Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μηχ. Η/Υ & Πληροφορικής

Ψ Η Φ Ι Α Κ Ε Σ   Τ Η Λ Ε Π Ι Κ Ο Ι Ν Ω Ν Ι Ε Σ

Ακαδημαϊκό Έτος 2016-2017

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέρος Α

Συμπίεση Διακριτής Πηγής με Χρήση της Κωδικοποίησης DPCM

1. Εισαγωγή

Η κωδικοποίηση ***DPCM*** (**D**ifferential **P**ulse **C**ode **M**odulation) μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση της κωδικοποίησης Δέλτα όπου το σήμα που κβαντίζεται και αποστέλλεται στο δέκτη, είναι η διαφορά ανάμεσα στο τρέχον δείγμα (της χρονικής στιγμής **n**) και σε μία γραμμική πρόβλεψή του. Δηλαδή, στην κωδικοποίηση ***DPCM***, υπολογίζουμε, σε κάθε χρονική στιγμή, μια πρόβλεψη για την τιμή του τρέχοντος δείγματος με βάση τις τιμές προηγούμενων δειγμάτων τα οποία έχουν ήδη κωδικοποιηθεί και στη συνέχεια υπολογίζουμε το λάθος της πρόβλεψης αυτής. Το σήμα σφάλματος πρόβλεψης στη συνέχεια κωδικοποιείται χρησιμοποιώντας ένα ή περισσότερα δυαδικά ψηφία ανά δείγμα.

2. Κωδικοποίηση DPCM

Ο κωδικοποιητής και ο αποκωδικοποιητής ενός συστήματος ***DPCM*** παρουσιάζονται στο Σχήμα 1. Προκειμένου να κωδικοποιήσουμε την τιμή του τρέχοντος δείγματος υπολογίζουμε αρχικά μια πρόβλεψη για την τιμή του βασιζόμενοι σε κωδικοποιημένες τιμές προηγούμενων δειγμάτων. Η πρόβλεψη του σήματος $x(n)$ συμβολίζεται ως $y'(n)$. Τόσο ο πομπός όσο και ο δέκτης έχουν μια διάταξη μνήμης η οποία κρατάει αποθηκευμένες τις ανακατασκευασμένες τιμές των προηγούμενων δειγμάτων με βάση τις οποίες θα υπολογιστεί η πρόβλεψη της τιμής του τρέχοντος δείγματος.

Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τη διασπορά του σήματος σφάλματος $y(n) = x(n) - y'(n)$ έτσι ώστε αυτό να παρουσιάζει μικρή δυναμική περιοχή και να μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από μικρό αριθμό δυαδικών ψηφίων. Η διαδικασία της κβάντισης του σήματος σφάλματος $y(n)$ οδηγεί στο σήμα $\hat{y}(n)$ το οποίο και αποστέλλεται στο δέκτη. Στο δέκτη, το σήμα $\hat{y}(n)$ συνδυάζεται με το σήμα $y'(n)$ (την πρόβλεψη του $x(n)$). Δεδομένου ότι οι προηγούμενα ανακατασκευασμένες τιμές καθώς και η μέθοδος πρόβλεψης που χρησιμοποιεί ο πομπός είναι γνωστές στο δέκτη, πομπός και δέκτης υπολογίζουν ακριβώς τις ίδιες τιμές για την πρόβλεψη $y'(n)$. Όπως και στην περίπτωση της κωδικοποίησης δέλτα, και εδώ ο πομπός συμπεριλαμβάνει ως τμήμα του τη διάταξη του δέκτη η οποία υπολογίζει την ανακατασκευή $\hat{y}'(n)$. Τις τιμές αυτές χρησιμοποιεί ο πομπός για να υπολογίσει την πρόβλεψη, και όχι τις πραγματικές τιμές $x(n)$, με σκοπό να μιμηθεί πλήρως τη διάταξη του δέκτη η οποία φυσικά δεν γνωρίζει τις πραγματικές τιμές. Χρησιμοποιώντας τις ανακατασκευασμένες τιμές για τον υπολογισμό της πρόβλεψης και στη συνέχεια του σφάλματος πρόβλεψης, εξασφαλίζουμε (όπως στην περίπτωση της κωδικοποίησης δέλτα) πως δεν έχουμε συσσώρευση του σφάλματος κβάντισης.

Οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν τη λειτουργία του συστήματος ***DPCM*** του Σχήματος 1 είναι οι ακόλουθες:

$$y(n) = x(n) - y'(n)$$

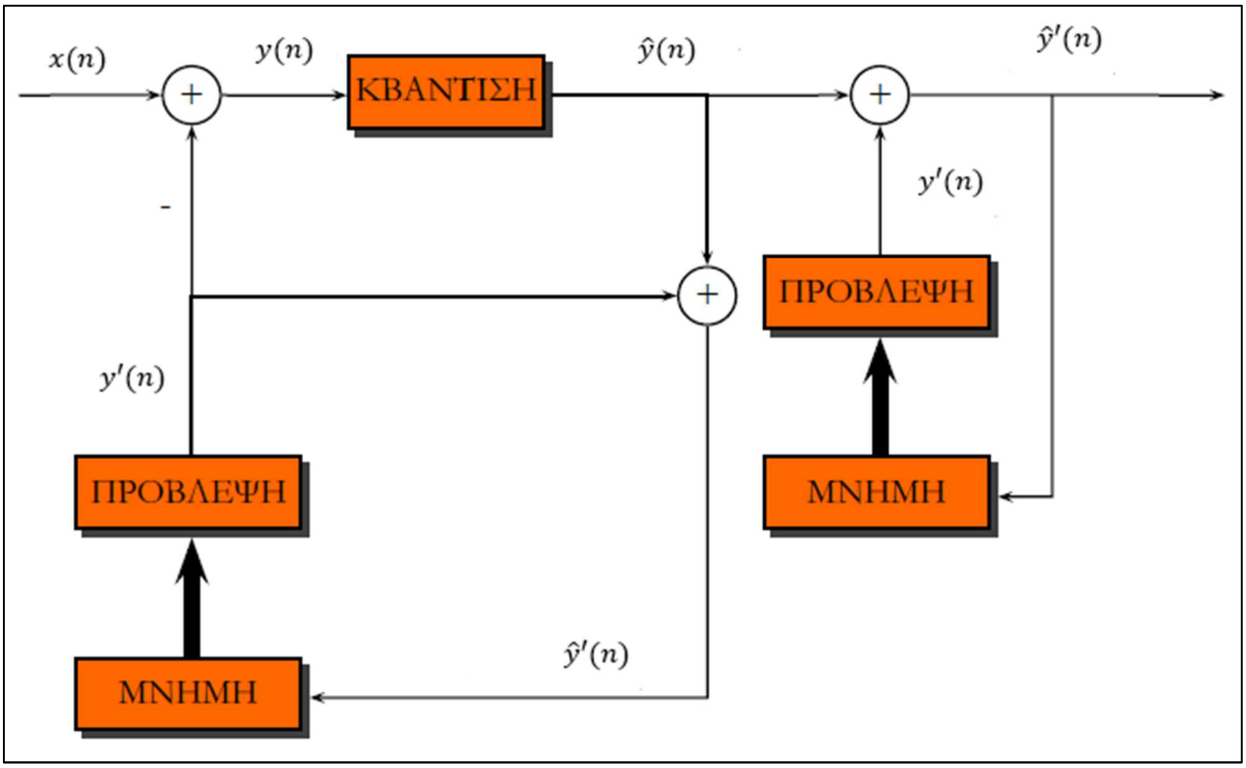
$$\hat{y}(n) = Q\big(y(n)\big)$$

$$\hat{y}'(n) = y'(n) + \hat{y}(n)$$

όπου $Q(\cdot)$ είναι η συνάρτηση εισόδου-εξόδου του βαθμωτού κβαντιστή (ομοιόμορφου) που χρησιμοποιείται. Από τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε για το σφάλμα κβάντισης την έκφραση:

$$y_Q(n) = \hat{x}(n) - x(n) = \hat{y}(n) - y(n)$$

Παρατηρούμε πως αν στις παραπάνω εξισώσεις θέσουμε $y'(n) = 0$ (που αντιστοιχεί σε ένα σύστημα ***DPCM*** το οποίο δεν χρησιμοποιεί πρόβλεψη), τότε το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με ένα απλό ***PCM*** σύστημα κωδικοποίησης.



Σχήμα 1. Κωδικοποιητής και Αποκωδικοποιητής DPCM

3. Υπολογισμός του Φίλτρου Πρόβλεψης

Σε ένα γενικό σύστημα ***DPCM***, η πρόβλεψη του δείγματος $x(n)$ δίνεται ως ένας γραμμικός συνδυασμός p προηγουμένων τιμών $\hat{y}'(n-i)$ οι οποίες έχουν ήδη κωδικοποιηθεί και στη συνέχεια έχουν ανακατασκευαστεί, δηλαδή:

$$y'(n) = \sum_{i=1}^{p} a_i \, \hat{y}'(n-i)$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_i με κριτήριο την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ανάμεσα στο εκάστοτε τρέχον δείγμα εισόδου και την πρόβλεψή του:

$$MSE = E[e^2(n)] = E\left[\left(x(n) - \sum_{i=1}^{p} a_i \hat{y}'(n-i)\right)^2\right]$$

Το παραπάνω κριτήριο ωστόσο, είναι δύσκολο να ελαχιστοποιηθεί αφού το MSE εξαρτάται από τους συντελεστές αλλά και από τον κβαντιστή που χρησιμοποιούμε. Επομένως, αποτελεί ένα μη-γραμμικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Για να ξεφύγουμε από αυτή τη δυσκολία, αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση την ποσότητα $\hat{y}'(n-i)$ με το σήμα $x(n-i)$ θεωρώντας πως αφού το πρώτο αποτελεί την κβαντισμένη εκδοχή του δεύτερου δεν κάνουμε μεγάλο σφάλμα.

Έτσι, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την έκφραση:

$$\widehat{MSE} = E[e^2(n)] = E\left[\left(x(n) - \sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right)^2\right]$$

$$\widehat{MSE} = E\left[\left(x(n)\right)^2 - 2x(n)\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i) + \left(\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(x(n)\right)^2\right] - 2E\left[x(n)\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right] + E\left[\left(\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(x(n)\right)^2\right] - 2\sum_{i=1}^{p} a_i E[x(n)x(n-i)] + E\left[\sum_{i=1}^{p} a_i x(n-i)\sum_{j=1}^{p} a_j x(n-j)\right]$$

$$= E\left[\left(x(n)\right)^2\right] - 2\sum_{i=1}^{p} a_i E[x(n)x(n-i)] + E\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j x(n-j)x(n-i)\right]$$

$$= E\left[\left(x(n)\right)^2\right] - 2\sum_{i=1}^{p} a_i E[x(n)x(n-i)] + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j E[x(n-j)\, x(n-i)]$$

$$= R_x(0) - 2\sum_{i=1}^{p} a_i R_x(i) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_i a_j\, R_x(i-j)$$

Παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση του σφάλματος ως προς καθένα από τους συντελεστές a_i του *φίλτρου πρόβλεψης* και θέτοντας την παράγωγο ίση με μηδέν, προκύπτει ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων για τους συντελεστές του φίλτρου, δηλαδή,

$$\frac{\partial \widehat{MSE}}{\partial a_i} = 0 \implies$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_k\, R_x(i-j) = R_x(i)\,, \qquad 1 \le i,j \le p$$

$$\boldsymbol{Ra} = \boldsymbol{r} \text{ ή } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{R}$: ο πίνακας αυτοσυσχέτισης διάστασης $\boldsymbol{pxp}$ του οποίου το $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ στοιχείο είναι το $R_x(i-j)$

$\boldsymbol{r}$: διάνυσμα αυτοσυσχέτισης διάστασης $\boldsymbol{px1}$ με στοιχείο $\boldsymbol{i}$ το $R_x(i)$

$\boldsymbol{a}$: διάνυσμα διάστασης $\boldsymbol{px1}$ με τους συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης

$\boldsymbol{R_x}$: η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της τυχαίας διαδικασίας $x(n)$. Λύνοντας το παραπάνω σύνολο εξισώσεων ***Yule Walker***, βρίσκουμε τους βέλτιστους συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης.

Επιπρόσθετα, για να αντιστοιχεί αυτό το στάσιμο σημείο σε ελάχιστο της συνάρτησης αρκεί ο πίνακας $\boldsymbol{R}$ να είναι θετικά ορισμένος.

Οι στοχαστικές ποσότητες που εμφανίζονται στην παραπάνω έκφραση μπορούν να εκτιμηθούν από τα διαθέσιμα δείγματα. Συγκεκριμένα, για μια ακολουθία εισόδου $x(n)$ διαστάσεων $1 \times N$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$\hat{R}_x(i) = \frac{1}{N-p}\sum_{n=p+1}^{N} x(n)x(n-i) \;, \quad 1 \le i \le p$$

$$\hat{R}_x(i-j) = \frac{1}{N-p+1}\sum_{n=p}^{N} x(n-j)x(n-i)\,, \qquad 1 \le i,j \le p$$

Ο υπολογισμός του φίλτρου πρόβλεψης γίνεται στο πομπό, και στη συνέχεια οι συντελεστές του φίλτρου πρόβλεψης κβαντίζονται και αποστέλλονται στον δέκτη. **Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε πως και ο πομπός θα πρέπει να χρησιμοποιεί τις κβαντισμένες τιμές των συντελεστών του φίλτρου πρόβλεψης έτσι ώστε πομπός και δέκτης να λειτουργούν σε συμφωνία. Για να υπολογίσετε τις κβαντισμένες τιμές των συντελεστών, χρησιμοποιείστε τον ομοιόμορφο κβαντιστή που θα κατασκευάσετε, θέτοντας $\boldsymbol{N = 8\, bits}$ και δυναμική περιοχή $[-\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}]$.**

4. Ομοιόμορφος Κβαντιστής

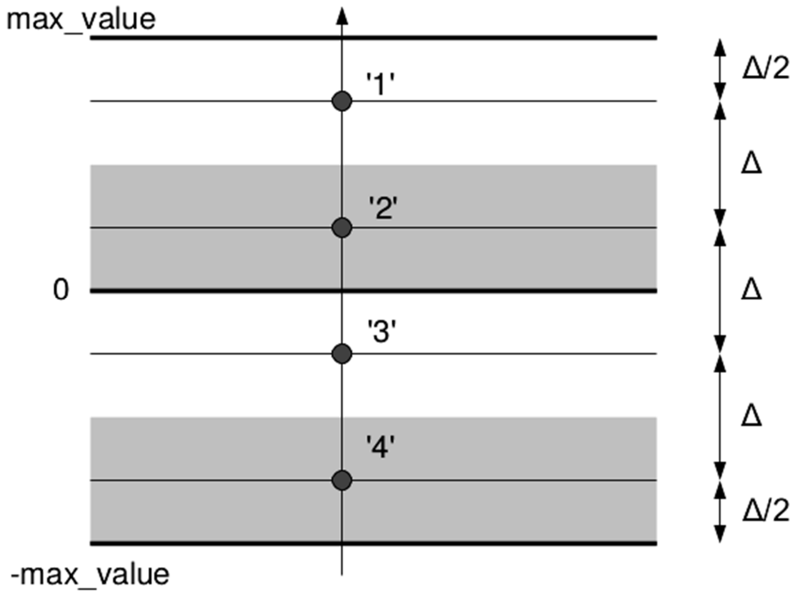
Επιπλέον, καλείστε να υλοποιήσετε έναν ομοιόμορφο κβαντιστή $\boldsymbol{N}$ δυαδικών ψηφίων, δηλαδή $\boldsymbol{2^N}$ επιπέδων ο οποίος θα κβαντίσει το σφάλμα πρόβλεψης το οποίο έχει μικρότερη δυναμική περιοχή σε σχέση με το σήμα εισόδου. Ο κβαντιστής συγκεκριμένα θα κβαντίζει κάθε δείγμα του σφάλματος πρόβλεψης ξεχωριστά και θα υλοποιηθεί ως συνάρτηση της MATLAB:

$[\hat{y}(n)] \ = \ \boldsymbol{my\_quantizer}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{N}, \boldsymbol{min\_value}, \boldsymbol{max\_value});$
$y(n)$: το τρέχον δείγμα του σφάλματος πρόβλεψης ως είσοδος του κβαντιστή N: ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων που θα χρησιμοποιηθούν max_value: η μέγιστη αποδεκτή τιμή του σφάλματος πρόβλεψης min_value: η ελάχιστη αποδεκτή τιμή του σφάλματος πρόβλεψης $\hat{y}(n)$: το κβαντισμένο δείγμα του τρέχοντος δείγματος του σφάλματος πρόβλεψης Τα επίπεδα κβάντισης αναπαρίστανται με τους ακεραίους $1,2,\ldots,2^N$ όπου το μεγαλύτερο θετικό επίπεδο κβάντισης αντιστοιχεί στον ακέραιο 1. Οι ακέραιοι αυτοί μπορούν να αναπαρασταθούν δυαδικά με N δυαδικά ψηφία. $centers$: διάνυσμα με τα κέντρα των περιοχών κβάντισης

Ειδικότερα, ο κβαντιστής θα πρέπει να περιορίζει τη δυναμική περιοχή του σφάλματος πρόβλεψης στις τιμές $[min\_value : max\_value]$, θέτοντας τα δείγματα που βρίσκονται εκτός δυναμικής περιοχής στην αντίστοιχη ακραία αποδεκτή τιμή. Στη συνέχεια, ο κβαντιστής υπολογίζει το βήμα κβαντισμού Δ, τα κέντρα της κάθε περιοχής, υπολογίζει σε ποια περιοχή ανήκει το δείγμα εισόδου, και βγάζει ως έξοδο το κωδικοποιημένο δείγμα $\hat{y}(n)$[1]. Το δείγμα αυτό θα χρησιμοποιηθεί ως δείκτης στο διάνυσμα $centers$ για να πάρουμε το κβαντισμένο δείγμα ως $\hat{y}(n) = centers(\hat{y}(n))$.

Ένα παράδειγμα των περιοχών κβάντισης για $N = 2\ bits$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

[1]Το κωδικοποιημένο δείγμα στην έξοδο του κβαντιστή θα παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 2^N, όσες είναι και οι περιοχές κβάντισης. Η κβαντισμένη έκδοση του δείγματος εξόδου θα λαμβάνει την τιμή του κέντρου κβάντισης της περιοχής στην οποία ανήκει το τρέχον δείγμα εισόδου.



Σχήμα 2. Παράδειγμα ομοιόμορφου κβαντιστή για $N = 2\ bits$

5. Πηγή Εισόδου

Η πηγή που καλείστε να κωδικοποιήσετε/αποκωδικοποιήσετε είναι ένα σήμα 10.000 δειγμάτων το οποίο έχει ικανοποιητική προβλεψιμότητα, δηλαδή ένα τρέχον δείγμα του μπορεί να προβλεφθεί, με μικρό σφάλμα πρόβλεψης, συνδυάζοντας προηγούμενες τιμές δειγμάτων του ιδίου σήματος. Τα δείγματα της πηγής με την οποία θα πειραματιστείτε βρίσκονται αποθηκευμένα στο αρχείο με όνομα source.mat. Για να ανακτήσετε τα δεδομένα εισόδου αρκεί να πληκτρολογήσετε:

```
>> load source.mat
```

Ερωτήματα – Μέρος Α

Στα πειράματα που θα εκτελέσετε η δυναμική περιοχή του κβαντιστή να είναι μεταξύ των τιμών $max_{value} = 3$, $min_{value} = -3$.

1. Να υλοποιήσετε το παραπάνω σύστημα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης $\boldsymbol{DPCM}$.
2. Επιλέξτε δύο τιμές του $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{4}$ [2] και για $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}\ \boldsymbol{bits}$ σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα το αρχικό σήμα και το σφάλμα πρόβλεψης y. Σχολιάστε τα αποτελέσματα. Τί παρατηρείτε;
3. Αξιολογείστε την απόδοσή του ως προς το πλήθος των δυαδικών ψηφίων $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}\ \boldsymbol{bits}$ τα οποία χρησιμοποιεί ο ομοιόμορφος κβαντιστής για την κωδικοποίηση του σήματος πρόβλεψης y, για τάξη προβλέπτη $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{4}{:}\boldsymbol{8}$. Συγκεκριμένα αποτυπώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης, $E(y^2) = E((x - y')^2\ )$ ως προς το $\boldsymbol{N}$, για τις δοθείσες τιμές του $\boldsymbol{p}$. Επιπλέον, για κάθε $\boldsymbol{p}$ καταγράψτε στην αναφορά σας και σχολιάστε τις τιμές των συντελεστών του προβλέπτη.
4. Για $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}\ \boldsymbol{bits}$ να απεικονίσετε το αρχικό και το ανακατασκευασμένο σήμα στο δέκτη για $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{4}, \boldsymbol{8}$ και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα της ανακατασκευής σε σχέση με τα $\boldsymbol{bits}$ κβάντισης. Επιλέξτε να απεικονίσετε μια περιοχή του σήματος για να δείτε πόσο καλά το ανακατασκευασμένο σήμα προσεγγίζει το αρχικό.

[2] Η διαδικασία εισόδου είναι κατασκευασμένη από μία Auto Regressive διαδικασία τάξης 4 για αυτό και η ελάχιστη τιμή της τάξης του προβλέπτη είναι 4. Αυτή είναι μικρότερη τιμή p ώστε να ώστε να μπορούμε να εκτιμήσουμε καλά την τιμή ενός δείγματος από προβλέψεις προηγούμενων δειγμάτων.

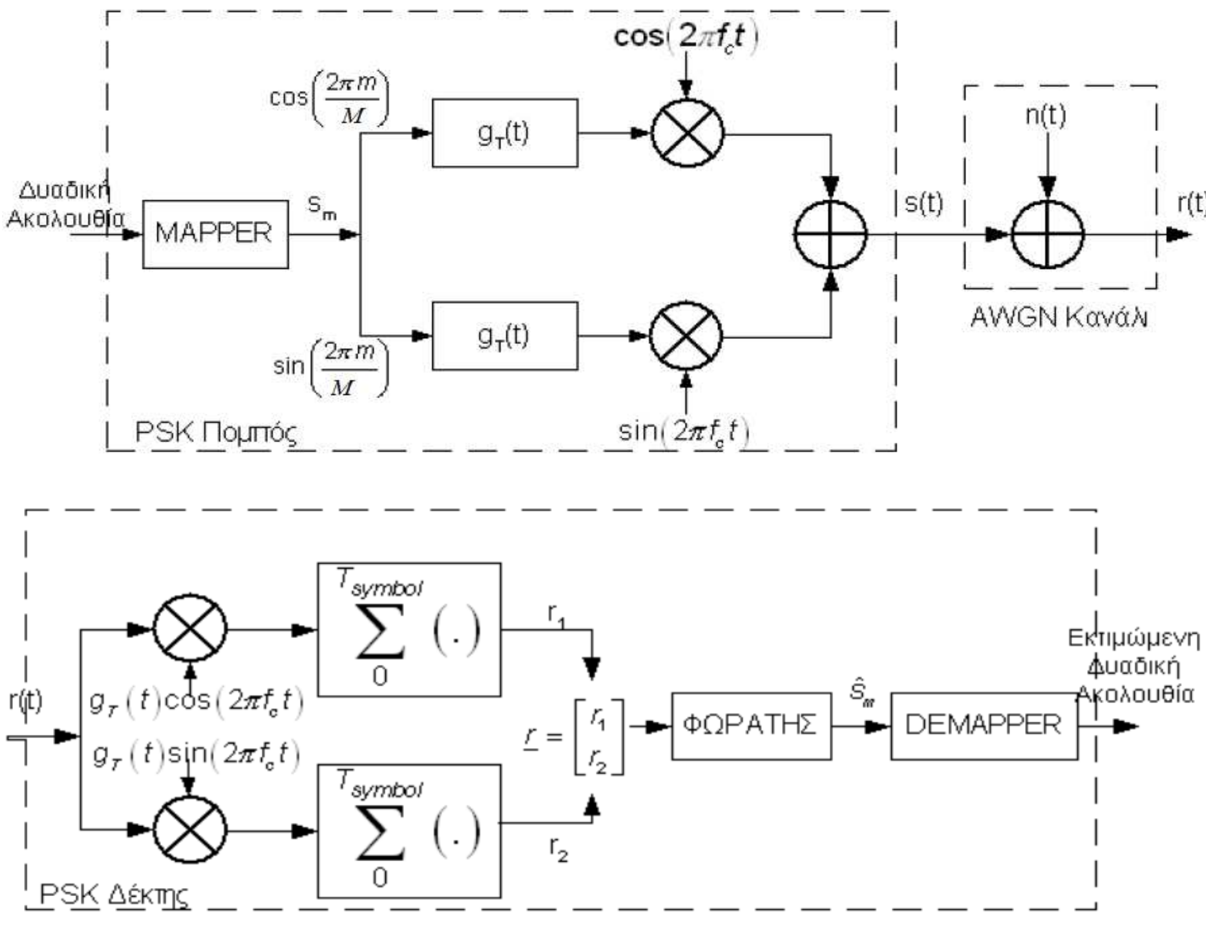
<u>Μέρος Β</u>

Προσομοίωση Ομόδυνου Ζωνοπερατού

Συστήματος M-PSK

1. Εισαγωγή

Στην άσκηση αυτή καλείστε να μελετήσετε την απόδοση της διαμόρφωσης M-PSK. Η μελέτη αυτή θα βασιστεί σε μετρήσεις πιθανότητας σφάλματος bit (Bit Error Rate, BER), που θα πραγματοποιηθούν σε ένα ομόδυνο ζωνοπερατό σύστημα με ορθογώνιο παλμό.



Σχήμα 3. Ομόδυνο M-PSK

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, ένα ομόδυνο σύστημα M-PSK αποτελείται από τρία βασικά μέρη, όπως άλλωστε κάθε τηλεπικοινωνιακό σύστημα, τον πομπό, το κανάλι και το δέκτη. Η είσοδος του συστήματος είναι μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων, την οποία μετατρέπει σε σύμβολα, την πολλαπλασιάζει με τον ορθογώνιο παλμό, και κατόπιν το σήμα μεταφέρεται στη ζώνη μετάδοσης μέσω του διαμορφωτή. Το σήμα που στάλθηκε περνά μέσα από το τηλεπικοινωνιακό κανάλι το οποίο είναι Προσθετικού Gaussian Θορύβου (**AWGN**), και φθάνει στο δέκτη του συστήματος. Εκεί αποδιαμορφώνεται και προκύπτει ένα δισδιάστατο διάνυσμα, το οποίο εισάγεται στο φωρατή ο οποίος αποφασίζει ποιο σύμβολο στάλθηκε.

2. Περιγραφή υποσυστήματων ομόδυνου M-PSK

Είσοδος-Δυαδική Ακολουθία

Η είσοδος του συστήματος είναι μια ακολουθία $bits$, όπου οι τιμές 0 και 1 εμφανίζονται ισοπίθανα. Μια τέτοια ακολουθία μπορεί να παραχθεί αν χρησιμοποιήσετε κατάλληλα κάποια από τις συναρτήσεις $\boldsymbol{randsrc}, \boldsymbol{rand}, \boldsymbol{randn}$. Το πλήθος των δυαδικών ψηφίων που πρέπει να στείλετε μέσα από το κανάλι στο δέκτη θα πρέπει να είναι της τάξης των $L_B = 10000 - 100000\ bits$.

Αντιστοιχία Bits-Συμβόλων & Συμβόλων-Bits

Ο mapper ουσιαστικά ένας μία δομή που μετατρέπει τα bits εισόδου σε σύμβολα. Θα υλοποιήσουμε ένα ***M-PSK***, όπου κάθε σύμβολό του αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ομάδα από $\boldsymbol{\log_2 M\ bits}$. Επομένως, ο mapper θα πρέπει για κάθε ζευγάρι $\boldsymbol{bits}$ να εξάγει ένα από τα $\boldsymbol{M}$ σύμβολα της διαμόρφωσης.

Αντίστοιχα, ο demapper δέχεται ως είσοδο το σύμβολο που έχει ανιχνεύσει η διάταξη απόφασης του δέκτη (φωρατής), και βγάζει την αντίστοιχη ομάδα από $\boldsymbol{\log_2 M\ bits}$. Στην περίπτωση του ***PSK*** (***αλλά*** και των **PAM**, ***QAM*** διαμορφώσεων), ένα σημαντικό στοιχείο κατά την αντιστοίχιση αυτή είναι η κωδικοποίηση Gray. Σύμφωνα με αυτήν αν δύο σύμβολα είναι γειτονικά στο δισδιάστατο χώρο σημάτων, τότε σε αυτά ανατίθενται δυαδικές λέξεις που διαφέρουν μόνο κατά ένα bit μεταξύ τους.

Ορθογώνιος Παλμός

Το σύστημα ***M-PSK*** που καλείστε να προσομοιώσετε χρησιμοποιεί ορθογώνιο παλμό για τη μετάδοση των συμβόλων. Ο ορθογώνιος παλμός ορίζεται ως:

$$g_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2E_s}{T_{symbol}}} = \sqrt{\dfrac{2}{T_{symbol}}} \ , & 0 \leq t \leq T_{symbol} \\ 0 \ \ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

όπου E_s είναι η ενέργεια ανά σύμβολο, την οποία κανονικοποιούμε ως $E_s = 1$, και

T_{symbol} είναι η περίοδος συμβόλου.

Διαμόρφωση *M-PSK*

Κάθε σύμβολο της διαμόρφωσης ***M-PSK*** ορίζεται από δύο συνιστώσες

$$s_m = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s}\cos\left(\dfrac{2\pi m}{M}\right) \\ \sqrt{E_s}\sin\left(\dfrac{2\pi m}{M}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{2\pi m}{M}\right) \\ \sin\left(\dfrac{2\pi m}{M}\right) \end{bmatrix}, m = 0,1,2, \dots, M-1$$

όπου $E_s = 1$ στην περίπτωσή μας (και γι’ αυτό δε σημειώνεται η ενέργεια στο Σχήμα 3). Κάθε συνιστώσα, αφού πολλαπλασιαστεί με τον ορθογώνιο παλμό, διαμορφώνεται από τη φέρουσα συχνότητα και προκύπτει το ζωνοπερατό σήμα:

$$s_m(t) = \cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right) g_T(t) \cos(2\pi f_c) + \sin\left(\frac{2\pi m}{M}\right) g_T(t) \sin(2\pi f_c) \ , \qquad 0 \leq t \leq T_{symbol}$$

Χρονικές Μονάδες Προσομοίωσης

Τα συστήματα που θέλουμε να προσομοιώσουμε μεταδίδουν σύμβολα με ρυθμό $R_{symbol} = 250\ kbps$, οπότε η περίοδος συμβόλου είναι $T_{symbol} = 4\ \mu sec$. Στη ζώνη μετάδοσης, χρησιμοποιείται η φέρουσα συχνότητα $f_c = 2.5\ MHz$, οπότε η περίοδος της φέρουσας είναι $T_c = 0.4\ \mu sec$. Στα πλαίσια της προσομοίωσης, για να έχουμε μια ικανοποιητική αναπαράσταση των ζωνοπερατών σημάτων, πραγματοποιείται δειγματοληψία 2 φορές μεγαλύτερη του ορίου του Nyquist, δηλαδή παίρνουμε 4 δείγματα ανά περίοδο φέρουσας, και άρα η περίοδος δειγματοληψίας είναι $T_{sample} = T_c/4 = 0.1\ \mu sec$.

Εφόσον το σύστημα προσομοιώνεται στο δεδομένο ρυθμό δειγματοληψίας, κάθε τιμή των διανυσμάτων αντιστοιχεί σε χρόνο $T_{sample} = 0.1\,\mu sec,$ τον οποίο μπορούμε να κανονικοποιήσουμε στο $T_{sample} = 1\ \mu sec,$ οπότε αντίστοιχα προκύπτει:

$T_{sample} = 1\ , T_c = 4\ , T_{symbol} = 40$

δηλαδή σε κάθε περίοδο φέρουσας κρατάμε 4 δείγματα, και κάθε περίοδος συμβόλου περιλαμβάνει 10 κύκλους φέρουσας ή 40 δείγματα.

AWGN Κανάλι

Τα ζωνοπετατό σήμα που εκπέμπει ο πομπός διέρχεται μέσα από ένα ιδανικό κανάλι προσθετικού θορύβου. Ο θόρυβος είναι λευκός και ακολουθεί $Gaussian$ κατανομή μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$. Ο θόρυβος μπορεί να παραχθεί με χρήση της συνάρτησης $randn$ ως $noise = sqrt(\sigma^2) * randn(\frac{L_b}{2*40}, 1)$.

Η διασπορά του θορύβου καθορίζεται κάθε φορά από το SNR/bit που θέλουμε να έχουμε στο δέκτη του συστήματος. Υπενθυμίζεται ότι, λόγω των κανονικοποιήσεων που έχουμε κάνει, η ενέργεια ανά σύμβολο συστήματα είναι $E_s = 1$, οπότε η ενέργεια ανά bit είναι $E_b = E_s/\log_2 M$ ή $E_b = 1/\log_2 M$.

Για τον υπολογισμό της διασποράς του θορύβου βασιζόμαστε στη σχέση $SNR = 10\log_{10}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$, από την οποία προκύπτει $\sigma^2 = \frac{E_b}{2*10^{\frac{SNR}{10}}}$. Για παράδειγμα, αν $SNR = 10\ dB, M = 4$ προκύπτει ότι $E_b = \frac{1}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{1}{40}$.

Αποδιαμορφωτής *M-PSK*

Ο αποδιαμορφωτής του συστήματος **M-PSK** συσχετίζει (δηλαδή πολλαπλασιάζει και ολοκληρώνει-αθροίζει) το ληφθέν σήμα με τη φέρουσα και τον ορθογώνιο παλμό. Η συσχέτιση γίνεται στα χρονικά πλαίσια μιας περιόδου συμβόλου. Κατά την προσομοίωση υποθέτουμε ότι το **M-PSK** είναι ομόδυνο. Αυτό σημαίνει ότι ο δέκτης γνωρίζει τη φάση της φέρουσας και τα χρονικά πλαίσια κάθε συμβόλου, δηλαδή είναι πλήρως συγχρονισμένος με τον πομπό.

Ο αποδιαμορφωτής συσχετίζει το ληφθέν σήμα με τις δύο συνιστώσες της φέρουσας, οπότε προκύπτουν δύο τιμές, δηλαδή ένα διάνυσμα $\boldsymbol{r}$ που αντιστοιχεί στη θέση του ληφθέντος σήματος πάνω στο επίπεδο του αστερισμού του ***M-PSK***.

Φωρατής *M-PSK*

Ο φωρατής δέχεται ως είσοδο το διάνυσμα $\boldsymbol{r}$, και αποφασίζει σε ποιο σύμβολο (όπως αυτά ορίστηκαν διανυσματικά παραπάνω) βρίσκεται εγγύτερα. Το διάνυσμα $\boldsymbol{s_m}$ που θα έχει τη μικρότερη απόσταση από το $\boldsymbol{r}$, αντιστοιχεί και στο σύμβολο που στάλθηκε.

3. Μετρήσεις *BER*

Για να μετρήσετε το ***BER*** (**B**it **E**rror **R**ate), δηλαδή την πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος bit, θα πρέπει να συγκρίνετε την τιμή bit που λάβατε με αυτήν που στείλατε. Για να πραγματοποιήσετε αξιόπιστες μετρήσεις ***BER***, θα πρέπει αυτές να προέρχονται από έναν αρκετά μεγάλο αριθμό δεδομένων. Ένας χοντρικός κανόνας είναι ότι για να μετρήσετε μια τιμή ***BER*** της τάξης του 10^{-2} χρειάζεστε 10^4 bits δεδομένων, για BER της τάξης του 10^{-3} χρειάζεστε 10^5 bits δεδομένων, κ.ο.κ. Ο παραπάνω κανόνας δε σημαίνει ότι θα πρέπει να προσομοιώσετε παραπάνω από 100000 bits!

Οι καμπύλες ***BER*** συνήθως σχεδιάζονται σε λογαριθμική κλίμακα ως προς τον άξονα y, δηλαδή ως προς την πιθανότητα σφάλματος (βλέπε π.χ. Σχ.7.57, όπου εκεί φαίνονται κάποιες καμπύλες ***SER*** (πιθανότητα σφάλματος συμβόλου)).

Ερωτήματα – Μέρος Β

1. Με βάση τις παραπάνω υποδείξεις, υλοποιήστε το σύστημα ***M-PSK*** και αναφερθείτε στα βασικά του σημεία.
2. Μετρήστε την πιθανότητα σφάλματος και σχεδιάστε την καμπύλη $\boldsymbol{BER}$ για M = 4, 8 για απλή κωδικοποίηση για τιμές του $\boldsymbol{SNR = [0:2:16]\ dB}$. Επαναλάβετε το ερώτημα αν τα σύμβολα στην αντιστοίχιση κωδικοποιούνταν κατά ***Gray***. Σχεδιάστε τις προηγούμενες καμπύλες $\boldsymbol{BER}$ στο ίδιο γράφημα και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Παρατηρήσεις

- Η αναφορά παραδίδεται ηλεκτρονικά μέσω e-class (ενότητα Εργασίες) και εκτυπωμένη στη θυρίδα του μαθήματος (ΠΡΟΚΑΤ). Στο τέλος της αναφοράς, παραθέστε τον κώδικα που υλοποιήσατε. Το αρχείο της αναφοράς θα πρέπει να είναι σε μορφή pdf και να έχει ως όνομα τον αριθμό μητρώου σας. Για παράδειγμα αν η άσκηση έχει γίνει από τον φοιτητή με ΑΜ 1234 θα πρέπει το αρχείο να έχει όνομα 1234.pdf.
- Για να ανεβάσετε μια άσκηση θα πρέπει πρώτα να έχετε εγγραφεί στο μάθημα. Αν δεν είστε εγγεγραμμένοι στο μάθημα το σύστημα δεν θα σας αφήσει να ανεβάσετε την άσκηση. Η εγγραφή γίνεται από τις επιλογές που διατίθενται στο e-class.
- Φροντίστε να διαπιστώσετε ότι η άσκηση σας έχει υποβληθεί σωστά στο e-class. Δεν θα γίνουν δεκτές ασκήσεις που υποβάλλονται εκπρόθεσμα.
- Η άσκηση είναι ατομική και υποχρεωτική.
- Η παράδοση της άσκησης μπορεί να γίνει μέχρι 8/01/2017.
- Τυχόν απορίες σχετικά με την άσκηση θα λύνονται μέσω του forum του μαθήματος στο my.ceid. Επιπλέον θα πραγματοποιούνται ώρες γραφείου στα ΠΡΟΚΑΤ σε χώρο του Εργαστηρίου Σημάτων και Τηλεπικοινωνιών (αριστερή πτέρυγα των προκάτ, 1η πόρτα δεξιά).