Tema 5: Variables aleatorias

Se lanzan 2 monedas al aire: $E = \{CC, XX, CX\}$

Supongamos que quiero estudiar la probabilidad de tener n caras

Podemos asociar a cada elemento del espacio muestral, el nº de caras mediante una función.

Ej: $\begin{cases} X: E \to \mathbb{N} \\ X \equiv \text{nº de caras} \end{cases}$

$X(CC) = 2$, $X(XX) = 0$

$X(CX) = 1$

$S_X = \{0, 1, 2\}$

Otro experimento: observar el nº de llamadas recibidas en 1h

$E = \{0, 1, 2, \dots, M\}$

Defino una aplicación $\begin{cases} X: E \to \mathbb{N} \\ X \equiv \text{nº de llamadas} \end{cases}$

$X(0) = 0$, $X(1) = 1 \dots$

$S_X = \{0, 1, \dots, M\} = E$

- **Soporte**: Conjunto de valores reales que puedo tomar:

Ej: Exp. lanzar un dado y una moneda:

$E = \{1C, 2C, \dots, 6C, 1X, 2X, \dots, 6X\}$

$\xi \equiv$ Valor obtenido en el dado, que se multiplica por 2, si lo que tengo es cara.

$\xi(1C) = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad \xi(6C) = 12$ $\quad S_\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

$\xi(2X) = 2$

Función de distribución: $F: \mathbb{R} \to [0, 1]$
$x \longmapsto p(\text{suceso})$

Suceso: todos los elementos del espacio muestral E tales que $X(\omega) \leq x$

- $F(x) = p(X \leq x)$ (definición)
- $P(X > x) = 1 - F(x) \to P(A)$, $A = \{\omega \in E \;/ X > x\}$

$P(A)$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow 1 - P(\bar{A}) = P(A)$

$\bar{A} = \{\omega \in E \;/ X \leq x\}$, $P(\bar{A}) = P(X \leq x) = F(x)$

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

$P(\{a < X\} \cap \{X \leq b\}) = P(A \cap B)$ $\quad \begin{cases} A = \{a < X\} = \{\omega \in E \;/ X(\omega) > a\} \\ B = \{X \leq b\} \end{cases}$

$P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B})]$ (Morgan)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

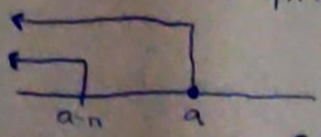
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ si A y B son independientes

$\begin{cases} \bar{A} = \{\omega \in E / X(\omega) \leq a\} \\ \bar{B} = \{\omega \in E / X(\omega) < b\} [illegible] \\ \bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset \end{cases}$

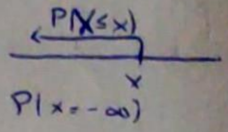
$= 1 - [\underbrace{P(X \leq a)}_{F(a)} + \underbrace{P(X < b)}_{F(b)}] = F(b) - F(a)$

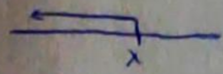
$$P(X=a) = F(a) - \lim_{h\to 0} F(a+h)$$

$$F(a) - P(X<a) = P(X\leq a) - P(X<a) = P(X=a)$$



$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x\to \infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x\to \infty} P(X\leq x) = P(x\geq \omega) = P(E) = 1$$





Ejemplo: Se tiene una variable aleatoria x de la que se conoce su función de distribución:

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1/12 & \text{si } 1\leq x<2 \\ 3/12 & \text{si } 2\leq x<3 \\ 4/12 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 6/12 & \text{si } 4\leq x<5 \\ 7/12 & \text{si } 5\leq x<6 \\ 9/12 & \text{si } 6\leq x<8 \\ 10/12 & \text{si } 8\leq x<10 \\ 11/12 & \text{si } 10\leq x<12 \\ 1 & \text{si } 12\geq x \end{cases}$$

1. $P(x\leq 3'5) = F(3'5) = 4/12 = 1/3$
2. $P(x\leq 7) = F(7) = 9/12 = 3/4$
3. $P(x<2) = 1 - P(x\leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 3/12 = 3/4$
4. $P(x\geq 2) = P(\{x>2\} \cup \{x=2\}) =$ sucesos disjuntos

$= P(x>2) + P(x=2) = 3/4 + \left(F(2) - \lim_{h\to 0^+} F(2-h)\right)$

$= \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12}$

Clasificación de las variables aleatorias

Dada una variable aleatoria X, con soporte S_x

Lo normal es que nos den la probabilidad de los valores del soporte S_x.

Entonces vamos a clasificar las variables en función de su soporte S_x.

Tendremos 3 tipos.

- → Si S_x es discreto, es decir $S_x = \{1,2,3,4,5\}$ o bien $S_x = \mathbb{N}$. Entonces la variable es discreta
- → Si S_x es continuo, p.e., $S_x = [a,b]$, $S_x = \mathbb{R}$. Entonces la variable es continua.
- → Si $S_x = [a,b] \cup \{7\} \cup \{-67\} \cup \dots$ Entonces la variable es mixta.

Ejemplo:

Se lanzan 2 dados y se observan los resultados. (Experimento). Ahora se define la variable aleatoria X="Suma de valores obtenidos".

- $E = \{11, 12, \dots, 16,$
  $21, 22, \dots, 26$
  $61, 62, \dots, 66\}$

- $S_X = \{2, 3, \dots, 11, 12\} \Rightarrow X$ v. aleatoria discreta finita
- Vamos a calcular la función (o distribución) de probabilidad

$p(x=2) = P(\text{"primero obtengo un 1 y después un 1"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1/36$

$p(x=3) = 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$\{12\} = 1/36$

$\{21\} = 1/36$

$P(x=4) = 3 \cdot 1/36$

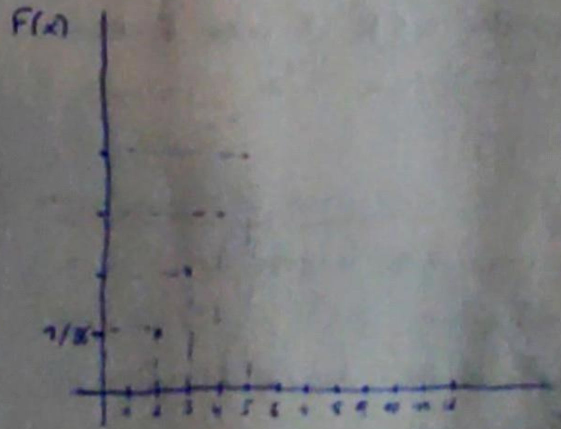
$\{22\}$ $\{13\}$

$\{31\}$

$P(x=12) = 1 \cdot 1/36$

$\{66\}$

- Calcular la función de distribución



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1/36 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1/36 + 2/36 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 1/36 + 2/36 + 3/36 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \ge 12 \end{cases}$$

Ejemplo: Se lanza un dado hasta la primera aparición de un 5. Defino la variable aleatoria X="Nº de lanzamientos"

- $S_X = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} / \{0\}$
- Calculamos la función de probabilidad

$P(x=1) = 1/6$

$p(x=2) = p(\text{"En la primera tirada ha salido cualquier número menos 5" } \cap \text{ "en la 2ª tirada ha salido 5"}) = 5/6 \cdot 1/6 = 5/36$

$P(x=3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$ $\qquad P(x=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$

¿Es realmente P una probabilidad? ¿$P(E) = 1 = P(S_X) = 1$?

$P(S_X) = P(\{x \in S_X\}) = P(\{x=1\} \cup \{x=2\} \cup \dots) = P(\{x=1\}) + P(\{x=2\}) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} P(x=k) = 1$?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1-0}{1-5/6} = 1$$

Variables discretas

($S_x \equiv$ finito o infinito numerable)

- $P(X=x)$, $x_i \in S_x$
- $F(x) = P(X \leq x_i)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Definición: Esperanza matemática:

Dada una variable aleatoria discreta X de soporte S_x, la esperanza es:

$$\boxed{E(X) = \sum_{x \in S_x} x_i \underbrace{P(X=x_i)}_{f_i} \qquad \sum f_i = 1}$$

es decir, si $S_x = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{9} i \cdot P(X=i)$$

El concepto de esperanza matemática es similar al concepto de media que usamos en los primeros temas.

Definición: Momento con respecto a un parámetro $a \in \mathbb{R}$ de orden $r \in \mathbb{N}$

$$M_r(a) = \sum_{x_i \in S_x} (x_i - a)^r \, P(X=x_i)$$

Definición: Momento ordinario de orden r de una v. a. discreta X

$$m_r = M_r(0) = \sum_{x_i} x_i^r \, P(\bar{X} = x_i)$$

Definición: Momento central de orden r de una variable aleatoria discreta

$$\mu_r = M_r(E(x)) = \sum_{x_i \in S_x} (x_i - E(x))^r \cdot P(X=x_i)$$

Definición: Se define la varianza de una variable aleatoria discreta como:

$$V(x) = \mu_2$$

$$V(x) = \mu_2 - m_2 - \{E(x)\}^2$$

$\mu_3 = \dots$

$\mu_4 = \dots$

Definición. Desviación típica de X variable aleatoria discreta.

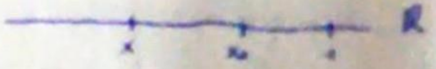
$$\sigma_X = \sqrt{V(x)}$$

Tipos de V.A. discretas:

• **Distribución degenerada:**

X con soporte $S_X=\{x_0\}$, $P(X=x_0)=1$

$F: \mathbb{R}\to[0,1]$ dado $x\in\mathbb{R}$, tengo que decir qué vale $F(x)$



$F(x)=P(X\le x)=0$ si $x<x_0$

$F(x)=1$ si $x=x_0$

$F(x)=1$ si $x>x_0$

$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<x_0\\ 1 & \text{si } x\ge x_0\end{cases}$

- Media de X:

$E(X)=\sum_{x_i\in S_X} x_i\, P(X=x_i) = x_0\cdot P(X=x_0)=x_0$

- Varianza de X:

$V(X)=\left(\sum_{x_i\in S_X} x_i^2\, P(X=x_i)\right)-(E(X))^2 = x_0^2\cdot P(X=x_0)-(x_0^2)=0$

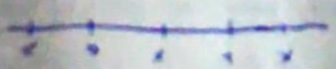
• **Distribución de Bernoulli**

X, $S_X = \{0,1\}$

$P(X=1)=p$

$P(X=0)=1-p=q$

$p+0+1-p=1$



$F:\mathbb{R}\to[0,1]$

$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-p & \text{si } 0\le x<1\\ 1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

• La usaré siempre que tenga exp. dicotómicos (V/F, sí/no, cara/cruz)

- Media de X

$E(X)=\sum_{x\in S_X} x_i\, P(X=x_i)=0\cdot(1-p)+p=p$

- Varianza de X:

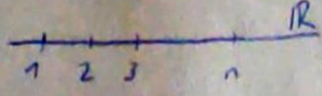
$V(X)=\left(\sum_{x\in S_X} x_i^2\, P(X=x_i)\right)-\underbrace{(E(X))^2}_{p^2} = p-p^2=p(1-p)=p\cdot q$

- Desviación típica: $\sigma_X=\sqrt{p\cdot q}$

- **Distribución uniforme discreta**

$S_X = \{1, 2, \ldots, n\}$ (n fijado)

$P(X=i) = 1/n$, $i \in S_X$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/n & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 2/n & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

- Media de X:

$$E(X) = \sum_{x_i \in S_X} x_i \cdot P(X = x_i) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + n \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

- Varianza de X:

$$V(X) = \left(\sum_{x_i \in S_X} x^2 \, P(X = x_i) \right) - (E(X))^2 = \left(1^2 \cdot \frac{1}{n} + 2^2 \cdot \frac{1}{n} + 3^2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots n^2 \cdot \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 =$$

$$\frac{1}{n} (1^2 + \ldots n^2) - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{1}{n} \, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

- **Distribución binomial**

¿Cuando uso dist. binomial? Si tengo un proceso de Bernouilli (Sucesión de exp. de Bernouilli, independientes entre sí) y me pregunto por el nº de veces que ha ocurrido un resultado de exp. dicotomico (nº de caras, nº de 5, ...) entonces la V. A $X \equiv$ "nº de ocurrencias del suceso..." sigue una distribución binomial. Es decir: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ donde n es el nº de veces que se ha realizado el experimento.

$p \equiv$ prob. de exito.

- Media de X:

$$X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n$$

$Y_2 = \begin{cases} 1 \text{ si obtuvo cara en el 2º lanzamiento} \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$

X: nº de caras obtenidas al lanzar n veces una moneda

$Y_1 = \begin{cases} 1 \text{ si obtuvo cara en el 1º lanzamiento} \\ 0 \text{ si obtuvo cualquier otro resultado} \end{cases}$

¡¡RECORDAR!! $Y = aX + b$

$\bar{Y} = a\bar{X} + b$

Con las esperanza ocurre igual; $E(a\bar{X}+b) = a\,E(X) + b$

y además si $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ son independientes $\Rightarrow E(\bar{X} + \bar{Y}) = E(\bar{X}) + E(\bar{Y})$

Por lo tanto, $E(X) = E(Y_1 + \ldots + Y_n) = \underbrace{E(Y_1)}_{p} + \ldots + \underbrace{E(Y_n)}_{p} = n \cdot p$

Exp de Bernouilli: Fabricar una pieza y ver si es o no defectuosa.

p = prob. de que no sea defectuosa: 0'98

q = prob de que sea defectuosa: 0'02

Se fabrican 15 piezas ⇒ Proceso de Bernouilli

x = "nº de piezas defectuosas"

$X \sim Bi(n=15, p=0'98)$

• Prob de tener 2 defectuosas:

$P(x=13) = \binom{15}{13} = 0'98^{13} \cdot (0'02)^2$ $\qquad$ $P(x=2) = \binom{15}{2}(0'02)^2(0'98)^{13}$

Prob. de tener al menos 2 defectuosas:

$P(A)$, $A \equiv$ "$x=2$ ó $x=3$ ó $x=4$ ... ó $x=15$"

$\bar{A}$ = "$x=0$ ó $x=1$"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 1 - \left(\binom{15}{0} p^0 q^{15-0} + \binom{15}{1} p^1 q^{15-1}\right)$$

• Distribución geométrica: ¿Cuándo uso la distrib. geométrica?

La aplico si tengo un proceso de Bernouilli, y me pregunto por la primera aparición de un suceso.

$P(x=k) = p \cdot q^{k-1}$

- Media de x:

$$E(x) = \frac{1}{p}$$

- Varianza de x:

$$V(x) = \frac{q}{p^q}$$

• Distribución binomial negativa:

Consideramos un proceso de Bernouilli y la V.A. discreta x = "Nº de veces que aparece un suceso $\bar{A}$ antes de la n-ésima aparición del suceso A.

Entonces: $X \sim$ distrib. binomial negativa

• $S_x = \{0, 1, 2, \dots\}$

Lanza moneda (cara/cruz)

x = "Nº de veces que aparece cara antes de la $\underbrace{\text{n-ésima}}_{n=3}$ aparición de cruz"

• $P(x=k) = \binom{n+k+1}{k} p^n q^k$

• Media: $E(x) = n \cdot \frac{q}{p}$

• Varianza: $V(x) = n \cdot \frac{q}{p^2}$

- **Distribución hipergeométrica:**

Supongamos que tenemos una población formada por N elementos de K clases distintas (pensar en bolas rojas, blancas y negras $\Rightarrow K = 3$)

Supongamos que tenemos N_i elementos de cada clase A_i $i = 1, \dots, K$.

Se define la V.A. $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_K)$ donde X_i = "Nº de elementos de la i, tras realizar una extracción de elementos de la población"

- $P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3, \dots X_K = n_K) = \dfrac{\binom{N_1}{n_1} \cdots \binom{N_K}{n_K}}{\binom{\ }{\ }}$ $\quad n = \sum n_i$
- Si $K = 2$, tengo 2 clases
- Media $(K=2)$

  $E(X) = n \cdot p$
- Varianza $(K=2)$ $\quad V(X) = nqp \ \dfrac{N-n}{N-1}$

Definición.

Una variable aleatoria es continua si el soporte es continuo.

$S_X = [a, b] \quad S_X = \mathbb{R} \quad S_X = \mathbb{R}^+ \quad S_X = \mathbb{R}^-$

Además una variable aleatoria continua viene dada por la función densidad

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in S_X$ $\qquad$ - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

- Sirve para calcular prob en el caso contrario, es decir, si X es una V.A. continua

$$P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

Analogías con el caso discreto

Discreta $\qquad\qquad$ **Continua**

- $0 \leq p \leq 1 \quad \longleftrightarrow \quad 0 \leq f(x)$
- $\sum P(X=K) = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
- $P(X \leq x) = \sum_{K \leq x} P(X=K) \quad \longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{x} f(x) = dx$

Es decir que la función de densidad (caso continuo) juega el papel de la función prob (caso discreto)

Además, en el caso continuo, también puedo definir la función de distribución

$$\begin{cases} F: \mathbb{R} \to [0, 1] \\ x \longmapsto P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \end{cases}$$

- Dada una VA continua X

$P(X = A) = 0$ $\quad$ Siempre

$\frac{1}{\infty} = 0$

$P(X = A) = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$