

# APPUNTI DI GEOMETRIA

MANUEL DEODATO



# INDICE

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Geometria proiettiva</b>                              | <b>3</b>  |
| 1.1      | Introduzione agli spazi proiettivi                       | 3         |
| 1.1.1    | Trasformazioni proiettive                                | 4         |
| 1.1.2    | Sottospazi proiettivi                                    | 6         |
| 1.1.3    | Riferimenti proiettivi                                   | 10        |
| 1.1.4    | Coordinate omogenee                                      | 14        |
| 1.2      | Spazi proiettivi e spazi affini                          | 15        |
| <b>2</b> | <b>Spazi metrici, topologici e applicazioni continue</b> | <b>16</b> |
| 2.1      | Spazi metrici  | 16        |
| 2.1.1    | Insiemi aperti   | 16        |
| 2.1.2    | Continuità in spazi metrici                              | 16        |
| 2.1.3    | Distanze equivalenti                                     | 18        |
| 2.1.4    | Alcuni risultati sulla continuità                        | 19        |
| 2.1.5    | Isometrie e omeomorfismi                                 | 20        |
| 2.2      | Spazi topologici   | 20        |

# 1 GEOMETRIA PROIETTIVA

## 1.1 Introduzione agli spazi proiettivi

**DEFINIZIONE 1.1 (SPAZIO PROIETTIVO).** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ ; il suo *spazio proiettivo* è dato da:

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim$$

dove  $v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} : w = \lambda v$ .

Dalla definizione, uno spazio proiettivo collassa tutti i vettori di uno spazio vettoriale che appartengono alla stessa retta in un punto. In questo senso,  $\mathbb{P}(V)$  è l'insieme delle rette di  $V$ .

**ESEMPIO 1.1.** Si nota che  $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset / \sim = \emptyset$ , mentre per  $v \neq 0$ , si ha:

$$\mathbb{P}(\text{Span } v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\} / \sim = \{[v]\}$$

dove  $[v]$  rappresenta la classe di equivalenza di  $v$ ; questo significa che lo spazio proiettivo dello span di un elemento è composto da un solo punto.

**DEFINIZIONE 1.2 (DIMENSIONE DI UNO SPAZIO PROIETTIVO).** La dimensione di uno spazio proiettivo è

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(V) = \dim_{\mathbb{K}} V - 1$$

Intuitivamente, questa definizione è dovuta al fatto che gli spazi proiettivi collassano le rette in punti, abbassando di 1 la dimensione dello spazio vettoriale.

**DEFINIZIONE 1.3 (PUNTI, RETTE E PIANI PROIETTIVI).** Si definisce *punto proiettivo* uno spazio proiettivo di dimensione 0, *retta proiettiva* uno spazio di dimensione 1 e *piano proiettivo* uno spazio di dimensione 2.

**DEFINIZIONE 1.4 (SPAZIO PROIETTIVO STANDARD).** Sia  $\mathbb{K}$  un campo; si definisce lo *spazio proiettivo standard* come

$$\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\mathbb{P}^n$$

### 1.1.1 Trasformazioni proiettive

Analogamente al caso dei gruppi e degli anelli, si studiano quelle mappe che preservano la struttura di spazio proiettivo.

**DEFINIZIONE 1.5 (TRASFORMAZIONE PROIETTIVA).** Una mappa  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  è detta *trasformazione proiettiva* se  $\exists \varphi : V \rightarrow W$  applicazione lineare tale che

$$f([v]) = [\varphi(v)]$$

In questa definizione, si dice che  $f$  è *indotta* da  $\varphi$  e, talvolta, si scrive che  $f = [\varphi]$ .

**PROPOSIZIONE 1.1.** Se  $f$  è una trasformazione proiettiva indotta da  $\varphi$ , allora  $\varphi$  è iniettiva.

*Dimostrazione.* Per assurdo,  $\ker \varphi \neq \{0\}$  e sia  $v \in \ker \varphi \setminus \{0\}$ ; allora  $f([v]) = [0]$ , ma  $[0] \notin \mathbb{P}(W)$  per definizione di spazio proiettivo, quindi  $f$  non sarebbe ben definita.  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.2.** Ogni applicazione lineare iniettiva  $\varphi : V \rightarrow W$  induce una trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tramite l'associazione  $[v] \mapsto [\varphi(v)]$ .

*Dimostrazione.* Se  $v \neq 0$ , allora  $\varphi(v) \neq 0$  perché  $\varphi$  è iniettiva. Se, invece,  $[v] = [w]$ , allora, per definizione,  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$[\varphi(v)] = [\varphi(\lambda w)] = [\lambda \varphi(w)] = [\varphi(w)]$$

$\square$

**PROPOSIZIONE 1.3.** Tutte le trasformazioni proiettive sono iniettive.

*Dimostrazione.* Sia  $f([v]) = f([w])$  e sia  $\varphi$  l'applicazione lineare che induce  $f$ ; allora l'uguaglianza si traduce in  $[\varphi(v)] = [\varphi(w)]$ , ma per come sono definite queste classi di equivalenza, questo vuol dire che  $\varphi(v) = \lambda \varphi(w) = \varphi(\lambda w)$ . Essendo  $\varphi$  iniettiva, però, si ottiene che  $v = \lambda w$ , cioè  $[v] = [\lambda w]$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.4.** La trasformazione  $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$  è proiettiva ed è indotta da  $\text{Id}_V$ .

*Dimostrazione.* Tale trasformazione deve essere tale per cui  $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)}([v]) = [v] = [\text{Id}_V v]$ , quindi è indotta da  $\text{Id}_V$ ; essendo quest'ultima iniettiva, anche  $\text{Id}_{\mathbb{P}(V)}$  è iniettiva.  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.5.** Siano  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  e  $g : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$  due trasformazioni proiettive; allora  $g \circ f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(Z)$  è proiettiva.

*Dimostrazione.* Se  $\varphi$  induce  $f$  e  $\psi$  induce  $g$ , allora  $\psi \circ \varphi$  induce  $g \circ f$ :

$$[\psi \circ \varphi(v)] = g([\varphi(v)]) = g \circ f([v])$$

□

Si passa, ora, a caratterizzare gli isomorfismi di spazi proiettivi; il seguente teorema giustificherà la definizione di isomorfismo proiettivo.

**TEOREMA 1.1.** Sia  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  una trasformazione proiettiva; allora, le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti.

- (a).  $f$  è suriettiva.
- (b).  $f$  è biettiva.
- (c).  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$ .
- (d).  $f$  è invertibile e  $f^{-1} : \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  è proiettiva.

*Dimostrazione.* Il fatto che (a)  $\iff$  (b) è dato dal fatto che  $f$  è proiettiva, quindi è iniettiva.

Per mostrare che (b)  $\implies$  (c), si prende  $\varphi$  che induce  $f$  e si fa vedere che è suriettiva. Visto che  $\varphi(0) = 0$ , basta mostrare che  $W \setminus \{0\} \subset \text{Im } \varphi$ . Sia, dunque,  $w \in W \setminus \{0\}$ , quindi  $[w] \in \mathbb{P}(W)$ ; visto che  $f$  è suriettiva,  $\exists [v] \in \mathbb{P}(V) : f([v]) = [w] = [\varphi(v)]$ . Allora  $w = \lambda \varphi(v) = \varphi(\lambda v) \implies w \in \text{Im } \varphi$ . Questo significa che  $\varphi$  è un isomorfismo tra  $V$  e  $W$ , per cui

$$\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1 = \dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(W)$$

Ora si mostra che (c)  $\implies$  (d), quindi sia  $\varphi$  lineare che induce  $f$ . Si sa, dunque, che  $\varphi$  è iniettiva e che  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$ , il che implica che  $\dim V = \dim W$ , pertanto  $\varphi$  è un isomorfismo; in quanto tale,  $\varphi^{-1}$  è ben definita ed è ancora un isomorfismo di spazi vettoriali. Rimane da mostrare che  $\varphi^{-1}$  induce  $f$ ; a questo scopo, si nota che:

$$\begin{aligned} [\varphi^{-1}]f([v]) &= [\varphi^{-1}][\varphi(v)] = [\varphi^{-1}\varphi(v)] = [v] \\ f[\varphi^{-1}]( [v] ) &= f([\varphi^{-1}(v)]) = [\varphi\varphi^{-1}(v)] = [v] \end{aligned}$$

Infine, (d)  $\implies$  (a) perché, essendo  $f$  invertibile, è anche suriettiva.

□

**DEFINIZIONE 1.6 (ISOMORFISMO PROIETTIVO).** Una trasformazione proiettiva che sia anche suriettiva è detta *isomorfismo proiettivo*.

**DEFINIZIONE 1.7 (PROIETTIVITÀ).** Ogni trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  è detta *proiettività*; si indica con  $\mathbb{PGL}(V)$  l'insieme delle proiettività di  $V$ .

Da questa definizione, si può notare che ogni proiettività è un isomorfismo perché, se  $f$  è indotta da  $\varphi$ , allora vale la formula della dimensione

$$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V \implies \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V$$

Inoltre, si può mostrare che equipaggiando  $\mathbb{PGL}(V)$  con l'operazione di composizione, questo è un gruppo.

**OSSERVAZIONE 1.1 (PUNTI FISSI).** Sia  $f$  una proiettività indotta da  $\varphi$ , con  $[v]$  punto fisso, cioè

$$[v] = f([v]) = [\varphi(v)]$$

Allora  $\lambda v = \varphi(v)$ , cioè  $v$  è un autovettore di  $\varphi$ , con autovalore  $\lambda$ ; analogamente, se  $v$  è un autovettore di  $\varphi$ , allora  $[v]$  è un punto fisso per lo stesso motivo.

### 1.1.2 Sottospazi proiettivi

Per semplicità di notazione, si introduce la proiezione

$$\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V) \tag{1.1.1}$$

che manda  $V \setminus \{0\}$  sul suo quoziente con la relazione di equivalenza.

**DEFINIZIONE 1.8 (GRASSMANNIANA).** Sia  $V$  uno spazio vettoriale tale che  $\dim V = n$  e sia  $k \in \{0, \dots, n\}$ ; allora la *grassmanniana*  $k$  di  $V$  è l'insieme di tutti i sottospazi di  $V$  di dimensione  $k$ :

$$\operatorname{Gr}_k(V) = \{W \subseteq V \mid W \text{ spazio vettoriale con } \dim W = k\}$$

Si userà, inoltre, la seguente notazione:

$$\operatorname{Gr}(k, n) = \operatorname{Gr}_k(\mathbb{K}^n)$$

**DEFINIZIONE 1.9 (SOTTOSPAZIO PROIETTIVO).** Sia  $V$  uno spazio vettoriale; un

sottospazio proiettivo  $S$  di  $\mathbb{P}(V)$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{P}(V)$  tale che

$$S = \pi(H \setminus \{0\})$$

per qualche  $H$  sottospazio vettoriale di  $V$ .

**OSSERVAZIONE 1.2.** Dalla definizione, si deduce che uno sottospazio proiettivo è esso stesso uno spazio proiettivo, cioè  $\pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$ .

**DEFINIZIONE 1.10 (IPERPIANO PROIETTIVO).** Un iperpiano di  $\mathbb{P}(V)$  è un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  tale che

$$\dim S = \dim \mathbb{P}(V) - 1$$

**TEOREMA 1.2.** Siano  $V$  uno spazio vettoriale e  $H$  un suo sottospazio. Sia  $S = \pi(H \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H)$  un sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ ; allora  $\pi^{-1}(S) = H \setminus \{0\}$ . In sostanza, si ha una biezione tra i sottospazi vettoriali di  $V$  e i sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ .

*Dimostrazione.* Si nota che

$$\pi^{-1}(S) = \bigcup_{[v] \in S} \pi^{-1}([v]) = \bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v])$$

Si dimostrerà il teorema per doppia inclusione. Avendo  $\pi(v) = [v]$ , allora  $v \in \pi^{-1}([v])$ , perciò

$$\bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]) \supseteq H \setminus \{0\}$$

Si nota anche che

$$\pi^{-1}([v]) = \{w \mid [w] = [v]\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

pertanto  $\forall w \in \pi^{-1}([v])$ , si ha  $w = \lambda v \in H \setminus \{0\}$ , da cui segue che

$$\bigcup_{v \in H \setminus \{0\}} \pi^{-1}([v]) \subseteq H \setminus \{0\}$$

□

Il teorema appena mostrato permette di concludere che

$$\dim \mathbb{P}(H) = \dim H - 1 \iff \dim \pi^{-1}(S) \cup \{0\} = \dim S + 1$$

Dal punto di vista delle grassmanniane, si ha che

$$\text{Gr}_k(\mathbb{P}(V)) \cong \text{Gr}_{k+1}(V)$$

dove le grassmanniane di uno spazio proiettivo sono ottenute tramite la definizione di dimensione per uno spazio proiettivo.

Si passa, ora, allo studio di somme e intersezioni di sottospazi proiettivi; in particolare, si ha il seguente.

**PROPOSIZIONE 1.6.** Siano  $S_i$ , per  $i \in I$  un certo insieme di indici, dei sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ ; allora l'intersezione  $\bigcap_{i \in I} S_i$  è ancora un sottospazio di  $\mathbb{P}(V)$ .

*Dimostrazione.* Si indicano con  $H_i$  i sottospazi vettoriali di  $V$  tali che  $S_i = \mathbb{P}(H_i)$ . Per conto diretto, si trova che:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} S_i &= \bigcap_{i \in I} \pi(H_i \setminus \{0\}) = \{[\nu] \mid \forall i \in I, [\nu] \in \pi(H_i \setminus \{0\})\} \\ &= \{[\nu] \mid \forall i \in I, \exists w_i \in H_i \setminus \{0\} \text{ t.c. } [w_i] = [\nu]\} \\ &= \{[\nu] \mid \forall i \in I, \nu \in H_i \setminus \{0\}\} = \pi\left(\bigcap_{i \in I} (H_i \setminus \{0\})\right) \\ &= \pi\left[\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right) \setminus \{0\}\right] = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} H_i\right) \end{aligned}$$

□

La proposizione appena dimostrata permette di concludere che

$$\mathbb{P}(V) \cap \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(V \cap W) \quad (1.1.2)$$

Come nel caso degli spazi vettoriali, l'unione di spazi proiettivi non è, in generale, uno spazio proiettivo; l'idea, allora, è quella di definire anche in questo caso un concetto di somma.

**DEFINIZIONE 1.11 (SPAZIO PROIETTIVO GENERATO).** Sia  $A \subseteq \mathbb{P}(V)$  un sottoinsieme di  $\mathbb{P}(V)$ . A partire da  $A$ , si può definire il più piccolo sottospazio proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$  contenente  $A$  come

$$L(A) = \bigcap \{S \subseteq \mathbb{P}(V) \mid A \subseteq S \text{ e } S \text{ sottospazio proiettivo}\}$$

Si nota che, per definizione, tale intersezione è non vuota perché  $A \subseteq \mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(V)$  è un sottospazio proiettivo di se stesso.



In questo modo, si può trovare lo spazio proiettivo della somma di due sottospazi prendendo

$$L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2) \quad (1.1.3)$$

**PROPOSIZIONE 1.7.** Siano  $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$  e  $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$  due sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ , con  $H_1, H_2$  sottospazi vettoriali di  $V$ ; allora

$$L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

*Dimostrazione.* Si procede per doppia inclusione. Si mostra prima che  $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ ; per farlo, visto che  $H_1 \subseteq H_1 + H_2$ , si ha

$$S_1 = \mathbb{P}(H_1) = \pi(H_1 \setminus \{0\}) \subseteq \pi((H_1 + H_2) \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(H_1 + H_2)$$

In maniera del tutto analoga, si mostra che  $S_2 \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ . Questo significa che  $\mathbb{P}(H_1 + H_2)$  è un sottospazio proiettivo contenente sia  $S_1$ , che  $S_2$ , quindi, per la minimalità di  $L(S_1, S_2)$ , deve valere  $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}(H_1 + H_2)$ .

Per l'inclusione inversa, visto che  $L(S_1, S_2)$  è un sottospazio proiettivo, si prende  $H$  sottospazio vettoriale di  $V$  tale che  $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(H) \Rightarrow H = \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\}$ . Allora:

$$S_1 \subseteq L(S_1, S_2) \Rightarrow H_1 = \pi^{-1}(S_1) \cup \{0\} \subseteq \pi^{-1}(L(S_1, S_2)) \cup \{0\} = H$$

Analogamente si mostra che  $H_2 \subseteq H$ , quindi si ha  $H_1 + H_2 \subseteq H$ , da cui  $\mathbb{P}(H_1 + H_2) \subseteq \mathbb{P}(H) = L(S_1, S_2)$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.8.** Sia  $S \subseteq \mathbb{P}(V)$  un sottoinsieme di  $\mathbb{P}(V)$  e  $f$  una trasformazione proiettiva; allora  $f(L(S)) = L(f(S))$ .

*Dimostrazione.* Siano  $H = \pi^{-1}(S)$  un sottoinsieme di  $V$  e  $f = [\varphi]$ . Si nota che  $f(S) = f(\pi(H)) = \pi(\varphi(H))$ , quindi

$$\begin{aligned} f(L(S)) &= f[\pi(\text{Span}(H) \setminus \{0\})] = \pi[\varphi(\text{Span}(H)) \setminus \{0\}] \\ &= \pi[\text{Span}(\varphi(H)) \setminus \{0\}] = \pi\{\text{Span}[\pi^{-1}(f(S))] \setminus \{0\}\} \\ &= L(f(S)) \end{aligned}$$

$\square$

**TEOREMA 1.3 (FORMULA DI GRASSMANN).** Siano  $S_1, S_2$  due sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ ; allora

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2$$

*Dimostrazione.* Siano  $H_1, H_2$  i sottospazi di  $V$  tali che  $S_1 = \mathbb{P}(H_1)$  e  $S_2 = \mathbb{P}(H_2)$ . Per la formula di Grassmann, si ha

$$\dim H_1 + H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim H_1 \cap H_2$$

Dal punto di vista degli spazi proiettivi, questa si traduce in:

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{P}(H_1 + H_2) + 1 &= (\dim \mathbb{P}(H_1) + 1) + (\dim \mathbb{P}(H_2) + 1) - \dim \mathbb{P}(H_1 \cap H_2) - 1 \\ \Rightarrow \dim L(S_1, S_2) &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim S_1 \cap S_2 \end{aligned}$$

□

**COROLLARIO 1.3.1.** Se  $S_1, S_2$  sono sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  tali che  $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ , allora  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.* Usando la formula di Grassmann:

$$\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim \mathbb{P}(V) - \dim L(S_1, S_2) \geq 0$$

Visto che, per convenzione,  $\dim \emptyset = -1$ , si ha  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ .

□

**TEOREMA 1.4.** Sui piani proiettivi, non esistono *rette parallele*. Più precisamente, dati  $r_1, r_2$  sottospazi proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$ , con  $\dim \mathbb{P}(V) = 2$  e  $\dim r_1 = \dim r_2 = 1$ , si ha  $r_1 = r_2$ , oppure  $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ , dove  $P$  è un punto proiettivo.

*Dimostrazione.* Sia  $r_1 \neq r_2$ ; allora  $\dim L(r_1, r_2) = 2$  e

$$\dim r_1 \cap r_2 = \dim r_1 + \dim r_2 - \dim L(r_1, r_2) = 1 + 1 - 2 = 0$$

quindi  $r_1 \cap r_2$  è un punto proiettivo.

□

### 1.1.3 Riferimenti proiettivi

L'idea è quella di estendere il concetto di indipendenza lineare e base agli spazi proiettivi.

**DEFINIZIONE 1.12 (PUNTI INDIPENDENTI).** Siano  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ ; questi sono detti *indipendenti* se per  $v_1, \dots, v_k \in V : [v_i] = P_i$ , i  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti.

È anche facile convincersi che tale definizione è indipendente dai rappresentati scelti, visto che  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti  $\iff \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_k v_k$  lo sono.

Questa nozione di indipendenza per gli elementi di  $\mathbb{P}(V)$  permette di individuare tutte quelle rette di  $V$  che non si possono scrivere in combinazione lineare tra di loro.

Si nota, inoltre, che gli elementi di  $\mathbb{P}(V)$  sono, a due a due, sempre indipendenti per costruzione, mentre non è vero in generale per un insieme di  $k$  punti, con  $k > 2$ . Infatti, prendendo  $V = \mathbb{R}^2$ , si osserva che non si potrà mai costruire un insieme di punti di  $\mathbb{P}(V)$  che sia indipendente e che abbia più di due elementi perché  $\mathbb{R}^2$  è ottenuto dallo span di esattamente due elementi indipendenti.

**DEFINIZIONE 1.13 (POSIZIONE GENERALE).** Dati  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$ , con  $V$  spazio vettoriale di dimensione  $n + 1$ , questi sono detti essere in *posizione generale* se ogni loro sottoinsieme di  $h \leq n + 1$  elementi distinti è indipendente.

**OSSERVAZIONE 1.3.** Se  $k \leq n + 1$ , allora la nozione di posizione generale coincide con quella di indipendenza, mentre se  $k > n + 1$ , la definizione richiede l'indipendenza di tutte le  $(n + 1)$ -uple di punti.

**DEFINIZIONE 1.14 (RIFERIMENTO PROIETTIVO).** Sia  $V$  uno spazio vettoriale tale che  $\mathbb{P}(V)$  è  $n$ -dimensionale. Un *riferimento proiettivo* di  $\mathbb{P}(V)$  è una  $(n + 2)$ -upla di punti in posizione generale.

L'ultimo punto nel riferimento è detto **punto unità**, mentre gli altri sono detti **punti fondamentali**.

**DEFINIZIONE 1.15 (BASE NORMALIZZATA).** Sia  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  un riferimento di  $\mathbb{P}^n(V)$ . Una *base normalizzata* di  $V$  associata a  $\mathcal{R}$  è una base  $\{v_0, \dots, v_n\}$  tale che

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, [v_i] = P_i \text{ e } P_{n+1} = [v_0 + \dots + v_n]$$

**TEOREMA 1.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$  tale che  $\mathbb{P}(V)$  abbia dimensione  $n$  e sia  $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_{n+1})$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ . Esiste sempre almeno una base normalizzata  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  e, se  $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$  è un'altra base, allora  $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $u_i = \lambda v_i$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{w_0, \dots, w_{n+1}\} \subset V$  un insieme di vettori, con  $[w_i] = P_i$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ . Visto che  $\mathcal{R}$  è un riferimento proiettivo, i  $w_0, \dots, w_n$  sono  $n+1$  vettori linearmente indipendenti in  $V$  spazio  $(n+1)$ -dimensionale, quindi sono una base. Questo implica che  $w_{n+1} = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_n w_n$ , dove  $\lambda_i \neq 0$ , altrimenti i  $w_0, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_{n+1}$  non sarebbero indipendenti e  $\mathcal{R}$  non sarebbe un riferimento proiettivo. Si prendono, ora,  $v_i = \lambda_i w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , mentre  $v_{n+1} = w_{n+1}$ ; in questo modo,  $[v_i] = [w_i] = P_i$ , mentre  $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n v_i$  per costruzione. In questo modo, si è costruita  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  base normalizzata associata a  $\mathcal{R}$ .

Sia, ora,  $\mathcal{B}' = \{u_0, \dots, u_n\}$  un'altra base normalizzata di  $\mathcal{R}$ ; essendo che  $[u_i] = P_i = [v_i]$ , allora  $\exists \mu_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : v_i = \mu_i u_i, i = 0, \dots, n+1$ . Inoltre

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} \sum_{i=0}^n u_i &= \mu_{n+1} u_{n+1} = v_{n+1} = \sum_{i=0}^n v_i = \sum_{i=0}^n \mu_i u_i \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{i=0}^n (\mu_i - \mu_{n+1}) u_i \end{aligned}$$

Visto che gli  $u_0, \dots, u_n$  sono una base, per indipendenza lineare deve valere  $\mu_i = \mu_{n+1}, \forall i$ , cioè le due basi coincidono a meno di un fattore invertibile.  $\square$

**OSSERVAZIONE 1.4.** Si nota che rispetto all'algebra lineare, in geometria proiettiva non è possibile estendere riferimenti proiettivi di sottospazi proiettivi a riferimenti di sottospazi che li estendono.

Sia, infatti,  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  un riferimento di un sottospazio  $S$  di  $H$ ; allora si nota che i  $P_i$  non sono in posizione generale se visti come punti di  $H$  perché se la dimensione aumenta, le  $(n+2)$ -uple devono essere indipendenti, ma il punto unità è scritto come combinazione degli altri.

Con la teoria sviluppata finora, è possibile stabilire un criterio di uguaglianza per individuare trasformazioni proiettive uguali.

**TEOREMA 1.6.** Siano  $f, g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  due trasformazioni proiettive indotte, rispettivamente, da  $\varphi$  e da  $\psi$  e sia, inoltre,  $\mathcal{R}$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ ; allora sono equivalenti le seguenti affermazioni.

- (a). Si trova un coefficiente  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tale che  $\varphi = \lambda\psi$ .
- (b). Le due trasformazioni proiettive sono identiche:  $f = g$ .
- (c). Per ogni punto  $P \in \mathcal{R}$ , si ha  $f(P) = g(P)$ .

*Dimostrazione.* Si dimostra che (a)  $\Rightarrow$  (b). Per conto diretto:

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda\psi(v)] = [\psi(v)] = g(v)$$

Ora si mostra che (b)  $\Rightarrow$  (c). Questo, però, è ovvio perché  $f(P) = g(P), \forall P \in \mathbb{P}(V)$ , incluso  $\mathcal{R} \subset \mathbb{P}(V)$ .

Infine, si mostra (c)  $\Rightarrow$  (a). Per farlo, si prende  $\{v_0, \dots, v_n\}$  base normalizzata riferita a  $\mathcal{R}$ . Si sa che

$$[\varphi(v_i)] = f(P_i) = g(P_i) = [\psi(v_i)], \forall P_i \in \mathcal{R} \quad (1.1.4)$$

quindi  $\exists \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i)$ . Per concludere, si considera cosa succede al punto unità; per la relazione 1.1.4, deve valere  $\varphi(v_{n+1}) = \lambda_{n+1} \psi(v_{n+1})$ , per qualche  $\lambda_{n+1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , ma, al contempo:

$$\lambda_{n+1} \sum_{i=0}^n \psi(v_i) = \sum_{i=0}^n \varphi(v_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \psi(v_i) \implies \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \lambda_{n+1}) \psi(v_i) = 0$$

Visto che  $\psi$  è iniettiva, gli  $\psi(v_0), \dots, \psi(v_n)$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\forall i = 0, \dots, n, \lambda_{n+1} = \lambda_i$ , il che vuol dire che  $\lambda_{n+1} \psi = \varphi$  sui  $v_0, \dots, v_n$ ; essendo questi una base, la relazione  $\varphi = \lambda_{n+1} \psi$  vale su tutti i vettori dello spazio.  $\square$

**COROLLARIO 1.6.1.** Si ha

$$\mathbb{PGL}(V) \cong \text{GL}(V) / N$$

con  $N = \{ \lambda \text{Id} \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \} \triangleleft \text{GL}(V)$ .

*Dimostrazione.* Si considera la mappa  $\varphi \mapsto [\varphi] : \text{GL}(V) \rightarrow \mathbb{PGL}(V)$ . Questa mappa è un omomorfismo suriettivo di gruppi e, se  $[\varphi] = \text{Id}_{\mathbb{P}(V)} = [\text{Id}_V]$ , allora  $\varphi = \lambda \text{Id}_V$  per il teorema 1.6 appena mostrato. Questo implica che il nucleo di tale omomorfismo è proprio  $N$ , quindi la tesi segue applicando il primo teorema di omomorfismo.  $\square$

**NOTAZIONE 1.1 (PROIETTIVITÀ STANDARD).** Le proiettività di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  formano un gruppo indicato da  $\mathbb{PGL}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{PGL}_{n+1}(\mathbb{K})$ . L' $n+1$  come pedice indica la taglia delle matrici che rappresentano le proiettività, non la dimensione dello spazio su cui agiscono.

**TEOREMA 1.7 (TEOREMA FONDAMENTALE DELLE TRASFORMAZIONI PROIETTIVE).** Siano  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  due spazi proiettivi su  $\mathbb{K}$  tali che  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W) = n$ . Fissati  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  e  $\mathcal{R}' = \{P'_0, \dots, P'_{n+1}\}$  due riferimenti proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  rispettivamente, esiste un'unica trasformazione proiettiva  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  tale che  $f(P_i) = P'_i, i = 0, \dots, n+1$ .

*Dimostrazione.* L'unicità è diretta conseguenza del teorema 1.6. Rimane da mostrare l'esistenza.

Siano, allora,  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{w_0, \dots, w_n\}$  due basi normalizzate associate a  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  rispettivamente e sia  $\varphi : V \rightarrow W$  la mappa tale che  $\forall i, \varphi(v_i) = w_i$ ; si nota che  $\varphi$  è iniettiva perché ha rango massimo, quindi si può prendere  $f = [\varphi]$ . Per costruzione:

$$f(P_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = P'_i$$

mentre per i punti fondamentali:

$$f(P_{n+1}) = f([v_0 + \dots + v_n]) = [\varphi(v_0 + \dots + v_n)] = [w_0 + \dots + w_n] = P'_{n+1}$$

□

#### 1.1.4 Coordinate omogenee

Come per il caso degli spazi vettoriali, è utile ricorrere a sistemi di coordinate. Per capire come definirli, si considera il caso particolare di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ; questo, per definizione, è:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \{[(x_0, \dots, x_n)] \mid \exists x_i \neq 0\}$$

**DEFINIZIONE 1.16 (RIFERIMENTO PROIETTIVO CANONICO).** Il *riferimento canonico* (o standard) di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è quel riferimento proiettivo che ha, come base normalizzata, la base canonica di  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

In questo caso, si dirà che  $[(x_0, \dots, x_n)]$  ha *coordinate omogenee*  $[x_0 : \dots : x_n]$  rispetto al riferimento canonico di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ . Ora si estende questa definizione a spazi proiettivi generali.

**DEFINIZIONE 1.17 (COORDINATE OMOGENEE).** Sia  $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_{n+1}\}$  un riferimento proiettivo di  $\mathbb{P}(V)$ ; dato  $P \in \mathbb{P}(V)$ , le sue *coordinate omogenee* rispetto a  $\mathcal{R}$  sono date da una delle seguenti definizioni.

- Se  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è l'unico isomorfismo proiettivo che manda  $\mathcal{R}$  nel riferimento canonico di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , allora le coordinate omogenee di  $P$  sono  $f(P)$ .
- Se  $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_n\}$  è una base normalizzata di  $\mathcal{R}$  e  $P = [v]$ , si considera  $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$ ; le coordinate omogenee di  $P$  rispetto a  $\mathcal{R}$ , allora, sono  $[a_0 : \dots : a_n]$ .

Come per gli spazi vettoriali, è possibile rappresentare le trasformazioni proiettive come matrici e i sottospazi proiettivi come i luoghi di zeri di equazioni.

**DEFINIZIONE 1.18 (MATRICE ASSOCIATA).** Sia  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$  un isomorfismo proiettivo e siano  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  due riferimenti proiettivi di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$  rispettivamente, con  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  le rispettive basi normalizzate. Se  $\varphi$  induce  $f$ , allora  $f$  è rappresentata da

$$M = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\varphi) \in \mathcal{M}(n+1, \mathbb{K})$$

**OSSERVAZIONE 1.5 (PRODOTTO TRA MATRICE E COORDINATE OMOGENEE).** Siano  $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$  e  $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ , con  $f = [\varphi]$ . Sia  $M$  la matrice che rappresenta  $f$  e siano  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  due riferimenti di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathbb{P}(W)$ , con basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ .

Indicando il passaggio a coordinate omogenee rispetto a  $\mathcal{R}$  con  $[\cdot]_{\mathcal{R}}$  e il passaggio a coordinate rispetto a  $\mathcal{B}$  con  $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ , si ha:

$$\begin{aligned} [f(P)]_{\mathcal{R}'} &= [[\varphi(v)]]_{\mathcal{R}'} = \left[ [M[v]_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{B}'}^{-1} \right]_{\mathcal{R}'} = \left[ [[M[v]_{\mathcal{B}}]]_{\mathcal{R}'}^{-1} \right]_{\mathcal{R}'} \\ &= [M[v]_{\mathcal{B}}] \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

**NOTAZIONE 1.2.** Sia  $M$  una matrice e sia  $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ ; prendendo  $\mathcal{R}$  un riferimento di  $\mathbb{P}(V)$  e  $\mathcal{B}$  sua base normalizzata, si pone

$$M[P]_{\mathcal{R}} = [M][P]_{\mathcal{R}} \doteq [M[v]_{\mathcal{B}}]$$

**DEFINIZIONE 1.19 (EQUAZIONI CARTESIANE PROIETTIVE).** Sia  $S \subset \mathbb{P}(V)$  un sottospazio proiettivo e  $W$  il sottospazio di  $V$  tale che  $S = \mathbb{P}(W)$ . Fissato un riferimento  $\mathcal{R}$  su  $\mathbb{P}(V)$ , si individua univocamente una base normalizzata di  $V$ , pertanto  $W$  si esprime come luogo degli zeri di  $\dim V - \dim W$  equazioni. Queste equazioni si definiscono *equazioni cartesiane* per  $S$  rispetto a  $\mathcal{R}$ .

Si nota che il numero di equazioni cartesiane si può scrivere anche come

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim S = \dim V - \dim W$$

## 1.2 Spazi proiettivi e spazi affini

## 2 SPAZI METRICI, TOPOLOGICI E APPLICAZIONI CONTINUE

### 2.1 Spazi metrici

**DEFINIZIONE 2.1 (SPAZIO METRICO).** Sia  $X$  un insieme non vuoto; allora  $X$  si dice spazio metrico se può essere equipaggiato con una *distanza*, ossia una funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

- $d(x, x') \geq 0$  e  $d(x, x') = 0 \iff x = x'$ ;
- $d(x, x') = d(x', x)$ ;
- $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ .

Dato uno spazio metrico  $(X, d_X)$  e un insieme  $Y \subset X$ , si può definire un sottospazio di  $(X, d_X)$  restringendo la distanza al solo  $Y$ :

$$d_Y(y, y') := d_X(y, y'), \quad \forall y, y' \in Y$$

Quindi  $(Y, d_Y)$  è a sua volta uno spazio metrico, sottospazio di  $(X, d_X)$ , il quale è detto *spazio ambiente* di  $Y$ .

#### 2.1.1 Insiemi aperti

In uno spazio metrico  $(X, d)$ , si può definire un *disco aperto* di raggio  $r$  e centro  $x$  come

$$B_r(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < r\}$$

**DEFINIZIONE 2.2 (INSIEME APERTO).** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Un suo sottoinsieme si dice aperto se è generato dall'unione di dischi aperti.

#### 2.1.2 Continuità in spazi metrici

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice continua in  $x \in \mathbb{R}$  se  $\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon)$  tale che:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \forall |x - x'| < \delta(\varepsilon)$$



È possibile generalizzare la definizione a spazi metrici usando la metrica definita su di essi.

**DEFINIZIONE 2.3 (CONTINUITÀ IN SPAZI METRICI).** Sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione, con  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  spazi metrici. Si dice che  $f$  è continua in  $x \in X$  se  $\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon)$  tale che:

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon, \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon) \quad (2.1.1)$$

Usando la nozione di insieme aperto, è possibile generalizzare ulteriormente la definizione di continuità al solo concetto di apertura di un insieme.

**TEOREMA 2.1.** Un'applicazione  $f : X \rightarrow Y$  è continua  $\iff \forall A \subset Y$  aperto, l'insieme  $f^{-1}(A)$  è aperto.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni.

- $(\implies)$  Si assume che  $f$  sia continua. Si prende  $f(x) \in A$ , con  $A \subset Y$  aperto, per qualche  $x \in f^{-1}(A)$ . Essendo  $A$  aperto  $\implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset A$ ; allo stesso tempo, per continuità di  $f$ , dato  $\varepsilon$  scelto prima, deve esistere  $\delta(\varepsilon)$  tale che

$$f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

quindi  $B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}(A)$ . Valendo  $\forall x \in f^{-1}(A) \implies f^{-1}(A)$  è aperto perché per ogni suo elemento, esiste una palla tutta contenuta al suo interno.

- $(\impliedby)$  Si assume che  $\forall A \subset Y$  aperto, la funzione  $f$  sia tale che l'insieme  $f^{-1}(A)$  è aperto. Per  $f(x) \in Y$ , esiste  $B_\varepsilon(f(x)) \subset Y$ ; essendo questo aperto, deve essere aperto anche  $f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ . Dunque, dato  $x \in f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ ,  $\exists \delta(\varepsilon) : B_{\delta(\varepsilon)}(x) \subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x))]$ , quindi vuol dire che  $f(B_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ , ossia:

$$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon, \forall d_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$$

Valendo  $\forall x \in X$ , allora  $f$  è continua.

□

Questo permette di parlare di continuità di applicazioni in insiemi su cui non è definita una distanza, ma solo i sottoinsiemi aperti.

### 2.1.3 Distanze equivalenti

**DEFINIZIONE 2.4 (Distanze topologicamente equivalenti).** Due distanze  $d, \bar{d}$  su  $X$  si dicono *topologicamente equivalenti* se hanno gli stessi insiemi aperti, cioè se generano la stessa topologia.

Se  $d(x, y) = r\bar{d}(x, y)$ , per  $r > 0$ , si hanno due distanze equivalenti perché, evidentemente,  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$B_\varepsilon(x) = \bar{B}_{r\varepsilon}(x)$$

cioè le due distanze  $d, \bar{d}$  identificano le stesse palle aperte, quindi gli stessi insiemi aperti. In  $\mathbb{R}^n$ , le distanze

$$\begin{aligned} d_2(x, x') &= \|x - x'\| \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} \\ d_1(x, x') &= \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \\ d_\infty(x, x') &= \max_i \{|x_i - x'_i|\} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

sono equivalenti e si ha

$$d_\infty(x, x') \leq d_2(x, x') \leq d_1(x, x') \leq n d_\infty(x, x') \tag{2.1.3}$$

*Dimostrazione.* La prima disuguaglianza è giustificata da:

$$d_2(x, x') = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2} \geq \sqrt{\max_i \{(x_i - x'_i)^2\}} = \max_i \{|x_i - x'_i|\} = d_\infty(x, x')$$

La seconda, invece, è vera perché:

$$[d_2(x, x')]^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 \leq \left[ \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \right]^2 = [d_1(x, x')]^2$$

L'ultima disuguaglianza è immediata. □

Da questo segue direttamente che<sup>1</sup>

$$B_\varepsilon^{(\infty)}(x) \supset B_\varepsilon^{(2)}(x) \supset B_\varepsilon^{(1)}(x) \supset B_{\varepsilon/n}^{(\infty)}(x) \tag{2.1.4}$$

<sup>1</sup> Apparentemente, la distanza più grande dovrebbe includere più elementi, quindi i simboli  $\supset$  dovrebbero essere dei  $\subset$ , invece, avendo fissato il raggio  $\varepsilon$ , quella che permette di creare la palla più grande è la distanza più piccola perché avvicina i punti tra di loro, quindi più elementi rientreranno in tale raggio.

Questo mostra che se  $A$  è aperto rispetto ad una distanza, lo è anche rispetto alle altre.

#### 2.1.4 Alcuni risultati sulla continuità

**PROPOSIZIONE 2.1.** Siano  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  due spazi metrici e  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione. Dato  $x \in X$ , se esiste costante  $M > 0$  tale che

$$d_Y(f(x'), f(x)) \leq M d_X(x', x), \quad \forall x' \in X$$

allora  $f$  è continua in  $x$ .

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal fatto che, per ipotesi, definendo  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$ , si ha  $f(D_{\delta(\varepsilon)}(x)) \subset D_\varepsilon(f(x))$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 2.2.** Ogni applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua rispetto alle distanze euclidee.

*Dimostrazione.* Si usa Prop. ?? applicato alle distanze  $d^{(1)}$ , che sono topologicamente equivalenti alle distanze euclidee  $d^{(2)}$ . Inoltre, visto che ogni applicazione costante è continua, si esclude che  $L$  sia nulla. Si denota con  $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  la matrice che rappresenta  $L$ ; se  $x, x' \in \mathbb{R}^n$  si ha:

$$\begin{aligned} d^{(1)}(L(x), L(x')) &= \left| \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j - x'_j) \right| + \dots + \left| \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j - x'_j) \right| \\ &\leq \left( \max_j |a_{1j}| + \dots + \max_j |a_{mj}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j - x'_j| \leq M m d^{(1)}(x, x') \end{aligned}$$

con  $M = \max |a_{ij}|$ , che è maggiore di 0 perché  $L$  è non-nulla. Da Prop. ??, segue la tesi.  $\square$

La precedente proposizione può essere applicata al caso particolare di applicazioni lineari: le **proiezioni**. Una proiezione è generalmente definita come:

$$p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_i(x) = x_i \quad (2.1.5)$$

È possibile definire, più in generale, per  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n$ , la proiezione

$$p_{i_1, \dots, i_m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad p_{i_1, \dots, i_m}(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \quad (2.1.6)$$

che è lineare e, quindi, continua.

### 2.1.5 Isometrie e omeomorfismi

**DEFINIZIONE 2.5 (ISOMETRIA).** Dati  $X, Y$  spazi metrici, un'applicazione biettiva  $f : X \rightarrow Y$  è un'isometria se  $\forall x, x' \in X$ , si ha  $d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x'))$ .

Da Prop ??, segue che un'isometria è un'applicazione continua. Se fra due spazi metrici  $X, Y$  esiste un'isometria  $f : X \rightarrow Y$ , gli spazi si dicono **isometrici**.

Sono isometrie  $\text{Id} : X \rightarrow X$ , cioè l'applicazione identità, l'inversa di un'isometria e la composizione di isometrie. Questo porta al seguente.

**PROPOSIZIONE 2.3.** Un'isometria fra due spazi metrici è una relazione di equivalenza.

**DEFINIZIONE 2.6 (OMEOMORFISMO).** Dati  $X, Y$  spazi metrici, un'applicazione biettiva  $f : X \rightarrow Y$  è un *omeomorfismo* se la sua inversa e  $f$  stessa sono continue.

Ne segue che ogni isometria è un omeomorfismo, ma non è vero il viceversa. Per esempio, definendo  $e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ , questa ha un'inversa continua  $\log(x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , quindi è un omeomorfismo, ma non è un'isometria perché manda  $(-\infty, 0]$  in  $(0, 1]$ . Anche gli omeomorfismi definiscono una **relazione di equivalenza** tra spazi metrici.

## 2.2 Spazi topologici

**DEFINIZIONE 2.7 (TOPOLOGIA E SPAZIO TOPOLOGICO).** Sia  $X$  un insieme non-vuoto. Una *topologia* su  $X$  è una famiglia non-vuota  $\tau$  di sottoinsiemi di  $X$ , chiamati *insiemi aperti della topologia*. Questi soddisfano le seguenti condizioni:

- $\emptyset, X$  sono aperti;
- l'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;
- l'intersezione di due insiemi aperti è un aperto.

Allora si definisce *spazio topologico* la coppia  $(X, \tau)$ , dove  $X$  è detto *supporto* dello spazio topologico e i suoi elementi sono i *punti* dello spazio.

Dato  $(X, d)$  spazio metrico, la famiglia degli insiemi aperti rispetto a  $d$  è una topologia su  $X$  indotta da  $d$  stessa. In  $\mathbb{R}^n$ , si definisce **topologia euclidea** (o **naturale**)  $\mathcal{E}$  come quella indotta dalla distanza euclidea  $d_2$ . Su  $\mathbb{C}$ , la topologia euclidea  $\mathcal{E}$  è quella indotta da  $d(z, w) = |z - w|$ ; questa conclusione si può ottenere identificando  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  da

$z = x + iy \mapsto (x, y)$  e considerando la distanza euclidea di  $\mathbb{R}^2$ . In modo del tutto analogo, si identifica  $\mathbb{C}^n$  con  $\mathbb{R}^{2n}$  e la distanza euclidea di  $\mathbb{R}^{2n}$  definisce, su  $\mathbb{C}^n$ , una distanza e, quindi, una topologia che è la topologia naturale di  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathcal{E}$ . Su un qualunque insieme non-vuoto  $X$ , si possono sempre definire due topologie:

- la **topologia banale**  $\mathcal{B} = \{X, \emptyset\}$ , con  $(X, \mathcal{B})$  **spazio topologico banale**;
- la **topologia discreta** ottenuta prendendo  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , con  $(X, \mathcal{P}(X))$  **spazio topologico discreto**.

**DEFINIZIONE 2.8 (SPAZIO METRIZZABILE).** Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto *metrizzabile* se si può definire una distanza su  $X$  che induce la topologia  $\tau$ .

Sia dato  $Y$  sottoinsieme non-vuoto di uno spazio metrizzabile  $(X, d_X)$ ; si sa già che  $d_Y$ , ottenuta come restrizione di  $d_X$  a  $Y$ , è una distanza su  $Y$ . In questo caso, la topologia indotta da  $d_Y$  su  $Y$  si dice *topologia indotta da  $X$  su  $Y$* . Allora, se  $y \in Y$ :  $B_\varepsilon^{(Y)}(y) = B_\varepsilon^{(X)}(y) \cap Y$ ; questo significa che gli aperti di  $Y$  sono della forma  $A \cap Y$ , con  $A$  aperto di  $X$ .