

Problem 3

Kostiantyn Skopych

April 2021

1 Wstęp

Zwykła metoda całkowania Monte Carlo polega na rozważaniu całki jako pola pod wykresem funkcji. Dla wprowadzenia w temat całkowania w liceum lub na pierwszym semestrze studiów była podana taka metoda: rozbijamy pole pod wykresem funkcji na pewną ilość pasków prostokątnych. Oczywiście, paski nie idealnie pokrywają pole, jednak zwiększenie ilości pasków zwiększa dokładność całki. Następnie liczymy pole każdego z tych słupków. Podstawa będzie ustalona z góry w zależności od ilości słupków na przedziale całkowania, a wysokościami będą wartości funkcji w odpowiednich miejscach. Dodając te pola otrzymujemy przybliżoną wartość całki. Metoda Monte Carlo jest w pewnym sensie podobna, tylko że opiera się na rachunku prawdopodobieństwa.

Chcemy policzyć całkę $\int_a^b f(x) dx$. Rozpatrzmy zmienną losową u o rozkładzie równomiernym na przedziale całkowania $[a, b]$. Wtedy $f(u)$ też jest zmienną losową, a jej wartość oczekiwana wuraża się wzorem:

$$\mathbb{E}f(u) = \int_a^b f(x)\phi(x) dx$$

, gdzie $\phi(x)$ to gęstość rozkładu u , która się równa $\frac{1}{b-a}$ na przedziale $[a, b]$. Wtedy naszą całkę wyrażamy w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\mathbb{E}f(u)$$

Wartość oczekiwana zmiennej $f(u)$ jest łatwa do obliczenia. Modelujemy daną zmienną losową i liczymy średnią. Zatem metoda Monte Carlo wygląda następująco: najpierw losujemy N kropek z rozkładu jednostajnego na przedziale (a, b) . Dla każdej kropki u_i obliczamy $f(u_i)$. Dalej obliczamy średnią: $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i)$. Na końcu dostajemy przybliżenie całki:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(u_i)$$

. Dokładność przybliżenia zależy od ilości N prób Monte Carlo, czyli kropek wylosowanych.

2 Sformułowanie i rozwiązanie problemu

Problem polega na uogólnieniu metody całkowania numerycznego Monte Carlo do funkcji w \mathbb{R}^d . Tutaj będziemy mieli sprawę z całkowaniem po obszarach, co trochę zmieni algorytm, ale ogólnie postanowiłem użyć takiej samej metody. Pierwszym krokiem jest ograniczenie m-wymierowego prostopadłościanu, który zawiera nasz obszar całkowania. Taki prostopadłościan będzie analogiczny do przedziału całkowania $[a,b]$ w powyżej opisanej metodzie. W drugim kroku też losujemy N kropek z tego prostopadłościanu. Każda współrzędna takiej kropki będzie z rozkładu jednostajnego $U(a,b)$ gdzie $[a,b]$ będzie przedziałem odpowiedniego wymiaru naszego prostopadłościanu. Nowym krokiem, który będzie odróżniał się od klasycznej metody będzie sprawdzanie, czy należą wylosowane kropki do obszaru całkowania. Przechowujemy tylko kropki, które należą. Pod koniec używamy podobnej formuły do oszacowania całki, ale z pewną różnicą.

$$I \approx \frac{V}{N} \sum_{i=1}^n F(M_i)$$

, gdzie

V to m-wymierowa objętość naszego m-wymierowego prostopadłościanu

N to liczba kropek wylosowanych (ilość prób Monte Carlo)

n to ilość kropek należących do obszaru całkowania

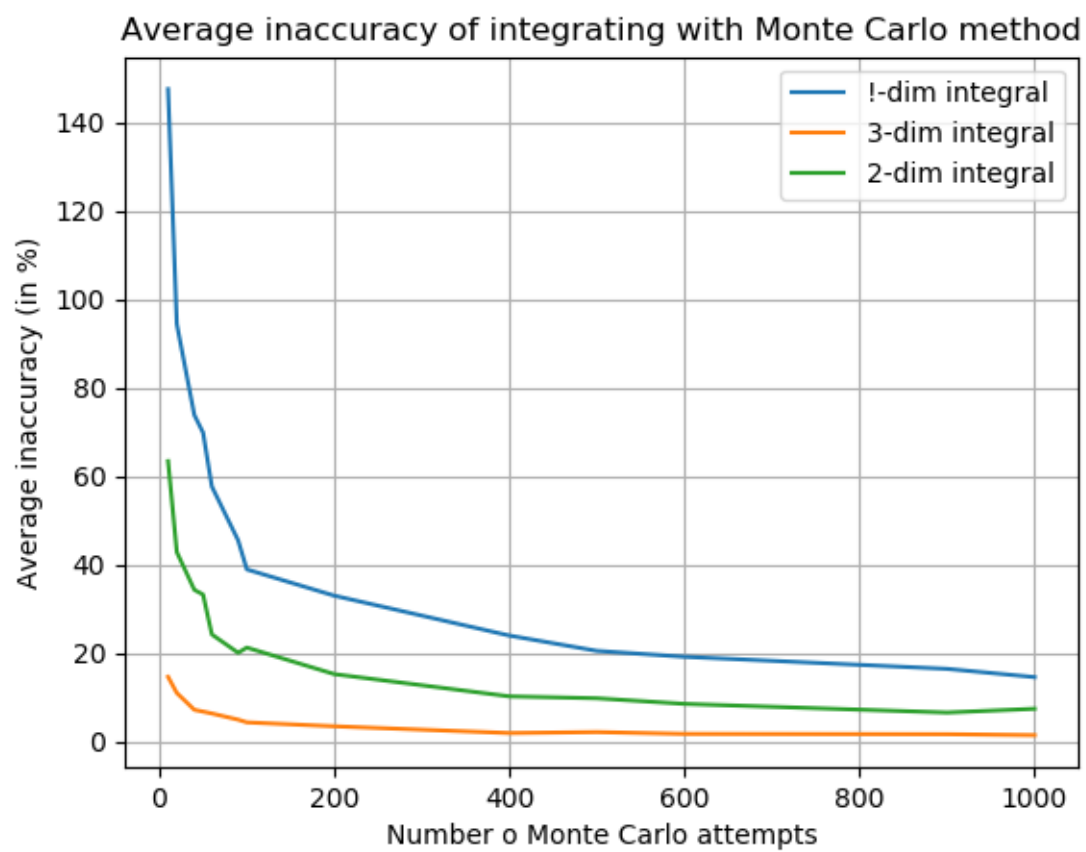
F to funkcja podcałkowa

M_i to kolejne kropki należące do obszaru całkowania.

Jak widać nowa metoda jest całkiem oparta na podstawowej metodzie całkowania. Są zrobione tylko pewne modyfikacje w celu uogólnienia tej metody dla funkcji wielowymiarowych.

3 Wyniki

Głównym wynikiem rozwiązania problemu jest program obliczający numerycznie całkę funkcji wielowymiarowych. Prezentacja działania tego programu składa się z dwóch części. Na rozsądnie wybranych przykładach został przeanalizowany rozkład średniego błędu oszacowania w zależności od wymiaru funkcji i liczby prób Monte Carlo. Wyniki są przedstawione poniżej. Błąd jest podany w procentach.



Rysunek 1: Zależność błędu od ilości prób Monte Carlo

Drugą częścią jest obliczanie całki podanej w treści problemu:

$$\int_{\mathbb{R}_3} \sqrt{|x+y+z|} e^{-x^2-y^2-z^2} dz dy dz$$

. Otrzymanie prawidłowego wyniku dla porównania z wynikiem metody jest bardzo trudne na całym \mathbb{R}_3 . Nawet takie narzędzie jak WolframAlpha nie potrafiło obliczyć tej całki. Ponieważ nie udało się znaleźć narzędzia które dałoby oczekiwany wynik, podjęto decyzję obliczyć daną całkę na mniejszym przedziale. Został wybrany przedział $[0,10]$ dla każdej zmiennej x,y,z . Wolfram podał wynik całki na danych przedziałach: 0.88287. Przeprowadzenie 10^6 powtórzeń oszacowania całki 1000 prób Monte Carlo zajmowało bardzo dużo czasu i nie dało żadnego wyniku, więc stwierdziłem że mniejsza ilość powtórzeń będzie wystarczająca dla oszacowania błędu bezwzględnego i przeprowadziłem 1000 powtórzeń. Na podstawie tych obliczeń oszacowano błąd bezwzględny oszacowania danej całki metodą Monte Carlo dla 1000 prób. Błąd ten wynosi 0.444.

4 Wnioski

Rozwiązanie tego problemu było dobrym doświadczeniem i jest fajnym przykładem tego, jak można łatwo uogólnić metodę matematyczną i zastosować ją do większego obszaru problemów. Metoda Monte Carlo jest wydajna, jednak jej efektywność zmniejsza się ze zwiększeniem ilości wymiarów funkcji. Ważniejszym wnioskiem jest to, że skuteczność metody Monte Carlo zależy od ilości prób Monte Carlo. To dobrze widać na wszystkich przykładach. Patrząc na to, jak ogromny błąd wyszedł przy policzeniu ostatniej całki można z całą pewnością stwierdzić, że 1000 prób Monte Carlo jest za małą liczbą dla obliczania takich trudnych całek z funkcji trzeczwymiarowej. Podalsze rozwijanie problemu może polegać na ulepszeniu metody całkowania i zwiększeniu dokładności oraz zwiększeniu wydajności programu, ponieważ obliczenia dla dużych ilości prób zajmują bardzo dużo czasu, chociaż były wykonywane na laptopie ze słabym procesorem.