m\kappa^2(\hat{\boldsymbol{r}}_1 - \hat{\boldsymbol{r}}_2)^2, \qquad \hat{H}_{12b}(\beta) = \beta\, \hat{\boldsymbol{s}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{s}}_2,$$

dove $0 < \hbar\beta \ll \kappa \ll \omega$.

(1) Dire quali delle seguenti osservabili sono conservate: $\hat{\boldsymbol{r}}_i$, $\hat{\boldsymbol{p}}_i$, $\hat{\boldsymbol{P}} \equiv \hat{\boldsymbol{p}}_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_2$, $\hat{\boldsymbol{L}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i$, $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}_1 + \hat{\boldsymbol{L}}_2$, $\hat{\boldsymbol{s}}_i$, $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{s}}_1 + \hat{\boldsymbol{s}}_2$, la parità $\hat{P}_{ai}$ delle singole particelle, la parità totale $\hat{P}_a$, l'operatore di scambio delle variabili spaziali delle due particelle $\hat{P}_{12r}$, l'operatore di scambio delle particelle $\hat{P}_{12}$, e l'operatore inversione temporale T.

(2) Determinare le regole di commutazioni tra gli operatori

$$\hat{\boldsymbol{R}} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}_1 + \hat{\boldsymbol{r}}_2}{2}, \qquad \hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{p}}_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_2, \qquad \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}_1 - \hat{\boldsymbol{r}}_2, \qquad \hat{\boldsymbol{p}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2}{2}. \tag{2}$$

Scrivere le relazioni di indeterminazione tra le distribuzioni associate a queste osservabili. Dire qual'è l'effetto degli operatori parità $\hat{P}_a$, inversione temporale T, e scambio di particelle $\hat{P}_{12}$ su questi operatori.

(3) Sfruttando il fatto che le trasformazioni canoniche in Eq. (2) permettono di scrivere l'Hamiltoniana nella forma

$$\hat{H} = \hat{\mathcal{H}}_a + \hat{\mathcal{H}}_b + \hat{H}_{12b}, \qquad \hat{\mathcal{H}}_a = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{\boldsymbol{R}}^2, \qquad \hat{\mathcal{H}}_b = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\omega^2+\kappa^2)\hat{\boldsymbol{r}}^2, \qquad M = 2m, \qquad \mu = \frac{m}{2}, \tag{3}$$

descrivere lo spettro del sistema. A questo scopo si usi la base $|N_1, N_2, N_3, n_1, n_2, n_3, s, s_z\rangle$ dove N_i e n_i sono i numeri quantici dei due oscillatori tridimensionali che sono emersi dalla trasformazione, e s, s_z sono i numeri quantici associati allo spin totale. Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale.

(4) Dire se si conservano anche gli operatori $\hat{\boldsymbol{L}}_R = \hat{\boldsymbol{R}} \times \hat{\boldsymbol{P}}$ e $\hat{\boldsymbol{L}}_r = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$, tali che $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}_R + \hat{\boldsymbol{L}}_r$. Utilizzando questi risultati, descrivere lo spettro in termine della base $|N, \ell_R, m_R, n, \ell_r, m_r, s, s_z\rangle$ dove $N = \sum_i N_i$ e $n = \sum_i n_i$, ℓ_R, m_R sono i numeri quantici associati a $\hat{\boldsymbol{L}}_R$, e ℓ_r, m_r sono i numeri quantici associati a $\hat{\boldsymbol{L}}_r$.

(5) Scrivere la matrice di densità ridotta ρ associata alle variabili di spin delle particelle nello stato fondamentale del sistema, e verificare se rappresenta uno stato puro, per esempio calcolando $\mathrm{Tr}\,\rho^2$. Calcolare la matrice densità ridotta ρ_1 del singolo spin, verificare se rappresenta uno stato puro, e calcolare i valori medio degli operatori $\hat{s}_{1,z}$ e $\hat{s}_{1,x}$.

(6) Calcolare la probabilità $P_r(d)$ che le particelle siano ad una distanza relativa inferiore a d nello stato fondamentale. Come cambia il risultato se si richiede che abbiamo anche lo spin uguale. Calcolare la probabilità che la particella 1 sia ad una distanza superiore ad d dall'origine del sistema. (È sufficiente scrivere l'espressioni formali come integrali nello spazio.)

(7) Assumendo adesso che le particelle siano identiche, come cambia lo spettro, ed in particolare lo stato fondamentale.

(8) Consideriamo adesso un sistema analogo, ma con particelle di spin 0, quindi

$$\hat{H}(\omega,\kappa) = \hat{H}_1(\omega) + \hat{H}_2(\omega) + \hat{H}_{12a}(\kappa). \tag{4}$$

Descrivere lo spettro assumendo che le particelle siano identiche.

(9) Assumiamo che le particelle abbiano carica elettrica opposta (e quindi non sono identiche), e interagiscano con un potenziale di Coulomb. Descrivere gli effetti del potenziale di Coulomb sullo stato fondamentale e i primi stati eccitati al primo ordine della teoria delle perturbazioni. (È sufficiente impostare il problema, riportando le espressioni rilevanti degli elementi di matrice).

(10) Consideriamo l'effetto di una perturbazione associata ad un campo elettrico esterno uniforme. Scrivere la perturbazione corrispondente, e studiarne gli effetti sullo spettro del sistema, in particolare per lo stato fondamentale e i primi stati eccitati.

Riportiamo per referenza le funzioni d'onda in rappresentazione di Schrödinger dei primi due livelli dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$\varphi_0(\omega,x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}}\frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}}, \quad \varphi_1(\omega,x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_\omega}}\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\frac{x}{\ell_\omega}e^{-\frac{x^2}{2\ell_\omega^2}}, \quad \ell_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$