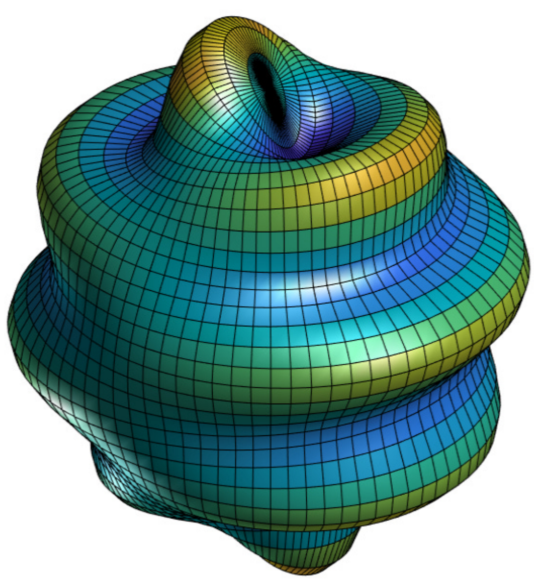
APPUNTI DI
GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

Manuel Deodato



Indice

1 Teoria delle curve

§1.1 Introduzione

Definizione 1.1 (Curva parametrizzata). Una *curva paramtrizzata* è un'applicazione $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ di classe $C^\infty(I)$, con I intervallo aperto. Data $t \in I$, si può scrivere in componenti come

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

con $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ tutte di classe $C^\infty(I)$.

Osservazione 1.1. La necessità di definire la curva su un aperto, o quantomeno di poter estendere l'intervallo di definizione ad un aperto, deriva dal fatto che, in questo modo, si può effettivamente parlare di derivata piena anche per gli estremi, potendo trovare, infatti, un aperto che contiene interamente i punti di frontiera dell'intervallo di definizione. Se non si avesse questa possibilità, nel caso di $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, per esempio, non si potrebbe calcolare la derivata tradizionale in a, o b, perché si potrebbe solamente calcolare il limite destro o sinistro.

Si nota che, nel caso in cui I non fosse aperto, si estende l'intervallo di definizione ad $A \supset I$ aperto.

Si parla di *traccia* della curva in riferimento all'immagine che genera dell'intero intervallo: $\operatorname{Tr} \alpha = \alpha(I)$. La traccia rappresenta l'unione di ciascun punto di $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, $\forall t \in I$. Per *velocità* della curva, invece, si intende la grandezza[1]

$$\alpha'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) \tag{1.1.1}$$

In realtà, questo rappresenta il *vettore velocità*, mentre la velocità vera e propria è data dalla sua norma $\|\alpha'(t)\|$.

Esempio 1.1 (Retta parametrizzata). Siano $P, Q \in \mathbb{R}^3$, con $P \neq Q$, due punti dello spazio; si definisce, allora, *retta parametrizzata* la curva

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & P + t(Q-P) = P + t\overrightarrow{PQ} \end{array}$$

La sua traccia è la retta affine passante per P e Q, e ha vettore velocità $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$, da cui $\|\alpha'(t)\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$, che è costante.

Esempio 1.2 (Circonferenza parametrizzata). Dato $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, si definisce *circonferenza parametrizzata* come

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a\cos t, a\sin t, 0) \end{array}$$

il cui vettore velocità è dato da $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, 0)$, che non risulta costante, mentre la sua velocità $\|\alpha'\| = a > 0$ sì. La traccia corrisponde ad una circonferenza nel piano $z = 0$, di centro l'origine e raggio a.

§1.2 Riparametrizzazione di una curva

Sia $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata; una sua *riparametrizzazione* è data dalla coppia di mappe $h : [a,b] \to [c,d] \subseteq \mathbb{R}$ e $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ tali che

[1] Questa è ben definita perché si sta operando in uno spazio vettoriale, con $\alpha(t+h) - \alpha(t)$ giustificata dall'operazione di somma dello spazio e divisione per h data dalla moltiplicazione per uno scalare.

il diagramma

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R}^3 \\
{[c,d]} \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

commuta, quindi si ha $\beta(h(t)) = \alpha(t)$. Perché questo sia verificato, si assume che $h \in C^\infty([a, b])$ e $h'(t) \neq 0,\ \forall t \in [a, b]$; in questo modo, $\exists h^{-1}$ di classe C^∞ tale che $\beta = \alpha \circ h^{-1}$, quindi anche β risulta liscia ed è verificata la relazione $(\beta \circ h)(t) = \alpha(t)$, con $\operatorname{Tr} \alpha = \operatorname{Tr} \beta$.

Ora si definisce la lunghezza di una curva; se ne giustifica la definizione tramite il seguente ragionamento. Sia dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $P \in \mathcal{P}([a, b])$ una sua partizione, tale che $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$; allora la lunghezza di una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ approssimata a tale partizione è data da:

$$L(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \tag{1.2.1}$$

Si nota, dunque, che la lunghezza effettiva della curva coincide con

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(\alpha, P) = \int_a^b \|\alpha'(u)\|\, du \tag{1.2.2}$$

Definizione 1.2 (Lunghezza d'arco). Sia $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva; si definisce *lunghezza d'arco* la funzione

$$s : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_a^t \|\alpha'(u)\|\, du \end{array}$$

La lunghezza dell'intera curva α è data da $L(\alpha) = s(b)$.

Osservazione 1.2. Si nota che per $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, con $\alpha(t) = \big(a \cos t, a \sin t, 0\big)$, valendo $\|\alpha'(t)\| = a$, si ha:

$$s(t) = a \int_0^t du = ta \implies s(2\pi) = 2\pi a$$

Vale la pena chiedersi se $L(\alpha)$ sia indipendente dalla sua parametrizzazione, cioè se $L(\alpha) = L(\beta)$, se β è una riparametrizzazione di α; questo si vede facilmente per conto diretto.

Dimostrazione. Se $\alpha(t) = \beta(h(t))$, allora $\alpha'(t) = \beta'(h(t))h'(t)$, quindi

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_a^b |h'(t)| \, \|\beta'(h(t))\| \, dt$$

Ora si distinguono due casi: essendo $h'(t) \neq 0$, $\forall t$, si può avere o $h'(t) < 0$, o $h'(t) > 0$. Nel primo caso, si ha $h'(t) < 0$, quindi $|h'(t)| = -h'(t)$, con $h(a) = d$ e $h(b) = c$; nel secondo caso, $|h'(t)| = h'(t)$, con $h(a) = c$ e $h(b) = d$. Si trova, per $s = h(t)$, rispettivamente:

$$\begin{cases} -\displaystyle\int_d^c h'(t) \, \|\beta'(h(t))\| \, dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| \, ds = L(\beta) \\[2ex] \displaystyle\int_c^d h'(t) \, \|\beta'(h(t))\| \, dt = \int_c^d \|\beta'(s)\| \, ds = L(\beta) \end{cases}$$

In entrambi i casi, dunque, si ottiene $L(\alpha) = L(\beta)$. □

Ora si introduce una particolare riparametrizzazione, talvolta nota col nome di *riparametrizzazione canonica*, o *naturale*; per poterla definire, è necessario che α soddisfi la seguente condizione.

Definizione 1.3 (Curva regolare). Una curva parametrizzata $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è detta *regolare* se $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Si considera, quindi, una curva regolare $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$; visto che $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du$, allora $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$. Si può pensare alla lunghezza d'arco come $s : [a, b] \to [0, L(\alpha)]$, che, essendo monotona perché si è appena osservato che $s'(t) > 0$, allora ha anche inversa $t : [0, L(\alpha)] \to [a, b]$. È, quindi, possibile definire la funzione

$$\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \to \mathbb{R}^3 \tag{1.2.3}$$

tale che $\mathrm{Tr}(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha)$ e $\beta(s) = \alpha(t(s))$, per cui

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \frac{\alpha'(t(s))}{s'(t(s))} = \frac{\alpha'(t(s))}{\|\alpha'(t)\|}$$

per cui $\|\beta'(s)\| = 1$.

Definizione 1.4 (Curva p.l.a.). Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ è una curva tale che $\|\alpha'(t)\| = 1$, $\forall t \in I$, allora si dice che è *parametrizzata tramite lunghezza d'arco*, o pla.

Osservazione 1.3. In base a quanto detto prima, ogni curva regolare è *riparametrizzabile tramite lunghezza d'arco*.

Osservazione 1.4 (Non unicità della versione pla). Data una curva regolare $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, la riparametrizzazione tramite lunghezza d'arco non è univoca ma dipende dall'estremo inferiore di integrazione della lunghezza d'arco $s(t)$; se, infatti, $a, b \in I$ con $a < b$:

$$s_a(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\|\, du \qquad s_b(t) \int_b^t \|\alpha'(u)\|\, du$$

Le due, però, differiscono solo per una costante perché

$$s_a(t) = \int_a^b \|\alpha'(u)\|\, du + \int_b^t \|\alpha'(u)\|\, du = \text{cost.} + s_b(t)$$

Questa differenza per una costante non influirà sulla trattazione del riferimento di Frenet perché si lavora con derivate e la costante sparisce.

Esempio 1.3 (Elica). Sia $a > 0$; allora la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, z) & \longmapsto & (a\cos u, a\sin u, z) \end{array}$$

definisce un cilindro di raggio a attorno all'asse z. Preso $b > 0$ e presi i punti $\{(t, bt)\}_{t\in\mathbb{R}}$, relativi ad una retta passante per l'origine, aperto, si può definire la curva

$$\alpha(t) = \varphi(t, bt) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

che descrive un'*elica destrorsa*, visto che si è preso $b > 0$[a], di raggio a e passo b. Si nota che

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b) \implies \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

da cui α è regolare. Restringendola a $[0, +\infty)$, cioè considerando $\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, si ha:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = t(s)\sqrt{a^2 + b^2} \implies t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \beta(s) = \alpha(t(s)) &= \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ &= \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{aligned}$$

con β pla e, conseguentemente, $\beta(\mathbb{R}) = \mathrm{Tr}(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha(\mathbb{R})$.

[a] Fosse stato $b < 0$, sarebbe stata un'*elica sinistrorsa*.

Esempio 1.4 (Ellisse). Siano $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole definire una curva α tale che $\operatorname{Tr} \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$

Svolgimento. Si nota che $(x/a, y/b) \in S^1$, cioè

$$\frac{x}{a} = \cos t \qquad \frac{y}{b} = \sin t$$

con S^1 circonferenza unitaria e $t \in [0, 2\pi)$. Sia, allora

$$\alpha : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (a \cos t, b \sin t, 0) \end{array}$$

e si vede che $\operatorname{Tr} \alpha = \mathcal{E}_{a,b}$. ■

Esempio 1.5. Sia

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 = x^3 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire α tale che $\operatorname{Tr} \alpha = \mathcal{C}$.

Svolgimento. Se si considera la secante $y = tx$, allora $t^2x^2 = x^3$, ossia $x = t^2$ e $y = t^3$. Ne segue che la curva che soddisfa la richiesta è $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$. ■

Esempio 1.6. Sia

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y, 0) \mid y^2 = x^3 + x^2 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Si vuole costruire una curva α tale che $\operatorname{Tr} \alpha = \mathcal{C}$.

Svolgimento. Si considera, come prima, $y = tx$, da cui $x^3 + x^2(1 - t^2) = 0$, e si vede che $x = t^2 - 1$ e $y = t^3 - t$, quindi $\alpha(t) = (t^2 - 1, t^3 - t, 0)$. ■

Per quanto in linea teorica se α è una curva regolare, allora si può riparametrizzare tramite lunghezza d'arco, questo non è praticamente fattibile in ogni singolo caso; se, per esempio, si considera $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, si ha $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, che, dunque, è regolare, ma data

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2 + 9u^4}du$$

non si è in grado di trovare un'espressione per $t(s)$ perché la primitiva di s non è scrivibile in termini di funzioni elementari.

§1.3 Riferimento ed equazioni di Frenet

Definizione 1.5 (Versore tangente). Data una curva riparametrizzabile $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e la sua riparametrizzazione tramite lunghezza d'arco $\beta(s)$, si definisce il *versore tangente* ad α come $T(s) = \beta'(s)$.

Definizione 1.6 (Curvatura). Data una curva pla $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ e il suo versore tangente $T(s)$, allora se ne definisce la *curvatura* come

$$k(s) = \|T'(s)\|$$

Ora si ricavano il riferimento di Frenet e le equazioni di Frenet. Per poter definire il riferimento di Frenet e ricavare, conseguentemente, le equazioni di Frenet, è necessario imporre ulteriori condizioni sulle curve in esame; la condizione operativa necessaria è la seguente.

Definizione 1.7 (Curva di Frenet). Una curva regolare $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è detta *di Frenet* se la sua pla $\beta = \alpha \circ t : [0, L(\alpha)] \to \mathbb{R}^3$ è tale che $k(s) > 0, \ \forall s \in [0, L(\alpha)]$.

Lemma 1.0.1. Se $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ sono due mappe, allora

$$(f(t) \cdot g(t))' = f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Dimostrazione. Si ha

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t) g_i(t)$$

quindi

$$(f(t) \cdot g(t))' = \sum_{i=1}^{3} [f_i'(t) g_i(t) + f_i(t) g_i'(t)]$$

□

Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet e $T(s) = \beta'(s)$ il suo versore normale, con β versione pla di α, si nota che $T'(s)$ non è, in generale un versore e

$$1 = \|T(s)\|^2 = T(s) \cdot T(s) \implies [T(s) \cdot T(s)]' = 2T'(s) \cdot T(s) = 0 \implies T'(s) \perp T(s)$$

Avendo assunto α di Frenet, significa che $k_\alpha(s) \neq 0$, quindi $T'(s)$ è normalizzabile e si ottiene un versore ortogonale a $T(s)$. Usando questo versore e $T(s)$, tramite il prodotto vettore, se ne può definire un terzo; allora si ha la seguente definizione.

> **Definizione 1.8 (Versori normale e binormale).** Dato $T(s)$ versore tangente di una curva di Frenet $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, si definiscono $N(s) = T'(s) / \|T'(s)\|$ *versore normale principale* e $B(s) = T(s) \times N(s)$ *versore binormale*.

Evidentemente, si ha $\|N(s)\| = \|B(s)\| = 1$ e $T(s) \cdot N(s) = T(s) \cdot B(s) = N(s) \cdot B(s) = 0$. Ne segue che $\big(T(s), N(s), B(s)\big)$, $\forall s \in I$ forma una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, nota col nome di **riferimento di Frenet**. Per definizione di $N(s)$, si ottiene la **I equazione di Frenet**:

$$T'(s) = k(s) N(s) \tag{1.3.1}$$

Si nota che, essendo un versore, si ha $N(s) \cdot N(s) = 1$, quindi $N'(s) \cdot N(s) = 0$ (per lo stesso ragionamento fatto per $T(s)$), dunque $N'(s) \in \langle T(s), B(s) \rangle$;

inoltre, essendo $T(s) \cdot N(s) = 0$, si ha

$$T'(s) \cdot N(s) + T(s) \cdot N'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot N(s)}_{=1} + T(s) \cdot N'(s) = 0$$

perciò si trova $\tau(s)$ tale per cui

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \tag{1.3.2}$$

Questa è nota come **II equazione di Frenet**.

> **Definizione 1.9 (Torsione).** Data una curva regolare $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ e β la sua pla, si definisce $\tau(s)$ come la *torsione* di β nel punto s.

Ripetendo lo stesso ragionamento, si ha $B(s) \cdot B(s) = 1 \Rightarrow B'(s) \cdot B(s) = 0$, da cui $B'(s) \in \langle T(s), N(s) \rangle$ e, essendo $N(s) \cdot B(s) = 0$, dalla derivata di $T(s) \cdot B(s) = 0$, si ha

$$T'(s) \cdot B(s) + T(s) \cdot B'(s) = k(s) \underbrace{N(s) \cdot B(s)}_{=0} + T(s) \cdot B'(s) = 0$$

quindi $B'(s) \in \langle N(s) \rangle$. Usando $T(s) \cdot B(s) = 0$ e derivando $N(s) \cdot B(s) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} N'(s) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) &= (-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)) \cdot B(s) + N(s) \cdot B'(s) \\ &= \tau(s) \underbrace{B(s) \cdot B(s)}_{=1} + N(s) \cdot B'(s) = 0 \end{aligned}$$

cioè

$$B'(s) = -\tau(s)N(s) \tag{1.3.3}$$

che è nota come **III equazione di Frenet**. Ricapitolando, le equazioni di Frenet stabiliscono delle relazioni tra le derivate dei versori ortonormali del riferimento di Frenet e i versori stessi e sono:

$$
\begin{cases}
T'(s) = k(s)N(s) \\
N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\
B'(s) = -\tau(s)N(s)
\end{cases}
\tag{1.3.4}
$$

Ora si applicano i concetti visti alle curve studiate nella sezione precedente.

Esempio 1.7. Sia $\alpha(t) = P + t\overrightarrow{PQ}$ una curva parametrizzata (con $P, Q \in \mathbb{R}^3$ e $P \neq Q$). Si ha $\alpha'(t) = \overrightarrow{PQ}$, quindi la curva è regolare, quindi se ne può trovare una pla:

$$
s(t) = \int_a^t \|\overrightarrow{PQ}\| du = t\|\overrightarrow{PQ}\| \implies t = \frac{s}{\|\overrightarrow{PQ}\|}
$$

quindi si ha $\beta(s) = P + s\frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$. Allora il versore tangente è dato da

$$
T(s) = \beta'(s) = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \implies T'(s) = 0
$$

perciò $k(s) = 0$ e, quindi, α non è una curva di Frenet perché non ha curvatura positiva.

Esempio 1.8. Per $a > 0$, sia $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, 0)$ una circonferenza parametrizzata di raggio a. Evidentemente, si può vedere come un caso particolare di elica parametrizzata per $b = 0$, quindi si può fare uso del risultato trovato in precedenza:

$$
\begin{aligned}
&\beta(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{a}\right), a \sin\left(\frac{s}{a}\right), 0\right) \implies T(s) = \left(-\sin\frac{s}{a}, \cos\frac{s}{a}, 0\right) \\
&\Rightarrow T'(s) = \underbrace{\frac{1}{a}}_{k(s)} \underbrace{\left(-\cos\frac{s}{a}, -\sin\frac{s}{a}, 0\right)}_{N(s)}
\end{aligned}
$$

Si conclude che $N(s) \perp z$ e punta proprio verso z; inoltre, la circonferenza parametrizzata è una curva di Frenet perché ha curvatura positiva, essendo $1/a > 0$ perché $a > 0$ per assunzione. Infine:

$$B(s) = \begin{pmatrix} -\sin s/a \\ \cos s/a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/a \\ -\sin s/a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow -\tau(s)N(s) = B'(s) = 0 \implies \tau(s) = 0$$

Esempio 1.9. Si considera l'elica parametrizzata $\alpha = (a\cos t, a\sin t, bt)$, con raggio $a \in \mathbb{R}^{>0}$ e passo $b \in \mathbb{R}$. La sua pla è già stata ricava; dato $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, si ottiene:

$$\beta(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{c}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{c}}\right), \frac{b}{\sqrt{c}}s\right)$$

da cui

$$T(s) = \frac{1}{c}\left(-a\sin\frac{s}{c}, a\cos\frac{s}{c}, b\right) \implies T'(s) = \underbrace{\frac{a}{c^2}}_{k(s)}\underbrace{\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right)}_{N(s)}$$

quindi, come nel caso della circonferenza, $N(s) \perp z$ e punta verso di esso. Si ha:

$$B(s) = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} -a\sin s/c \\ a\cos s/c \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/c \\ -\sin s/c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} b\sin s/c \\ -b\cos s/c \\ a \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \implies \tau(s) = N'(s) \cdot B(s) = \frac{b}{c^2}$$

Da questo, si vede che

- se $b > 0$, allora l'elica è destrorsa e $\tau(s) > 0$,
- se $b < 0$, allora l'elica è sinistrorsa e $\tau(s) < 0$,

- se $b = 0$, si ha una circonferenza e $\tau(s) = 0$, con $k(s) = 1/a$.

Fissando a, si nota che, per $b \to \pm\infty$, si ha $\tau(s) \to 0$ e $k(s) = a/(a^2 + b^2) \to 0$.

Proposizione 1.1. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare; allora $k_\alpha = 0 \iff \alpha(I)$ è contenuta in una retta.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ($\Leftarrow$) Se $\alpha(I) \subseteq P + \langle v \rangle$, per v versore generico, si considera la sua versione pla $\alpha(I) = \beta(J) \subseteq P + \langle v \rangle$; allora $\beta = P + f(s)v$ e $\beta' = f'(s)v$, con $f'(s) = \pm 1$ perché $\|\beta'\| = 1$. Ne segue che:

$$T(s) = \beta'(s) = f'(s)v = \pm v \implies T'(s) = 0 \implies k_\alpha(s) = 0$$

- ($\Rightarrow$) Sia $\|T'(s)\| = k_\alpha(s) = 0$, quindi $T(s) = \beta'(s) = v$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$. Allora si deve avere $\beta(s) = \beta(0) + sv \in \beta(0) + \langle v \rangle$.

□

Esercizio 1.1. Sia $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ una curva pla tale che

$$\beta(I) \subseteq S^2_r(P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|x - P\| = r \right\}$$

Mostrare che β è di Frenet.

Svolgimento. Se $\beta(I) \subseteq S^2_r(P)$, allora $\|\beta(s) - P\|^2 = r^2$; derivando due volte rispetto a s, si ottiene:

$$\frac{d}{ds}\left[T(s) \cdot (\beta(s) - P)\right] = 0 \implies T'(s) \cdot (\beta(s) - P) + T(s) \cdot T(s) = 0$$
$$\Rightarrow T'(s) \cdot (\beta(s) - P) = -1 \implies k(s)\left[N(s) \cdot (\beta(s) - P)\right] = -1$$

Quindi $k(s) \neq 0$ e, pertanto β è di Frenet. ■

Proposizione 1.2. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet; allora $\tau_\alpha = 0 \iff \alpha(I)$ è contenuta in un piano.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nelle due implicazioni.

- ($\Rightarrow$) Si assume, senza perdita di generalità, che α sia pla[1]. Allora

$$\tau_\alpha = 0 \implies B'_\alpha(s) = -\tau_\alpha(s)N_\alpha(s) = 0$$

quindi B_α è costante; sia $B_\alpha(s) = B_0$, per qualche $B_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|B_0\| = 1$. Ne segue, allora, che

$$T(s) \cdot B_0 = \alpha'(s) \cdot B_0 \implies (\alpha(s) \cdot B_0)' = 0$$

quindi $\alpha(s) \cdot B_0 = c \in \mathbb{R}$, dunque $\alpha(I) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\right\}$.

- ($\Leftarrow$) Sia $\alpha(I) \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot B_0 = c\right\}$, per qualche $B_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|B_0\| = 1$ e $c \in \mathbb{R}$; allora $\forall s,\ \alpha(s) \cdot B_0 = c$. Ne segue che

$$T(s) \cdot B_0 = 0 \implies k(s)(N(s) \cdot B_0) = 0 \implies N(s) \cdot B_0 = 0$$

dove la seconda implicazione è giustificata dal fatto che α è di Frenet, quindi $k(s) > 0$. Visto che $B_\alpha(s) = T(s) \times N(s)$, considerando (continuare ...).

$\square$

Proposizione 1.3. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva di Frenet; se $\tau_\alpha = 0$, allora k_α è costante $\iff$ $\alpha(I)$ è contenuta in una circonferenza.

Dimostrazione. Da scrivere… $\square$

Proposizione 1.4. Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare; se $\alpha(I) \subseteq \mathbb{S}_R(P) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - P\| = R\right\}$, allora α è di Frenet e $k_\alpha \geqslant 1/R > 0$.

Dimostrazione. Sia β la versione pla di α. Assumendo che $\mathrm{Tr}(\beta) \subseteq \mathbb{S}_R(P)$, si ha:

$$(\beta(s) - P) \cdot (\beta(s) - P) = \|\beta(s) - P\|^2 = R^2$$

[1] Altrimenti, α ammette una versione pla perché è una curva di Frenet.

Derivando questa relazione, si ha:

$$\beta'(s) \cdot (\beta(s) - P) = 0$$

Derivando nuovamente:

$$T'(s) \cdot (\beta(s) - P) + \underbrace{\beta'(s) \cdot \beta'(s)}_{=1} = 0$$

Passando alla norma, si vede che:

$$1 = \|T'(s) \cdot (\beta(s) - P)\| \leqslant \|T'(s)\| \, \|\beta(s) - P\| = k_\alpha(s)R$$

da cui $k_\alpha(s) \geqslant 1/R > 0$, quindi α è di Frenet. $\square$

§1.4 Riferimento di Frenet senza lunghezza d'arco

Come accennato, la possibilità di ottenere la versione pla di una curva regolare, anche se ammissibile in teoria, non sempre è concreta in pratica.

Sia, allora, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare; per definzione

$$\beta(s(t)) = \alpha(t) \implies \beta'(s(t))s'(t) = \beta'(s(t)) \, \|\alpha'(t)\| = \alpha'(t)$$

da cui si ottiene la relazione

$$T(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

Dalla relazione precedente, sostituendo $\beta'(s(t)) = T(s(t))$, si ottiene

$$s'(t)T(s(t)) = \alpha'(t) \tag{1.4.1}$$

e, derivando:

$$s''(t)T(s(t)) + s'^2(t)T'(s(t)) = \alpha''(t) \tag{1.4.2}$$

A questo punto, si vede che, facendo il prodotto vettore $\alpha' \times \alpha''$, il termine $T' \times T' = 0$, quindi:

$$\alpha' \times \alpha'' = s'^3 T \times T' \tag{1.4.3}$$

Si nota che, essendo $T' \perp T$ e $\|T\| = 1$, si ha $\|T' \times T\| = \|T'\| = k$, perciò

$$k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{s'^3} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

Per continuare, si assume che α sia una curva di Frenet; allora, usando la I equazione di Frenet, si ottiene

$$s'^3 k \underbrace{T \times N}_{=B} = \alpha' \times \alpha''$$

da cui si ottiene

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha'\|^3 k} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

Da questo, si ricava

$$N = B \times T = \frac{\alpha' \times \alpha'' \times \alpha'}{\|\alpha' \times \alpha''\| \, \|\alpha'\|}$$

Infine, si calcola la torsione. Per farlo, si deriva la I equazione di Frenet:

$$s'T'' = s'k'N + s'kN' \implies T'' = k'N + kN'$$

dove $s' \neq 0$ perché la curva è regolare e, quindi, si cancella. Vista la III equazione di Frenet $B' = -\tau N$, si ha $\tau = -B' \cdot N$; in realtà, si nota che

$$0 = (\underbrace{B \cdot N}_{=0})' = B' \cdot N + B \cdot N' \implies B' \cdot N = -B \cdot N'$$

da cui $\tau = B \cdot N'$. Derivando l'equazione 1.4.2:

$$\alpha''' = T'' s'^3 + 3T' s' s'' + T s'''$$

Ora, visto che $T' \propto N$ e $T, N \perp B$, dal prodotto scalare per B si ha:

$$\alpha''' \cdot B = s'^3 T'' \cdot B = s'^3 k N' \cdot B = s'^3 k \tau$$

Ricordando l'espressione per B, si ha:

$$\tau = \frac{\alpha''' \cdot (\alpha' \times \alpha'')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

Osservazione 1.5. L'esistenza di queste formule implica l'indipendenza di curvatura, torsione e intero riferimento di Frenet dalla scelta della lunghezza d'arco per la riparametrizzazione.

§1.5 Teorema fondamentale della teoria delle curve

Siano $\beta, \widetilde{\beta} : I \to \mathbb{R}^3$ due curve pla di Frenet, con $\widetilde{\beta}$ ottenuta tramite roto-traslazione di β, cioè

$$\widetilde{\beta}(s) = A\beta(s) + b$$

con $A \in SO(3)$ e $b \in \mathbb{R}^3$. Quello che si vuole verificare ora è che le due curve abbiano uguali curvatura e torsione. Per farlo, si nota che, essendo A un operatore lineare, è anche continuo (visto che opera su uno spazio finito-dimensionale), dunque:

$$\widetilde{T}(s) = AT(s) \qquad \widetilde{T}'(s) = T'(s) \implies \widetilde{k}(s)\widetilde{N}(s) = k(s)AN(s)$$

$\forall s \in I$. Passando alle norme, visto che A le preserva si ha $\|AN(s)\| = 1$, $\forall s \in I$, dunque $\widetilde{k}(s) = k(s)$, $\forall s \in I$.

Per la torsione, invece, si ha:

$$\widetilde{B}(s) = \widetilde{T}(s) \times \widetilde{N}(s) = (AT(s)) \times (AN(s)) = A\,[T(s) \times N(s)] = AB(s)$$

Per passaggi analoghi a prima, si vede che

$$\widetilde{B}'(s) = AB'(s) \implies -\widetilde{\tau}(s)\widetilde{N}(s) = -\tau(s)AN(s)$$

da cui $\widetilde{\tau}(s) = \tau(s)$. Ora ci si chiede il viceversa: date due curve con uguale curvatura e torsione, è vero che una è la versione roto-traslata dell'altra? Per rispondere, si ha il seguente.

Teorema 1.1. Se $\beta, \widetilde{\beta} : I \to \mathbb{R}^3$ sono due pla di Frenet con $k(s) = \widetilde{k}(s)$ e $\tau(s) = \widetilde{\tau}(s)$, allora $\exists A \in SO(3)$, $\exists b \in \mathbb{R}^3$ tali che $\widetilde{\beta}(s) = A\beta(s)+b$, $\forall s \in I$.

Dimostrazione. Si fissa un punto $s_0 \in I$; in questo punto, si possono calcolare i valori del riferimento di Frenet di ciascuna curva, ottenendo un totale di sei vettori. Si possono costruire $M = \big(T(s_0), N(s_0), B(s_0)\big)$ e $\widetilde{M} = \big(\widetilde{T}(s_0), \widetilde{N}(s_0), \widetilde{B}(s_0)\big)$, che sono due due matrici di $SO(3)$[1] e, a partire da queste, si può costruire la matrice $A = \widetilde{M}M^{-1}$ che permette di passare dal riferimento di β a quello di $\widetilde{\beta}$ nel punto s_0.

Ora bisogna mostrare che A permette il passaggio da un riferimento all'altro e bisogna trovare la costante di traslazione. Per farlo, si definisce $\beta^*(s) = A\beta(s) + b$; si mostra che $\beta^*(s) = \widetilde{\beta}(s)$, $\forall s \in I$. Intanto si trova b: è sufficiente notare che

$$\beta^*(s_0) = \widetilde{\beta}(s_0) = A\beta(s_0) + b \implies b = \widetilde{\beta}(s_0) - A\beta(s_0)$$

Si nota che, dimostrando l'uguaglianza delle terne del riferimento di β^* e

[1] Evidentemente, il riferimento di Frenet restituisce un elemento di $O(3)$ perché la relazione $M^T M = \mathrm{Id}$ corrisponde a moltiplicare i vettori del riferimento tra loro. Inoltre, usando $\det M = T \cdot (N \times (T \times N)) = T \cdot [(N \cdot N)T - (N \cdot T)N] = \|T\| = 1$.

$\widetilde{\beta}$ per ogni $s \in I$, unito al fatto che $\beta^*(s_0) = \widetilde{\beta}(s_0)$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} T^*(s) = \widetilde{T}(s) \\ \beta^*(s_0) = \widetilde{\beta}(s_0) \end{cases} \iff \begin{cases} (\beta^*)'(s) = \widetilde{\beta}'(s) \\ \beta^*(s_0) = \widetilde{\beta}(s_0) \end{cases}$$

da cui, integrando, si ha $\beta^*(s) = \widetilde{\beta}(s),\ \forall s \in I$.

Per dimostrarlo, si definisce la funzione

$$f(s) = T^*(s) \cdot \widetilde{T}(s) + N^*(s) \cdot \widetilde{N}(s) + B^*(s) \cdot \widetilde{B}(s)$$

che è sempre minore o uguale a 3 perché ciascun termine è minore o uguale ad 1 e l'uguaglianza vale quando il riferimento di β^* e quello di $\widetilde{\beta}$ coincidono; in particolare, quindi, $f(s_0) = 3$. Basta mostrare che questa è costante per mostrare che i due riferimenti coincidono ovunque su I. Allora si vede che:

$$f'(s) = kN^* \cdot \widetilde{T} + kT^* \cdot \widetilde{N} + (-kT^* + \tau B^*) \cdot \widetilde{N} + N^* \cdot (-k\widetilde{T} + \tau\widetilde{B}) - \tau N^* \cdot \widetilde{B} - \tau B^* \cdot \widetilde{N} = 0$$

dove si è usato che $k^*(s) = \widetilde{k}(s) = k(s)$ e $\tau^*(s) = \widetilde{\tau}(s) = \tau(s)$ per quanto dimostrato all'inizio della sezione, essendo che β^* è la roto-traslata di β e le uguaglianze tra $\widetilde{\beta}$ e β valgono per assunzione. □

A questo punto, ci si può chiedere se, date comunque $\tau, k : I \to \mathbb{R}$, di classe $C^\infty(I)$ e con $k > 0$, si può trovare una pla di Frenet $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ con $k_\beta = k$ e $\tau_\beta = \tau$. Questo si dimostra essere vero, ma non si dimostra.

§1.6 Esercizi

Esercizio 1.2. Sia data la curva

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1}{3}t^3, \sqrt{2}(t \sin t + \cos t), \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t)\right) \end{array}$$

Rispondere ai seguenti punti.

(a). Dimostrare che α, ristretta ad un intorno dell'origine, è di Frenet.

(b). Calcolare la curvatura e il riferimento di Frenet in un intorno di $t = 0$.

Svolgimento. Per lo svolgimento, si userà la seguente definizione di lunghezza d'arco:

$$s(t) := \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du$$

Si divide lo svolgimento nei due punti.

(a). Essendo interessati ad un intorno dell'origine, per dire che α è di Frenet bisogna preliminarmente verificarne la regolarità; allora si nota che

$$\alpha' = \left(t^2, \sqrt{2}t\cos t, \cos^2 t\right)$$

che è non-nulla in un intorno di $t = 0$. Ora, invece di procedere direttamente con i conti, che sono estremamente lunghi e complessi, si può notare che la condizione da mostrare è $T'(0) \neq 0$, per far vedere ce α è di Frenet in un intorno dell'origine. Per farlo, si può mostrare che $T \cdot T' \neq 0$ in $s(0)$ e si possono usare le relazioni

$$\alpha'(t) = s'(t)T(s(t)) \qquad \alpha''(t) = s''(t)T(s(t)) + s'^2(t)T'(s(t))$$

Infatti

$$\alpha' \times \alpha'' = \|\alpha'\|^3 \, T \times T'$$

e α'' si calcola facilmente come

$$\alpha''(t) = \left(2t, \sqrt{2}(\cos t - t\sin t), -2\cos t\sin t\right)$$

Quindi

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che permette di concludere direttamente che $T' \neq 0$ in un intorno di $t = 0$.

(b). Si nota che, essendo

$$\|\alpha'\| = \sqrt{t^4 + 2t^2 \cos^2 t + \cos^4 t} = t^2 + \cos^2 t \Rightarrow \|\alpha'(0)\| = 1$$

allora, dalla norma di $\alpha'(0) \times \alpha''(0)$, si ricava:

$$\sqrt{2} = \underbrace{\|\alpha'(0)\|^3}_{=1} k \implies k(0) = \sqrt{2}$$

Dalla stessa relazione, si ricava anche B, inserendo la I equazione di Frenet:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \times T' = kT \times N = kB \implies B(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dai calcoli precedenti, si può ottenere il versore tangente in $t = 0$:

$$T(0) = \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per finire, si ottiene il versore normale tramite prodotto vettore:

$$N(0) = B(0) \times T(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

Definizione 1.10 (Piano osculatore). Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una pla di Frenet. Dato $s_0 \in I$, il *piano osculatore* di γ in $\gamma(s_0)$ è il piano affine descritto da

$$\gamma(s_0) + \mathrm{Span}\big(T(s_0), N(s_0)\big)$$

Il piano generato da N e B è detto *normale*, mentre quello generato da T e B è detto *rettificante*.

Esercizio 1.3 (Cerchio osculatore). Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una pla di Frenet; il suo *cerchio osculatore* in $\gamma(s_0)$ è l'unico cerchio C di raggio R e centro P tale che:

(a). C è contenuto nel piano osculatore in $\gamma(s_0)$;

(b). $\gamma(s_0) \in C$;

(c). data $f(s) := \|\gamma(s) - P\|^2 - R^2$, si ha $f'(s_0) = f''(s_0)$ (cioè il cerchio è sufficientemente vicino alla curva).

Dimostrare che C così definito esiste ed è unico, esprimendo P ed R in termini di γ.

Svolgimento. Si inizia col mostrare l'unicità, assumendo che siano verificati i punti (a), (b) e (c). Si nota che $f(s) = (\gamma(s) - P) \cdot (\gamma(s) - P) - R^2$, quindi

$$0 = f'(s_0) = T(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - P)$$

da cui $T(s_0) \perp (\gamma(s_0) - P)$, quindi $\gamma(s_0) - P = \lambda N(s_0)$, visto che sia $\gamma(s_0)$ che P appartengono al cerchio. Derivando nuovamente:

$$\begin{aligned} 0 = f''(s_0) &= T'(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - P) + T(s_0) \cdot T(s_0) \\ &= k(s_0)N(s_0) \cdot (\gamma(s_0) - P) + 1 = k(s_0)\lambda + 1 \end{aligned}$$

da cui $\lambda = -1/k(s_0)$. Allora si possono ricavare R e P:

$$R = \|\gamma(s_0) - P\| = \left\| -\frac{1}{k(s_0)} N(s_0) \right\| = \frac{1}{k(s_0)}$$
$$P = \gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} N(s_0)$$

Visto che il cerchio ha raggio e centro descritti esclusivamente tramite le proprietà della curva γ, significa che, in $\gamma(s_0)$, questo è unico.

Quando all'esistenza, si può costruire il cerchio scegliendo R e P come sopra in modo tale da avere soddisfatte le relazioni $f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ usate per ricavarle in principio e in modo tale da essere contenuto nel piano osculatore. In questo modo, è anche verificato il punto (b) perché, valendo $\|\gamma(s_0) - P\| = R$, $\gamma(s_0)$ è contenuto nel cerchio. ∎

2 Superfici

§2.1 Introduzione

Si dà inizialmente una definizione intuitiva di superfici come sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$. Per analogie con le curve, si parte da un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e da una mappa *buona* $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^3$, per poi definire la superficie come $S = \underline{x}(U)$. Questo approccio permetterà esclusivamente una definizione locale di cosa sia una superficie e non ne consentirà una trattazione globale. Ora si cerca di caratterizzare la bontà accennata per $\underline{x}$, provando a capire quali sono le situazioni che *non* devono verificarsi.

(a). L'aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ non deve essere mappato in una superficie che si interseca, cioè $\underline{x}$ deve essere iniettiva, altrimenti non si ha modo di capire quale sia il piano tangente nell'intersezione.

(b). Si vogliono evitare piani tangenti multipli, ad esempio come succede nel caso del vertice di un cono.

Scrivendo $\underline{x}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$, con

$$\underline{x}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$
$$\underline{x}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

con $x, y, z : U \to \mathbb{R}$ mappe di classe $C^\infty(U)$, si richiede che $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$, $\forall u, v \in U$, cioè che $\mathrm{rk}(J(\underline{x})) = 2$, così da avere un piano tangente ben definito, essendo $\underline{x}_u$ e $\underline{x}_v$ linearmente indipendenti.

(c). Si vuole evitare che una successione non convergente in U possa convergere in $\underline{x}(U)$, quindi si richiede che $\underline{x}$ sia un omeomorfismo, richiedendo, dunque, che $\underline{x}^{-1}$ sia continua.

Definizione 2.1 (Parametrizzazione regolare). Sia $\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una mappa di classe $C^\infty(U)$. Si dice che $\underline{x}$ è una *parametrizzazione regolare* se:

(a). $\underline{x}$ è iniettiva;

(b). $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$ in U;

(c). $\underline{x}^{-1}$ è continua.

Definizione 2.2 (Superficie). Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice *superficie* se, $\forall p \in S$, si trova una parametrizzazione regolare $\underline{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{x}(U) \subseteq S$ è un intorno di p.

§2.2 Alcuni esempi di superficie

Esempio 2.1 (Grafico di una funzione). Si considera una funzione $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con U aperto e $f \in C^\infty(U)$. Il suo grafico è definito da

$$\Gamma_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Si vuole parametrizzare Γ_f tramite una superficie. Una possibile parametrizzazione è

$$\underline{x} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & \big(u, v, f(u, v)\big) \end{array}$$

In questo modo, $\underline{x} \in C^\infty(U)$ perché ogni sua componente lo è e $\underline{x}(U) = \Gamma_f$. Si dimostra che è effettivamente una parametrizzazione regolare.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione nei tre punti da verificare per una parametrizzazione regolare.

(a). La mappa scelta è sicuramente iniettiva perché ad ogni punto del dominio U, corrisponde un solo punto $f(u, v)$, altrimenti f non sarebbe una buona funzione. Si può, allora, definire la proiezione

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

in modo tale da verificare la relazione $\pi(\underline{x}(u, v)) = (u, v)$. L'esistenza dell'inversa implica necessariamente la biezione $U \longleftrightarrow \underline{x}(U)$.

(b). Ora si mostra che $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$. Calcolando le derivate, si vede facilmente che:

$$\underline{x}_u \times \underline{x}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

dove le prime due componenti non importano perché tanto l'ultima è costante e non-nulla $\forall u, v \in U$.

(c). Infine, si dimostra la continuità dell'inversa. Una candidata per l'inversa, come visto al punto (a), è ovviamente $\underline{x}^{-1} = \pi|_{\underline{x}(U)} : \underline{x}(U) \to \mathbb{R}^2$. La proiezione è una mappa continua, quindi l'inversa è continua.

$\square$

Esempio 2.2 (Superficie elicoidale). Si definisce la mappa, nota come *superficie elicoidale*:

$$\underline{x} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u \cos v, u \sin v, bv) \end{array}$$

dove $U = \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\right\}$ e $b \neq 0$. Per vedere la superficie generata, si può notare che:

- fissando u_0, si fissa il raggio e, al variare di v, si ottiene un'elica;
- fissando v_0, si fissa un'altezza e un punto su un'elica e, il variare di u, si incontrano tutte le eliche di raggio sempre maggiore.

La superficie è l'unione di questi due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ descritti e, pertanto, si ottiene una scalinata di spessore pari al massimo u_0 in U, la cui altezza dipende dai valori di v contenuti in U. Di seguito, si dimostra che è effettivamente una superficie.

Dimostrazione. Come prima, si divide la dimostrazione nei vari punti da far vedere.

(a). Per l'iniettività, si cerca di definire un'inversa. Dalla relazione $\underline{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv) = (x, y, z)$, si possono provare a ricavare u e v:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{z}{b}$$

Quindi si può definire la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z/b\right) \end{array}$$

Per definizione, allora, si ha $\varphi(\underline{x}(u, v)) = (u, v)$, per cui $\underline{x}$ è iniettiva.

(b). Per definizione, la mappa è C^∞ perché ogni sua componente lo è e le sue derivate parziali prime sono:

$$\underline{x}_u = (\cos v, \sin v, 0) \qquad \underline{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, b)$$

Visto che $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1$, $\underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \neq 0$ perché $v \neq 0$ e $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$ (cioè i due sono ortogonali), allora deve valere $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$.

(c). Per la continuità dell'inversa, si vede che la mappa $\underline{x}^{-1} = \varphi|_{\underline{x}(U)}$ è continua perché le sue componenti lo sono.

□

Esempio 2.3 (Sfera). Si indica con

$$S_a^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\right\}$$

Di seguito, si dimostra che è una superficie ben definita con un metodo alternativo.

Dimostrazione. L'idea è mostrare che è il grafico di una funzione, ma, per come è, non sarebbe il grafico di alcuna funzione, visto che ad un punto del dominio, ne corrispondono due. Per risolvere il problema, si seziona la sfera in calotte sferiche, due per ogni asse; ad esempio:

$$\begin{aligned} A_z^+ &= \left\{(x, y, z) \in S_a^2 \mid z > 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \mid 0 \leqslant x^2 + y^2 < a^2\right\} \end{aligned}$$

Questa è la calotta sferica superiore ed è il grafico di $f(u, v) = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$, il cui dominio è $D_a^2 = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < a^2\right\}$ e che è liscia. In maniera analoga, ma cambiando il segno di z, si definisce A_z^- e, sempre allo stesso modo, ma cambiando la coordinata per cui si risolve, si definiscono anche $A_x^\pm$ e $A_y^\pm$. L'unione di queste restituisce S_a^2 e la loro intersezione non crea punti di discontinuità, quindi S_a^2 è una superficie. □

Un altro esempio di superficie sono le cosiddette *superfici di rotazione*. Queste sono tutte ottenute a partire dalla traccia di una curva nel piano e a seguito di un'opportuna rotazione attorno a qualche asse. L'obiettivo, ora, è capire quando questo procedimento genera, effettivamente, una superficie. Formalmente, si considera una curva

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u & \longmapsto & \big(f(u), 0, g(u)\big) \end{array}$$

dove $f, g \in C^\infty$ e $f(u) > 0, \forall u$. La conseguente superficie è data dalla parametrizzazione

$$\underline{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & \big(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\big) \end{array}$$

Osservazione 2.1. Si nota che, da queste definizioni, $\underline{x}$ non è mai iniettiva perché bisognerebbe opportunamente restringere il dominio nel piano in modo tale che v spazi in un intervallo in cui le funzioni trigonometriche compiano un solo giro. Definendole su tutto l'intervallo reale, infatti, si ottiene una superficie che si interseca su se stessa infinite volte.

Ora si considera il caso particolare del toro ottenuto come superficie di rotazione e si dimostra che è una superficie.

Esempio 2.4 (Toro). Si considera una circonferenza parametrizzata nel piano (x, z):

$$\alpha(u) = (a + b\cos u, 0, b\sin u)$$

dove a serve a distanziarla dall'asse z in modo che la rotazione attorno allo stesso asse possa creare una superficie con un buco al centro; di fatto, si prende $a > b > 0$. Si dimostra che è una superficie.

Dimostrazione. Quello che si vuole mostrare è che $\forall p \in S$, si ha $p = \underline{x}(u_0, v_0)$, per $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Per costruire correttamente il dominio della parametrizzazione, si parte col considerare un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, contenente u_0, tale per cui $\alpha|_I : I \to \mathbb{R}^3$ risulti iniettiva e si prova a mostrare che $\underline{x}|_{I\times(v_0-\pi, v_0+\pi)}$ è una parametrizzazione regolare.

Se $(u, v), (u', v') \in I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$ e $\underline{x}(u, v) = \underline{x}(u', v')$, si vede che, data

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \text{ tale che } \varphi(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z\right)$$

si ha $\varphi(\underline{x}(u, v)) = (f(u), 0, g(u)) = \alpha(u)$, pertanto

$$\alpha(u) = \varphi(\underline{x}(u, v)) = \varphi(\underline{x}(u', v')) = \alpha(u')$$

da cui $u = u'$ perché α è iniettiva per $u \in I$. Per quanto riguarda v, si vede che $\underline{x}(u, v) = \underline{x}(u, v')$ implica uguaglianza componente per componente:

$$f(u)\cos v = f(u)\cos v' \qquad f(u)\sin v = f(u)\sin v'$$

da cui $(\cos v, \sin v) = (\cos v', \sin v')$. Visto che $v, v' \in (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$, allora deve risultare per forza $v = v'$ perché le funzioni trigonometriche sono iniettive su questo intervallo.

> **Osservazione 2.2.** L'iniettività appena dimostrata è solamente una relazione locale, imposta per ciascuno specifico punto $p \in S$; questo non basterà e si dovrà estendere con ulteriori ipotesi.

Quanto alla regolarità, si vede che

$$\underline{x}_u = (f' \cos v, f' \sin v, g') \qquad \underline{x}_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

e, essendo $\underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = f'^2 > 0$, $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$ e $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = f'^2 + g'^2 = \|\alpha'(u)\|^2$, dall'imposizione che α sia regolare, si ottiene la regolarità della parametrizzazione.

> **Osservazione 2.3.** La regolarità di α serve ad evitare casi in cui la superficie presenta cuspidi, o altre irregolarità; inoltre, questo garantisce anche la regolarità della parametrizzazione.

Infine, si mostra che $\underline{x}^{-1}|_{\underline{x}(I \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi))}$ è continua. Per farlo, si prende la relazione $(f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) = (x, y, z)$ e la si prova ad invertire. Visto che α è iniettiva, ammette inversa nell'immagine di I, quindi si ha

$$u = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$$

Perché questa sia continua, serve richiedere esplicitamente che $\alpha^{-1}|_{\alpha(I)} : \alpha(I) \to I$ sia continua. Quanto a v, invece, se $v_0 \notin \pi\mathbb{Z}$ (cioè non è un multiplo di $\mathbb{Z}$), in un opportuno intervallo J attorno a v_0, si può ricavare

$$x^{-1}(x, y, z) = \left(\alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)$$

Se, invece, $v \in \pi\mathbb{Z}$, si può usare l'arcoseno. $\square$