Тема 1 - Множества

История

- Създадена от Георг Кантор (1845 - 1918г.)
- Наричана е "наивна" заради използването на неформализирани, интуитивно ясни представи.
- След откриването на парадокси в теорията на множествата се формализират много понятия, които дотогава изглеждат очевидни и не се нуждаят от формално описание.
- Теория на множествата е дял от математиката, който изучава свойствата на множествата от най-обща гледна точка, независимо от вида на елементите, техния брой или свойства.
- Множествата могат да съдържат елементи от различна природа.
- Множествата могат да съдържат други множества като свои елементи.

Дефиниция

> **Множество** се нарича всяка съвкупност от различими един от друг обекти

- **Принадлежност**: $x \in M$, ако обектът x е елемент на множеството M (казваме x принадлежи на множеството M) и съответно $x \notin M$, ако x не е елемент на M (казваме x не принадлежи на множеството M)

Описание на множества

- **Конструктивно** описание на множества - чрез изброяване на елементите на множеството

$$A = \{-1, 0, 1\}$$

- **Дескриптивно** описание на множества - чрез посочване на свойство, което е характерно за всички елементи от множеството. (P(x) е предикат, който е верен за всеки елемент от множеството)

$$M = \{x \in M | P(x)\}$$

- *Пример:* Множеството на всички четни положителни числа записваме като:

$$M = \{x \in \mathbb{Z}^+ | x \; mod \; 2 = 0\}$$

- **Мощността** на едно множество M се определя от броя на елементите му. Означава се $|M|$

Аксиома за обема

> Нека A и B са множества. Тези две множества са равни (еквивалентни) когато за всяко х е изпълнено $x \in A \iff x \in B$ Което означава, че **еквивалентни** множества са такива, които са съставени от едни и същи елементи, без значение от реда на елементите или дали те се повтарят.

$$A = B$$

Аксиома за отделянето

> **Подмножество** е такова множество M' така че $M' = \{x | x \in M \land P(x)\}$ Отбелязваме го $M' \subseteq M$.

- **Собствено подмножество** е подмножество M' което не е еквивалентно с M, т.е $M' \neq M$. Бележим с $M' \subset M$

Числови множества

- $\mathbb{N}$ - множеството на естествените числа -

$$\{0, 1, 2, 3, ...\}$$

- $\mathbb{Z}$ - множеството не целите числа

$$\{2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

- $\mathbb{Q}$ - множеството на рационалните числа -

$$\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

- $\mathbb{I}$ - множество на ирационалните числа - \{...\sqrt{2}, \sqrt
- $\mathbb{R}$ - множество на реалните числа - включва всички рационални и ирационални числа
- $\mathbb{C}$ - множество на комплексните числа

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- **Празно множество** е множеството, което не съдържа елементи. Бележи се с $\emptyset$ или $\{\}$
- **Универсално множество** (универсум) U е множеството над всички множества, т.е. за всяко $M \subseteq U$. Трябва да се указва при дескриптивното описание на множества.

Аксиома за степента

> Съвкупността от всички възможни подмножества на множеството M е множество.
> Отбелязва се с $\mathcal{P}(M)$ или 2^M и се нарича степен на M

$$\mathcal{P}(M) = \{A | A \in M\}$$

- **Мощността на степента**

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$$

Крайни и безкрайни множества

- **Крайно Множество** е множество което е съставено от краен брой елементи. Формално, множество S е крайно, ако съществува биекция $f : S \to \{1, ..., n\}$ за някакво естествено число n. Числото n е мощността (кардиналността) на множеството S, отбелязвано с $|S|$. Казано по-просто, ***крайно множество е множество което е равномощно на начален отрязък на естествения ред на числата***.

- **Безкрайно множество** е множество което не е крайно.

- **Изброимо множество** е или крайно, или множество равномощно на множеството на естествените числа.

- Ако S е безкрайно множество и $|S| = \aleph_0$, където $\aleph_0$ е мощността на множеството на естествените числа, то S е изброимо.

  - изброимите множества могат да бъдат крайни множества или безкрайни изброими множества.
  - безкрайно неизброимо множество няма взаимно еднозначно съответствие (биекция) с множеството на естествените числа.

- Примери за изброими безкрайни множества

  - Множеството на целите числа $\mathbb{Z}$, е изброимо
  - Множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ е изброимо

- Примери за неизброими безкрайни множества

  - Множеството на реалните числа $\mathbb{R}$

Теорема

> Ако A и B са изброими множества, тогава $A \cup B$ е също изброимо