Meccanica Quantistica, Corso B, Appello del 14 Luglio 2023

Si consideri un sistema quantistico tridimensionale composto da due particelle di massa uguale m e spin 1/2, che interagiscono attraverso un potenziale armonico e un'interazione spin-spin,

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_b, \qquad \hat{H}_a = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa(\hat{\boldsymbol{x}}_2 - \hat{\boldsymbol{x}}_1)^2, \qquad \hat{H}_b = \beta\, \hat{\boldsymbol{S}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{S}}_2,$$

dove $0 < \hbar\beta < \omega/2$, dove $\omega^2 = 2\kappa/m$. Studiamo il moto delle particelle nel sistema del centro di massa.

(1) Riscrivere l'Hamiltoniana utilizzando il vettore posizione relativa $\hat{\boldsymbol{x}} \equiv \hat{\boldsymbol{x}}_1 - \hat{\boldsymbol{x}}_2$ e il suo momento coniugato $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{\boldsymbol{p}}_1 - \hat{\boldsymbol{p}}_2)/2$. Descrivere lo spettro e la degenerazione dei livelli più bassi, sino a 4 valori diversi dell'energia a partire dal basso (3 oltre il fondamentale).

(2) Scrivere l'operatore momento angolare spaziale $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}_1 + \hat{\boldsymbol{L}}_2$ in termini degli operatori $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{p}}$. Identificare gli autovalori associati al momento angolare spaziale $\hat{\boldsymbol{L}}$, allo spin totale $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$, e al momento angolare totale $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$, nei primi livelli dello spettro considerati al punto (1).

(3) Scrivere la funzione d'onda dello stato fondamentale (tenendo anche conto degli spin). Calcolare la distanza quadratica media R tra le particelle, definita come $R^2 = \langle|\boldsymbol{x}|^2\rangle$. Calcolare anche $R_p^2 = \langle|\boldsymbol{p}|^2\rangle$, e verificare che $R^2 \times R_p^2 \geq 3\hbar^2/4$ come previsto dal principio di indeterminazione (mediato sulle direzioni).

(4) Calcolare la probabilità che le particelle nello stato fondamentale siano ad una distanza superiore a $\lambda = \sqrt{2\hbar/(m\omega)}$ dove $\omega^2 = 2\kappa/m$, e abbiano $s_{1z} = s_{2z}$. Fare lo stesso calcolo anche per i primi stati eccitati con $s_z = 1$ e $s_z = 0$ (s_z indica l'autovalore di $\hat{S}_z$). Scrivere l'integrale effettuando le semplificazioni possibili.

(5) Scrivere la matrice densità ridotta associata alle variabili di spin delle due particelle nello stato fondamentale. Dire, e verificare, se rappresenta uno stato puro o misto.

(6) Scrivere la matrice densità ridotta associata al solo spin della particella 1 nello stato fondamentale. Dire, e verificare, se rappresenta uno stato puro o misto. Scrivere i valori di aspettazione delle componenti di $\hat{\boldsymbol{s}}_1$ in termini della matrice densità ridotta, e calcolarli.

(7) Si consideri l'operatore $\hat{P}_{x12}$ che scambia le variabili spaziali delle particelle, quindi tale che $\hat{\boldsymbol{x}}_1 \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_2$. Dire se $\hat{P}_{x12}$ commuta con l'Hamiltoniana, e calcolare l'autovalore di $\hat{P}_{x12}$ dello stato fondamentale. Si consideri anche l'operatore $\hat{P}_{12}$ di scambio delle variabili delle particelle, quindi tale che $\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{s}}_1 \leftrightarrow \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{s}}_2$. Dire se commuta con l'Hamiltoniana, e calcolare gli autovalori di $\hat{P}_{12}$ associati allo stato fondamentale e i primi eccitati. Considerare anche il caso che le particelle siano identiche, e determinare lo stato fondamentale e i primi stati eccitati.

(8) Determinare gli effetti della perturbazione $\hat{H}_{ls} = \gamma\, \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{L}}$ sullo spettro dei primi stati eccitati al primo ordine (assumendo le particelle non identiche).

Trascuriamo adesso i gradi di libertà di spin, e consideriamo un sistema di due particelle descritto dalla Hamiltoniana $\hat{H}_a$. Assumiamo che le particelle abbiamo carica opposta, $q_1 = q$ e $q_2 = -q$ (quindi non sono identiche), e trascuriamo l'interazione coulombiana. Il sistema sia soggetto ad una perturbazione dovuta ad un'onda elettromagnetica di frequenza α per un certo intervallo T, cioè nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq T$. Nell'approssimazione di dipolo la perturbazione può essere scritta come

$$\hat{H}_{em} = -\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{E}(t), \qquad \hat{\boldsymbol{d}} = \sum_i q_i \hat{\boldsymbol{x}}_i, \qquad \boldsymbol{E}(t) = E_z(e^{-i\alpha t} + e^{i\alpha t})\hat{z}.$$

Assumiamo che il campo elettrico sia sufficientemene piccolo da rendere valida l'approssimazione al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Assumiamo anche che all'instante $t = 0$ il sistema è nel suo stato fondamentale, e che la frequenza dell'onda sia vicino alla risonanza, cioè $\alpha \approx \omega$.

(9) Verificare se è possibile che una misura di energia per $t > T$ dia un valore corrispondente ad uno dei primi stati eccitati (con energia $\hbar\omega$ sopra il fondamentale). In caso di risposta positiva, dire se ci sono restrizioni sui possibili valori di L_z dello stato eccitato.

(10) Calcolare la probabilità di ottenere una tale misura di energia.

Riportiamo per referenza le funzioni d'onda in rappresentazione di Schrödinger dei primi due livelli dell'oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza ω

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\,, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\frac{x}{\ell} e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\,, \qquad \ell = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}.$$

Inoltre può essere utile l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-c\,x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$.