Νόρμες μητρώων - ||A||$_2$

Στο κείμενο αυτό δίνω μία εκδοχή της απόδειξης που δεν τελειώσαμε στο φροντιστήριο της Παρασκευής.
Έστω $A \in R^{nxn}$, Θα δείξουμε ότι $||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)} = \sigma_{max}\{A\}$. Με τον όρο $\lambda_{max}\{A^TA\}$ εκφράζουμε τη μέγιστη ιδιοτιμή του A^TA και ως $\sigma_{max}\{A\}$ τη μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του A.

Από τον ορισμό της $||A||_2$ ισχύει ότι

$$||A||_2 = \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \tag{1}$$

Όταν υψώσουμε στο τετράγωνο τα δύο μέρη της εξίσωσης προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} ||A||_2^2 &= \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{||Ax||^2}{||x||^2} \\ &= \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{< Ax, Ax >}{< x, x >} \\ &= \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{(Ax)^T(Ax)}{x^Tx} \\ &= \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{x^TA^TAx}{x^Tx} \end{aligned} \tag{2}$$

Στη συνέχεια θα εκφράσουμε το διάνυσμα x ως ένα γραμμικό συνδιασμό διανυσμάτων της βάσης $q_1, q_2, ..., q_n$ που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A^TA. Τα ιδιοδιανύσματα ενός συμμετρικού μητρώου αποτελούν ορθοκανονική βάση δηλαδή για κάθε q_i, q_j ισχύει

$$q_i^Tq_j = \begin{cases} 1 & \text{όταν } i = j \\ 0 & \text{όταν } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

Το διάνυσμα x ως γραμμικός συνδιασμός των $\{q_i\}$ γράφεται ως

$$x = c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3) στην (1) προκύπτει

$$\begin{aligned} ||A||_2^2 &= \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)^TA^TA(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)}{(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)^T(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)} \\ &= \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)^T(c_1A^TAq_1 + c_2A^TAq_2 + ... + c_nA^TAq_n)}{(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)^T(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)} \end{aligned} \tag{5}$$

Επειδή τα διανύσματα q_i είναι ιδιοδιανύσματα του A^TA ισχύει

$$A^TAq_i = \lambda_iq_i \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας στην (5)

$$||A||_2^2 = \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)^T(\lambda_1c_1q_1 + \lambda_1c_2q_3 + ... + \lambda_nc_nq_n)}{(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)^T(c_1q_1 + c_2q_2 + ... + c_nq_n)} \tag{7}$$

Εκτελώντας το εσωτερικό γινόμενο και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2) προκύπτει ότι

$$||A||_2^2 = \sup_{||x||_2 \neq 0} \frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2} \tag{8}$$

όπου θεωρούμε ότι $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$. Για δεδομένα $c_1, c_2, ...c_n$, η μέγιστη τιμή της ποσότητας $\frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}$ δίνεται όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \lambda_{max}$ τότε $||A||_2^2 = \lambda_1 \frac{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2} = \lambda_1$. Συνεπώς ισχύει η επόμενη ανισότητα

$$\frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2} \leq \lambda_1 \frac{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2} = \lambda_1 \tag{9}$$

όπου λ_1 είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του $A^T A$ και θα τη συμβολίσουμε ως $\lambda_1\{A^T A\} = \sigma_1\{A\}^2$.
Από τις (7) και (8) προκύπτει ότι η τιμή της $||A||_2^2$ είναι

$$||A||_2^2 = \lambda_1\{A^T A\} \tag{10}$$

και συνεπώς

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_1\{A^T A\}} = \sigma_1\{A\} \tag{11}$$

Στη γενική περίπτωση όπου $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$, η μεγιστοποίηση της ποσότητας $\frac{\lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + ... + \lambda_n c_n^2}{c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2}$ επιτυνχάνεται όταν $x = q_1$ καθώς τότε επιλέγεται $c_1 = 1$ και $c_2, c_3, ..., c_n = 0$.
Μία εκδοχή της απόδειξης μπορείτε επίσης να βρείτε στο βιβλίο του G. Strang, ''Εισαγωγή στη γραμμική άλγεβρα'', κεφάλαιο 9.2 με τίτλο ''Στάθμες και δείκτες κατάστασης'', σελίδα 583.