1　特異値分解 (Singular Value Decomposition;SVD)

$$A = U\Sigma V \tag{1}$$

ここで A を $m \times m$ 行列で，U は $m \times m$ 直交行列，Σ は $m \times n$ 行列，V は $n \times n$ 直交行列である．D は対角行列であり，d_i^* を行列 A の特異値とすると，

$$D = diag(d_1^*, d_2^*, ..., d_n^*) \tag{2}$$

とかける．特異値とは，

特異値分解の性質

- A が与えられたとき，特異値を定める行列 Σ は一意に決まりますが，直交行列 U,V は一意に定まるとは限りません。
- 行列の（0 でない）特異値の数は，その行列のランクと一致します。
- 行列の特異値の二乗和はその行列の全成分の二乗和と等しいです。先ほどの具体例ではどちらも 24 になっています。この値の平方根を行列のフロベニウスノルムと言います。
- A が対称行列のとき，A の固有値と特異値は一致します。対称行列は直交行列で対角化できるからです。
- A^TA の 0 でない固有値の正の平方根は A の特異値です。これは，$A = U\ \Sigma\ V$ のとき $A^TA = V^T\,\Sigma^T\,\Sigma\ V$ であることから分かります。同様に，AA^T の 0 でない固有値の正の平方根も A の特異値です。

2　一般逆行列

定義　A を (n, m) 型行列とする線形方程式 $Ax = y$ が解 x をもつような y に対して，$x = A^-y$ がこの方程式の一つの解となる場合，(m, n) 型行列 A^- を A の一般逆行列という．ムーアペンローズ一般逆行列 (Moore and Penrose generalized inverse) の定義

1. $AA^-A = A$
2. $A^-AA^- = A^-$
3. $(AA^-)' = AA^-$
4. $(A^-A)' = A^-A$

参考文献

[1] 特異値分解の定義，性質，具体例, https://mathtrain.jp/svd

[2] 一般逆行列 https://www.slideshare.net/wosugi/ss-79624897

[3] 射影行列・一般逆行列・特異値分解