

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе № 1
по дисциплине «Построение и Анализ Алгоритмов»
Тема: «Поиск с возвратом»

Студент гр. 3343

Преподаватель



Коршков А.А.

Жангиров Т. Р.

Санкт-Петербург

2025

Цель работы

Изучить общий метод нахождения решения задачи — поиск с возвратом на примере задачи о разбиении столешницы размером $N*N$ на минимальное количество квадратов.

Задание

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до $N-1$, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N . Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера $7*7$ может быть построена из 9 обрезков.

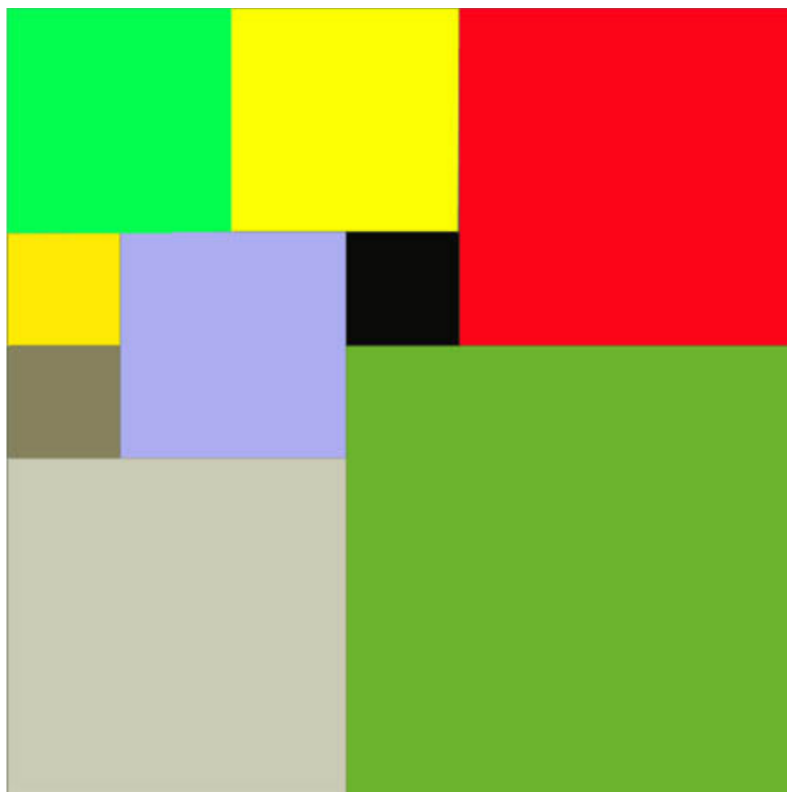


Рисунок 1 – Пример разбиения столешницы

Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \leq N \leq 20$).

Выходные данные

Одно число K , задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить столешницу(квадрат) заданного размера N . Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x ,

у и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \leq x, y \leq N$) и длину стороны соответствующего обрезка (квадрата).

Индивидуализация для лабораторной работы (2и):

Итеративный бэктрекинг. Исследование времени выполнения от размера квадрата.

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

3 4 1

Основные теоретические положения

Поиск с возвратом (backtracking) — это общий метод поиска решений задач, которые требуют полного перебора всех возможных вариантов из некоторого множества. Решение строится постепенно, начиная с частичного решения. Если на каком-то шаге расширить текущее решение не удастся (например, оно не удовлетворяет ограничениям задачи), то происходит возврат к предыдущему шагу, и из более короткого частичного решения продолжается поиск.

Алгоритм поиска с возвратом позволяет найти всевозможные решения задачи, если они существуют, и является особенно полезным в случаях, когда решение невозможно найти простым перебором всех вариантов сразу. Вместо 4 этого, с помощью откатов, можно исключать неверные варианты и сосредотачиваться на тех, которые могут привести к решению.

Выполнение работы

Описание методов и структур данных

Для хранения частичных решений использовалась очередь (как список). В реализованном классе Board (файл Board.py) определены следующие методы:

`__init__(self, size: int) -> None` - конструктор класса. В качестве аргумента принимает число `n`, оно определяет длину стороны конструируемого стола.

`size(self) -> int` – возвращает размер доски

`board(self) -> list[list[int]]` – возвращает доску

`square_list(self) -> list[list[int]]` - возвращает список квадратов.

`count_square(self) -> int` - возвращает количество квадратов.

`__deepcopy__(self, memodict: dict = None) -> 'Board'` - создает копию объекта. (глубокое копирование при использовании функции `deepcopy` из библиотеки `copy`)

`is_fill(self) -> bool` - проверяет, заполнена ли доска.

`get_empty_cell(self) -> tuple[int, int]` - возвращает пустую ячейку.

`check_possible_square(self, x: int, y: int, side: int) -> bool` - проверяет, можно ли добавить квадрат на доску.

`add_square(self, x: int, y: int, side: int) -> None` - добавляет квадрат на доску.

`place_squares_for_even_size(self) -> None` - размещает квадраты на доске для четного размера.

`place_squares_for_prime_size(self) -> None` - размещает квадраты на доске для простого размера.

В файле `backtracking.py` находятся функции для выполнения итеративного бэктрекинга и оптимизации.

`is_prime(n: int) -> bool` - проверяет, является ли число простым.

`get_divisors(n: int) -> tuple[int, int]` - возвращает делители числа.

`scale_board(board: Board, mult: int) -> Board` - масштабирует доску.

`backtracking_fill_board(board: Board) -> Board` - возвращает доску с заполненными квадратами.

`backtracking_algorithm(board: Board) -> list[list[int]]` - реализует алгоритм поиска с возвратом.

В файле `main.py` есть две функции:

`main()` -> `None` – основное задание

`time_check()` -> `None` – проверка на время в зависимости от размера квадрата

Применённые оптимизации

1) В случае, если размер стола N - простое число, заранее можно расставить один квадрат размером $N // 2 + 1$ и два смежных ему квадрата $N // 2$. Пример квадратов со сторонами 5,7:

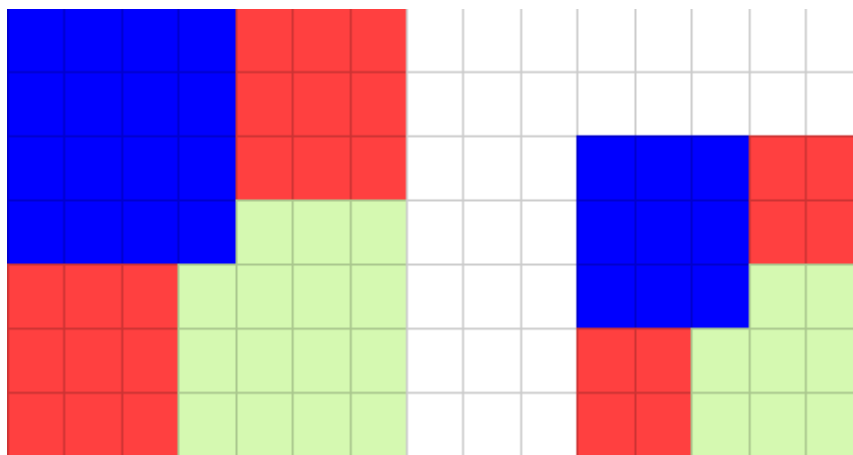


Рисунок 1 – Принцип размещения трёх квадратов 7 и 5

2) Новый квадрат всегда устанавливается в максимально верхнюю левую клетку, чтобы сократить кол-во одинаковых расстановок, но с разным порядком размещения квадратов.

3) Так как алгоритм при нахождении ответа в первую очередь расставляет самые большие квадраты, то расстановка, которую мы примем за итоговую будет найдена первой. Это позволяет нам не просчитывать все возможные варианты, а прекратить выполнение алгоритма при нахождении первой расстановки, полностью заполняющей поле.

4) Если сторона квадрата чётное число, то минимальное разбиение всегда будет равно 4.

5) Если N - составное число, то число квадратов в оптимальном разбиении не превосходит аналогичного минимального для какого-либо из множителей числа. Нужно найти минимальный делитель числа, применить к нему алгоритм, затем умножить размер и координаты на оставшийся делитель для получения разбиения для размера N .

Оценка сложности алгоритма.

По времени:

В худшем случае алгоритм экспоненциальный (для простых чисел) $O(n^2)$.

Для чётных чисел примерно $O(1)$, потому что заранее известно кол-во квадратов и их положение, всё зависит от размера доски.

Для составного числа - $O(T(\text{small_div}))$, т.к. время сводится алгоритму над меньшим числом и к масштабированию, и зависит он от минимального делителя.

По памяти:

$O(n^2)$ – т.к. необходимо хранить доску размером $n * n$.

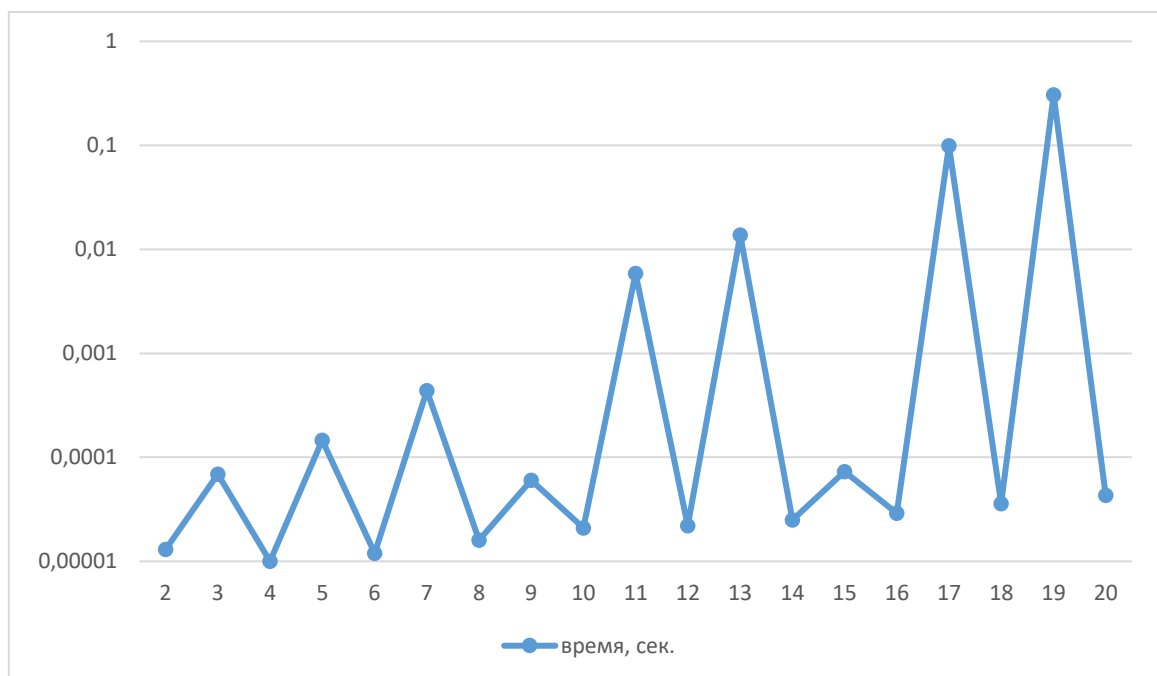


Рисунок 1 – график зависимости времени от размера квадрата (логарифмическая шкала)

По результату графика, можно сделать вывод, что время выполнения алгоритма сильно (экспоненциально) возрастает при возрастании минимального делителя стороны полотна (т.е. большее простое число).

Тестирование

Таблица 1 – Тестирование алгоритма

№ п/п	Входные данные	Выходные данные	Комментарии
1	4	4 1 1 2 3 1 2 1 3 2 3 3 2	Верно, оптимизация для чётных чисел.
2	7	9 1 1 4 1 5 3 5 1 3 4 5 2 4 7 1 5 4 1 5 7 1 6 4 2 6 6 2	Верно, оптимизация для простых чисел.
3	11	11 1 1 6 1 7 5 7 1 5 6 7 3 6 10 2 7 6 1 8 6 1 8 10 1 8 11 1 9 6 3 9 9 3	Верно, оптимизация для простых чисел.
4	15	6 1 1 10 1 11 5 11 1 5 6 11 5 11 6 5 11 11 5	Верно, оптимизация для составных чисел.
5	19	13 1 1 10 1 11 9 11 1 9 10 11 3 10 14 6 11 10 1 12 10 1 13 10 4 16 14 1 16 15 1 16 16 4 17 10 3	Верно, оптимизация для простых чисел.

		17 13 3	
--	--	---------	--

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было разработано решение задачи разбиения квадрата при помощи поиска с возвратом, а также проведено исследование зависимости времени работы алгоритма от размера квадрата.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

Название файла: main.py

"""

Главный файл программы. Содержит функции для проверки времени выполнения алгоритма.

Вар. 2и. Итеративный бэктрекинг. Исследование времени выполнения от размера квадрата.

"""

import timeit

from modules.board import Board

from modules.backtracking import backtracking_algorithm

def time_check() -> None:

"""

Эта функция проверяет время выполнения алгоритма поиска с возвратом.

:return:

"""

20 n_sizes: list[int] = list(range(2, 21)) # все размеры от 2 до

result_time: int = 0

for n in n_sizes:

exec_time: float = timeit.timeit(lambda: backtracking_algorithm(Board(n)), number=1) # время выполнения

result_time += exec_time

{n}*{n}:\t{exec_time:.6f}\tсек.".replace(".", ",", 1)) # вывод времени

print(f"Общее время выполнения:\t{result_time:.6f} сек.") # вывод общего времени

def main() -> None:

"""

Главная функция.

:return:

"""

ввод размера доски

while True:

try:

n: int = int(input())

if n < 1:

целым числом.")

continue

break

except ValueError:

print("Ошибка: введено не целое натуральное число.")

алгоритм бэктрекинга вернёт список квадратов (x, y, w)

result: list[list[int]] = backtracking_algorithm(Board(n))

преобразуем координаты (они от 1 до N)

result: list[list[int]] = [[comp[0] + 1, comp[1] + 1, comp[2]]

for comp in result]

```

# выведем кол-во квадратов
print(len(result))
# вывод квадратов
for square in result:
    print(*square)

if __name__ == "__main__":
    # главная функция
    main()

# проверка времени выполнения алгоритма в зависимости от раз-
мера квадратов
# (раскомментировать при необходимости)
# time_check()

```

Название файла: board.py

```

"""
Этот модуль содержит класс Board, который представляет доску n*n
размером.
"""

```

```

class Board:
    """
    Этот класс представляет доску n*n размером.
    """

    def __init__(self, size: int) -> None:
        """
        Эта функция инициализирует доску.
        :param size:
        """
        self.__size: int = size
        self.__board: list[list[int]] = [[0 for _ in range(size)]
for _ in range(size)]
        self.__square_list: list[list[int]] = []
        self.__count_square: int = 0

    @property
    def size(self) -> int:
        """
        Эта функция возвращает размер доски.
        :return:
        """
        return self.__size

    @property
    def board(self) -> list[list[int]]:
        """
        Эта функция возвращает доску.
        :return:
        """
        return self.__board

    @property
    def square_list(self) -> list[list[int]]:
        """

```

```

        Эта функция возвращает список квадратов.
        :return:
        """
        return self.__square_list

@property
def count_square(self) -> int:
    """
    Эта функция возвращает количество квадратов.
    :return:
    """
    return self.__count_square

def __deepcopy__(self, memodict: dict = None) -> 'Board':
    """
    Эта функция создает копию объекта. (глубокое копирование)
    :param memodict:
    :return:
    """
    new_board: Board = Board(self.__size)
    new_board.__board: list[list[int]] = [row[:] for row in
self.__board]
    new_board.__square_list: list[list[int]] = [square[:] for
square in self.__square_list]
    new_board.__count_square: int = self.__count_square
    return new_board

def is_fill(self) -> bool:
    """
    Эта функция проверяет, заполнена ли доска.
    :return:
    """
    row: list[int]
    for row in self.__board:
        if 0 in row:
            return False
    return True

def get_empty_cell(self) -> tuple[int, int]:
    """
    Эта функция возвращает пустую ячейку.
    :return:
    """
    for row in range(len(self.__board)):
        for col in range(len(self.__board[row])):
            if self.__board[row][col] == 0:
                return row, col
    return -1, -1

def check_possible_square(self, x: int, y: int, side: int) ->
bool:
    """
    Эта функция проверяет, можно ли добавить квадрат на доску.
    :param x:
    :param y:
    :param side:
    :return:
    """

```

```

        if (x + side > self.__size) or (y + side > self.__size) or
side <= 0 or x < 0 or y < 0:
            return False
        for i in range(x, x + side):
            for j in range(y, y + side):
                if self.__board[i][j] != 0:
                    return False
        return True

def add_square(self, x: int, y: int, side: int) -> None:
    """
    Эта функция добавляет квадрат на доску.
    :param x:
    :param y:
    :param side:
    :return:
    """
    for i in range(x, x + side):
        for j in range(y, y + side):
            self.__board[i][j] = self.__count_square + 1
    self.__square_list.append([x, y, side])
    self.__count_square += 1

def place_squares_for_even_size(self) -> None:
    """
    Эта функция размещает квадраты на доске для четного раз-
мера.

    :return:
    """
    self.add_square(0, 0, self.__size // 2)
    self.add_square(self.__size // 2, 0, self.__size // 2)
    self.add_square(0, self.__size // 2, self.__size // 2)
    self.add_square(self.__size // 2, self.__size // 2,
self.__size // 2)

def place_squares_for_prime_size(self) -> None:
    """
    Эта функция размещает квадраты на доске для простого раз-
мера.

    :return:
    """
    self.add_square(0, 0, self.__size // 2 + 1)
    self.add_square(0, self.__size // 2 + 1, self.__size // 2)
    self.add_square(self.__size // 2 + 1, 0, self.__size // 2)

```

Название файла: backtracking.py

"""

Этот модуль содержит функции для алгоритма поиска с возвратом.

"""

from copy import deepcopy

from modules.board import Board

```
def is_prime(n: int) -> bool:
```

"""

Эта функция проверяет, является ли число простым.

:param n:


```

: return:
"""
if n < 2:
    return False
for i in range(2, int(n ** 0.5) + 1):
    if n % i == 0:
        return False
return True

def get_divisors(n: int) -> tuple[int, int]:
    """
    Эта функция возвращает делители числа.
    :param n:
    :return:
    """
    for i in range(2, int(n ** 0.5) + 1):
        if n % i == 0:
            return i, n // i
    return 1, n

def scale_board(board: Board, mult: int) -> Board:
    """
    Эта функция масштабирует доску.
    :param board:
    :param mult:
    :return:
    """
    new_board: Board = Board(board.size * mult)
    for square in board.square_list:
        new_board.add_square(square[0] * mult, square[1] * mult,
square[2] * mult)
    return new_board

def backtracking_fill_board(board: Board) -> Board:
    """
    Эта функция возвращает доску с заполненными квадратами.
    :param board:
    :return:
    """
    iter_queue: list[Board] = [board]
    while iter_queue:
        current_board: Board = iter_queue.pop(0)
        if current_board.is_fill():
            return current_board
        empty_x, empty_y = current_board.get_empty_cell()
        for i in range(current_board.size, 0, -1):
            if current_board.check_possible_square(empty_x,
empty_y, i):
                new_board: Board = deepcopy(current_board)
                new_board.add_square(empty_x, empty_y, i)
                if new_board.is_fill():
                    return new_board
                iter_queue.append(new_board)
    return board

```

```

def backtracking_algorithm(board: Board) -> list[list[int]]:
    """
    Эта функция реализует алгоритм поиска с возвратом.
    :param board:
    :return:
    """
    if board.size % 2 == 0:
        board.place_squares_for_even_size()
        return board.square_list

    if is_prime(board.size):
        board.place_squares_for_prime_size()
        return backtracking_fill_board(board).square_list
    small_div, big_div = get_divisors(board.size)
    small_board: Board = Board(small_div)
    if is_prime(small_div):
        small_board.place_squares_for_prime_size()
    small_board: Board = backtracking_fill_board(small_board)
    board = scale_board(small_board, big_div)
    return board.square_list

```