Завдання 1. Обчислити ймовірності подій

1.1.21. Комплект містить 12 виробів, 5 із яких коштують по 3 грн кожний, інші — по 1 грн. Знайдіть імовірності того, що взяті навмання 4 вироби коштують разом: а) 10 грн; б) 8 грн.

(10 грн):

C(12,4) = 495 - всього варіантів

Для 10 грн: 3 по 3 грн + 1 по 1 грн

C(5,3)×C(7,1) = 70 сприятливих

P = 70/495 ≈ 0.141

(8 грн):

Для 8 грн: 2 по 3 грн + 2 по 1 грн

C(5,2)×C(7,2) = 210 сприятливих

P = 210/495 ≈ 0.424

Відповідь: а) 14.1%; б) 42.4%

Завдання 2. Обчислити геометричні ймовірності подій

1.2.21. У прямокутник $0 \le x \le e$, $0 \le y \le 1$ навмання ставиться точка. Знайдіть імовірність того, що вона потрапить в область, обмежену лініями $y = 0$; $y = \ln x$; $x = e$.

Площа прямокутника = e×1

Площа області між y=0, y=ln x, x=e = e-1

P = (e-1)/(e×1) = e-1)/e ≈ 0.632 = 63.2%

Відповідь: (e-1)/e ≈ 0.632

Завдання 3. Виразити складні події через задані прості

2.1.21. Судно має один кермовий пристрій, 4 котли і 4 турбіни. Події A = {справність кермового пристрою}, B_j = {справність j-го котла, $j = 1, 2, 3, 4$}, C_k = {справність k-ї турбіни, $k = 1, 2, 3, 4$}, D = {судно кероване}. Виразіть подію D через A, B_j, C_k, якщо для керованості судна необхідна справність кермового пристрою, принаймні трьох котлів і принаймні трьох турбін.

1. судну потрібно для керованості:

    Справний кермовий пристрій

    Мінімум 3 котли з 4

    Мінімум 3 турбіни з 4

    D = {судно кероване}

    A = {справність керма}

    Bj = {справність j-го котла}, j=1,2,3,4

    Ck = {справність k-ої турбіни}, k=1,2,3,4

2. потрібно:

    A (керування)

    AND хоча б 3 з B1,B2,B3,B4 (котли)

    AND хоча б 3 з C1,C2,C3,C4 (турбіни)

Відповідь: D = A ∩ (не менше 3 з Bj) ∩ (не менше 3 з Ck)

сума комбінацій по 3 і 4 елементи: D = A ∩ (B1B2B3 ∪ B1B2B4 ∪ B1B3B4 ∪ B2B3B4 ∪ B1B2B3B4) ∩ (C1C2C3 ∪ C1C2C4 ∪ C1C3C4 ∪ C2C3C4 ∪ C1C2C3C4)

Завдання 4. Знайти ймовірності подій, застосовуючи теореми додавання та множення ймовірностей

2.2.1. Радіостанція аеропорту надсилає 3 повідомлення для екіпажу літака. Імовірність прийому екіпажем першого повідомлення дорівнює 0,6, другого — 0,65, третього — 0,7. Знайдіть імовірність того, що екіпажем прийнято: а) тільки одне повідомлення; б) принаймні одне повідомлення.

A_1 = перше повідомлення (p = 0.6)

A_2 = друге повідомлення (p = 0.65)

A_3 = третє повідомлення (p = 0.7)

а) Для прийому всіх: P(всі) = 0.6 × 0.65 × 0.7 = 0.273

б) Для хоча б одного: P(хоча б 1) = 1 - P(жодного) = 1 - (0.4 × 0.35 × 0.3) = 1 - 0.042 = 0.958

Відповідь: а) 27.3%; б) 95.8%

Завдання 5. Знайти ймовірності подій, застосовуючи теореми додавання та множення ймовірностей

виконував політ?

3.21. Фабрика виготовляє однотипну продукцію на трьох потокових лініях, продуктивності яких відносяться, як 3 : 2 : 5. На першій лінії виробляється продукція тільки найвищої якості. На другій лінії продукція найвищої якості становить 90 %, на третій — 85 %. 1) Знайдіть імовірність того, що взятий навмання виріб буде найвищої якості

загальна пропорця 3 + 2 + 5 = 10 частин всього

ймовірність для кожної лінії: P(Лінія 1) = 3/10 P(Лінія 2) = 2/10 P(Лінія 3) = 5/10

Ймовірність: P(найвища якість) = (3/10 × 1,00) + (2/10 × 0,90) + (5/10 × 0,85) = 3/10 + 18/100 + 42,5/100 = 0,3 + 0,18 + 0,425 = 0,905

Відповідь: 90,5%

Завдання 6. Повторні незалежні випробування

4.21. Імовірність того, що рейс буде виконано із затримкою, дорівнює 0,04. Знайдіть імовірності того, що з 50 рейсів буде виконано з затримкою: а) рівно 4 рейси; б) не більш як 4 рейси; в) принаймні один рейс.

Для рівно 4 рейсів $P_4 = C^{50}_4 \times 0{,}04^4 \times 0{,}96^{46} = 0{,}195$

Для не більше 4 рейсів сумуємо ймовірності: $P(\leq 4) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0{,}824$

в) Для принаймні одного рейсу: $P(\geq 1) = 1 - P_0 = 1 - 0{,}96^{50} = 0{,}870$

Відповідь: а) 19,5% б) 82,4% в) 87,0%

Завдання 7. Знайти невідомі значення у рядах розподілу дискретних випадкових величин

1.1.21. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	0	1	x_3	x_4
P	0,1	p_2	0,4	0,2

Знайдіть x_3, x_4 і p_2, якщо $x_3 < x_4$ і відомі математичне сподівання $M(X) = 0{,}96$ та дисперсія $D(X) = 0{,}15$. Побудуйте функцію розподілу $F(X)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок [0; 1,5).

з ряду розподілу: X: 0, x_2, x_3, x_4 P: 0.1, p_2, 0.4, 0.2

сума ймовірностей має дорівнювати 1: $0.1 + p_2 + 0.4 + 0.2 = 1$ $p_2 = 1 - 0.7 = 0.3$

Дано $M(X) = 0.96$ $0 \times 0.1 + x_2 \times 0.3 + x_3 \times 0.4 + x_4 \times 0.2 = 0.96$

Дано $D(X) = 0.15$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ $0.15 = (0^2 \times 0.1 + x_2^2 \times 0.3 + x_3^2 \times 0.4 + x_4^2 \times 0.2) - 0.96^2$

$x_3 < x_4$ система рівнянь: $x_2 = 0.5$ $x_3 = 1$ $x_4 = 2$

Відповідь: $x_2 = 0.5$ $x_3 = 1$ $p_2 = 0.3$

F(X) для проміжку [0; 1.5]: $F(0) = 0.1$ $F(0.5) = 0.4$ $F(1) = 0.8$ $F(1.5) = 0.8$

Відповідь = 80%

Завдання 8. Неперервні випадкові величини та їх характеристики

$$\textbf{1.2.21.}\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(x+0{,}5\sin 2x), & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases} \qquad (\pi/6;\ \pi/3).$$

При x = 0: Зліва: F(0) = 0 Справа: A(0 + 0.5sin(2×0)) = 0 томуе, A × 0 = 0

При x = п/2: Зліва: A(п /2 + 0.5sin(п)) = A(п/2) = 1 Справа: 1 тому: A × п/2 = 1

A: A = 2/п

: F'(x) = A(1 + cos(2x)) ≥ 0 для x ∈ [0, п/2]

Відповідь: A = 2/п

Функція F(x) є функцією розподілу, оскільки задовольняє всі необхідні умови

Завдання 9. Дискретні випадкові величини та їх характеристики

а) Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення x_1 та x_2, при цьому $x_1 < x_2$. Відомі: імовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання $M(X)$ та дисперсія $D(X)$. Знайти закон розподілення цієї випадкової величини;

p_2: $p_1 + p_2 = 1$ $0.7 + p_2 = 1$ $p_2 = 0.3$

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2$ $2.2 = x_1 \times 0.7 + x_2 \times 0.3$ ... (1)

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ $3.36 = (x_1^2\times0.7 + x_2^2\times0.3) - 2.2^2$ ... (2)

$2.2 = 0.7x_1 + 0.3x_2$ $x_2 = (2.2 - 0.7x_1)/0.3$

(2): $3.36 = 0.7x_1^2 + 0.3((2.2 - 0.7x_1)/0.3)^2 - 4.84$

отримаємо: $x_1 = 1$ $x_2 = 5$

Відповідь: Закон розподілу: X: 1 5 P: 0.7 0.3

Перевірка: $M(X) = 1\times0.7 + 5\times0.3 = 2.2$ ✓ $D(X) = (1^2\times0.7 + 5^2\times0.3) - 2.2^2 = 3.36$ ✓

Завдання 10. Типи розподілів випадкових величин

3.01-13.30 Відомі математичне сподівання *M(X)* та середнє квадратичне :нння *σ(X)* нормально розподіленої випадкової величини *X*. Знайти :ість попадання цієї величини у заданий проміжок *(α; β)*.

M(X) = 45.0 (математичне сподівання)

σ(X) = 4.5 (середнє квадратичне відхилення)

α = 32 (нижня межа)

β = 78 (верхня межа)

функція Лапласа $\Phi(z)$ $P(\alpha < X < \beta) = \Phi((\beta - M)/\sigma) - \Phi((\alpha - M)/\sigma)$

аргументи: $z_1 = (32 - 45)/4.5 = -2.89$ $z_2 = (78 - 45)/4.5 = 7.33$

значення функції Лапласа: $\Phi(-2.89) = -0.4981$ $\Phi(7.33) \approx 0.5$

ймовірність: $P(32 < X < 78) = \Phi(7.33) - \Phi(-2.89) = 0.5 - (-0.4981) = 0.9981$

Відповідь: 99.81%

Завдання 11. Типи розподілів випадкових величин

2.21. При випробуванні навігаційних приладів на військових літаках враховують відхилення від точки скидання спеціального вантажу. Складіть ряд розподілу випадкової величини *X* — кількості відхилень, що не перевищують норму при чотирьох скиданнях, якщо в 30 % випадків це відхилення не перевищує норми. Знайдіть

p = 0.3 (ймовірність, що відхилення в межах норми)

q = 0.7 (ймовірність, що відхилення перевищує норму)

n = 4 (кількість випробувань)

m = 2 (кількість успішних випробувань)

$C^4_2 = 6$ (кількість комбінацій)

$p^2 = 0.3^2 = 0.09$

$q^2 = 0.7^2 = 0.49$

$P_4(2) = 6 \times 0.09 \times 0.49 = 0.2646$

Відповідь: 26.46%

Завдання 12. Типи розподілів випадкових величин

3.1.21. Проводиться вимірювання повітряної швидкості в польоті без систематичних похибок. Випадкові похибки вимірювання підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ км. Знайдіть імовірність того, що похибка вимірювання повітряної швидкості за абсолютною величиною не перевищить 25 км.

1. $\sigma = 2{,}0$ км $|x| \le 2{,}5$ км
2. Для нормального розподілу: $P(|x| \le 2{,}5) = 2\Phi(x/\sigma) = 2\Phi(2{,}5/2{,}0)$
3. $P(|x| \le 2{,}5) = 2\Phi(1{,}25) = 2 \times 0{,}3944 = 0{,}7888$

Відповідь: 0,7888 = 0,79 (79%)

Завдання 13. Закон Великих чисел

3.2.21. Імовірність народження дівчинки дорівнює 0,485. Оцініть імовірність того, що кількість дівчат серед новонароджених буде відрізнятися за абсолютною величиною від математичного сподівання цієї кількості менш ніж на 55.

1. Дано: $p = 0{,}485$ (ймовірність народження дівчинки) $n = 100$ (кількість новонароджених) Потрібно $P(|\nu/n - p| < 0{,}055)$
2. За теоремою Муавра-Лапласа: $P(|\nu/n - p| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{(p(1-p))})$
3. Підставляємо значення: $\varepsilon = 0{,}055$ $P(|\nu/n - 0{,}485| < 0{,}055) = 2\Phi(0{,}055\sqrt{100}/\sqrt{(0{,}485\times0{,}515)}) = 2\Phi(0{,}055\times10/\sqrt{0{,}25}) = 2\Phi(1{,}1) = 2\times0{,}3643$
4. $P = 0{,}7286$

Відповідь: 0,7286 ≈ 0,73 (73%)

Завдання 14. Системи випадкових величин

.21.

$X \backslash Y$	1	3	5	7
2	0,01	0,11	0,02	0,17
4	0,21	0,05	0,20	0,07
6	0,02	0,09	0,02	0,03

а) Знаходимо ряди розподілу:

X:

$P(X=2) = 0{,}01 + 0{,}11 + 0{,}02 + 0{,}17 = 0{,}31$

$P(X=4) = 0{,}21 + 0{,}05 + 0{,}20 + 0{,}07 = 0{,}53$

$P(X=6) = 0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}02 + 0{,}03 = 0{,}16$

Y:

$P(Y=1) = 0{,}01 + 0{,}21 + 0{,}02 = 0{,}24$

$P(Y=3) = 0{,}11 + 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}25$

$P(Y=5) = 0{,}02 + 0{,}20 + 0{,}02 = 0{,}24$

$P(Y=7) = 0{,}17 + 0{,}07 + 0{,}03 = 0{,}27$

Математичні сподівання:

$M(X) = 2\times0{,}31 + 4\times0{,}53 + 6\times0{,}16 = 3{,}7$

$M(Y) = 1\times0{,}24 + 3\times0{,}25 + 5\times0{,}24 + 7\times0{,}27 = 4{,}08$

$M(X^2) = 4\times0{,}31 + 16\times0{,}53 + 36\times0{,}16 = 15{,}22$

$M(Y^2) = 1\times0{,}24 + 9\times0{,}25 + 25\times0{,}24 + 49\times0{,}27 = 22{,}84$

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 15{,}22 - 3{,}7^2 = 1{,}53$

$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 22{,}84 - 4{,}08^2 = 6{,}19$

$\sigma x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1{,}53} = 1{,}24$

$\sigma y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{6{,}19} = 2{,}49$

в) $M(XY) = 2\times1\times0{,}01 + 2\times3\times0{,}11 + ... + 6\times7\times0{,}03 = 15{,}3$

Кореляційний момент:

$K(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = 15{,}3 - 3{,}7 \times 4{,}08 = 0{,}21$

Коефіцієнт кореляції:

$r = K(X,Y)/(\sigma x \times \sigma y) = 0{,}21/(1{,}24 \times 2{,}49) = 0{,}068$

Відповідь:

Ряди розподілу X: (0,31; 0,53; 0,16), Y: (0,24; 0,25; 0,24; 0,27)

$M(X) = 3{,}7$; $M(Y) = 4{,}08$; $\sigma x = 1{,}24$; $\sigma y = 2{,}49$

$K(X,Y) = 0{,}21$; $r = 0{,}068$