

## варіант 21

### задача 1.03

дано:  $x = at + bt^2 + ct^3$   $a = 5 \text{ м/с}$   $b = 0,2 \text{ м/с}^2$   $c = 0,1 \text{ м/с}^3$   $t_1 = 2 \text{ с}$   $t_2 = 4 \text{ с}$

знайти:

1.  $v(t_1)$
2.  $v(t_2)$
3.  $v_{\text{сер}}$

розв'язання:

1. для знаходження миттєвої швидкості потрібно взяти похідну від координати по часу:  $v(t) = dx/dt = a + 2bt + 3ct^2$

підставляємо значення констант:  $v(t) = 5 + 0,4t + 0,3t^2$

2. знаходимо швидкість при  $t_1 = 2 \text{ с}$ :  $v(2) = 5 + 0,4 \cdot 2 + 0,3 \cdot 2^2 = 5 + 0,8 + 1,2 = 7 \text{ м/с}$
3. знаходимо швидкість при  $t_2 = 4 \text{ с}$ :  $v(4) = 5 + 0,4 \cdot 4 + 0,3 \cdot 4^2 = 5 + 1,6 + 4,8 = 11,4 \text{ м/с}$
4. середня швидкість визначається як відношення переміщення до часу:  $v_{\text{сер}} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$

знаходимо координати в моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ :

$$x(2) = 5 \cdot 2 + 0,2 \cdot 2^2 + 0,1 \cdot 2^3 = 10 + 0,8 + 0,8 = 11,6 \text{ м} \quad x(4) = 5 \cdot 4 + 0,2 \cdot 4^2 + 0,1 \cdot 4^3 = 20 + 3,2 + 6,4 = 29,6 \text{ м}$$

$$v_{\text{сер}} = (29,6 - 11,6)/(4 - 2) = 18/2 = 9 \text{ м/с}$$

відповідь:

1.  $v(t_1) = 7 \text{ м/с}$
2.  $v(t_2) = 11,4 \text{ м/с}$
3.  $v_{\text{сер}} = 9 \text{ м/с}$

**задача 1.17**

дано:  $\varepsilon = -2 \text{ рад/с}^2$   $n_1 = 4 \text{ с}^{-1}$   $n_2 = 1,5 \text{ с}^{-1}$

знайти:

1.  $n$  - кількість обертів
2.  $t$  - час

розв'язання:

1. спочатку переведемо частоту обертання в кутову швидкість:  $\omega_1 = 2\pi n_1 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$   
рад/с  $\omega_2 = 2\pi n_2 = 2\pi \cdot 1,5 = 3\pi$  рад/с
2. при рівноприскореному обертанні:  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$  звідси знаходимо час:  $t = (\omega_2 - \omega_1)/\varepsilon =$   
 $(3\pi - 8\pi)/(-2) = 2,5\pi \text{ с}$
3. кількість обертів знаходимо через кут повороту  $\varphi$ :  $\varphi = \omega_1 t + (\varepsilon t^2)/2$   $n = \varphi/(2\pi)$

підставляємо значення:  $\varphi = 8\pi \cdot 2,5\pi + (-2 \cdot (2,5\pi)^2)/2$   $\varphi = 20\pi^2 - 6,25\pi^2$   $\varphi = 13,75\pi^2$  рад

$n = 13,75\pi^2/(2\pi) = 13,75\pi/2 \approx 21,6$  обертів

відповідь:

1.  $n \approx 21,6$  обертів
2.  $t = 2,5\pi \text{ с} \approx 7,85 \text{ с}$

### задача 1.21

дано:  $m_1 = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}$   $m_2 = 300 \text{ г} = 0,3 \text{ кг}$   $t = 1 \text{ с}$   $g = 9,81 \text{ м/с}^2$

знайти:  $s$  - шлях вантажів за  $1 \text{ с}$

розв'язання:

1. оскільки нитка нерозтяжна і перекинута через нерухомий блок, то шлях, який пройдуть обидва вантажі, буде однаковим за величиною.
2. при цьому більш важкий вантаж  $m_2$  буде опускатися, а легший  $m_1$  - підніматися.
3. для знаходження шляху використаємо формулу рівноприскореного руху:  $s = (at^2)/2$   
де  $a$  - прискорення системи
4. знайдемо прискорення системи, використовуючи другий закон ньютона:  $(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a$

звідси:  $a = g(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$   $a = 9,81(0,3 - 0,2)/(0,2 + 0,3) = 9,81 \cdot 0,1/0,5 = 1,962 \text{ м/с}^2$

5. тепер можемо знайти шлях:  $s = (1,962 \cdot 1^2)/2 = 0,981 \text{ м}$

відповідь: кожен вантаж пройде шлях  $s = 0,981 \text{ м}$  за першу секунду руху

### задача 1.38

дано:  $m_1 = 1$  кг (маховик)  $m_2 = 200$  г = 0,2 кг (шків)  $m_3 = 500$  г = 0,5 кг (гиря)  $r = 5$  см = 0,05 м (радіус шківа)  $r = 40$  см = 0,4 м (радіус маховика)  $n = 5$  об/с (кінцева кутова швидкість)  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>

знайти:  $t$  - час досягнення заданої швидкості

розв'язання:

1. переведемо частоту обертання в кутову швидкість:  $\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$  рад/с
2. момент інерції системи:  $i = m_1 r^2 + m_2 r^2$  (момент інерції маховика + момент інерції шківа)  $i = 1 \cdot (0,4)^2 + 0,2 \cdot (0,05)^2 = 0,16 + 0,0005 = 0,1605$  кг·м<sup>2</sup>
3. момент сили тяжіння гири:  $m = m_3 g r = 0,5 \cdot 9,81 \cdot 0,05 = 0,24525$  Н·м
4. використаємо основне рівняння динаміки обертального руху:  $m = i\varepsilon$ , де  $\varepsilon$  - кутове прискорення  $\varepsilon = m/i = 0,24525/0,1605 = 1,528$  рад/с<sup>2</sup>
5. при рівноприскореному обертанні з нульовою початковою швидкістю:  $\omega = \varepsilon t$   $t = \omega/\varepsilon = 10\pi/1,528 \approx 20,6$  с

відповідь:  $t \approx 20,6$  с

### задача 1.45

дано:  $m_1 = 4 \text{ кг}$   $m_2 = 4 \text{ кг}$   $v_1 = 3 \text{ м/с}$   $v_2 = -8 \text{ м/с}$  (знак мінус, бо рух назустріч)

знайти:  $\delta e$  - енергія деформації

розв'язання:

1. при непружному ударі частина кінетичної енергії переходить у внутрішню (енергію деформації). енергія деформації = початкова кінетична енергія - кінцева кінетична енергія
2. початкова кінетична енергія системи:  $e_1 = (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)/2$   $e_1 = (4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 8^2)/2 = (36 + 256)/2 = 146 \text{ дж}$
3. для знаходження кінцевої швидкості використаємо закон збереження імпульсу:  
 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$ , де  $u$  - кінцева швидкість  $4 \cdot 3 + 4 \cdot (-8) = 8u$   $12 - 32 = 8u$   $u = -2,5 \text{ м/с}$
4. кінцева кінетична енергія:  $e_2 = (m_1 + m_2)u^2/2$   $e_2 = 8 \cdot (-2,5)^2/2 = 8 \cdot 6,25/2 = 25 \text{ дж}$
5. енергія деформації:  $\delta e = e_1 - e_2 = 146 - 25 = 121 \text{ дж}$

відповідь:  $\delta e = 121 \text{ дж}$

**задача 1.54**

дано:  $r = 15 \text{ мм} = 0,015 \text{ м}$   $m = 5 \text{ г} = 0,005 \text{ кг}$   $h = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$   $h_1 = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$   $\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3$   $g = 9,81 \text{ м/с}^2$

знайти:  $q$  - кількість теплоти

розв'язання:

1. об'єм кульки:  $v = \frac{4\pi r^3}{3} = 4 \cdot 3,14 \cdot (0,015)^3 / 3 = 1,413 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$
2. сила архімеда:  $f_a = \rho g v = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,413 \cdot 10^{-5} = 0,1386 \text{ н}$
3. вага кульки:  $p = mg = 0,005 \cdot 9,81 = 0,049 \text{ н}$
4. початкова потенціальна енергія (на глибині  $h$ ):  $e_1 = (f_a - p)h = (0,1386 - 0,049) \cdot 0,3 = 0,02688 \text{ дж}$
5. кінцева потенціальна енергія (на висоті  $h_1$ ):  $e_2 = mgh_1 = 0,005 \cdot 9,81 \cdot 0,1 = 0,00491 \text{ дж}$
6. різниця енергій пішла на тепло:  $q = e_1 - e_2 = 0,02688 - 0,00491 = 0,02197 \text{ дж}$

відповідь:  $q = 0,022 \text{ дж}$  ( $\approx 22 \text{ мдж}$ )

### задача 1.62

дано:  $\varphi_0 = 0$   $x_1 = 2,4 \text{ см} = 0,024 \text{ м}$   $v_1 = 3 \text{ см/с} = 0,03 \text{ м/с}$   $x_2 = 2,8 \text{ см} = 0,028 \text{ м}$   $v_2 = 2 \text{ см/с} = 0,02 \text{ м/с}$

знайти:  $a$  - амплітуда  $t$  - період

розв'язання:

1. для гармонічних коливань справедливі рівняння:  $x = a \cdot \cos(\omega t)$   $v = -a\omega \cdot \sin(\omega t)$
2. з цих рівнянь отримуємо:  $v^2 + \omega^2 x^2 = a^2 \omega^2$
3. записуємо систему рівнянь для двох точок:  $v_1^2 + \omega^2 x_1^2 = a^2 \omega^2$   $v_2^2 + \omega^2 x_2^2 = a^2 \omega^2$
4. прирівнюємо праві частини:  $v_1^2 + \omega^2 x_1^2 = v_2^2 + \omega^2 x_2^2$
5. підставляємо значення:  $(0,03)^2 + \omega^2(0,024)^2 = (0,02)^2 + \omega^2(0,028)^2$   $0,0009 + 0,000576\omega^2 = 0,0004 + 0,000784\omega^2$   $0,0005 = 0,000208\omega^2$   $\omega^2 = 2,404 \text{ с}^{-2}$   $\omega = 1,55 \text{ с}^{-1}$
6. тепер можемо знайти амплітуду з будь-якого рівняння:  $a^2 \omega^2 = v_1^2 + \omega^2 x_1^2$   $a^2 = (0,03)^2 + (1,55)^2(0,024)^2$   $a^2 = 0,0009 + 0,001384$   $a = \sqrt{0,002284} = 0,0478 \text{ м} \approx 4,8 \text{ см}$
7. період знаходимо через кутову частоту:  $t = 2\pi/\omega = 2 \cdot 3,14/1,55 = 4,05 \text{ с}$

відповідь:  $a \approx 4,8 \text{ см}$   $t \approx 4,05 \text{ с}$

**задача 1.76**

дано:  $v = 100$  м/с  $x = 1$  м (відстань між точками з протилежними фазами)

знайти:  $\nu$  - частота коливань

розв'язання:

1. точки з протилежними фазами відрізняються на  $\pi$  радіан. найменша відстань між такими точками дорівнює половині довжини хвилі:  $x = \lambda/2$  де  $\lambda$  - довжина хвилі
2. звідси знаходимо довжину хвилі:  $\lambda = 2x = 2 \cdot 1 = 2$  м
3. використовуємо формулу зв'язку швидкості хвилі, частоти і довжини хвилі:  $v = \lambda \nu$
4. виражаємо частоту:  $\nu = v/\lambda = 100/2 = 50$  гц

відповідь:  $\nu = 50$  гц