Tema 4. Cálculo de probabilidades

Un experimento consiste en provocar un fenómeno en unas condiciones determinadas con el fin de observar y analizar sus defectos. Por ejemplo: lanzar un dado y observo qué número sale

•) Experimento determinista.

Consiste en un experimento tal que siempre que lo repita en unas determinadas condiciones iniciales, obtengo el mismo resultado

→ Un coche que circula a 40Km/h, durante 1h siempre recorre 40Km.

•) Experimento aleatorio

Consiste en un experimento tal que siempre que lo repito en unas determinadas condiciones iniciales puedo obtener distintos resultados.

→ Compro un boleto de lotería y observo mis ganancias

Un espacio muestral (E) es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento dado

S ≡ subconjunto del espacio muestral

Por ejemplo:

Extraer una carta de una baraja de 40 cartas españolas

$E = \{(1O), (2O), (3O), (1E), (2E), \dots\}$ (Las 40 cartas de la baraja). Ej: Esp. muestral con un nº finito de elem (40)

Lanzar la moneda hasta que salga cara y observar cuántos lanzamientos realizo.

$E = \{xc, c, xxc, xxxc\}$ Espacio muestral infinitos elementos (infinito numerable)

S ≡ "realizar 5 lanzamientos" $= \{xxxxc\}$

Experimento ≡ "observar el teléfono hasta que recibo una llamada y anoto el tiempo transcurrido (s)

$E \equiv [0, +\infty) \in \mathbb{R}$ → Espacio muestral infinito no numerable

S ≡ expresar un intervalo de tiempo de 1h $S_1 = [0, 3600]$ $S_2 = [0, 360]$

$S_1 \cup S_2 = [0, 3600]$

Ej. $E = \{0, 1, 2\}$ (espacio muestral)

Vamos a construir un álgebra de Boole

$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$, A_i son sucesos, es decir $A_i \in \wp E$ (los A_i son subconjuntos de E)

Un ejemplo de Álgebra de Boole

$\mathcal{A} = \{\{0,1,2\}, \{\emptyset\}\}$

$\mathcal{A}' = \{\{0,1,2\}, \emptyset, \{1,0\}, \{2\}\}$

$\mathcal{A}'' = \{\{0,1,2\}, \{\emptyset\}, \emptyset, \{1,2\}\}$

Si y solo si se verifica

① $E \in A$

② Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\bar{A} \in \mathcal{A}$

③ Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$

PROPIEDADES

Ejemplos.

(1) Clase de 100 alumnos.

$E \equiv$ Clase de 100 alumnos $\quad |E| = 100$

$A \equiv$ "Aprueban matemáticas". $\quad |A| = 54$

$B \equiv$ "Aprueban física" $= \quad |B| = 75$

$C \equiv$ "Aprueban ambas" $= \quad |C| = 40$

¿Cuántos no aprueban ni física ni matemáticas?

$|C| = |A \cap B| = 40$

$\bar{B} \cap \bar{A} = \overline{A \cup B}$

$|\overline{A \cup B}| = 100 - |A \cup B| = 100 - (54 + 75 - 40) = 11$

Definición: Axiomática de probabilidad

Para definir una probabilidad necesito.

- E = espacio muestral del exp.
- $\mathcal{A}$ (σ- Álgebra de Boole)
- Probabilidad P

$\rightarrow P = \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

Es decir $0 \leq P \leq 1 \rightarrow P(E) = 1$

$\rightarrow$ Si tengo una colección de sucesos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos, entonces:

$P(S_1 \cup S_2 \cup \dots) = P(S_1) + P(S_2) + \dots$

$(E, \mathcal{A}, P) \rightarrow$ Espacio de probabilidad

PROPIEDADES

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

  $E = A \cup \bar{A}$

  $P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

  $1 = P(A) + P(\bar{A}) \longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- $P(\emptyset) = 1 - P(\bar{\emptyset}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$
- $A \leq B \quad P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ejercicio 8. $E = \{a, b, c, d\}$. Justifica si es una probabilidad.

a) $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{3}$, $P(c) = \frac{1}{4}$, $P(d) = \frac{1}{5}$

¿$P(E) = 1$?

$$P(E) = P(\{a, b, c, d\}) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} > 1$$

* No es una probabilidad.

b) $P(a) = \frac{1}{2}$ $P(b) = \frac{1}{4}$ $P(c) = -\frac{1}{4}$ $P(d) = \frac{1}{2}$

No es una probabilidad porque es negativa y las probabilidades están en $[0, 1]$

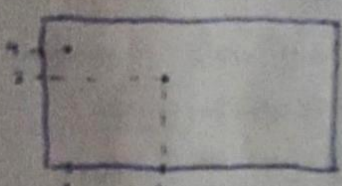
c) $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{4}$, $P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{8}$

$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/8 = 1 \rightarrow$ Sí es probabilidad.

d) $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{4}$, $P(c) = \frac{1}{4}$, $P(d) = 0$

$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1/2 + 1/4 + 1/4 + 0 = 1 \rightarrow$ Sí es una probabilidad

$P(\emptyset) = 0$ ¿$P(d) = 0 \rightarrow d = \emptyset$? No. $P(d) = 0$ eso no implica que el suceso sea imposible



$A = (1, 4)$
$B = (4, 3)$

$p = \frac{1}{\infty} = 0$

Como P es una probabilidad

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (si $A \cap B \neq 0$)
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (A y B son independientes)

Ejemplo Probabilidad

$\boxed{1}$ $\{A, R, C\}$ (en ese orden) $\rightarrow$ $(\underbrace{\{1^a A, 2^a R \text{ y } 3^a C\}}_{\Downarrow})$

$\{A \cap R | A \cap C | AR\}$

Son 3 sucesos independientes

$P(A) = \frac{4}{40}$ $P(R|A) = \frac{4}{39}$ $P(C|AR) = \frac{4}{38}$

$$P(A \cap R|A \cap C|AR) = \frac{4^3}{40 \cdot 39 \cdot 38}$$

$\boxed{2}$ $\{A, R, C\}$ (no importa orden) $\{(ARC) \cup (ACR) \cup (RAC) \cup (RCA) \cup (CAR) \cup (CRA)\}$

Los 6 sucesos son disjuntos dos a dos

$$P(\ldots) = P(ARC) + P(ACR) \ldots = 6 \cdot \frac{4^3}{40 \cdot 39 \cdot 38}$$

3. {A.A.A}

$P(\{A,A,A\}) = P(A \cap A|A \cap A|AA) = P(A)\cdot P(A|A)\cdot P(A|AA) = \frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{2}{38}$

4. {O.O.C}

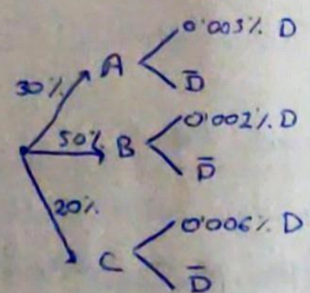
$P((OOC)\cup(OCO)\cup(COO)) = \frac{3\cdot 10^2\cdot 9}{40\cdot 39\cdot 38}$

$P(O \cap O|O \cap C|OO) = P(O)\cdot P(O|O)\cdot P(C|OO) = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{10}{38}$

Teorema: $P(B)=\sum P(C_i)\cdot P(B|C_i)$, $(C_i \cap C_j = \phi$,

Ejemplo:

E: condensador



$A\cup B\cup C = E$

$A\cap B = \phi$

$A\cap C = \phi$

$B\cap C = \phi$

a) Probabilidad de producir un condensador defectuoso:

$P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)=$

$=(0'3\cdot 0'00003)+(0'5\cdot 0'00002)+(0'2\cdot 0'00006)=0'0000712$

b) Probabilidad de que en un lote escogido al azar haya alguno defectuoso.

$P(\bar D) = P(\text{ninguno defectuoso}) = P(A)\cdot P(\bar D|A)+P(B)\cdot P(\bar D|B)+P(C)\cdot P(\bar D|C)=$

$0'3\,(1-0'00003)^4+0'5\,(1-0'00002)^4+0'2\cdot(0'00006)^4=$

$0'9979$ Sol: $1-P(\bar D)=1-0'9979=\boxed{0'002}$

c) Sabemos que no hay ningún condensador defectuoso en el lote:

• ¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea la máquina B?

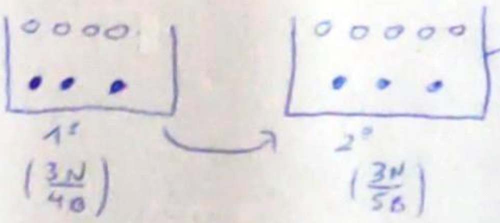
$P=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{P(B)\cdot P(\bar D|B)}{P(A)\cdot P(\bar D|A)+P(B)\cdot P(\bar D|B)+P(C)\cdot P(\bar D|C)}=\frac{0'5(1-0'00002)}{\dots}$

• ¿Cuál es la pobabilidad si todos son defectuosos?

$\text{Prob}=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{P(B)\cdot P(4D|B)}{P(A)\cdot P(4D|A)+P(B)\cdot P(4D|B)+P(C)\cdot P(4D|C)}=\frac{0'5(0'00002)^4}{0'3(0'00003)^4+0'5(0'00002)^4+0'2(0'00006)^4}$

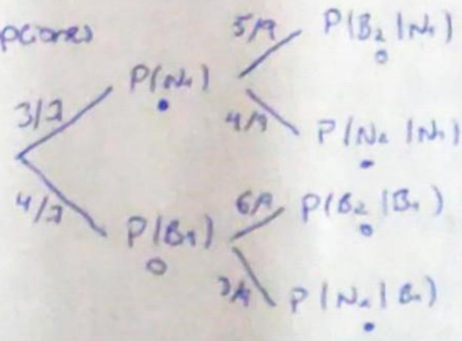
• Supongamos que hay al menos dos condensadores defectuosos en el lote. ¿Cuál es la prob. de que ese lote escogido sea de la máquina B?

Ejercicio. Tengo una bolsa que coloco 3 bolas negras y 5 bolas blancas. Se saca una bola de la primera bolsa y se mete en la segunda. y se saca una de la 2ª bolsa:
a) Calcula la probabilidad que ese bola sea negra. b) Calcular la probabilidad de que la bola extraida de la primera bolsa sea negra sabiendo que la bola extraida de la segunda es blanca.

a) 

→ saco 1 bola de la 2ª

2 opciones

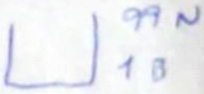


$P(N_2) = P(N_2|N_1)\cdot P(N_1) + P(N_2|B_1)\cdot P(B_1) =$
$= \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{7} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{7} = \frac{12+12}{63} = \frac{24}{63}$

b) $P(N_1|B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}}$

Ejemplo · Bayes

Se tiene una urna con 99 bolas negras y 1 bola blanca



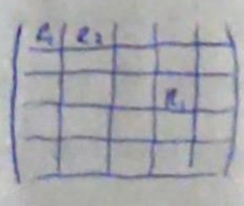
→ Se saca una primera bola (al azar) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

$P = 1/100$

→ Se saca una segunda bola, que resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca?

$P(B_1|B_2) = \frac{P(B_2 \overset{\emptyset}{\cap} B_1)}{P(B_2)} = 0$

Ejemplo: Se ha perdido un avión en una región del oceano.



N rectangulos

Se decide discretizar esa región en "N rectangulos" iguales (misma área)

a priori $P(R_i) = \frac{1}{N}$ Por ejemplo. $P(R_5) = \frac{1}{5}$

Ahora, se realiza una exploración, y el primer día, se realiza una búsqueda en R_1 y no se encuentra nada. ¿Cómo modifica esa búsqueda de las probabilidades?

$P(R_5) = \frac{1}{N-1}$

20. Distribución hipergeométrica

100 vecinos $\begin{cases} 60\ H \\ 40\ M \end{cases}$ · ¿Prob de que ganen el sorteo 2H y 2M?

Ayuntamiento sortea 4 entradas

$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\binom{60}{2}\binom{40}{2}}{\binom{100}{4}}$

Generalización

$N_1 + N_2$ Vecinos $\begin{cases} N_1 & H \\ N_2 & M \end{cases}$

• Prob de que ganen el sorteo n_1 hombres y n_2 mujeres

$P = \frac{\text{favorables}}{\text{posibles}} = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}}{\binom{N_1+N_2}{n}}$

Ayuntamiento sortea N entradas

32. Distribución binomial

Se lanza n veces una moneda con la probabilidad de cara

¿Prob. de obtener n_1 caras y n_2 cruces?

$\underbrace{\underbrace{\underline{C}\ \underline{C}\ \underline{C}\ \underline{C}}_{n_1}\ \underbrace{\underline{X} \dots \underline{X}}_{n_2}}_{n_1+n_2}$

$P = p^{n_1} \cdot q^{n_2}$

$P = \binom{n_1+n_2}{n_1} p^{n_1} \cdot q^{n_2}$

$\binom{n_1+n_2}{n_1} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_1!\underbrace{(n_1+n_2-n_1)!}_{n_2!}} = \binom{n_1+n_2}{n_2} = \frac{(n_1+n_2)!}{n_2!\underbrace{(n_1+n_2-n_2)!}_{n_1!}}$

34. Distrib. binomial: Se lanza una moneda hasta obtener 3 veces cara: ¿Prob. 10 lanzamientos?

$\_\ \_\ \underline{C}\ \_\ \_\ \underline{C}\ \_\ \_\ \_\ \underline{C}$ $\qquad P = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{9}{2}$

Generalización: Se lanza una moneda hasta obtener x veces (con prob. cara $= p$, cruz $= 1-p = q$) hasta obtener n caras? $\quad P = p^n \cdot q^{x-n} \binom{x-1}{n-1}$ Bin. negativo

• Los problemas 32 y 34 plantean experimentos de Bernoulli. (o dicotómicos)

• Un experimento de Bernouilli es un experimento aleatorio en el que solo se pueden obtener 2 resultados, etiquetados como éxito (con prob. p) o fracaso (con prob $q = 1-p$)

Ej: lanzar una moneda y obtener el resultado, votar sí/no a un referendum.

• Un proceso de Bernouilli es la repetición de un experimento de Bernouilli.

Debe cumplirse que:

* Prob de exito es igual en el tiempo.

Se suele decir que es un proceso sin memoria.