ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων με Απαλοιφή

Το κεφάλαιο αυτό είναι εισαγωγικό και περιλαμβάνει μια περιεκτική ανασκόπηση-επανάληψη για την επίλυση γραμμικών συστημάτων n εξισώσεων με n αγνώστους με βάση την απαλοιφή Gauss. Οι έννοιες και τα θέματα που παρουσιάζονται αποτελούν μέρος της σχετικής ύλης της Γραμμικής Άλγεβρας, ενώ είναι απαραίτητα για την κατανόηση της ύλης των επόμενων κεφαλαίων. Σημαντικό νέο στοιχείο, που σχετίζεται με υπολογιστικές μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης και συνδέεται με θέματα των επόμενων κεφαλαίων, είναι οι μέθοδοι οδήγησης στα γραμμικά συστήματα.

3.1 Εισαγωγή

Ένα γραμμικό σύστημα πραγματικών με m εξισώσεις και n αγνώστους περιγράφεται πρωτογενώς:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

όπου $a_{ij}\in\mathrm{R}$ είναι συντελεστές των αγνώστων x_j και b_i ο σταθερός όρος για την εξίσωση i. Ένα σύστημα μπορεί να περιγραφεί επίσης με τη μορφή μητρώων. Αν συμβολίσουμε με A, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ αντίστοιχα το $m\times n$ μητρώο των συντελεστών ($A\in\mathrm{R}^{m\times n}$), το διάνυσμα (μητρώο $n\times1$) των αγνώστων και το διάνυσμα των σταθερών όρων (μητρώο $m\times1$), τότε το σύστημα γράφεται:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.1.2}$$

όπου:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left(a_{ij}\right),\ i=1,\cdots m,\ j=1,\cdots n$$

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times1},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=\left(b_1,b_2,\cdots,b_m\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\times1}$$

Ένας άλλος τρόπος περιγραφής βασίζεται στη χρήση του επαυξημένου μητρώου $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$, όπου A, $\boldsymbol{b}$ ορίζονται όπως παραπάνω.

$$\left[A|\,b\right]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{1n} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{3.1.3}$$

Η στήλη i του A ($1\leq i\leq n$) δίνεται από το διάνυσμα $m\times1$ και θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{a}_i$ ή με $A(:,\ i)$. Αντίστοιχα η γραμμή του A ($1\leq j\leq n$) δίνεται από ένα διάνυσμα $1\times n$ και θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}$ ή με $A(i,\ :)$. Οι εξισώσεις του συστήματος θα συμβολίζονται με $r_1,\ldots,r_n$.

Ένα διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ τέτοιο ώστε $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ λέγεται λύση του συστήματος. Ένα σύστημα $m\times n$ μπορεί να είναι ομαλό, δηλ. να δέχεται μια μοναδική λύση, απροσδιόριστο, δηλ. να δέχεται άπειρες λύσεις και αδύνατο, δηλ. να μην δέχεται λύση. Κεντρικό σημείο για την επιλυσιμότητα ενός τετραγωνικού συστήματος ($n\times n$) είναι η αντιστρεψιμότητα του A. Συγκεκριμένα, από τη στοιχειώδη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας είναι γνωστό το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.1.1 ***Έστω ένα μητρώο n×n A πραγματικών. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:***
(a) $det(A)\neq 0$ όπου $det(A)=|A|$ η ορίζουσα του A.
(β) Το σύστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση για οποιοδήποτε δεύτερο σκέλος $\mathbf{b}$.
(γ) Το σύστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ έχει τη μοναδική λύση $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ή ισοδύναμα, για κάθε $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ είναι $A\mathbf{x}\neq 0$.
(δ) Το A είναι αντιστρέψιμο.
(ε) Οι γραμμές (στήλες) του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες ■

Πόρισμα 3.1.1 *Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει ένα ομογενές σύστημα μια λύση εκτός της τετριμμένης (μηδενικής) είναι $det(A)=0$.*

Αν το A είναι ομαλό ($\det(A)\neq 0$), τότε η μοναδική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

απ' όπου προκύπτουν οι γνωστοί τύποι του *Cramer:*

$$x_j = \frac{\det\left(A_j\right)}{\det\left(A\right)}\ , j=1,\ldots,n, \tag{3.1.4}$$

όπου $A_j= [\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{b},\ldots,\ \boldsymbol{a}_n]$, όπου το $\boldsymbol{b}$ είναι στη j θέση. Η επίλυση του $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ με τη μέθοδο *Cramer* για μεγάλες τιμές του n είναι υπολογιστικά χρονοβόρα και για αυτό ασύμφορη. Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι που βασίζονται είτε στην απαλοιφή των αγνώστων είτε στον επαναληπτικό υπολογισμό διαδοχικών προσεγγίσεων των λύσεων (*επαναληπτικές μέθοδοι*). Με τη δεύτερη κατηγορία θα ασχοληθούμε στο Κεφ. VI. Οι μέθοδοι απαλοιφής βασίζονται στο διαδοχικό μετασχηματισμό ενός συστήματος σε άλλα απλούστερα συστήματα με σταδιακά μειούμενο αριθμό αγνώστων.
Ειδικότερα, οι μορφές των A και $\boldsymbol{b}$, μετασχηματίζονται σε απλούστερες μορφές μητρώων. Αν $n=m$ το A μετασχηματίζεται σε ένα *άνω τριγωνικό μητρώο*, ενώ αν $n\neq m$ σε ένα *κλιμακωτό μητρώο*. Η πρώτη περίπτωση είναι αυτή που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, αφού τα $n\times n$ συστήματα είναι η πλέον συνήθης κατηγορία γραμμικών συστημάτων που εμφανίζεται στην Αριθμητική Ανάλυση.

3.2 Μετασχηματισμοί Γραμμών και Μητρώων

Βασική αρχή των μεθόδων απαλοιφής είναι η εφαρμογή στοιχειωδών μετασχηματισμών πάνω στις εξισώσεις του συστήματος, ή ισοδύναμα πάνω στις γραμμές του A και στο $\boldsymbol{b}$, με σκοπό τη σταδιακή απαλοιφή των αγνώστων. Υπάρχουν τρεις τέτοιοι μετασχηματισμοί:

- ***Εναλλαγή*** *μιας επιλεγμένης εξίσωσης* r_k (γραμμής του $[A|\boldsymbol{b}]$) με μια εξίσωση r_i (γραμμή του $[A|\boldsymbol{b}]$):

$$r_k \leftrightarrow r_i \text{ ή } a_{kj} \leftrightarrow a_{ij}, j=1,\ldots,n, \text{ και } b_k \leftrightarrow b_i \tag{3.2.1}$$

- ***Πολλαπλασιασμός*** μιας *εξίσωσης* r_i (ή γραμμής του $[A|\boldsymbol{b}]$) επί ένα βαθμωτό (πραγματικό αριθμό) $a\neq 0$:

$$r_i \leftarrow a\, r_i\,, \text{ ή } a_{ij} \leftarrow a a_{ij},\ j=1,\ldots,n \tag{3.2.2}$$

- ***Αφαίρεση*** από μια εξίσωση r_i (ή γραμμή του $[A|\boldsymbol{b}]$) ενός μη μηδενικού πολλαπλασίου *μιας επιλεγμένης εξίσωσης k* (γραμμής του $[A|\boldsymbol{b}]$). Ο *πολλαπλασιαστής* συμβολίζεται με p_{ik} ($p_{ik}\neq 0$):

$$r_{ik} \leftarrow r_i - p_{ik}\, r_k\,, \text{ ή:}$$
$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - p_{ik}\, a_{kj}\,,\ j = 1,\ldots,n, \text{ και } b_i \leftarrow b_i - p_{ik}\, b_k \tag{3.2.3}$$

Οι (3.2.1), (3.2.2, (3.2.3) λέγονται **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** (σ.μ.γ.) ή ***γραμμοπράξεις***. Η επιλεγόμενη *εξίσωση* r_k λέγεται **οδηγός εξίσωση**. Ο συντελεστής a_{kk} του x_k στην εξίσωση r_k λέγεται **οδηγός** ή *οδηγό στοιχείο.*

Οι γραμμοπράξεις αποσκοπούν στην απαλοιφή του στοιχείου x_k από μερικές εξισώσεις του συστήματος. Πράγματι, αν $a_{kk}\neq 0$ και για $i=k+1,\ldots,m$ εφαρμόσουμε τους σ.μ.γ. (3.2.3) επιλέγοντας τους **πολλαπλασιαστές** $p_{ik}=a_{ik}/a_{kk}$, τότε ο προκύπτων συντελεστής a_{ik} του x_k στην εξίσωση r_i είναι $a_{ik}=a_{ik}-(a_{ik}/a_{kk})a_{kk}=0$, δηλαδή απαλείφεται ο άγνωστος x_k από τις εξισώσεις r_i, $i=k+1,\ldots,m$. Αν $a_{kk}=0$, αναζητούμε έναν κατάλληλο συντελεστή a_{rk} του x_k και τους εναλλάσσουμε, δηλ. εφαρμόζουμε τον σ.μ.γ. (3.2.1). Κατόπιν εφαρμόζουμε τον σ.μ.γ. (3.2.3) απαλείφοντας τον άγνωστο από τις υπόλοιπες εξισώσεις.

Αν θεωρήσουμε ομαλά συστήματα *n εξισώσεων* με n αγνώστους, τότε η παραπάνω διαδικασία, εφαρμοζόμενη για $k=1,2,\ldots,n-1$, οδηγεί τελικά στον υπολογισμό ενός μητρώου συντελεστών που είναι άνω τριγωνικός, δηλ. τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι 0. Αυτό σημαίνει ότι οι διαδοχικές εφαρμογές των σ.μ.γ. οδηγούν σε ένα απλούστερο σύστημα που λύνεται εύκολα.

♦ Παράδειγμα 3.2.1

Εφαρμόζουμε στο παρακάτω σύστημα απαλοιφή των αγνώστων x_1, x_2, κάνοντας τους κατάλληλους σ.μ.γ.:

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 6\\ 1 & -2 & 4 & 2\\ 4 & -1 & 2 & 3\end{array}\right]$$

Το σύστημα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 6\\ 1 & -2 & 4 & 2\\ 4 & -1 & 2 & 3\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 6\\ 4 & -1 & 2 & 3\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-4r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 6\\ 0 & 7 & -14 & -5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-(7/2)r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -35/2 & -26\end{array}\right]$$

Ως οδηγό εξίσωση επιλέγουμε την πρώτη εξίσωση με $\alpha_{kk}\neq 0$, δηλ. την 2η. Οι τιμές των οδηγών είναι διαδοχικά $\alpha_{11}=1$, για $k=1$ και $\alpha_{22}=2$, για $k=2$.
Οι τιμές του p_{ik} για $k=1$ είναι $p_{21}=0/1=0$ (εδώ δεν χρειάζεται να εκτελεσθεί σ.μ.γ.) και $p_{31}=4/1=4$. Για $k=2$ είναι $p_{32}=7/2=3.5$.
Καταλήγουμε τελικά σε σύστημα με τριγωνικό μητρώο συντελεστών. Θεωρώντας ακρίβεια 3 σ.ψ. και στρογγύλευση λαμβάνουμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις (*πίσω αντικατάσταση*):

$$-17.5x_3=-26 \Rightarrow x_3 = 1.486$$
$$2x_2 + 1x_3 = 6 \Rightarrow x_2 = 2.257$$
$$x_1-2x_2+4x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 0.57$$

Η εφαρμογή των σ.μ.γ. ισοδυναμεί με μετασχηματισμούς των μητρώων A και $\boldsymbol{b}$ του συστήματος $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Συγκεκριμένα, η εφαρμογή ενός σ.μ.γ. ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του επαυξημένου μητρώου $[A|\boldsymbol{b}]$ από αριστερά με ένα *στοιχειώδες μητρώο* (που ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό και του A και του $\boldsymbol{b}$ με το μητρώο αυτό).

□

3.2.1 Στοιχειώδη Μητρώα Απαλοιφής

Ορισμός 3.2.1 Ένα μητρώο $n\times n$ λέγεται ***στοιχειώδες μητρώο απαλοιφής*** όταν προκύπτει από το μοναδιαίο μητρώο $n\times n$ I_n με εφαρμογή ενός σ.μ.γ. πάνω σ' αυτό.

Έχουμε τους εξής τύπους στοιχειωδών μητρώων:

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

- Το μητρώο P_{rk} που προκύπτει από το μοναδιαίο I_n με εφαρμογή του σ.μ.γ. $r_k \leftrightarrow r_r$. Το P_{rk} ονομάζεται *στοιχειώδες μεταθετικό μητρώο.*

$$P_{rk}=\begin{array}{c l}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}=\left[\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_r\cdots\mathbf{e}_k\cdots\mathbf{e}_n\right]$$

- Το μητρώο $M_i(a)$ που προκύπτει από το μοναδιαίο I_n με τον σ.μ.γ. $r_i \leftarrow ar_i$

$$M_i(a)=\begin{array}{c l}\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & \mathbf{0} & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & a & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \xleftarrow{i} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}=[\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \ldots a\boldsymbol{e}_i\ \ \boldsymbol{e}_{i+1}\ \ldots \boldsymbol{e}_k]$$

- Το μητρώο $A_{ik}(a)$ που προκύπτει από το μοναδιαίο I_n με τον σ.μ.γ. $r_i \leftarrow r_i\text{-}ar_k$

$$E_{ik}(a)=\begin{array}{c l}\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \mathbf{0} & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & -a & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 1\end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \xleftarrow{i} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad k\end{matrix} & \end{array}=I-ae_ie_k^T$$

Σημείωση 1: Το σύμβολο «⟵» στο εξής θα γράφεται και ως «=», με την έννοια της καταχώρησης τιμής (τιμών) σε μια μεταβλητή διανύσματος ή βαθμωτής ποσότητας.
Σημείωση 2: Τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_i=(0,\ldots,1,\ldots,0)^T$ είναι στοιχεία της συνήθους βάσης του R^n (το 1 στη θέση i).

Ορισμός 3.2.2 Ένα μητρώο $m\times n$ B το οποίο προκύπτει από ένα μητρώο $m\times n$ A με εφαρμογή $k\geq 1$ σ.μ.γ. ονομάζεται *γραμμοϊσοδύναμο* του A. Αντίστοιχα, το σύστημα $B\mathbf{x}=\boldsymbol{d}$ που προκύπτει από το $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ με εφαρμογή $k\geq 1$ σ.μ.γ. λέγεται *γραμμοϊσοδύναμο* του $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$.

Εύκολα τώρα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

Λήμμα 3.2.1 Το μητρώο B που προκύπτει από ένα μητρώο A mxn εφαρμόζοντας ένα σ.μ.γ. e δίνεται από:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{I}_m)\boldsymbol{A} \tag{3.2.4}$$

όπου $e(I_m)$ το στοιχειώδες $m\times m$ μητρώο του σ.μ.γ. e.

Απόδειξη: Λαμβάνεται εύκολα, θεωρώντας ξεχωριστά κάθε τύπο σ.μ.γ. ■

Θεώρημα 3.2.1

Αν ένα μητρώο B είναι γραμμοϊσοδύναμο με ένα mxn μητρώο A, τότε θα δίνεται από:

$$B = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1A \tag{3.2.5}$$

όπου E_i τα στοιχειώδη $m\times m$ μητρώα που αντιστοιχούν στους σ.μ.γ. e_i, $i=1,\ldots,k$, που εφαρμόστηκαν διαδοχικά στο B.

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά ως προς k, λαμβάνοντας υπ' όψη το Λ3.2.1. ■

Από το Λ3.2.1 και το Θ3.2.1 προκύπτουν τα εξής σημαντικά συμπεράσματα:

- Η εφαρμογή ενός σ.μ.γ. e στο σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ οδηγεί στο σύστημα $e(I_m)A\boldsymbol{x}=e(I_m)\boldsymbol{b}$.
- Η εφαρμογή $k\geq 1$ σ.μ.γ. στο $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ οδηγεί στο σύστημα $E_kE_{k-1}\ldots E_1A\boldsymbol{x}=E_kE_{k-1}\ldots E_1\boldsymbol{b}$ όπου $E_1,E_2,\ldots,E_k$ είναι τα αντίστοιχα στοιχειώδη $m\times m$ μητρώα κατά τη σειρά που εφαρμόστηκαν οι σ.μ.γ.
- Ισοδυναμία: αν $E=E_kE_{k-1}\ldots E_1$, τότε τα $m\times(m+1)$ επαυξημένα μητρώα $[A|\boldsymbol{b}]$ και $[EA|E\boldsymbol{b}]$ είναι γραμμοϊσοδύναμα.

Ας σημειωθεί ότι τα παραπάνω ισχύουν και στις περιπτώσεις όπου $k=r$ (δεν γίνεται εναλλαγή) και $p_{ik}=0$ (ο προς απαλοιφή συντελεστής a_{ik} είναι ήδη 0), στις οποίες λαμβάνουμε $P_{rk}=I_n$ και $M_k(0)=I_n$, αντίστοιχα, που οδηγούν στο ίδιο σύστημα.
Παρατηρούμε επίσης ότι όλα τα στοιχειώδη μητρώα είναι κάτω τριγωνικά. Σημαντική είναι επίσης η ιδιότητα:

Πρόταση 3.2.1
Τα στοιχειώδη μητρώα είναι αντιστρέψιμα και τα αντίστροφά τους είναι στοιχειώδη. Συγκεκριμένα ισχύουν:

$$P_k^{-1} = P_k,\quad (M(a))^{-1}=M(1/a),\quad (A_{ik}(a))^{-1}=A_{ik}(-a) \tag{3.2.6}$$

Απόδειξη: Λαμβάνονται εύκολα, εφαρμόζοντας στοιχειώδεις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μητρώων, ή υπολογίζοντας τα γινόμενα του αριστερού και δεξιού σκέλους. ■

3.2.2 Μεταθέσεις και Μεταθετικά Μητρώα

Τα *μεταθετικά μητρώα* ορίζουν τις μεταθέσεις των γραμμών (στηλών) που εφαρμόζονται σε ένα μητρώο. Προκύπτουν ως γινόμενα στοιχειωδών μεταθετικών μητρώων P_{ij} τα οποία είναι προφανώς *συμμετρικά*: $P_{ij}=P_{ij}^T$ και αντιστρέψιμα. Είδαμε επίσης ότι ισχύει $P_{ij}^2=I$.

Ορισμός 3.2.3 *Μεταθετικό μητρώο P τάξης n λέγεται κάθε μητρώο $n\times n$ του οποίου οι γραμμές (στήλες) είναι μεταθέσεις των γραμμών (στηλών) του μοναδιαίου I_n.*

Τα μεταθετικά μητρώα εκφράζουν και συνδέονται τυπικά με *μεταθέσεις* και αντιστρόφως. Μια *μετάθεση n τάξης* ορίζεται ως το (μεταθετικό) διάνυσμα $\boldsymbol{p}=(p_i)$, με $p_i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $i=1,\ldots,n$, και $p_i\neq p_j$, για $i\neq j$. Συνολικά υπάρχουν $n!$ Μεταθέσεις (διατάξεις) n τάξης. Π.χ. υπάρχουν 5! Μεταθέσεις 5ης τάξης. Μια τέτοια μετάθεση δίνεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{p}=(5,3,1,2,4)^T$. Επίσης, στο Παρ.3.2.1 το διάνυσμα μετάθεσης γραμμών του A είναι $\boldsymbol{p}=(2,1,3)^T$.

Οι μεταθέσεις είναι συνθέσεις στοιχειωδών μεταθέσεων. Π.χ. η μετάθεση $(1,3,5,2,4)^T$ λαμβάνεται ως εξής:

$$(1,2,3,4,5)^T\rightarrow(1,2,3,5,4)^T\rightarrow(1,2,5,3,4)^T\rightarrow(1,3,5,2,4)^T$$

Αν $\boldsymbol{p}$ μια μετάθεση, τότε το αντίστοιχο μεταθετικό μητρώο στηλών (για το A) $P\in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζεται:

$$P=[\boldsymbol{e}_{p_1}, \boldsymbol{e}_{p_2},\ldots,\boldsymbol{e}_{p_n}]$$

όπου $\boldsymbol{e}_i=(0,\ldots,1,0,\ldots0)^T=i$ στήλη του I_n. Για την ίδια μετάθεση, το αντίστοιχο μεταθετικό μητρώο γραμμών Q είναι το ανάστροφο του P :

$$Q=[\boldsymbol{e}_{p_1};\ \boldsymbol{e}_{p_2};\ldots;\boldsymbol{e}_{p_n}] = P^T$$

Προφανώς θα είναι:

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

$$P\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}_{p_i},\ \ \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}Q=\boldsymbol{e}_{p_i}^{\mathrm{T}}$$

Π.χ. στο Παρ.3.2.1 στη μετάθεση γραμμών $\boldsymbol{p}=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$ αντιστοιχεί το μητρώο $Q=[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3]$. Στην στη ίδια μετάθεση στηλών αντιστοιχεί το $P=[\boldsymbol{e}_2\ ;\ \boldsymbol{e}_1\ ;\ \boldsymbol{e}_3]=Q$, αφού το P είναι συμμετρικό. Στην περίπτωση των μεταθέσεων στηλών έχουμε *πολλαπλασιασμό* του *A από δεξιά* ($E=AP$) και σ' αυτήν των μεταθέσεων γραμμών, *πολλαπλασιασμό από αριστερά* ($E=QA$). Επίσης, αν $\boldsymbol{p}_s=(1,2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$ η αρχική μετάθεση και $\boldsymbol{p}$ η τελική, θα έχουμε αντίστοιχα:

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{p}_s^{\mathrm{T}}P,\ \text{ και } \boldsymbol{p}=P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_s$$

Αντιστρόφως, αν δίνεται ένα μεταθετικό μητρώο στηλών P (γραμμών Q), τότε η αντίστοιχη *μετάθεση* είναι: $\boldsymbol{p}_i$*=θέση (index) του* 1 *στη στήλη (γραμμή) i του P,* $1\le i\le n$.

Αν P μεταθετικό μητρώο στηλών και $\boldsymbol{p}=(p_i)$ η αντίστοιχη μετάθεση, τότε προφανώς είναι γραμμή p_i του $P=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}$, ή στήλη p_i του $P^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}_i$. Συνεπώς:

$$P^{\mathrm{T}}e_{p_i}=e_i,\ \ i=1,\dots,n$$

απ' όπου προκύπτει:

$$P^{\mathrm{T}}P=I_n,\ \text{ή } P^{-1}=P^{\mathrm{T}} \tag{3.2.7}$$

Το ανάλογο συμβαίνει και για τα μεταθετικά μητρώα γραμμών. Συνεπώς τα μεταθετικά μητρώα είναι αντιστρεπτά. Θα πρέπει επίσης να τονισθεί ότι δεν είναι πάντοτε συμμετρικά.

Στις ποικίλες εφαρμογές και στα περιβάλλοντα αριθμητικών μεθόδων τα μεταθετικά διανύσματα χρησιμοποιούνται ευρύτατα αντί των μεταθετικών μητρώων για την πραγματοποίηση μεταθέσεων γραμμών και στηλών.

Παρατήρηση 3.2.1 Αν σε ένα μητρώο A ή σύστημα εφαρμοσθεί μια ακολουθία k εναλλαγών γραμμών $r_i\leftrightarrow r_j$, με $I, j\in\{1,\dots,n\}$, τότε αυτό ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του A αριστερά με το μεταθετικό μητρώο $P=P_kP_{k-1}\dots P_1$, όπου P_μ, $1\le\mu\le k$, είναι το στοιχειώδες μητρώο ενός εκ των σ.μ.γ. $r_i\leftrightarrow r_j$.

♦ Παράδειγμα 3.2.2

Για τη μετάθεση $\boldsymbol{p}=(5,3,1,2,4)^{\mathrm{T}}$ έχουμε:

$$(1,2,3,4,5)^{\mathrm{T}}\to(1,2,3,5,4)^{\mathrm{T}}\to(1,2,5,3,4)^{\mathrm{T}}\to(1,3,5,2,4)^{\mathrm{T}}\to(5,3,1,2,4)^{\mathrm{T}}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα μητρώα μετάθεσης γραμμών $P_{ij}\in\mathrm{R}^5$ λαμβάνουμε:

$$P=P_{13}P_{24}P_{34}P_{45},\quad P=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Θα είναι:

$$P(1,2,3,4,5)^{\mathrm{T}}=(5,3,1,2,4)^{\mathrm{T}}$$

ενώ:

$$P^{-1}(5,3,1,2,4)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}(5,3,1,2,4)^{\mathrm{T}}=(1,2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$$

Επίσης για μεταθέσεις στηλών έχουμε:

$$(1,2,3,4,5)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}=(5,3,1,2,4)$$
$$(5,3,1,2,4)P=(1,2,3,4,5)$$

□

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ορισμός 3.2.4 Το μητρώο M_k που προκύπτει από το I_n εφαρμόζοντας τους σ.μ.γ. $r_i \leftarrow r_i - p_{ik}r_k$, $i=(k+1),\ldots,n$, λέγεται *στοιχειώδες πολλαπλασιαστικό μητρώο.*

Το μητρώο M_k αντιστοιχεί στο βήμα k της απαλοιφής. Από το Θ3.2.1 έχουμε

$$M_k=E_{nk}(-p_{nk})E_{n-1,k}(-p_{n-1,k})\ldots E_{k+1,k}(-p_{k+1,k}), \tag{3.2.8}$$

απ' όπου εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό συνάγουμε:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & -p_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -p_{n,k} & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

Εύκολα τώρα συμπεραίνουμε ότι η εφαρμογή των σ.μ.γ. $r_i \leftarrow r_i - p_{ik}r_k$, $i=(k+1),\ldots,n$, στο $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, οδηγεί στο σύστημα $M_kA\boldsymbol{x}=M_k\boldsymbol{b}$ (ή αντίστοιχα στο επαυξημένο $m\times(m+1)$ μητρώο $[M_kA|M_k\boldsymbol{b}]$), όπου M_k είναι το στοιχειώδες πολλαπλασιαστικό $m\times m$ μητρώο. Όπως είδαμε, ο πολλαπλασιασμός αριστερά με M_k ισοδυναμεί με απαλοιφή του αγνώστου x_k, αν τεθεί $p_{ik}=-a_{ik}/a_{kk}$, $i=(k+1),\ldots,m$.

Το M_k είναι αντιστρέψιμο. Πράγματι, από την (3.2.8) και από το γεγονός ότι το γινόμενο αντιστρεπτών μητρώων είναι αντιστρεπτό, προκύπτει:

$$\begin{aligned} M_k^{-1} &= (E_{k+1,k}(-p_{k+1,k}))^{-1}\ldots(E_{n-1,k}(-p_{n-1,k}))^{-1}(E_{nk}(-p_{nk}))^{-1}= \\ &= E_{k+1,k}(p_{k+1,k})\ldots E_{n-1,k}(p_{n-1,k})\,E_{nk}(p_{nk}) \end{aligned}$$

Τελικά παίρνουμε:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & p_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & p_{n,k} & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.10}$$

♦Παράδειγμα 3.2.3

Στο σύστημα του Παρ.3.2.1 ο σ.μ.γ. $r_1 \leftrightarrow r_2$ αντιστοιχεί στους μετασχηματισμούς $A_1= P_{21}A$ και $\boldsymbol{b}_1=P_{21}\boldsymbol{b}$ και οδηγεί στο νέο σύστημα $[P_{12}A\,|\,P_{12}\boldsymbol{b}]$, όπου:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το P_{12} αντιστοιχεί στη μετάθεση $p=[2,1,3]^T$, αφού είναι $P_{12}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$, $P_{12}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1$ και $P_{12}\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3$. Οι σ.μ.γ. $r_2 \leftarrow r_2-p_{21}r_1$, $r_3 \leftarrow r_3-p_{31}r_1$ αντιστοιχούν στο σύστημα $[M_1(P_{12}A)|\,M_1\,(P_{12}\boldsymbol{b})]$, όπου

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τελικά φθάνουμε στο σύστημα: $[M_2P_{23}M_1P_{12}A\,|\,M_2P_{22}M_1P_{12}\boldsymbol{b}]$, όπου $P_{23}=I_3$ και

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Επαληθεύουμε εύκολα ότι το προκύπτον σύστημα είναι το ίδιο με αυτό που καταλήξαμε στο Παρ.3.2.1. Επίσης υπολογίζουμε:

$$E = M_2 P_{22} M_1 P_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3.5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Το $E=UA^{-1}$ μπορεί να ληφθεί ταυτόχρονα με την τριγωνοποίηση του A. Πράγματι, από τη σχέση $E[A|I]=[EA|E]=[U|E]$ συμπεραίνουμε ότι αν κάνουμε τους ίδιους σ.μ.γ. στο I με αυτούς που κάνουμε στο A για την μετατροπή του σε U λαμβάνουμε στο τέλος το E. Επομένως επαληθεύουμε τελικά:

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17.5 & -3.5 & 4 & 1 \end{array}\right] = [U\,|\,E]$$

♦**[Matlab]**
Το μητρώο E που πολλαπλασιαζόμενο από δεξιά με A δίνει U ($EA=U$ ή ισοδύναμα $E=UA^{-1}$), υπολογίζεται στο Matlab με τη βοήθεια του τελεστή "/". Αντίστοιχα, όταν πολλαπλασιάζεται από αριστερά, υπολογίζεται με τον "\". Συνεπώς εδώ δίνουμε:

```
E=U/A
E =
        0    1.0000         0
   1.0000         0         0
  -3.5000   -4.0000    1.0000
```

□

Εύκολα μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι τα συστήματα που προκύπτουν με εφαρμογή ενός αριθμού σ.μ.γ. είναι ισοδύναμα του αρχικού.

Πρόταση 3.2.2

Δύο γραμμοϊσοδύναμα συστήματα είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη: Έστω $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ και το γραμμοϊσοδύναμό του $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$. Άρα είναι:

$$B=E_kE_{k-1}\ldots E_1A$$
$$\boldsymbol{c}= E_kE_{k-1}\ldots E_1A\boldsymbol{b}$$

όπου $E_1,E_2,\ldots,E_k$ είναι στοιχειώδη μητρώα απαλοιφής. Τα $E_1,E_2,\ldots,E_k$ είναι αντιστρέψιμα, επομένως ομοίως αντιστρέψιμο θα είναι και το γινόμενό τους:

$$(E_kE_{k-1}\ldots E_1)^{-1}= E_1^{-1}\ldots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1}$$

Έστω τώρα $\boldsymbol{x}$ είναι λύση του $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$. Τότε αν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά την $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$:

$$(E_kE_{k-1}\ldots E_1)^{-1}B\boldsymbol{x} = (E_kE_{k-1}\ldots E_1)^{-1}\boldsymbol{c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A\boldsymbol{x} = (E_kE_{k-1}...E_1)^{-1}(E_kE_{k-1}...E_1)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

Άρα $\boldsymbol{x}$ είναι λύση του $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.
Αντιστρόφως, αν $\boldsymbol{x}$ είναι λύση του $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, τότε

$$(E_kE_{k-1}\ldots E_1)A\boldsymbol{x} = (E_kE_{k-1}\ldots E_1)^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c},$$

επομένως $\boldsymbol{x}$ είναι λύση του $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$. ■

3.3 Μέθοδος Απαλοιφής *Gauss*

Για ομαλά συστήματα n εξισώσεων με n αγνώστους, η μέθοδος απαλοιφής Gauss μετατρέπει ένα σύστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ σε ένα ισοδύναμο σύστημα $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$, όπου U είναι άνω τριγωνικός (δηλ. $a_{ij}=0$ για $i>j$). Το προκύπτον σύστημα λύνεται εύκολα με διαδοχικές αντικαταστάσεις. Διακρίνονται έτσι δύο στάδια: της *απαλοιφής* και της *πίσω αντικατάστασης*. Τα στάδια αυτά περιγράφονται ως εξής:

(A) *Απαλοιφή ή Τριγωνοποίηση*

Για $k=1,\ldots,n-1$ απαλείφεται ο άγνωστος x_k από τις εξισώσεις r_i, $i=k+1,\ldots,n$. Στο βήμα k λαμβάνουμε ένα νέο σύστημα με νέες τιμές των συντελεστών a_{ij} και νέα δεύτερα μέλη b_i. Το σύστημα αυτό έχει τη μορφή:

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1k}x_k+\ldots & +\,a_{1n}x_n & = b_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
\qquad a_{kk}x_k+\ldots & +\,a_{kn}x_n & = b_k \\
\qquad a_{k+1,k}x_k+\ldots & +\,a_{k+1,n}x_n & = b_{k+1} \\
0 \qquad \cdots\cdots\cdots & & \\
\qquad a_{ik}x_k+\ldots & +\,a_{in}x_n & = b_i \\
\qquad \cdots\cdots\cdots & & \\
\qquad a_{nk}x_k+\ldots & +\,a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
$$

Το σύστημα μετασχηματίζεται έτσι ώστε οι νέες τιμές των a_{ik}, $i=k+1,\ldots,n$ να γίνουν 0. Θωρώντας το υποσύστημα των εξισώσεων $r_k,\ldots,r_n$, τότε αν $a_{kk}=0$, επιλέγουμε μια εξίσωση τέτοια ώστε $a_{ik}\neq 0$ και εφαρμόζουμε τον σ.μ.γ. $r_k\leftrightarrow r_i$. Αν δεν υπάρχει τέτοιο i, το σύστημα δεν είναι ομαλό, δηλ. $rank(A)<n$ ή $det(A)=0$. Κατόπιν, για $i=k+1,\ldots,n$ εφαρμόζουμε τους σ.μ.γ. $r_i \leftarrow r_i - a_{ik}/a_{kk}r_k$, όπως είδαμε και στην §3.2, απαλείφοντας τον άγνωστο x_k. Τελικά φθάνουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα:

$$U\mathbf{x}=\mathbf{c} \tag{3.3.1}$$

Όπου U είναι ένα άνω τριγωνικό μητρώο.

$$U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.3.2}$$

(B) *Πίσω Αντικατάσταση*

Για $k=n, n-1,\ldots,1$ λύνεται η εξίσωση r_k ως προς x_k, δηλ.:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k &= \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj}x_j\right), k=n-1,\ldots,1 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Παρατήρηση 3.3.1 Από την Π3.2.2 έχουμε ότι το σύστημα $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$ που προκύπτει κατά την απαλοιφή είναι ισοδύναμο του αρχικού $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Παρατήρηση 3.3.2 Τα βήματα της τριγωνοποίησης εκφράζονται με μετασχηματισμούς μητρώων ως εξής. Θέτουμε αρχικά $A_0=A$, $\mathbf{b}^{(0)}=\mathbf{b}$. Έστω A_k, $\mathbf{b}^{(k)}$ είναι τα μητρώα που προκύπτουν μετά την απαλοιφή του x_k για $k=1,\ldots,n-1$, και P_k, M_k τα αντίστοιχα στοιχειώδη μητρώα. Τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} &A_1 = M_1P_1A_0\,,\ \mathbf{b}^{(1)} = M_1P_1\mathbf{b}^{(0)} \\ &A_2 = M_2P_2A_1\,,\ \mathbf{b}^{(2)} = M_2P_2\mathbf{b}^{(1)} \\ &\ldots\ldots \\ &U = A_{n-1}=M_{n-1}P_{n-1}\ldots M_1P_1A_0\,,\ \mathbf{c}=\mathbf{b}^{(n-1)} = M_{n-1}P_{n-1}\ldots M_1P_1\mathbf{b}^{(0)} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

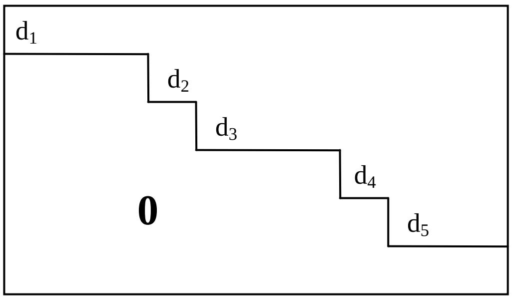
Τελικά λαμβάνουμε το άνω τριγωνικό σύστημα · $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$.

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

3.3.1 Απαλοιφή στα $m\times n$ Γραμμικά Συστήματα – Μια Σύνοψη (*)

Παραθέτουμε εδώ μια σύνοψη της απαλοιφής στη γενική περίπτωση όπου $n\neq m$, αν και αυτή δεν θα μας απασχολήσει στη συνέχεια. Είναι πάντως χρήσιμη για την κατανόηση της έννοιας και της σημασίας της *τάξης ενός μητρώου* και των ιδιοτήτων της.
Η μέθοδος απαλοιφής Gauss γενικεύεται για τον υπολογισμό της γενικής (πλήρους) λύσης στα $m\times n$ γραμμικά συστήματα. Για αυτά είναι: $A\in R^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}\in R^{n\times 1}$, $\boldsymbol{b}\in R^{m\times 1}$. Η διαδικασία απαλοιφής προσαρμόζεται για να τεθεί το σύστημα στην ισοδύναμη μορφή $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{c}$ όπου $\boldsymbol{U}\in R^{m\times n}$ είναι γραμμοϊσοδύναμο του A ***κλιμακωτό μητρώο*** ([1]) (βλ. Σχ. 3.3.1). Η προσαρμογή έγκειται στο ότι αν για μια γραμμή δεν βρεθεί οδηγός στην τρέχουσα στήλη p (όλα μηδενικά), τότε η διαδικασία δεν τερματίζεται, αλλά η αναζήτηση οδηγού και η απαλοιφή επιχειρείται στην επόμενη στήλη (δηλ. για τον άγνωστο x_{p+1}) κ.ο.κ. Η διαδικασία τερματίζεται όταν εξαντληθούν όλοι οι οδηγοί, συγκεκριμένα όταν:

(i) εξαντληθούν όλες οι γραμμές: $k=m$.
(ii) βρεθούν οδηγοί και στις n στήλες.
(iii) σε κάποια γραμμή k δεν εντοπισθεί κανένας οδηγός (μηδενική γραμμή).



Σχήμα 3.3.1: Κλιμακωτό μητρώο ***U*** μετά τη διαδικασία απαλοιφής στο μητρώο ***A***
(οι πρώτες στήλες του ***U*** μπορεί να είναι 0)

Ορισμός 3.3.1 - Τάξη Μητρώου Το πλήθος των οδηγών καλείται **τάξη μητρώου** και συμβολίζεται με $rank(A)$ ή σύντομα r.

Από την κατασκευή του $\boldsymbol{U}$ προκύπτουν άμεσα τα εξής σημαντικά συμπεράσματα:

- Τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών του $\boldsymbol{U}$ είναι οι οδηγοί d_i.
- Το $\boldsymbol{U}$ διαμορφώνεται σε κλιμακωτή μορφή και περιλαμβάνει r *στήλες οδηγών* και n-r *ελεύθερες στήλες*. Οι πρώτες r γραμμές του είναι μη μηδενικές (γραμμές με οδηγούς) και γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ οι m-r τελευταίες είναι μηδενικές και προέρχονται από την μετατόπιση των γραμμών όπου δεν βρέθηκαν οδηγοί. Συνεπώς $rank(A)$=*αριθμός μη μηδενικών γραμμών*=*αριθμός στηλών οδηγών*.
- $Rank(A)=r\leq min(m, n)$
- Στις παραπάνω περιπτώσεις (i)-(iii) θα ισχύει αντίστοιχα: (i) $rank(A)=m\leq n$ (πλήρης τάξη γραμμών). (ii) $rank(A)=n\leq m$ (πλήρης τάξη στηλών). (iii) $rank(A)<n\leq m$, ή $rank(A)<m\leq n$.
- Για τους *διανυσματικούς χώρους των γραμμών* και *στηλών* του A ισχύει το *θεμελιώδες Θεώρημα*: $rank(A)=dim(span(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n))=dim(span(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_m]))$ (βλ. και [1]-[3]).
- Οι ελεύθερες στήλες αντιστοιχούν στις *ελεύθερες μεταβλητές*, ενώ οι στήλες οδηγών στις *εξαρτημένες μεταβλητές*.
- Αν $\boldsymbol{N}(A)=\{x\in R^n / A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$ (*μηδενοχώρος* του A), τότε $dim(\boldsymbol{N}(A))=n-rank(A)$.

Οι μετασχηματισμοί μητρώων που ισχύουν εδώ είναι ανάλογοι των (3.3.4). Τελικά καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{c}$, όπου $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{E}A$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{EU}$. Το $\boldsymbol{E}$ είναι γινόμενο των μητρώων απαλοιφής.

[1] Ένα μητρώο $U\in R^{m\times n}$ λέγεται *κλιμακωτό* όταν: (i) οι πρώτες $r\leq m$ γραμμές του είναι μη μηδενικές, ενώ οι m-r τελευταίες μηδενικές (ii) κάθε μη μηδενική γραμμή i περιλαμβάνει k_i μηδενικά στις πρώτες θέσεις, όπου $0\leq k_i \leq n$-1. Το *ηγετικό* στοιχείο $U(i, k_i+1)\neq 0$. (ii) για κάθε $0\leq i\leq r$-1 είναι $k_i< k_{i+1}$.

Ένα σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ δέχεται λύση αν και μόνον εάν $rank([A\ \boldsymbol{b}])=rank(A)$, ή ισοδύναμα, αν $rank([\boldsymbol{U}\boldsymbol{c}])=rank(\boldsymbol{U})$. Αυτό σημαίνει ότι το $\boldsymbol{c}$ πρέπει να περιλαμβάνει μηδενικά στις m-r τελευταίες θέσεις του: $\boldsymbol{c}_{m-r+1:m}=0$. Τότε η γενική λύση $\boldsymbol{x}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{\mathbf{x}=\mathbf{x}_\mu+\mathbf{x}_o=\mathbf{x}_\mu+\sum_{i=1}^{n-rank(A)} c_i\mathbf{s}_i,\ \mathbf{s}_i\in R^n : \text{ειδική λύση},\ \forall c_i\in R}$$

Όπου:

- $\boldsymbol{x}_\mu$ η (μερική) λύση του $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$=c (και του $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$): Λαμβάνεται από το $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$=c με πίσω αντικατάσταση, θέτοντας 0 τις (n-r) ελεύθερες μεταβλητές $x_{j(1)},x_{j(2)},\ldots,x_{j(n-r)}$: $\boldsymbol{x}_F=(x_{j(1)}, x_{j(2)},\ldots,x_{j(n-r)})^T=0$.
- $\boldsymbol{x}_o$ η λύση του ομογενούς $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=0$ (και του $A\boldsymbol{x}=0$): $\boldsymbol{x}_o=\sum_{i=1}^{n-rank(A)} c_i\mathbf{s}_i$. Οι ειδικές λύσεις $\boldsymbol{s}_i$ $i=1,\ldots,n-r$ απαρτίζουν τη βάση του μηδενοχώρου $\boldsymbol{N}(A)$: $\boldsymbol{N}(A)=span(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2\ldots\boldsymbol{s}_{n-r})$. Κάθε ειδική λύση $\boldsymbol{s}_i$ προκύπτει από το $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=0$ με πίσω αντικατάσταση, θέτοντας $\boldsymbol{x}_F=\boldsymbol{e}_i$.

Εξετάζοντας τώρα ξεχωριστά την ύπαρξη λύσεων για το ομογενές και το πλήρες σύστημα, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Μηδενοχώρος $\boldsymbol{N(A)}$ – Λύσεις Ομογενούς

- $m<n$: είναι n-$r>0$, συνεπώς υπάρχουν πάντα άπειρες λύσεις.
- $r<n<m$: είναι n-$r>0$, συνεπώς υπάρχουν άπειρες λύσεις.
- $r=n<m$: είναι n-$r=0$, συνεπώς υπάρχει μόνον η τετριμμένη λύση (0).
- $r<n=m$: είναι n-$r>0$, συνεπώς υπάρχουν άπειρες λύσεις.
- $r=m=n$: υπάρχει μόνον η τετριμμένη λύση.

Λύσεις του $\boldsymbol{A x=b}$ ($B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$).

- $r<m<n$: αν $rank(A)=rank(A|\boldsymbol{b})$ υπάρχουν άπειρες λύσεις. Διαφορετικά αδύνατο.
- $r=m<n$: υπάρχουν πάντα άπειρες λύσεις.
- $r<n<m$: αν $rank(A)=rank(A|\boldsymbol{b})$ υπάρχουν άπειρες λύσεις. Διαφορετικά αδύνατο
- $r=n<m$: αν $rank(A)=rank(A|\boldsymbol{b})$ υπάρχει μοναδική λύση. Διαφορετικά αδύνατο
- $r=n=m$ (τετραγωνικό μητρώο): υπάρχει μοναδική λύση, όπως είδαμε.
- $r<n=m$: αν $rank(A)=rank(A|\boldsymbol{b})$ υπάρχουν άπειρες λύσεις. Διαφορετικά αδύνατο.

3.3.2 Μέθοδοι Οδήγησης

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την επιλογή της οδηγού εξίσωσης. Η απλούστερη βασίζεται στην επιλογή του πρώτου στοιχείου a_{ik} στη στήλη k με $a_{ik}\neq 0$ (όπως εφαρμόστηκε και στο Παρ.3.2.1 και ονομάζεται μέθοδος *Gauss χωρίς οδήγηση* (ή απλή οδήγηση). Όμως, στην πεπερασμένη αριθμητική των υπολογιστών, η μέθοδος αυτή προκαλεί αύξηση των σχετικών σφαλμάτων στρογγύλευσης και οδηγεί συχνά σε μη αποδεκτά αποτελέσματα. Αυτό οφείλεται στον πολλαπλασιασμό των εξισώσεων (γραμμών) με μεγάλους πολλαπλασιαστές σε κάθε βήμα της απαλοιφής, οπότε τα υπάρχοντα σφάλματα στα δεδομένα αυξάνονται σημαντικά. Το Παρ.3.5.1. δείχνει χαρακτηριστικά μια τέτοια περίπτωση.

Για να μειώσουμε τη μετάδοση του σφάλματος επιλέγουμε μεθόδους οδήγησης – ανάλογα και με τα δεδομένα του A – για τις οποίες ορίζονται μικρότεροι πολλαπλασιαστές. Μια ασφαλέστερη μέθοδος είναι η *μερική οδήγηση κατά στήλη,* που έγκειται στην επιλογή του μέγιστου κατ' απόλυτο τιμή στοιχείου στη στήλη k. Με τον τρόπο αυτό, επιλέγεται το μικρότερο $m\geq k$, τέτοιο ώστε να ισχύει $|a_{mk}|\geq|a_{ik}|$, $i=k,\ldots,n$. Οι πολλαπλασιαστές $p_{ik}=a_{kk}/a_k$ είναι μικρότεροι του 1 σε απόλυτη τιμή, και ως εκ τούτου οδηγούν σε μικρότερα σφάλματα οφειλόμενα σε απώλεια σημαντικών ψηφίων στους πολλαπλασιασμούς. Στο Παρ.3.5.1. φαίνεται η υπεροχή της μεθόδου έναντι της απλής οδήγησης.

Στη *μερική οδήγηση κατά γραμμή* ανταλλάσσεται ο άγνωστος x_k με τον άγνωστο x_j, $j \geq k$, με τον μεγαλύτερο σε απόλυτο τιμή συντελεστή. Το A_i πολλαπλασιάζεται κάθε φορά από δεξιά με ένα μητρώο μετάθεσης P_i. Εδώ δεν υπάρχουν εναλλαγές γραμμών στο A και $\boldsymbol{b}$. Τελικά παίρνουμε:

$$U = A_{n-1} = M_{n-1}...M_2M_1AP_1P_2...P_{n-1} = EAP \qquad (3.3.5)$$

Οι ανταλλαγές στηλών στο A απαιτούν στο τέλος και αναδιάταξη των αγνώστων. Πράγματι από την (3.3.5) παίρνουμε: $UP^{-1} = EA \Rightarrow UP^{-1}\boldsymbol{x} = EA\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ Συνεπώς το $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ είναι ισοδύναμο με το $UP^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$. Θέτουμε $\boldsymbol{y}=P^{-1}\boldsymbol{x}=P^{T}\boldsymbol{x}$ και βρίσκουμε το $\boldsymbol{y}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$$

Ασφαλέστερη από άποψη σφαλμάτων μέθοδος επιλογής οδηγού είναι η *πλήρης οδήγηση*. Σ' αυτήν ο οδηγός αναζητείται στις υπόλοιπες γραμμές και στήλες. Σε κάθε βήμα k της απαλοιφής επιλέγεται ως οδηγός:

$$d_k = max\{a_{ij} \,/\, i=k,...,n,\, j=k,...,n\}$$

ενώ εκτελείται ο μετασχηματισμός $A_k = P_{k\mu}A_{k-1}P_{k\nu}$, όπου μ, ν οι συντεταγμένες του ευρεθέντος οδηγού $d_k=a_{\mu\nu}$. Και στη μέθοδο αυτή προφανώς απαιτείται αναδιάταξη των αγνώστων.

Οδήγηση κατά μήκος της διαγωνίου

Χαρακτηριστική περίπτωση οδήγησης που χρησιμοποιεί εναλλαγή γραμμών και στηλών είναι η οδήγηση ως προς την κύρια διαγώνιο. Όπως και οι άλλες μέθοδοι μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη τετραγωνικά μητρώα. Τη γενική αυτή περίπτωση αναπτύσσουμε εδώ.

Ορίζουμε ως *κύρια διαγώνιο* ενός μητρώου $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$ το διάνυσμα $diag(A)=(a_{11},a_{22},\ldots,a_{\mu\mu})^{T}$, με $\mu=min(m,n)$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε τον οδηγό d_k μεταξύ των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του εκάστοτε εμφανιζόμενου υπομητρώου $A(k{:}m,\ k{:}n)$ που προκύπτει σε κάθε βήμα k της απαλοιφής. Η επιλογή βασίζεται και πάλι στο κριτήριο «μέγιστο», δηλ. το μεγαλύτερο κατ' απόλυτο τιμή στοιχείο της διαγωνίου:

$$d_k = \max_{k \le i \le \min(m,n)} \left(|a_{ii}| \right)$$

Π.χ. για το μητρώο A=[1 2 0; 3 6 -2; 1 4 3], είναι $diag(A)=[1, 6, 3]^{T}$ και ο πρώτος οδηγός $d_1=6$. Αν το μητρώο είναι τετραγωνικό οι οδηγοί επιλέγονται πάνω στην κύρια διαγώνιο του A, $diag(A)=[a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}]^{T}$. Η οδήγηση αυτή προϋποθέτει *συμμετρικές αντιμεταθέσεις γραμμών και στηλών*. Συνεπώς το A πολλαπλασιάζεται σε κάθε βήμα αριστερά και δεξιά με συμβατά μεταθετικά μητρώα $P_i \in \mathrm{R}^{m}$ (αριστερά) και $Q_i \in \mathrm{R}^{n}$ (δεξιά), έτσι ώστε τελικά να δώσει το U:

$$\begin{aligned}
&U = E_{r-1}P_{r-1}\ldots E_2P_2E_1P_1A\,Q_1Q_2\ldots Q_{r-1} = EAQ \Rightarrow\\
&UQ^{-1} = EA \Rightarrow\\
&UQ^{-1}\boldsymbol{x} = EA\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Rightarrow\\
&U\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει πως έχουμε τώρα να λύσουμε το σύστημα $U\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$ ως προς $\boldsymbol{y}$ (αλλαγή μεταβλητής), το οποίο είναι μια μετάθεση των συντεταγμένων του $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{y}=Q^{-1}\boldsymbol{x}=Q^{T}\boldsymbol{x}$. Στο τέλος θα αναδιατάξουμε τους αγνώστους: $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$.

Παρατήρηση 3.3.1 Στην πράξη, στα διάφορα περιβάλλοντα υλοποίησης χρησιμοποιούμε και χειριζόμαστε για τις μεταθέσεις *μεταθετικά διανύσματα.* Αν $\boldsymbol{p}$ μεταθετικό διάνυσμα, αρχικά τίθεται $\boldsymbol{p}(i)=i$, για $i=1,2,\ldots,max(m,n)$ (καμία μετάθεση), ενώ θα είναι: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p})$, ή $\boldsymbol{y}(i)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}(i))$. Έτσι για την αντιμετάθεση των στηλών και γραμμών 1 και 2 ενός μητρώου A, εκτελούμε την μετάθεση $\boldsymbol{p}(1)=2$,

p(2)=1. Κατόπιν προσπελαύνουμε τα αλλαγμένα στοιχεία *A*(*i*, *j*) του μητρώου (ή του πίνακα/array) ως *A*(***p***(*i*), ***p***(*j*)).

Ο *Αλγόριθμος Gauss* με χρήση μερικής οδήγησης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Αλγόριθμος 3.3.1: Απαλοιφή Gauss με Μερική Οδήγηση

Input: *Μητρώο A* ($n\times n$), *n, διάνυσμα* **b** ($n\times 1$)
Output: *Διάνυσμα* **x** (nx1), *λύση του συστήματος* Ax=b
U: *περιέχεται στο άνω τριγωνικό μέρος του A*.

```
% Το A αποθηκεύεται στο array A(1:n, 1:n)
% Τα b, x αποθηκεύονται στα arrays b(1:n), x(1:n) αντίστοιχα
    for k:=1:n-1
    { Εύρεση m τέτοιου ώστε:
          A(m,k)=A(max|A(i,k)|), k≤i≤n ;     % αναζήτηση οδηγού με μερική οδήγηση
    if A(m,k) == 0 then                      % έλεγχος οδηγού
          {Write('A μη αντιστρεπτό'); exit }
    if m~=k then                             % A(k): οδηγός. Εναλλαγή γραμμών m και k
          {for j:=1:n swap(A(m, j), A(k, j)); % a_mj <-> a_kj
             swap(b(m), b(k)) };             % b_m <-> b_k
    for i:=k+1: n                            % απαλοιφή
    {     p := A(i,k)/A(k,k) ;               % πολλαπλασιαστής γραμμής i
          for j:=k+1:n
                A(i,j) := A(i,j)-p*A(k,j) ;
          b(i) := b(i)-p(i)*b(k)
    } ;
     if  A(n,n)==0 then {Write('A μη αντιστρεπτό'); exit } ;
     x(n)=b(n)/A(n,n);                       % Πίσω αντικατάσταση
     for k:=n-1:-1:1 do
```

$$x(k) = (1/A(k,k)*\left(b(k) - \sum_{j=k+1}^{n} A(k,j)*x(j)\right);$$

```
     }
end Απαλοιφή Gauss
```

♦ Παράδειγμα 3.3.1: Ανεπάρκεια της απλής απαλοιφής – Μερική Οδήγηση

Έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} 0.001\, x_1 + 10\, x_2 &= 10 \\ x_1 + \quad x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Η θεωρητική λύση είναι: x_1=1.00010001, x_2=0.999899992. Δουλεύοντας με ακρίβεια 3 σ.ψ. και στρογγύλευση εφαρμόζουμε τη απαλοιφή χωρίς οδήγηση:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.001 & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_2 - 1000 r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0.001 & 10 & 10 \\ 0 & -9999 & -9998 \end{array}\right]$$

Κατά την πίσω αντικατάσταση, εκτελούμε τις πράξεις με ακρίβεια 3 σ.ψ. και παίρνουμε την προσεγγιστική λύση:

x_2=-9998/(-9999) = fl(0.99989999) = 1.000,
x_1 = 0

που είναι απαράδεκτη, αφού δεν επαληθεύει την δεύτερη εξίσωση. Είναι φανερό εδώ ότι η αλλοίωση της τιμής του x_1 οφείλεται στον μεγάλο πολλαπλασιαστή p_{21}=1/0.001=1000, ή ισοδύναμα στη μικρή τιμή 0.001 του οδηγού. Τα απόλυτα σφάλματα των λύσεων είναι

$| x_1 - x_1'|$ = |1.00010001-0| = 1.00010001,
$| x_2 - x_2'|$ = |1-0.999899992| = 0.000100008

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

ενώ τα απόλυτα σχετικά:

$|x_1 - x_1'|/|x_1| = 1.00010001/1.00010001 = 1$ (μεγάλο)
$|x_2 - x_2'|/|x_2| = 0.000100008/0.999899992 = 1.00018e\text{-}4$ (μικρό)

Εφαρμόζοντας τώρα μερική οδήγηση έχουμε:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.001 & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0.001 & 10 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_2 - 0.001 r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 9999 & 9998 \end{array}\right]$$

Λύνοντας με πίσω αντικατάσταση, παίρνουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης:

$x_2 = 9.998/9.999 = 0.999899992 = 1.000,$
$x_1 = 2\text{-}1.000 = 1.000$

Τώρα τα απόλυτα σφάλματα είναι:

$|x_1 - x_1'|=|1.00010001-1|=0.00010001$
$|x_2 - x_2'|=|0.999899992-1|=0.000100008,$

ενώ τα απόλυτα σχετικά:

$|x_1 - x_1'|/|x_1|=0.00010001/1.00010001=0.9999999e\text{-}4$ (μικρό)
$|x_2 - x_2'|/|x_2|=0.000100008/0.999899992=0.100018e\text{-}3$ (μικρό)

□

♦ Παράδειγμα 3.3.2: Μερική οδήγηση

Εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss χωρίς οδήγηση στο σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 15 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε απαλοιφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 15 \\ 4 & -2 & 6 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - 4r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & -6 & 2 & -22 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 + 6r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -16 & 32 \end{array}\right] = [U \mid b]$$

Με πίσω αντικατάσταση: $x_3 = -2$, $x_2 = 3$, $x_1 = 2$. Εφαρμόζοντας τώρα μερική οδήγηση:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 15 \\ 4 & -2 & 6 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & -10 \\ 2 & 3 & -1 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - 1/4 r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 1/2 r_1}$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - 1/4 r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 1/2 r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 20 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 11/2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \leftarrow r_3 - 3/8 r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & -10 \\ 0 & 4 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] = [U \mid b]$$

Με πίσω αντικατάσταση λαμβάνουμε και πάλι τις ίδιες λύσεις: $x_3 = -2$, $x_2 = 3$, $x_1 = 2$.

◇ **[Matlab]** Ο τελεστής "\" υλοποιεί στο Matlab την απαλοιφή Gauss *με εφαρμογή μερικής οδήγησης*. Επαληθεύουμε:

```
>>A=[1 1 1; 2 3 -1 ; 4 -2 6]
>>b=[3 15 -10]'
>>x=(A\b)'
x =
   2   3   -2
```

Εξ' άλλου, το γινόμενο E των μητρώων απαλοιφής είναι:

```
>> E=U/A
   E =
   1   0   0
```


Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

-2	1	0
-16	6	1

♦ Παράδειγμα 3.3.3: Μερική οδήγηση

Αν A=[1 1 -2; 3 5 -1; 3 4 1] και $\boldsymbol{b}$=[9; 30; 21] επιλύουμε το $Ax=\boldsymbol{b}$ με εφαρμογή μερικής οδήγησης.

▸ Φάση απαλοιφής:

Στα βήματα k=1,2 επιλέγουμε ως οδηγό το $u_k = \max_{i=1,2,3}\left(|a_{ik}|\right)$ στην k-στήλη. Παίρνουμε:

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&9\\3&5&-1&30\\3&4&1&21\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{P_{31}:\\ d_1=a_{21}=3\\ r_1\leftrightarrow r_2}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\1&1&-2&9\\3&4&1&21\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21}:\\ r_2=r_2-1/3r_1\\ r_3=r_3-1r_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\0&-2/3&-5/3&-1\\0&-1&2&-9\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{P_{32}:\\ d_2=a_{32}=\\ -1\neq 0\\ r_2\leftrightarrow r_3}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\0&\boxed{-1}&2&-9\\0&-2/3&-5/3&-1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\mathbf{E}_{32}:\\ r_3=r_3-2/3r_2}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\0&\boxed{-1}&2&-9\\0&0&-3&5\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{d_3=a_{33}=\\ -5/3\neq 0}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\0&\boxed{-1}&2&-9\\0&0&\boxed{-3}&5\end{array}\right]$$

Επαληθεύουμε:

$$[A\,|\,b]=E_{23}P_{23}E_{31}E_{21}P_{12}[Ab]=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2/3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1/3&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&9\\3&5&-1&30\\3&4&1&21\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c}3&5&-1&30\\0&-1&2&-9\\0&0&-3&5\end{array}\right]$$

▸ Φάση πίσω αντικατάστασης:

Η πίσω αντικατάσταση ισοδυναμεί με $\boldsymbol{x}=U^{-1}\boldsymbol{b}$ (στο Matlab: x=A\b). Το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ της λύσης αποθηκεύεται στο $\boldsymbol{b}$, με ακρίβεια 5 σ.ψ. για τα τελικά αποτελέσματα Οι εκτελούμενοι υπολογισμοί με τη θεωρητική λύση εμφαίνονται κάτω από το βέλος μετάβασης:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\0&\boxed{-1}&2&-9\\0&0&\boxed{-3}&5\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{b_3=b_3/a_{33}=-5/3\\ b_2=(1/-1)*\left(b_2-a_{23}\right)=17/3\\ b_1=(1/1)*\left(b_1-a_{12}-a_{13}\right)=0}]{\substack{\text{π.α: }\mathbf{x}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{b}\\ (\mathbf{x}=\mathbf{U}\backslash\mathbf{b})}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&-0.0000\\0&\boxed{-1}&2&5.6667\\0&0&\boxed{-3}&-1.6667\end{array}\right]$$

Στην πράξη όμως (όπως συμβαίνει και στο Matlab) η απαλοιφή *επεκτείνεται σε κάθε βήμα και στα στοιχεία πάνω από τους οδηγούς*. Η λύση αποθηκεύεται και πάλι στο $\boldsymbol{b}$. Έτσι θα είναι αντίστοιχα:

$$E_{31}E_{21}P_{31}[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\0&-2/3&-5/3&-1\\0&-1&2&-9\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\mathbf{P}_{32}:\\ d_2=a_{32}=-1\neq 0\\ r_2\leftrightarrow r_3}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&30\\0&\boxed{-1}&2&-9\\0&-2/3&-5/3&-1\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\mathbf{E}_{32}\mathbf{E}_{12}:\\ r_1=r_1+5r_2\\ r_3=r_3-2/3r_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&0&-9&-15\\0&\boxed{-1}&2&-9\\0&0&-3&5\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{d_3=a_{33}=\\ -5/3\neq 0}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-1&-15\\0&\boxed{-1}&2&-9\\0&0&\boxed{-3}&5\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{13}:\\ r_1=r_3-3r_3\\ r_2=r_2+2/3r_2}}\left[\begin{array}{ccc|c}\boxed{3}&5&-0&0\\0&\boxed{-1}&0&-17/3\\0&0&\boxed{-3}&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\mathbf{D}^{-1}:\\ r_1=r_1/3\\ r_2=r_2/(-1)\\ r_3=r_3/(-3)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&5&-0&0\\0&\boxed{1}&0&17/3\\0&0&\boxed{1}&-5/3\end{array}\right]$$

□

♦ Παράδειγμα 3.3.4: Οδήγηση κατά μήκος της κύριας διαγωνίου

Για το 3×4 μητρώο A που ακολουθεί, εφαρμόζουμε οδήγηση κατά μήκος της διαγωνίου και παίρνουμε:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-2\\3&6&5&-1\\2&4&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{P_{12}A:}\begin{bmatrix}3&6&5&-1\\1&2&1&-2\\2&4&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{P_{12}AP'_{12}:\\ c_1\leftrightarrow c_2\\ (x_1\leftrightarrow x_2\Leftrightarrow y=P'_{12}x)}}\begin{bmatrix}\boxed{6}&3&5&-1\\2&1&1&-2\\4&2&4&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{E_1P_{12}AP'_{12}:\\ r_2=r_2-1/3r_1\\ r_3=r_3-2/3r_1}}\begin{bmatrix}\boxed{6}&3&5&-1\\0&0&-2/3&-5/3\\0&0&2/3&5/3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{P_{23}E_1P_{12}AP'_{12}:}\begin{bmatrix}\boxed{6}&3&5&-1\\0&0&2/3&5/3\\0&0&-2/3&-5/3\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{P_{23}E_1P_{12}AP'_{12}P'_{23}:\\ c_2\leftrightarrow c_3\\ (x_2\leftrightarrow x_3\Leftrightarrow y=P'_{23}P'_{12}x)}}$$

$$\begin{bmatrix}\boxed{6}&5&3&-1\\0&\boxed{2/3}&0&5/3\\0&-2/3&0&-5/3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3=r_3+r_2]{E_2P_{23}E_1P_{12}AP'_{12}P'_{23}}\begin{bmatrix}\boxed{6}&5&3&-1\\0&\boxed{2/3}&0&5/3\\0&0&\boxed{0}&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1=r_1-15/2r_2]{E_{12}E_2P_{23}E_1P_{12}AP'_{12}P'_{34}=U:}$$

$$\begin{bmatrix}6&0&3&-27/2\\0&2/3&0&5/3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{D_2^{-1}E_{12}D_1^{-1}E_2P_{23}E_1P_{12}AP'_{12}P'_{34}:\\ r_1=1/6r_1\\ r_2=3/2r_1}}\begin{bmatrix}1&0&1/2&-9/4\\0&1&0&5/2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

Για τα (δεξιά) μεταθετικά μητρώα στηλών είναι $P'_{12},P'_{23}\in\mathrm{R}^4$, ενώ για τα αριστερά $P_{12},P_{23}\in\mathrm{R}^3$. Η λαμβανόμενη *αναγμένη κλιμακωτή μορφή* R είναι φυσικό να διαφέρει από αυτή που βρίσκουμε για το A χωρίς οδήγηση, και αντιστοιχεί σε διαφορετικό μητρώο, δηλ. στο $AP'_{12}P'_{23}$.

Αν εφαρμόσουμε τώρα τους ίδιους μετασχηματισμούς γραμμών $E=D_2^{-1}E_{12}E_2P_{23}E_1P_{12}$ και στο $\boldsymbol{b}$, λαμβάνουμε το «συμβατό» για την λύση διάνυσμα (η τελευταία συνιστώσα 0):

$$\boldsymbol{d}=E\boldsymbol{b}=(3.7500,\ 1.5000,\ 0)^{\mathrm{T}}$$

Στο σύστημα $U\boldsymbol{y}=\boldsymbol{c}$, αλλά και στο $R\boldsymbol{y}=\boldsymbol{d}$, οι άγνωστοι θα αλλάξουν: $\boldsymbol{y}=P_{23}P_{12}\boldsymbol{x}=(x_2,x_3,x_1,x_4)^{\mathrm{T}}$. Αν χρησιμοποιήσουμε το μεταθετικό διάνυσμα $\boldsymbol{p}$, αρχικά θα είναι $\boldsymbol{p}=[1,2,3,4]$. Κατόπιν εκτελούμε $p(1)\leftrightarrow p(2)$, $p(2)\leftrightarrow p(3)$, ώστε να είναι $y_1=x_{p(1)}=x_2$, $y_2=x_{p(2)}=x_3$, $y_3=x_{p(3)}=x_1$, $y_4=x_{p(4)}=x_4$.
Λύνουμε (άσκηση, βλ. και [1], [2]) το σύστημα $R\boldsymbol{y}=\boldsymbol{d}$ βρίσκοντας τη γενική λύση $\boldsymbol{y}$. Στο τέλος αντικαθιστούμε τα y_i με τα αντίστοιχα x_i. □

♦ Παράδειγμα 3.3.5: Μερική Οδήγηση κατά γραμμή

Δίνονται:

$$A=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$$

Εφαρμόζουμε απαλοιφή *Gauss* με μερική οδήγηση κατά γραμμή για το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&2&4\\1&2&1&3\\0&1&0&5\end{array}\right]\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}4&1&2&4\\2&1&1&3\\1&0&0&5\end{array}\right]}_{[AP_{12}|b]}\xrightarrow{\substack{r_2=r_2-1/2r_1\\ r_3=r_3-1/4r_1}}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}4&1&2&4\\0&1/2&0&1\\0&-1/4&-1/2&4\end{array}\right]}_{[E_{31}E_{21}AP_{12}|E_{31}E_{21}b]}$$

$$\xrightarrow{r_3=r_3+1/2r_2}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c}4&1&2&4\\0&1/2&0&1\\0&0&-1/2&9/2\end{array}\right]}_{[E_{32}E_{31}E_{21}AP_{12}|E_{32}E_{31}E_{21}b]}=\left[U\,|\,b\right]$$

Λύνουμε με πίσω αντικατάσταση το $U\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$: $y_3=9$, $y_2=2$, $y_1=5$. Αναπροσαρμόζουμε τέλος τους αγνώστους: $x_3=9$, $x_1=2$, $x_2=5$.

□

3.3.3 Ανάλυση Αλγορίθμου *Gauss*

Θα υπολογίσουμε την τάξη μεγέθους των υπολογισμών που απαιτεί η μέθοδος απαλοιφής Gauss. Υπολογίζουμε αρχικά τον αριθμό των εκτελούμενων πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων. Στην φάση της απαλοιφής εκτελούνται για k=1,...,n-1 οι πράξεις:

$$
\begin{array}{ll}
p_{ik} = a_{ik}/a_{kk} & i=k+1,...,n \\
a_{ij} = a_{ij} - p_{ik}a_{kj} & i=k+1,...,n,\ j=k+1,...,n \\
b_i = b_i - p_{ik}b_k & i=k+1,...,n
\end{array}
$$

Προφανώς απαιτούνται n-k, $(n-k)^2$ και n-k πολλαπλασιασμοί/διαιρέσεις αντίστοιχα. Με βάση τους γνωστούς τύπους αθροισμάτων:

$$\sum_{s=1}^{n} s = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{s=1}^{n} s^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

ο αριθμός των εκτελούμενων πολλαπλασιασμών/διαιρέσεων θα είναι:

$$M_e = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n(n-1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Της ίδιας τάξης θα είναι και ο αριθμός των προσθέσεων/αφαιρέσεων. Δηλαδή οι υπολογισμοί στην απαλοιφή είναι της τάξης $O(n^3)$.
Κατά την πίσω αντικατάσταση θα έχουμε για k=1,...,n-1, n-k πολλαπλασιασμούς και 1 διαίρεση:

$$M_s = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Και ο αριθμός των προσθέσεων/αφαιρέσεων θα είναι προφανώς πολυώνυμο 2ου βαθμού.
Ο συνολικός αριθμός Μ των εκτελούμενων πολλαπλασιασμών/διαιρέσεων κατά την απαλοιφή συνεπώς θα είναι:

$$\boxed{M = M_e + M_s = \frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{3}}$$

Υπολογίζοντας ανάλογα και τον συνολικό αριθμό S των προσθέσεων/αφαιρέσεων στη μέθοδο Gauss, βρίσκουμε:

$$\boxed{S = S_e + S_s = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}}$$

Συνεπώς η μέθοδος *Gauss* έχει πολυωνυμική πολυπλοκότητα χρόνου και μάλιστα της τάξης $O(n^3)$.

Ενδιαφέρον θα ήταν τώρα να συγκρίνουμε τον αριθμό Μ (οι πολλαπλασιασμοί/διαιρέσεις απαιτούν σημαντικά μεγαλύτερο χρόνο εκτέλεσης από τις προσθέσεις/αφαιρέσεις) με τον αντίστοιχο της μεθόδου *Cramer*. Η μέθοδος αυτή απαιτεί $(n+1)!$ πολλαπλασιασμούς και n διαιρέσεις. Το μέγεθος όμως του $(n+1)!$ για μεγάλα n είναι δραματικά μεγαλύτερο από το $O(n^3)$. Μάλιστα, το μέγεθος αυτό σύμφωνα με τον τύπο του *Stirling* εκφράζεται για μεγάλα n από τη σχέση:

$$n! \approx \sqrt{2pn}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Διαπιστώνεται λοιπόν, ότι για μεγάλα συστήματα η μέθοδος *Gauss* υπερέχει δραστικά σε ταχύτητα της μεθόδου *Cramer*.

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

3.4 Υπολογισμός Ορίζουσας και Αντιστρόφου

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός μητρώου, αρκεί να εκτελεσθεί η τριγωνοποίηση. Πράγματι, είδαμε ότι για τη μέθοδο *Gauss* ισχύει:

$$M_{n-1}P_{n-1}...M_1P_1A = U$$

Από την ιδιότητα των οριζουσών $det(AB) = det(A)det(B)$ έχουμε:

$$det(U) = det(M_{n-1})det(P_{n-1})...det(M_1)det(P_1)det(A)$$

Είδαμε επίσης ότι $det(M_i)$=1 και $det(P_i)$=-1. Αν i ο αριθμός των πραγματικών εναλλαγών γραμμών κατά την απαλοιφή, η τελική έκφραση της $det(A)$ είναι:

$$det(A) = (-1)^i\, det(U) \Rightarrow$$
$$det(A) = (-1)^i\, u_{11}u_{22}\ldots u_{nn} \qquad (3.4.1)$$

Από την (3.4.1) συνάγεται ότι, αν $u_{ii}\neq 0$, για $i=1,\ldots,n$, τότε θα είναι και $det(A)\neq 0$, και συνεπώς η ακόλουθη πρόταση είναι ισοδύναμη με τις προτάσεις του Θ3.1.1:.

Πρόταση 3.4.1.
Ένα $n\times n$ σύστημα $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ είναι ομαλό, ή ένα μητρώο A είναι αντιστρέψιμο, όταν και μόνον όταν όλα τα διαγώνια στοιχεία του U είναι διάφορα του 0 , ή ισοδύναμα όταν: $rank(A)=n$.

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να εξαχθεί και απ' ευθείας: αν είναι $u_{ii}\neq 0$, για $i=1,...n$, τότε κατά την πίσω αντικατάσταση το x_i μπορεί να βρεθεί με μοναδικό τρόπο διαιρώντας δια u_{ii}, και αντίστροφα.

Έστω τώρα ένα αντιστρέψιμο μητρώο A. Ο αντίστροφός του $X=A^{-1}$ ικανοποιεί την $AX=I_n$, συνεπώς θα ισχύει:

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad i=1,...,n \qquad (3.4.2)$$

όπου $\mathbf{e}_i$ είναι η στήλη i του I_n και $\mathbf{x}_i$ η i στήλη του X. Επομένως ο υπολογισμός του A^{-1} ανάγεται στην επίλυση n συστημάτων της μορφής (3.4.2) με κοινό μητρώο A. Αυτή είναι η αρχή της μεθόδου *Gauss-Jordan* για τον υπολογισμό του αντιστρόφου: *εφαρμόζουμε απαλοιφή στο A και για κάθε i βρίσκουμε το $\mathbf{x}_i$ με πίσω αντικατάσταση.*

Παρατήρηση 3.4.1. Για την εύρεση του αντιστρόφου μπορούμε ισοδύναμα να εφαρμόζουμε διαδοχικούς σ.μ.γ. στο $[A|I]$, ώστε το A να μετασχηματισθεί στο I. Τότε, λόγω της (3.4.2), το I θα μετασχηματισθεί τελικά στο A^{-1}. Ο μετασχηματισμός αυτός ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του $[A|I]$ αριστερά με A^{-1}:

$$A^{-1}[A \mid I] = [I \mid A^{-1}] \qquad (3.4.3)$$

♦ Παράδειγμα 3.4.1: Υπολογισμός Ορίζουσας και Αντιστρόφου

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα και τον αντίστροφο του μητρώου A του Παρ.3.2.1. Με απαλοιφή χωρίς οδήγηση βρήκαμε:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -35/2 \end{bmatrix}$$

και ότι έγινε μια (i=1) εναλλαγή γραμμών. Επομένως:

$$det(A) = (-1)^1 *1*2*(-35/2) = 35$$

Για την εύρεση του αντιστρόφου θεωρούμε το επαυξημένο μητρώο $[A \mid I_3]$. Έχουμε:

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_3-4r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -14 & 0 & -4 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-7/2r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -35/2 & -7/2 & -4 & 1\end{array}\right]=[U\,|\,g_1\ g_2\ g_3]$$

Επιλύουμε τώρα ξεχωριστά κάθε σύστημα $[U|\boldsymbol{g}_i]$, i=1,2,3. Με χρήση α.κ.υ. 4 σ.ψ. και στρογγύλευσης βρίσκουμε κατά την πίσω αντικατάσταση:

$\boldsymbol{x}_1 = (0, 0.4, 0.2)^T$

$\boldsymbol{x}_2 = (-0.1429,\ \ -0.1143,\ \ 0.2286)^T$

$\boldsymbol{x}_3 = (0.2857,\ \ 0.0286,\ \ -0.0571)^T$

Επομένως ο αντίστροφος A^{-1} είναι:

$$A^{-1}=\left[X_1\ X_2\ X_3\right]=\begin{bmatrix}0 & -0.1429 & 0.2857\\ 0.4 & -0.1143 & 0.0286\\ 0.2 & 0.2286 & -0.0571\end{bmatrix}$$

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.4.1 να μετασχηματίσουμε το U σε I, εφαρμόζοντας τους ίδιους σ.γ.μ. και στο $[g_1\ g_2\ g_3]$. Τότε στη θέση του θα λάβουμε το A^{-1}:

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -35/2 & -7/2 & -4 & 1\end{array}\right]}_{E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}\xrightarrow{r_1\leftarrow r_1+r_2}$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -35/2 & -7/2 & -4 & 1\end{array}\right]}_{E_{12}*E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-(-2/35)r_3}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1-7/35 & -4*2/35 & 2/35\\ 0 & 0 & -35/2 & -7/2 & -4 & 1\end{array}\right]}_{E_{32}*E_{12}*E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}=$$

$$=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 28/35 & -8/35 & 2/35\\ 0 & 0 & -35/2 & -7/2 & -4 & 1\end{array}\right]}_{E_{23}*E_{12}*E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}\xrightarrow{r_1\leftarrow r_3-(-5*2/35)r_3}$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1+(10/35)*(-7/2) & 1+(10/35)*(-4) & 10/35\\ 0 & 2 & 0 & 28/35 & -8/35 & 2/35\\ 0 & 0 & -35/2 & -7/2 & -4 & 1\end{array}\right]}_{E_{13}*E_{23}*E_{12}*E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -5/35 & 10/35\\ 0 & 2 & 0 & 28/35 & -8/35 & 2/35\\ 0 & 0 & -35/2 & -7/2 & -4 & 1\end{array}\right]}_{E_{13}*E_{23}*E_{12}*E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftarrow -2/35r_3]{r_2\leftarrow 1/2r_2}\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -5/35 & 10/35\\ 0 & 1 & 0 & 28/70 & -4/35 & 1/35\\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 8/35 & -2/35\end{array}\right]}_{diag([1,1/2,-2/35])*E_{13}*E_{23}*E_{12}*E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}=\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -5/35 & 10/35\\ 0 & 1 & 0 & 28/70 & -4/35 & 1/35\\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 8/35 & -2/35\end{array}\right]}_{diag([1,1/2,-2/35])*E_{13}*E_{23}*E_{12}*E_{32}*E_{31}*P_{12}*[A|I]}$$

Λαμβάνουμε και πάλι:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -5/35 & 10/35\\ 28/70 & -4/35 & 1/35\\ 1/5 & 8/35 & -2/35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -0.1429 & 0.2857\\ 0.4 & -0.1143 & 0.0286\\ 0.2 & 0.2286 & -0.0571\end{bmatrix}$$

◊ **[Matlab]** Ο αντίστροφος υπολογίζεται από το Matlab με τη συνάρτηση inv. Η ορίζουσα από την det. Επενεργούν οι γνωστοί υπολογιστικοί αλγόριθμοι. Επαληθεύουμε:

```
>> inv(A)
ans =
         0   -0.1429    0.2857
    0.4000   -0.1143    0.0286
    0.2000    0.2286   -0.0571
>> det(A)
ans = 35
```


Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ασκήσεις

3.1 Να εφαρμοσθεί η μέθοδος *Gauss* με απλή οδήγηση και με ακρίβεια 3 σ.ψ. για την επίλυση του συστήματος {3x+y-z=0,-2x-6y+3z=2, 4x-2y+8z=1}.

3.2 Τροποποιείστε τον αλγόριθμο Gauss με χρήση διανύσματος μετάθεσης ***p*** για την αποθήκευση των μεταθέσεων γραμμών (δεν θα εναλλάσσονται άμεσα οι γραμμές του συστήματος).

3.3 Να υπολογισθεί η ορίζουσα και ο αντίστροφος *A* του συστήματος της Άσκησης 3.1.

3.4 Για ένα σύστημα *Ax*=***b*** αναπτύξτε τους μετασχηματισμούς που θα εφαρμοσθούν στο *A* και ***b*** για τη μέθοδο απαλοιφής *Gauss με μερική οδήγηση κατά γραμμές*. Στη συνέχεια εφαρμόστε τους για την επίλυση του συστήματος: {2x+3y-6z=1, 2x-2y+3z=2, 4x-2y+4z=4}

3.5 Για ένα σύστημα *Ax*=***b*** αναπτύξτε τους μετασχηματισμούς που θα εφαρμοσθούν στο *A* και ***b*** για τη μέθοδο απαλοιφής *Gauss με πλήρη οδήγηση*. Στη συνέχεια εφαρμόστε τους για την επίλυση του συστήματος της Άσκησης. 3.1.

3.6. Υλοποιείστε στο Matlab τη μέθοδο απαλοιφής *Gauss με μερική οδήγηση κατά γραμμές*. Δοκιμάστε τον κώδικά σας (function GaussElimPivotLines(A,n)) με το σύστημα της Άσκησης 3.4.

3.7 Υλοποιείστε στο Matlab τη μέθοδο απαλοιφής *Gauss με πλήρη οδήγηση* με την κατασκευή μιας function GaussElimPivotLines(A,n). Στη συνέχεια δοκιμάστε τον κώδικά σας με το σύστημα της Άσκησης. 3.4.

3.8 Αν *A*=[1 2 0; 3 6 -2; 1 4 10] και b=[2,3,1], να λυθεί το ***Ax***=***b*** με τη μέθοδο Gauss *με οδήγηση κατά την κύρια διαγώνιο*.

3.9. Υλοποιείστε στο Matlab τη μέθοδο απαλοιφής *με οδήγηση κατά την κύρια διαγώνιο* με την κατασκευή μιας function GaussElimPivotDiag(A,n). Στη συνέχεια δοκιμάστε τον κώδικά σας με το σύστημα της Άσκησης 3.7.

3.10. Δίνεται το συμμετρικό 5×5 μητρώο «1-4-1», με 4 στην κύρια διαγώνιο και 1 στις δύο δευτερεύουσες. Τα άλλα στοιχεία θα είναι 0.

(α) Να βρείτε τους οδηγούς και τους πολλαπλασιαστές για τη μέθοδο *Gauss*,
(β) Υπολογίστε το *U*,
(γ) Τέλος, υπολογίστε την ορίζουσα και τον αντίστροφο.

3.11. Δίνεται το συμμετρικό 4×4 μητρώο *A*=[1 2 1 4; 2 3 1 -2; 1 1 10 2 ; 4 -2 2 8].

(α) Υπολογίστε με τη μέθοδο Gauss χωρίς οδήγηση το *U*.
(β) Εξηγείστε γιατί, όταν δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών, σε κάθε βήμα *k* της απαλοιφής το εμφανιζόμενο υπομητρώο *A*(k:n, k:n) είναι συμμετρικό.
(γ) Τέλος, υπολογίστε την ορίζουσα και τον αντίστροφο.

3.12 Αν ένα μητρώο περιέχει ένα μόνον ένα μη μηδενικό στοιχείο σε μερικές γραμμές και στήλες του, εξηγείστε χωρίς να κάνετε απαλοιφή τι θα συμβαίνει στον αντίστροφό του. Εφαρμογή στο μητρώο *A*=[0 4 8 9; 0 0 0 -9; 6 2 10 2 ; 0 -2 6 8].

3.13 Για το διαγώνιο κατά μπλοκ μητρώο:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & \boxed{C} & \vdots \\ 0 & \dots & \boxed{D} \end{pmatrix}$$

όπου B, C, D τετραγωνικά $m_i \times m_i$, όπου $m_1+m_2+m_3=n$ και $m_i \geq 1$.

(α) Να εκφράσετε τον αντίστροφο A^{-1},
(β) τις ιδιοτιμές του *A* σε σχέση με τις ιδιοτιμές των *B*,*C*,*D*.
(γ) Αν *C*=[4 1; 1 4] και *B*=[1 2; 2 3], εφαρμόστε τα συμπεράσματά σας για το 5×5 μητρώο:

A=[B zeros(2) zeros(2,1); zeros(2) C zeros(2,1); zeros(1,4) 3]

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

3.5 Σύνοψη και Βιβλιογραφία

Σύνοψη

Τα πιο βασικά σημεία που είδαμε στο κεφάλαιο αυτό είναι:

- Η *μέθοδος απαλοιφής Gauss* παρέχει το γενικό πλαίσιο για την επίλυση ενός $m\times n$ γραμμικού συστήματος $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. Κεντρική ιδέα είναι ο μετασχηματισμός του A είτε σε ένα *άνω τριγωνικό μητρώο* U ($m=n$), είτε σε ένα *κλιμακωτό μητρώο* **U** ($m\neq n$), με εφαρμογή ενός συνόλου σ.μ.γ. για τη σταδιακή απαλοιφή των αγνώστων (στηλών του A). Η μετάβαση αυτή είναι πάντα εφικτή.
- Οι σ.μ.γ. αντιστοιχούν σε στοιχειώδη μητρώα απαλοιφής τα οποία επενεργούν πάνω στα A και $\boldsymbol{b}$, πολλαπλασιάζοντάς τα από αριστερά. Αν το γινόμενό τους είναι E, τότε μετά την απαλοιφή θα είναι: $U=EA$, $\boldsymbol{c}=A\boldsymbol{b}$. Το τελικώς λαμβανόμενο σύστημα θα είναι το $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$, το οποίο είναι ισοδύναμο του αρχικού.
- Η επίλυση του $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ γίνεται σε δύο φάσεις: *απαλοιφή* (*τριγωνοποίηση*) και *πίσω αντικατάσταση*. Κατά την απαλοιφή, η οποία γίνεται σε n-1 βήματα, ορίζονται οι οδηγοί του A οι οποίοι τοποθετούνται στη διαγώνιο του U. Αν υπάρχουν n (μη μηδενικοί) οδηγοί, τότε το σύστημα έχει (μοναδική) λύση. Ισχύει και το αντίστροφο.
- Μπορούν να ορισθούν διάφορες μέθοδοι οδήγησης για την απαλοιφή. Η επιλογή τους υπαγορεύεται από τη ανάγκη να αποφευχθούν σφάλματα στρογγύλευσης κατά την εκτέλεση των υπολογισμών. Η απαλοιφή χωρίς οδήγηση έχει μόνον θεωρητική αξία.
- Η ορίζουσα $det(A)$ ενός τετραγωνικού μητρώου A μπορεί να υπολογισθεί κατά τη φάση της τριγωνοποίησης. Είναι $det(A)=(-1)^i d_1d_2\ldots d_n$, όπου d_i οι οδηγοί και i ο αριθμός των γραμμών που εναλλάχτηκαν κατά την απαλοιφή.
- Το A είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον εάν $u_{ii}\neq 0$, για $i=1,\ldots,n$. Το αντίστροφο ενός μητρώου A υπολογίζεται από τον *Αλγόριθμο Gauss-Jordan* που επιλύει n γραμμικά συστήματα με κοινό μητρώο. Ο αλγόριθμος συνοψίζεται από τον μετασχηματισμό $[A|\mathrm{I}]\rightarrow[\mathrm{I}|A^{-1}]$.
- Το γινόμενο των μητρώων απαλοιφής E βρίσκεται από το μετασχηματισμό $[A|\mathrm{I}]\rightarrow[\mathrm{U}|E]$.

Βιβλιογραφία και Χρήσιμες Αναφορές

Στην βιβλιογραφία που ακολουθεί μπορεί κανείς να αναζητήσει εκτενέστερες πηγές και υλικό σχετικά με τα θέματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο αυτό. Οι αναφορές αφορούν κυρίως σε συγγράμματα και βοηθήματα Γραμμικής Άλγεβρας ([1]-[11] και [18]-[25]) και μερικώς σε συγγράμματα Αριθμητικής Ανάλυσης ([12]-[14] και [26]-[28]).

Οι πλέον βασικές αναφορές για τη Γραμμική Άλγεβρα είναι οι [1], [2], [3], ενώ χρήσιμες είναι και οι [5], [6]. Για θέματα που άπτονται αριθμητικών υπολογιστικών μεθόδων, χρήσιμες είναι οι [12]-[14], όπως και οι [26], [28]. Οι τελευταίες περιλαμβάνουν αρκετές εφαρμογές και απευθύνονται σε Μηχανικούς.

Τέλος, οι [12] και [15]-[17] προτείνονται σε όσους επιθυμούν να ασχοληθούν με αριθμητικές υπολογιστικές μεθόδους στο Matlab.

[1] G. Strang, «*Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*» (μετάφραση Π. Πάμφιλου), Εκδ. Πανεπιστημίου Πατρών.

[2] G. Strang, «*Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*», Παν/κές Εκδόσεις Κρήτης, 1996, Ηράκλειο.

[3] Γ. Δονάτος, Μ. Αδάμ, «*Γραμμική Άλγεβρα, Θεωρία και Εφαρμογές*», Gutenberg.

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

[4] O. Morris, «*Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*», Αθήνα, Έκδοση Γ. Πνευματικού, 1980.

[5] J. H. Hubbard, Barbara Burke Hubbard, «*Διανυσματικός Λογισμός, Γραμμική Άλγεβρα και Διαφορικές Μορφές*», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2006.

[6] Γ. Αβδελάς, Θ. Σίμος, «*Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα*», Εκδόσεις Συμεών, 2001.

[7] Γ. Αβδελάς, Θ. Σίμος, «*Σημειώσεις Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας*», Χανιά-Ξάνθη 1999.

[8] Γ. Αβδελάς, «*Γραμμική Άλγεβρα (Θεωρία Πινάκων)*», Χανιά, 1986.

[9] Δ. Δερμάνης, «*Γραμμική Άλγεβρα και Θεωρία Πινάκων*, Θεσσαλονίκη, 1985.

[10] Ιωάννης Β. Μαρουλάς, «*Γραμμική Άλγεβρα*», Αθήνα

[11] Γ. Παντελίδης Δ. Κραβαρίτης, Β. Νασόπουλος, Δ, Τσεκρέκος, «*Γραμμική Άλγεβρα*», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1992.

[12] Χ. Αλεξόπουλος, «*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση και Περιβάλλοντα Υλοποίησης*», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2007.

[13] Θ. Παπαθεοδώρου «*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2010

[14] Μ. Βραχάτης, «*Αριθμητική Ανάλυση*», Εκδ. «Ελληνικά Γράμματα», 2002.

[15] Χ. Αλεξόπουλος, «*Εισαγωγή στο Matlab*», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, 2004.

[16] "*Matlab, The Language of Thechnical Computing, Getting started with Matlab*", The Mathworks, 2002.

[17] Duane Hanselman, Bruce Littlefield, «*Μάθετε το Matlab 7*», Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2006, τόμος Α και Β.

[18] A. Kurosh, "*Cours d'Algebre Superieure*", Editions de Moscou

[19] J. L. Goldeberg, "*Matrix Theory with Applications*", McGraw Hill, 1991

[20] R. Bronson, "*Matrix Methods*", Academic Press, New York, 1971.

[21] S. Barnet, "*Matrices Methods and Applications*", Clarendon Press, Oxford, 1990.

[22] P. Halmos, "*Linear Algebra Problem Book*", American Mathematical Society, 1995.

[23] D. S. Lay, "Linear Algebra and its Applications", Addison-Wesley, P. Co., 1994

[24] S. J. Leon, "*Linear Algebra with Applications*", MacMillan, 1990.

[25] V.V. Prasolov, "*Problems and Theorems in Linear Algebra*", American Mathematical Society, 1994.

[26] B. N. Datta, "*A first course in Numerical Linear Algebra*", Brooks Cole, 1995.

[27] J. H. Mathews: "*Numerical Methods for Computer Science, Engineering, and Mathematics*", Prentice-Hall Int, Editions.

[28] S. C. Chapra, Raymond P. Canale, "*Numerical Methods for Engineers*", Mc.Graw-Hill Int. Editions, Second Edition.

Χ. Α. Αλεξόπουλος
Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών