台車の等価質量 M[kg]，レールとの間の摩擦係数 F[N] は次のように求められる．

$$\begin{aligned} M &= \frac{\alpha h}{a_0} \\ &= 8.12057 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} F &= M a_1 \\ &= 34.82427 \end{aligned} \tag{27}$$

また，時間応答に用いるパラメータは次のように求められる．

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{a_0} \\ &= 4.973897 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \\ &= 0.431091 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \zeta \omega_n \\ &= 2.144202 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ &= 4.487990 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \\ &= 0.445702 \end{aligned} \tag{32}$$

これより，時間応答は次のようになる．

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\beta t} \cos(\gamma t - \delta)\right) \\ &= 0.394657 \left(1 - 1.22827 e^{-2.1442t} \cos(4.48799t - 0.445701)\right) \end{aligned} \tag{33}$$

実験データと求められた時間応答 $y(t)$ の相対誤差の平均を式 (34) を用いて求める．ただし，$x(t)$ は実験データを表す．誤差の平均は 3.1668[%] となった．

$$E = \frac{1}{26} \Sigma_{t=0}^{t=2.5} \frac{|y(t) - x(t)|}{y(t)} \tag{34}$$

状態方程式より可制御性についての特性方程式は

$$\begin{aligned}\det(s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{f})) &= s(s+5.1616+2.5924f_2)+2.5924f_1 \\ &= s^2+(5.1616+2.5924f_2)s+2.5924f_1 \end{aligned} \tag{42}$$

であり，可観測性についての特性多項式は

$$\begin{aligned}\det(s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{c})) &= (s+k_1)(s+5.1616)+k_2 \\ &= s^2+(5.1616+k_1)s+(5.1616k_1+k_2) \end{aligned} \tag{43}$$

である．極配置法による可制御性についての特性多項式は

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)=s^2-(\lambda_1+\lambda_2)s+\lambda_1\lambda_2 \tag{44}$$

であり，可観測性についての特性多項式は

$$(s-\lambda_3)(s-\lambda_4)=s^2-(\lambda_3+\lambda_4)s+\lambda_3\lambda_4 \tag{45}$$

である．これらの式より，係数比較を行うことにより，次の関係式を示すことができる．

$$\begin{cases} f_1=-\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2.5924} & (46) \\ f_2=-\dfrac{\lambda_1+\lambda_2-5.1616}{2.5924} & (47) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1=-\lambda_3-\lambda_4-5.1616 & (48) \\ k_2=\lambda_3\lambda_4-5.1616k_1 & (49) \end{cases}$$

これらの式を用いて実験に用いるパラメータを求め，表にまとめた．

表 1　制御実験に使用したパラメータ

実験番号	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	f_1	f_2	k_1	k_2	図
1	-10	-10	-10	-10	38.5743	5.7238	14.8384	23.4101	13-15
2	-30	-30	-10	-10	347.1686	21.1535	14.8384	23.4101	16-18
3	-5	-5	-10	-10	9.6436	1.8664	14.8384	23.4101	43-45
4	-20	-20	-20	-20	154.2972	13.4387	34.8384	220.1781	46-48
5	-20	-20	-30	-30	154.2972	13.4387	54.8384	616.9461	49-51

6　考察

実験番号 5 について，フィードバックゲインの極の位置を -20 より小さくすると，定常応答の振動が見られる．これは，目標値に対して，操作量が大きくなるためである．

しかし，実験番号 4，5 を比較すると，実験番号 2 は実験番号 5 に比べ，オブザーバの極が実軸に近いため，入力電圧が大きく変化せず，定常応答の振動が見られなかった．
実験番号 1，3 を比較すると，3 の入力電圧の最大値は小さくなることが分かる．また，速度についても小さな結果となった．　実験番号 1，2 を比較すると，整定時間はあまり変わらない結果となった．これは入力電圧の最大値が 10[V] であるためである．

7　課題

(2)　制御結果について考察し，収束速度を上げる．過渡応答の振動を抑える，もしくは入力量を抑えるような結果を得るためには，制御系をどのように改良すればよいか検討せよ．

極の値だけで制御されたシステムの挙動が決まるわけではないが，極の値を選ぶための一般的な指針は以下の通りである．極の実部を負の大きな値に取れば，目標値への収束を速くすることができる．ただし，その分，ゲイン K が大きくなり，必要な入力 $u(t)$ が増大することが多い．一方，極の虚部によって，状態 $x(t)$ の振動的応答を操作できる．実部の大きさに対して虚部の大きさを小さくすることで過大なオーバーシュートを抑制できるが，ある程度の大きさの虚部を与えることで，出力など一部の状態変数の応答を速くすることが可能である [3]．そのため，収束速度を上げるためには，オブザーバの極とフィードバックゲインの極の値を大きくすることが必要である．ただし，オブザーバの極の実部がフィードバックゲインの極の実部より小さくなければならない．過渡応答の振動を抑えるためには，フィードバックゲインの極とオブザーバの極の虚部が小さくなければならない．入力量の最大値を抑えるためには，フィードバックゲインの極の実部が実軸の近傍になければならない．

参考文献

[1] 坂本哲三，電気機器の電気力学と制御，p157，p158，2018．
[2] 劉康志ら，現代制御理論通論，p121，2006．
[3] 川田昌克ら，倒立振子で学ぶ制御工学，p88，2017．