Tema 4: Cálculo de Probabilidades

Un experimento científico siempre debe dar un resultado que puede ser:

- Determinista: Si se repite en las misma circunstancias, siempre da el mismo resultado.
- Aleatorio: Si se repite en las mismas circunstancias puede dar resultados diferentes. El conjunto de resultados posibles se encuentra predeterminado.

Definición

Llamamos $\boxed{\text{espacio muestral}}$ (E) de un experimento aleatorio al conjunto de los resultados posibles.

Llamamos $\boxed{\text{suceso aleatorio}}$ a un subconjunto A del espacio muestral.

$(A \subset E)$ $(A \in P(E))$ = } Espacio de sucesos {

Tipos de sucesos

- Llamamos $\boxed{\text{suceso elemental}}$ si corresponde a un resultado simple del experimento, no pudiendo dividirse en otros. Ejemplo: sacar una carta exacta de una baraja de cartas (2'1% ~)

- Llamamos $\boxed{\text{suceso compuesto}}$ cuando está formado por varios simples. Ejemplo: sacar un as de la baraja (4'4% ~)

- Llamamos $\boxed{\text{suceso seguro}}$ (E) al suceso que sabemos que ocurrirá siempre al realizar el experimento. Ejemplo: sacar menos de siete al tirar un dado cubo.

- Llamamos $\boxed{\text{suceso imposible}}$ ($\emptyset$) al suceso que sabemos que nunca ocurrirá al realizar el experimento. Ejemplo: sacar más de un seis al tirar un dado cubo.

Operaciones con sucesos

- Llamamos $\boxed{\text{unión de sucesos}}$ A y B ($A \cup B$) al suceso que sucede cuando ocurre A, o cuando ocurre B. (Uno de los dos)

- Llamamos $\boxed{\text{intersección de sucesos}}$ A y B ($A \cap B$) al suceso que se produce cuando ocurre A, y conjuntamente sucede B. (Ambos)

- Llamamos $\boxed{\text{suceso contrario}}$ ($\bar{A}$) (o complementario) del suceso A, al suceso que ocurre cuando no sucede A.

Álgebra de Boole de sucesos

El espacio de sucesos E con las operaciones $\cup$, $\cap$ y $\bar{A}$ es un álgebra de Boole.

Recordemos

Álgebra de Boole

$$\begin{cases} a + a = a & a + 1 = 1 \\ a \cdot a = a \\ a + 0 = a \\ a \cdot 1 = a \end{cases}$$

Pero existen subconjuntos A de E que también lo son.

→ Decimos que $\boxed{\text{una familia de sucesos}}$ $\mathcal{A} = \{A_i\}$, es un álgebra de Boole si y solo si verifica:

a) $E \in \mathcal{A}$ (El espacio de sucesos pertenece a la familia de sucesos)

b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ← Uno de los dos

c) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $(A \cup B) \in \mathcal{A}$

σ-Álgebra de Boole de sucesos

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole, el apartado c anterior (Axioma) indica que la unión finita de sucesos del álgebra, pero no podemos pasar al caso infinito numerable. Cuando sí se puede, lo llamamos σ-álgebra de Boole.

→ Decimos que una $\boxed{\text{familia de sucesos}}$ $\mathcal{A} = \{A_i\}$, es un álgebra de Boole (σ) si y solo verifica:

a) $E \in \mathcal{A}$

b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\bar{A} \in \mathcal{A}$

c) Si $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I)$, entonces $\left(\bigcup_{i \in I} (A_i)\right) \in \mathcal{A}$. Siendo I un conjunto finito o infinito numerable

→ Unión de todos los sucesos $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots A_i)$

Espacio Probabilizable

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra/σ-álgebra de sucesos diremos que se trata de un espacio probabilizable y tiene las propiedades.

I $\emptyset \in \mathcal{A}$. El suceso imposible pertenece al álgebra (SIEMPRE)

II Ley de De Morgan

→ $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$

→ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

→ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

III Asociativas

→ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

→ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

IV Conmutativas

→ $A \cup B = B \cup A$

→ $A \cap B = B \cap A$

V Idempotentes

→ $A \cup A = A$

→ $A \cap A = A$

VI Simplificativas

→ $(A \cap B) \cup A = A$

→ $(A \cup B) \cap A = A$

VII Existencia de Ínfimo $(\exists \emptyset, \forall A)$

→ $A \cup \emptyset = A$

→ $A \cap \emptyset = \emptyset$

VIII Existencia de Supremo $(\exists S, \forall A)$

→ $A \cup S = S$

→ $A \cap S = A$

IX Existencia de Complementario $(\exists \bar{A}, \forall A)$

→ $A \cup \bar{A} = E$

→ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

X Distributivas

→ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

→ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

XI Doble Complementación

→ $\bar{\bar{A}} = A$

XII Definición de Diferencia

→ $A - B = A \cap \bar{B}$

XIII Diferencia Simétrica

→ $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Definición Axiomática de Probabilidad

Sea E un espacio muestral y $\mathcal{A}$ un álgebra/σ-álgebra de sucesos, diremos que $(E,\mathcal{A})$ es un espacio probabilizable.

Definición

Sea $(E,\mathcal{A})$ un $\boxed{\text{espacio probabilizable}}$ diremos que una función $P: \mathcal{A}$ (Dominio) $\longrightarrow [0,1]$ (Codominio o Imagen)

es una función de probabilidad si y solo si verifica:

+ $P(E) = 1$ (Siempre que metemos un dato del conjunto E, nos saldrá 1, es decir que es correcto o que las probabilidades son correctas)

+ Para todo conjunto $\{A_i\}_{i\in I}$ verificando $A_i \cap A_j = 0$ para $i \neq j$, se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

Es decir, la función $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_i)$

A la terna (conjunto de tres objetos) $(E,\mathcal{A},P)$ se le denomina $\boxed{\text{espacio de probabilidad}}$

Consecuencias (Propiedades)

+ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
+ $P(\emptyset) = 0$
+ Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
+ $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
+ $P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$ Importante, se suma
+ $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

Definición Clásica de Probabilidad

Dado un suceso A del espacio muestral E de un experimento aleatorio. Si realizamos N veces el experimento y contabilizamos el número de veces que ha ocurrido A (que denotamos como n_A), la frecuencia relativa de A será: $f_A = \frac{n_A}{N}$

Llamamos $\boxed{\text{probabilidad del suceso A}}$ al límite de la frecuencia relativa de A cuando N tiende a infinito.

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} f_A = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

Propiedad

Si tenemos un álgebra con espacio muestral finito con sucesos elementales equiprobables, podemos obtener la probabilidad de un suceso A como:

$$P(A) = \frac{\text{Número sucesos probables}}{\text{Número sucesos posibles}}$$

Probabilidad Condicionada

Sea un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ y sea A un suceso cualquiera, tal que $P(A) \neq 0$.
Para cualquier suceso $B \in \mathcal{A}$ definimos la probabilidad de B condicionada a A como:

$$P(B/A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se trata de una probabilidad pues:

1.- A cada suceso B le asigna un valor en $[0, 1]$

2.- $P(E/A) = P_A(E) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} = 1$

3.- Si $B \cap C = \phi \Rightarrow P((B \cup C)/A) = P_A(B \cup C) = \dfrac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)}$

$$= \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C)$$

Independencia de sucesos

Decimos que un suceso B es independiente de otro A si y solo si: $P(B/A) = P(B)$

Propiedades

1.- Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B. (Sucesos Independientes)

2.- Siempre se verifica: $P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$

3.- Si A y B son independientes: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Theorema de la Probabilidad Total

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ un conjunto de sucesos. Decimos que $\mathcal{C}$ es un conjunto completo de sucesos sí y solo sí se verifican:

a) Son disjuntos: Para todo $i \neq j$, se verifica $C_i \cap C_j = \phi$

b) Son conjuntos, es decir, cubren E:

$$\bigcup_{i \in I} C_i = E \qquad \boxed{(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_i) = E}$$

Theorema

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ un sistema completo de sucesos, tal que para todo $i \in I$, $P(C_i) > 0$.

Entonces, si $B \in \mathcal{A}$:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i \in I} P(C_i) P(B/C_i)}$$

Theorema de Bayes

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B/A)}$$

Teorema de Bayes aplicado a un sistema completo de sucesos

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ un sistema completo de sucesos, tal que $P(C_i) > 0$. (Para todo $i \in I$)

Entonces, si $B \in \mathcal{A}$:

$$\boxed{P(C_j/B) = \frac{P(C_j)}{\sum_i P(C_i) P(B/C_i)} \cdot P(B/C_j)}$$

Interpretación del Concepto de Probabilidad

1.- En el desarrollo de la probabilidad hemos considerado un espacio probabilístico como un ente matemático abstracto, desprovisto en principio de significado físico.
Pero en la realidad El fin de este desarrollo es estudiar problemas reales.

2.- La interpretación tradicional de la probabilidad es la medida de la frecuencia con la que un suceso va a ocurrir en el futuro. Ejemplo tipo: la moneda o el dado cuando compruebas: $\frac{\text{resultado al variar}}{\text{sucesos posibles}}$ (dando como resultado 1/2 la moneda ya que al lanzar/variar la moneda vemos una cara y sólo pueden salir dos, en el dado 1/6)

3.- Sin embargo, la teoría de la probabilidad es utilizada a menudo de otra manera, como una medida de la confianza que tenemos en algo pasado ya ocurrido.