Engineering & Business School
Reconnue par l'État

Niveau & Filière : Génie Indus

Matière

Automatique des systèmes linéaires

Animé par : M. K. Arsène COULIBALY

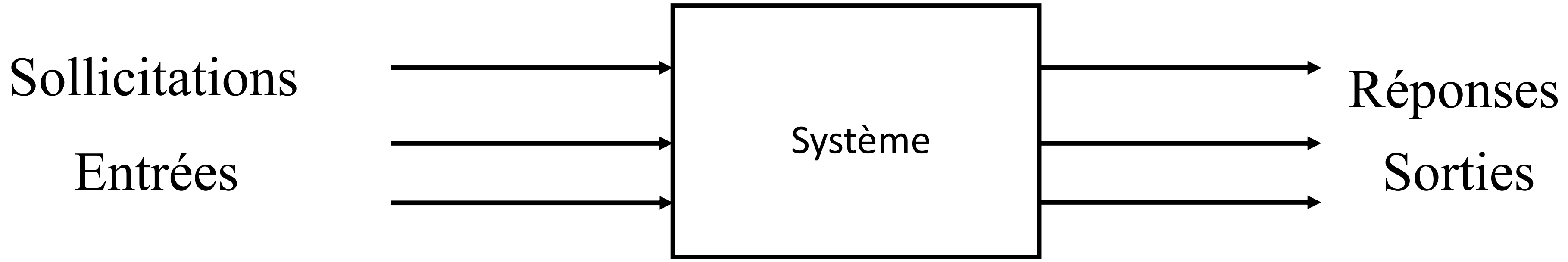
Année académique : 2023 / 2024

Plan

1. Notion de systèmes asservis
2. Modélisation Mathématiques des systèmes Automatiques
3. Dynamiques des systèmes asservis
4. Analyse fréquentielle des systèmes
5. Etude des systèmes linéaires du 1^{er} et du 2^{nd} Ordre
6. Stabilité des systèmes asservis
7. Correction des systèmes

Rappels

1. Notion de système



Un système physique est un opérateur faisant correspondre des **réponses** R (sorties) à des **Sollicitations** S (Entrées). Dans les conditions réelles un systèmes physiques peut posséder plusieurs entrées et plusieurs sorties.

Rappels

1. Notion de signal

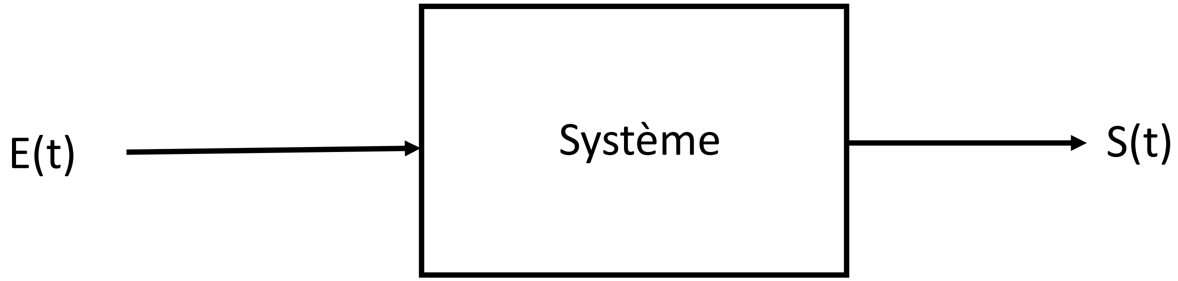
Un signal peut être considéré comme toute sollicitation ou réponse d'un système.

- Les sollicitations ou excitations sont les signaux d'entrées
- Les réponses sont les signaux de sorties

Pour la suite on adoptera e comme signal d'entrée et s comme signal de sortie

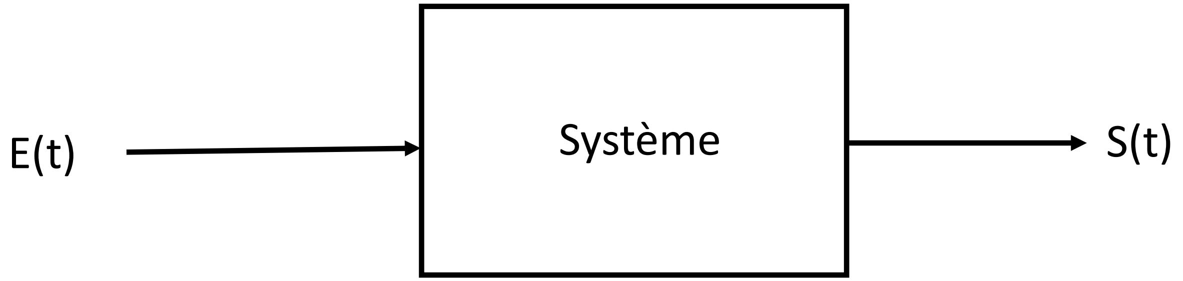
1.1. Signaux temporels

- Décrire temporellement un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps
- e(t) et s(t) sont donc les représentations temporelles des signaux e et s



1.2. Signal causal

- Décrire temporellement un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps
- e(t) et s(t) sont donc les représentations temporelles des signaux e et s



Rappels

1.2. Signal causal

- Décrire temporellement un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps

Rappels

2. Système linéaire

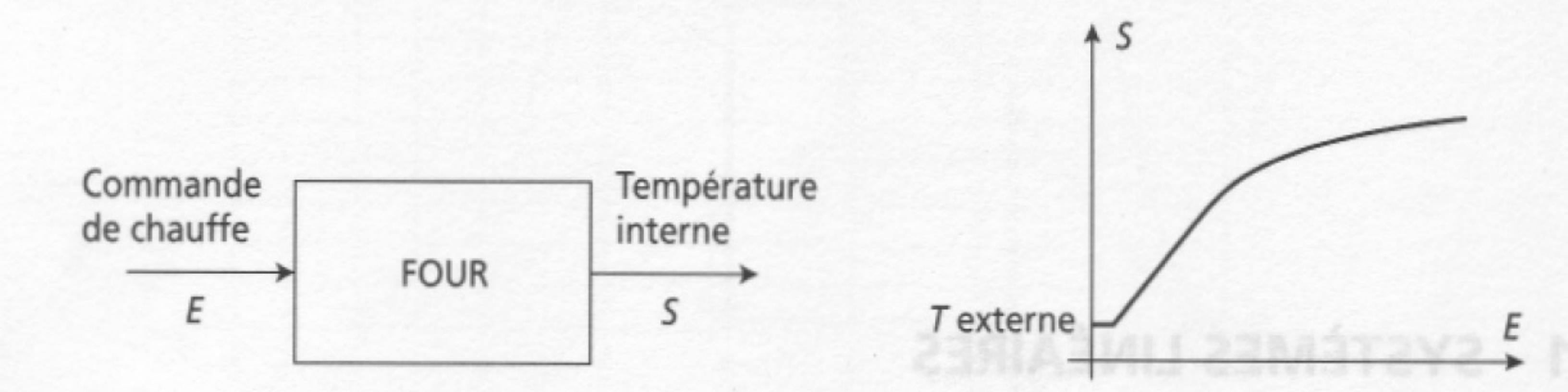
- Un système linéaire est un système régis par une équation différentielle à coefficients constants

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{de}{dt} + b e(t)$$

- Où les coefficients a_i et b_j sont constants

- L'équation différentielle décrit le régime dynamique et statique(permanent) du système. L'ordre du système est le degré le plus de l'équation différentielle.

3. Système non linéaire



- Dans un système non linéaire, la relation en régime permanent entre l'entrée et la sortie appelée caractéristique statique n'est pas une droite

- Pour étudier un tel système il il faut fixer un point de fonctionnement Po et ensuite étudier les variations du système autour de ce point de fonctionnement.

Notion de systèmes asservis

1. Définition de l'automatique

L'automatique est l'ensemble des techniques permettant le **contrôle automatique des procédés industriels ou d'appareillages divers.**

L'automatique intervient dans plusieurs domaines :

- La mécanique
- L'électricité
- La chimie
- etc

Notion de systèmes asservis

1. Définition de l'automatique

L'objectif est entre autre de :

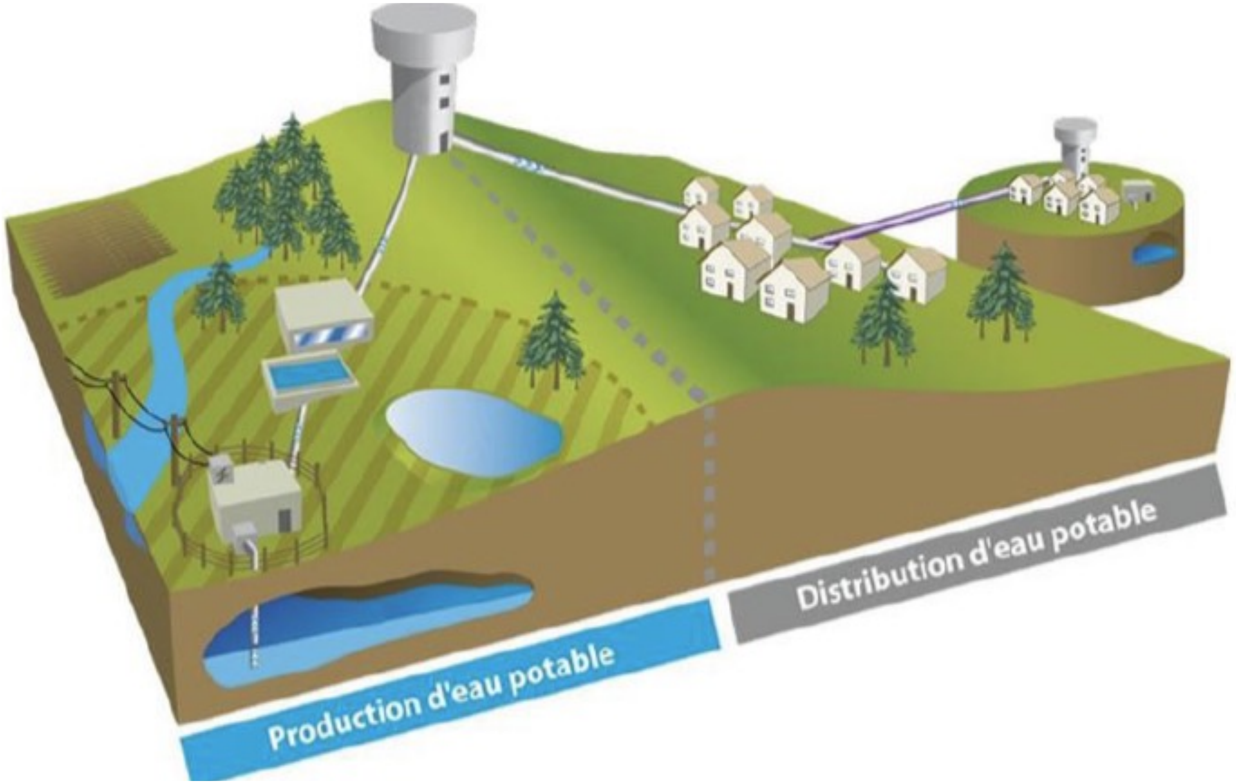
- **Eviter l'intervention de l'homme**
  - Economie du personnel
- **Réalisation d'opérations**
  - Précises
  - Complexes(Conduite automatique d'une voiture)
  - Pénibles ou dangereux pour l'homme(manipulation de produits nossifs)
- **Remplacer l'homme dans les taches répétitives ou dénuées d'intérêts**
  - Boite de vitesse automatique(automobile

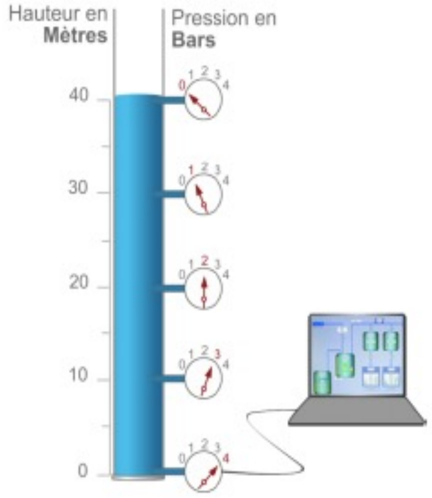
Notion de systèmes asservis

2. Exemples de systèmes automatiques

1. 1. Alimentation d’une ville en eau potable

Pression constante = niveau d’eau constant



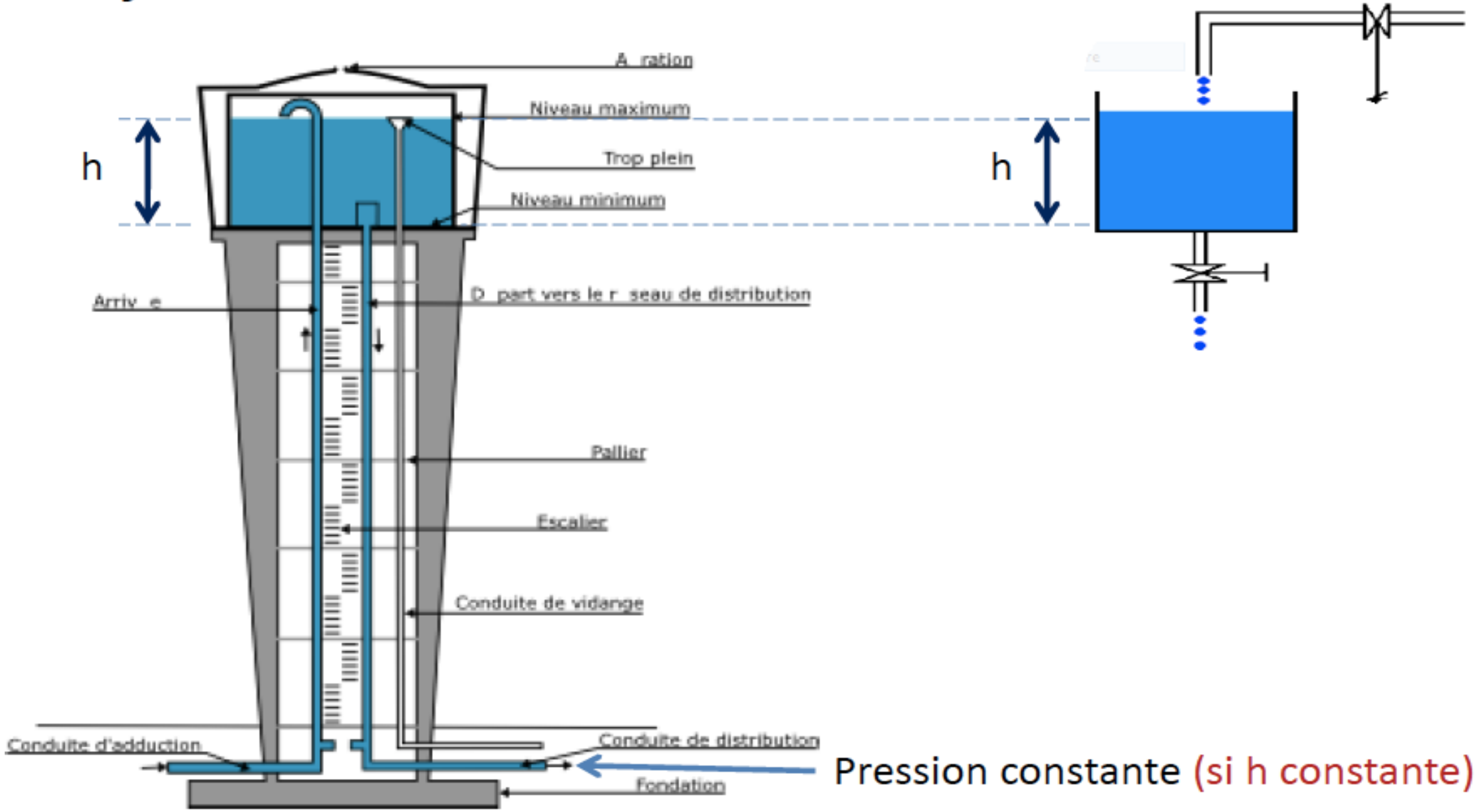


Notion de systèmes asservis

2. Exemples de systèmes automatiques

1. 1. Alimentation d'une ville en eau potable

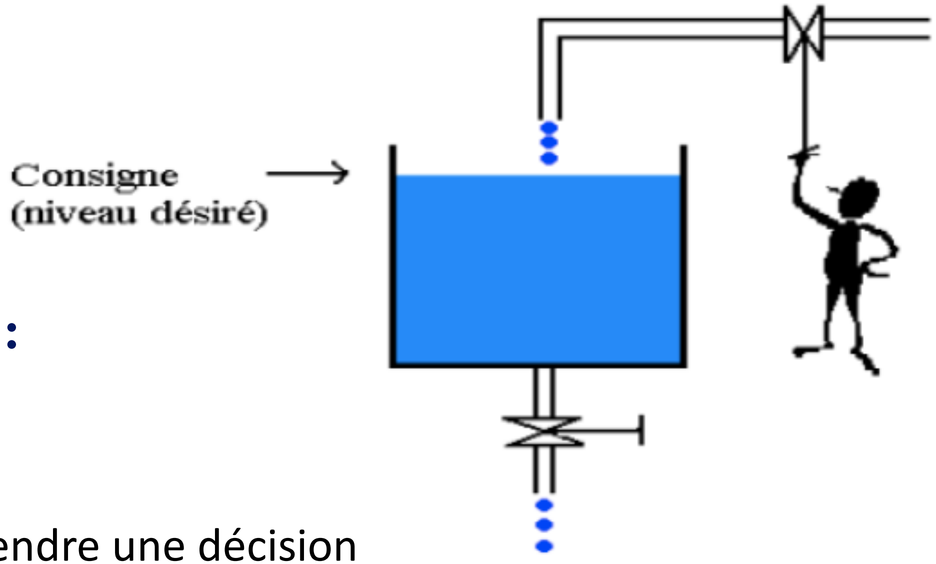
Objectif: hauteur constante



Notion de systèmes asservis

2. Exemples de systèmes automatiques

1. 1. Alimentation d'une ville en eau potable



Pour réguler le niveau manuellement, il faut :

1. **Observer/mesurer** le niveau

2. **Comparer** à la consigne et **raisonner** pour prendre une décision

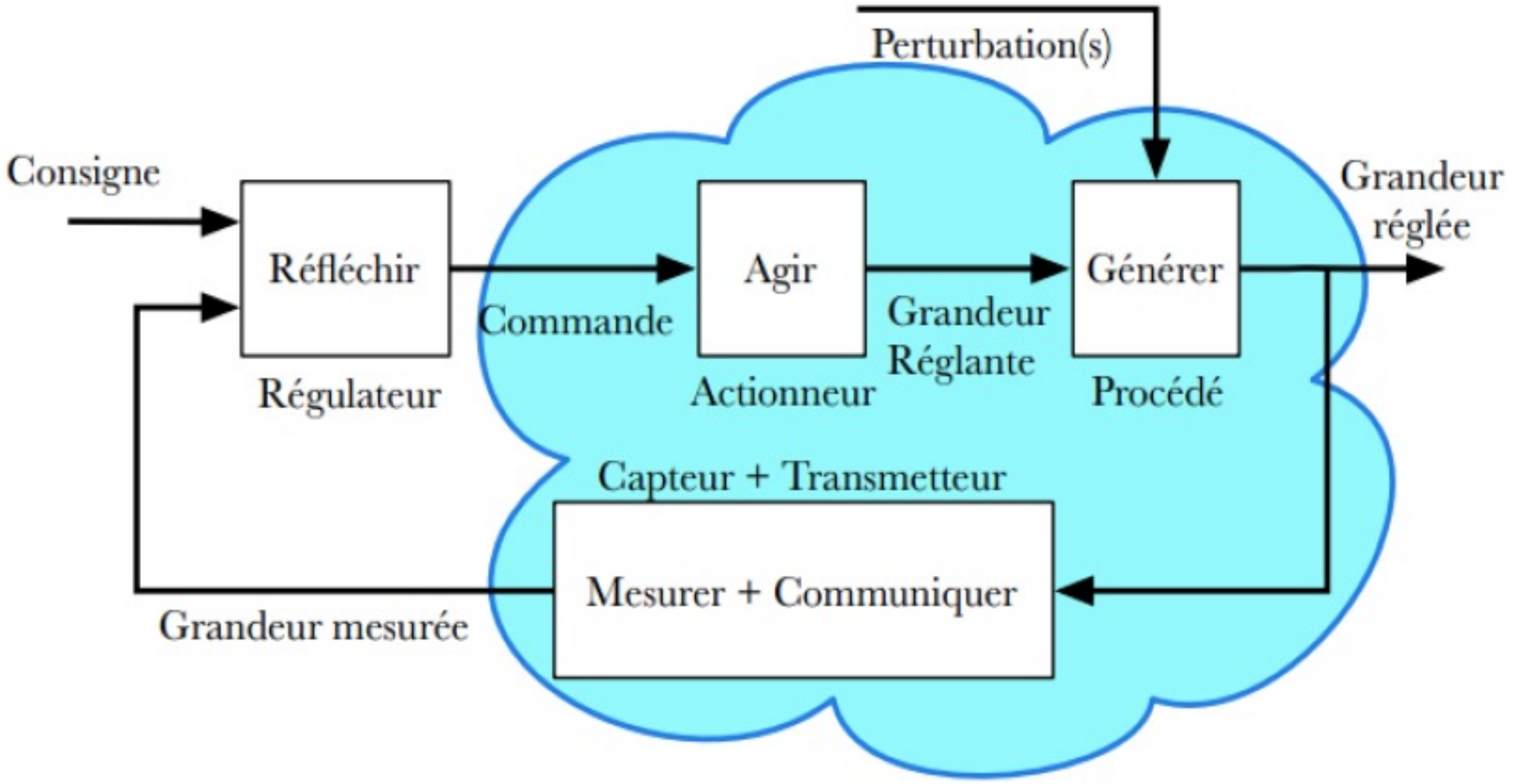
3. **Agir** sur la vanne (ouvrir ou fermer)
(doucement/brusquement)

Notion de systèmes asservis

2. Exemples de systèmes automatiques

1. 1. Alimentation d'une ville en eau potable

Etapes de la régulation

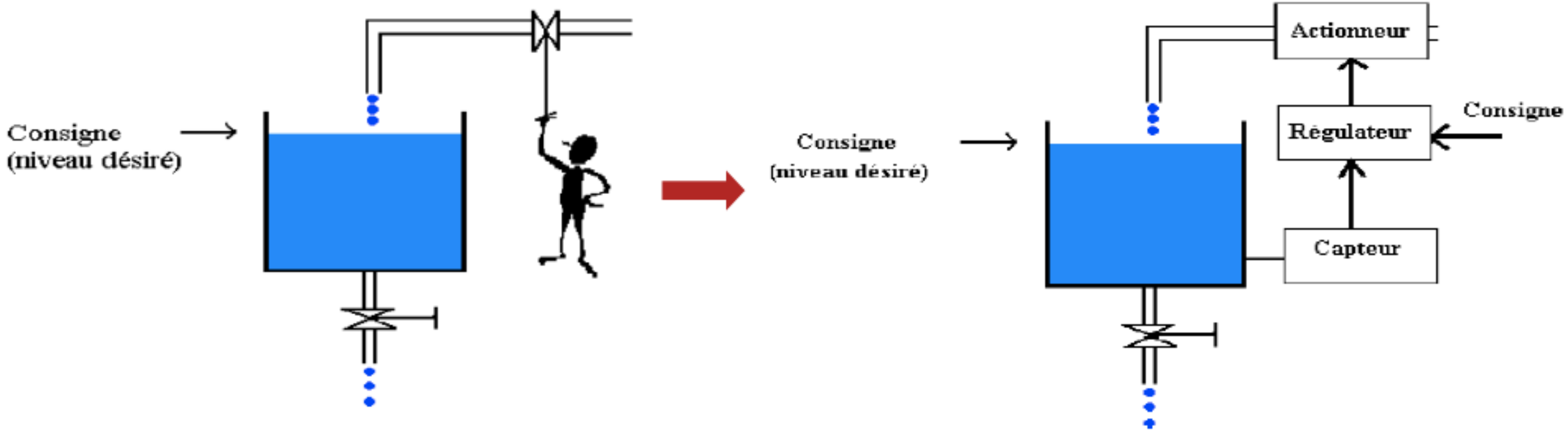


Notion de systèmes asservis

2. Exemples de systèmes automatiques

1. 1. Alimentation d'une ville en eau potable

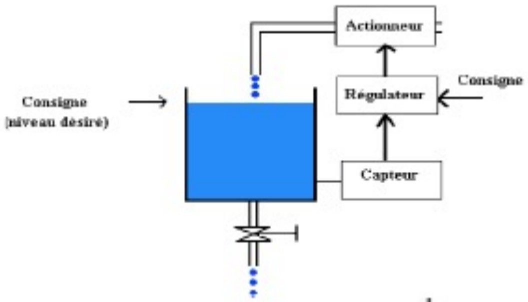
Passage régulation manuelle à régulation automatique



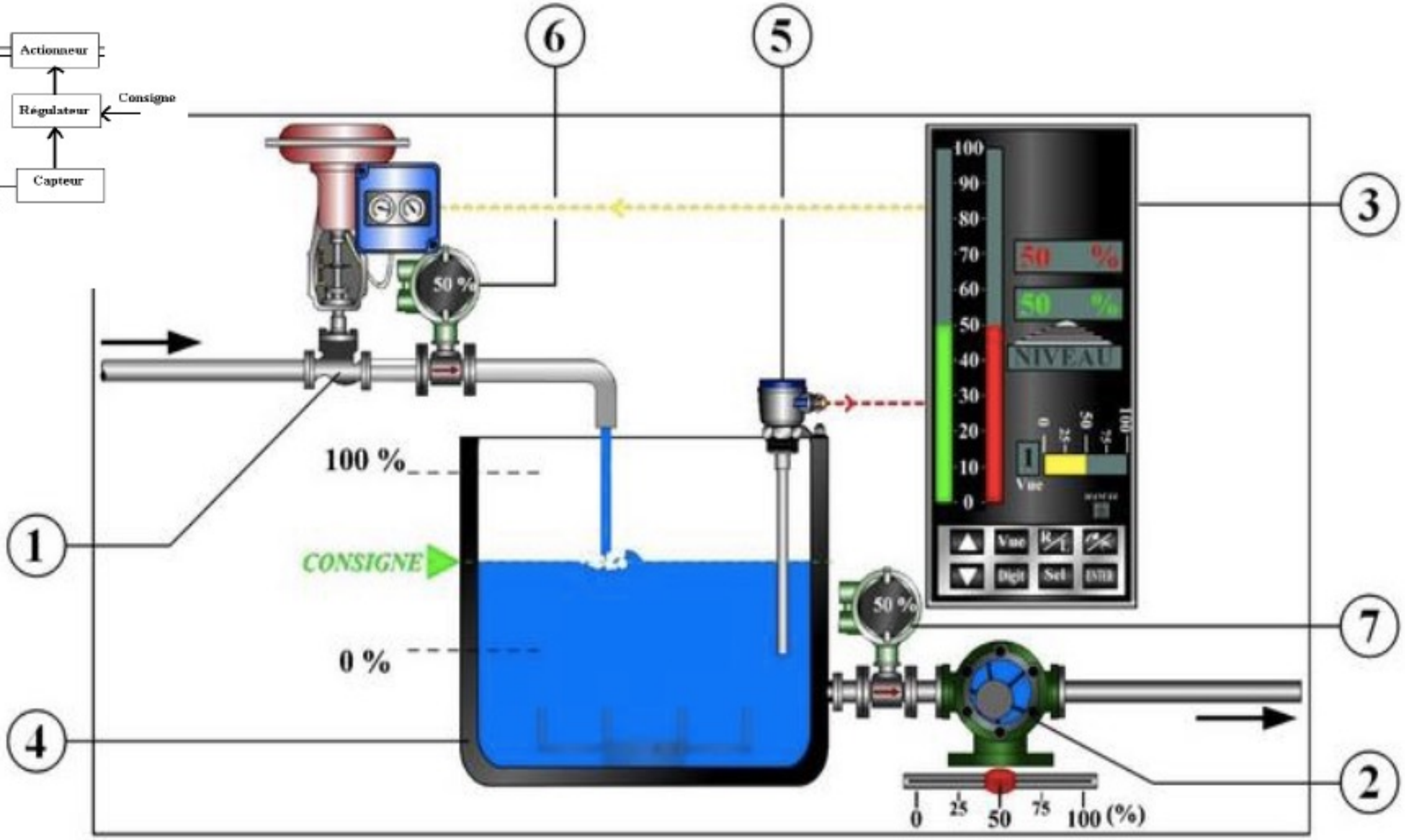
Notion de systèmes asservis

2. Exemples de systèmes automatiques

1. 1. Alimentation d'une ville en eau potable



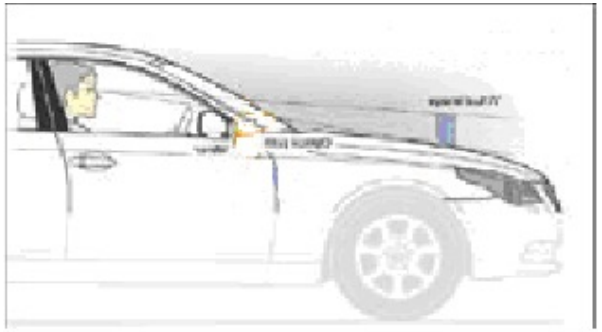
En pratique



2. Exemples de systèmes automatiques

1. 2. Conduite automobile

On souhaite maintenir une vitesse de consigne donnée (50 km/h).



Les éléments constituants la chaîne de régulation

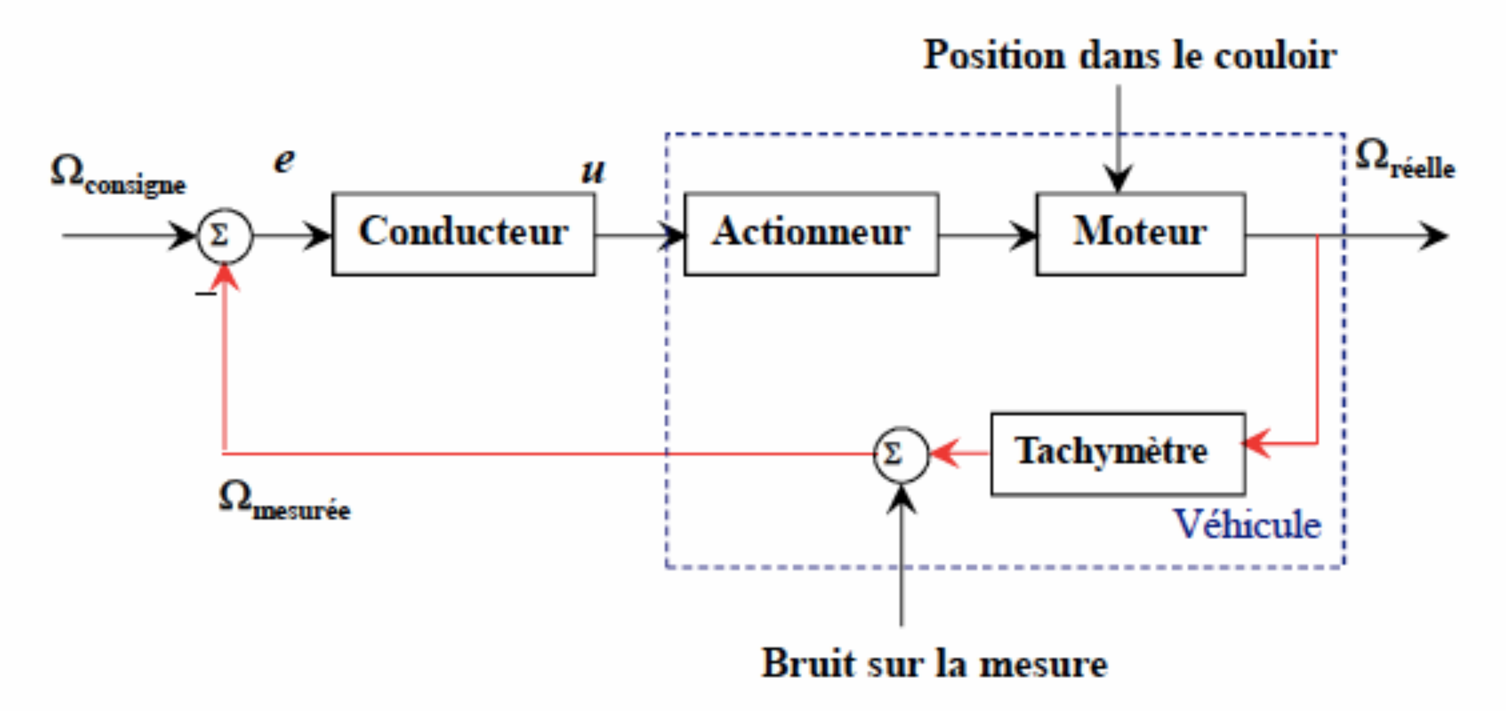
- La vitesse réelle du véhicule dont la mesure est obtenue par un tachymètre
- La position du véhicule par rapport au couloir de circulation
- Le conducteur qui analyse les données et agit en conséquence
- Le véhicule sur lequel on agit par l’intermédiaire d’accélération / décélération /freinage / direction.

Notion de systèmes asservis

2. Exemples de systèmes automatiques

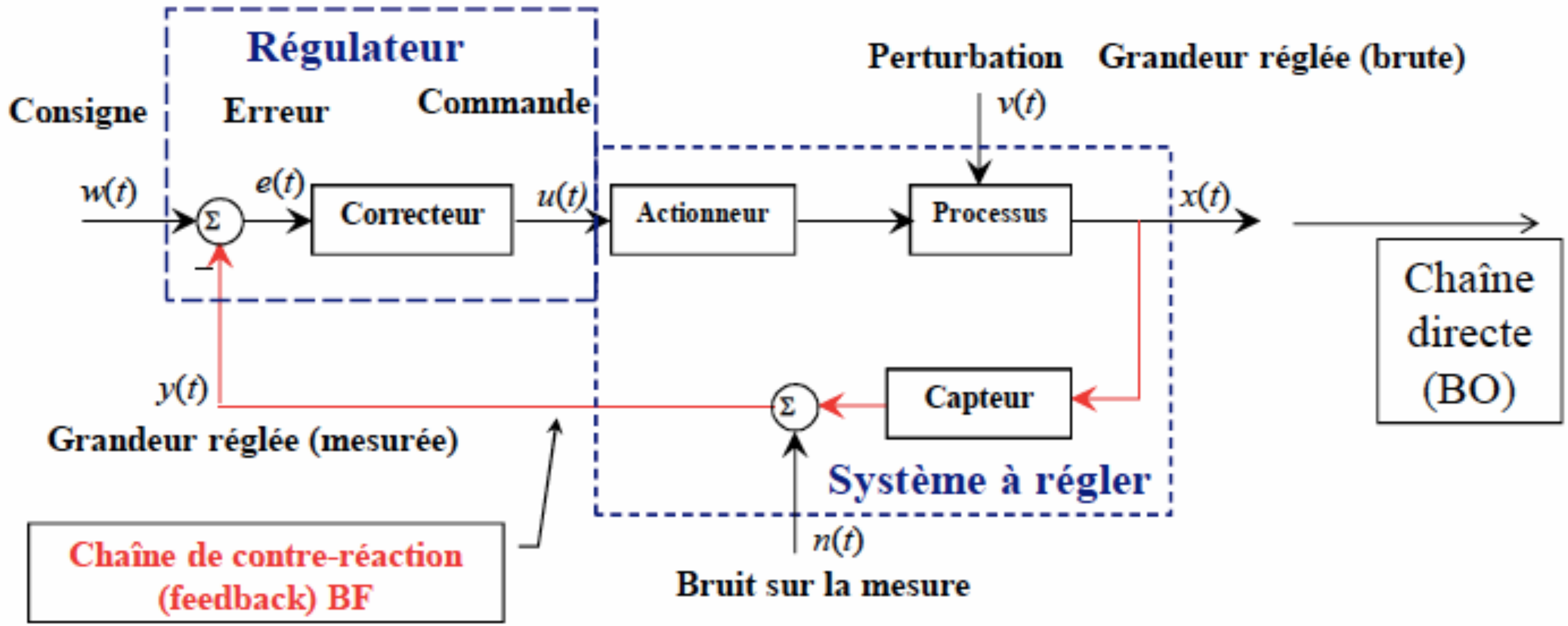
1. 2. Conduite automobile

Schéma simplifié de régulation de la vitesse d'un véhicule



Notion de systèmes asservis

3. Schéma bloc d’une régulation automatique



Notion de systèmes asservis

3. Schéma bloc d'une régulation automatique

3.1. Les éléments intervenants dans le schéma de régulation automatique sont les suivants :

- **Le comparateur** : Construit le signal d'erreur $e(t) = w(t) - y(t)$
- **Le régulateur/contrôleur** : génère le signal de commande u(t) à partir du signal d'erreur e(t)
- **Actionneur/Amplificateur de puissance** : Amplifie la puissance du signal de commande u(t) de façon à ce qu'il soit applicable au processus
- **Processus** : Installation à asservir
- **Capteurs** : Forme une image y(t) aussi fidèle que possible de la grandeur réglée brute x(t)

3. Schéma bloc d'une régulation automatique

3.2.Principaux signaux d'un système de régulation automatique

- **La consigne w(t)** : Signal à poursuivre, défini par l'utilisateur, le cahier des charges ou un autre processus
- **La grandeur réglée brute x(t)** : Grandeur physique réglée, dans son unité physique propre, seule une image peut être obtenue par l'intermédiaire d'un capteur
- **La grandeur réglée mesurée y(t)** : Image de la grandeur réelle, fournie par le capteur (le régulateur reçoit l'information sur y(t) et non sur x(t)).
- **La commande u(t)** : Signal délivré par le régulateur au système à régler
- **Le Bruit v(t)** : Signal aléatoire représentant les perturbations agissant sur le système à régler
- **Erreur ou écart e(t)** : Différence entre consigne w(t) et grandeur réglée y(t) : $e(t) = w(t) - y(t)$

Notion de systèmes asservis

3. Schéma bloc d'une régulation automatique

3.2.Principaux signaux d'un système de régulation automatique

Les signaux d'entrée du système de régulation automatique sont les suivants :

- ✓ Consigne **w(t)** (plusieurs en régulation multi-variable).
- ✓ Perturbation **v(t)** (perturbation de charge, pouvant être de différentes natures et intervenant à plusieurs endroits dans le système).
- ✓ Bruit de mesure **n(t)** (perturbation de signal).

Les signaux de sortie sont :

- ✓ Grandeur réglée y(t) (plusieurs en régulation multivariable).

Notion de systèmes asservis

3. Schéma bloc d'une régulation automatique

3.3.Régulation en boucle ouverte

Ne dispose pas de chaîne de retour, ni de mesure de l'erreur d'asservissement.

- **Avantages :**
  - Simplicité de la commande et de sa mise en œuvre
  - Ajustement rapide des paramètres
  - Fonctionnement aisé en temps réel

- **Inconvénients :**
  - Pas de mesure de l'erreur, pas d'information sur la précision de l'asservissement
  - Nécessite une très bonne connaissance des paramètres
  - Non robuste
  - Non rejet des perturbations
  - Conduite d'un véhicule dans le noir.

4. Qualité attendues d'une régulation

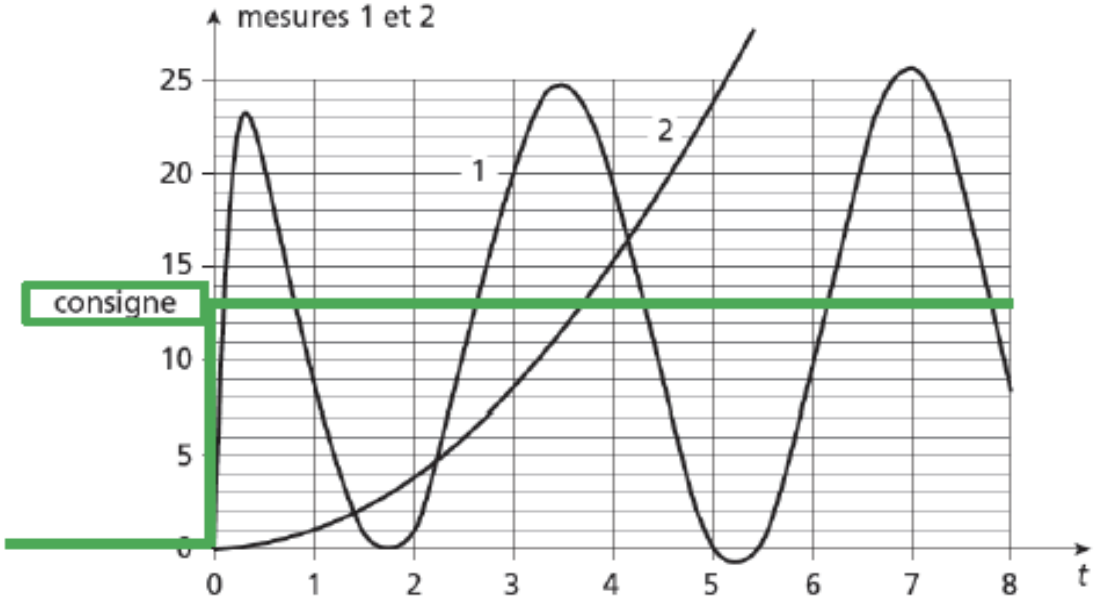
Pour définir l'objectif global d'une régulation, les critères qualitatifs du cahier de charge sont traduit par des critères quantitatif. Les qualités les exigés en industrie sont:

- **La stabilité**
- **La Précision**
- **La rapidité**

4. Qualité attendues d'une régulation

4.1. Stabilité

- Un système est instable si la réponse observée :
  - **Oscille**
  - **Subit une croissance irréversible négative ou positive**



4. Qualité attendues d'une régulation

4.1. Stabilité

❑ Conséquences de l'instabilité d'un système :

- **Risque de détérioration physique du procédé**
- **Objectif non atteint**

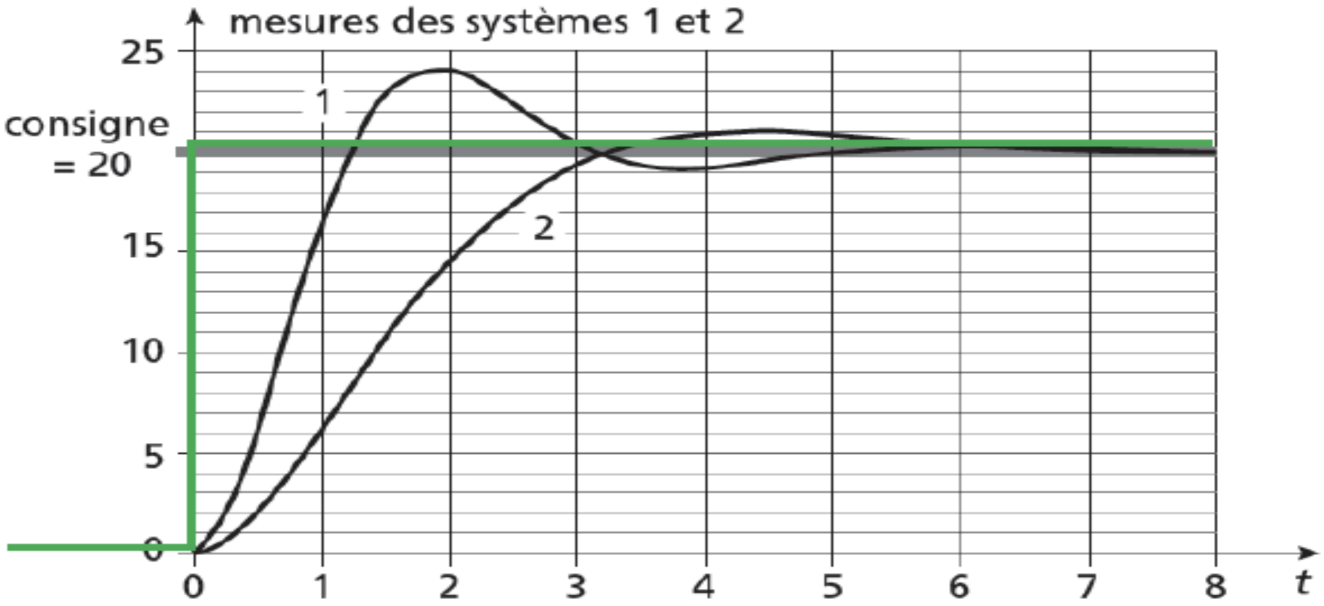
Notion de systèmes asservis

4. Qualité attendues d’une régulation

4.1. Stabilité

- Un système est stable si :

  - pour une **variation d’amplitude finie de la consigne** ou d’une perturbation, la mesure de la grandeur à maîtriser **se stabilise à une valeur finie**

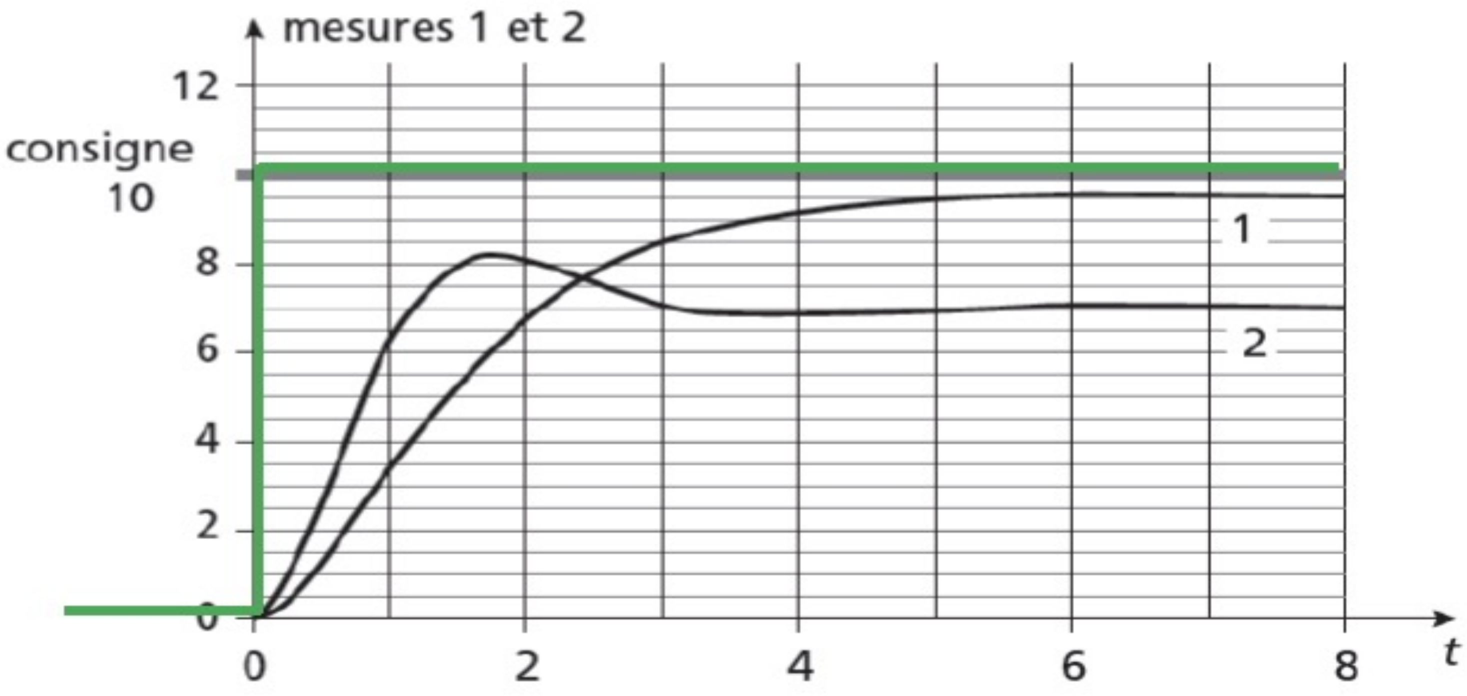


Notion de systèmes asservis

4. Qualité attendues d'une régulation

4.2. Précision statique

- Elle représente l'écart entre la consigne demandée et la mesure en **régime permanent.** Plus l'écart statique est petit, plus le système est précis:



Notion de systèmes asservis

4. Qualité attendues d'une régulation

4.2. Précision statique

- Elle représente l'écart entre la consigne demandée et la mesure en **régime permanent.** Plus l'écart statique est petit, plus le système est précis:

P1 = Précision du système 1

P2 = Précision du système 2

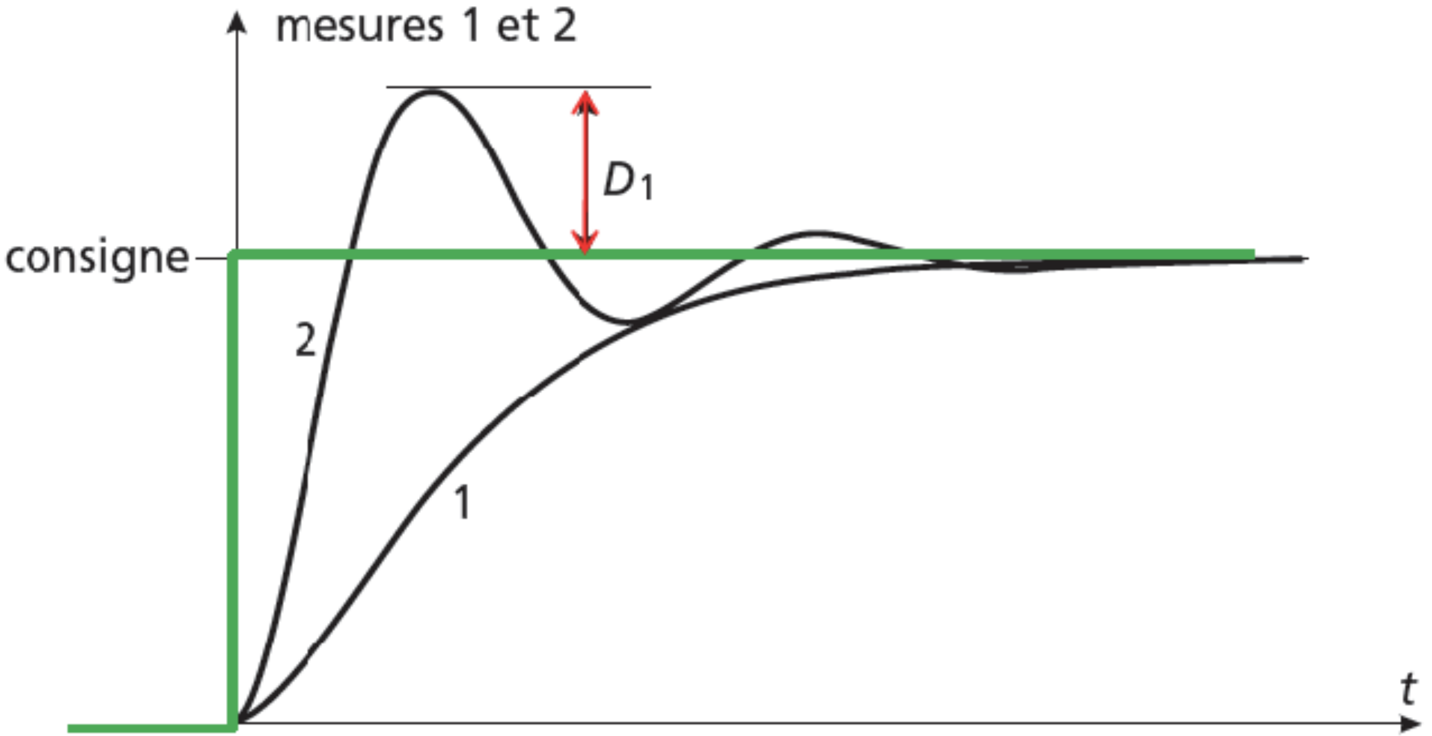
Le ystème1 est donc plus précis que le système2

Notion de systèmes asservis

4. Qualité attendues d'une régulation

4.2. Précision statique

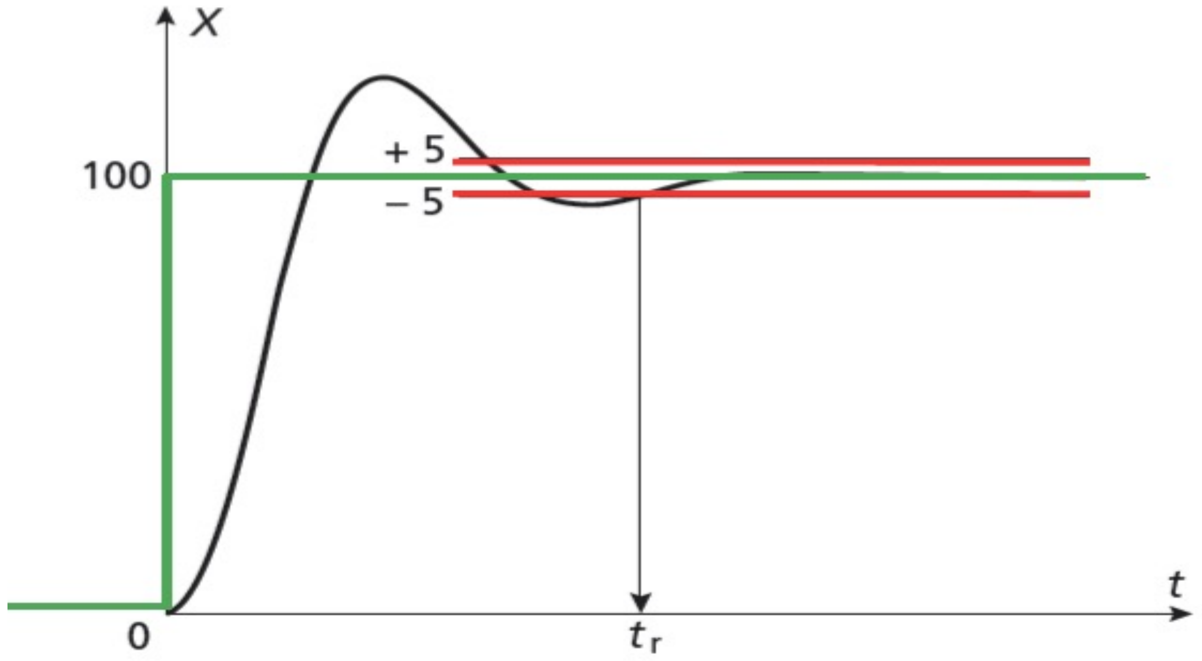
- Ecart en régime transitoire



4. Qualité attendues d'une régulation

4.2. Rapidité

- La rapidité d'un système régulé s'évalue par le temps que met la réponse à entrer dans une zone à **±5 % de sa variation finale (soit entre 95 % et 105 %).**

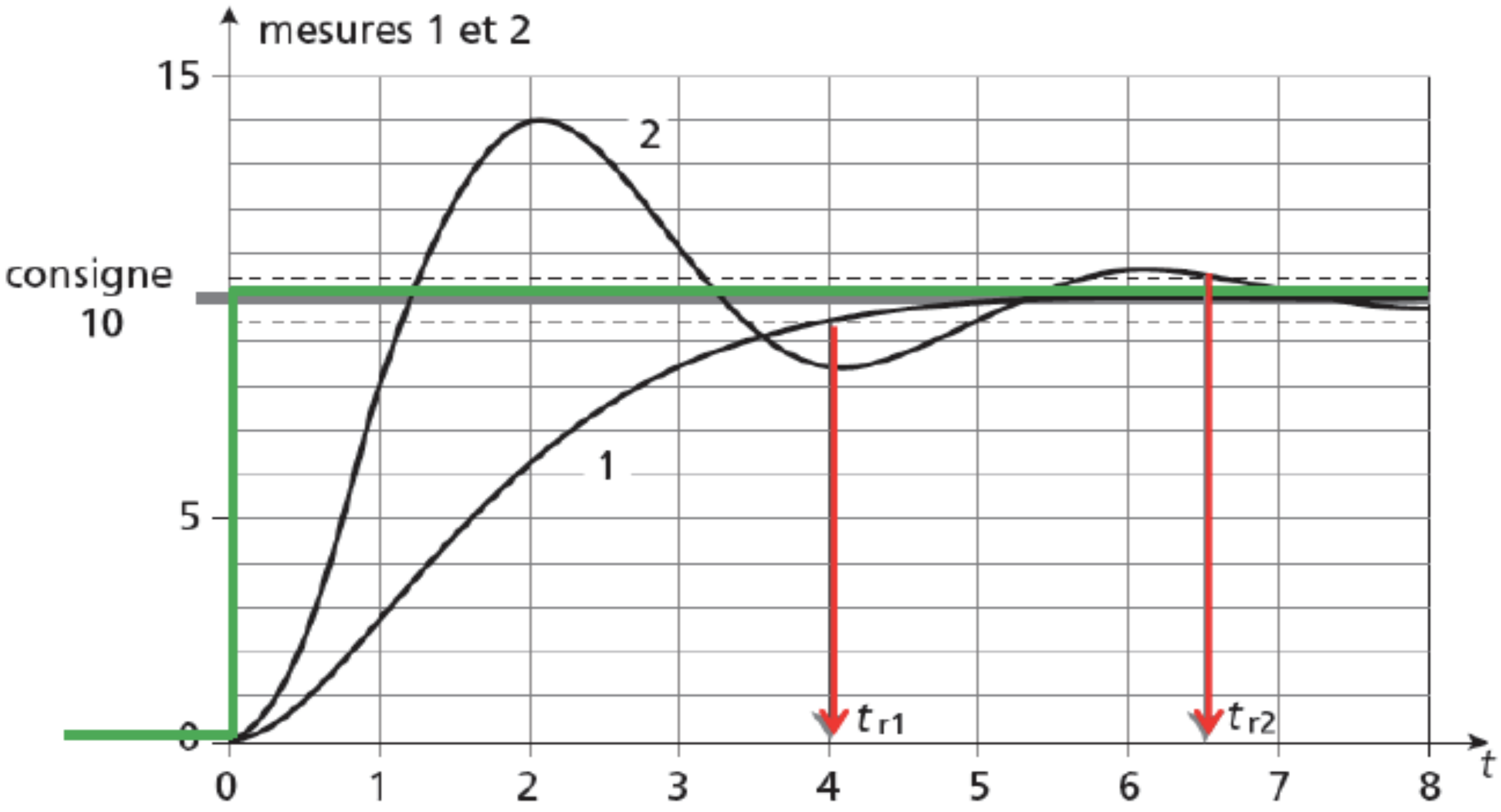


Engineering & Business School
Reconnue par l'État

Notion de systèmes asservis

4. Qualité attendues d'une régulation

4.2. Rapidité



Modélisation mathématiques des SA

1. La transformée de Laplace

1.1. Définition

A une fonction du temps f(t), définie sur R et supposée nulle pour t négatif. On appelle la transformée de Laplace de f, la fonction F définie par :

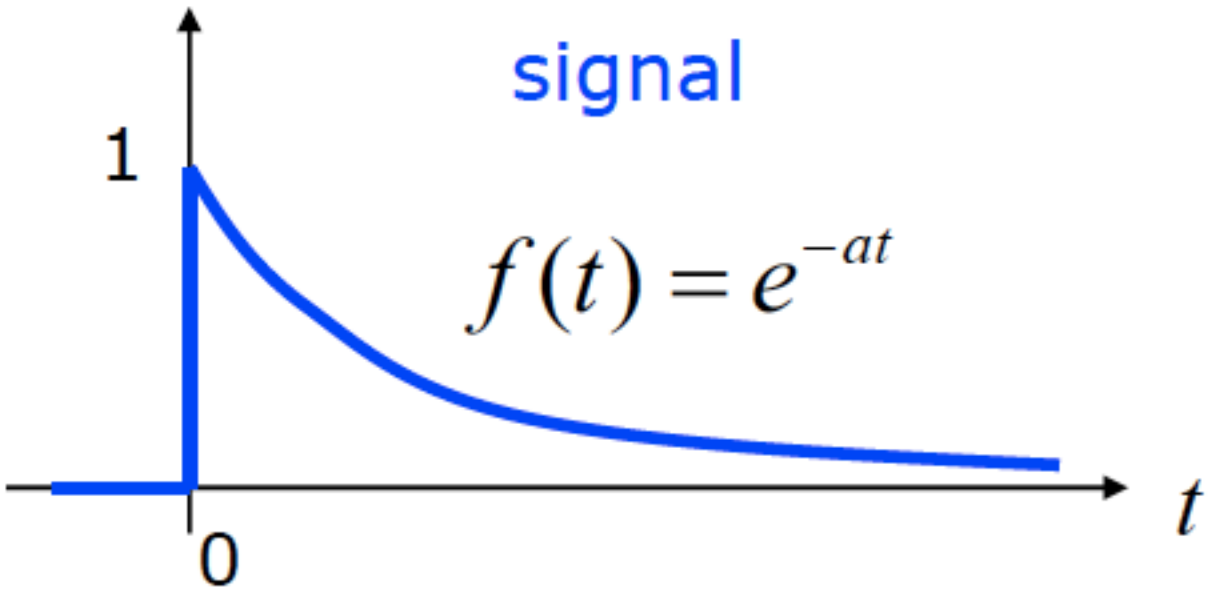
$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

Où p est une variable complexe : p = sigma + jw

1. La transformée de Laplace

1.1. Définition

Exemple : Calculer la transformer de Laplace du signal suivant :



1. La transformée de Laplace

1.1. Définition

Exemple : Calculer la transformer de Laplace du signal suivant :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t} dt = \frac{-1}{p+a}\left[e^{-(a+p)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}$$

$$F(p) = \frac{1}{p+a}$$

Modélisation mathématiques des SA

1. La transformée de Laplace

1.2. Propriétés

❑ Linéarité

Si les fonctions f et g ont des transformées de Laplace, alors :

$$\mathcal{L}[a\,f(t)] = a\,F(p)$$

$$\mathcal{L}[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,F(p) + b\,G(p)$$

avec a et b deux constantes.

Attention : le produit de deux fonctions $f(t).g(t)$ n'a pas pour transformée $F(p).G(p)$.

Modélisation mathématiques des SA

1. La transformée de Laplace

1.2. Propriétés

- **Dérivation**

$$\text{Si } F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \text{ alors } \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] = p\,F(p) - f(0^+)$$

À retenir : si les conditions initiales sont nulles, $f(0^+) = 0$ (conditions de Heaviside), dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique.

1. La transformée de Laplace

1.2. Propriétés

❑ **Intégration**

$$\text{Si } G(p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] \quad \text{alors} \quad G(p) = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

À retenir : si les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

1. La transformée de Laplace

1.2. Propriétés

- **Théorème des limites**

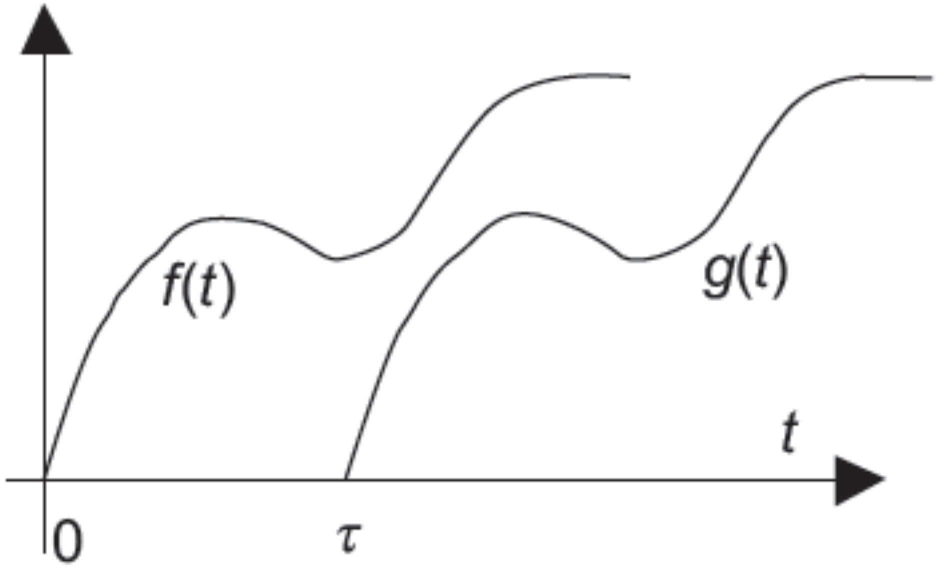
Théorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} p\,F(p)$

Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to 0} p\,F(p)$

1. La transformée de Laplace

1.2. Propriétés

❑ **Théorème du retard**



$$\boxed{\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau p} F(p) = G(p)}$$

Modélisation mathématiques des SA

1. La transformée de Laplace

1.3. Table des TL

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(p)$
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$u(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}}{p}$
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-\frac{t}{\theta}}.u(t)$	$\frac{\theta}{1+\theta p}$

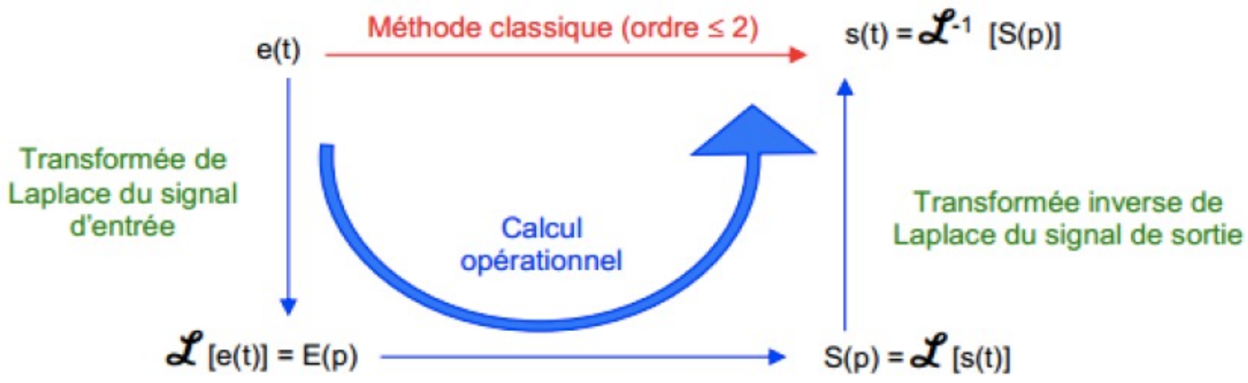
$f(t)$ pour $t > 0$	$F(p)$
$\left(1-e^{-\frac{t}{\theta}}\right).u(t)$	$\frac{1}{p(1+\theta p)}$
$(\sin \omega t).u(t)$	$\frac{\omega}{\omega^2+p^2}$
$\frac{t^{n-1}-e^{-\frac{t}{\theta}}}{\theta^n(n-1)!}.u(t)$	$\frac{1}{(1+\theta p)^n}$
$\frac{e^{-\frac{t}{\theta_1}}-e^{-\frac{t}{\theta_2}}}{\theta_1-\theta_2}.u(t)$	$\frac{1}{(1+\theta_1 p)(1+\theta_2 p)}$
$\left(1-\left(1+\frac{t}{\theta}\right)e^{-\frac{t}{\theta}}\right).u(t)$	$\frac{1}{p(1+\theta p)^2}$
$\left(\theta e^{-\frac{t}{\theta}}+t-\theta\right).u(t)$	$\frac{1}{p^2(1+\theta p)}$

Modélisation mathématiques des SA

1. La transformée de Laplace

1.4. Utilisation

La TL est utilisée pour la résolution des équations différentielles décrivant les procédés physique



L'avantage d'utilisée la TL est qu'il est possible de représenter le système sous forme de bloc

Modélisation mathématiques des SA

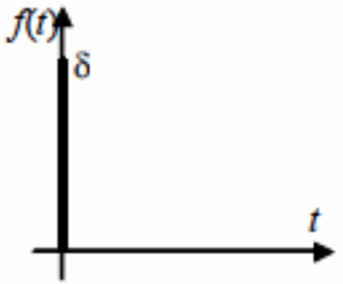
1. La transformée de Laplace

1.4. Exercices d'application

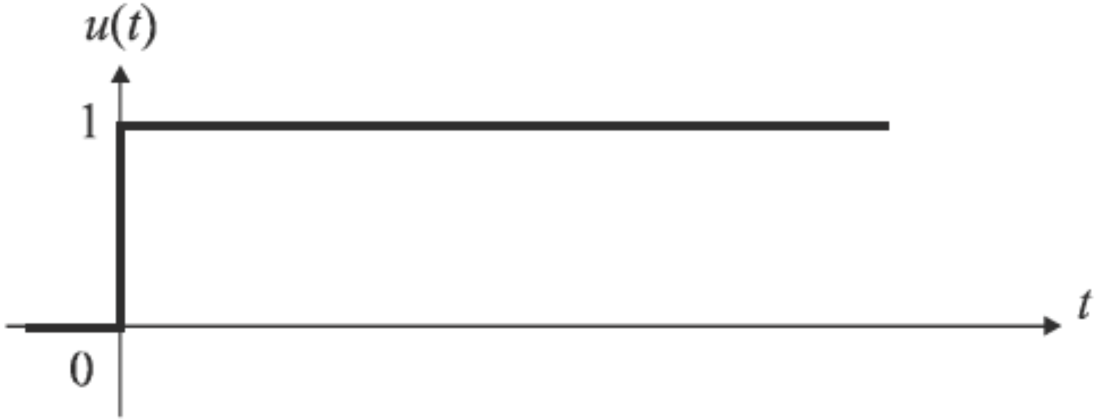
- Calculer la transformé de Laplace de l'impulsion de Dirac et du signal échelon unité suivant :

$$\delta(t) = 0 \quad \forall \quad (t < 0 \;\; \text{ou}\; t > 0)$$

U(t) = 0 pour t<0 et u(t) = 1 pour t>0



Impulsion de Dirac



Echelon unité

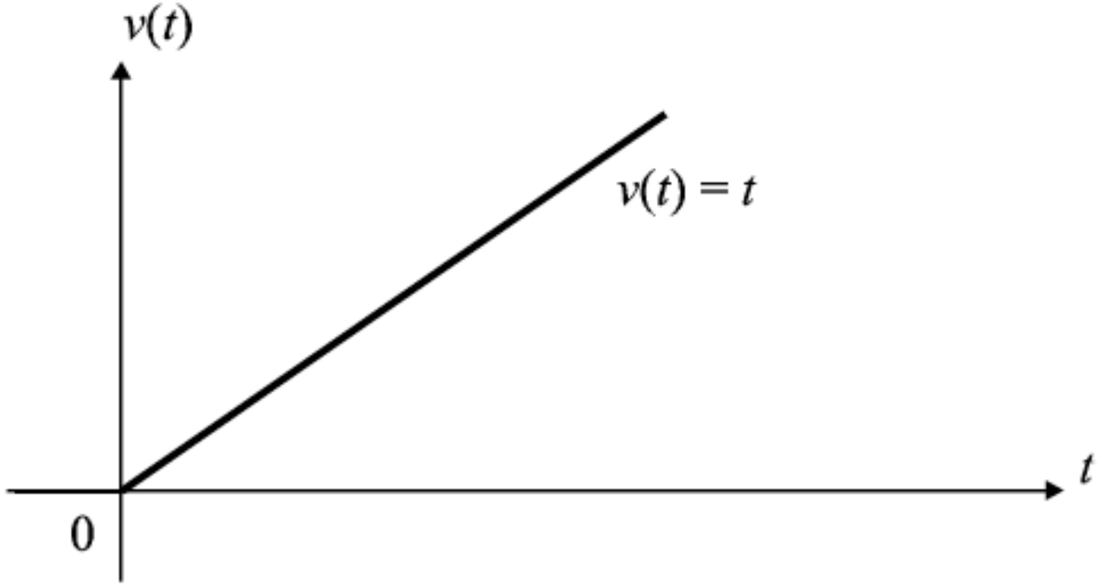
Modélisation mathématiques des SA

1. La transformée de Laplace

1.4. Exercices d'application

- Calculer la transformé de Laplace du signal rampe suivant :

v(t) = t.u(t)

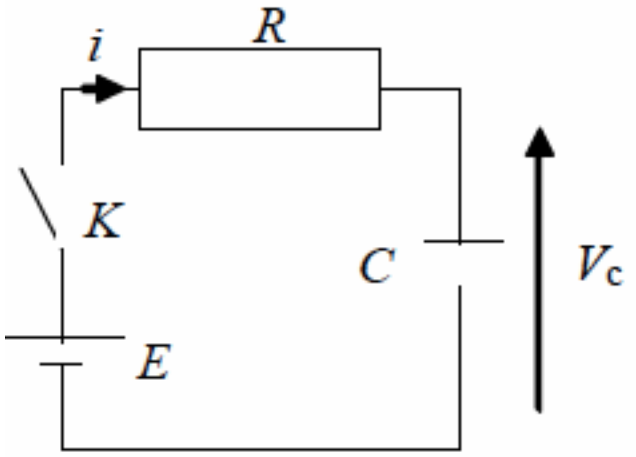


1. La transformée de Laplace

1.4. Exercices d'application

- Calculer la transformée de Laplace inverse de l'expression $F(p) = \dfrac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p}$.

- Le condensateur étant déchargée, à t=0 on ferme K
  - ✓ L'équation différentielle
  - ✓ Appliquer la transformée de Laplace
  - ✓ L'expression de la tension V_c

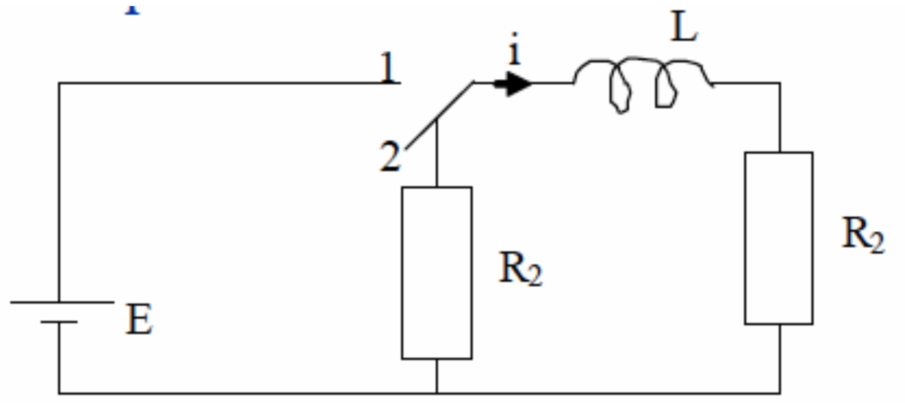


Modélisation mathématiques des SA

1. La transformée de Laplace

1.4. Exercices d'application

- Soit le circuit RL suivant :



À t=0 i=0 on bascule le commutateur k de 2 à 1
Quelle est l'expression du courant $i(t)$?

1. La transformée de Laplace

1.4. Exercices d'application

- Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = e(t)$$

Avec:

$y(0)=2$

$y'(0)=2$

$e(t)=6.u(t)$

Modélisation mathématiques des SA

1. La Fonction de transfert

1.1. Définition

Soit un système quelconque d'ordre m, l'équation différentielle s'écrit :

$$a_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} e(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_0 e(t) =$$
$$b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} s(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t)$$

Modélisation mathématiques des SA

1. La Fonction de transfert

1.1. Définition

On se place dans le cas des conditions initiales nulles et nous appliquons la transformée de Laplace, nous avons :

$$a_n p^n E(p) + a_{n-1} p^{n-1} E(p) + \cdots + a_1 p E(p) + a_0 E(p) =$$
$$b_m p^m S(p) + b_{m-1} p^{m-1} S(p) + \cdots + b_1 p S(p) + b_0 S(p)$$

D'où :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}$$

Modélisation mathématiques des SA

1. La Fonction de transfert

1.1. Définition

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p, il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

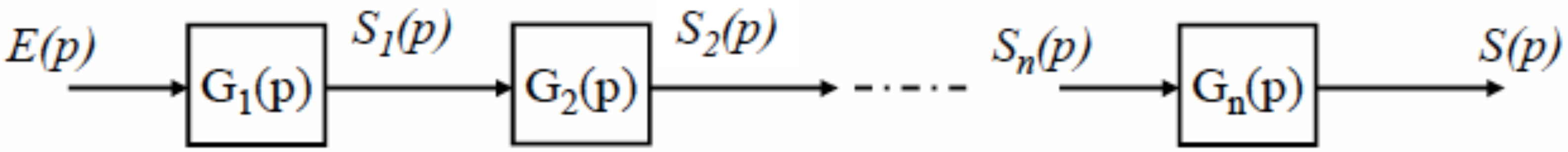
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\cdots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_m)}$$

- **Zi sont les appelés les Zéros de la fonction de transfert G(p)**
- **Di sont les appelés les pôles de la fonction de transfert G(p)**

Modélisation mathématiques des SA

1. La Fonction de transfert

1.2. FT pour des systèmes en séries



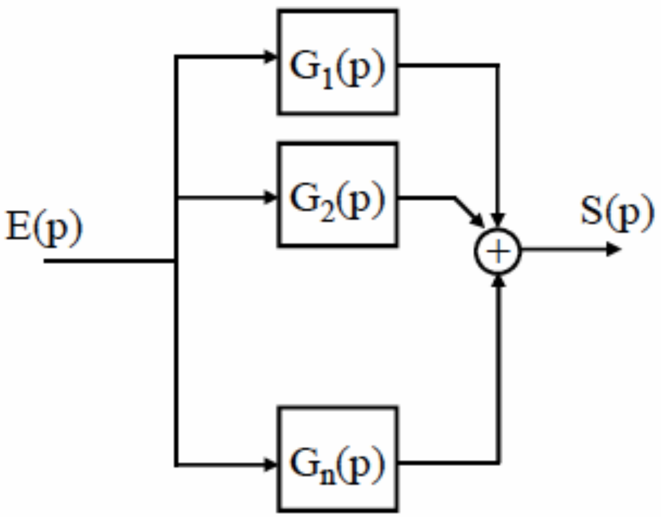
$$G_1(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)} \quad G_2(p) = \frac{S_2(p)}{S_1(p)} \qquad G_n(p) = \frac{S(p)}{S_n(p)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{S(p)}{S_n(p)} \cdots \frac{S_2(p)}{S_1(p)} \; \frac{S_1(p)}{E(p)} \\ &= G_1(p).G_2(p) \cdots G_n(p) \end{aligned}}$$

Modélisation mathématiques des SA

1. La Fonction de transfert

1.3. FT pour des systèmes en parallèles

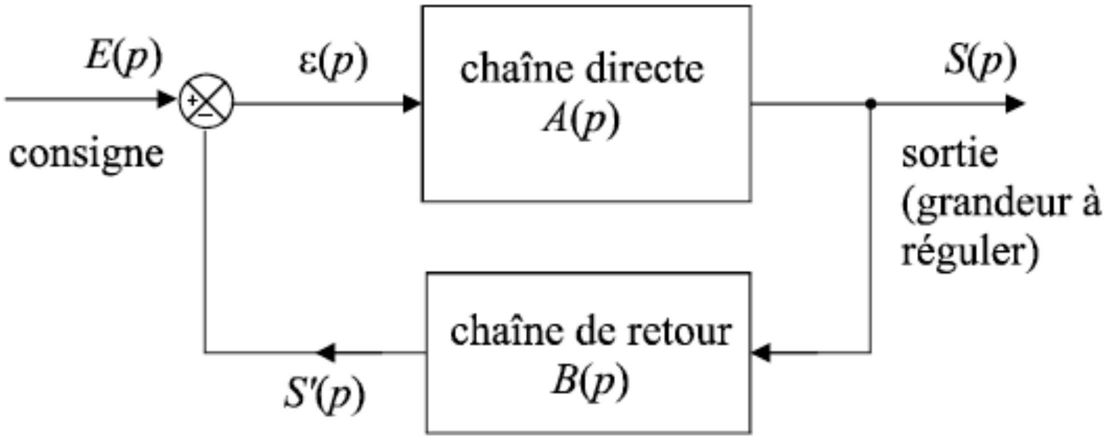


$$\boxed{G(p) = G_1(p) + G_2(p) + \cdots + G_n(p)}$$

Modélisation mathématiques des SA

1. La Fonction de transfert

1.4. FT pour un asservissement



- Fonction de transfert en boucle fermée(FTBF) du système est définit par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

1. La Fonction de transfert

1.4. FT pour un asservissement

- Fonction de transfert en boucle ouverte(FTBF) du système est définit par :

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)B(p)$$

- Dans le cas d'une boucle à retour unitaire, on a B(p) = 1.

Soit :

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)$$

d'où :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

Modélisation mathématiques des SA

1. La Fonction de transfert

1.5. Résolution d'un problème à l'aide de la FT

La connaissance de la FT du système (qui s'écrit immédiatement à partir de l'équation différentielle) fournit la relation entre S(p) et E(p) c'est-à-dire entre les transformées de Laplace respectives de la sortie et de l'entrée du système :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

A partir de la table de la transformée de Laplace on peut retrouver l'expression s(t) de S(p)

Modélisation mathématiques des SA

2. Exercices d'applications

2.1. Exercice 1

- Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon. Soit $e(t) = u(t)$. On cherche à identifier l'expression du signal de sortie $s(t)$.

- Calculer la transformée de Laplace de la fonction $s(t)$ définie par :

$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0,$
$s(t) = At/T \text{ pour } 0 < t < T,$
$s(t) = A \text{ pour } t > T.$

Modélisation mathématiques des SA

2. Exercices d'applications

2.2. Exercice 2

- Calculer la transformée de Laplace inverse de l'expression $F(p) = \dfrac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p}$.

- On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^3 s}{dt^3} + 3\frac{d^2 s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + s(t) = 2\frac{de}{dt} + e(t)$$

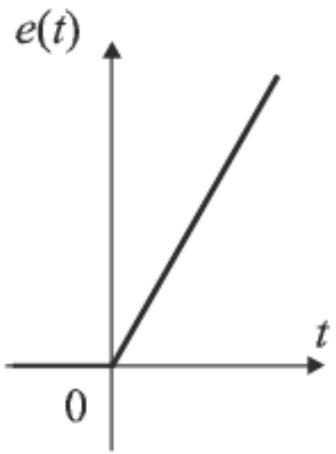
Calculer la fonction de transfert de ce système et calculer ses pôles et ses zéros.

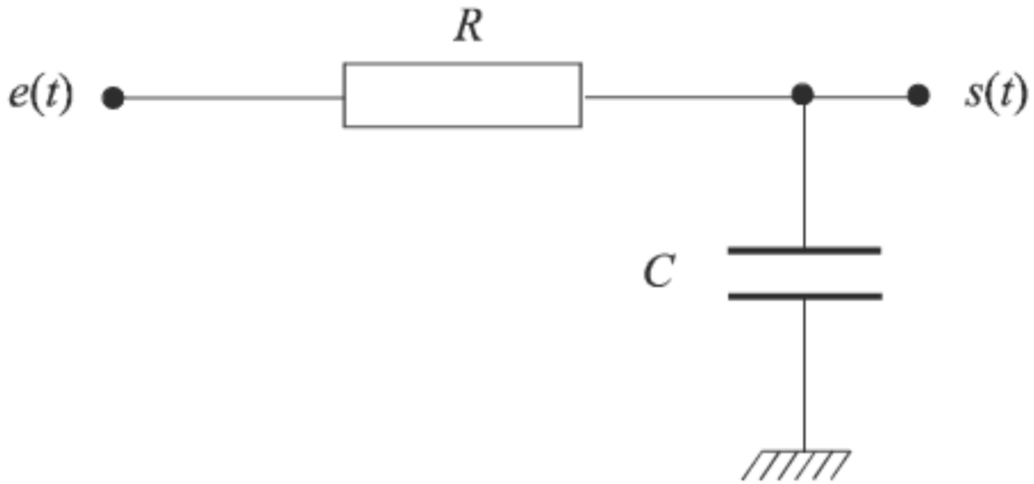
Modélisation mathématiques des SA

2. Exercices d'applications

2.2. Exercice 3

- Considérons le circuit RC présenté sur la figure 1.8. Le signal d'entrée injecté est $e(t) = 3t$ et la sortie correspond à $s(t)$ dont on cherche l'expression.





1. Introduction

- Généralement, on applique à l'entrée d'un système un signal temporel, que la sortie suit plus ou moins suivant le système à étudier.

- Les objectifs de l'analyse de la dynamique des SA sont :
  - de pouvoir comparer les performances de différents systèmes suivant un signal d'entrée bien défini,
  - mais aussi de pouvoir appréhender le système de commande idéal pour ce type de système.

Dynamique des Systèmes Asservis

1. Introduction

- Suivant la nature du signal mis en entrée, différentes informations peuvent être obtenues.

  - Avec un signal temporel, nous pouvons caractériser **la rapidité**, **la précision** et la **stabilité** du système.

  - Avec un signal fréquentiel, nous pourrons déterminer **la stabilité**, **le filtrage**, le **déphasage** provoqué par le système

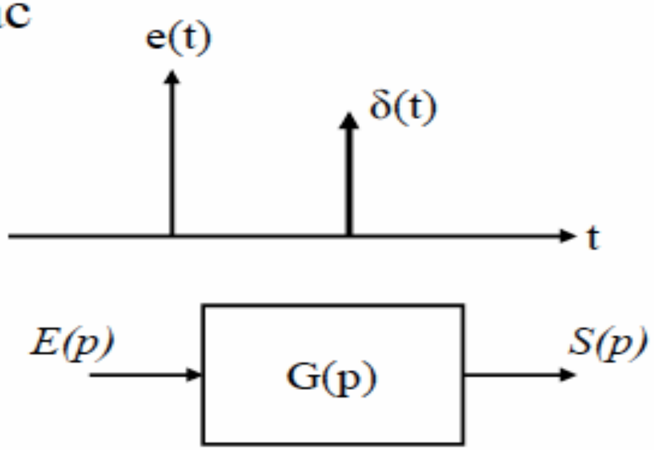
1. Introduction

- Les signaux appliqués sont :
  - Un Dirac,
  - Un échelon,
  - Une rampe,
  - Une excitation harmonique

Dynamique des Systèmes Asservis

2. Signaux d'entrées

- Impulsion de Dirac



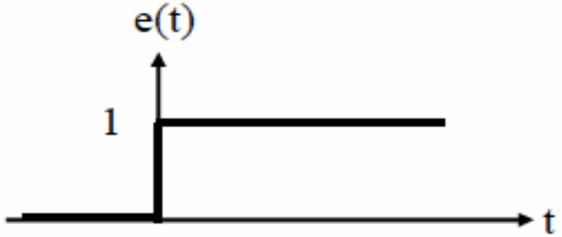
Or $TL(\delta(t)) = 1$ d'où $S(p) = G(p)\,E(p) = G(p)$

Si l'entrée est une impulsion, la réponse est dite

IMPULSIONNELLE

2. Signaux d'entrées

- Échelon unitaire :



Or TL(1) = 1 / p

et si l'échelon vaut k, on a TL(k) = k / p

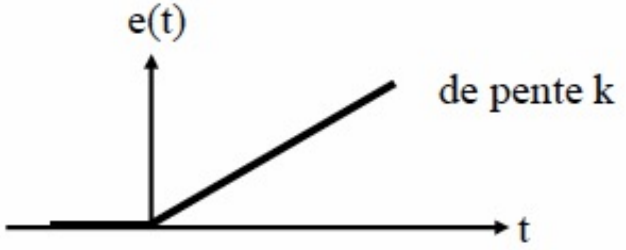
Si l'entrée est un échelon, la réponse est dite

INDICIELLE

2. Signaux d'entrées

- Entrée de vitesse (rampe)

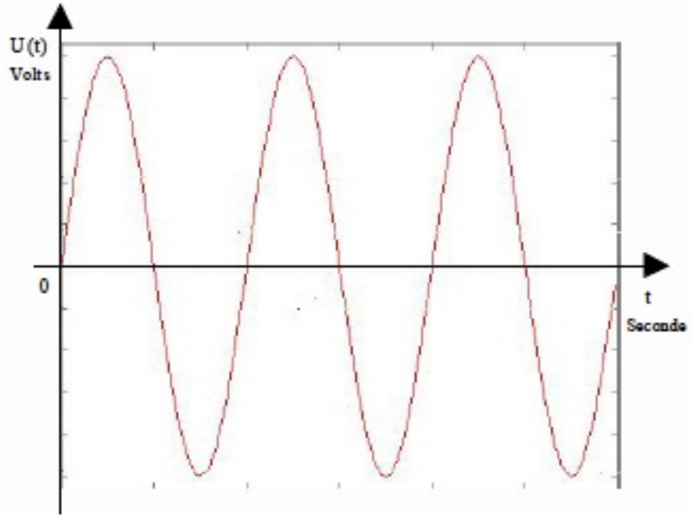
$$TL(\ e(t)\ ) = k\ /\ p^2$$



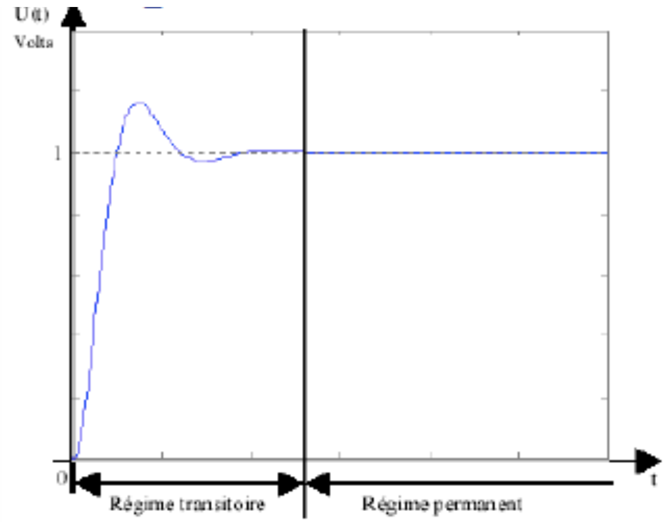
- Excitation harmonique

La réponse à une excitation harmonique est appelée

REPONSE HARMONIQUE



3. Régime transitoire et permanent



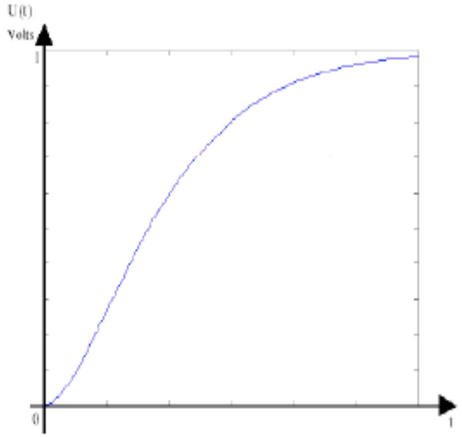
- Régime transitoire : réaction d'un système au repos lorsqu'on applique un signal d'entrée, ou lorsque le signal d'entrée est modifié.
- Régime permanent : se met en place à la fin du régime transitoire lorsque le signal de sortie est constant.

Dynamique des Systèmes Asservis

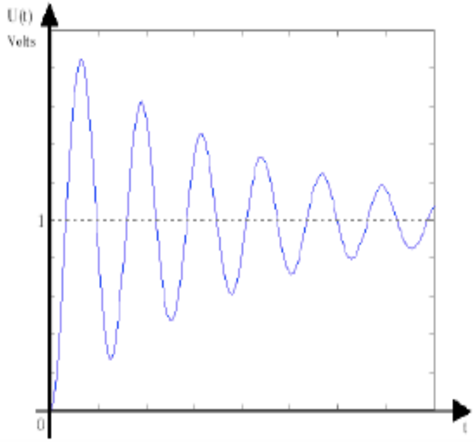
3. Régime transitoire et permanent

2.1. Régime transitoire

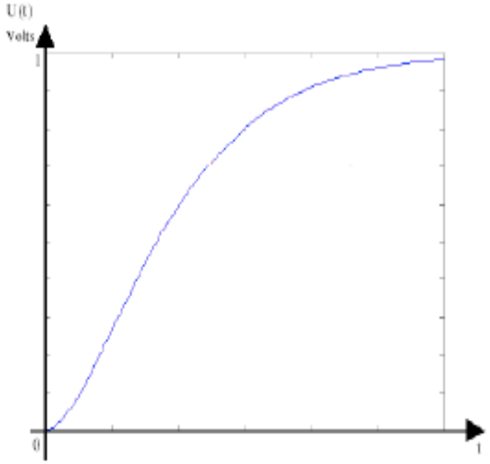
Lorsqu’un système est soumis aux entrées précédentes, il lui faut un certain temps pour atteindre son régime permanent. La période entre t=0 et ce régime permanent est appelée régime transitoire.



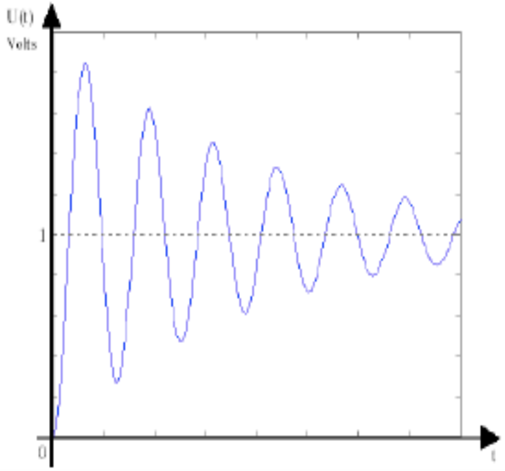
Asservissement lent



Asservissement trop peu amorti



Asservissement lent



Asservissement trop peu amorti

3. Régime transitoire et permanent

2.1. Régime transitoire

➢ Le comportement transitoire peut être évalué à l'aide des trois indices suivant:

- le temps de montée : t_m,
- le temps de réponse : t_r
- le dépassement : D (pour une réponse oscillatoire)

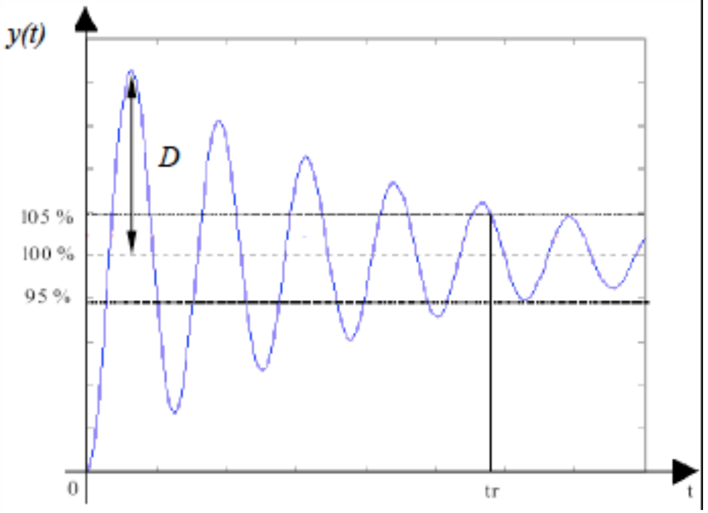
➢ Allures de la réponse indicielle :

- Cas oscillatoire

t_r : est défini comme étant l'instant où la réponse $y(t)$ entre dans le domaine ±5% de y_{st} et ne ressort pas.

$$D = \max(y(t))$$

$$D(\%) = 100\frac{\Delta}{y_{st}} \quad \text{et } \Delta = \sup_t y(t) - y_{st} \geq 0$$



Dynamique des Systèmes Asservis

3. Régime transitoire et permanent

2.1. Régime transitoire

- Allures de la réponse indicielle :

Temps de montée : t_m

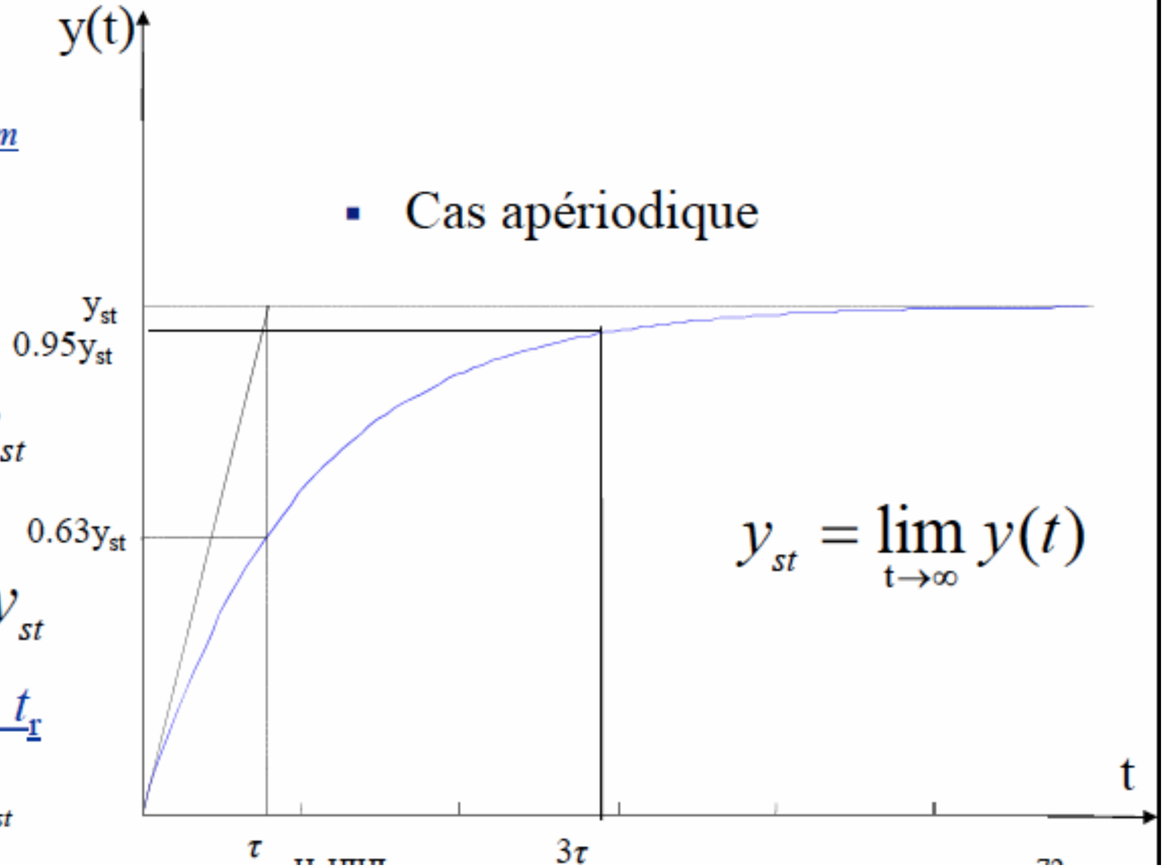
$$t_m = t_2 - t_1$$

$$t_1 \leftarrow y(t_1) = 0.1 y_{st}$$

$$t_2 \leftarrow y(t_2) = 0.9 y_{st}$$

Temps de réponse : t_r

$$t_r \leftarrow y(t_r) = 0.95 y_{st}$$



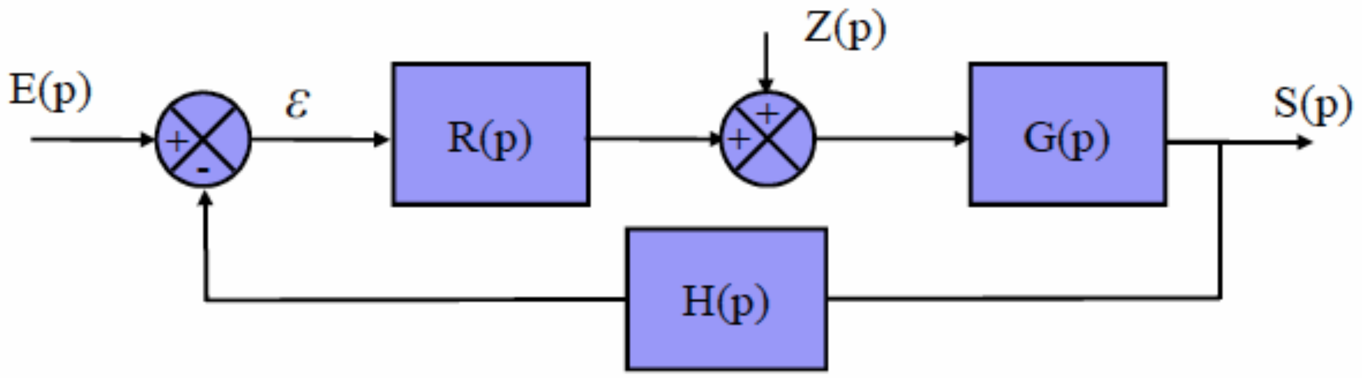
Dynamique des Systèmes Asservis

3. Régime transitoire et permanent

2.1. Régime permanent

Dynamique des Systèmes Asservis

3. Erreur statique d'un système Asservis



<u>Erreur statique dû à la consigne :</u> Z(p) = 0

l'erreur est définie par : $\varepsilon = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p)$

3. Erreur statique d'un système Asservis

3.1. Erreur statique dû à la consigne

$$S(p) = R(p)\, G(p)\, \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - H(p)\, S(p) \quad = E(p) - H(p)\, R(p)\, G(p)\, \varepsilon(p)$$

donc :

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)R(p)G(p)} = \frac{E(p)}{1 + W_{BO}(p)}}$$

Dynamique des Systèmes Asservis

3. Erreur statique d'un système Asservis

3.1. Erreur statique dû à la consigne

Échelon de position : $E(p) = E_0/p$

$$\boxed{\varepsilon_0 = \lim_{p\to 0} p \frac{E_0}{p} \frac{1}{1+H(p)R(p)G(p)} = \frac{E_0}{1+H_0R_0G_0}}$$

Une rampe : $E(p) = E_0/p^2$

$$\boxed{\varepsilon_t = \lim_{p\to 0} \frac{E_0}{p} \frac{1}{1+H(p)R(p)G(p)}}$$

Erreur de traînage

3. Erreur statique d'un système Asservis

3.2. Erreur statique dû à la perturbation : E(p) = 0

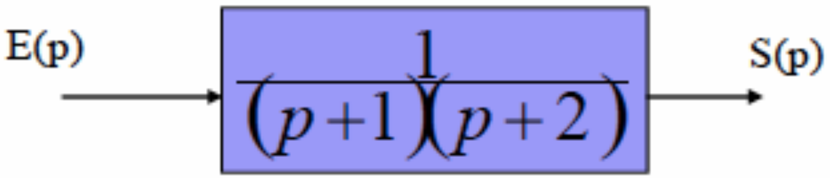
- $\varepsilon(p) = -H(p)\,S(p)$ et $S(p) = G(p)\,(R(p)\,\varepsilon(p) + Z(p))$

- D'où :

$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{-H(p)G(p)}{1+H(p)R(p)G(p)}z(p)}$$

4. Exercice d'application

Soit le système suivant :



Calculer et représenter la réponse impulsionnelle

Calculer et représenter la réponse indicielle

4. Exercice d'application

- **Réponse impulsionnelle :** $E(p) = 1$

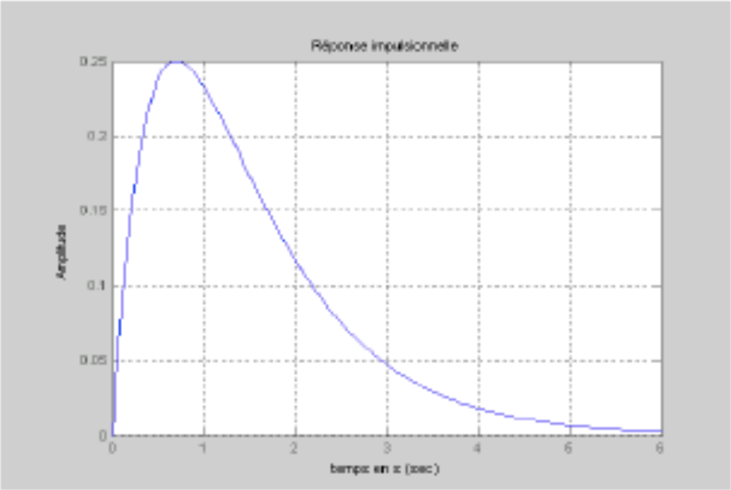
$$S(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

$$A = \lim_{p \to -1} (p+1) S(p) = 1$$

$$B = \lim_{p \to -2} (p+2) S(p) = -1$$

$$S(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

D'où $\boxed{s(t) = e^{-t} - e^{-2t}}$

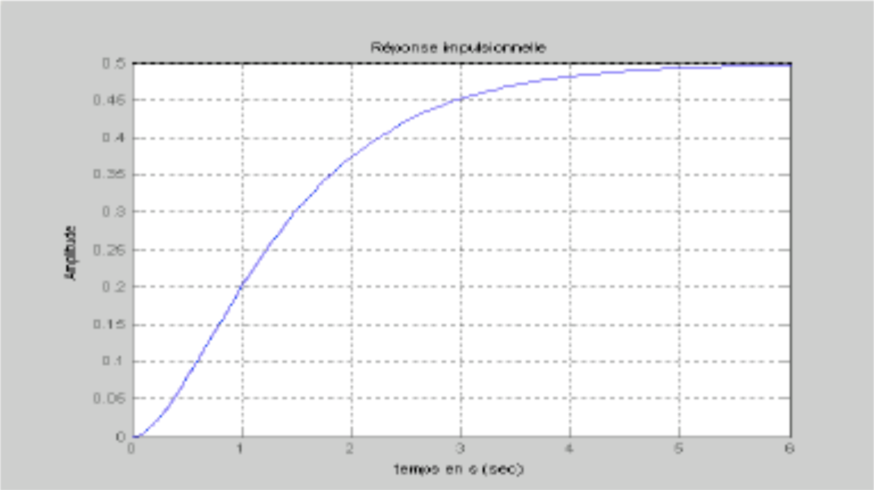


4. Exercice d'application

➢ **Réponse indicielle :** $E(p) = \dfrac{1}{p}$

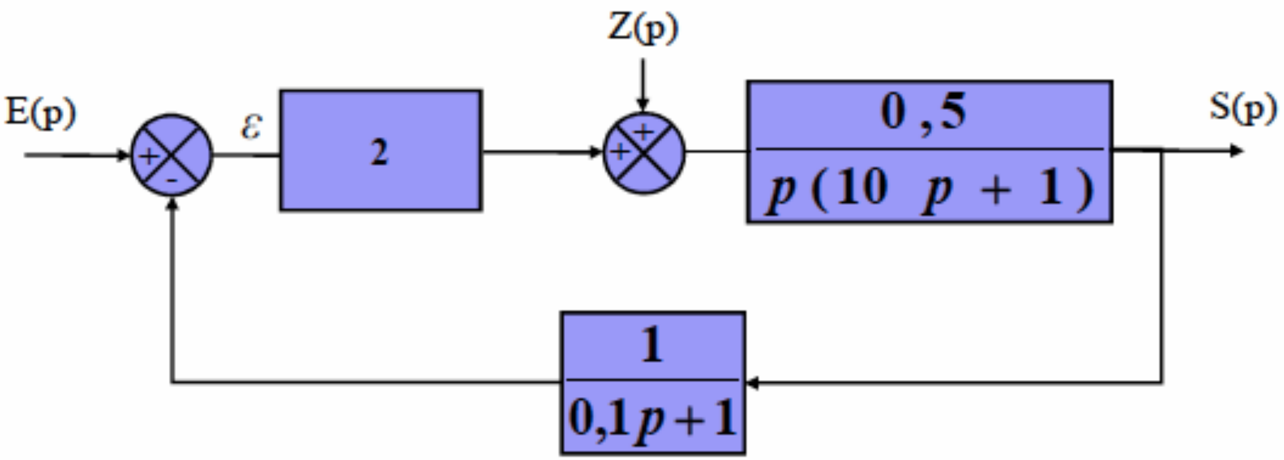
Après décomposition en éléments simples et transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$s(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2t}\right) - e^{-t}$$



4. Exercice d'application

Calculer l'erreur statique dû à la consigne pour un échelon unitaire et l'erreur statique dû à la perturbation pour un échelon de 0,2.



Dynamique des Systèmes Asservis

4. Exercice d'application

- Erreur statique dû à la consigne :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1 + 2\dfrac{0,5}{p(10p+1)(0,1p+1)}} = 0$$

- Erreur statique dû à la perturbation

$$\varepsilon_s = \lim_{p \to 0} 0,2 \frac{\dfrac{1}{(0,1p+1)} \dfrac{0,5}{p(10p+1)}}{1 + 2\dfrac{0,5}{p(10p+1)(0,1p+1)}} = 0,10$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

1. Introduction

- Dans la pratique, les performances d'un système asservis sont souvent jugées sur sa réponse temporelle.
- Pour des ordres élevés de système, l'analyse fréquentielle est utilisée : on applique un signal sinusoïdal en entrée.
- Nous balayons le comportement du système en fréquence et nous observons le signal de sortie.

Analyse Fréquentielle des Systèmes

2. Analyse Fréquentielle

➢ L'écriture en Laplace est une écriture fréquentielle. Cependant, pour notre analyse, nous remplaçons tout simplement :

$$\boldsymbol{p} \text{ par } \boldsymbol{j\omega}$$

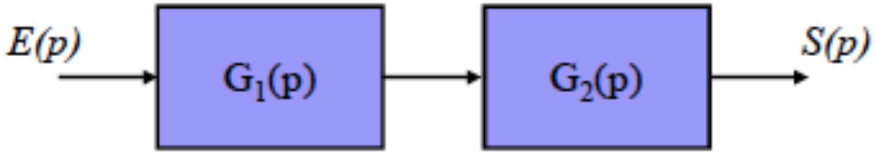
➢ Nous pouvons définir :

- La fonction de transfert harmonique : $G(j\omega)$
- Le gain : $G(\omega) = |G(j\omega)|$
- La phase : $\varphi(\omega) = Arg\left(G(j\omega)\right)$

$$\left.\begin{array}{l} G(\omega) = |G(j\omega)| \\ \varphi(\omega) = Arg\left(G(j\omega)\right) \end{array}\right\} G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

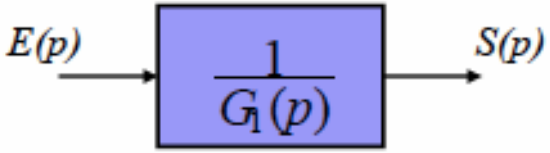
3. Calcul du gain et de la phase

➢ Propriété 1



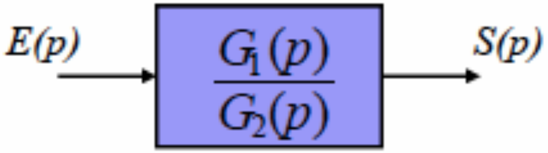
$$|G(\omega)| = |G_1(j\omega)||G_2(j\omega)|$$
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

➢ Propriété 2



$$|G(\omega)| = \frac{1}{|G_1(j\omega)|}$$
$$\varphi(\omega) = -\varphi_1(\omega)$$

➢ Propriété 3



$$|G(\omega)| = \frac{|G_1(j\omega)|}{|G_2(j\omega)|}$$
$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

4. Calcul du gain et de la phase

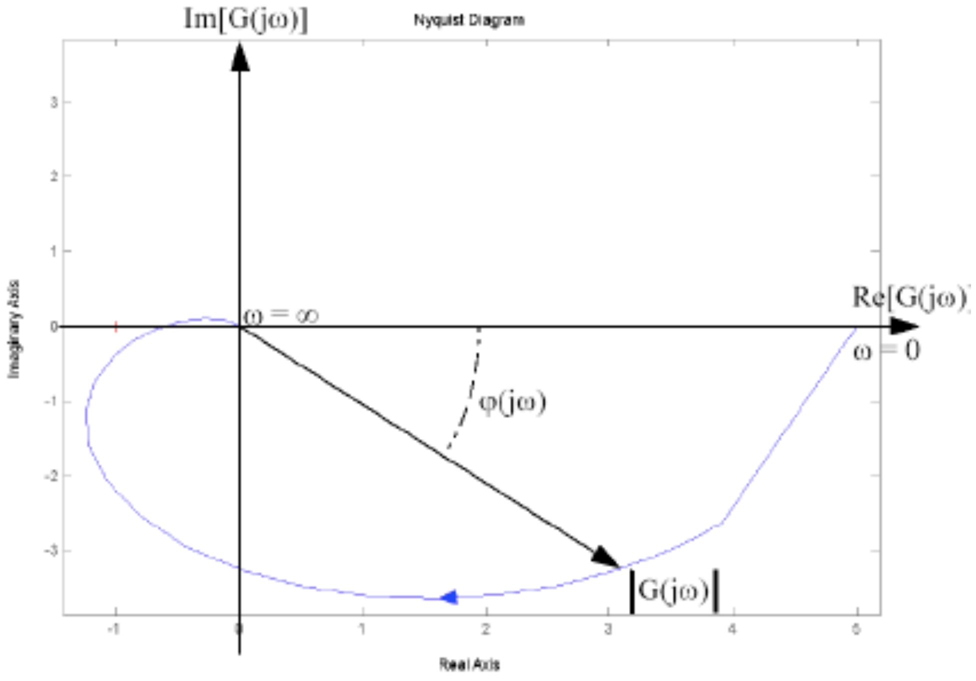
Calculer le module et l'argument de

$$H(p)=\frac{1}{(p+1)^3}$$

Analyse Fréquentielle des Systèmes

4. Lieu de Nyquist

C'est la représentation dans le plan complexe de l'extrémité du vecteur image *H(jω)* lorsque *ω* varie de 0 à l'infini.



4. Lieu de Nyquist

❑ Exemple

Représentation sur le lieu de Nyquist de la fonction calculée précédemment.

➢ Le tableau de valeurs est le suivant :

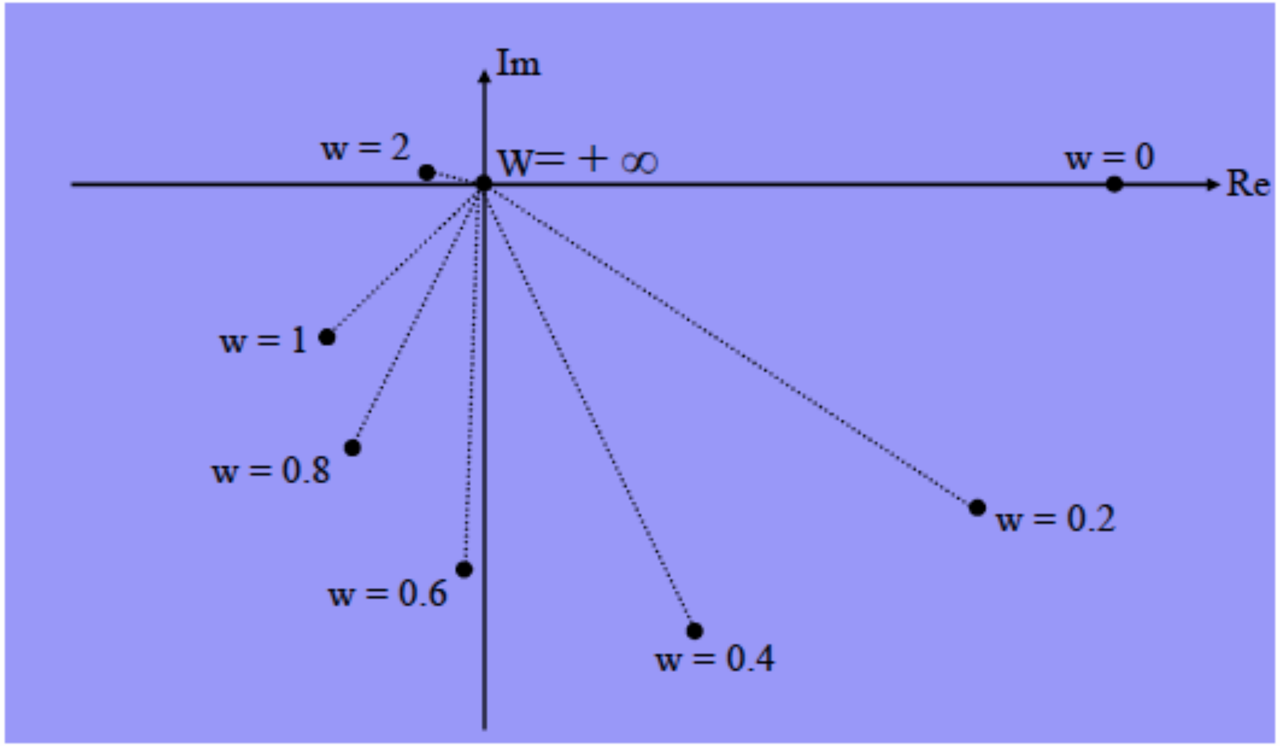
ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

Analyse Fréquentielle des Systèmes

4. Lieu de Nyquist

❑ Exemple

w	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
H(w)	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
φ(w)	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

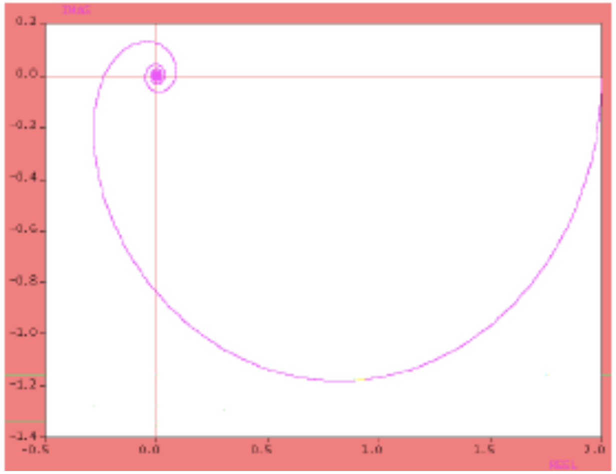


4. Lieu de Nyquist

- **Cas de systèmes à retard :**

$$G(p)=\frac{e^{-\tau p}}{1+p}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad et \quad \varphi(j\omega)=-\tau\omega-Arc\tan\omega$$



Analyse Fréquentielle des Systèmes

5. Lieu de Bode

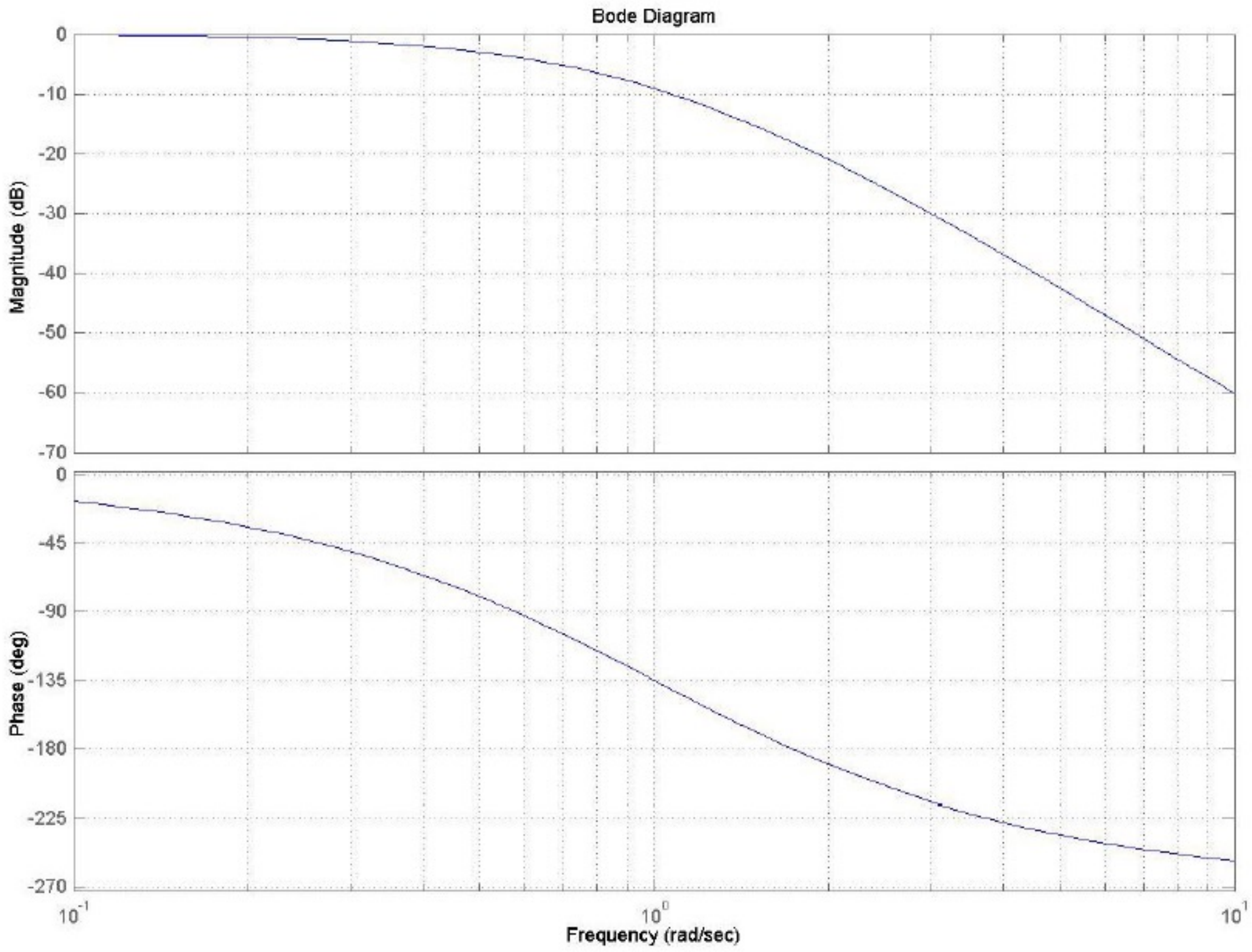
- Pour cette représentation, le gain et la phase sont séparés et dépendent de la pulsation ω.

- Le gain est exprimé en dB !

Représentation du lieu de Bode de la fonction vue précédemment.

Analyse Fréquentielle des Systèmes

5. Lieu de Bode



Etude des systèmes linéaires du 1er et du 2nd Ordre

1. Ordre d'un système

- Un système est dit du $n^{ème}$ ordre si l'équation différentielle qui régit ses paramètres est de degré n.

- Nous allons étudier en détail les systèmes du premier et du second ordre.

- Tout système complexe peut être décomposé en plusieurs « petits » systèmes.

1. Systèmes du 1er ordre

Un système du 1er ordre est un système régis par une équations différentielles de **degré 1**. Leur fonction de transfert possède donc au maximum **un zéro** et **un pôle**.

Un système du premier ordre s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{T\frac{ds}{dt}+s(t)=K\,e(t)}$$

D'où : $$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+T\,p}}$$

Avec : K = gain statique

T = constante de temps (en s)

1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➢ Réponse à une impulsion (réponse impulsionnelle) :

- En entrée, nous appliquons un dirac : $E(p) = 1$

On a donc :

$$\boxed{S(p) = \frac{K}{1+T\,p} \quad d'où \quad s(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}}$$

Et :

$$s'(t) = -\frac{K}{T^2} e^{-t/T}$$

$$t=0 \quad s(0) = \frac{K}{T}$$

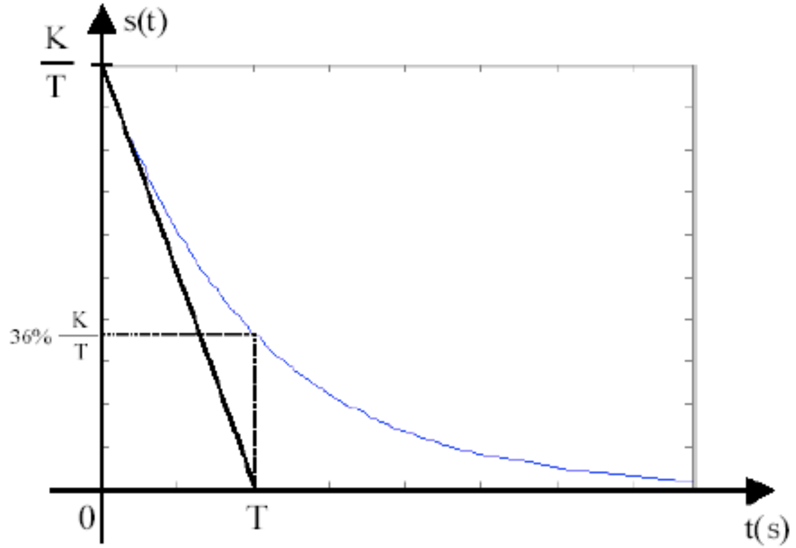
$$t=T \quad s(T) = \frac{K}{T} e^{-1} = 0.368\,\frac{K}{T}$$

$$t \to \infty \quad \lim_{t \to \infty} s(t) = 0$$

1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➤ Réponse à une impulsion (réponse impulsionnelle) :



Tangente en (0, K/T) : $y = -\frac{K}{T^2}t + \frac{K}{T}$

Etude des systèmes linéaires du 1er et du 2nd Ordre

1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➢ Réponse à un échelon (réponse indicielle) :

- En entrée, nous appliquons un échelon : $E(p) = 1/p$

- On a donc : $$\boxed{S(p) = \frac{K}{p(1+Tp)} \quad d'où \quad s(t) = K(1 - e^{-t/T})}$$

- Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} pS(p) = \frac{K}{1+Tp} = K$$

- Et :

$$s'(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$

$$t=0 \quad s(0) = 0$$
$$t=T \quad s(T) = K(1-e^{-1}) = 0.63\ K$$
$$t=2T \quad s(2T) = K(1-e^{-2}) = 0.86\ K$$
$$t=3T \quad s(3T) = K(1-e^{-3}) = 0.95\ K$$

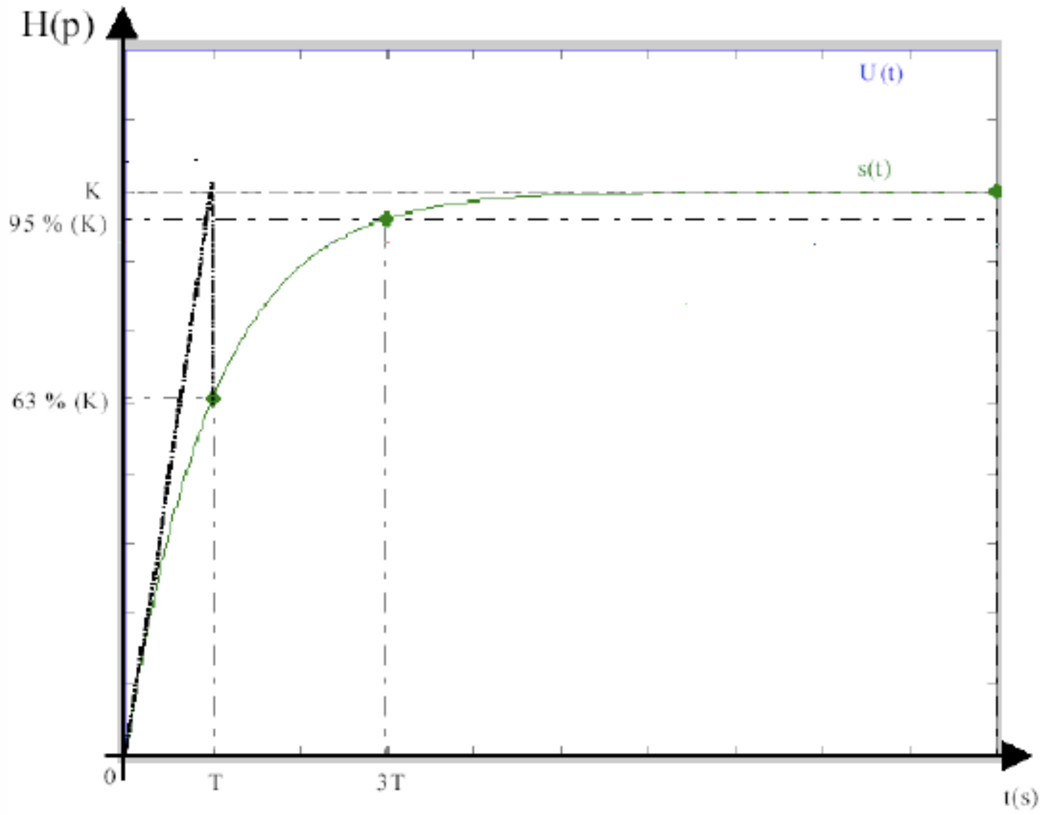
1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➢ Réponse à un échelon (réponse indicielle) :

Tangente en (0, 0) :

$$y = \frac{K}{T}x$$



1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➢ <u>Réponse à un échelon</u> (réponse indicielle) :

- Temps de montée :

Le temps de montée est entre 10 et 90 % de la valeur maximale.

$$\begin{cases} s(t_1) = 0.1K = K(1 - e^{-\frac{t_1}{T}}) \\ s(t_2) = 0.9K = K(1 - e^{-\frac{t_2}{T}}) \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = -T \ln 0.9 \\ t_2 = -T \ln 0.1 \end{cases}$$

$$\boxed{t_m = t_2 - t_1 = 2.2\,T}$$

1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➤ **Réponse à une rampe :**

- En entrée, nous appliquons une rampe : $E(p) = 1/p^2$
  - On a donc :

$$\boxed{S(p) = \frac{K}{p^2(1+Tp)} \quad d'où \quad s(t) = K(t - T + Te^{-t/T})}$$

$$t = 0 \quad s(0) = 0$$

$$t = T \quad s(T) = KTe^{-1} = 0.368KT$$

  - Et : $s'(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$
  - Tangente horizontale en t=0
  - Asymptote :

$$y(t) = K(t - T)$$

1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➢ <u>Réponse à une rampe</u> :

- Calcul de l'erreur de traînage (différence entre la sortie et l'entrée) :

$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} t - K(t - T + T e^{-t/T})$$
$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} t(1-K) + KT$$

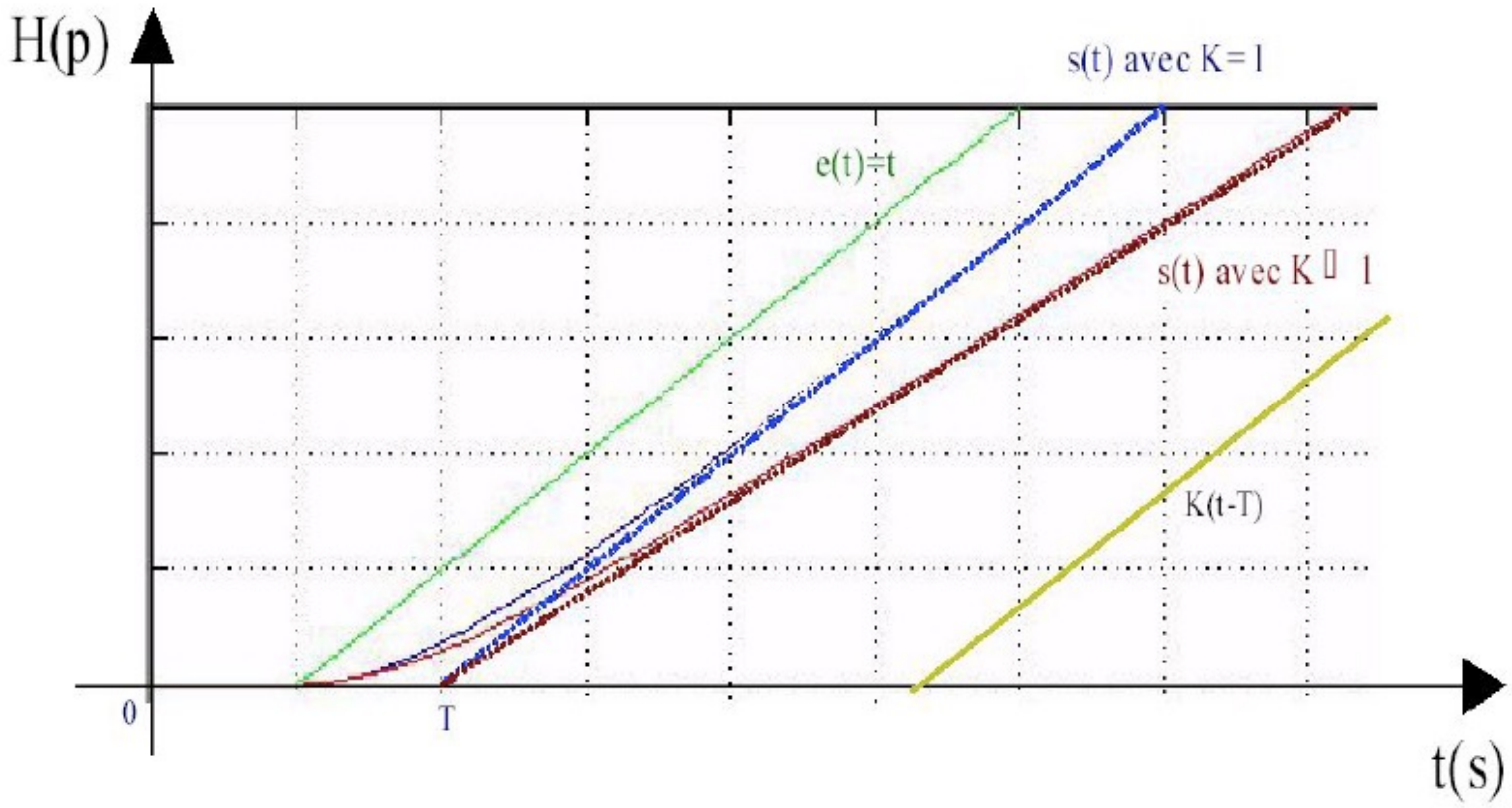
d'où $K=1 \Rightarrow \varepsilon = KT$

sinon, il y a divergence

1. Systèmes du 1er ordre

1.1. Réponse temporelle d'un système du 1er Ordre

➢ Réponse à une rampe :



Etude des systèmes linéaires du 1^{er} et du 2^{nd} Ordre

1. Systèmes du 1^{er} ordre

Un système du 1^{er} ordre est un système régis par une équations différentielles de **degré 1**.
Leur fonction de transfert possède donc au maximum **un zéro** et **un pôle**.