Завдання 1. Обчислити ймовірності подій

ми рейс.

1.1.21. Комплект містить 12 виробів, 5 із яких коштують по 3 грн кожний, інші — по 1 грн. Знайдіть імовірності того, що взяті навмання 4 вироби коштують разом: а) 10 грн; б) 8 грн.

(10 грн):

$C(12,4) = 495$ - всього варіантів

Для 10 грн: 3 по 3 грн + 1 по 1 грн

$C(5,3)\times C(7,1) = 70$ сприятливих

$P = 70/495 \approx 0.141$

(8 грн):

Для 8 грн: 2 по 3 грн + 2 по 1 грн

$C(5,2)\times C(7,2) = 210$ сприятливих

$P = 210/495 \approx 0.424$

Відповідь: а) 14.1%; б) 42.4%

Завдання 2. Обчислити геометричні ймовірності подій

1.2.21. У прямокутник $0 \le x \le e$, $0 \le y \le 1$ навмання ставиться точка. Знайдіть імовірність того, що вона потрапить в область, обмежену лініями $y = 0$; $y = \ln x$; $x = e$.

Площа прямокутника = $e\times 1$

Площа області між $y=0$, $y=\ln x$, $x=e$ = $e-1$

$P = (e-1)/(e\times 1) = e-1)/e \approx 0.632 = 63.2\%$

Відповідь: $(e-1)/e \approx 0.632$

Завдання 3. Виразити складні події через задані прості

2.1.21. Судно має один кермовий пристрій, 4 котли і 4 турбіни. Події A = {справність кермового пристрою}, B_j = {справність j-го котла, $j=1, 2, 3, 4$}, C_k = {справність k-ї турбіни, $k=1, 2, 3, 4$}, D = {судно кероване}. Виразіть подію D через A, B_j, C_k, якщо для керованості судна необхідна справність кермового пристрою, принаймні трьох котлів і принаймні трьох турбін.

1. Судну потрібно для керованості:

    Справний кермовий пристрій

    Мінімум 3 котли з 4

    Мінімум 3 турбіни з 4

2. Позначення:

    D = {судно кероване}

    A = {справність керма}

    Bj = {справність j-го котла}, j=1,2,3,4

    Ck = {справність k-ої турбіни}, k=1,2,3,4

3. Для керованості потрібно:

    A (керування)

    AND хоча б 3 з B1,B2,B3,B4 (котли)

    AND хоча б 3 з C1,C2,C3,C4 (турбіни)

Відповідь: D = A ∩ (не менше 3 з Bj) ∩ (не менше 3 з Ck)

сума комбінацій по 3 і 4 елементи: D = A ∩ (B1B2B3 ∪ B1B2B4 ∪ B1B3B4 ∪ B2B3B4 ∪ B1B2B3B4) ∩ (C1C2C3 ∪ C1C2C4 ∪ C1C3C4 ∪ C2C3C4 ∪ C1C2C3C4)

Завдання 4. Знайти ймовірності подій, застосовуючи теореми додавання та множення ймовірностей

2.2.1. Радіостанція аеропорту надсилає 3 повідомлення для екіпажу літака. Імовірність прийому екіпажем першого повідомлення дорівнює 0,6, другого — 0,65, третього — 0,7. Знайдіть імовірність того, що екіпажем прийнято: а) тільки одне повідомлення; б) принаймні одне повідомлення.

A_1 = перше повідомлення (p = 0.6)

A_2 = друге повідомлення (p = 0.65)

A_3 = третє повідомлення (p = 0.7)

а) Для прийому всіх: P(всі) = 0.6 × 0.65 × 0.7 = 0.273

б) Для хоча б одного: P(хоча б 1) = 1 - P(жодного) = 1 - (0.4 × 0.35 × 0.3) = 1 - 0.042 = 0.958

Відповідь: а) 27.3%; б) 95.8%

Завдання 5. Знайти ймовірності подій, застосовуючи теореми додавання та множення ймовірностей

виконував політ?

3.21. Фабрика виготовляє однотипну продукцію на трьох потокових лініях, продуктивності яких відносяться, як 3 : 2 : 5. На першій лінії виробляється продукція тільки найвищої якості. На другій лінії продукція найвищої якості становить 90 %, на третій — 85 %. 1) Знайдіть імовірність того, що взятий навмання виріб буде найвищої якості.

Рахуємо загальну пропорцію 3 + 2 + 5 = 10 частин всього

Ймовірність для кожної лінії: P(Лінія 1) = 3/10 P(Лінія 2) = 2/10 P(Лінія 3) = 5/10

Ймовірність: P(найвища якість) = (3/10 × 1,00) + (2/10 × 0,90) + (5/10 × 0,85) = 3/10 + 18/100 + 42,5/100 = 0,3 + 0,18 + 0,425 = 0,905

Відповідь: 90,5%

Крок 1: Рахуємо загальну пропорцію 3 + 2 + 5 = 10 частин всього

Крок 2: Ймовірність для кожної лінії: P(Лінія 1) = 3/10 P(Лінія 2) = 2/10 P(Лінія 3) = 5/10

Крок 3: Обчислюємо ймовірність: P(найвища якість) = (3/10 × 1,00) + (2/10 × 0,90) + (5/10 × 0,85) = 3/10 + 18/100 + 42,5/100 = 0,3 + 0,18 + 0,425 = 0,905

Відповідь: Ймовірність того, що випадково вибраний виріб буде найвищої якості становить 0,905 або 90,5%

Завдання 6. Повторні незалежні випробування

4.21. Імовірність того, що рейс буде виконано із затримкою, дорівнює 0,04. Знайдіть імовірності того, що з 50 рейсів буде виконано з затримкою: а) рівно 4 рейси; б) не більш як 4 рейси; в) принаймні один рейс.

а) Для рівно 4 рейсів $P_4 = C^{50}_4 \times 0{,}04^4 \times 0{,}96^{46} = 0{,}195$

б) Для не більше 4 рейсів сумуємо ймовірності: $P(\leq 4) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0{,}824$

в) Для принаймні одного рейсу: $P(\geq 1) = 1 - P_0 = 1 - 0{,}96^{50} = 0{,}870$

Відповідь: а) 19,5% б) 82,4% в) 87,0%

Завдання 7. Знайти невідомі значення у рядах розподілу дискретних випадкових величин

1.1.21. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	0	1	x_3	x_4
P	0,1	p_2	0,4	0,2

Знайдіть x_3, x_4 і p_2, якщо $x_3 < x_4$ і відомі математичне сподівання $M(X) = 0{,}96$ та дисперсія $D(X) = 0{,}15$. Побудуйте функцію розподілу $F(X)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок [0; 1,5).

З ряду розподілу: X: 0, x_2, x_3, x_4 P: 0.1, p_2, 0.4, 0.2

сума ймовірностей має дорівнювати 1: $0.1 + p_2 + 0.4 + 0.2 = 1$ $p_2 = 1 - 0.7 = 0.3$

Дано $M(X) = 0.96$ $0 \times 0.1 + x_2 \times 0.3 + x_3 \times 0.4 + x_4 \times 0.2 = 0.96$

Дано $D(X) = 0.15$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ $0.15 = (0^2 \times 0.1 + x_2^2 \times 0.3 + x_3^2 \times 0.4 + x_4^2 \times 0.2) - 0.96^2$

$x_3 < x_4$ система рівнянь: $x_2 = 0.5$ $x_3 = 1$ $x_4 = 2$

Відповідь: $x_2 = 0.5$ $x_3 = 1$ $p_2 = 0.3$

F(X) для проміжку [0; 1.5]: $F(0) = 0.1$ $F(0.5) = 0.4$ $F(1) = 0.8$ $F(1.5) = 0.8$

Відповідь = 80%

Завдання 8. Неперервні випадкові величини та їх характеристики

$$\textbf{1.2.21.}\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(x+0{,}5\sin 2x), & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}\qquad (\pi/6;\ \pi/3).$$

При x = 0: Зліва: F(0) = 0 Справа: A(0 + 0.5sin(2×0)) = 0 томуе, A × 0 = 0 ✓

При x = π/2: Зліва: A(π/2 + 0.5sin(π)) = A(π/2) = 1 Справа: 1 тому: A × π/2 = 1

A: A = 2/π

: F'(x) = A(1 + cos(2x)) ≥ 0 для x ∈ [0, π/2]

Відповідь: A = 2/π

Функція F(x) є функцією розподілу, оскільки задовольняє всі необхідні умови

Завдання 9. Дискретні випадкові величини та їх характеристики

а) Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення x_1 та x_2, при цьому $x_1 < x_2$. Відомі: імовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання $M(X)$ та дисперсія $D(X)$. Знайти закон розподілення цієї випадкової величини;

p_2: $p_1 + p_2 = 1$ $0.7 + p_2 = 1$ $p_2 = 0.3$

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2$ $2.2 = x_1 \times 0.7 + x_2 \times 0.3$ ... (1)

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ $3.36 = (x_1^2\times0.7 + x_2^2\times0.3) - 2.2^2$ ... (2)

$2.2 = 0.7x_1 + 0.3x_2$ $x_2 = (2.2 - 0.7x_1)/0.3$

(2): $3.36 = 0.7x_1^2 + 0.3((2.2 - 0.7x_1)/0.3)^2 - 4.84$

отримаємо: $x_1 = 1$ $x_2 = 5$

Відповідь: Закон розподілу: X: 1 5 P: 0.7 0.3

Перевірка: $M(X) = 1\times0.7 + 5\times0.3 = 2.2$ ✓ $D(X) = (1^2\times0.7 + 5^2\times0.3) - 2.2^2 = 3.36$ ✓

Завдання 10. Типи розподілів випадкових величин

3.01-13.30 Відомі математичне сподівання $M(X)$ та середнє квадратичне ння $\sigma(X)$ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ість попадання цієї величини у заданий проміжок $(\alpha; \beta)$.

$M(X) = 45.0$ (математичне сподівання)

$\sigma(X) = 4.5$ (середнє квадратичне відхилення)

$\alpha = 32$ (нижня межа)

$\beta = 78$ (верхня межа)

функція Лапласа $\Phi(z)$ $P(\alpha < X < \beta) = \Phi((\beta - M)/\sigma) - \Phi((\alpha - M)/\sigma)$

аргументи: $z_1 = (32 - 45)/4.5 = -2.89$ $z_2 = (78 - 45)/4.5 = 7.33$

значення функції Лапласа: $\Phi(-2.89) = -0.4981$ $\Phi(7.33) \approx 0.5$

ймовірність: $P(32 < X < 78) = \Phi(7.33) - \Phi(-2.89) = 0.5 - (-0.4981) = 0.9981$

Відповідь: 99.81%

Завдання 11. Типи розподілів випадкових величин

2.21. При випробуванні навігаційних приладів на військових літаках враховують відхилення від точки скидання спеціального вантажу. Складіть ряд розподілу випадкової величини X — кількості відхилень, що не перевищують норму при чотирьох скиданнях, якщо в 30 % випадків це відхилення не перевищує норми. Знайдіть

Розв'язання:

$p = 0.3$ (ймовірність, що відхилення в межах норми)

$q = 0.7$ (ймовірність, що відхилення перевищує норму)

$n = 4$ (кількість випробувань)

$m = 2$ (кількість успішних випробувань)

$C^4_2 = 6$ (кількість комбінацій)

$p^2 = 0.3^2 = 0.09$

$q^2 = 0.7^2 = 0.49$

$P_4(2) = 6 \times 0.09 \times 0.49 = 0.2646$

Відповідь: 26.46%