Divergenza delle serie perturbative

Laurendo
Manuel Deodato

Relatore
Claudio Bonati

Università di Pisa

L'oscillatore anarmonico

Particella 1D in potenziale

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4$$

L'oscillatore anarmonico

Particella 1D in potenziale

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4$$

Perturbativamente, le energie del fondamentale sono della forma $E = 1/2 + \sum g^n E_n$ e le funzioni d'onda degli stati eccitati si scrivono come $B(x)e^{-x^2/2}$.

L'oscillatore anarmonico

Particella 1D in potenziale

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4$$

Perturbativamente, le energie del fondamentale sono della forma $E = 1/2 + \sum g^n E_n$ e le funzioni d'onda degli stati eccitati si scrivono come $B(x)e^{-x^2/2}$. Se $|n\rangle, |m\rangle$ sono due autostati di $\hat{H}_0$:

$$\langle n|\hat{x}^4|m\rangle \neq 0 \iff \begin{cases} \Delta n = |n-m| \leq 4 \\ \pi_n = \pi_m \end{cases}$$

L'oscillatore anarmonico

Particella 1D in potenziale

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4$$

Perturbativamente, le energie del fondamentale sono della forma $E = 1/2 + \sum g^n E_n$ e le funzioni d'onda degli stati eccitati si scrivono come $B(x)e^{-x^2/2}$. Se $|n\rangle, |m\rangle$ sono due autostati di $\hat{H}_0$:

$$\langle n|\hat{x}^4|m\rangle \neq 0 \iff \begin{cases} \Delta n = |n-m| \leq 4 \\ \pi_n = \pi_m \end{cases}$$

Si parte dal fondamentale, quindi $m \leq 4$ e $\pi_m = +1$; il polinomio $B(x)$ si può scrivere come:

L'oscillatore anarmonico

Particella 1D in potenziale

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4$$

Perturbativamente, le energie del fondamentale sono della forma $E = 1/2 + \sum g^n E_n$ e le funzioni d'onda degli stati eccitati si scrivono come $B(x)e^{-x^2/2}$. Se $|n\rangle\,,|m\rangle$ sono due autostati di $\hat{H}_0$:

$$\langle n|\hat{x}^4|m\rangle \neq 0 \iff \begin{cases} \Delta n = |n-m| \leq 4 \\ \pi_n = \pi_m \end{cases}$$

Si parte dal fondamentale, quindi $m \leq 4$ e $\pi_m = +1$; il polinomio $B(x)$ si può scrivere come:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g^k B_k(x) \qquad\qquad B_k(x) = \sum_{j=0}^{2k} A_{k,j}x^{2j}$$

con $B_k(0) = 1$ come scelta di normalizzazione $\Rightarrow A_{k,0} = 1$.

L'oscillatore anarmonico

Particella 1D in potenziale

$$\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4$$

Perturbativamente, le energie del fondamentale sono della forma $E = 1/2 + \sum g^n E_n$ e le funzioni d'onda degli stati eccitati si scrivono come $B(x)e^{-x^2/2}$. Se $|n\rangle, |m\rangle$ sono due autostati di $\hat{H}_0$:

$$\langle n|\hat{x}^4|m\rangle \neq 0 \iff \begin{cases} \Delta n = |n-m| \leq 4 \\ \pi_n = \pi_m \end{cases}$$

Si parte dal fondamentale, quindi $m \leq 4$ e $\pi_m = +1$; il polinomio $B(x)$ si può scrivere come:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g^k B_k(x) \qquad\qquad B_k(x) = \sum_{j=0}^{2k} A_{k,j}x^{2j}$$

con $B_k(0) = 1$ come scelta di normalizzazione $\Rightarrow A_{k,0} = 1$.Inserendo nell'equazione di Schrödinger, si trovano le seguenti relazioni ricorsive per determinare le energie:

$$E_k = -2A_{k,1} - \sum_{s=1}^{k-1} E_s; \;\; A_{k,j} = \frac{1}{4j}\left[(2j+2)(2j+1)A_{k,j+1} - A_{k-1,j-2} + \sum_{s=1}^{k-1} E_s A_{k-s,j}\right]$$

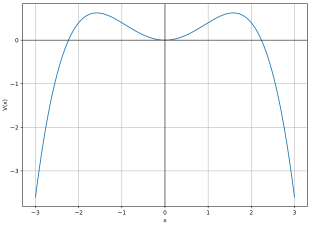
Tramite calcolo numerico, si vede che queste sono divergenti con $E_n \sim n!$.

Origine della divergenza e scaling di Symanzik

Divergenza $\Rightarrow$ non analiticità di $E(g)$ in un intorno di $g = 0$.

Origine della divergenza e scaling di Symanzik

Divergenza $\Rightarrow$ non analiticità di $E(g)$ in un intorno di $g = 0$.

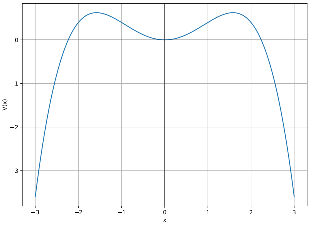


Per $g < 0$, il potenziale è

$$V = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}|g|x^4$$

Origine della divergenza e scaling di Symanzik

Divergenza $\Rightarrow$ non analiticità di $E(g)$ in un intorno di $g = 0$.



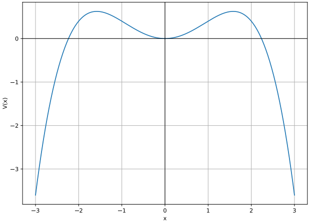
Per $g < 0$, il potenziale è

$$V = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}|g|x^4$$

Per $g < 0$, la particella si trova in una buca di potenziale $\rightarrow$ per effetto tunnel vi può fuoriuscire e liberarsi.
Questo non è descrivibile perturbativamente.

Origine della divergenza e scaling di Symanzik

Divergenza $\Rightarrow$ non analiticità di $E(g)$ in un intorno di $g = 0$.



Per $g < 0$, il potenziale è

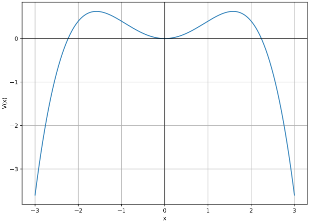
$$V = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}|g|x^4$$

Per $g < 0$, la particella si trova in una buca di potenziale $\rightarrow$ per effetto tunnel vi può fuoriuscire e liberarsi.
Questo non è descrivibile perturbativamente.

Per evidenziare la divergenza, si considera la trasformazione unitaria $\hat{U}(\lambda)\psi(x) = \lambda^{1/2}\psi(\lambda x)$ che, su $\hat{H}(\alpha, g) = \hat{p}^2/2 + \alpha\hat{x}^2/2 + g\hat{x}^4/2$, agisce come:

Origine della divergenza e scaling di Symanzik

Divergenza $\Rightarrow$ non analiticità di $E(g)$ in un intorno di $g = 0$.



Per $g < 0$, il potenziale è

$$V = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}|g|x^4$$

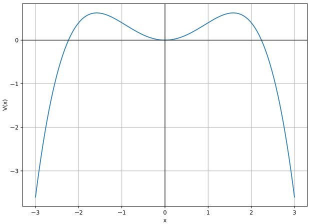
Per $g < 0$, la particella si trova in una buca di potenziale $\rightarrow$ per effetto tunnel vi può fuoriuscire e liberarsi.
Questo non è descrivibile perturbativamente.

Per evidenziare la divergenza, si considera la trasformazione unitaria $\hat{U}(\lambda)\psi(x) = \lambda^{1/2}\psi(\lambda x)$ che, su $\hat{H}(\alpha, g) = \hat{p}^2/2 + \alpha\hat{x}^2/2 + g\hat{x}^4/2$, agisce come:

$$\hat{U}(\lambda)\hat{H}(\alpha, g)\hat{U}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-2}\hat{H}(\alpha\lambda^4, g\lambda^6)$$

Origine della divergenza e scaling di Symanzik

Divergenza $\Rightarrow$ non analiticità di $E(g)$ in un intorno di $g = 0$.



Per $g < 0$, il potenziale è

$$V = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}|g|x^4$$

Per $g < 0$, la particella si trova in una buca @ di potenziale $\rightarrow$ per effetto tunnel vi può fuoriuscire e liberarsi.
Questo non è descrivibile perturbativamente.

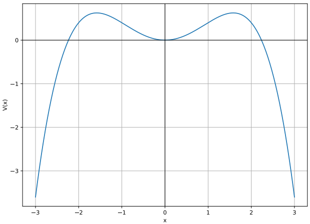
Per evidenziare la divergenza, si considera la trasformazione unitaria $\hat{U}(\lambda)\psi(x) = \lambda^{1/2}\psi(\lambda x)$ che, su $\hat{H}(\alpha, g) = \hat{p}^2/2 + \alpha\hat{x}^2/2 + g\hat{x}^4/2$, agisce come:

$$\hat{U}(\lambda)\hat{H}(\alpha, g)\hat{U}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-2}\hat{H}(\alpha\lambda^4, g\lambda^6)$$

Quindi, per $\lambda = g^{-1/6}$:

Origine della divergenza e scaling di Symanzik

Divergenza $\Rightarrow$ non analiticità di $E(g)$ in un intorno di $g = 0$.



Per $g < 0$, il potenziale è

$$V = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}|g|x^4$$

Per $g < 0$, la particella si trova in una buca di potenziale $\rightarrow$ per effetto tunnel vi può fuoriuscire e liberarsi.
Questo non è descrivibile perturbativamente.

Per evidenziare la divergenza, si considera la trasformazione unitaria $\hat{U}(\lambda)\psi(x) = \lambda^{1/2}\psi(\lambda x)$ che, su $\hat{H}(\alpha, g) = \hat{p}^2/2 + \alpha\hat{x}^2/2 + g\hat{x}^4/2$, agisce come:

$$\hat{U}(\lambda)\hat{H}(\alpha, g)\hat{U}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-2}\hat{H}(\alpha\lambda^4, g\lambda^6)$$

Quindi, per $\lambda = g^{-1/6}$:

$$E_n(1, g) = g^{1/3}E_n(g^{-2/3}, 1) \implies E_n(g) = g^{1/3}\sum_k a_k g^{-2k/3} \sim g^{1/3}$$

Analiticità del dominio

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.Se $\psi \sim 1/x^2$:

$$\int dx\ |\psi(x)|^2 x^2 < \infty \qquad \int dx\ |\psi(x)|^2 x^4 \sim \int dx\ \frac{1}{x^4} x^4 \to \infty$$

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.Se $\psi \sim 1/x^2$:

$$\int dx \, |\psi(x)|^2 x^2 < \infty \qquad \int dx \, |\psi(x)|^2 x^4 \sim \int dx \, \frac{1}{x^4} x^4 \to \infty$$

Allora $\psi \in D(\hat{H}_0), \; \psi \notin D(\hat{H})$ perché il valore medio del potenziale perturbato diverge.

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.Se $\psi \sim 1/x^2$:

$$\int dx \ |\psi(x)|^2 x^2 < \infty \qquad\qquad \int dx \ |\psi(x)|^2 x^4 \sim \int dx \ \frac{1}{x^4} x^4 \to \infty$$

Allora $\psi \in D(\hat{H}_0), \ \psi \notin D(\hat{H})$ perché il valore medio del potenziale perturbato diverge.
$\Rightarrow$ Per quanto g sia piccolo, la perturbazione non può mai essere considerata tale.

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.Se $\psi \sim 1/x^2$:

$$\int dx \ |\psi(x)|^2 x^2 < \infty \qquad \int dx \ |\psi(x)|^2 x^4 \sim \int dx \ \frac{1}{x^4} x^4 \to \infty$$

Allora $\psi \in D(\hat{H}_0), \ \psi \notin D(\hat{H})$ perché il valore medio del potenziale perturbato diverge.
$\Rightarrow$ Per quanto g sia piccolo, la perturbazione non può mai essere considerata tale.
Questo si generalizza nel seguente.

Teorema (Teorema di Kato-Rellich)

Sia $\hat{H}(g)$ una famiglia di operatori con $g \in S \subset \mathbb{C}$ tale che:

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.Se $\psi \sim 1/x^2$:

$$\int dx\ |\psi(x)|^2 x^2 < \infty \qquad\qquad \int dx\ |\psi(x)|^2 x^4 \sim \int dx\ \frac{1}{x^4} x^4 \to \infty$$

Allora $\psi \in D(\hat{H}_0),\ \psi \notin D(\hat{H})$ perché il valore medio del potenziale perturbato diverge.
$\Rightarrow$ Per quanto g sia piccolo, la perturbazione non può mai essere considerata tale.
Questo si generalizza nel seguente.

Teorema (Teorema di Kato-Rellich)

Sia $\hat{H}(g)$ una famiglia di operatori con $g \in S \subset \mathbb{C}$ tale che:

1. *$D(\hat{H}(g))$ è indipendente da g;*

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.Se $\psi \sim 1/x^2$:

$$\int dx\ |\psi(x)|^2 x^2 < \infty \qquad \int dx\ |\psi(x)|^2 x^4 \sim \int dx\ \frac{1}{x^4} x^4 \to \infty$$

Allora $\psi \in D(\hat{H}_0),\ \psi \notin D(\hat{H})$ perché il valore medio del potenziale perturbato diverge.
$\Rightarrow$ Per quanto g sia piccolo, la perturbazione non può mai essere considerata tale.
Questo si generalizza nel seguente.

Teorema (Teorema di Kato-Rellich)

Sia $\hat{H}(g)$ una famiglia di operatori con $g \in S \subset \mathbb{C}$ tale che:

1. *$D(\hat{H}(g))$ è indipendente da g;*
2. *$\forall \psi \in D(\hat{H}(g))$, la funzione $\langle \psi | \hat{H}(g) | \psi \rangle$ è analitica per $g \in S$.*

Analiticità del dominio

$D(\hat{H}) \subset L^2$ è caratterizzato dalle funzioni che rendono $\hat{H}$ Hermitiano; in particolare, il valore medio del potenziale deve esistere.Se $\psi \sim 1/x^2$:

$$\int dx\ |\psi(x)|^2 x^2 < \infty \qquad \int dx\ |\psi(x)|^2 x^4 \sim \int dx\ \frac{1}{x^4} x^4 \to \infty$$

Allora $\psi \in D(\hat{H}_0),\ \psi \notin D(\hat{H})$ perché il valore medio del potenziale perturbato diverge.
$\Rightarrow$ Per quanto g sia piccolo, la perturbazione non può mai essere considerata tale.
Questo si generalizza nel seguente.

Teorema (Teorema di Kato-Rellich)

Sia $\hat{H}(g)$ una famiglia di operatori con $g \in S \subset \mathbb{C}$ tale che:

1. *$D(\hat{H}(g))$ è indipendente da g;*
2. *$\forall \psi \in D(\hat{H}(g))$, la funzione $\langle \psi | \hat{H}(g) | \psi \rangle$ è analitica per $g \in S$.*

Allora $\forall g_0 \in S, \forall E(g_0)$ autovalore isolato di $\hat{H}(g_0)$, esiste un intorno I_{g_0} tale che $\hat{H}(g)$ ha un unico autovalore isolato $E(g)$; in questo intorno, $E(g)$ è analitica e esiste ψ_g anch'essa analitica e tale che $\hat{H}(g)\psi_g = E(g)\psi_g$.

Le due condizioni del teorema di Kato-Rellich possono essere verificate tramite la condizione posta dal seguente.

Le due condizioni del teorema di Kato-Rellich possono essere verificate tramite la condizione posta dal seguente.

Teorema (Teorema di Kato)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *tali che* $\forall \psi \in D(\hat{H}_0) \cap D(\hat{V})$, *cioè* $\forall \psi \in D(\hat{H})$:

Le due condizioni del teorema di Kato-Rellich possono essere verificate tramite la condizione posta dal seguente.

Teorema (Teorema di Kato)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *tali che* $\forall \psi \in D(\hat{H}_0) \cap D(\hat{V})$*, cioè* $\forall \psi \in D(\hat{H})$*:*

$$\|\hat{V}\psi\| \leq a\|\hat{H}_0\psi\| + b\|\psi\|$$

Le due condizioni del teorema di Kato-Rellich possono essere verificate tramite la condizione posta dal seguente.

Teorema (Teorema di Kato)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ *tali che* $\forall \psi \in D(\hat{H}_0) \cap D(\hat{V})$, *cioè* $\forall \psi \in D(\hat{H})$:

$$\|\hat{V}\psi\| \leq a\|\hat{H}_0\psi\| + b\|\psi\|$$

Per l'oscillatore con $\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}g\hat{x}^4$ non è verificato il punto (1) del teorema di Kato-Rellich $\longrightarrow$ il dominio dipende da g.