

# Dychotomie kwantowe a termodynamika układów koherentnych

Kamil Korzekwa

*Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej  
Uniwersytet Jagielloński*



UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE



Fundacja na rzecz  
Nauki Polskiej

**TEAM-NET**

# Spis treści

## I. Zarys

## II. Formalizm

1. Testowanie hipotez kwantowych
2. Dychotomie kwantowe
3. Termodynamika kwantowa
4. Formalne postawienie problemu

## III. Wyniki

1. Optymalne współczynniki konwersji
2. Optymalne protokoły termodynamiczne
3. Koherentny rezonans zasobowy
4. Konwersja splątania dwucząstkowego

## IV. Perspektywy



Patryk Lipka-Bartosik  
*University of Geneva*



Marco Tomamichel  
*National University of Singapore*



Christopher Chubb  
*ETH Zurich*



Joe Renes  
*ETH Zurich*

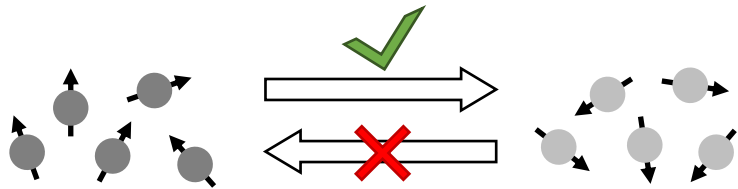
# Zarys

Termodynamika  
kwantowa

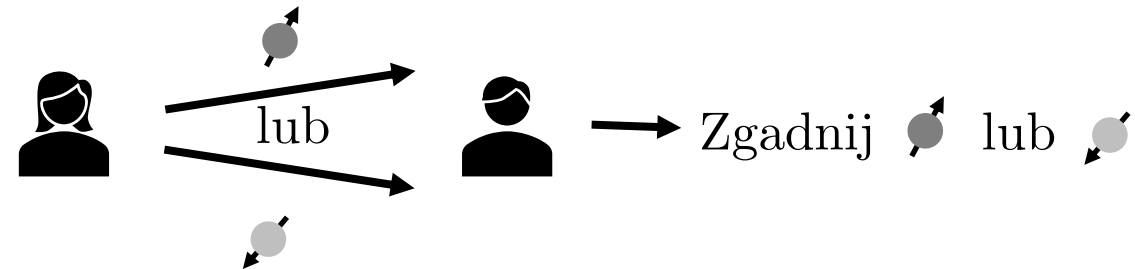
Dychotomie  
kwantowe

Teoria  
kwantowej informacji

**Problem:** transformacje termodynamiczne  
między stanami nierównowagowymi



**Problem:** Testowanie hipotez kwantowych

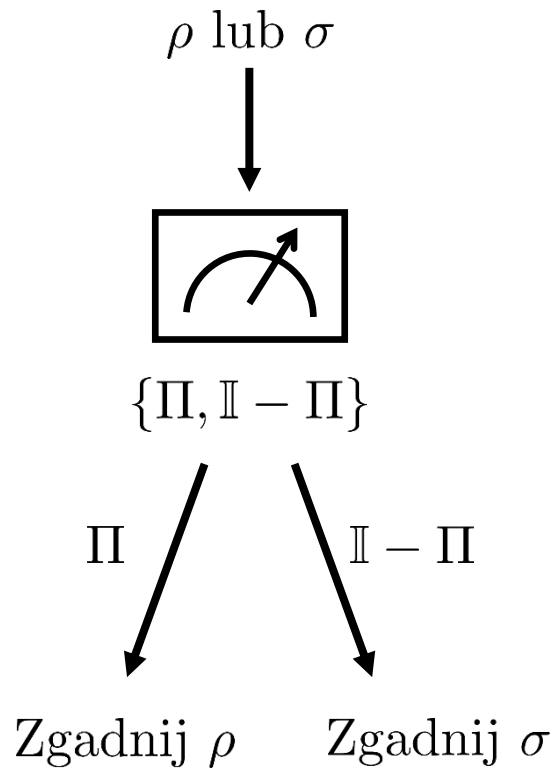


- **Koherentna:** superpozycje stanów własnych energii
- **Asymptotyczna:** liczba układów  $n \rightarrow \infty$

*Quantum dichotomies and coherent thermodynamics beyond first-order asymptotics*

# Formalizm

# Testowanie hipotez kwantowych



		Przygotowano	
		$\rho$	$\sigma$
Zgadłeś	$\rho$	Sukces $p_I = \text{Tr}(\Pi\rho)$	Błąd II rodzaju $\epsilon_{II} = \text{Tr}(\Pi\sigma)$
	$\sigma$	Błąd I rodzaju $\epsilon_I = 1 - \text{Tr}(\Pi\rho)$	Sukces $p_{II} = 1 - \text{Tr}(\Pi\sigma)$

Optymalny błąd II rodzaju przy zadanym błędzie I rodzaju

$$\beta_x(\rho||\sigma) := \min_{\Pi} \{\epsilon_{II} \mid \epsilon_I = x\}$$

# Dychotomie kwantowe

Dychotomia kwantowa:  $(\rho, \sigma)$

Porządek Blackwella:  $(\rho_1, \sigma_1) \succ (\rho_2, \sigma_2) \iff \exists \mathcal{E} : \mathcal{E}(\rho_1) = \rho_2 \text{ and } \mathcal{E}(\sigma_1) = \sigma_2$

Porządek przybliżony:  $(\rho_1, \sigma_1) \succ_{(\epsilon_\rho, \epsilon_\sigma)} (\rho_2, \sigma_2) \iff \exists \mathcal{E} : \delta(\mathcal{E}(\rho_1), \rho_2) \leq \epsilon_\rho \text{ and } \delta(\mathcal{E}(\sigma_1), \sigma_2) \leq \epsilon_\sigma$

## Związek między dychotomiami a testowaniem hipotez

$$[\rho_1, \sigma_1] = [\rho_2, \sigma_2] = 0 \quad *$$

$$\forall_{x \in (\epsilon_\rho, 1)} \beta_x(\rho_1 \| \sigma_1) \leq \beta_{x-\epsilon_\rho}(\rho_2 \| \sigma_2) + \epsilon_\sigma$$

$$\Updownarrow$$

$$(\rho_1, \sigma_1) \succ_{(\epsilon_\rho, \epsilon_\sigma)} (\rho_2, \sigma_2)$$

$$\tilde{\beta}_x(\rho \| \sigma) = \beta_x(\mathcal{D}_\sigma(\rho) \| \sigma)$$

$\mathcal{D}_\sigma$ : defazowanie w bazie własnej  $\sigma$

$$[\rho_1, \sigma_1] \neq 0, \quad [\rho_2, \sigma_2] = 0$$

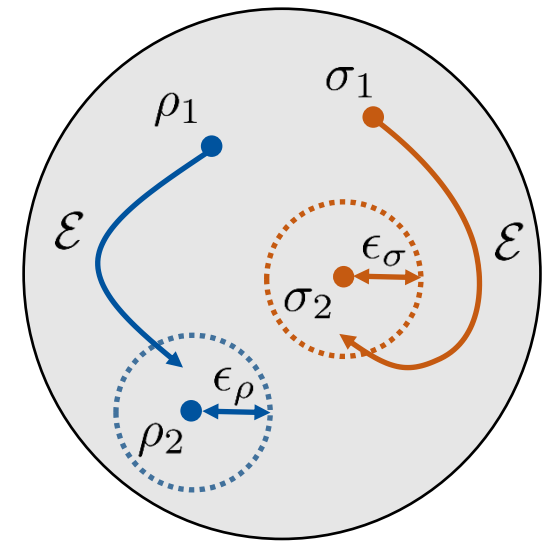
$$\forall_{x \in (\epsilon_\rho, 1)} \beta_x(\rho_1 \| \sigma_1) \leq \beta_{x-\epsilon_\rho}(\rho_2 \| \sigma_2) + \epsilon_\sigma$$

$$\Uparrow$$

$$(\rho_1, \sigma_1) \succ_{(\epsilon_\rho, \epsilon_\sigma)} (\rho_2, \sigma_2)$$

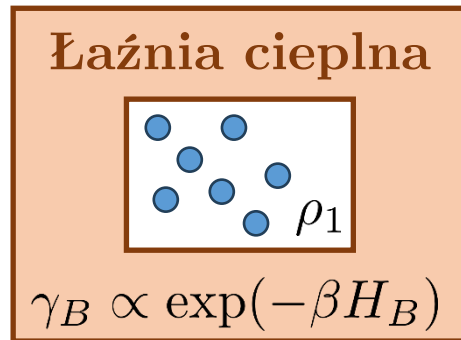
$$\Uparrow$$

$$\forall_{x \in (\epsilon_\rho, 1)} \tilde{\beta}_x(\rho_1 \| \sigma_1) \leq \tilde{\beta}_{x-\epsilon_\rho}(\rho_2 \| \sigma_2) + \epsilon_\sigma$$

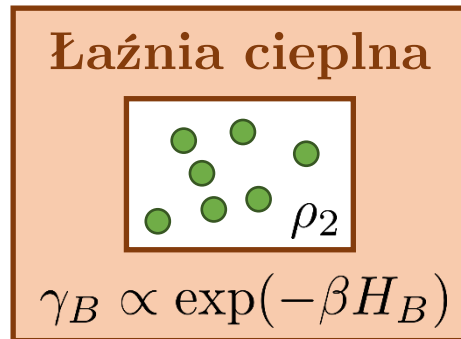


\*J. Math. Phys. **57**, 122202 (2016)

# Termodynamika kwantowa



↓ Oddziaływanie  
zachowujące  
energię



## Formalizm operacji termicznych\*

$$\rho_1 \xrightarrow{\text{TO}} \rho_2 \iff \rho_2 = \text{Tr}_{B'} (U (\rho_1 \otimes \gamma_B) U^\dagger)$$

$$\text{gdzie } [U, H \otimes \mathbb{I}_B + \mathbb{I} \otimes H_B] = 0$$

## Przybliżone operacje termiczne\*\*

$$\rho_1 \xrightarrow[\text{TO}]{\epsilon} \rho_2 \iff \rho_1 \xrightarrow{\text{TO}} \tilde{\rho}_2 \text{ and } \delta(\tilde{\rho}_2, \rho_2) \leq \epsilon$$

Stan termiczny układu:  $\gamma \propto \exp(-\beta H)$

\*Nat. Commun. **4**, 2059 (2013)

\*\*Quantum **2**, 108 (2018)

# Termodynamika kwantowa

## Związek między transformacjami termodynamicznymi, dychotomiami, a testowaniem hipotez

Stany niekoherentne:  $[\rho_1, \gamma] = [\rho_2, \gamma] = 0^*$

Końcowy stan niekoherentny:  $[\rho_2, \gamma] = 0$

$$\rho_1 \xrightarrow[\text{TO}]{\epsilon} \rho_2$$

$$\Updownarrow$$

$$(\rho_1, \gamma) \succ_{(\epsilon, 0)} (\rho_2, \gamma)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_{x \in (\epsilon, 1)} \beta_x(\rho_1 \| \gamma) \leq \beta_{x-\epsilon}(\rho_2 \| \gamma)$$

$$\forall_{x \in (\epsilon, 1)} \beta_x(\rho_1 \| \gamma) \leq \beta_{x-\epsilon}(\rho_2 \| \gamma)$$

$$\Uparrow$$

$$\rho_1 \xrightarrow[\text{TO}]{\epsilon} \rho_2$$

$$\Uparrow$$

$$\forall_{x \in (\epsilon, 1)} \tilde{\beta}_x(\rho_1 \| \gamma) \leq \tilde{\beta}_{x-\epsilon}(\rho_2 \| \gamma)$$

\*Int. J. Theor. Phys. 39, 2717 (2000)



# Formalne postawienie problemu

Optymalny współczynnik konwersji  $R_n^*(\epsilon_n)$  to największe  $R_n$  takie że:

$$(\rho_1^{\otimes n}, \sigma_1^{\otimes n}) \succeq_{(\epsilon_n, 0)} (\rho_2^{\otimes R_n n}, \sigma_2^{\otimes R_n n}).$$

**Cel:** Znaleźć asymptotyczne zachowanie  $R_n^*(\epsilon_n)$  dla  $[\rho_2, \sigma_2] = 0$  w różnych reżimach błędów.

W wyniku tego otrzymamy także optymalne współczynniki konwersji dla:

## Termodynamiki

$$(\sigma_1 = \sigma_2 = \gamma)$$

$$\rho_1^{\otimes n} \xrightarrow[\text{TO}]{\epsilon} \rho_2^{R_n n}$$

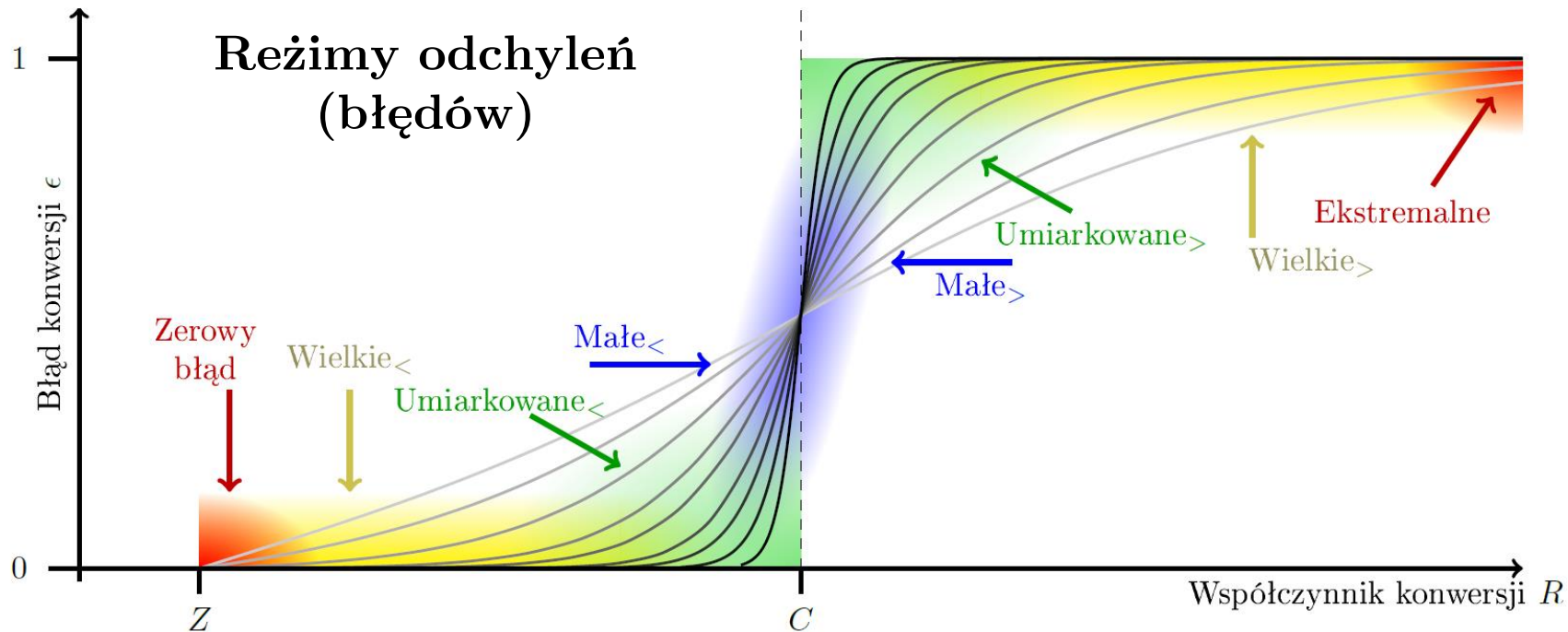
## Splątania

$$(\rho_i = \text{Tr}_B(|\psi_i^{AB}\rangle\langle\psi_i^{AB}|) \text{ oraz } \sigma_1 = \sigma_2 \propto \mathbb{I})$$

$$|\psi_1^{AB}\rangle^{\otimes n} \xrightarrow[\text{LOCC}]{\epsilon} |\psi_2^{AB}\rangle^{R_n n}$$

# Wyniki

# Optymalne współczynniki konwersji



## Idea

Udowodnić, że z dokładnością do wyrazów asymptotycznych drugiego rzędu mamy:

$$\tilde{\beta}_x(\rho^{\otimes n} \parallel \sigma^{\otimes n}) \approx \beta_x(\rho^{\otimes n} \parallel \sigma^{\otimes n})$$

Reżim	Błąd $\epsilon_n$	Współczynnik $R_n$	Dokładne $R_n$ ?
Zerowy błąd	Zero	Twierdzenie 7	Nie
Wielkie <sub>&lt;</sub>	$\rightarrow 0$ eksponencjalnie	Twierdzenie 5	Nie
Umiarkowane <sub>&lt;</sub>	$\rightarrow 0$ subeksponencjalnie	Twierdzenie 4	Tak
Małe <sub>&lt;</sub>	Stały, $< 0.5$	Twierdzenie 3	Tak

Reżim	Błąd $\epsilon_n$	Współczynnik $R_n$	Dokładne $R_n$ ?
Małe <sub>&gt;</sub>	Stały, $> 0.5$	Twierdzenie 3	Tak
Umiarkowane <sub>&gt;</sub>	$\rightarrow 1$ subeksponencjalnie	Twierdzenie 4	Tak
Wielkie <sub>&gt;</sub>	$\rightarrow 1$ eksponencjalnie	Twierdzenie 6	Tak
Ekstremalne	$\rightarrow 1$ supereksponencjalnie	Twierdzenie 8	Tak

\*arXiv:2303.05524

# Reżim małych odchyleń

Optymalny współczynnik konwersji termodynamicznej  
ze stanów koherentnych w niekoherentne

$$R_n^*(\epsilon) \simeq \frac{D(\rho_1 \parallel \gamma) + \sqrt{V(\rho_1 \parallel \gamma)/n} \cdot S_{1/\xi}^{-1}(\epsilon)}{D(\rho_2 \parallel \gamma)}$$

Nierównowagowa energia swobodna:  $D(\rho \parallel \gamma) := (\text{Tr} \rho (\log \rho - \log \gamma))$

Fluktuacje energii swobodnej  $V(\rho \parallel \gamma) := \text{Tr} \left( \rho (\log \rho - \log \gamma)^2 \right) - D(\rho \parallel \gamma)^2$

Funkcja odwrotna  
rozkładu półtoranormalnego\*:  $S_\nu^{-1}(\epsilon) = \inf_{x \in (\epsilon, 1)} \sqrt{\nu} \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(x - \epsilon)$

Parametr odwracalności:  $\xi := \frac{V(\rho_1 \parallel \gamma)}{D(\rho_1 \parallel \gamma)} \bigg/ \frac{V(\rho_2 \parallel \gamma)}{D(\rho_2 \parallel \gamma)}$

\*arXiv:2303.05524

# Optymalne protokoły termodynamiczne

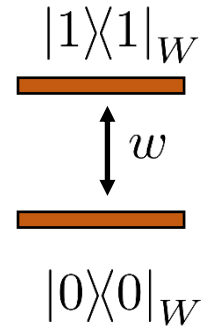
## Wykonywanie pracy

Ilość  $\epsilon$ -deterministycznej pracy jaką może wykonać układ  $\rho^{\otimes n}$  to maksymalne  $w$ , takie że:

$$\rho^{\otimes n} \otimes |0\rangle\langle 0|_W \xrightarrow{\text{TO}} |1\rangle\langle 1|_W$$

Wynik uzyskany z naszej analizy:

$$\frac{\beta w}{n} \simeq D(\rho \| \gamma) + \sqrt{\frac{V(\rho \| \gamma)}{n}} \Phi^{-1}(\epsilon)$$



## Resetowanie pamięci

Ilość pracy potrzebna do zresetowania stanu  $\rho^{\otimes n}$  to minimalne  $w$ , takie że:

$$\rho^{\otimes n} \otimes |0\rangle\langle 0|_W \xrightarrow{\text{TO}} |0\rangle\langle 0|^{\otimes n} \otimes |1\rangle\langle 1|_W$$

Wynik uzyskany z naszej analizy:

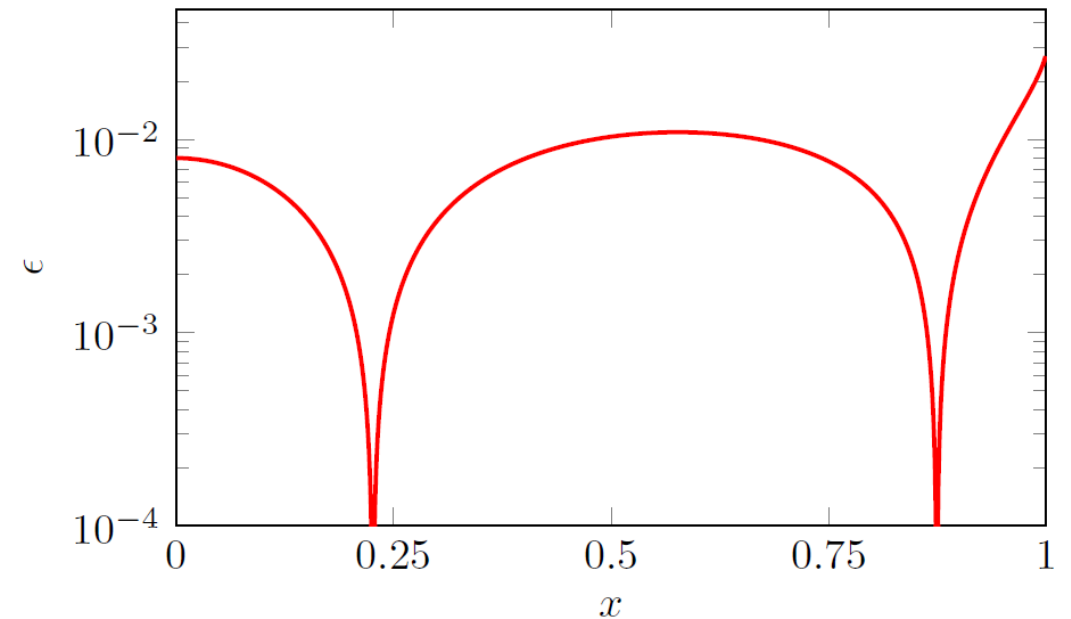
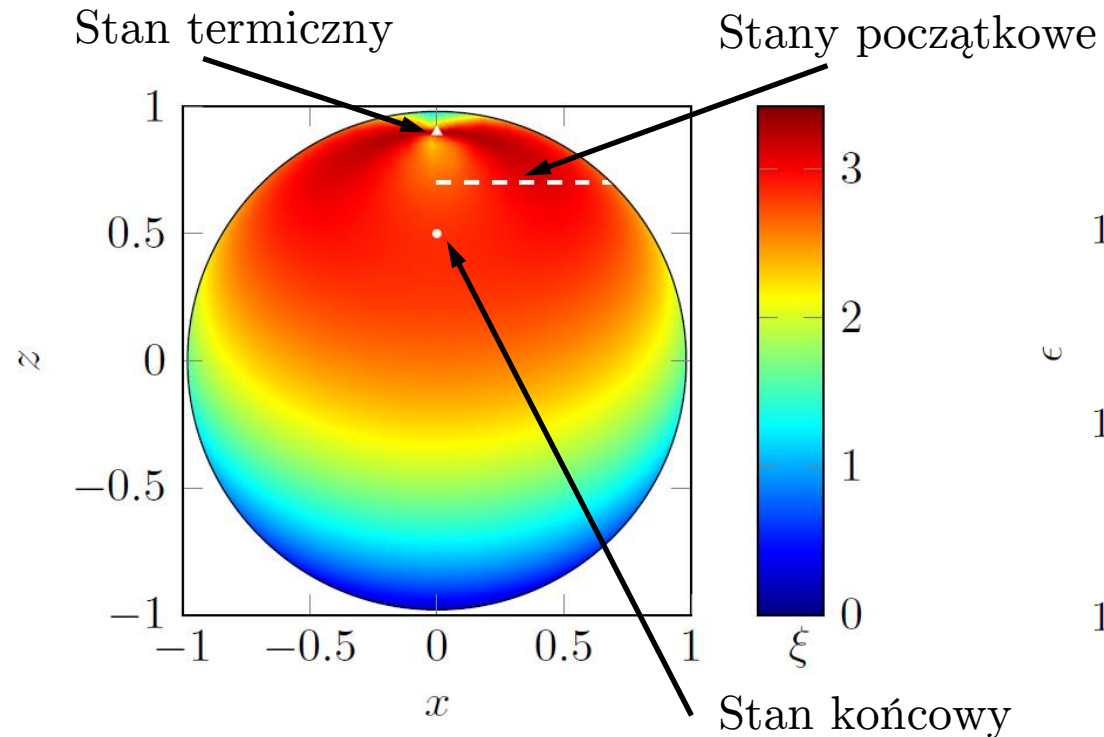
$$\frac{\beta |w|}{n} \simeq S(\rho) - \sqrt{\frac{V(\rho \| \mathbb{I})}{n}} \Phi^{-1}(\epsilon)$$

$\Phi^{-1}$  : Funkcja odwrotna standardowego rozkładu normalnego

# Rezonans zasobowy

**Koherentny rezonans:**

$$R_n^*(\epsilon) \simeq \frac{D(\rho_1 \parallel \gamma) + \sqrt{V(\rho_1 \parallel \gamma)/n} \cdot S_{1/\xi}^{-1}(\epsilon)}{D(\rho_2 \parallel \gamma)} \quad \xRightarrow{\xi=1} \quad R_n^*(0) \simeq \frac{D(\rho_1 \parallel \gamma)}{D(\rho_2 \parallel \gamma)}$$

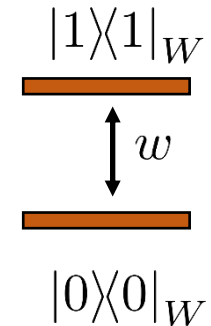


# Rezonans zasobowy

## Rezonans wspomagany pracą:

Zamiast  $\rho_1^{\otimes n} \xrightarrow{\text{TO}} \rho_2^{Rn}$  z optymalnym  $R$ , co w przypadku braku rezonansu prowadzi do dyssypacji energii swobodnej, możemy spróbować:

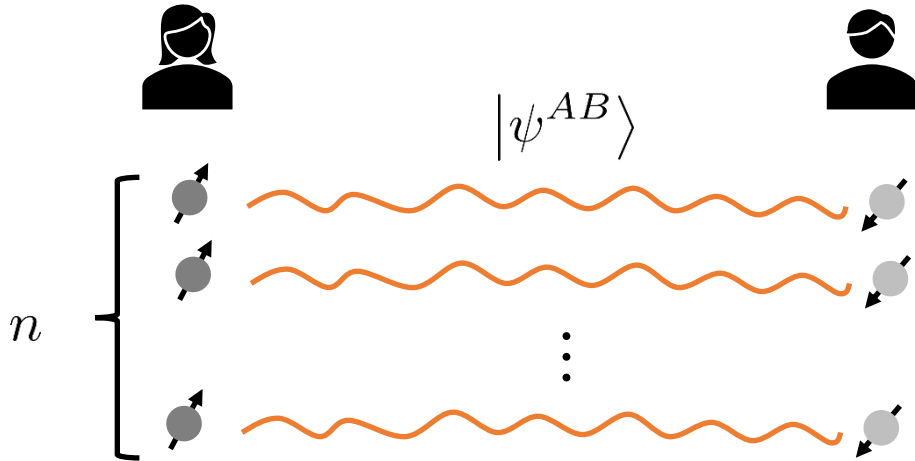
$$\rho_1^{\otimes n} \otimes |0\rangle\langle 0|_W \xrightarrow{\text{TO}} \rho_2^{\tilde{R}n} \otimes |1\rangle\langle 1|_W$$



$$\tilde{R} = V(\rho_1 \| \gamma) / V(\rho_2 \| \gamma) \qquad \frac{w}{n} = \frac{1}{\beta} \left( D(\rho_1 \| \gamma) - \frac{V(\rho_1 \| \gamma)}{V(\rho_2 \| \gamma)} D(\rho_2 \| \gamma) \right)$$

Współczynnik konwersji jest wtedy co prawda mniejszy, ale całkowicie unikamy dyssypacji energii swobodnej wykonując pracę.

# Konwersja splątania dwucząstkowego



$$|\psi_1^{AB}\rangle^{\otimes n} \xrightarrow[\text{LOCC}]{\epsilon} |\psi_2^{AB}\rangle^{R_n n}$$

Wszystkie otrzymane wyniki możemy także zastosować do tego problemu, np. :

$$R_n^*(\epsilon) \simeq \frac{S(\rho_1^A) + \sqrt{V(\rho_1^A)/n} \cdot S_{1/\xi}^{-1}(\epsilon)}{S(\rho_1^A)}$$

Zredukowany stan podukładu:

$$\rho^A := \text{Tr}_B |\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|$$

Entropia splątania:

$$S(\rho^A) := -\text{Tr} \rho^A \log \rho^A$$

Fluktuacje entropii splątania:

$$V(\rho^A) := \text{Tr} \left( \rho^A (\log \rho^A)^2 \right) - S(\rho^A)^2$$

Parametr odwracalności:

$$\xi := \frac{V(\rho_1^A)}{S(\rho_1^A)} \bigg/ \frac{V(\rho_2^A)}{S(\rho_2^A)}$$



# Perspektywy

- Wykorzystać podejście testowania hipotez by zanalizować konwesje termodynamiczne skorelowanych układów (wyjść poza założenie i.i.d.).
- Zbadać dokładną postać optymalnych protokołów termodynamicznych w różnych reżimach.
- Uogólnić wyniki tak, by uwzględnić także niekomutujące dychotomie początkowe.
- Uogólnić rozważania z dychotomii na multichotomie.
- Znaleźć analog rezonansu zasobowego w tradycyjnym sformułowaniu termodynamiki.
- Poszukać rezonansu w innych teoriach zasobów.

**Więcej szczegółów:**  
arXiv:2303.05524 (2023)

Dziękuję za uwagę!