

Određivanje parametara egzoplanete HD209458b pomoću metode tranzita simultanim fitovanjem u više filtera

Egzoplanete su sve planete koje se nalaze van Sunčevog sistema. Metodom tranzita je detektovan najveći broj egzoplaneta. Tranzit je fenomen u kom planeta u toku svog kretanja prolazi između posmatrača i svoje matične zvezde i u tom trenutku se opaža pad u njenom sjaju. Promena sjaja zvezde sa vremenom predstavlja krivu sjaja. Pomoću krive sjaja tranzita egzoplanete određeni su orbitalni parametri sistema (velika poluosa i inklinacija orbite, kao i radijus egzoplanete) i koeficijenti potamnjenja ka rubu. Analiziran je tranzit egzoplanete HD209458b, a parametri su određeni pomoću MCMC algoritma, na osnovu modela tranzita iz biblioteke batman. Krive sjaja su prvo fitovane pojedinačno u svakom filteru, pa zatim simultano. Prilikom simultanog fitovanja velika poluosa i inklinacija su određene jedinstveno u svim filterima, dok su radijus egzoplanete i koeficijenti potamnjenja ka rubu varirali od filtera do filtera. Velika poluosa i inklinacija orbite, dobijene pojedinačnim i simultanim fitovanjem, su manje za do 1% od trenutno prihvaćenih vrednosti, dok je radijus egzoplanete za do 3% veći od trenutno prihvaćenih vrednosti. Poređenjem oba načina fitovanja zaključeno je da ne postoji veliko odstupanje u rezultatima, te da nije moguće proceniti koji je metod bolji.

Uvod

Svaka planeta koja se nalazi izvan Sunčevog sistema naziva se egzoplanetom. Do sada je otkriveno preko 6050 egzoplaneta (NASA Exoplanet Archive). Za otkrivanje egzoplaneta koriste se razne metode, od kojih su najzastupljenije metoda radijalnih brzina i metoda fotometrijske analize tranzita. Pomoću metode tranzita je do sada otkriveno najviše egzoplaneta.

Tranzit je fenomen koji se događa kada, usled svog kretanja, planeta pomrači deo svoje matične zvezde. Posmatranjem se može uočiti pad u sjaju same zvezde. Promena sjaja zvezde u vremenu naziva se kriva sjaja.

Na izgled krive sjaja utiču orbitalni parametri planete, kao i fenomen potamnjenja ka rubu. Ovaj fenomen, koji se može primetiti i kod Sunca, predstavlja blago zatamnjenje zvezde pri njenom obodu. Ono se dešava manjkom emitovanih fotona u višim slojevima atmosfere same zvezde. Sistem zvezde sa egzoplanetom čiji su parametri određeni u ovom radu je HD209458.

Proces fitovanja je bio podeljen na dva dela, pojedinačno i simultano fitovanje, radi poređenja preciznosti obe metode. U pojedinačnom fitovanju su krive sjaja na svim talasnim dužinama fitovane odvojeno, dok su prilikom simultanog fitovanja one bile fitovane zajedno. U radu Knutson et al. (2007) su parametri fitovani simultano koristeći *downhill simplex* kao algoritam za fitovanje krive sjaja.

Cilj ovog projekta jeste određivanje orbitalnih parametara sistema i koeficijenata potamnjenja ka rubu kao i poređenje rezultata prilikom pojedinačnog fitovanja i simultanog fitovanja u

Kosta Belonić, Kladovo, učenik 4. razreda Gimnazije u Kladovu

Mentori:

Vesna Milošević, Matematički fakultet u Beogradu

Filip Mitić, Matematički fakultet u Beogradu

Dušan Vukadinović, Maks Plank Institut za istraživanje Sunčevog sistema

više filtera kao i poređenje rezultata sa radom Knutson et al. (2007) iz kojeg su podaci krivih sjaja preuzeti.

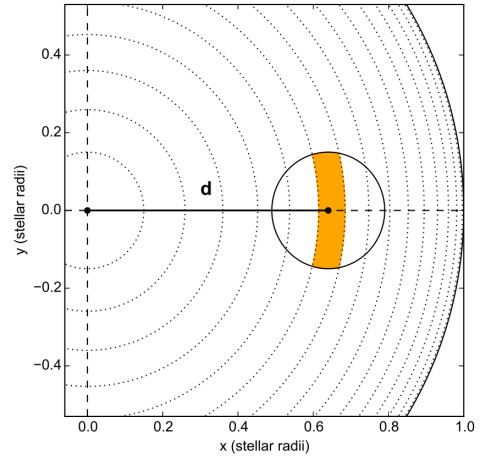
Metod rada

Postoji šest orbitalnih parametara: velika poluosa a , inklinacija i , ekscentricitet e , longituda uzlaznog čvora Ω , argument perihela w i prava anomalija f . Velika poluosa predstavlja razdaljinu od centra mase planeta-zvezda do najisturenije tačke na orbiti. Inklinacija predstavlja ugao koji zaklapaju referentna ravan sa putanjskom ravni orbite planete. Longituda uzlaznog čvora je ugao koji se meri od gama tačke do uzlaznog čvora suprotno smeru kazaljke na satu. Argument perihela govori o orijentaciji elipse i meri se kao ugao od uzlaznog čvora do putanje perihela. Prava anomalija definiše položaj tela na elipsi u određeno vreme posmatranja.

Parametri koji su bili određeni su velika poluosa, inklinacija i radijus egzoplanete, dok su vrednosti parametara kao što su ekscentricitet i longituda periastrona bile preuzete iz literature. Ekscentricitet je bio fiksiran na 0 i opravdanja za ovu aproksimaciju su data u radu Knutson et al. (2007). Pošto je e nula, vrednost ugla ω nije jasno definisana, pa je njena vrednost takođe preuzeta iz literature. Ove aproksimacije su uvedene pre svega kako bi se pojednostavio model i sam proces fitovanja.

Za određivanje ovih parametara iskorišćen je model iz batman biblioteke (L.Kreidberg 2015). Radi simuliranja krive sjaja batman koristi orbitalne elemente kao i radijus egzoplanete (izražen u radijusima zvezde) i period sistema. Nadalje će biti sumiran model koji je detaljno opisan u L.Kreidberg (2015). Model u batman biblioteci simulira krivu sjaja tako što računa količinu blokiranog fluksa δ koji dolazi sa zvezde. Količina blokiranog fluksa je određena pomoću sledeće jednačine:

$$\delta = \sum_{i=1}^n I \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) [A(x_i, r_p, d) - A(x_{i-1}, r_p, d)], \quad (1)$$



Slika 1. Šematska ilustracija planete i zvezde u batman modelu (L.Kreidberg 2015).

Figure 1. Schematic illustration of planet and star in batman model (L.Kreidberg 2015).

gde je x normalizovana radijalna koordinata zvezde, r_p je radijus egzoplanete a d je rastojanje između centra zvezde i egzoplanete tokom tranzita. $A(x, r_p, d)$ predstavlja površinu koju obrazuju krugovi sa poluprečnicima x i r_p i čiji su centri na odstojanju d (videti Sliku 1).

Orbitalni parametri su korišćeni prilikom određivanja međusobnog rastojanja centara zvezde i njene egzoplanete i to pomoću sledeće jednačine:

$$d = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \sqrt{1 - \sin^2(\omega + f) \sin^2 i}. \quad (2)$$

Ovaj model prilikom simuliranja krive sjaja uračunava i koeficijente potamnjenja ka rubu. Fenomen potamnjenja ka rubu je moguće opisati pomoću različitih stepenih funkcija. U ovom radu je korišćena kvadratna funkcija koja ima sledeći oblik:

$$I(\mu) = I_0[1 - c_1(1 - \mu) - c_2(1 - \mu)^2]. \quad (3)$$

U ovoj jednačini μ predstavlja kosinus ugla između linije posmatranja i normale na tačku na površini zvezde (gde bi 0° predstavljao centar zvezde dok bi 90° predstavljao njen obod).

Za $\mu = 1$ intenzitet I će biti maksimalan zato što će parametri uz koeficijente c_1 i c_2 biti nula i samim tim će intenzitet u centru odgovarati intenzitetu I_0 , dok će za $\mu = 0$ biti najmanji to jest to će biti vrednost intenziteta zračenja na samom obodu zvezde, gde c_1 i c_2 predstavljaju koeficijente potamnjenja ka rubu.

Model koji je korišćen u radu Knutsom et al. (2007) sa kojim su poređeni rezultati se ne razlikuje od modela korišćenog u ovom radu, jer se oba zasnivaju na modelu iz Mandel & Agol (2002). Razlika ovog rada sa radom sa kojim su poređeni rezultati jeste što je u ovom radu period orbite bio fiksiran na vrednost iz literature (Knutson et al. 2007). Sa druge strane, u referentnom radu su najpre određeni P i t_0 (t_0 predstavlja vreme početka tranzita), dok su ostali parametri bili fiksirani na vrednosti iz rada Brown et al. (2001). Kada su dobijene ove vrednosti proces fitovanja ostatka parametara je bio odrađen simultano za svaki parametar.

Radi pronalaženja parametara gore pomenutog modela korišćen je *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC), algoritam. On se sastoji iz dva dela, Markovljevih lanaca koji čine nizove parametara funkcije koja opisuje podatke i Monte Carlo simulacije. Glavna karakteristika Markovljevog lanca jeste da se svaki novi deo lanca oslanja na predhodni. Kada se prvo unesu početni parametri, *priori*, za njih se računa posteriorna verovatnoća, gde ona predstavlja koliko su dati parametri verovatni nakon što se uporede sa posmatranim podacima. Zatim se uzima novi set parametara u već određenim granicama. Svaki naredni deo lanca, u zavisnosti od predhodnog seta parametara, će se kretati ka prostoru većih verovatnoća za taj set parametara. Memorija lanca je jedna iteracija. Monte Carlo simulacija predstavlja nasumično uzorkovanje velikog broja parametara, odnosno modela, i karakteristika mu je da je svaki novi set parametara statistički nezavisan od prethodnog. U sam proces se uvodi Markovljev lanac, kako bi se postigla zavisnost između susednih setova parametara da bi se na kraju dobila posteriorna distribucija koja najbolje opisuje posmatrane podatke

(Sharma S. 2017).

Prvi deo fitovanja, *burn in*, predstavlja iteracije pre nego što su parametri konvergirali. Ovaj broj iteracija se određuje pomoću funkcije opisane u *emcee* biblioteci. U ovoj biblioteci se preporučuje da se broj iteracija *burn in* faze podesi tako da je duplo veći od broja iteracija za koji parametri konvergiraju od početnih vrednosti.

Prilikom pojedinačnog fitovanja se svaki filter tretirao kao zaseban set podataka i samim tim je svaki od parametara bio određen pojedinačno. Tokom simultanog fitovanja su r_p , c_1 i c_2 tretirani kao kod pojedinačnog načina fitovanja, dok su velika poluosa orbite i inklinacija određeni tako da budu isti u svakom filteru.

Velika poluosa i inklinacija se neće menjati prilikom posmatranja tranzita u različitim filterima zato što ovi parametri ne zavise od sjaja zvezde. Sa druge strane, koeficijenti potamnjenja ka rubu su određeni zasebno za svaki filter zato što se očekuje da na različitim talasnim dužinama zvezda ima različitu raspodelu intenziteta zračenja. Ovo se očekuje zato što znamo da svaka zvezda na različitim talasnim dužinama ima drugačije intenzitete zračenja, te će i efekat potamnjenja ka rubu prilikom posmatranja na različitim talasnim dužinama biti drugačiji. Takođe se na različitim talasnim dužinama atmosfera zvezde ponaša drugačije, zato što će u zavisnosti u kom se filteru posmatra apsorbovati određenu količinu zračenja, te će intenzitet biti drugačiji. Takođe, očekuje se i da radijus varira u zavisnosti od filtera zato što na različitim talasnim dužinama atmosfera egzoplanete može apsorbovati određenu količinu zračenja i samim tim bi radijus prividno bio manji, odnosno veći.

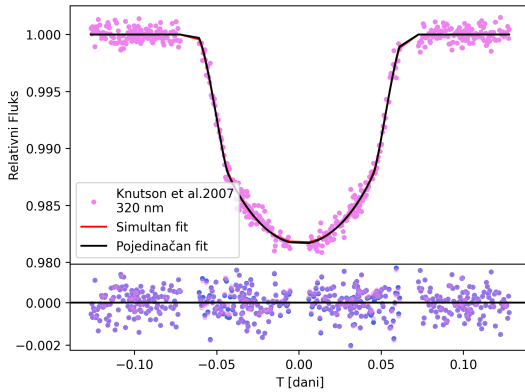
Rezultati

Fotometrijski podaci tranzita egzoplanete su preuzeti iz naučnog rada Knutson et al. (2007) na četiri talasne dužine i to na 320 nm, 580 nm, 677 nm i 873 nm.

U ovom radu je ukupan broj izvršenih iteracija MCMC algoritma za pojedinačno fitovanje bio 800. Početna faza, ili *burn in* faza

je imala 100 iteracija. Nakon 100 iteracija parametri su konvergirali ka vrednostima najvećih verovatnoća i odrađeno je još 700 iteracija radi lepše predstave rezultata.

Na Slikama 2, 3, 4 i 5 su prikazani fitovani modeli na podatke, kao i reziduali za svaki filter. Vrednosti parametara dobijene pojedinačnim fitom, upoređene sa vrednostima parametara priloženim u radu iz kog su krive sjaja preuzete, prikazane su u Tabeli 1.

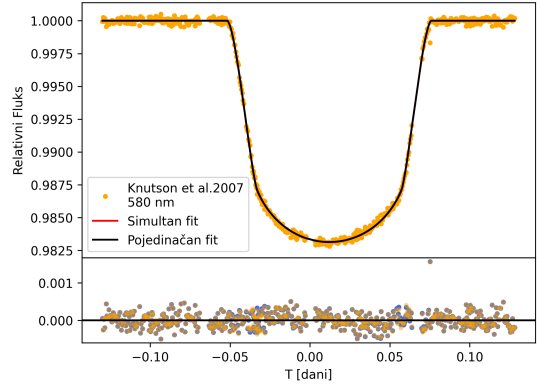


Slika 2. Poređenje simultanog i pojedinačnog fita na 320 nm. Na donjem panelu je predstavljena razlika između posmatranja i najverovatnijeg modela (dobijenog pojedinačnim i simultanim fitovanjem).

Figure 2. Comparison of the simultaneous and individual fit at 320 nm. The lower panel shows the difference between the observations and the most likely model (obtained from individual and simultaneous fitting).

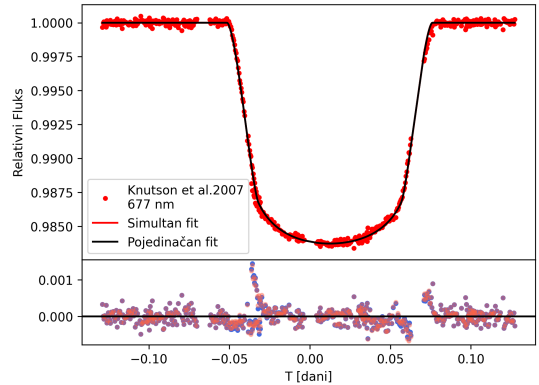
Na Slici 6 se može videti poređenje raspodela sjaja po disku zvezde za koeficijente potamnjenja ka rubu na svim analiziranim talasnim dužinama, dobijenim prilikom simultanog i pojedinačnog načina fitovanja.

Na Slici 7 se može videti poređenje raspodele sjaja po disku zvezde za koeficijente potamnjenja ka rubu dobijene u ovom radu (na talasnoj dužini od 873 nm) sa koeficijentima priloženim u radu Knutson et al. (na rasponu talasnih dužina od 825-922 nm).



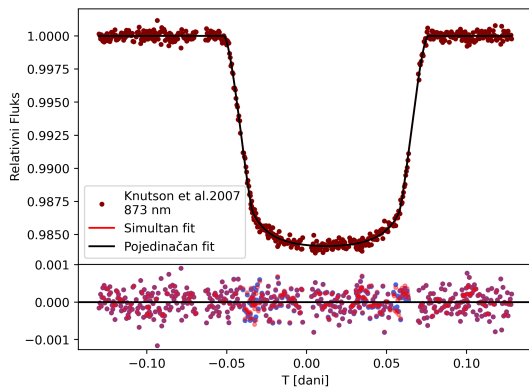
Slika 3. Poređenje simultanog i pojedinačnog fita na 580 nm. Na donjem panelu je predstavljena razlika između posmatranja i najverovatnijeg modela (dobijenog pojedinačnim i simultanim fitovanjem).

Figure 3. Comparison of the simultaneous and individual fit at 580 nm. The lower panel shows the difference between the observations and the most likely model (obtained from individual and simultaneous fitting).



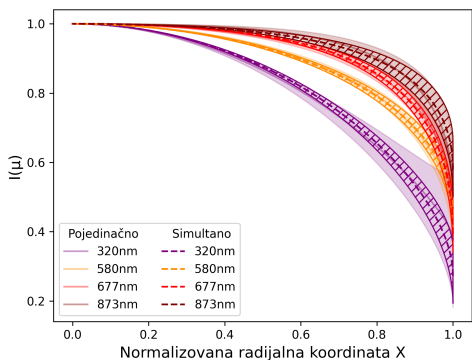
Slika 4. Poređenje simultanog i pojedinačnog fita na 677 nm. Na donjem panelu je predstavljena razlika između posmatranja i najverovatnijeg modela (dobijenog pojedinačnim i simultanim fitovanjem).

Figure 4. Comparison of the simultaneous and individual fit at 677 nm. The lower panel shows the difference between the observations and the most likely model (obtained from individual and simultaneous fitting).



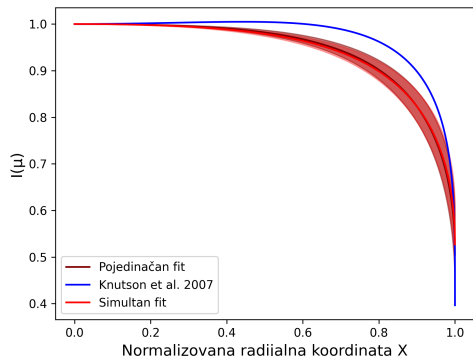
Slika 5. Poređenje simultanog i pojedinačnog fita na 873 nm. Na donjem panelu je predstavljena razlika između posmatranja i najverovatnijeg modela (dobjenog pojedinačnim i simultanim fitovanjem).

Figure 5. Comparison of the simultaneous and individual fit at 873 nm. The lower panel shows the difference between the observations and the most likely model (obtained from individual and simultaneous fitting).



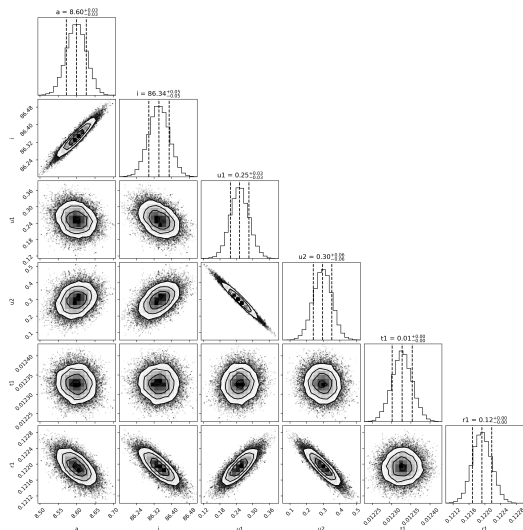
Slika 6. Poređenje krive intenziteta zračenja od centra ka obodu zvezde za koeficijente dobijene simultanim i pojedinačnim fitom za sve četiri talasne dužine.

Figure 6. Comparison of the radiation intensity curve from the center to the limb of the star for coefficients obtained from simultaneous and individual fits for all four wavelengths.



Slika 7. Poređenje krive intenziteta zračenja $I(\mu)$: kvadratna funkcija (pojedinačni i simultani fit) i nelinearna funkcija iz rada Knutson et al. 2007.

Figure 7. Comparison of the radiation intensity curve $I(\mu)$: quadratic function (individual and simultaneous fit) and nonlinear function from Knutson et al. 2007.



Slika 8. *Corner plot* dobijen pojedinačnim načinom fitovanja.

Figure 8. *Corner plot* obtained from the individual fitting procedure.

Na Slici 8 se može videti *corner plot*. On se koristi kako bi se vizualizovao prostor u kome se nalaze parametri koji su određeni pomoću MCMC algoritma. U gornjim kvadratima je prikazana raspodela traženih parametara, gde je maksimum predeo najveće verovatnoće za određeni parametar. Kvadrati dole predstavljaju 2-D prikaz uticaja jednog parametra na drugi, gde je svaka tačka jedna iteracija. Može se takođe primetiti da bi za pozitivan koeficijent pravca značilo da se oba parametra ili povećavaju ili smanjuju, što možemo videti kod a i i . Sa druge strane negativan koeficijent pravca bi prouzrokovao da kada jedan parametar raste drugi opada, što se jasno može primetiti kod koeficijenata potamnjenja ka rubu. Ukoliko parametri uopšte ne utiču jedan na drugi 2-D prikaz će imati oblik kružnice.

Zaključak i diskusija

U ovom radu je bio analiziran tranzit egzoplanete HD209458b na više talasnih dužina. Korišćenjem modela iz batman biblioteke, kao i MCMC algoritma za fitovanje krive sjaja, određeni su a , i , r_p i koeficijenti potamnjenja ka rubu na četiri talasne dužine. Proces fitovanja je bio podeljen na pojedinačno i simultano fitovanje. Dobijeni parametri su najpre upoređeni u odnosu na ova dva načina fitovanja a zatim sa radom Knutson et al. 2007.

Poređenjem parametara dobijenih pojedinačnim fitovanjem u svakom od filtera sa onima dobijenim simultanim fitovanjem može se uočiti da se oni veoma malo razlikuju. Vrednosti radijusa, inklinacije i velike poluose se razlikuju za do 1%. Vrednost a koja je dobijena simultanim fitom, izražena u radijusima zvezde, iznosi 8,68, dok i iznosi 86,49°. Takođe poređenjem reziduala oba načina fitovanja u svakom od filtera se ne može uočiti njihova razlika, to jest ne mogu se videti nikakva odstupanja. Daljim poređenjem ova dva načina fitovanja sa rezultatima priloženim u radu Knutson et al. 2007 može se videti da su vrednosti parametara kao što su velika poluosa i inklinacija do 1% manje od onih u radu, dok su

vrednosti radijusa egzoplanete do 3% veće u odnosu na vrednost priloženu u radu. Mogući razlog ovih neslaganja, uzevši u obzir da je korišćen isti model, je taj što se algoritam kojim se fituje bio drugačiji.

Prilikom poređenja krivih intenziteta zračenja u različitim filterima (Slika 6) može se uočiti da se pri manjim talasnim dužinama kriva brže približava nuli, to jest efekat potamnjenja ka rubu je izraženiji. Predeo obojen to jest šrafiran oko krivih je neodređenost koju daju koeficijenti potamnjenja ka rubu prilikom fitovanja pojedinačno odnosno simultano.

S obzirom da je u ovom radu korišćen drugačiji model potamnjenja ka rubu u odnosu na isti u radu Knutson et al (2007), nije bilo moguće porediti direktno koeficijente potamnjenja ka rubu. Međutim, izvršena je direktna analiza raspodele sjaja po disku zvezde (Slika 7). Oblasti obojene crvenom i bordo bojom predstavljaju neodređenosti koeficijenata potamnjenja ka rubu dobijene prilikom fitovanja. Odavde se može videti da, za posmatranje na sličnim talasnim dužinama, postoje jasne razlike između krive intenziteta koje daje kvadratna funkcija i koje daje nelinearna funkcija.

Kada se posmatraju krive sjaja može se uočiti da se njihovi oblici takođe razlikuju, gde je ka manjim talasnim dužinama (320 nm i 580 nm) donji deo krive sjaja obliji, dok je kriva sjaja na većim talasnim dužinama više nalik trapezu. Iz ovoga se može zaključiti da što je potamnjenje ka rubu veće to će kriva sjaja biti zaobljenija što ukazuje na to da intenzitet zračenja zvezde na toj talasnoj dužini brže opada od centra ka rubovima. Daljom analizom je moguće odrediti i parametre atmosfere posmatrane zvezde.

	a/R_{\star}	$i[^{\circ}]$	$r_p/R_{\star}[10^{-4}]$
320nm	$8,75 \pm 0,12$	$86,51 \pm 0,20$	1253 ± 16
580nm	$8,75 \pm 0,03$	$86,63 \pm 0,06$	1223 ± 3
677nm	$8,60 \pm 0,03$	$86,34 \pm 0,05$	1219 ± 2
873nm	$8,75 \pm 0,05$	$86,64 \pm 0,09$	1211 ± 3
Knutson et al. 2007	$8,95 \pm 0,02$	$86,92 \pm 0,01$	1205 ± 22

Tabela 1. Poređenje parametara dobijenih pojedinačnim fitovanjem sa parametrima u radu Knutson et al. (2007).

Table 1. Comparison of parameters obtained from individual fitting and the parameters in Knutson et al. (2007).

Literatura

Knutson H. A., Charbonneau D., Noyes R. W., Brown T. M., Gilliland R. L. (2007). Using stellar limb-darkening to refine the properties of HD 209458b. *The Astrophysical Journal*, 655(1):564–575. doi:10.1086/510111

L.Kreidberg. batman: BAsic Transit Model cAlculation in Python. arXiv e-prints, 2015. (arXiv:1507.08285)

NASA Exoplanet Archive. Caltech/IPAC, NASA. Dostupno na: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>.

Sharma S. 2017. Markov Chain Monte Carlo Methods for Bayesian Data Analysis in Astronomy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 55:213–259. doi:10.1146/annurev-astro-082214-122339

Mandel, K. & Agol, E. (2002). Analytic Lightcurves for Planetary Transit Searches. *Astrophysical Journal Letters*, 580, L171–L175. arXiv:astro-ph/0210099

Brown T. M., Charbonneau D., Gilliland R. L., Noyes R. W., Burrows A. (2001). Hubble Space Telescope Time-Series Photometry of the Transiting Planet of HD 209458. *The Astrophysical Journal*, 552(2):699–709. doi:10.1086/320580

Kosta Belonić

Determination of the parameters of the exoplanet HD209458b using the transit method through simultaneous fitting in multiple filters

Exoplanets are all planets located outside the Solar System. The majority of exoplanets have been detected using the transit method. A transit is a phenomenon in which a planet passes between the observer and its host star during its orbit, causing a temporary decrease in the star’s brightness. The variation in stellar brightness over time represents a light curve. Using the transit light curve of an exoplanet, the system’s orbital parameters (semi-major axis and orbital inclination, as well as the exoplanet’s radius) and limb-darkening coefficients can be determined. The transit of the exoplanet HD209458b was analyzed, and its parameters were determined using the MCMC algorithm based on the transit model from the batman library. The light curves were first fitted individually in each filter and then simultaneously. During simultaneous fitting, the semi-major axis and inclination were determined uniquely across all filters, while the exoplanet’s radius and limb-darkening coefficients varied between filters. The semi-major axis and orbital inclination obtained from individual and simultaneous fitting are up to 1% smaller than the currently accepted values, while the radius of exoplanet is up to 3% larger than currently accepted values. By comparing the two fitting methods, it was concluded that there is

no significant discrepancy in the results, and therefore it is not possible to determine which method is better.