



# Ασαφής Λογική (*Fuzzy Logic*)

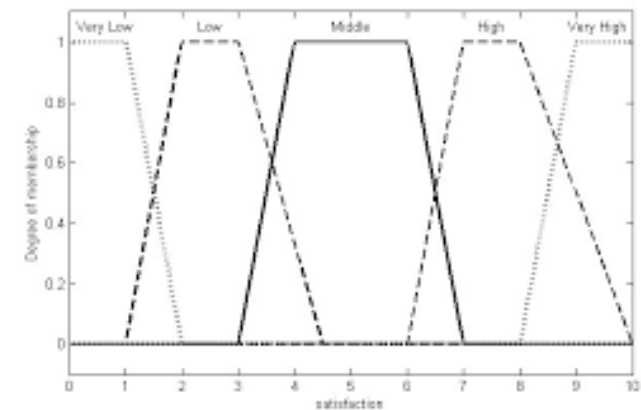
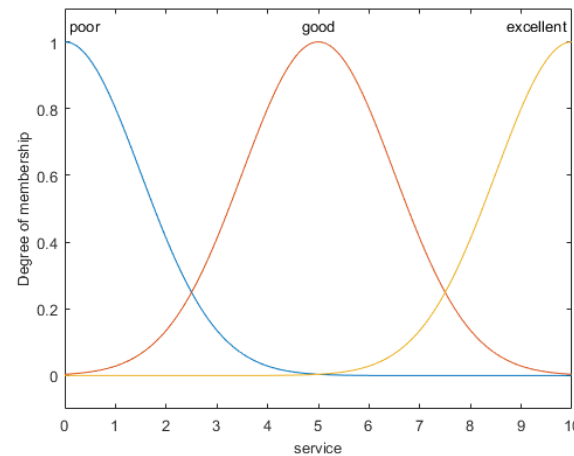
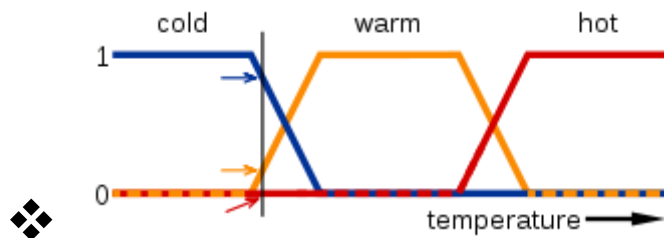
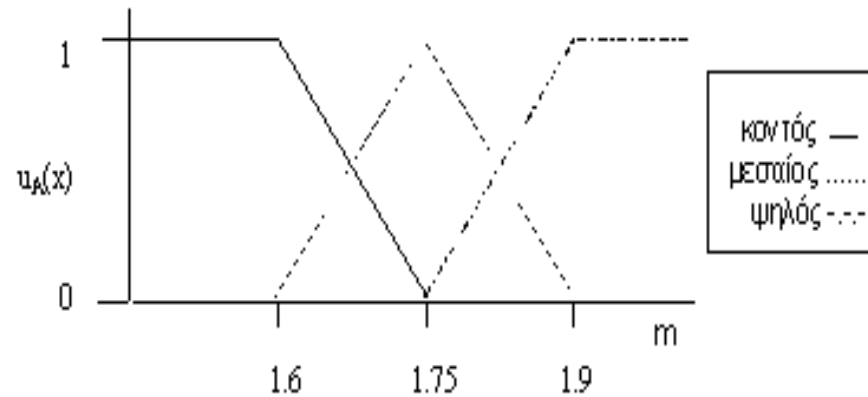
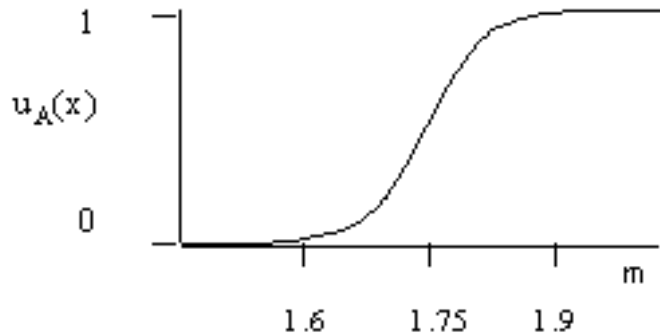
- ❖ Ασάφεια: έννοια που σχετίζεται με την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας και οφείλεται κυρίως σε μη-ακριβή (*imprecise*) δεδομένα.
  - ❑ Π.χ. "Ο Νίκος είναι ψηλός": δεν προσδιορίζεται με ακρίβεια το ύψος, αλλά μπορεί να ληφθούν ορισμένες αποφάσεις για θέματα σχετικά με το ύψος του Νίκου.
- ❖ Το πρόβλημα δεν οφείλεται τόσο στις έννοιες που χρησιμοποιούνται όσο στην αντίληψη που έχει ο καθένας για λεκτικούς προσδιορισμούς ποσοτικών μεγεθών.
- ❖ Παραδείγματα:
  - ❑ Αν θεωρηθεί ότι ψηλός είναι όποιος έχει ύψος πάνω από 1.95 μέτρα, είναι απόλυτα σωστό να θεωρηθεί ότι κάποιος με ύψος 1.94 δεν είναι ψηλός ;
  - ❑ Προσδιορισμός των αντικειμένων που ανήκουν στο σύνολο "καρέκλα" και προσδιορισμός του συνόλου των αντικειμένων που μπορούν να "λειτουργήσουν" ως καρέκλα.
- ❖ Η ασάφεια είναι ένα εγγενές χαρακτηριστικό της γλώσσας και του τρόπου που συλλογιζόμαστε.
- ❖ Η ασαφής λογική (*fuzzy logic*) είναι ένα υπερσύνολο της κλασικής λογικής, η οποία έχει επεκταθεί ώστε να μπορεί να χειριστεί τιμές αληθείας μεταξύ του "απολύτως αληθές" και του "απολύτως ψευδές".
- ❖ Θεωρία Ασαφών Συνόλων (*Fuzzy Set Theory*) - Lofti Zadeh '60

# Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

- ❖ **Ασαφές Σύνολο (fuzzy set)  $A$ :** ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών  $(x, u_A(x))$  όπου  $x \in X$  και  $u_A(x) \in [0,1]$ .
  - ❑ Το σύνολο  $X$  αποτελεί ένα ευρύτερο πεδίο ορισμού (*universe of discourse*) που περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα στα οποία μπορεί να γίνει αναφορά.
  - ❑ Η τιμή  $u_A(x)$  λέγεται *βαθμός συμμετοχής (membership degree)*, συμβολίζει το βαθμό της συμμετοχής του  $x$  στο  $A$  και παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0,1]$ .
  - ❑ Η συνάρτηση  $u_A$  ονομάζεται *συνάρτηση συμμετοχής (membership function)* και στην πράξη μπορεί να προέρχεται από:
    - Υποκειμενικές εκτιμήσεις
    - Συχνότητες εμφανίσεων και πιθανότητες
    - Φυσικές μετρήσεις
    - Διαδικασίες μάθησης και προσαρμογής (συνήθως με νευρωνικά δίκτυα)
- ❖ Η ασαφής θεωρία συνόλων μεταπίπτει στην αντίστοιχη κλασική, όταν οι δυνατές τιμές της συνάρτησης συμμετοχής είναι μόνο 0 και 1 («ανήκει» ή «δεν ανήκει»).

# Αναπαράσταση Ασαφών Συνόλων

❖ **Συνεχή σύνολα:** Μέσω της αναλυτικής έκφρασης της συνάρτησης συμμετοχής τους





- ❖ **Συνεχή σύνολα:** Συνήθης μορφή η *τμηματικά γραμμική απεικόνιση* της συνάρτησης συμμετοχής (τριγωνική, τραπεζοειδής).
- ❖ **Συνεχή σύνολα:** Χρησιμοποιείται επίσης και η μορφή ‘καμπάνας’.
- ❖ **Διακριτά σύνολα:** σύνολο ζευγών της μορφής  $u_A(x)/x$  όπου  $x$  είναι το στοιχείο του συνόλου και  $u_A(x)$  είναι ο βαθμός συμμετοχής του:  
Π.χ. ψηλός =  $\{0/1.7, 0/1.75, 0.33/1.8, 0.66/1.85, 1/1.9, 1/1.95\}$

# Ασαφείς Μεταβλητές και Ασαφείς Αριθμοί

- ❖ *Ασαφής Μεταβλητή (fuzzy variable)*: Μια μεταβλητή της οποίας οι τιμές ορίζονται με ασαφή σύνολα.
  - ❑ Π.χ. τα ασαφή σύνολα {κοντός, μεσαίος, ψηλός} θα μπορούσαν να είναι το πεδίο τιμών της ασαφούς μεταβλητής "ύψος".
  - ❑ Η μεταβλητή "ύψος" χαρακτηρίζεται και ως *λεκτική (linguistic)* μεταβλητή.
- ❖ Από ένα μικρό αρχικό αριθμό πρωταρχικών λεκτικών τιμών, να προκύψει ένας πολύ μεγαλύτερος αριθμός *σύνθετων λεκτικών τιμών* με τη χρήση *λεκτικών τελεστών* όπως AND, OR, NOT κλπ.

Τελεστές	Συνάρτηση Συμμετοχής
A AND B (τομή)	$u_{A \text{ AND } B}(x) = \min(u_A(x), u_B(x))$
A OR B (ένωση)	$u_{A \text{ OR } B}(x) = \max(u_A(x), u_B(x))$
NOT A (συμπλήρωμα)	$u_{\text{NOT } A}(x) = [1 - u_A(x)]$

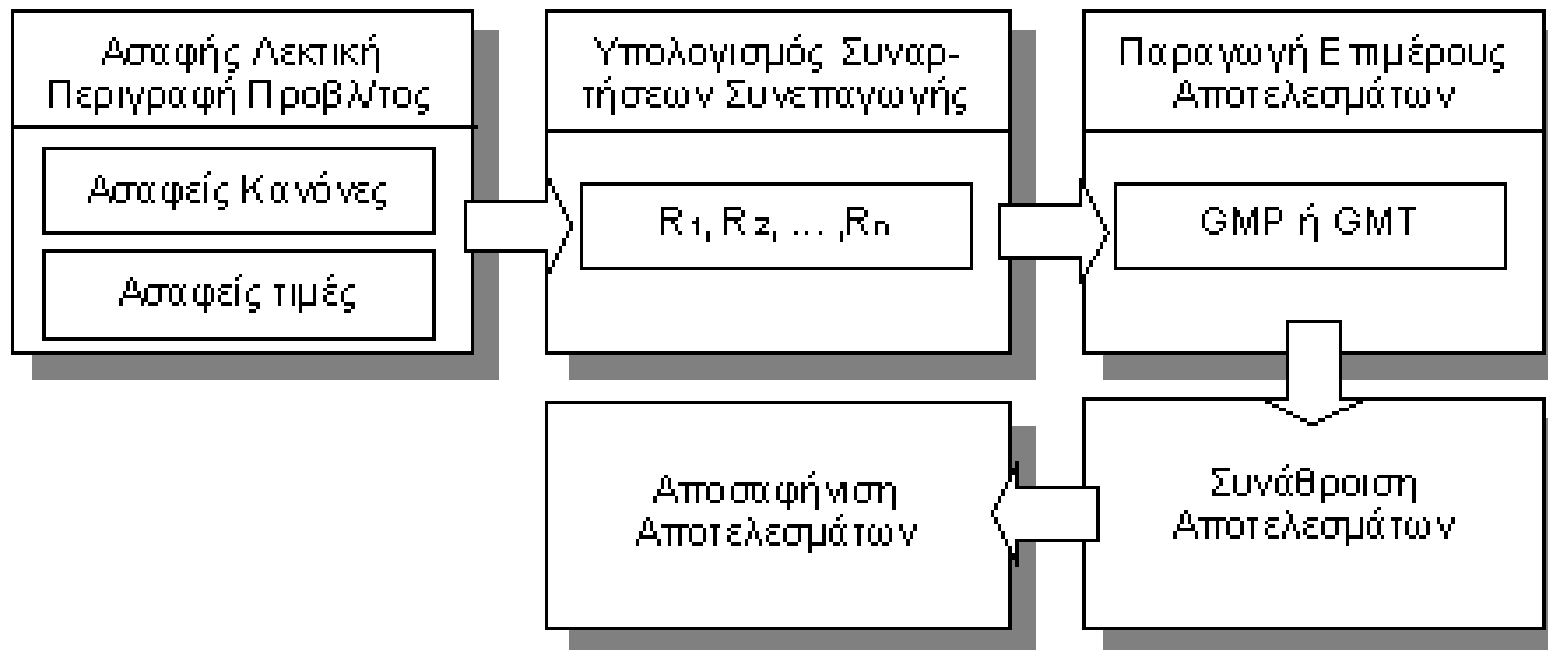
- ❖ *Ασαφείς αριθμοί (fuzzy numbers)*: ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Π.χ. "Ασαφές 3"
- ❖ Οι μη ασαφείς τιμές αποκαλούνται *crisp* (σαφείς, συγκεκριμένες) και έχουν βαθμό συμμετοχής 1.

# Ασαφείς Προτάσεις και Ασαφείς Κανόνες

- ❖ *Ασαφής πρόταση* είναι αυτή που θέτει μια τιμή σε μια γλωσσική μεταβλητή.
  - ❑ **Παράδειγμα:** στην ασαφή πρόταση "Το ύψος του Νίκου είναι μέτριο", το "ύψος" είναι η γλωσσική μεταβλητή και "μέτριο" είναι η ασαφής τιμή της.
  - ❑ **Ο συνδυασμός μιας γλωσσικής μεταβλητής με την ασαφή τιμή της (ασαφής πρόταση) ορίζουν ένα ασαφές σύνολο.**
- ❖ *Ασαφής κανόνας (fuzzy rule):* είναι μία υπό συνθήκη έκφραση που συσχετίζει δύο ή περισσότερες ασαφείς προτάσεις.
  - ❑ Παράδειγμα #1 (στην πιο απλή εκδοχή): "if x is A then y is B"
  - ❑ Παράδειγμα #2: "Εάν η ταχύτητα είναι μέτρια τότε η πίεση στα φρένα να είναι μέτρια"
    - τα "ταχύτητα" και "πίεση" είναι οι ασαφείς μεταβλητές
    - το "μέτρια" είναι η τιμή των ασαφών μεταβλητών "ταχύτητα" και "πίεση".

# Ασαφής Συλλογιστική

- ❖ Αφορά την εξαγωγή συμπερασμάτων (ενδεχομένως σε ασαφή μορφή) με χρήση ασαφών κανόνων.





❖ Δοθέντων των τιμών για τις μεταβλητές στις συνθήκες των κανόνων περιλαμβάνει τα εξής **στάδια**:

- ❑ Υπολογισμός των βαθμών συμμετοχής στα ασαφή σύνολα για κάθε εμπλεκόμενο κανόνα.
- ❑ Υπολογισμός της **βαρύτητας**  $w_i$  κάθε κανόνα  $R_i$ : **ο ελάχιστος μεταξύ των βαθμών συμμετοχής στις συνθήκες του  $R_i$ .**
- ❑ Τροποποίηση της συνάρτησης συμμετοχής  $u_i(z)$  για τη μεταβλητή  $Z$  στο συμπέρασμα ενός κανόνα  $R_i$ :

$$u_i^*(z) = \mathbf{min}(u_i(z), w_i)$$

- ❑ Συνάθροιση των επιμέρους αποτελεσμάτων για τη μεταβλητή  $Z$  που προκύπτουν από κάθε κανόνα:

$$m(z) = \mathbf{max}_i(u_i^*(z))$$

- ❑ Αποασαφοποίηση (defuzzification) των αποτελεσμάτων (προαιρετικό). Δοθείσης της συνάρτησης συμμετοχής  $m(z)$  υπολογίζουμε μια αντιπροσωπευτική αριθμητική τιμή.



## Παράδειγμα Προβλήματος Ασαφούς Συλλογιστικής (1/2)

- Έστω ένα σύστημα ασαφούς συλλογιστικής που ρυθμίζει τη δόση  $D$  μιας φαρμακευτικής ουσίας που πρέπει να χορηγηθεί σε ασθενή, με βάση τη θερμοκρασία του  $T$ .
- Έστω ότι το σύστημα βασίζεται στους εξής δύο ασαφείς κανόνες:

$K_1$ : if  $T$  is HIGH then  $D$  is HIGH

$K_2$ : if  $T$  is LOW then  $D$  is LOW

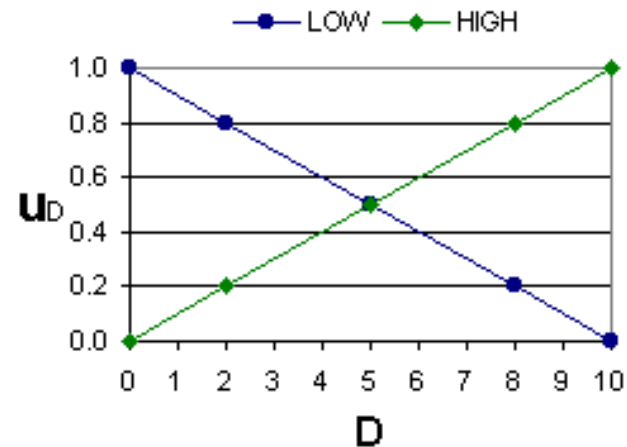
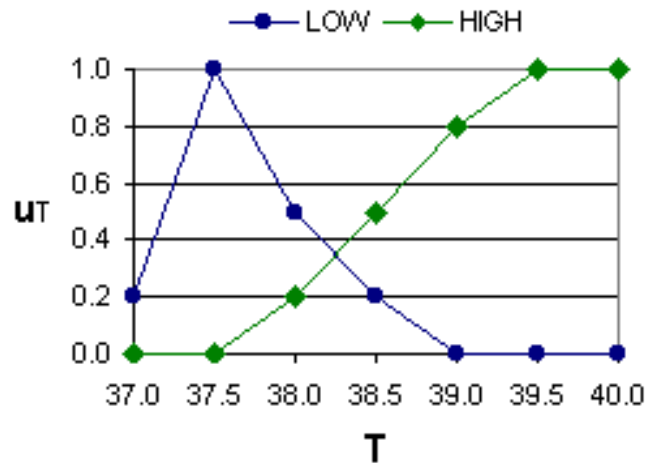
- Δίνονται επίσης τα ασαφή σύνολα HIGH και LOW για τα μεγέθη  $T$  και  $D$ :

$$T_{\text{LOW}} = \{ 0.2/37, 1/37.5, 0.5/38, 0.2/38.5, 0/39, 0/39.5, 0/40 \}$$

$$T_{\text{HIGH}} = \{ 0/37, 0/37.5, 0.2/38, 0.5/38.5, 0.8/39, 1/39.5, 1/40 \}$$

$$D_{\text{LOW}} = \{ 1/0, 0.8/2, 0.5/5, 0.2/8, 0/10 \}$$

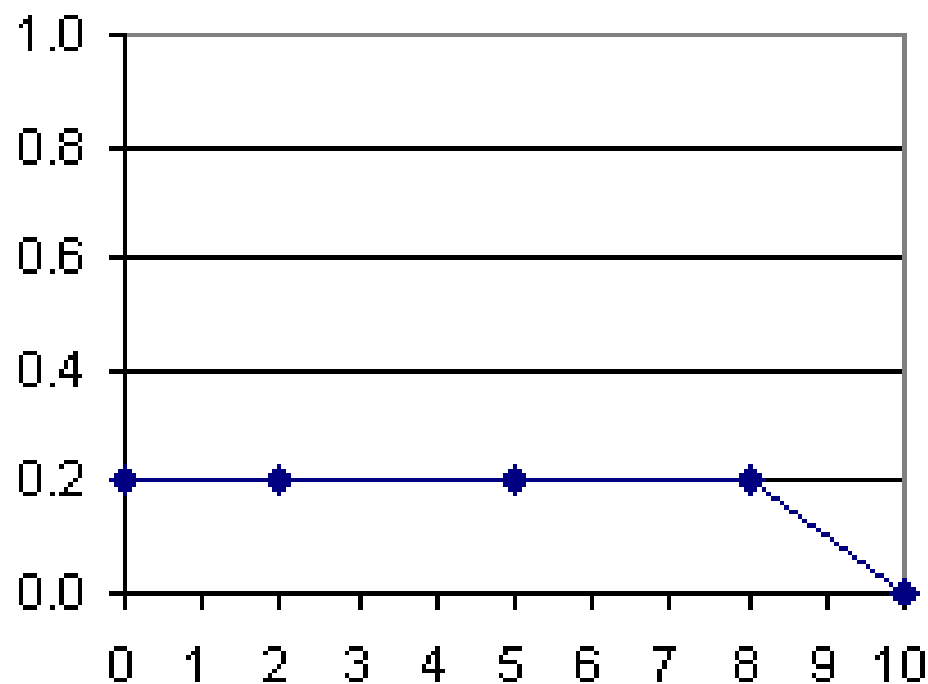
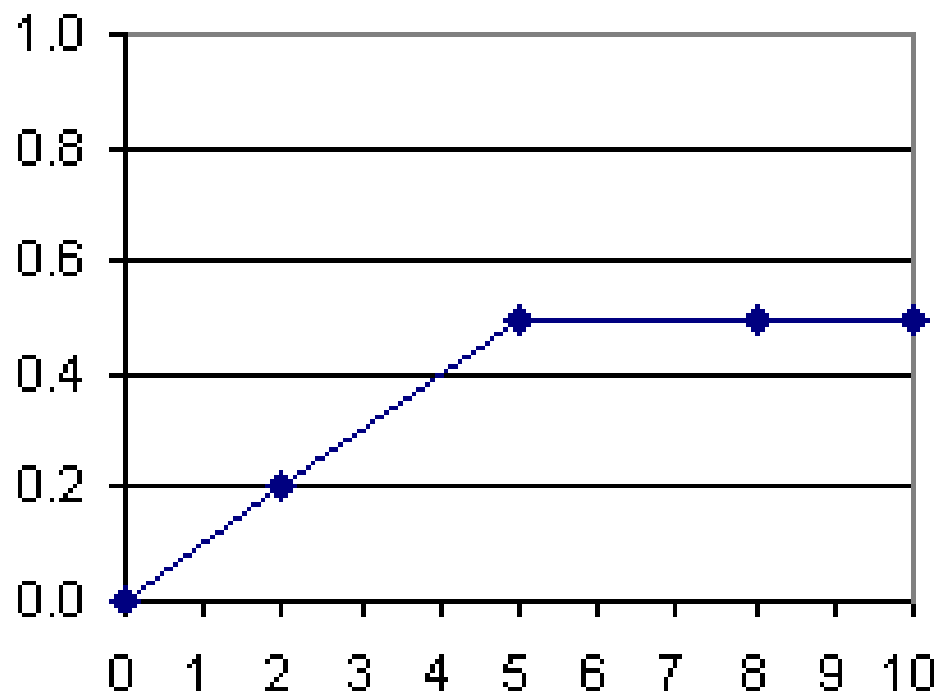
$$D_{\text{HIGH}} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.8/8, 1/10 \}$$



- Αν  $T'=38.5$ , να υπολογιστεί η τιμή του  $D'$ .



- ❑ Βαρύτητες Κανόνων  $R_1$ :  $w_1=0.5$ ,  $R_2$ :  $w_2=0.2$
- ❑ Τροποποίηση συναρτήσεων συμμετοχής για τα D των κανόνων:  $D'_{K1}$  (αριστερά),  $D'_{K2}$  (δεξιά).

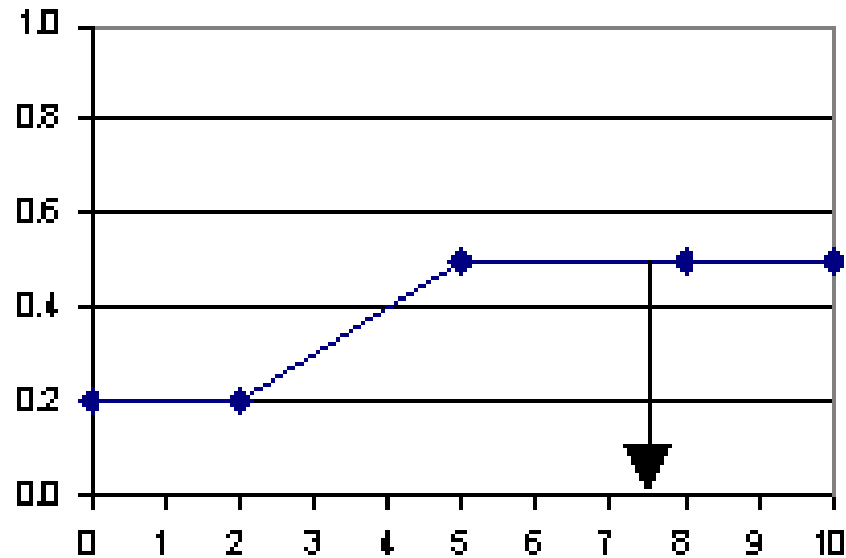


❑  $D'_{K1} = \{ 0/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \}$

$D'_{K2} = \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.2/5, 0.2/8, 0/10 \}$

Η συνάθροισή τους κατά *MAX* δίνει

$$D' = \{ \max(0, 0.2)/0, \max(0.2, 0.2)/2, \max(0.5, 0.2)/5, \max(0.5, 0.2)/8, \max(0.5, 0)/10 \} = \\ = \{ 0.2/0, 0.2/2, 0.5/5, 0.5/8, 0.5/10 \} \text{ (ασαφές σύνολο)}$$

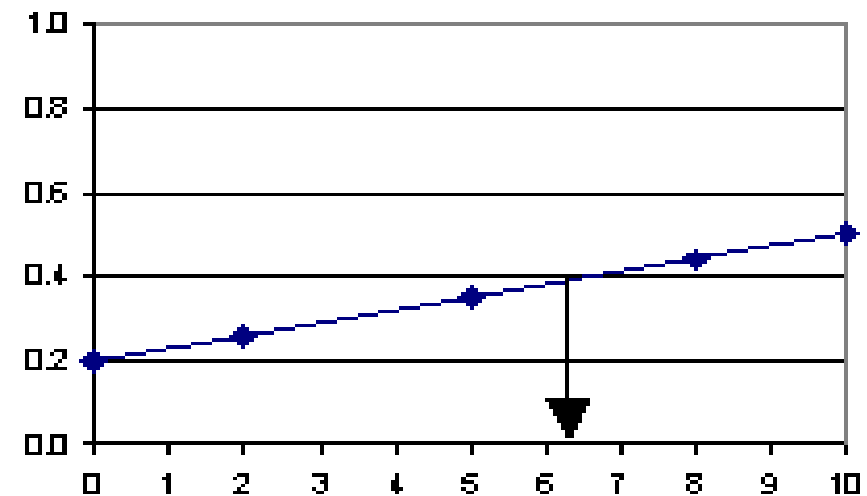


- ❑ Αποασαφοποίηση με MAXIMUM: Η διακριτή τιμή είναι αυτή που αντιστοιχεί στη **μέγιστη** τιμή της συνάρτησης συμμετοχής του τελικού αποτελέσματος.
- ❑ Αν υπάρχουν περισσότερες από μία τέτοιες **μέγιστες** τιμές, τότε λαμβάνεται ο μέσος όρος τους (average-of-maxima).
- ❑ Χρησιμοποιώντας average-of-maxima προκύπτει η **αριθμητική τιμή**:  $D' = (5+8+10)/3 = 7.7$

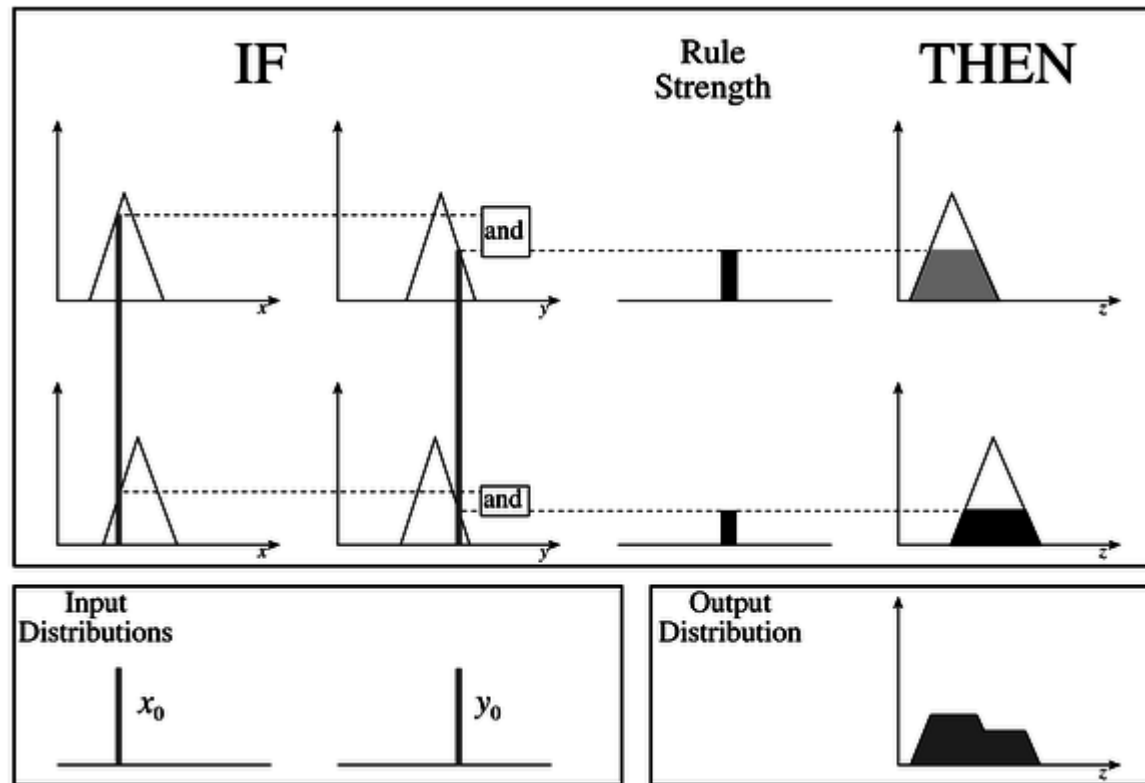
- ❑ Εναλλακτικά, μπορεί η αποασαφοποίηση να γίνει με τη μέθοδο CENTROID: η τιμή είναι αυτή που προκύπτει από το **κέντρο βάρους** της τελικής συνάρτησης συμμετοχής για την ασαφή παράμετρο εξόδου.
- ❑ Το κέντρο βάρους μιας επιφάνειας που ορίζεται από μία συνάρτηση  $u(t)$  και τους καρτεσιανούς άξονες, βρίσκεται στη θέση  $t_c$  που ορίζεται από τη γενική σχέση:

$$t_c = \frac{\int t \cdot u(t) dt}{\int u(t) dt}$$

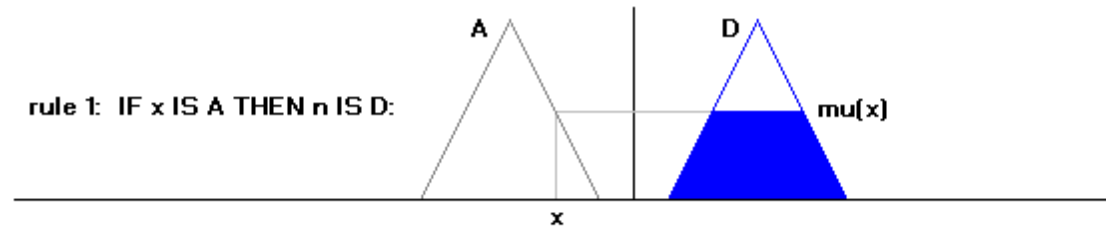
- ❑ Στην περίπτωση διακριτού συνόλου αναφοράς με  $N$  τιμές, τα ολοκληρώματα αντικαθίστανται με διακριτό άθροισμα  $N$  σημείων.



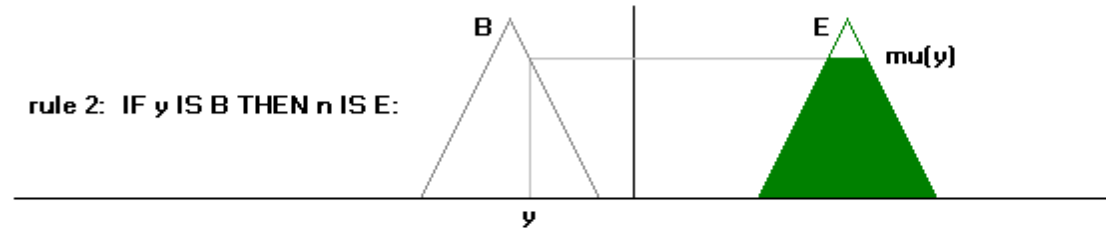
$$t_c = \frac{\sum t \cdot u_t}{\sum u_t} = \frac{0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.26 + 5 \cdot 0.35 + 8 \cdot 0.44 + 10 \cdot 0.5}{0.2 + 0.26 + 0.35 + 0.44 + 0.5} = 6.2$$



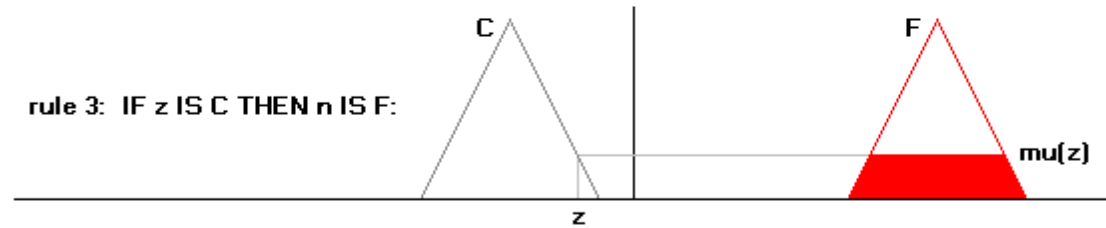
rule 1: IF  $x$  IS A THEN  $n$  IS D:



rule 2: IF  $y$  IS B THEN  $n$  IS E:

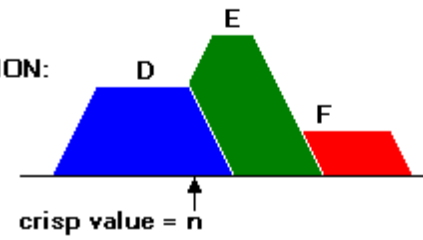


rule 3: IF  $z$  IS C THEN  $n$  IS F:



DEFUZZIFICATION:

CENTROID DEFUZZIFICATION  
USING MAX-MIN INFERENCE





# Εφαρμογές Ασαφούς Λογικής

- ❖ Σύστημα Linkman (ιστορικά η πρώτη εφαρμογή): έλεγχε την μίξη των υλικών και την κατεργασία τους σε περιστρεφόμενο κλίβανο, σε βιομηχανίες παραγωγής τσιμέντου (σε χρήση και στην Ελλάδα).
- ❖ Ο υπόγειος σιδηρόδρομος Sendai στην Ιαπωνία: έλεγχος ρυθμού επιτάχυνσης και επιβράδυνσης των συρμών, κλπ.
- ❖ Φωτογραφικές μηχανές που εστιάζουν και ρυθμίζουν το χρόνο έκθεσης αυτόματα.
- ❖ Πλυντήρια ρούχων που αποφασίζουν μόνα τους το πρόγραμμα πλύσης ανάλογα με την ποσότητα ρούχων, το πόσο βρώμικα είναι και την ποιότητα του νερού.
- ❖ Συσκευές video-camera: για συνεχή εστίαση αλλά και σταθεροποίηση της εικόνας.
- ❖ Ασαφή συστήματα πέδησης (fuzzy ABS) και μετάδοσης κίνησης σε αυτοκίνητα.
- ❖ Ασαφή συστήματα ελέγχου λαβής σε ρομποτικούς βραχίονες.
- ❖ Ασαφείς συσκευές κλιματισμού.
- ❖ Ασαφείς βαλβίδες για έλεγχο ροής.
- ❖ Ασαφή συστήματα κατανομής καυσίμου ανάλογα με το φάκελο πτήσης σε δεξαμενές πολεμικών αεροσκαφών.
- ❖ Έμπειρα συστήματα για οικονομικές εφαρμογές (χρηματιστήριο) με ασαφείς κανόνες.