Corolario:

- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

$\quad \parallel$

- $P(a < x < b) = P(\overset{0}{\widehat{a = x}}) + P(a < x < b)$

$\quad \parallel$

- $P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b)$

- $P(x > a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - F(a)$

- $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

$\quad \parallel$

- $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

Definición: Dada una V.A $x$ continua. Se define el momento de orden $r$ con respecto a un parámetro como:

$$M_r(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^r f(x)dx$$

Definición: Dada una variable aleatoria $x$ continua, se define el momento ordinario de orden $r$ como:

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx$$

Definición: Dada una V.A. $x$ continua, se define la media o esperanza matemática como:

$$E(x) = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Definición: Dada una variable aleatoria $x$ continua se define el momento central de orden $r$ como:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^r f(x)dx$$

Definición Varianza $= \mu_2 = m_2 - (E(x))^2$

- $E(a+bx) = a + b\,E(x)$

- Moda: es aquel valor "Mo" que máximo a la función de densidad (caso VA continua) ó a la función de probabilidad (caso VA discreta)
- Mediana: "Me" es aquel valor que hace que $F(Me) = 1/2$ (ya sea VA continua o discreta)
- Cuantil: $c \in (0,1)$ Aquel valor $Q_c$ tal que: $F(Q_c) = c$

(15) $f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

- Varianza de x

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \underbrace{[E(x)]^2}_{1}$$

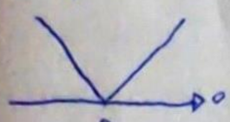
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x} dx = \left\{\begin{matrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = e^{-x} & v = -e^{-x}dx \end{matrix}\right\} = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^{-\infty} + 2\underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx}_{E(x)=1} + (-\infty^2 e^{-\infty} - (-0)^2 e^{-0}) = 2$$

$\Rightarrow V(x) = 2 - 1^2 = 1$

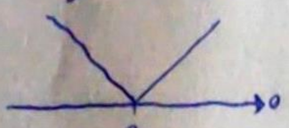
Ejemplo: x. Variable aleatoria continua

$f(x) = \max\{0, a - |2-x|\}$

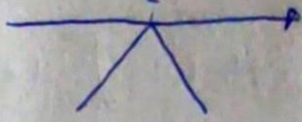
- Gráfica de $|x|$



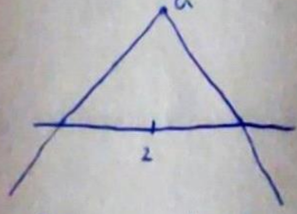

- Gráfica de $|2-x|$



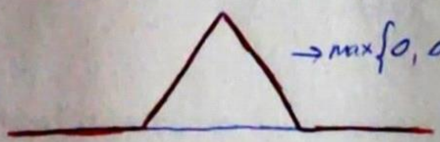

- Gráfica de $-|2-x|$




- Gráfica de $a - |2-x|$




- $\max\{0, a - |2-x|\}$




* Determina el valor del "a" para que $f(x)$ sea función de densidad

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$a - |2-x| = 0$

$a = |2-x| = \begin{cases} a = 2-x \\ \to x = 2-a \ (\text{si } 2-x > 0) \\ a = -(2-x) \\ \to x = 2+a \ (\text{si } 2-x < 0) \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0 + \text{Area Triangulo} + 0$

base : $(2+a) - (2-a) = 2a$

altura : a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{(2a)a}{2} = a^2 \qquad \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$\Rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} f(x)dx = a^2 = 1 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-1} \Rightarrow \text{porque } f(x) \geq 0 \\ \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

* Función de distribución

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ I_1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ I_2 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \frac{(x-1)}{2} & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{2}(3-x)^2 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$I_1 = \int_1^x (x-1)\,dx = \left[ \frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^x = \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$I_2 = \int_1^x f(x)dx = \underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{F(2)} + \int_2^x f(x)dx = F(2) + \int_2^x f(x)dx = \frac{1}{2} + \int_2^x 3 - x\,dx = \frac{1}{2} + \left[ -\frac{(3-x)^2}{2} \right]_2^x =$$

$$= \frac{1}{2} + \left( -\frac{(3-x)^2}{2} - \left( -\frac{(3-2)^2}{2} \right) \right) = 1 - \frac{1}{2}(3-x)^2$$

* Esperanza de $x$:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \in (1,2) \\ 3-x & si \quad x \in [2,3) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \ldots = 2$$

Distribución uniforme continua

$S_x = [a, b]$ $\quad f(x) = \begin{cases} K & si \quad x \in [a,b] \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$ $\quad \int_a^b f(x)dx = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{b-a}$

Distribución Normal

$S_x = \mathbb{R}$ $\qquad E(x) = \mu$ $\qquad V(x) = \sigma^2$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Desviación típica: $\sigma$

- Función de distribución:

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$\longrightarrow$ Es una integral que no se puede expresar en términos de funciones elementales.

Para conocer $F(x)$ la opción consiste en aproximarla:

- Matlab
- → Calculadora
- → Tabla.

Propiedades:

- Es simétrica. $\mu = \mu_o = \mu_e$

  $V(x) = \sigma^2$

- Propiedad reproductiva: Si $x \sim N(\mu_1, \sigma)$ $\Rightarrow x+y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma)$

  $y \sim N(\mu_2, \sigma)$

- Propiedad aditiva. Si $x \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, y además $x$ e $y$ son indep., entonces $x+y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

  $y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ $\quad x-y \sim N(\mu_1-\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

$E(a+bx) = a + b\,E(x)$

Desv. Típica $(a+bx)$ = $|b|$ · desv. Típica $(x)$

Si $x \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow a+bx \sim N(a+b\mu, |b|\sigma)$

Si $x \sim N(\mu, \sigma)$, entonces la variable $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ → tipificada sigue una normal $Z \sim N(0,1)$

En las tablas que se utilizan para aproximar la distribución normal tendremos tabulada la distribución $N(0,1)$

- $P(x=k) = \binom{10^6}{k} p^k q^{10^6-k}$

- $P(x \geq 1000) = \sum_{k \geq 1000} \binom{10^6}{k} p^k q^{10^6-k}$ ← puede ser costoso

Criterio práctico

Si $n > 30$, $np > 5$, $nq > 5$

$B(n,p) \approx N(np, \sqrt{npq})$

Uso de tablas para la normal

¿Cómo podría una prob de una V.A. que sigue una distrib. normal?

Ejemplo: Supongamos que me dan $x \sim N(\mu = 10, \sigma = 2)$

1º) Tipificar: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-10}{2} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$

2º) Supongamos que quiero calcular $P(5 < x < 10) \Rightarrow P\left(\frac{5-10}{2} < \underbrace{\frac{x-10}{2}}_{Z \sim N(0,1)} < \frac{10-10}{2}\right)$

Con lo que: $P(5<x<10) = P(-2'5 < Z < 0) = F(0) - \overset{\text{Función de distrib. } Z \sim N(0,1)}{F(-2'5)}$

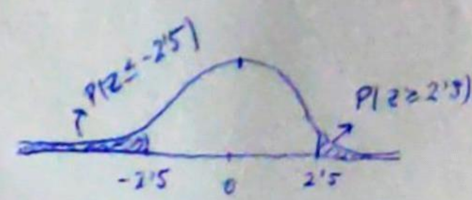
3º. Uso la tabla

La tabla proporciona $P(Z \geq x)$ [Ejemplo: $P(Z \geq 1'81) = 0'0351$] $P(Z \geq 1'145)$

$F(0) = P(Z \leq 0) = 1 - P(Z \geq 0) = 1 - 0'5 = 0'5$

$F(-2'5) = P(Z \leq -2'5) = P(Z \geq 2'5) = 0'0062$

pq la normal es sim mirando la tabla




$P(5<x<10) = F(0) - F(-2'5) = 0'5 - 0'0062 = 0'4938$

* ¿Cómo hago si me dan una prob $p$ y quiero encontrar $x$ tal que $P(X \geq x) = p$

1°) Como $X \sim N(\mu = 10, \sigma = 2)$

Tipifico: $P(X \geq x) = P\left(\underbrace{\frac{X-10}{2}}_{Z \sim N(0,1)} \geq \frac{x-10}{2}\right) = P\left(\frac{X-10}{2} \geq \frac{1'032-10}{2}\right) = P(Z \geq 1'016)$

$Z \sim N(0,1)$

Sea $z = \frac{x-10}{2}$

$P(X \geq x) = P(Z \geq z) = p$

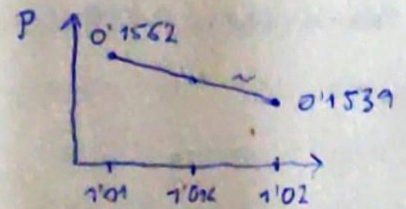
Supongamos $p = 0'00655$

$P(Z \geq 1'01) = 0'1562$

$P(Z \geq 1'02) = 0'1539$

2° Busco en la tabla $N(0,1)$ $z$ tal que $P(Z \geq z) = 0'0655 \Rightarrow z = 1'51$ (mirando tabla)

Como $z = 1'51$ y $z = \frac{x-10}{2} \Rightarrow 1'51 = \frac{x-10}{2} \Rightarrow x = 10 + 2 \cdot 1'51$




Ecuación de una recta que pasa por $(z_1, y_1), (z_2, y_2)$

$y(z) = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{z_2 - z_1}(z - z_1)$ $\quad \begin{cases} y(z_1) = y_1 \\ y(z_2) = y_2 \end{cases}$ Comprobar

$r \equiv y(z) = 0'1562 + \frac{(0'1539 - 0'1562)}{1'02 - 1'01}(z - 1'01)$

$P(Z \geq 1'016) \approx y(1'016) =$

• ¿Qué ocurre si me dan $p$ y quiero encontrar $x$ tal que $p(X \geq x) = p$?

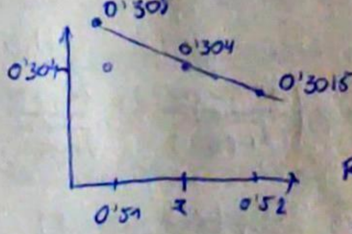
1°) Tipifico:

$$p\left(\frac{X-10}{2} \geq \frac{x-10}{2}\right) = p\left(Z \geq \underbrace{\frac{x-10}{2}}_{z}\right), \quad Z \sim N(0,1)$$

$P(Z \geq z) = 0'304$

$P(Z_1 \geq 0'51) = 0'305$

$P(Z_1 \geq 0'52) = 0'3015$




$y(z) = 0'305 + \frac{(0'3015 - 0'305)}{0'52 - 0'51}(z - 0'51)$

Resuelve la ec: $y(z) = 0'304$

→ Despejo $z$

→ Deshago el cambio $\boxed{x = 2z + 10}$

## Teorema central del límite

Sea $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

- $E(x_i) = \mu$
- $V(x_i) = \sigma^2$
- $x_i$ indep de $x_j$ $\forall i,j$, $i \neq j$

$\Rightarrow E(S_n) = n \cdot \mu$, $V(S_n) = n \cdot \sigma^2$ y además $\dfrac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

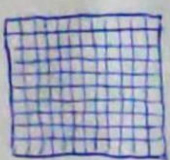
Muestra la importancia que tiene la distribución normal, y explica porque aparece en muchas disciplinas (para explicar fenómenos naturales, sociales, psicológicos...)

Aunque los mecanismos que gobiernan un proceso o fenómeno físico pueden resultar complejos (muchos factores a tener en cuenta), en muchos casos puedo encontrar n variables (no tienen por qué ser normales), pero independientes, que explican el fenómeno por separado. Ahora, según el teorema antes, si considero la suma de esas variables independientes seguirá una distribución normal.

Ejercicio: Foto tiene $n = 6 \cdot 10^6$ pixeles $p = 2'5 \cdot 10^{-6}$

- Prob de que la cámara altere 15 pixeles

Experimento: Hago una foto, y obtuvo los $6 \cdot 10^6$ pixeles uno tras otro.



$p \cdot p$

$\to$ Proceso de Bernoulli:

$n = 6 \cdot 10^6$, $p = 2'5 \cdot 10^{-6}$

$x =$ "nº de pixeles alterados"

- $n > 30$, $np = 6 \cdot 10^6 \cdot 2'5 \cdot 10^{-6} = 15 < 5$ ✗
- $n > 30$, $nq < 5$ ✗
- $n > 30$, $np \geq 5$, $nq \geq 5$

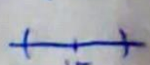
- $P(x = 15)$, $x \sim Bi(n = 6 \cdot 10^6, p = 2'5 \cdot 10^{-6})$

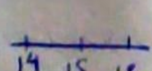
$P(x=15) = \binom{6 \cdot 10^6}{15} p^{15} q^{6 \cdot 10^6 - 15}$

$P(x) = 15 \approx P(z = 15)$ $\quad z \sim N(np, \sqrt{npq})$

pero $P(z = 15) = 0$ $\quad z$ (V.A. continua)

Ese problema lo podemos arreglar haciendo uso de la corrección por continuidad.




$$P(x=15) \approx P(15 - 1/2 \leq z \leq 15 + 1/2) = P\left(\frac{14'5 - np}{\sqrt{npq}} \leq \underbrace{\frac{z_1 - np}{\sqrt{npq}}}_{N(0,1)} \leq \frac{15'5 + np}{\sqrt{npq}}\right)$$

- $P(x > 10) = \sum_{x=11}^{\infty} \binom{6 \cdot 10^6}{x} p^x \cdot q^{6 \cdot 10^6 - x} \approx P(z_1 > 10 + 0'5)$

## Proceso de Poisson

En estadística y simulación, un Proceso de Poisson es conocido también como "ley de procesos raros".

Es un proceso continuo en tiempo que consiste en contar sucesos raros que ocurren en un intervalo de tiempo.

Aplicaciones

Un proceso de Poisson puede describir los siguientes casos:

- Solicitudes de archivos en un servidor
- Nº de accidentes de tráfico en un tiempo y lugar determinado
- Goles anotados en un partido de fútbol

Todos estos procesos pueden explicarse con la distribución de Poisson que veremos ahora (o con otros modelos más sofisticados)

Distribución de Poisson

$x \sim Po(\lambda)$ , $P(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $\quad k \in S_x$ , $S_x = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Ejemplo: Un determinado equipo de fútbol, va a jugar un partido, y se sabe que la media de goles por partido es: $\lambda = 1'83$ goles por partido. ¿Probabilidad de que este equipo marque 4 goles en el próximo partido?

En un intervalo de tiempo de 90' (un partido de fútbol) el suceso marcar un gol, "es un suceso raro" que puede modelarse con una Poisson. ¿Cómo uso la media?

Si defino $x =$ "nº de goles en el partido"

$x \sim Po(a)$ $\quad E(x) = a \Rightarrow x \sim Po(\lambda = 1'83)$

- $P(x=4) = \frac{(1'83)^4}{4!} e^{-1'83} = \ldots$

Proceso de Poisson:

- Proceso estacionario: $P(x=4, 90' \text{ por la tarde}) = P(x=4, 90' \text{ noche})$

Distribución exponencial

Dado un proceso de Poisson, si la V.A. continua $x \sim Po(\lambda)$, recordamos que $x$ mide el nº de sucesos raros ocurridos en un intervalo dado, cuya media es $x$.

Dado el mismo proceso que he descrito antes, si defino:

$y \equiv$ "tiempo trascurrido entre un suceso raro y otro"

$y \sim Exp(\lambda)$

V.A.C en función de densidad

$$f(y) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \qquad F(y) = 1 - e^{-\lambda y} \qquad E(y) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(y) = \frac{1}{\lambda^2}$$

## Distribución gamma

Dado el mismo gamma (γ) proceso de Poisson descrito antes. si defino

$y$ = "tiempo transcurrido entre un suceso raro y el $\alpha$-ésimo siguiente".

$\Rightarrow y \sim \text{Gamma}(\lambda, \alpha) \Rightarrow$ Proceso Poisson $\quad \alpha = 1 \Rightarrow \text{Gamma}(\lambda, 1) = \text{Exp}(\lambda)$

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \qquad E(y) = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad V(y) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

## Función gamma $\Gamma(\alpha)$

- Es una función que generaliza al factorizar

$\alpha \in \mathbb{N}$, $\Gamma(\alpha) = \alpha! = \alpha(\alpha-1)\dots 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx$$