

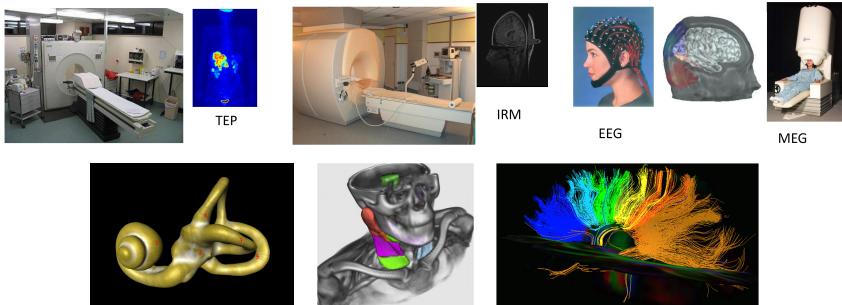
Imagerie Médicale

Partie 4: Recalage

partie 1/2

Pierre Maurel

pierre.maurel@irisa.fr

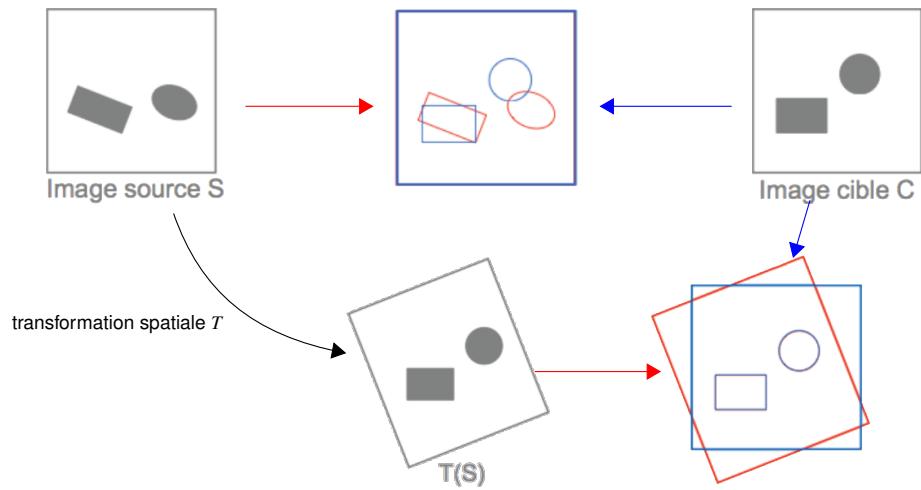


1 / 104

Recalage ?

RECALAGE

Deux Images S et C : on cherche T tel que $T(S)$ ressemble à C



3 / 104

Recalage ?

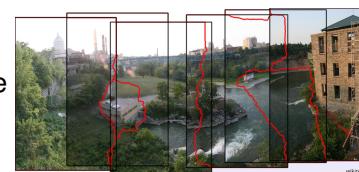
Recalage

Mise en correspondance de deux images
(supposées représenter le même objet)

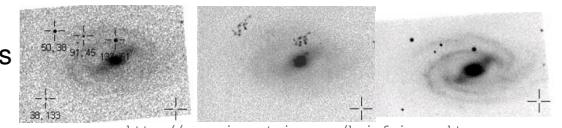
2 / 104

Recalage : Applications

- Outil fondamental en analyse d'images médicales, mais pas uniquement



- création de panoramique



- images astronomiques



4 / 104

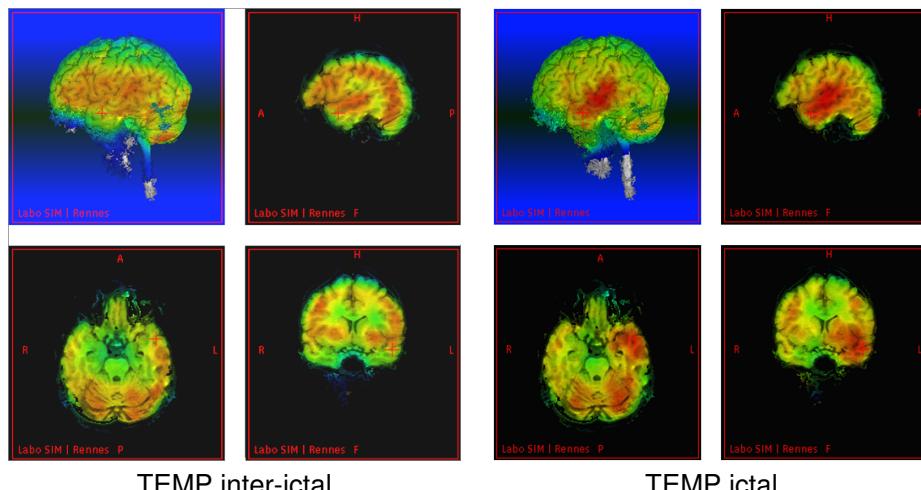
Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

- Sélection du patient
- Sémiologie des crises et relation à l'anatomie
- Examens "statiques" (recherche d'une lésion)
- Examens "dynamiques" (caractère épileptogène)
- intercritique : imagerie fonctionnelle, Implantation d'électrodes
- critique : enregistrement et marquage des crises
- Planning pré-chirurgical
- Cortectomie (chirurgie)

6 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Examen "dynamique"

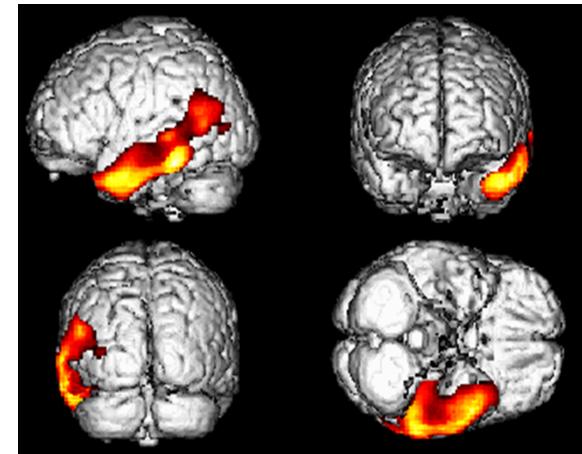


(Source : [A. Biraben et al., Labo IDM, CHU Rennes])

8 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Examen métabolique (PET)



Hypométabolisme temporal étendu

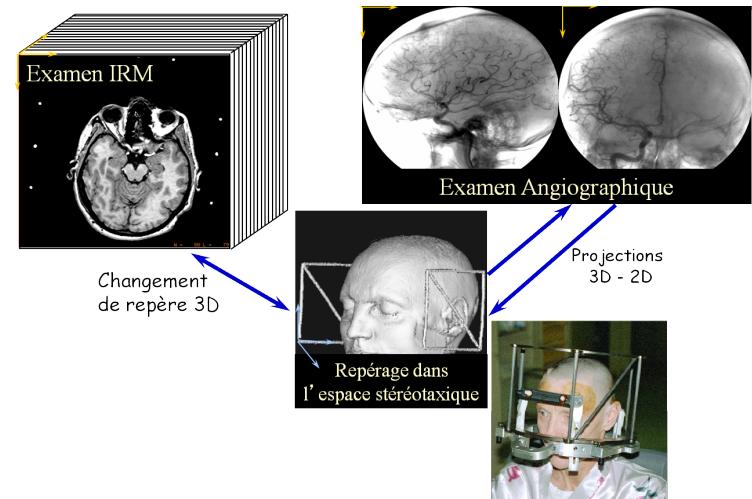
(Source : [A. Biraben et al., Labo IDM, CHU Rennes])

7 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

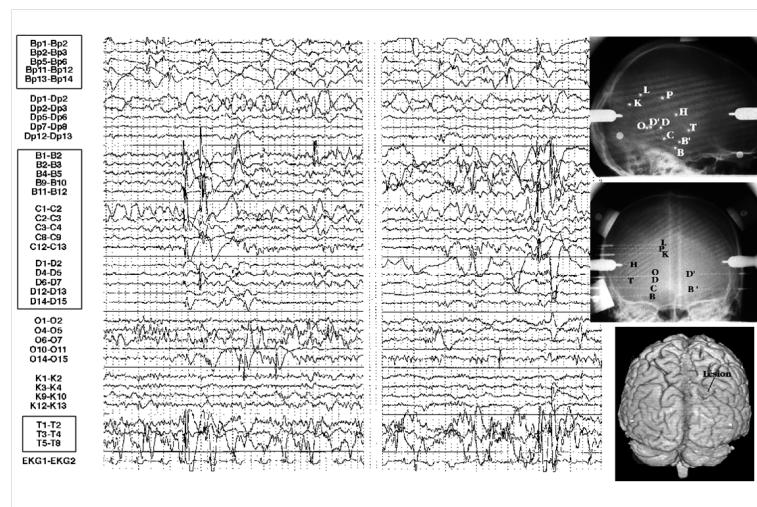
Implantation des électrodes (SEEG) en condition stéréotaxique



9 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

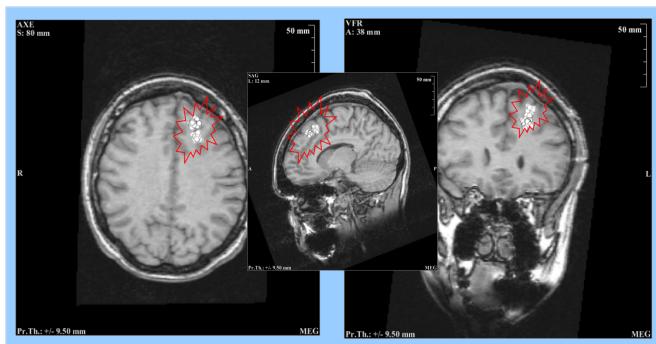
La SEEG : enregistrement des crises



10 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

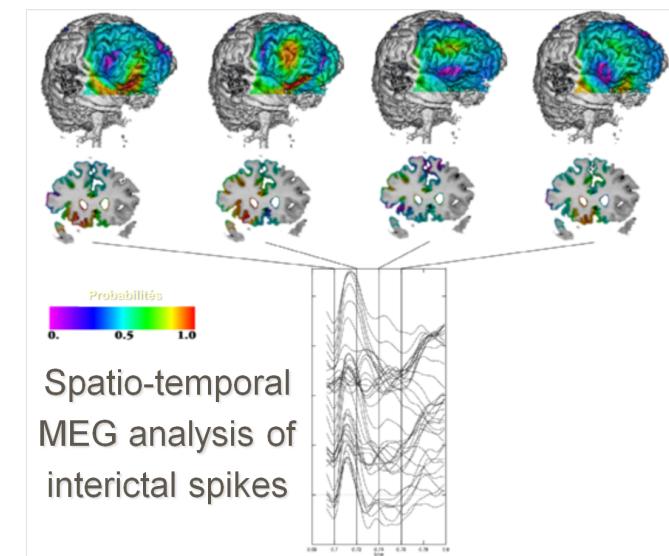
MEG : Analyse spatio-temporel interictal



12 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

MEG : Analyse spatio-temporel interictal

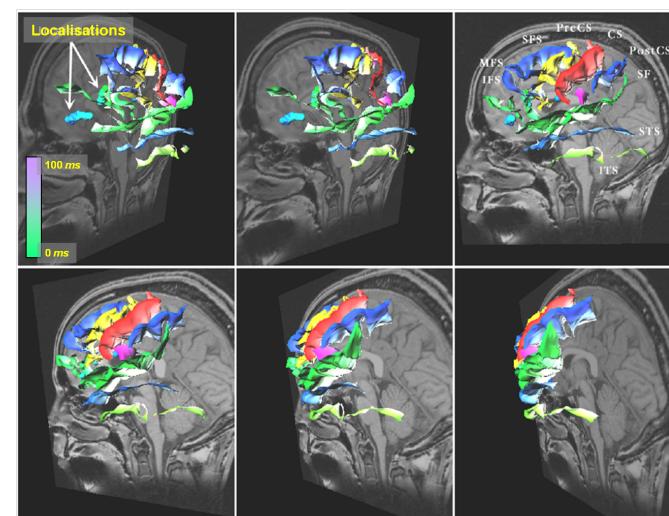


[Source : D.P. Schwartz, et al., Neuroimage :Functional Mapping of the Human Brain, 7(4) :S466, 1998]

11 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

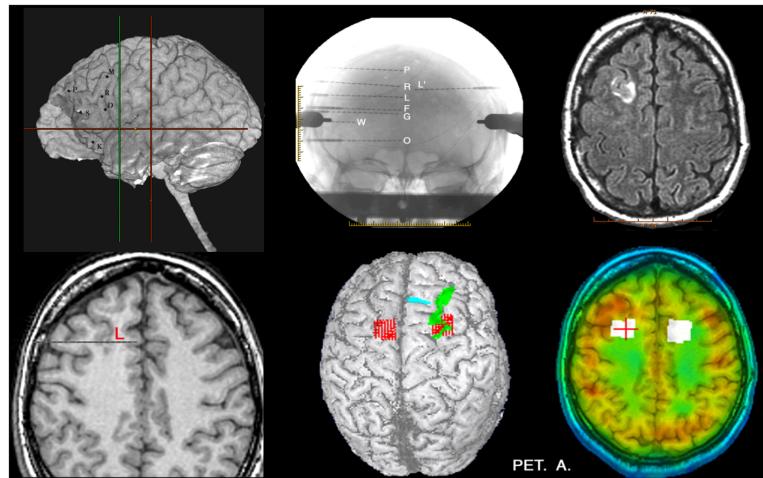
MEG : Analyse spatio-temporel interictal



13 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

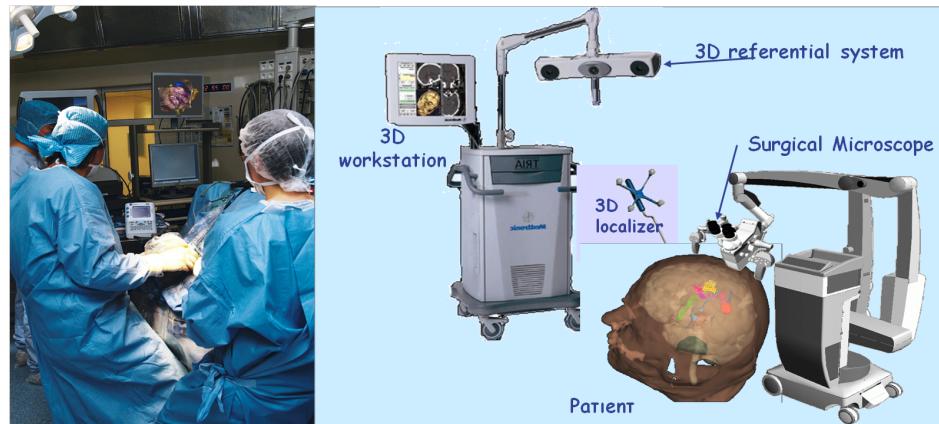
planning pré-opératoire



14 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

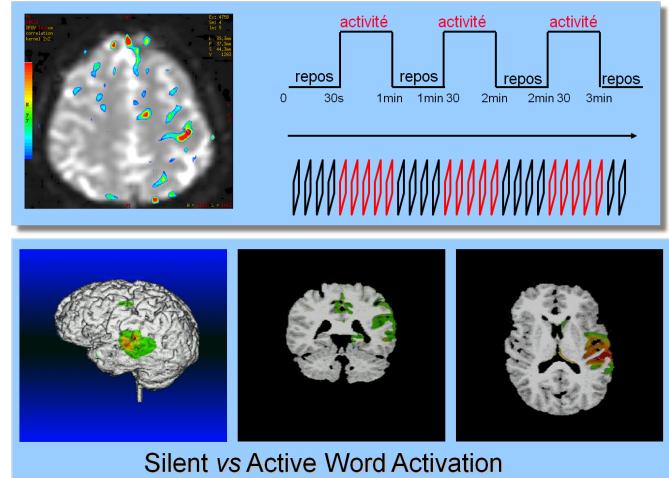
Procédure Interventionnelle en Neurochirurgie (Neuronavigation)



16 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Délimitation de zones fonctionnelles en IRM fonctionnelle (IRMf)



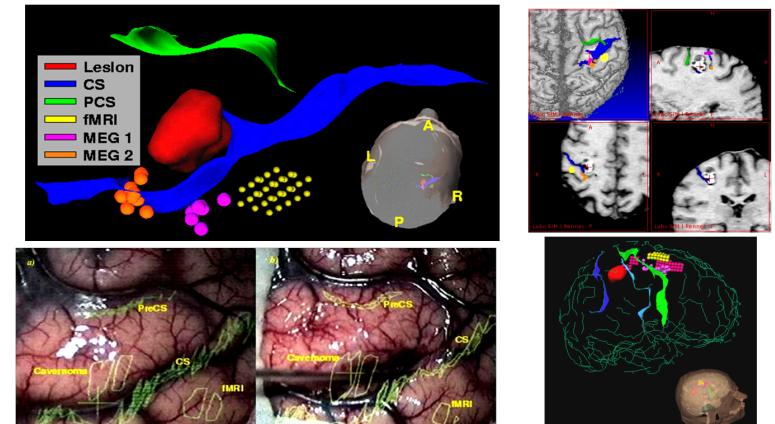
15 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

Procédure Interventionnelle en Neurochirurgie (Neuronavigation)

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

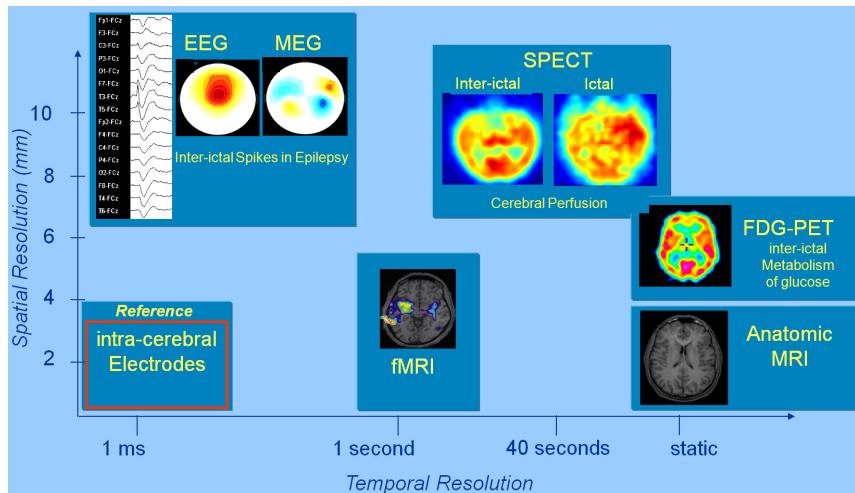
Procédure Interventionnelle en Neurochirurgie (Neuronavigation)



17 / 104

Illustration : la chirurgie de l'épilepsie

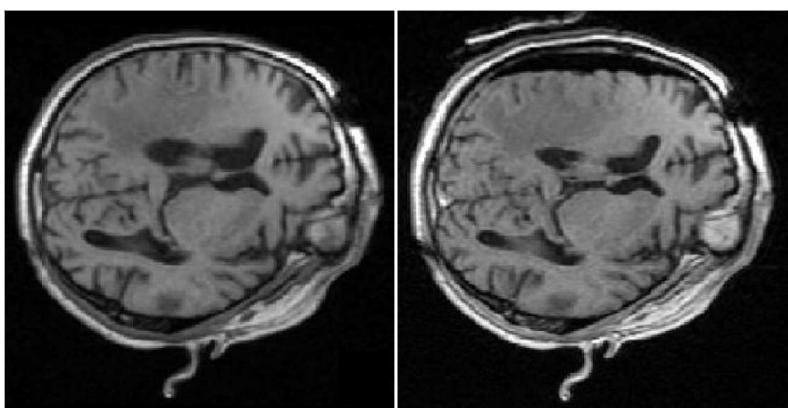
Bilan des différentes modalités impliquées dans le processus



18 / 104

Recalage en Imagerie Médicale

Évolution temporelle ("Brain Shift")



Preoperative MRI

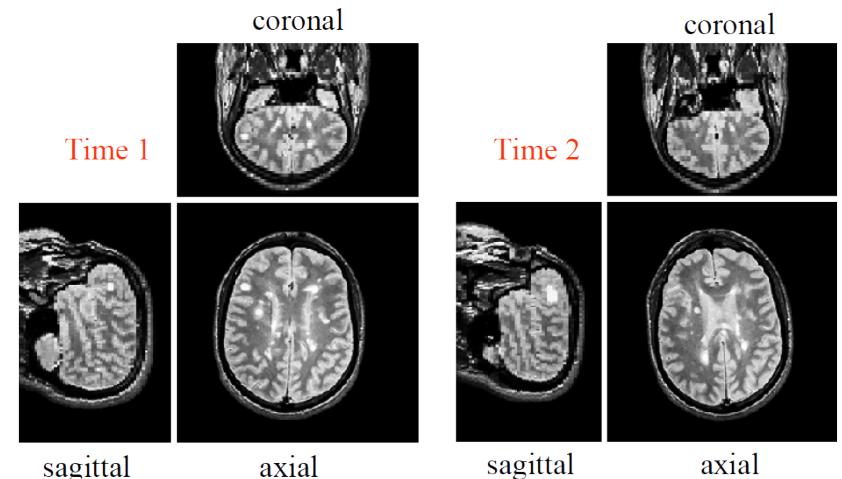
Intraoperative MRI

Olivier Clatz, Hervé Delingette, Ion-Florin Talos, Alexandra J. Golby, Ron Kikinis, Ferenc A. Jolesz, Nicholas Ayache, and Simon K. Warfield. Robust Non-Rigid Registration to Capture Brain Shift from Intra-Operative MRI. IEEE Transactions on Medical Imaging, 24(11):1417-1427, Nov. 2005.

21 / 104

Recalage en Imagerie Médicale

Évolution temporelle

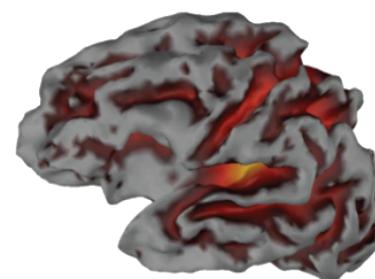


David Rey, Gérard Subsol, Hervé Delingette, and Nicholas Ayache. Automatic Detection and Segmentation of Evolving Processes in 3D Medical Images: Application to Multiple Sclerosis. Medical Image Analysis, 6(2):163-179, June 2002.

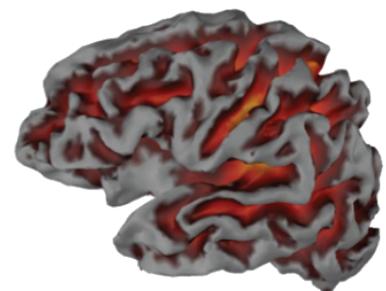
20 / 104

Recalage en Imagerie Médicale

Évolution temporelle, étude longitudinale



Naissance



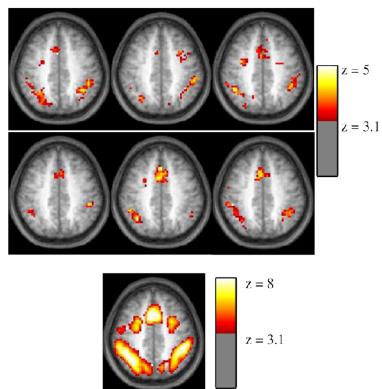
Naissance + 4 semaines

J. Lefèvre et al, IPMI, 2009

22 / 104

Recalage en Imagerie Médicale

Comparaison entre différents sujets

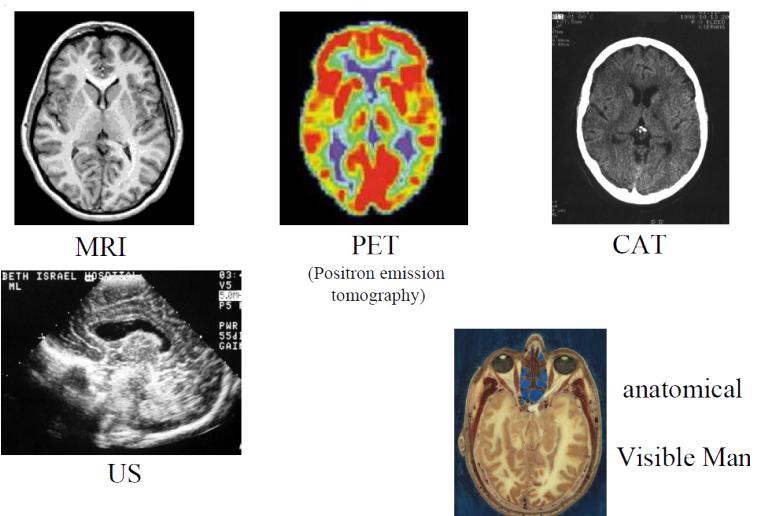


B. Thirion, P. Pinel, et al. Analysis of a large fMRI cohort : Statistical and methodological issues for group analyses. Neuroimage, 35(1) :105-120, 2007.

23 / 104

Recalage en Imagerie Médicale

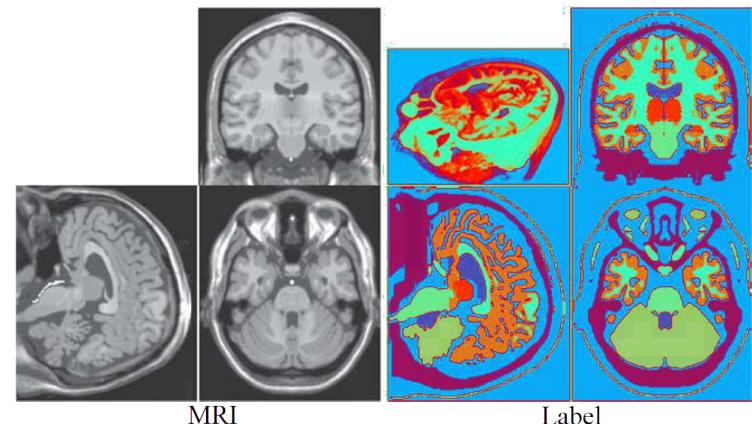
Fusion de modalités



25 / 104

Recalage en Imagerie Médicale

Superposition sur un atlas



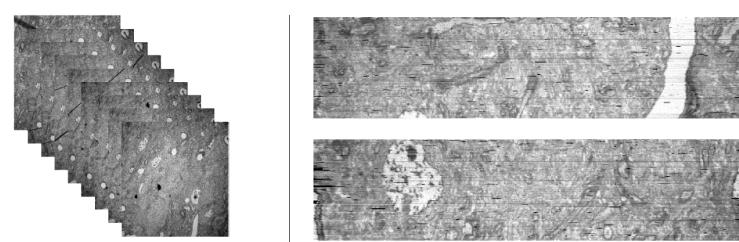
Pierre-Yves Bondinu, Grégoire Malandain, Stéphane Chanalet, Pierre-Yves Marcy, Jean-Louis Habrand, François Fauchon, Philippe Paquis, Adel Coudri, Olivier Commowick, Isabelle Rutten, and Nicholas Ayache. Atlas-based automatic segmentation of MR images: validation study on the brainstem in radiotherapy context. Int J Radiat Oncol Biol Phys, 61(1):289-98, January 2005.

24 / 104

Recalage en Imagerie Médicale

Reconstruction d'un volume 3D

- Séries de coupes 2D contiguës (microscope électronique : épaisseur $\approx 60 \text{ nm}$)
- But : construire un volume 3D



Series of successive 2D slices

Orthogonal views of the reconstructed volume using affine transformations

J. Dauguet, A. Dubois, A.-S. Herard, L. Besret, G. Bonvento, P. Hantraye and T. Delzescaux. Towards a Routine Analysis of Anatomical and Functional Post Mortem Slices in 3 Dimensions. XXIIInd International Symposium on Cerebral Blood Flow, Metabolism, and Function. Amsterdam, 2005.

26 / 104

Principe

Approche générale

L'approche générale du recalage consiste à **optimiser** un **critère de similarité** entre les deux images, ce critère étant fonction de la **transformation** appliquée.

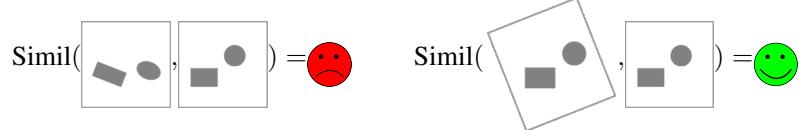
3 choix importants :

- ① Critère de similarité
- ② Transformations considérées
- ③ Méthode d'optimisation

28 / 104

Principe

- Supposons que l'on se donne un **critère de similarité**, $\text{Simil}(I, J)$ qui mesure la "ressemblance" entre deux images I et J



- On choisit également une "famille" de transformations \mathcal{F}
- Le problème du recalage peut alors s'écrire comme :

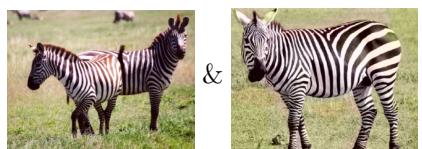
$$\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$$

"On cherche la transformation (dans \mathcal{F}) telle que le résultat de celle-ci appliquée à l'image source I ressemble le plus possible à l'image cible J "

29 / 104

Critères de Similarité

- comparaison des histogrammes de I et J ?



- **Histogramme conjoint :**



$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card}\{(x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j\}$$

31 / 104

Histogramme conjoint

$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card}\{(x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j\}$$

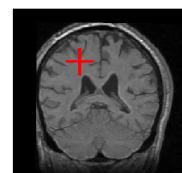


Image 2

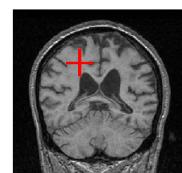
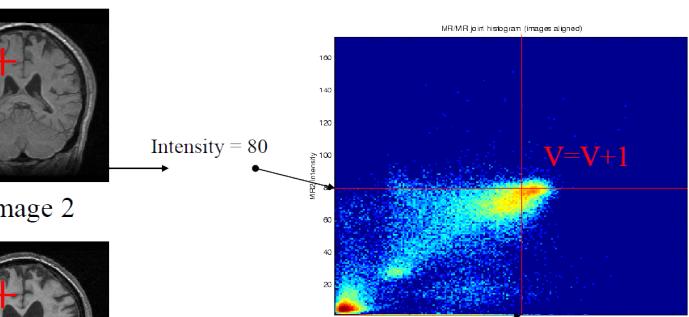


Image 1



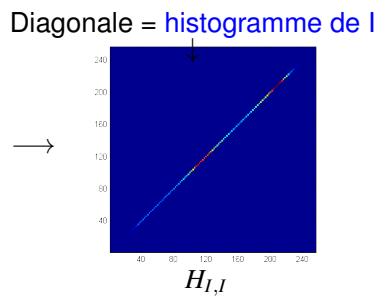
32 / 104

Histogramme conjoint

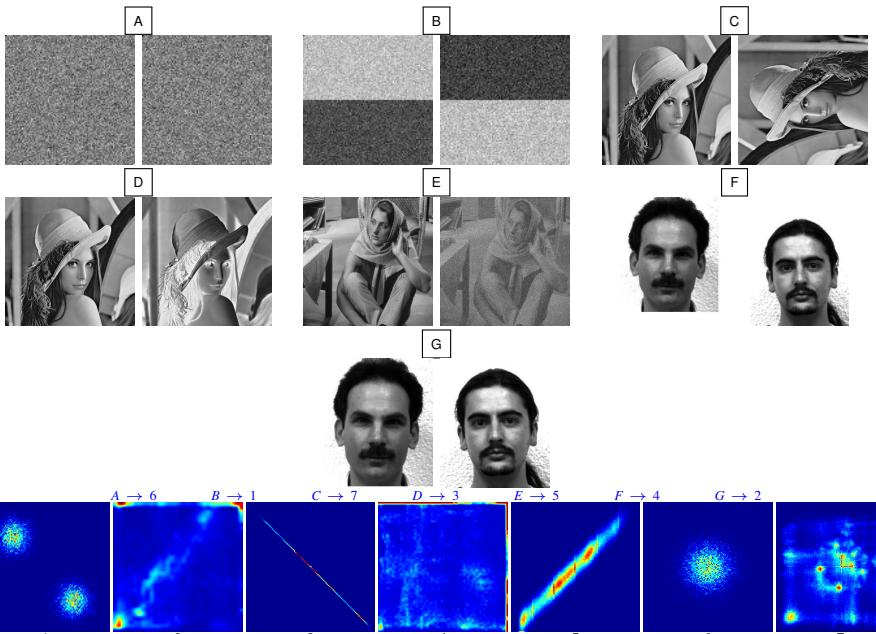
$$H_{I,J}(i,j) = \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

si I et J sont de taille $n \times p$ à valeurs dans $\{1, \dots, 256\}$:

- Taille de $H_{I,J}$? $\rightarrow 256 \times 256$
- $\sum_{i=1}^{256} \sum_{j=1}^{256} H_{I,J}(i,j) = ? \rightarrow n * p$



33 / 104



34 / 104

Histogramme conjoint

- Construction : Comme pour un histogramme classique : discréttisation ?
 - images encodées sur 1 octet : à valeurs dans $\{1, \dots, 256\} \rightarrow \text{OK}$
 - images encodées sur plusieurs octets : on regroupe les valeurs en divisant en intervalles
 - définition continue (somme \rightarrow intégrale) : fenêtrage de Parzen (1973)
- Interprétation statistique
 - Si on divise par $n * p$, nombres de pixels dans l'image, définition alternative :

$$H_{I,J}(i,j) = \frac{1}{n * p} \text{Card} \left\{ (x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j \right\}$$

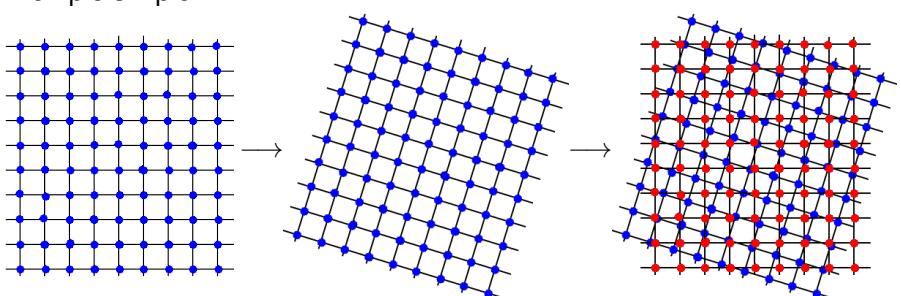
$$\sum_{i,j} H_{I,J}(i,j) = 1$$

- $H_{I,J}(i,j)$ = "probabilité qu'un pixel tiré aléatoirement ait l'intensité i dans l'image I et que son correspondant ait l'intensité j dans l'image J "

35 / 104

Histogramme conjoint et Recalage

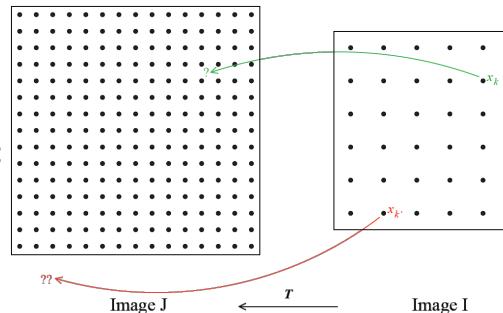
- Recalage : $\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$
- Pour définir $\text{Simil}(T(I), J)$ à partir de la notion d'histogramme conjoint, il faut pouvoir calculer l'histogramme conjoint de $T(I)$ et J
- si $T(i)$ envoie les pixels de I exactement sur les pixels de J , pas de problème. mais peu intéressant car peu de sens physique
- Exemple simple



36 / 104

Histogramme conjoint et Recalage

- Cas général :



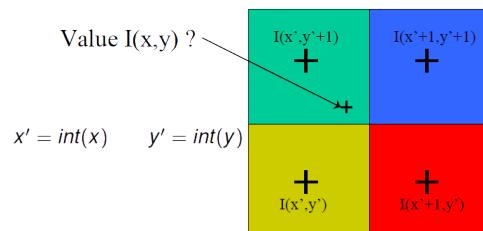
- Deux problèmes :

- un problème d'**extrapolation** pour les points $T(x_k)$ tombant à l'extérieur du domaine délimité par la grille Ω_J
- un problème d'**interpolation** pour les points $T(x_k)$ tombant à l'intérieur

37 / 104

Histogramme conjoint et Recalage

Interpolation



Deux approches "basiques"

- interpolation au plus proche voisin : $I(x,y) = I(\text{round}(x), \text{round}(y))$

- interpolation bi-(tri)-linéaire

The diagram shows a 2x2 pixel block with corners labeled $I(x',y')$, $I(x',y'+1)$, $I(x'+1,y')$, and $I(x'+1,y'+1)$. The central point is $I(x,y)$. The area is divided into four quadrants labeled a, b, c, and d. The formula for $I(x,y)$ is given as:

$$I(x,y) = a(1-b)I(x'+1,y') + (1-a)(1-b)I(x',y') + abI(x'+1,y'+1) + b(1-a)I(x',y'+1)$$

39 / 104

Histogramme conjoint et Recalage

Extrapolation

- Soit on ne prend pas en compte les pixels $T(x_k)$ tombant à l'extérieur du domaine délimité par la grille Ω_J dans le calcul de l'histogramme conjoint
- Soit on prolonge J de manière arbitraire (conditions aux bords)
 - Constante
 - Miroir

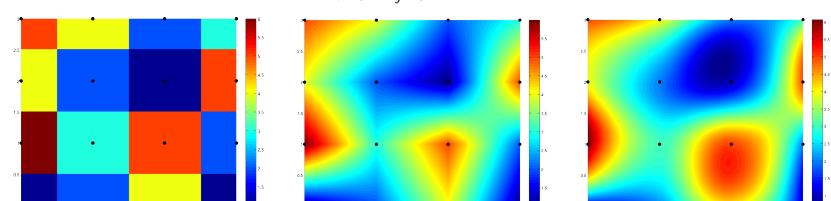
38 / 104

Histogramme conjoint et Recalage

Interpolation (suite)

Approches plus sophistiquées

- On cherche une fonction "simple" qui passe par les différents points connus, et on regarde la valeur de cette fonction au point qui nous intéresse
- fonctions possibles :
 - Bicubique (spline) : $I(x,y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j$



http://en.wikipedia.org/wiki/Bicubic_interpolation

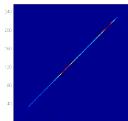
- basée sur $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ \rightarrow Lanczos3

40 / 104

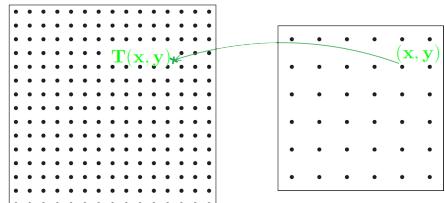
Critère de similarité : Conservation de l'intensité

On note $S(T)$ le critère de similarité associé à une transfo. T ($\text{Simil}(T(I), J)$)

- cas idéal : $T(I) = J$, images identiques



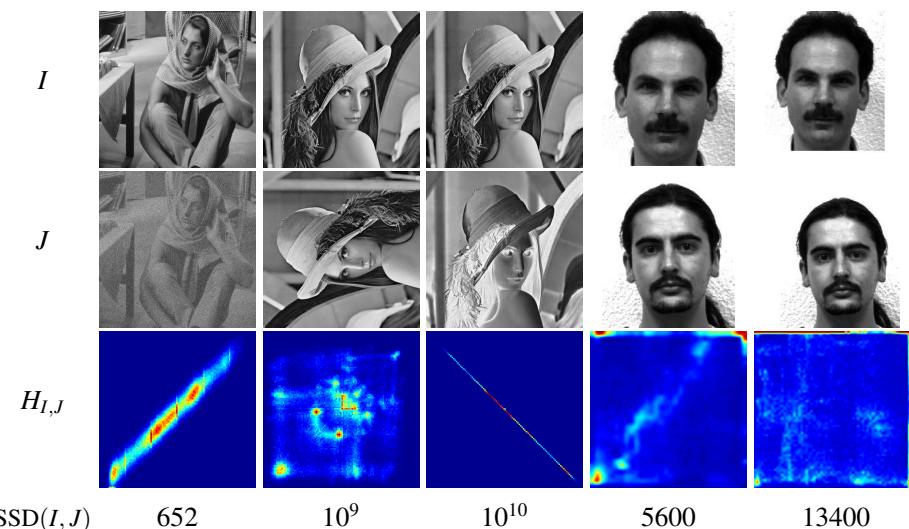
- Comparer $T(I)$ et J revient en fait à comparer les pixels $I(x, y)$ et $\tilde{J}(T(x, y))$



où $\tilde{J}(T(x, y))$ est l'interpolation de J au point $T(x, y)$

42 / 104

Critère de similarité : SSD, exemples



44 / 104

Critère de similarité : Conservation de l'intensité

- Somme des différences au carré (SSD) :

$$SSD(T) = \sum_{x,y} (I(x, y) - \tilde{J}(T(x, y)))^2$$

où (x, y) sont les coordonnées des pixels.

- Autre possibilité : somme des diff. en valeur absolues (SAD) :

$$SAD(T) = \sum_{x,y} |I(x, y) - \tilde{J}(T(x, y))|$$

- SSD(A, B), SSD(A, B), calculables à partir de l'histogramme joint $H_{A,B}$?

$$SSD(A, B) = \sum_{i,j} H_{A,B}(i,j)(i-j)^2 \quad SAD(A, B) = \sum_{i,j} H_{A,B}(i,j)|i-j|$$

où i et j sont les intensités des pixels ($\in [0, 256]$ par exemple).

43 / 104

Critère de similarité : Conservation de l'intensité

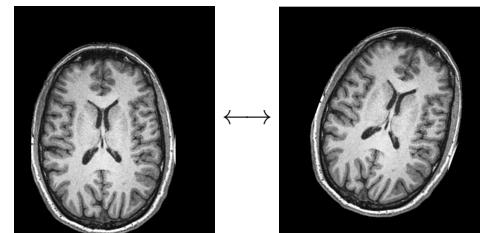
Conservation de l'intensité

Minimiser la somme des différences au carré (SSD) revient donc à supposer que les 2 images ont, approximativement, les mêmes intensités, une fois recalées.

- même chose pour SAD.

- adapté pour **recalage mono-modal intra-patient** :

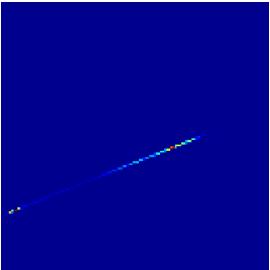
- même patient
- même modalité



45 / 104

Critère de similarité : Dépendance linéaire ou affine

- On ne cherche plus à avoir $T(I) = J$
- mais une relation (affine) de la forme $T(I) = \alpha I + \beta$
- cas $\beta = 0 \rightarrow$ dépendance linéaire
- modélise des contrastes différents entre les images



SSD = 4000

47 / 104

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- si $\rho(I, J)$ proche de 0 ?

$$\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I})(J(x,y) - \bar{J}) \text{ petit (par rapport à } \sqrt{\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x,y) - \bar{J})^2}$$

- "Les pixels où $(I(x,y) - \bar{I})$ et $(J(x,y) - \bar{J})$ sont de même signe (produit > 0) et les pixels où les signes sont opposés (produit < 0) se **compensent**"
- → les intensités des 2 images ne sont pas corrélées linéairement

- $\rho(I, J)$ compris entre -1 et 1 :

- proche de 1 : corrélation positive
- proche de -1 : corrélation négative
- proche de 0 : absence de corrélation linéaire

49 / 104

Critère de similarité : dépendance affine

- Critère adapté : **coefficient de corrélation**

$$\rho(I, J) = \frac{\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I})(J(x,y) - \bar{J})}{\sqrt{\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I})^2} \sqrt{\sum_{x,y} (J(x,y) - \bar{J})^2}}$$

avec $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{x,y} I(x,y)$, valeur moyenne de I (idem pour \bar{J})

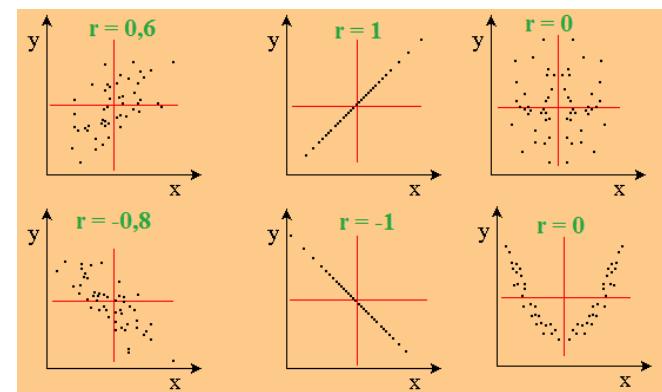
- $\rho(I, I) = 1$
- $\rho(I, -I) = -1$
- $\rho(I, \alpha I + \beta) = \text{sign}(\alpha)$ (1 ou -1)

48 / 104

Critère de similarité : coefficient de corrélation

- Un outil statistique plus général : permet d'étudier l'intensité de la liaison qui peut exister entre deux (ou plus) variables aléatoires

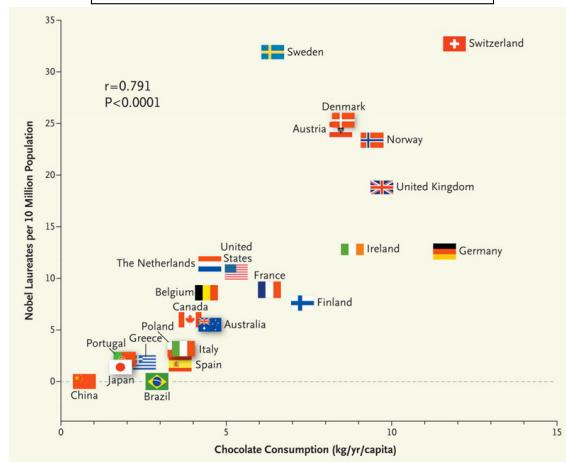
$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$



50 / 104

Critère de similarité : coefficient de corrélation

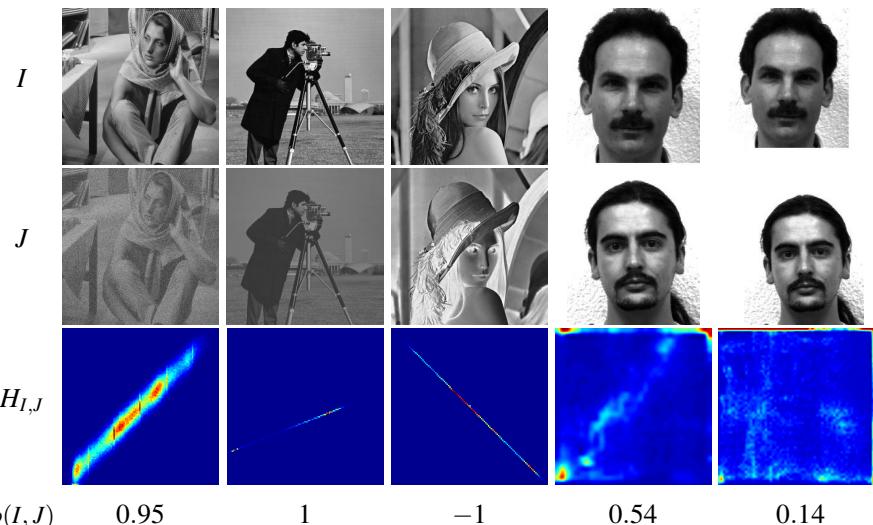
Corrélation \neq lien de causalité *



<http://www.tylervigen.com/spurious-correlations>

*. <http://passeurdesciences.blog.lemonde.fr/2012/11/21/le-chocolat-engendre-t-il-des-tueurs-en-série/>
51 / 104

Coefficient de corrélation : exemples



Critère de similarité : coefficient de corrélation

- Coefficient de corrélation : calculable à partir de l'histogramme joint $H_{I,J}$?
 - n , nombre de pixels dans chaque image
 - $\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} H(i,j) i$ (idem pour \bar{J})
 - $\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I}) (J(x,y) - \bar{J}) = \sum_{i,j} H(i,j) (i - \bar{I}) (j - \bar{J})$
 - $\sum_{x,y} (I(x,y) - \bar{I})^2 = \sum_{i,j} H_{i,j} i^2 - n \bar{I}^2$ (idem pour J)
 - $\rho(I, J) = \frac{\sum_{i,j} H(i,j) (i - \bar{I}) (j - \bar{J})}{\sqrt{(\sum_{i,j} H_{i,j} i^2 - n \bar{I}^2)(\sum_{i,j} H_{i,j} j^2 - n \bar{J}^2)}}$

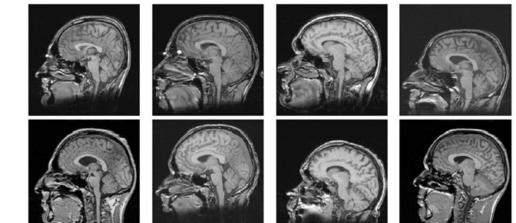
52 / 104

Critère de similarité : Coefficient de corrélation

Coefficient de corrélation

Maximiser la valeur absolue du coefficient de corrélation revient donc à supposer que les intensités des 2 images recalées sont, approximativement, reliées par un changement de contraste affine.

- également adapté pour recalage mono-modal intra-patient
- adapté pour recalage **mono-modal inter-patient** :

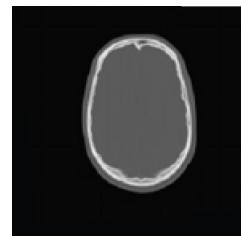


- différents patients
- même modalité

54 / 104

Critère de similarité : dépendance fonctionnelle

- Pour des images de modalités différentes, l'hypothèse de dépendance affine est souvent grossièrement fausse



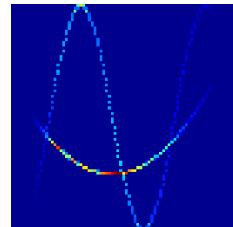
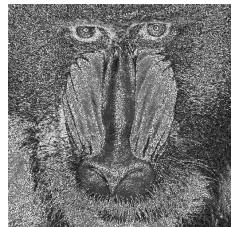
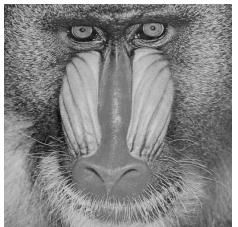
- On peut alors supposer l'existence d'une relation fonctionnelle plus générale (non-linéaire, non-monotone) entre les intensités

56 / 104

Critère de similarité : dépendance statistique

```
I = double(imread('mandrill.png'));
I = I/256;
J = arrayfun(@f,I);

function y = f(x)
    if (rand<.5)
        y = sin(4*pi*x)+.5;
    else
        y = 5*(x-.5).^2;
    end
end
```



I

J

H_{I,J}

SSD	$\rho(I, J)$
78000	0.2

59 / 104

Critère de similarité : dépendance fonctionnelle

- Exemple : une image I à valeur dans $\{0, 256\}$, on définit

$$J(x, y) = (I(x, y) - 128)^2$$



$SSD(I, J) = 85000$

$\rho(I, J) = -0,3$

- critères possibles

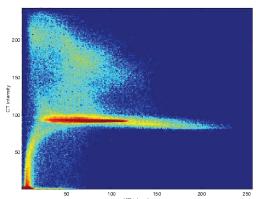
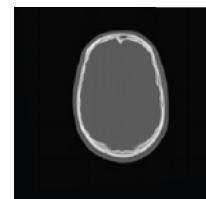
- critère de Woods
- rapport de corrélation

} critères **asymétriques** : on peut avoir $I \approx f(J)$ sans que l'inverse ne soit possible (si f non monotone, cf exple). On doit donc choisir à l'avance dans quel sens la mesure est calculée.

57 / 104

Critère de similarité : dépendance statistique

- dépendance fonctionnelle : souvent pas suffisant



- Exemple

IRM T1

Scanner

Histogramme conjoint

- En IRM T1, le liquide céphalo-rachidien et l'os donnent sensiblement les mêmes réponses alors qu'ils sont nettement différenciés dans le scanner
- À l'inverse les tissus mous (e.g. matière grise, matière blanche) sont généralement différenciés en IRM T1 mais confondus en scanner
- Il n'est donc pas possible de relier fonctionnellement les intensités de ces 2 modalités

60 / 104

Critère de similarité : dépendance statistique

- C'est dans ce cadre que la notion d'histogramme conjoint prend tout sa dimension
- Rappel : Interprétation statistique
 - Si on divise par n , nombres de pixels dans l'image, définition alternative :
- $H_{I,J}(i,j) = \frac{1}{n} \text{Card}\{(x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j\}$
- $H_{I,J}(i,j)$ = "probabilité qu'un pixel tiré aléatoirement ait l'intensité i dans l'image I et que son correspondant ait l'intensité j dans l'image J "
- $H_{I,J}$: densité de probabilité d'un couple de variable aléatoires
- → naturel de prendre une mesure du degré de dépendance statistique entre ces variables comme mesure de similarité entre les images
 - entropie conjointe , 1995
 - coefficient de corrélation entropique , 1998
 - **information mutuelle** , 1995

61 / 104

Critère de similarité : dépendance statistique

- **Information mutuelle** $IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right)$
 - Si les 2 variables sont indépendantes $\Rightarrow p(X, Y) = p(X)p(Y) \Rightarrow IM(X, Y) = 0$
 - On peut montrer la réciproque, donc :
- $IM(X, Y) = 0 \iff X \text{ et } Y \text{ sont indépendants}$
- On peut également montrer que $IM(X, Y) \geq 0, \forall (X, Y)$
- L'information mutuelle d'un couple (X, Y) de variables aléatoires représente leur degré de dépendance au sens probabiliste.
- Une interprétation : "distance" entre $p(X, Y)$ et $p(X)p(Y)$ (divergence de Kullback-Leibler)
- L'information mutuelle sera donc d'autant plus grande que le couple de variables aléatoires X et Y est lié/dépendant

63 / 104

Critère de similarité : dépendance statistique

- La notion de dépendance statistique : la plus générale (hypothèses les plus faibles sur la relation entre intensité)
- On veut tester le degré de dépendance statistique entre l'intensité de l'image I et l'intensité de l'image J : Peut-on dire quelque chose sur les valeurs probables de $J(x, y)$ si l'on connaît $I(x, y)$ (et recip.) ?

Information mutuelle

Soit X et Y deux variables aléatoires, on définit l'information mutuelle de ce couple de v.a. par

$$IM(X, Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \left(\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)} \right)$$

- On a $IM(X, Y) = IM(Y, X)$

62 / 104

Critère de similarité : information mutuelle

- Information mutuelle : calculable directement à partir de l'histogramme conjoint normalisé

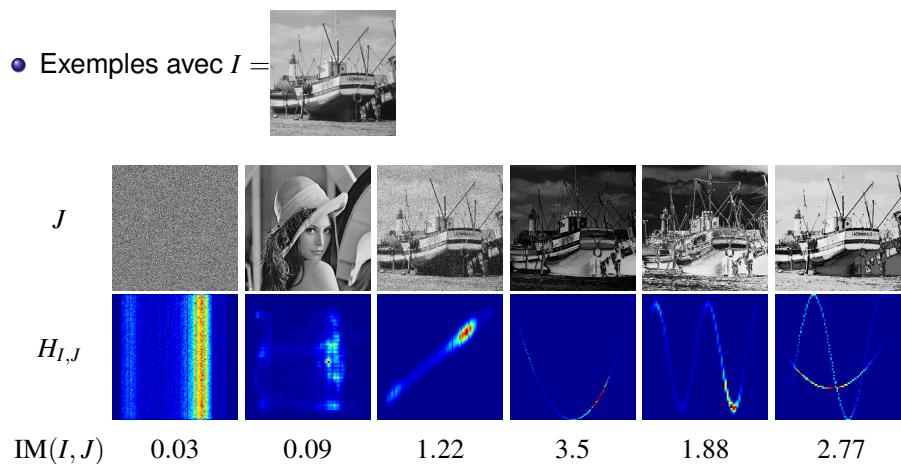
$$p_{i,j} = \frac{1}{n} \text{Card}\{(x,y) \mid I(x,y) = i \text{ et } J(x,y) = j\}$$

$$IM = \sum_{i,j} p_{i,j} \log \frac{p_{i,j}}{p_i p_j} \quad \text{avec} \quad p_i = \sum_j p_{i,j} \text{ et } p_j = \sum_i p_{i,j}$$

64 / 104

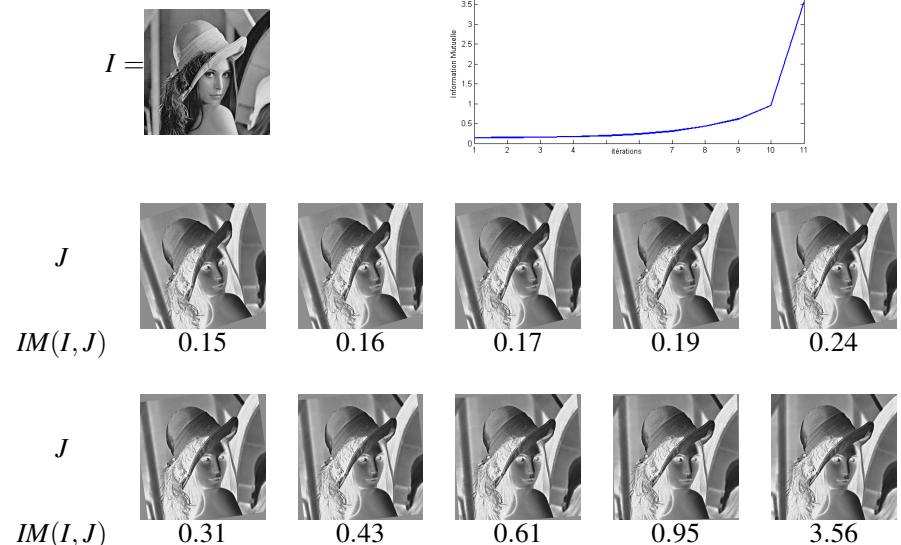
Critère de similarité : information mutuelle

- Exemples avec $I =$



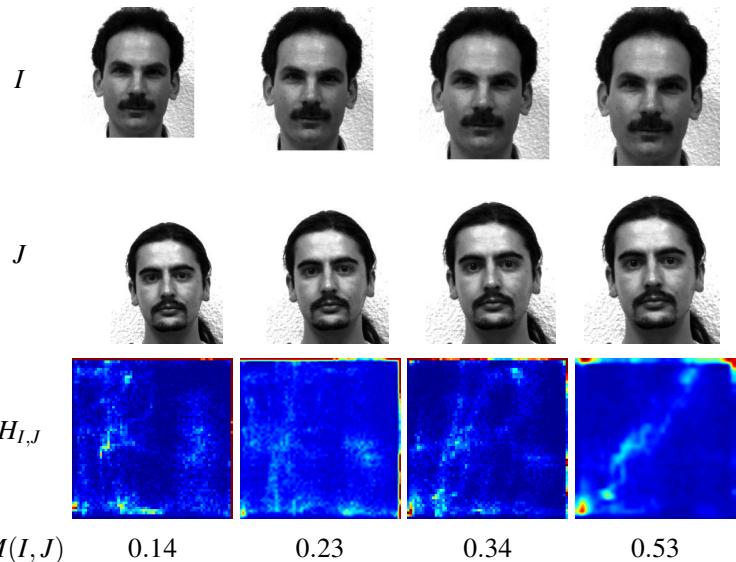
65 / 104

Critère de similarité : information mutuelle



67 / 104

Critère de similarité : information mutuelle



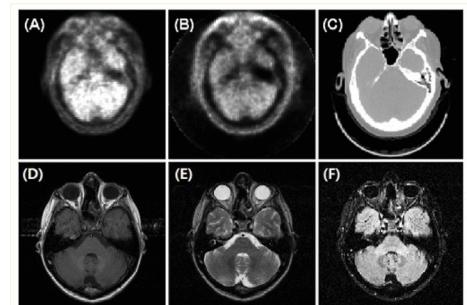
66 / 104

Critère de similarité : dépendance statistique

Dépendance statistique

Maximiser l'information mutuelle revient donc à supposer que les intensités des 2 images recalées sont dépendantes (du point de vue statistique)

- adapté pour recalage multi-modal :



PET with (a) and without (b) attenuation correction, CT (c) and MRI : T1 (d) T2 (e) and FLAIR (f).

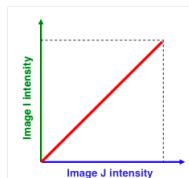
- dépendances modalités

68 / 104

Critère de similarité : Récapitulatif

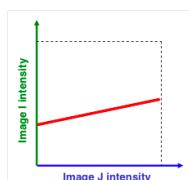
- conservation des intensités :

- SSD** (à minimiser)
- adapté pour recalage mono-modal intra-patient



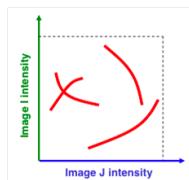
- dépendance affine :

- coefficient de corrélation** (à maximiser)
- adapté pour recalage mono-modal intra- et inter-patient



- dépendance statistique :

- information mutuelle** (à maximiser)
- adapté pour recalage multi-modal (CT/PET, CT/IRM, ...)



69 / 104

Transformations rigides

- Conservation des distances, des orientations, angles, lignes :

- Translation
- Rotation

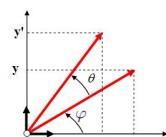


- Nombre de paramètres en 2D : 3 (1 pour angle de rotation, 2 pour translation)

$$T(\mathbf{x}) = R\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

- écriture matricielle en 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$



74 / 104

Transformations

- Rappel : le problème du recalage

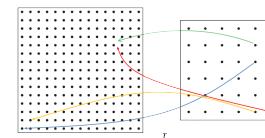
$$\arg \min_{T \in \mathcal{F}} \text{Simil}(T(I), J) = ?$$

- On a vu différentes possibilités pour Simil (SSD, ρ , IM, ...)

- On veut que T soit uniquement une transformation spatiale :

$$T : (x, y) \in \Omega_I \mapsto (a, b) \in \Omega_J \quad (\text{ne modifie pas les intensités})$$

- Si on n'impose aucune contrainte sur T , problème :



Pas de sens physique !

- On veut donc restreindre le type de transformation cherchée

71 / 104

Transformations rigides

- réécriture en **coordonnées homogènes** :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & p \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- en 2D : 3 paramètres, répartis dans 6 éléments de la matrice.

- si on veut qu'une matrice 3×3 représente (en coord. homog.) une transformation rigide en 2D, il faut

- les 2 premiers éléments de la 3ème colonne : libres, quelconques
- Les éléments de la matrice 2×2 en haut à gauche doivent pouvoir être obtenus par un angle θ et les formules adéquates

- que penser de $\begin{bmatrix} a & -b & p \\ b & a & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

représente transfo. rigide $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

75 / 104

Transformations rigides

En 3D : 6 param. (3 angles de rotation, 3 translation)

- Translation : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

- Rotation par rapport à l'axe des x : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

- Rotation par rapport à l'axe des y : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega) & 0 & -\sin(\omega) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\omega) & 0 & \cos(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

- Rotation par rapport à l'axe des z : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

76 / 104

Transformations rigides

Décomposition en valeurs singulières (SVD) :

- "généralisation" de la diagonalisation de matrices carrées

Théorème

Soit M une matrice $m \times n$, il existe une factorisation de la forme :

$$M = U \Sigma V^*$$

avec

- U une matrice unitaire $m \times m$
- Σ une matrice $m \times n$ "diagonale"
- V^* est la matrice transposée (ou transconjuguée) à V , matrice unitaire $n \times n$.

On appelle cette factorisation la décomposition en valeurs singulières de M .

- U et V matrices unitaires : $U^* U = U U^* = \text{Id} \Rightarrow U$ est une matrice de rotation

78 / 104

Transformations rigides

Exemple de transformation rigide 3D

$$T(p, q, r) * R_z(\phi) * R_y(\omega) * R_x(\theta) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \omega & \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & p \\ -\sin \phi \cos \omega & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & q \\ \sin \omega & -\cos \omega \sin \theta & -\cos \omega \cos \theta & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Donc pour une matrice 4×4 de la forme : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pas facile de dire s'il s'agit de la matrice d'une transfo. rigide ...

77 / 104

Transformations rigides

Décomposition en valeurs singulières (SVD) :

- Soit M une matrice 4×4 de la forme : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- on veut savoir s'il s'agit de la matrice d'une transfo. rigide

- on décompose $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = U S V^*$ avec $S = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{bmatrix}$

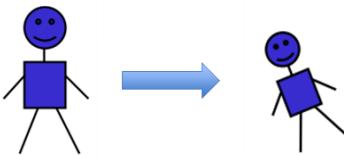
- alors S (et donc M) correspond à une transfo. rigide s.s.i. :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

79 / 104

Similitudes

- Conservation du rapport des distances, des orientations, angles, lignes
- On ajoute 1 paramètre : "scaling", homothétie $T(\mathbf{x}) = sR\mathbf{x} + \mathbf{t}$



- matrice d'homothétie : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

81 / 104

Similitudes

- comme précédemment, étant donné une matrice

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & q \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la transformation correspondante est-elle une similitude ?

- SVD : la sous-matrice haut-gauche (3×3) = $U S V^*$ et M correspond à une similitude s.s.i. :

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix}$$

82 / 104

Transformations affines

- conserve les lignes et le parallélisme

$$T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{t} \quad \text{avec } B \text{ une matrice } 3 \times 3 \text{ quelconque}$$



- nb de paramètres ? $\rightarrow 12$ ($B : 9$, $t : 3$)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La décomposition SVD peut servir à décomposer une transformation affine en une séquence contenant un "rescaling" le long d'axes particuliers suivi d'une transformation rigide du résultat.

84 / 104

Transformations projectives

- La plus générale des transformations linéaires

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & p \\ e_{21} & e_{22} & q \\ f & g & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

A diagram illustrating a projective transformation. It shows a rectangular grid on the left. A blue arrow points to the right, where the grid appears distorted and projected onto a triangular plane, illustrating how parallel lines can converge or intersect.

- les lignes restent des lignes, mais des lignes qui étaient parallèles peuvent s'intersecter après transformation
- typiquement : cas où des images 3D sont recalées avec des images 2D acquises au moyen d'une caméra (e.g. images vidéo ou images radiologiques)
- différents modèles de caméra (e.g. modèle à sténopé, "pinhole model")

86 / 104

Transformations linéaires : récapitulatif

- Toutes les transformations précédentes sont linéaires :

- = polynômes de degré 1
- = peuvent s'écrire sous forme de matrice

- souvent qualifiées de "globales" :

- même formule en tout point
- pas de variation de volume autorisée ou alors variations constantes dans l'espace

87 / 104

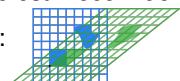
Transformations linéaires : récapitulatif

- Transformations rigides :

- OK pour compenser la **différence de positionnement d'un patient** par rapport aux capteurs en négligeant d'éventuelles déformations des tissus imaginés ou de distorsions géométriques à l'acquisition
- intra-sujet**, plutôt mono-modalité

- Similitudes et transformations affines :

- utile lorsque la **Résolution spatiale** de l'image source est méconnue. Plus généralement : autorisent des effets de transvection :
- intra-sujet**, plutôt multi-modalité



- transformations projectives (en IM) :

- plus spécifique, **recalages 3D/2D**, par exemple le recalage de radiographies sur des données Scanner X ou IRM

89 / 104

Transformations linéaires : récapitulatif

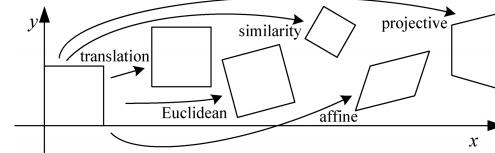


Fig. 2.2 Basic set of 2D planar transformations.

Table 2.1 Hierarchy of 2D coordinate transformations. The 2×3 matrices are extended with a third $[0^T \ 1]$ row to form a full 3×3 matrix for homogeneous coordinate transformations.

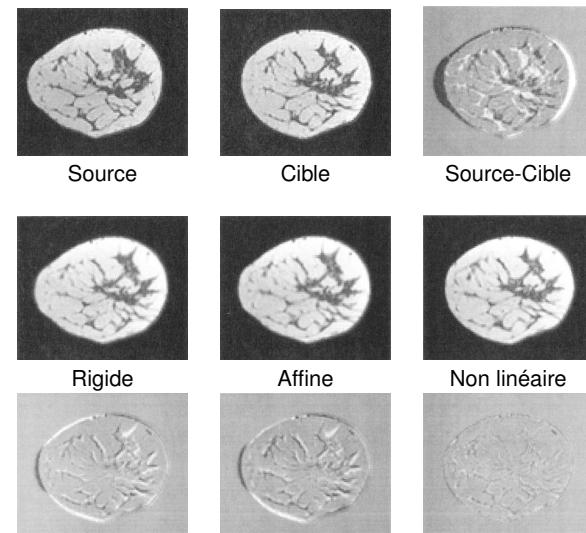
Name	Matrix	Number of d.o.f.	Preserves	Icon
Translation	$[I t]_{2 \times 3}$	2	Orientation +...	
Rigid (Euclidean)	$[R t]_{2 \times 3}$	3	Lengths +...	
Similarity	$[sR t]_{2 \times 3}$	4	Angles +...	
Affine	$[A]_{2 \times 3}$	6	Parallelism +...	
Projective	$[H]_{3 \times 3}$	8	Straight lines	

Richard Szeliski, 2006, "Image Alignment and Stitching : A Tutorial"

88 / 104

Transformations non linéaires : pourquoi ?

exemple : recalage inter-patient de mammographies en IRM



91 / 104

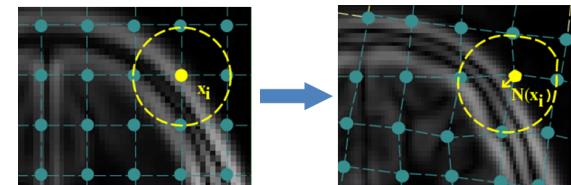
Transformations non linéaires : pourquoi ?

- Transformations linéaires : ne permettent pas de modéliser convenablement les déformations complexes d'un ensemble de tissus, ou les distorsions géométriques inhérentes à certaines modalités d'acquisition
- deux catégories de transformations non-linéaires
 - Transformations locales paramétriques
 - Transformations locales non-paramétriques (transformations denses)

92 / 104

Transformations locales paramétriques

- $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t} + \sum_{p=1}^P \mathbf{c}_p G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$
 - les \mathbf{x}_p sont des points de contrôles
 - G : produit tensoriel de fonctions B-splines ou des fonctions à base radiale telle que la fonction "plaqué mince" (thin-plate)
- Principe :
 - Nombre de degrés de liberté contrôlable
 - Transformation définie explicitement sur des points de contrôle
 - Interpolation entre ces points de contrôle



94 / 104

Transformations locales paramétriques

choix des points de contrôle

- 1999, "A non-rigid registration algorithm for dynamic breast MR images" (Hayton et al.) : points de contrôle régulièrement espacés pour évaluer des déformations B-splines

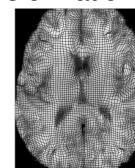


- 1998, "Evaluation of Control Point Selection in Automatic Mutual Information Driven, 3D Warping" (Meyer et al.) : considèrent les points de contrôle comme des paramètres additionnels de la mesure de similarité. Ils les reposent itérativement après les avoir initialisés à la main

95 / 104

Transformations locales non paramétriques, (transformations denses)

- principe : un vecteur déplacement par pixel/voxel $\rightarrow \mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$
- nombre de paramètres ? $3N$ où N est le nombre de pixels/voxels
- transformation quelconque ? \rightarrow on a déjà vu que ce n'était pas satisfaisant
- Important d'assurer une cohérence à la transformation
 - Inversibilité (difféomorphisme)
 - Transformation lisse (régularisation)



97 / 104

Transformations locales non paramétriques

- Comment régulariser ? comme en restauration d'images (cf MATI-EDP) : la théorie de l'approximation de Tikhonov
- on ajoute à la mesure de similarité un terme indépendant des images dont le rôle est de pénaliser les transformations trop irrégulières
- On suppose qu'on a choisi un critère de similarité, S (à minimiser).
- l'énergie à minimiser fait maintenant intervenir deux termes :

$$\hat{T} = \arg \min_T [S(T) + \lambda U(T)]$$

- $\lambda > 0$ contrôle l'influence relative des 2 termes d'énergie
- l'énergie intrinsèque $U(T)$ est souvent appelée "stabilisateur"

98 / 104

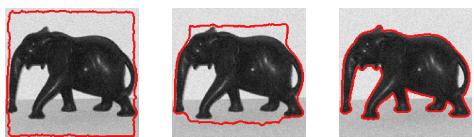
Transformations locales non paramétriques

Lien avec énergies vues l'an dernier

- Restauration d'images



- Segmentation par contours actifs géodésiques



- Flot optique



100 / 104

Transformations locales non paramétriques

Lien avec énergies vues l'an dernier

- Restauration d'images

$$\arg \min_u \underbrace{\int_{\Omega} (f(x) - \mathcal{R} u(x))^2 d\Omega}_{\text{terme de fidélité, attache aux données}} + \lambda \underbrace{\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 d\Omega}_{\text{régularisation}}$$

- Segmentation par contours actifs géodésiques (avec méthode des Level Set par exemple)

$$\arg \min_{\mathcal{C}} = \int_0^1 |\mathcal{C}'(p)|^2 dp + \beta \int_0^1 g_{\mathcal{I}}(\mathcal{C}) dp$$

- Flot optique

$$\arg \min_{\sigma} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \langle \nabla u, \sigma \rangle \right)^2 d\Omega + \lambda \left(\int_{\Omega} \|\nabla \sigma_1\|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \|\nabla \sigma_2\|^2 d\Omega \right)$$

99 / 104

Transformations locales non paramétriques

Choix du stabilisateur $U(T)$

- Régularisation élastique : transformation T est lisse

$$U(T) = \|\nabla T\|^2$$

- Régularisation fluide :

- On part d'une transformation initiale T_0
- à l'étape i on cherche la modification de T_i qui améliore le recalage :

$$\delta T = \arg \min_{\delta T} S(\delta T) + \lambda U(\delta T)$$

- $T_{i+1} = \delta T \circ T_i$
- et on peut donc prendre : $U(\delta T) = \|\nabla \delta T\|^2$

101 / 104

Transformations locales non paramétriques

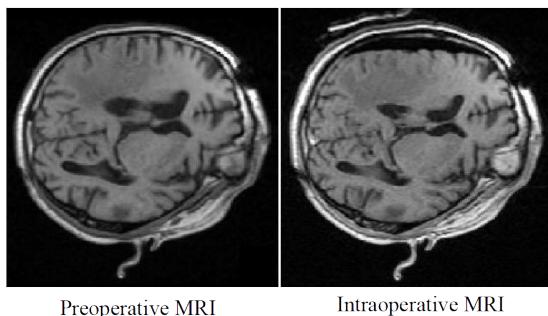
Autre type de contraintes

- Inversibilité
 - Imposer le calcul d'un difféomorphisme
 - Limiter l'amplitude des déplacements
- Symétrie : s'assurer que l'algorithme donne les mêmes résultats si "I est recalé sur J" ou "J est recalé sur I"
 - Ajout d'un terme spécifique à T^{-1}
- Prise en compte de points d'intérêt dans les images
 - Lignes sulcales (sillons), amers connus, ...

102 / 104

Transformations non-linéaires : récapitulatif

- Les transformations non-linéaires vont être utiles pour (suite) :
 - Recalage temporel d'un objet "élastique"/"déformable"



Preoperative MRI

Intraoperative MRI

Olivier Clatz, Hervé Delingette, Ion-Florin Talos, Alexandra J. Golby, Ron Kikinis, Ferenc A. Jolesz, Nicholas Ayache, and Simon K. Warfield. Robust Non-Rigid Registration to Capture Brain Shift from Intra-Operative MRI. IEEE Transactions on Medical Imaging, 24(11):1417-1427, Nov. 2005.

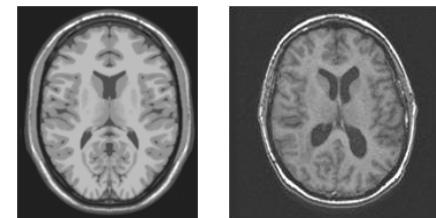
- Suivi longitudinal : sclérose en plaque, tumeur, ...

104 / 104

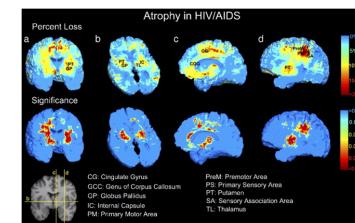
Transformations non-linéaires : récapitulatif

- Les transformations non-linéaires vont être utiles pour :

- Comparaison inter-patient



- Comparaison à un atlas



103 / 104