Общие сведения

- Команды прямого и отложенного действия
- Наложение ограничений на переменные

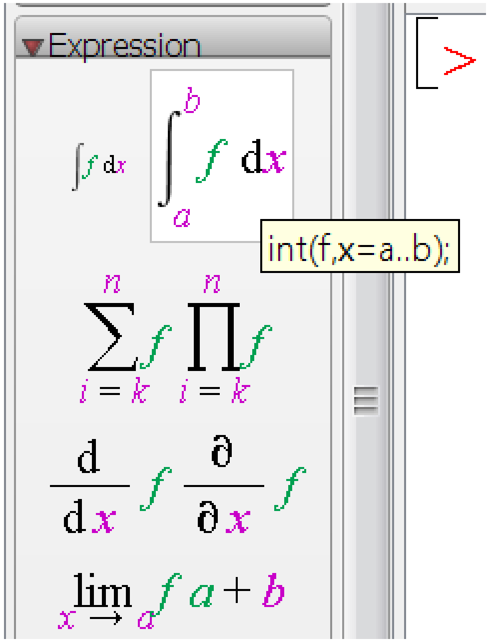
Команды прямого и отложенного действия

- Для таких математических операций, как вычисление предела, производной, интеграла, суммы ряда и некоторых других операций, существуют две формы записи: **активная** (команда прямого действия) и **инертная** (команда отложенного действия)
- **Команды прямого действия** начинаются с маленькой буквы и выполняются сразу
- **Команды отложенного действия** начинаются с большой буквы и служат для записи операции в математическом виде. Для их выполнения используется команда **value**.

Некоторые команды с двумя формами записи

diff и **Diff**	**int** и **Int**
limit и **Limit**	**normal** и **Normal**
product и **Product**	**sum** и **Sum**

- Шаблоны на панели Expression являются командами прямого действия



Примеры команд прямого и отложенного действия

Шаблон с палитры Expression (в режиме ввода Math mode)

$> \int_0^{\pi} (1 + \cos(x))^2 \, dx$

$$\frac{3}{2}\pi$$

Команда прямого действия

$> int\left((1 + \cos(x))^2, x = 0..\text{Pi}\right)$

$$\frac{3}{2}\pi$$

Команда отложенного действия

$> Int\left((1 + \cos(x))^2, x = 0..\pi\right); value(\%)$

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos(x))^2 \, dx$$

$$\frac{3}{2}\pi$$

В режиме ввода Text mode

```
> Limit(x*(Pi/2+arctan(x)),x=-infinity)=limit(x*(Pi/2+arctan(x)),
  x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{2}\pi + \arctan(x)\right) = -1$$

Наложение ограничений на переменные

- **assume**(**x1, prop1, x2, prop2, ...)** – наложение условий
  assume(**x1::prop1, x2::prop2, ...); assume**(**xrel1, xrel2, ...)**
- **additionally**(**x1, prop1, x2, prop2, ...)** – наложение дополнительных условий
  additionally(**x1::prop1, x2::prop2, ...); additionally(xrel1, xrel2, ...)**
- **addproperty**(**prop1, parents, children)** – добавление нового свойства, основанного на свойствах **parents** и **children**
- **about**(**x1)** – выводит информацию об условиях, наложенных на **x1** и свойствах **x1**

> $assume(x > -1)$

> $additionally(x \leq 1)$

> $about(x)$

```
Originally x, renamed x~:
  is assumed to be: RealRange(Open(-1),1)
```

> $assume(y :: negative); about(y)$

```
Originally y, renamed y~:
  is assumed to be: RealRange(-infinity,Open(0))
```

Наложение ограничений на переменные

- **is(x1, prop1)** – проверяет, удовлетворяет ли **x1** свойству **prop1**, результат в виде true/false/FAIL
  is(x1::prop1); is(xrel1)
- **coulditbe(x1, prop1)** – проверяет, может ли **x1** удовлетворять свойству **prop1**, результат в виде true/false/FAIL
  coulditbe(x1::prop1); coulditbe(xrel1);

> $assume(x > -1, x \le 1); is(x :: positive)$

$$false$$

> $coulditbe(x::positive)$

$$true$$

> $is(1 - x^2, 'positive');$

$$false$$

> $coulditbe(1 - x^2 = 1)$

$$true$$

> $x := 'x': about(x)$

```
x:
  nothing known about this object
```

Наложение ограничений на переменные

- **hasassumptions(x1)** – проверяет, наложены ли на **x1** какие-то ограничения, результат в виде true/false
- **getassumptions(x1)** - возвращает список наложенных на **x1** ограничений в форме expression::property
- **assuming** – вычисление выражения в предположении свойств

> $assume(x :: integer);\ additionally(x > 1)$

> $hasassumptions(x)$

$$true$$

> $getassumptions(x)$

$$\{x\sim::(AndProp(integer, RealRange(2, \infty)))\}$$

> $\sqrt{a^2}$ assuming $a > 0$

$$a\sim$$

> $\sqrt{a^2}$ assuming $a \leq 0$

$$-a\sim$$

Использование ограничений для переменных при вычислении интегралов

> $\int_0^{\infty} e^{-a x}\, dx$

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{e^{-a x} - 1}{a} \right)$$

> $assume(a > 0);\ \int_0^{\infty} e^{-a x}\, dx$

$$\frac{1}{a\sim}$$

> $\int_0^{\infty} e^{-a x}\, dx$ assuming $a :: positive$

$$\frac{1}{a\sim}$$

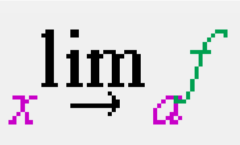
> $\int_0^{\infty} e^{-a x}\, dx$ assuming $a :: negative$

$$\infty$$

Вычисление пределов и производных

- Вычисление пределов
- Дифференцирование функции одной переменной
- Дифференцирование функции многих переменных
- Дифференциальный оператор

Вычисление пределов



- **limit(f, x=a)**

  limit(f, x=a, dir)

  a – точка предела, в том числе может быть **infinity** или **–infinity**

  dir – вид предела: **left** (предел слева), **right** (предел справа), **real** (действительный предел), **complex** (комплексный предел)
- **Limit** – аналогичная инертная команда

> $\lim\limits_{x \to \infty} e^x$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

$$\infty$$

$$0$$

```
> Limit(exp(x), x = infinity)=limit(exp(x), x = infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

```
> Limit(exp(x), x = infinity)=limit(exp(x), x = -infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} e^x = 0$$

Примеры вычисления пределов

Односторонние пределы

$$> \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$0$$

```
> limit(1/(1+exp(1/x)), x = 0, right);
```

$$0$$

$$> \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$1$$

```
> limit(1/(1+exp(1/x)), x = 0, left);
```

$$1$$

Использование аргументов **real** и **complex**

```
> Limit(1/x,x=0,real)=limit(1/x,x=0,real);
```

$$\lim_{x \to 0,\ \mathrm{real}} \frac{1}{x} = \mathit{undefined}$$

$$> \mathit{Limit}(1/x, x = 0, \mathit{complex}) = \mathit{limit}(1/x, x = 0, \mathit{complex});$$

$$\lim_{x \to 0,\ \mathrm{complex}} \frac{1}{x} = \infty - \infty\, \mathrm{I}$$

Дифференцирование функции одной переменной

- **diff(f,x)**
- **diff(f,x$n)** – вычисление производной **n**-го порядка
  diff(f(x),x$2) эквивалентно **diff(f(x),x,x)**
- **Diff** – аналогичная инертная команда

$$\frac{d}{dx} f$$

> $\frac{d}{dx} \sin(x)$

$$\cos(x)$$

```
> Diff(sin(x),x)=diff(sin(x),x);
```

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

Производные высших порядков

> $\frac{d^2}{dx^2} \left(3 x^3 + 2 x^2 + 5 x + 10\right)$

$$18 x + 4$$

> $diff\left(3 x^3 + 2 x^2 + 5 x + 10, x, x, x\right)$

$$18$$

Примеры вычисления производных

Прозводная функции, заданной как выражение

$> \; f := \cos(2\cdot x)^2 : d1 := \frac{d}{dx} f$

$$d1 := -4\cos(2x)\sin(2x)$$

Значение производной в точке

$> \; eval\left(d1, x = -\frac{\pi}{2}\right)$

$$0$$

Прозводная функции, заданной как функциональный оператор

$> \; F := x \rightarrow \cos(2\cdot x)^2 : g1 := \frac{d}{dx} F(x)$

$$g1 := -4\cos(2x)\sin(2x)$$

Четвертая производная

$> \; d4 := diff(f, x\$4)$

$$d4 := -128\sin(2x)^2 + 128\cos(2x)^2$$

Часто ответ нужно упростить:

$> \; combine(d4)$

$$128\cos(4x)$$

$> \; simplify(d4)$

$$256\cos(2x)^2 - 128$$

Символьное дифференцирование

$> \; \frac{d^n}{dx^n}(\sin(x) + \cos(x))$

$$\sin\left(x + \frac{1}{2} n\pi\right) + \cos\left(x + \frac{1}{2} n\pi\right)$$

Дифференцирование функции многих переменных

- **diff(f, x1, ..., xj)** – вычисление частных производных $\frac{\partial}{\partial x} f$
- **diff(f,x1$n1,x2$n2,..., xm$nm)** – частные производные высших порядков

  diff(diff (f(x1,x2), x1), x2) эквивалентно **diff(f(x1,x2), x1, x2)**

  diff(g(x,y),x$2,y$3) эквивалентно **diff(g(x,y),x,x,y,y,y)**
- **Diff** – аналогичная инертная команда

$$> \frac{\partial}{\partial y}\left(3\,x + y^2\right)$$

$$2\,y$$

$$> \frac{\partial}{\partial x}\left(3\,x + y^2\right)$$

$$3$$

$$> \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(3\,x + y^2\right)$$

$$0$$

Дифференцирование функции многих переменных: примеры

> $f := (x-y)\,/\,(x+y):$

Вычислим все частные производные второго порядка

> $Diff(f, x\$2) = diff(f, x\$2);\ simplify(rhs(\%))$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = -\frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2\,(x-y)}{(x+y)^3}$$

$$-\frac{4\,y}{(x+y)^3}$$

> $Diff(f, y, y) = diff(f, y\$2);\ simplify(rhs(\%))$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2\,(x-y)}{(x+y)^3}$$

$$\frac{4\,x}{(x+y)^3}$$

> $Diff(f, x, y) = diff(f, x, y)$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{2\,(x-y)}{(x+y)^3}$$

Дифференциальный оператор

- **D(f)**

  D[i](f)

  D[i](f)(x, y, …) или **D_i(f)(x,y,…)** – дифференцирование функции **f**, зависящей от переменных **x**, **y** (в т. ч. при конкретных значениях переменных); **i** – номер переменной для вычисления частной производной:

  1- переменная **x**, **2** – переменная **y** и т.д.
- Оператор **D** является обобщением команды **diff**: он может вычислять производные в точках и <u>дифференцировать функциональные операторы и процедуры</u>
- **D(f)(x) = diff(f(x),x)**
- Для преобразования **D** в **diff** и обратно используется команда **convert**
- **(D@@n)(f)(x)** или **$D^{(n)}$(f)(x**) – вычисление n-й производной по x
- **(D@@n)[i](f)(x,y,…)** или **$D_{i\$n}$ (f)(x,y,…)** или (**D[i$n](f))(x,y,…)** – вычисление n-й частной производной по i-й переменной.
- **((D@@n)[i]) ((D@@m)[j])(f)(x,y,…)** или **$D_{i\$n,j\$m}$(f)(x,y,…)** или (**D[i$n, j$m](f))(x,y,…)** – вычисление n-й частной производной по i-й переменной и m-й частной производной по j-й переменной

Примеры использования дифференциального оператора

> D(sin)

$$\cos$$

Вычисление производной в точке

> D(sin)(π)

$$-1$$

Функциональный оператор от одной переменной

> $f := x \to \ln(x^2) + \exp(3 \cdot x)$:

> $g := D(f)$

$$g := x \to \frac{2}{x} + 3\,e^{3x}$$

> $D(f)(x)$

$$\frac{2}{x} + 3\,e^{3x}$$

Функциональный оператор от двух переменных

> $f := (x, y) \to x^3 \cdot y$:

> $D[1](f)(x, y)$

$$3\,x^2\,y$$

> $D[2](f)(x, y)$

$$x^3$$

Оператор D и команда diff

> $D(\ln)(x)$

$$\frac{1}{x}$$

> $diff(\ln(x), x)$

$$\frac{1}{x}$$

> $D[1, 1, 2](h)(x, y)$

$$D_{1,\,1,\,2}(h)(x, y)$$

> $convert(\%, diff)$

$$\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2}\,h(x, y)$$

Запись производных высоких порядков в операторе D

> $diff(z(x), x\$5)$; $convert(\%, D)$;

$$\frac{d^5}{dx^5}\,z(x)$$

$$D^{(5)}(z)(x)$$

> $(D@@5)(z)(x)$

$$D^{(5)}(z)(x)$$

> $diff(p(x, y), x\$2, y\$5)$; $convert(\%, D)$;

$$\frac{\partial^7}{\partial y^5\,\partial x^2}\,p(x, y)$$

$$D_{1,\,1,\,2,\,2,\,2,\,2,\,2}(p)(x, y)$$

Варианты записи

> $D_{1\$2,\,2\$5}(p)(x, y)$

$$D_{1,\,1,\,2,\,2,\,2,\,2,\,2}(p)(x, y)$$

```
> (D[1$2,2$5])(p)(x, y);
```

$$D_{1,\,1,\,2,\,2,\,2,\,2,\,2}(p)(x, y)$$

```
> ((D@@2)[1])((D@@5)[2])(p)(x,y);
```

$$D^{(2)}{}_1\left(D^{(5)}{}_2\right)(p)(x, y)$$

Исследование функций

- Непрерывность и точки разрыва: iscont, discont, singular
- Нахождение экстремумов: extrema, minimize, maximize

Непрерывность и точки разрыва

- **iscont(f,x=x1..x2)** – проверка функции (выражения) на непрерывность
- **discont(f,x)** – находит точки нарушения непрерывности (в т. ч. разрывы первого и второго рода) и отсутствия гладкости
- **singular(f,x)** – находит точки сингулярности (т. е. точки, в которых функция не дифференцируема или точки неустранимых разрывов

> $f := \exp\left(\frac{1}{x+3}\right)$

$$f := e^{\frac{1}{x+3}}$$

> $iscont(f, x = -\infty..\infty)$

$$false$$

> $discont(f, x)$

$$\{-3\}$$

> $singular(f, x)$

$$\{x = -3\}$$

> $limit(f, x = -3, right)$

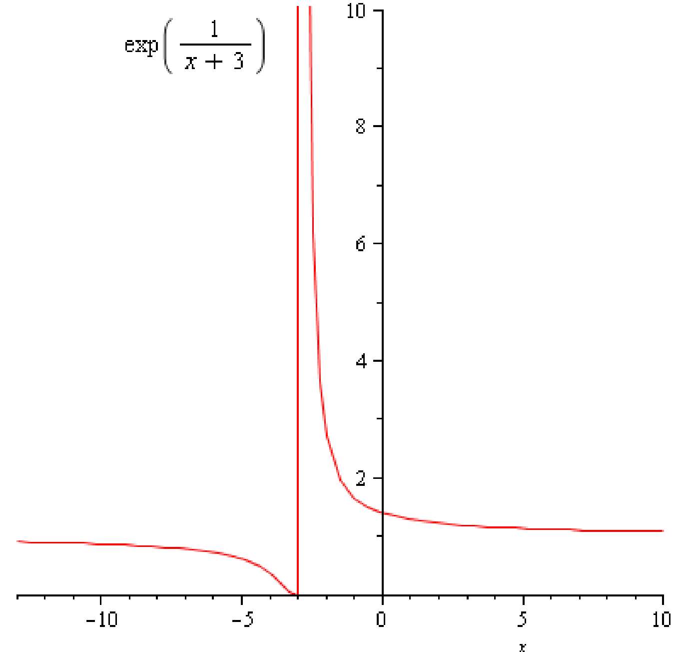
$$\infty$$

> $limit(f, x = -3, left)$

$$0$$

x=-3 - точка разрыва 2 рода

> $plot\left(f, x = -13..10, 0..10, title = \exp\left(\frac{1}{x+3}\right)\right)$



Примеры: устранимый и неустранимый разрыв

> $f := \dfrac{\sin(x)}{x}$:

> $iscont(f, x = -\infty\,..\,\infty)$

$$false$$

> $discont(f, x)$

$$\{0\}$$

> $singular(f, x)$

$$\{x = 0\}$$

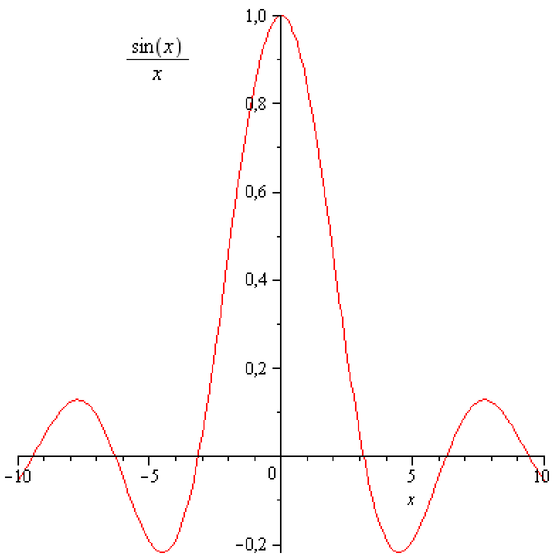
> $limit(f, x = 0, right)$

$$1$$

> $limit(f, x = 0, left)$

$$1$$

x=0 - точка устранимого разрыва 1 рода



> $f := \mathrm{signum}(x)$:

> $iscont(f, x = -\infty\,..\,\infty)$

$$false$$

> $discont(f, x)$

$$\{0\}$$

> $singular(f, x)$

Команда singular использует solve, поэтому здесь ничего не выдает

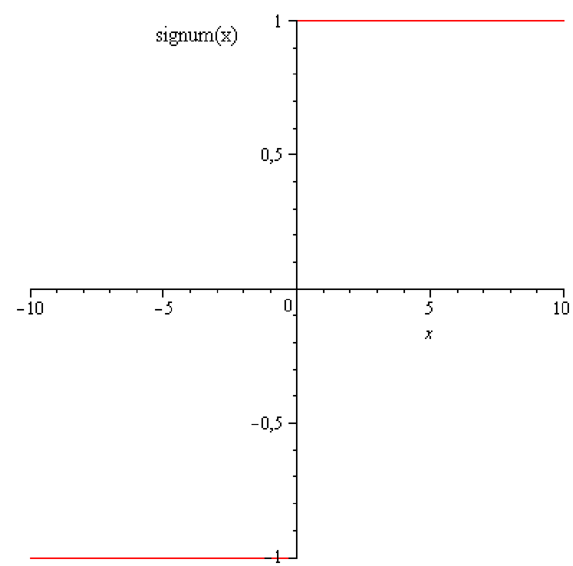
> $limit(f, x = 0, right)$

$$1$$

> $limit(f, x = 0, left)$

$$-1$$

x=0 - точка неустранимого разрыва 1 рода



Пример: отсутствие гладкости

> $y := 2\cdot x - \sqrt[3]{x^2}$

$$y := 2\,x - \left(x^2\right)^{1/3}$$

> $iscont(y, x = -\infty..\infty)$

true

> $discont(y, x)$

$$\{0\}$$

> $singular(y, x)$

$$\{x = \infty\}, \{x = -\infty\}$$

> $limit(y, x = 0, left)$

$$0$$

> $limit(y, x = 0, right)$

$$0$$

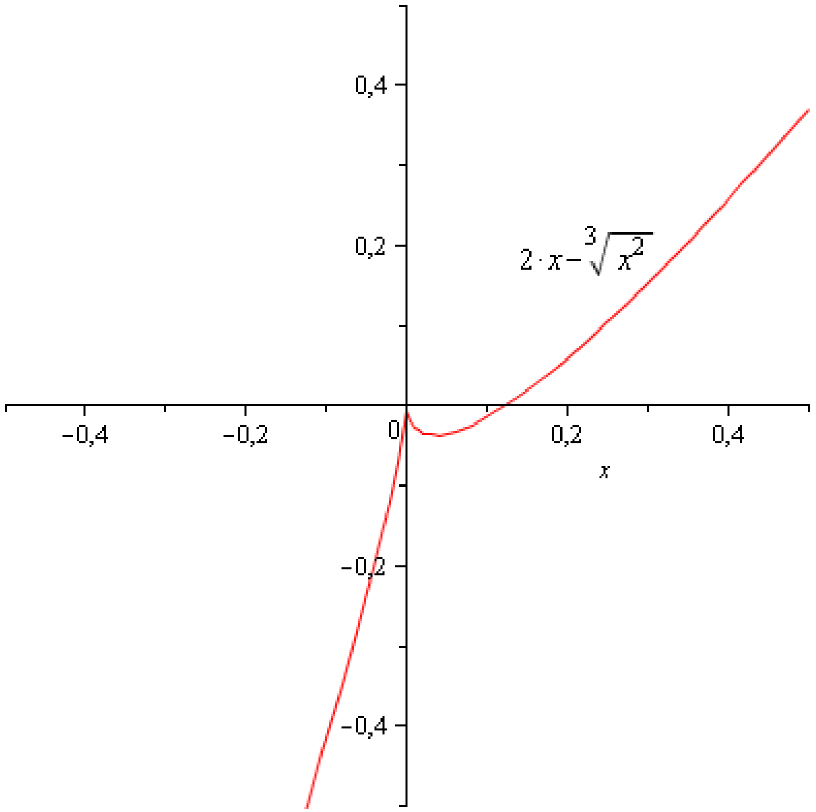
> $d1 := diff(y, x)$

$$d1 := 2 - \frac{2}{3}\,\frac{x}{\left(x^2\right)^{2/3}}$$

> $eval(d1, x = 0)$

```
Error, numeric exception: division
by zero
```

> $plot(y, x = -0.5..0.5, -0.5..0.5)$



Команды для поиска экстремумов

- **extrema(f,{cond},x,\`s\`)** – поиск экстремумов, удовлетворяющих ограничениям cond, для функции от переменных x,y
- s – необязательное имя параметра для координат точек экстремумов
- **extrema(f,{},x,\`s\`)** – поиск экстремумов функции на всей числовой оси

Поиск глобальных минимумов

- **minimize(f) ; minimize(f, location)** – поиск глобальных минимумов
- **location** – ключевое слово для вывода точек минимумов

Поиск локальных минимумов

- **minimize(f, x=x1..x2) ; minimize(f, x=x1..x2,location)** – поиск минимальных значений функции на отрезке [x1,x2] .
- Возможный синтаксис: **minimize(f, x<a); minimize(f, x>b)** – поиск на полуоси (−∞;a) или (b,+∞)

Поиск глобальных и локальных максимумов

Все аналогично для команды **maximize**

$$> \ restart, y := \frac{x^4}{(1+x)^3}:$$

$$> \ extrema(y, \{\ \}, x, \text{`}s\text{`}); s$$

$$\left\{0, -\frac{256}{27}\right\}$$

$$\{\{x=-4\}, \{x=0\}\}$$

Пример: поиск экстремумов и точек экстремумов

> $y := \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$:

> $minimize(y, x < -1)$; $maximize(y, x < -1, location)$

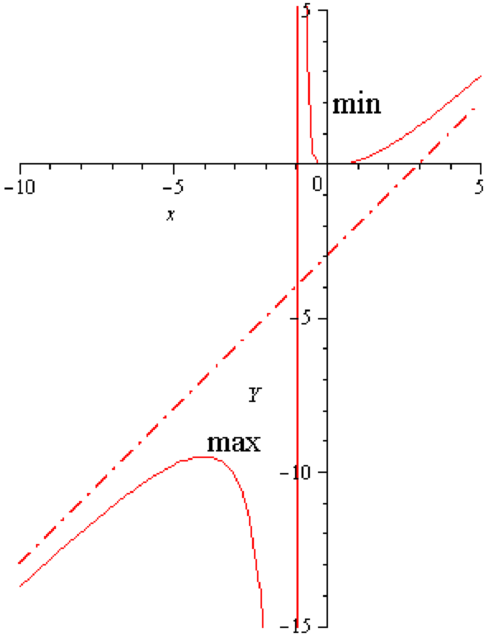
$$-\infty$$

$$-\frac{256}{27}, \left\{\left[\{x=-4\}, -\frac{256}{27}\right]\right\}$$

> $maximize(y, x > -1)$; $minimize(y, x > -1, location)$

$$\infty$$

$$0, \{[\{x=0\}, 0]\}$$



Пример поиска экстремумов у функции с точкой перегиба

> $restart;\ y := \dfrac{x^3}{4 - x^2}:$

> $extrema(y, \{\ \}, x, 's');\ s;$

$$\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$$

$$\{\{x=0\}, \{x=-2\sqrt{3}\}, \{x=2\sqrt{3}\}\}$$

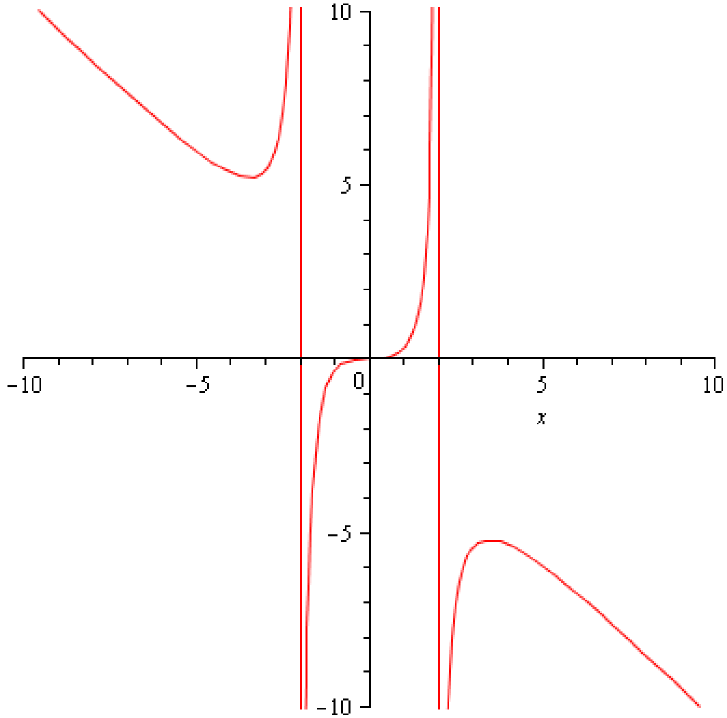
> $minimize(y)$

$$-\infty$$

> $maximize(y)$

$$\infty$$

> $plot(y, x=-10..10, -10..10)$



> $minimize(y, x < -2, location)$

$$3\sqrt{3}, \{[\{x=-2\sqrt{3}\}, 3\sqrt{3}]\}$$

> $maximize(y, x > 2, location)$

$$-3\sqrt{3}, \{[\{x=2\sqrt{3}\}, -3\sqrt{3}]\}$$

> $minimize(y, x=-2..2, location)$

$$-\infty, \{[\{x=-2\}, -\infty]\}$$

> $maximize(y, x=-2..2, location)$

$$\infty, \{[\{x=2\}, \infty]\}$$

> $d1 := diff(y, x);$

$$d1 := \frac{3x^2}{4-x^2} + \frac{2x^4}{(4-x^2)^2}$$

> $eval(d1, x=0.1)$

$$0.007531359727$$

> $eval(d1, x=-0.1)$

$$0.007531359727$$

В точке x=0 прозводная не меняет знак,
это точка перегиба

В точке x= $-2\sqrt{3}$ локальный минимум fmin=$3\sqrt{3}$

В точке x=$2\sqrt{3}$ локальный максимум fmax=$-3\sqrt{3}$

Разложение в ряд и аппроксимация функций

- Разложение функции в степенной ряд
- Разложение функции в ряд Тейлора
- Полиномиальная интерполяция

Разложение функции в степенной ряд

- **series(f(x), x=a, n)** – разложение функции f в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

где **x0** – точка, в окрестности которой производится разложение,
n – порядок разложения. Если порядок не указан, то он определяется значением константы **Order**

> $series\left(e^{-x}\sqrt{x+1}, x = 0\right)$

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{48}x^3 - \frac{79}{384}x^4 + \frac{503}{3840}x^5 + O\left(x^6\right)$$

> $Order := 10:$

> $series\left(e^{-x}\sqrt{x+1}, x = 0\right)$

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{48}x^3 - \frac{79}{384}x^4 + \frac{503}{3840}x^5 - \frac{3953}{46080}x^6 + \frac{39317}{645120}x^7 - \frac{479071}{10321920}x^8 + \frac{6886063}{185794560}x^9 + O\left(x^{10}\right)$$

> $series\left(\frac{x}{1 - x - x^2}, x = 0, 5\right)$

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + O\left(x^5\right)$$

> $convert(\%, polynom)$

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4$$

Разложение функции в ряд Тейлора

- **taylor(f(x), x=a, n)** – разложение функции одной переменной в ряд Тейлора

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

- **coeftayl(f(x), vars, n)** – коэффициент при члене порядка **n** по переменным разложения **vars**
- **mtaylor(f(x), [x1=a1,...,xn=an], n)** – разложение функции многих переменных в ряд Тейлора

> $restart$

> $f := \sin(x) + \cos(x)$:

> $taylor(f, x=0)$

$$1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+O(x^6)$$

> $taylor(f, x=0, 4)$

$$1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+O(x^4)$$

> $coeftayl(f, x=0, 3)$

$$-\frac{1}{6}$$

Разложение в ряд Тейлора: иллюстрация

Разложение функции многих переменных

> $mtaylor(\sin(x^2+y^2), [x=0, y=0], 10);$

$$x^2+y^2-\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{2}y^2x^4-\frac{1}{2}y^4x^2-\frac{1}{6}y^6$$

> $coeftayl(\sin(x^2+y^2), [x, y]=[0, 1], [0, 0]);$

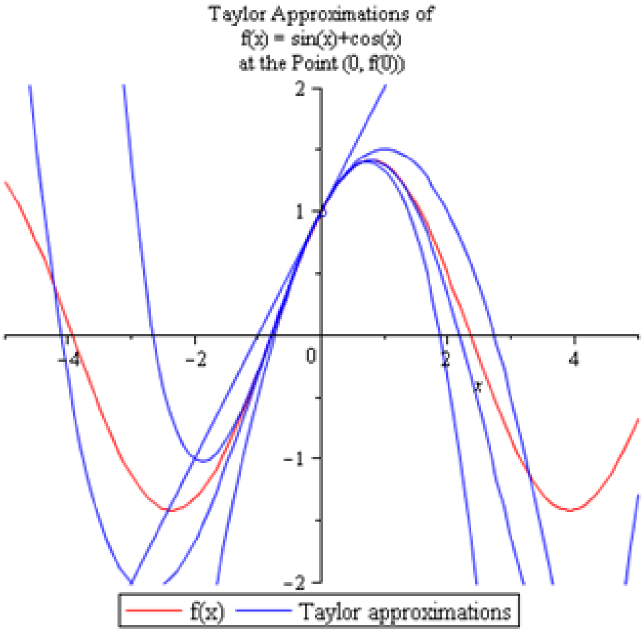
$$\sin(1)$$

Иллюстрация разложения в ряд Тейлора с помощью команды TaylorApproximation

> $with(Student[Calculus1]) : f := \sin(x)+\cos(x) : TaylorApproximation(f, x=0, \mathrm{order}=4)$

$$1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$$

> $TaylorApproximation(f, x=0, \mathrm{output}=\mathrm{plot}, \mathrm{order}=1..4, \mathrm{view}=[-5..5, -2..2]);$



Полиномиальная интерполяция

- **interp(x, y, v)**
  - **x** – список независимых переменных x[1], ..., x[n+1]
  - **y** – список независимых переменных y[1], ..., y[n+1]
  - **v** – независимая переменная
- Новая команда: **PolynomialInterpolation** из пакета **CurveFitting**
- **PolynomialInterpolation(xydata, v, opts)**
- **PolynomialInterpolation(xdata, ydata, v, opts)**
  - **xydata** – двумерный массив или матрица точек [[x1, y1], [x2, y2], ..., [xn, yn]]
  - **xdata** – список независимых переменных [x1, x2, ..., xn]
  - **ydata** – список независимых переменных [y1, y2, ..., yn]
  - **v** – независимая переменная
  - **opts** – опции в форме **form=option**, где option может принимать значения **Lagrange**, **monomial**, **Newton** или **power**

> $X := [0, 1, 2, 3, 4, 5] : Y := [0, 1, 4, 3, 2, 1] : f := interp(X, Y, x);$

$$f := -\frac{7}{60}x^5 + \frac{19}{12}x^4 - \frac{91}{12}x^3 + \frac{173}{12}x^2 - \frac{73}{10}x$$

> $with(CurveFitting); PolynomialInterpolation([[0, 0], [1, 3], [2, 1], [3, 3]], z)$

$$\frac{3}{2}z^3 - 7z^2 + \frac{17}{2}z$$

Сумма и произведение ряда

- Операция символьного суммирования
- Бесконечные и конечные произведения

Вычисление суммы ряда

- Команда **sum** выполняет определенное и неопределенное символьное суммирование
- **sum(f, k=1..∞)** – сумма ряда
- **sum(f, k=m..n)** – частичная сумма ряда
- **Sum** – аналогичная инертная команда

$$\sum_{i=k}^{n} f$$

> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\infty$$

> $sum\left(\frac{1}{n}, n = 1 ..infinity\right)$

$$\infty$$

```
> Sum(1/n!,n=0..infinity)=sum(1/n!,
n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}$; $evalf(\%)$

$$3\,e^2 - 1$$

$$21.16716830$$

> $\sum_{n=1}^{10} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}$; $evalf(\%)$

$$\frac{42862}{2025}$$

$$21.16641975$$

> $\sum_{n=1}^{30} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}$; $evalf(\%)$

$$\frac{836648333795370202334220 76}{395257562119053391570312 5}$$

$$21.16716830$$

Сумма ряда: примеры

При указании только индекса суммирования Maple попытается получить формулу для суммы в виде S(k), где S(k+1)-S(k)=a(k), где a(k) - общая зависимость слагаемых от индекса суммирования k

> $\sum_{k} k^2$

$$\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$$

> $\sum_{k=0}^{n-1} k$

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

```
> Sum(x^n/n!,n=0..infinity)=sum(x^n/n!,n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Частичная и полная сумма ряда

> $a[n] := \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$:

> $sum(a[n], n = 1..N)$

$$-\frac{1}{3(3N+1)} + \frac{1}{3}$$

> $sum(a[n], n = 1..infinity)$

$$\frac{1}{3}$$

Сравнение команды суммирования sum и команды добавления add

> $sum(x^n, n=1..10)$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

> $add(x^n, n=1..10)$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

> $sum(x^n, n=1..1000)$

$$\frac{x^{1001}}{x-1} - \frac{x}{x-1}$$

> $add(x^n, n=1..1000);$

$$x^{36} + x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18}$$
$$+ x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29}$$
$$+ x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44}$$

$$+ x^{980} + x^{981} + x^{983} + x^{982} + x^{984} + x^{985} + x^{986} + x^{987} + x^{988} + x^{989}$$
$$+ x^{990} + x^{991} + x^{992} + x^{993} + x^{994} + x^{995} + x^{996} + x^{997} + x^{998} + x^{999}$$
$$+ x^{1000} + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

> $sort(\%, x, ascending)$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14}$$
$$+ x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25}$$
$$+ x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36}$$
$$+ x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44} + x^{45} + x^{46} + x^{47}$$
$$+ x^{48} + x^{49} + x^{50} + x^{51} + x^{52} + x^{53} + x^{54} + x^{55} + x^{56} + x^{57} + x^{58}$$

Вычисление произведений

- Команда **product** вычисляет символьные произведения
- **product(f, k=1..∞)** – произведение ряда
- **product(f, k=m..n)** – частичное произведение ряда
- **Product** – аналогичная инертная команда

$$\prod_{i=k}^{n} f$$

$> \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$\frac{1}{2}$$

```
> Product((n^3-1)/(n^3+1), n = 2 .. infinity) = product((n^3-1)/(n^3+1), n = 2 .. infinity);
```

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}$$

Сравнение с командой умножения mul

$> \prod_{k=1}^{3}(k^2);$

$$36$$

$> mul(k^2, k=1..3)$

$$36$$

$> \prod_{k=1}^{n}(k^2)$

$$\Gamma(n+1)^2$$

Интегрирование

- Интегрирование: неопределенный и определенный интегралы
- Численное интегрирование
- Методы интегрирования: интегрирование по частям и замена переменных
- Повторные, двойные и тройные интегралы
- Графическая аппроксимация определенного интеграла

Интегрирование функции одной переменной

- **int(f, x)** – неопределенный интеграл
- **int(f, x=a..b)** – определенный интеграл
- **Int** – аналогичная инертная команда

$$\int f \, dx \qquad \int_a^b f \, dx$$

$> \displaystyle\int \sin(x)\, dx$

$$-\cos(x)$$

$> \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$

$$2$$

$> Int((1+\cos(x))\hat{}2, x=0..\mathrm{Pi}) = int((1+\cos(x))\hat{}2, x=0..\mathrm{Pi})$

$$\int_0^{\pi} (1+\cos(x))^2 \, dx = \frac{3}{2}\pi$$

Вычисление несобственных интегралов и численное интегрирование

- **evalf(int(f, x=x1..x2), digits)** – вычисление интеграла с точностью digits (по умолчанию равна константе Digits)

Несобственный интеграл

$$> \ assume(-1 < a); \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-a x^2}}{x e^{x^2}} \, dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + a\sim)$$

Численное интегрирование

$$> \ evalf(int(\cos(x)/x, x = Pi/6..Pi/4), 15);$$

$$0.322922981113732$$

Методы интегрирования: интегрирование по частям

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \qquad \int u\,v'\,dx = u\,v - \int v\,u'\,dx \qquad \int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

1) команда **intparts** из устаревшего пакета **student**

intparts(f, u), где f – выражение вида $\int u \cdot v'\,dx$

- **intparts(Int(F, x), u)**

2) команды **IntRules** или **Rule** из пакета **Student[Calculus1]**

```
> with(student):
> J := x^3·sin(x):
> intparts(Int(J, x), x^3)
```

$$-x^3\cos(x) - \left(\int \left(-3x^2\cos(x)\right)dx\right)$$

```
> intparts(%, x^2)
```

$$-x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) + \int \left(-6x\sin(x)\right)dx$$

```
> value(%)
```

$$-x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\sin(x) + 6x\cos(x)$$

```
> int(J, x)
```

$$-x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\sin(x) + 6x\cos(x)$$

```
> with(Student[Calculus1]):
```

> $Rule_{parts,\ \sin(x),\ e^x}\left(\int \sin(x)\,e^x\,dx\right)$ #u=sin(x),v'=e^x

$$\int \sin(x)\,e^x\,dx = \sin(x)\,e^x - \left(\int e^x\cos(x)\,dx\right)$$

> $Rule_{parts,\ \cos(x),\ e^x}(\%)$ #u=cos(x), v'=e^x

$$\int \sin(x)\,e^x\,dx = \sin(x)\,e^x - e^x\cos(x) + \int\left(-\sin(x)\,e^x\right)dx$$

```
> value(%)
```

$$\int \sin(x)\,e^x\,dx = \frac{1}{2}\sin(x)\,e^x - \frac{1}{2}e^x\cos(x)$$

Методы интегрирования: замена переменных (метод подстановки)

1) команда **changevar** из устаревшего пакета **student**

changevar(s, f), где s – выражение вида h(x) = g(u), f – выражение вида Int(F(x), x = a...b)

- **changevar(h(x)=t, Int(f, x), t)** – замена переменных

2) команда **Change** из пакета **IntegrationTools** или команда **ChangeofVariables** из пакета **Student[MultivariateCalculus]**

$$\int F(x)dx = \left|x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt\right| = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

> $with(student):$

> $f := \dfrac{1}{1+\cos(x)}:$

> $changevar\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = t, Int\left(f, x = -\dfrac{\pi}{2} .. \dfrac{\pi}{2}\right), t\right)$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1+\cos(2\arctan(t)))\,(1+t^2)}\, dt$$

> $value(\%)$

$$2$$

> $int\left(f, x = -\dfrac{\pi}{2} .. \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$2$$

> $with(IntegrationTools):$

> $J := Int\left(\dfrac{1}{1+\cos(x)}, x = -\dfrac{\pi}{2} .. \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$J := \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+\cos(x)}\, dx$$

> $Change\left(J, \tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = t\right)$

$$2\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+\cos(2\arctan(t)))\,(1+t^2)}\, dt\right)$$

> $value(\%)$

$$2$$

Интегрирование функции многих переменных

- Повторный интеграл – вложенность команд **int**

1) команды **Doubleint** и **Tripleint** устаревшего пакета **student**

- **Doubleint(f(x, y), D)** – двойной интеграл, где **D** – область интегрирования
- **Tripleint(f(x, y, z),x, y, z, V)** – тройной интеграл, где **V** – область интегрирования

2) Команда **MultiInt** пакета **Student[MultivariateCalculus]**

- **MultiInt(f(x,y), x=a..b, y=c..d, opts)**
- **MultiInt(f(x,y,z), x=a..b, y=c..d, z=e..f, opts)**
- Важен порядок пределов интегрирования!

```
> Int(Int(y^3/(x^2+y^2), x=0..y), y=2..4) = int(int(y^3/(x^2+y^2), x=0..y), y=2..4)
```

$$\int_2^4 \int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{14}{3}\pi$$

Интегрирование функции многих переменных: примеры

> $with(student):$

> $J2 := Doubleint\left(\sin(x + 2\cdot y), x = y..\frac{\pi}{2} - y, y = 0..\frac{\pi}{2}\right)$

$$J2 := \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{y}^{\frac{1}{2}\pi - y} \sin(x + 2\,y)\, dx\, dy$$

> $value(J2)$

$$\frac{2}{3}$$

> $J3 := Tripleint\left(4 + z, y = x^2..1, x = -1..1, z = 0..2\right)$

$$J3 := \int_{0}^{2} \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} (4 + z)\, dy\, dx\, dz$$

> $value(J3)$

$$\frac{40}{3}$$

> $Doubleint(h\cdot g, x, y, C)$

$$\iint_{C} h\, g\, dx\, dy$$

> $with(Student[MultivariateCalculus]):$

> $MultiInt\left(3\,x^2 + 3\,y^2, x = 1..4, y = -1..6\right)$

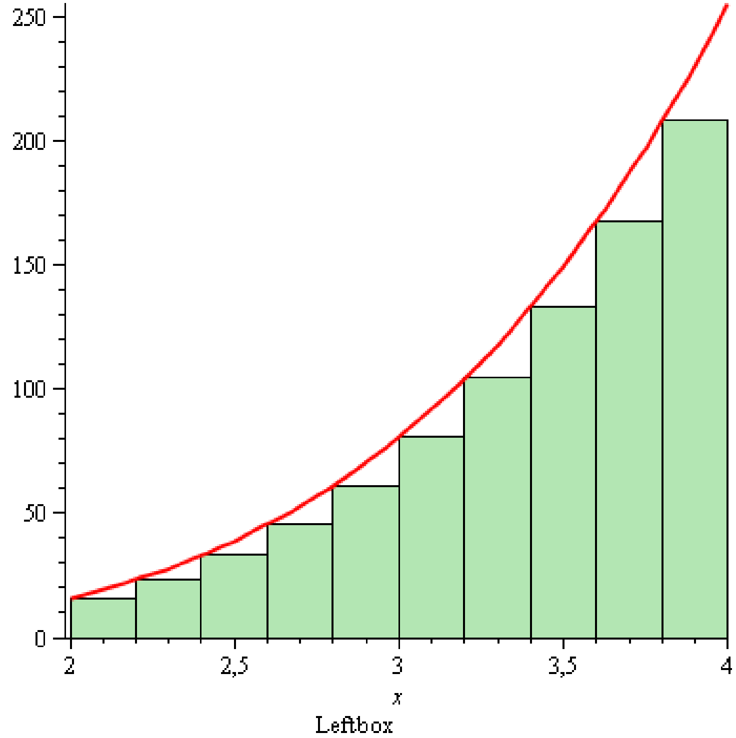
$$1092$$

Графическая аппроксимация определенного интеграла: команды устаревшего пакета student

- **leftbox(f(x), x=a..b, n, 'shading'=<color>, <plot options>)** – графическая аппроксимация интеграла в пределах от a до b с помощью левой Римановой суммы, n – число аппроксимирующих прямоугольников (необязательный параметр), shading – заливка прямоугольников
- **rightbox** – аналогичная аппроксимация интеграла с помощью правой Римановой суммы
- **middlebox** – аналогичная аппроксимация интеграла с помощью средней Римановой суммы
- **leftsum(f(x), x=a..b, n)** – значение левой Римановой суммы
- **rightsum(f(x), x=a..b, n)** – значение правой Римановой суммы
- **middlesum(f(x), x=a..b, n)** – значение средней Римановой суммы

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью левой суммы (пакет student)

$>$ $with(student) : leftbox\left(x^4, x = 2..4, 10, color = RED, caption = \text{"Leftbox"}\right);$
$leftsum\left(x^4, x = 2..4, 10\right); evalf(\%)$

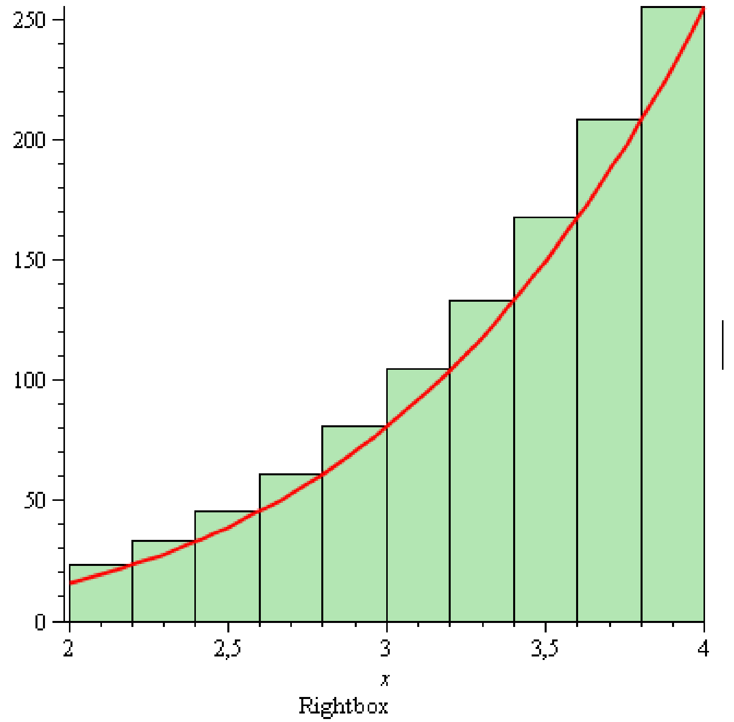


$$\frac{1}{5} \sum_{i=0}^{9} \left(2 + \frac{1}{5} i\right)^4$$

$$175.1465600$$

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью правой суммы (пакет student)

> $rightbox\left(x^4, x = 2..4, 10, color = RED, caption = \text{"Rightbox"}\right);\ rightsum\left(x^4, x = 2..4, 10\right);$
> $evalf(\%)$

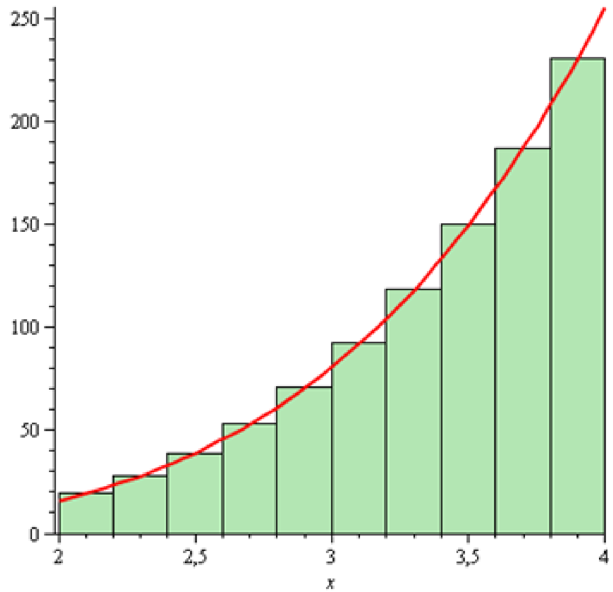


$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\left(2+\frac{1}{5}i\right)^4$$

$$223.1465600$$

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью средней суммы (пакет student)

> $middlebox\left(x^4, x = 2..4, 10, color = RED, caption = \text{"Middlebox"}\right); middlesum\left(x^4, x = 2..4, 10\right); evalf(\%)$



Middlebox

$$\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{21}{10}+\frac{1}{5}\,i\right)^4$$

$$198.0267600$$

Увеличим число прямоугольников

> $leftsum\left(x^4, x = 2..4, 1000\right) : evalf(\%); rightsum\left(x^4, x = 2..4, 1000\right) : evalf(\%)$

$$198.1600747$$

$$198.6400747$$

Графическая аппроксимация определенного интеграла: команды пакета Student[Calculus1]

- **ApproximateInt(f(x), x = a..b, opts)**
- **ApproximateInt(f(x), a..b, opts)**
- **ApproximateInt(Int(f(x), x = a..b), opts)** – числовая или графическая (с опцией **output=plot**) аппроксимация интеграла в пределах интегрирования от a до b

Некоторые опции (подробнее см. в Help)

- **method = <u>lower, upper, left, midpoint, right</u>, trapezoid, simpson, simpson[3/8], boole, newtoncotes[posint], random** или **procedure** – метод аппроксимации интеграла (по умолчанию – средняя Риманова сумма)
- **output = value, sum, plot,** или **animation** – результат (по умолчанию – приближенное значение value)
- **partition = posint, list(algebraic), random[algebraic]** или **algebraic** – количество интервалов (прямоугольников), по умолчанию равно 10

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла (команды пакета Student[Calculus1])

> $with(Student[Calculus1]):$

> $f := \sin(x):$

> $int(f, x = 0..\pi);$

$$2$$

Приближенное значение по умолчанию

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi); evalf(\%)$

$$\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5} + \frac{3}{20}\pi\sqrt{2} + \frac{1}{10}\pi\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$2.008248408$$

Значение средней Римановой суммы

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = midpoint); evalf(\%)$

$$\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5} + \frac{3}{20}\pi\sqrt{2} + \frac{1}{10}\pi\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$2.008248408$$

Значение левой Римановой суммы

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = left); evalf(\%)$

$$\frac{1}{10}\pi + \frac{1}{10}\pi\sqrt{5} + \frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$1.983523537$$

Значение правой Римановой суммы

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = right); evalf(\%)$

$$\frac{1}{10}\pi + \frac{1}{10}\pi\sqrt{5} + \frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$1.983523537$$

Значение верхней Римановой суммы

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = upper);$

$$2.297682802$$

Значение нижней Римановой суммы

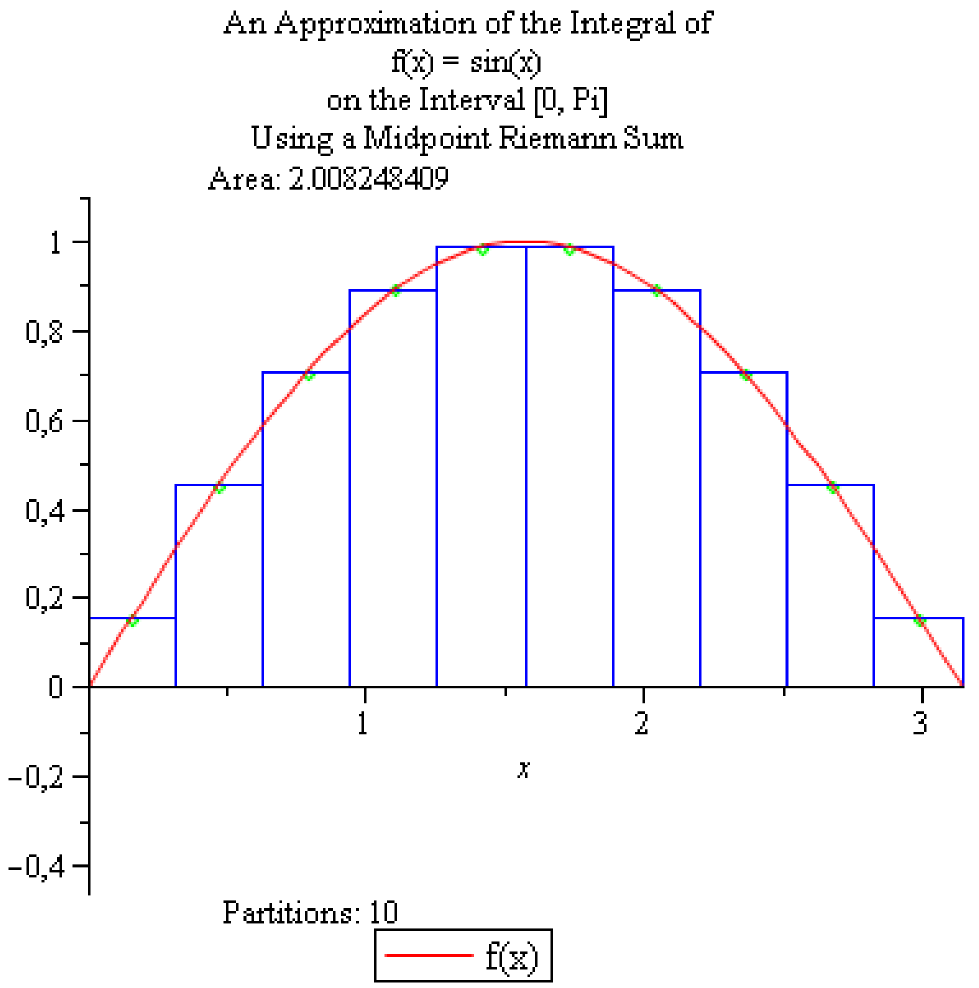
> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = lower);$

$$1.669364272$$

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью средней суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление средней Римановой суммы

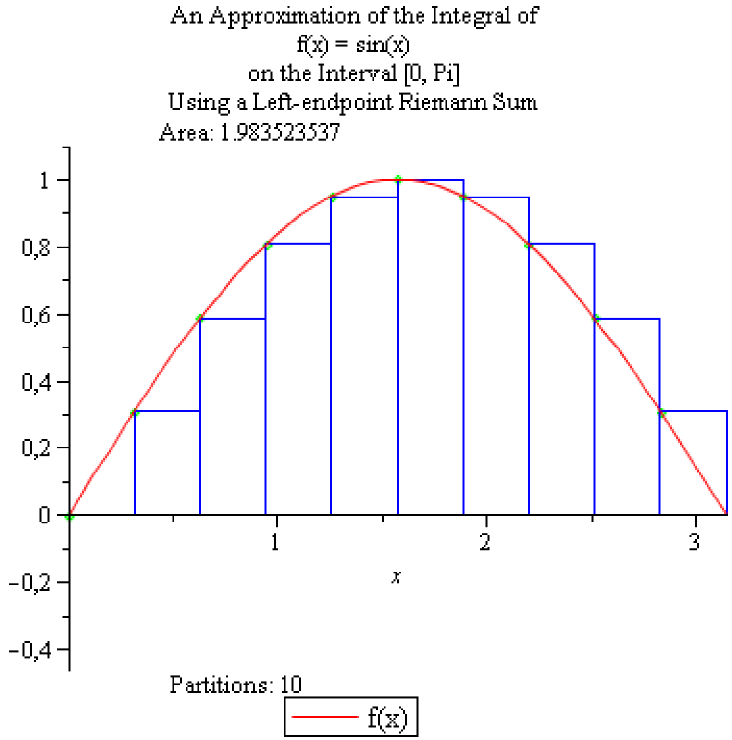
> $ApproximateInt(f, x = 0\,..\pi, method = midpoint, output = plot)$



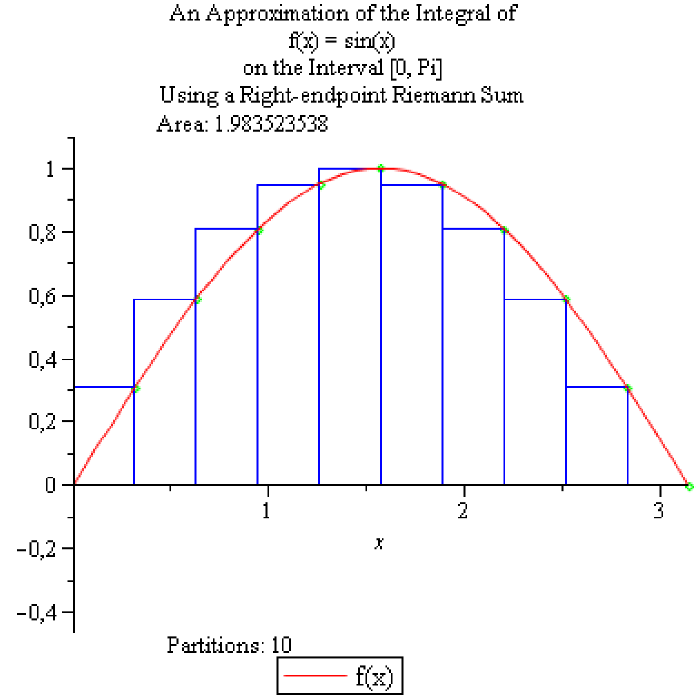
Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью левой и правой суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление левой и правой Римановых сумм

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = left, output = plot)$



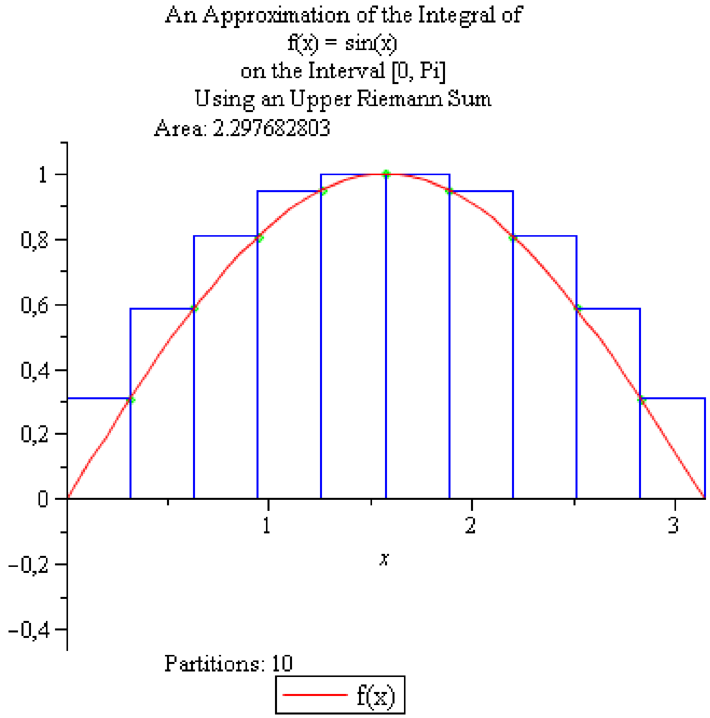
> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = right, output = plot)$



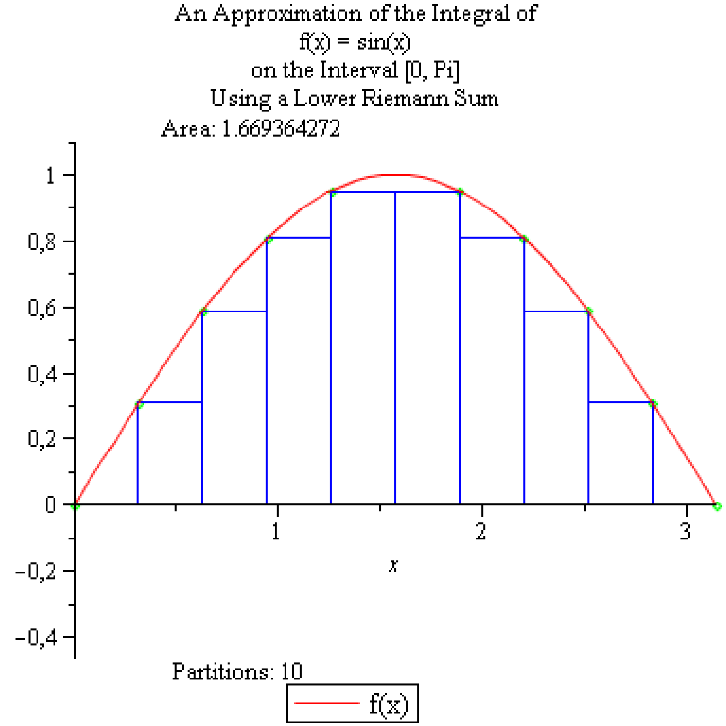
Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью верхней и нижней суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление верхней и нижней Римановых сумм

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = upper, output = plot)$



> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = lower, output = plot)$



Интегральные преобразования

- Преобразование Фурье
- Преобразование Лапласа

Преобразование Фурье

- **fourier(f(x), x, k)** – преобразование Фурье

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

- **invfourier(F(k), k, x)** – обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

- Команды интегральных преобразований входят в пакет **inttrans**

> $with(inttrans) : assume(0 < a); fourier\left(e^{-a\,|x|}, x, k\right)$

$$\frac{2\,a\sim}{a\sim^2 + k^2}$$

> $invfourier\left(\frac{1}{k^2 - a^2}, k, x\right)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin(a\sim x)\,(-2\,\mathrm{Heaviside}(x) + 1)}{a\sim}$$

Преобразование Фурье: косинус- и синус-преобразования

- **fouriersin(f(x), x, k)** – синус-преобразование Фурье

$$F(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin kx\,dx$$

- **fouriercos(f(x), x, k)** – косинус-преобразование Фурье
- $$F(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos kx\,dx$$
- **fouriersin(F(k), k,x); fouriercos(F(k),k,x)** - обратные преобразования

```
> f := exp(-a*x)*sin(b*x) : assume(0 < a);
> fouriersin(f, x, k);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\,a\sim\left(\frac{1}{a\sim^2+(b-k)^2}-\frac{1}{a\sim^2+(k+b)^2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

```
> fouriercos(f, x, k);
```

$$\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{k+b}{a\sim^2+(k+b)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{b-k}{a\sim^2+(b-k)^2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

Преобразование Лапласа

- **laplace(f(x), x, p)** – преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

- **invlaplace(F(p), p, x))** – обратное преобразование Лапласа

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{px} dp$$

$> with(inttrans) : F(p) = laplace(\cos(a*x)*\sinh(b*x), x, p);$

$$F(p) = \frac{b\left(-a\sim^2 - b^2 + p^2\right)}{\left((p+b)^2 + a\sim^2\right)\left((p-b)^2 + a\sim^2\right)}$$

$> assume(a > 0) : invlaplace(1/(p\hat{}2 + 2*a*p), p, x)$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1 - e^{-2\,a\sim x}}{a\sim}$$