

Julia Hruświcka, Kostiantyn Skopych

Sprawozdanie II

Grupa 03

Cele badania

Głównym celem badania w tym projekcie jest porównanie działania trzech testów statystycznych: z testu, testu t studenta oraz testu rang znakowanych Wilcoxona przy testowaniu średniej dla jednej próby. Też chcemy sprawdzić jak zachowują się te testy przy niespełnieniu ich założeń. Badanie przeprowadzimy za pomocą porównania funkcji mocy testów.

Opis założeń teoretycznych

1. Rozważamy testy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.
2. $H_0: \mu = 1$
3. $H_1: \mu \neq 1$
4. Testy stosowane:
 - test z przy założeniu $\sigma = 2$
 - test t-Studenta
 - test rang znakowanych Wilcoxona
5. Wykresy funkcji mocy będą naszkicowane na przedziale $(-1,3)$ parametru μ .
6. Ilość wykonanych powtórzeń Monte Carlo

Dla 1 zadania: 10000

Dla 2 zadania: 5000

Dla 3 zadania: 1000

7. Założenia o rozkładach próby w zadaniach

Zadanie 1: próba (X_1, \dots, X_{100}) z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 2^2)$

Zadanie 2: próba (X_1, \dots, X_{100}) z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 4^2)$

Zadanie 3: próba (X_1, \dots, X_{100}) z rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}(1/\mu)$

Zadanie 1

Rozważmy próbę (X_1, \dots, X_{100}) z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 2^2)$. Korzystając z symulacji Monte Carlo wykonaj wykres funkcji mocy w zależności od μ na przedziale $(-1, 3)$ dla wszystkich trzech testów. Czy istnieje test jednostajnie najmocniejszy spośród nich?

```
library(BSDA)
```

```
srednie <- seq(-1,3,by=0.02)
```

```
alpha <- 0.05
```

```
n = 100
```

```
mu0 <- 1
```

```
N <- 10000
```

```
ztest <- function(mu, normstd){
```

```
  x = rnorm(n,mu,normstd)
```

```
  pvalue <- z.test(x, mu=mu0, sigma.x=2, conf.level=alpha)$p.value
```

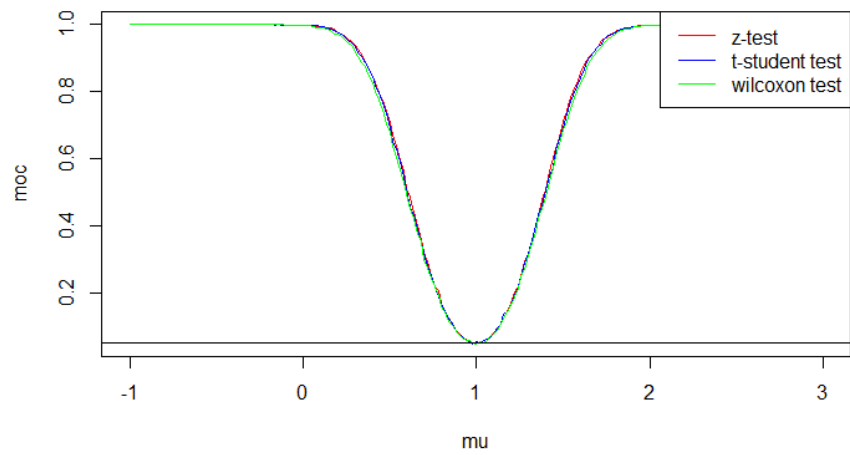
```

    return(pvalue)
  }
monte_ztest1 <- function(mu){
  values <- replicate(N,ztest(mu, 2))
  return(sum(values<alpha)/N)
}
monte_ztest2 <- function(mu){
  values <- replicate(N,ztest(mu, 4))
  return(sum(values<alpha)/N)
}
tstudent <- function(mu, normstd){
  x = rnorm(n,mu,normstd)
  pvalue <- t.test(x, mu=mu0, conf.level=alpha)$p.value
  return(pvalue)
}
monte_tstudent1 <- function(mu){
  values <- replicate(N, tstudent(mu, 2))
  return(sum(values<alpha)/N)
}
monte_tstudent2 <- function(mu){
  values <- replicate(N, tstudent(mu, 4))
  return(sum(values<alpha)/N)
}
wilcoxon <- function(mu,normstd){
  x = rnorm(n,mu,normstd)
  pvalue <- wilcox.test(x,mu=mu0, conf.level=alpha)$p.value
  return(pvalue)
}
monte_wilcoxon1 <- function(mu){
  values <- replicate(N,wilcoxon(mu,2))
  return(sum(values<alpha)/N)
}
monte_wilcoxon2 <- function(mu){
  values <- replicate(N,wilcoxon(mu,4))
  return(sum(values<alpha)/N)
}

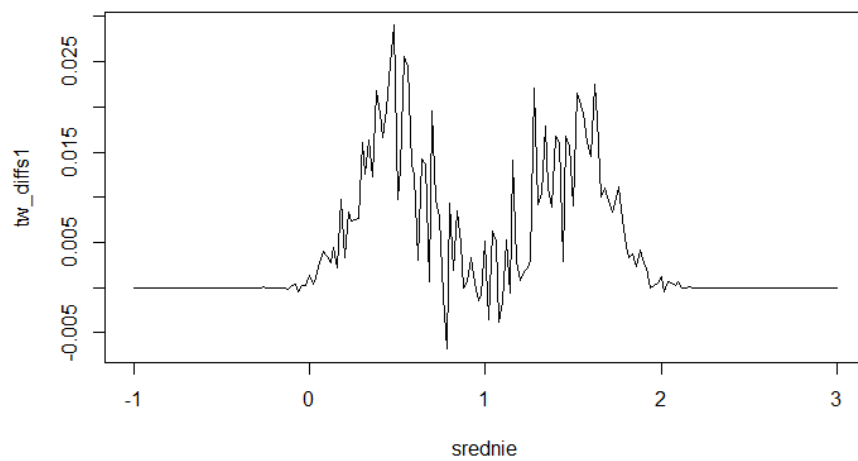
start <- Sys.time()
ztest1_pows <- sapply(srednie, monte_ztest1)
plot(srednie,ztest1_pows,type="l", main='Funkcje mocy dla N(mu, 2^2)', xlab='mu',
     ylab='moc', col='red')
tstudent1_pows <- sapply(srednie, monte_tstudent1)
lines(srednie,tstudent1_pows, type='l', col='blue')
wilcoxon1_pows <- sapply(srednie, monte_wilcoxon1)
lines(srednie, wilcoxon1_pows, type='l,col='green')
abline(h=alpha)
legend(x='topright', legend=c('z-test', 't-student test', 'wilcoxon test'),
      col=c('red','blue', 'green'),lty=1)
zt_diffs1 <- ztest1_pows-tstudent1_pows
plot(srednie,zt_diffs1, type='l', main='Roznice mocy z testu i testu t studenta')
tw_diffs1 <- tstudent1_pows-wilcoxon1_pows
plot(srednie,tw_diffs1, type='l', main='Roznice mocy testu t studenta i testu Wilcoxona')
end <- Sys.time()
end-start

```

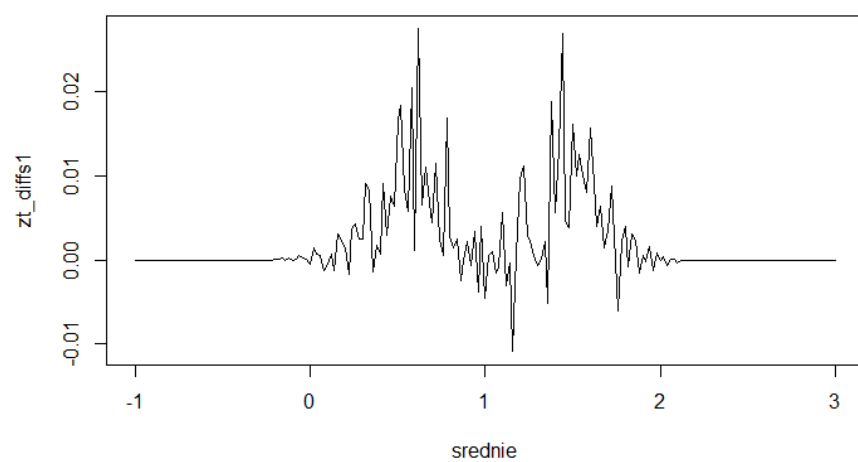
Funkcje mocy dla $N(\mu, 2^2)$



Roznice mocy testu t studenta i testu Wilcoxona



Roznice mocy z testu i testu t studenta



Wnioski

Na początku mamy próbę z rozkładu normalnego ze znaną wariancją. Z wykresu funkcji mocy dla trzech rozważanych testów widać że wszystkie trzy testy trzymają poziom istotności i ich funkcje mocy niemal że nakładają się na siebie.

Stąd trudno wnioskować o tym który z testów jest najmocniejszy. Dlatego wykonamy wykresy różnic mocy tych testów.

Na pierwszym wykresie widzimy różnice funkcji mocy dla testu t-Studenta i testu Wilcoxona. Widać że test t-Studenta ma większą moc niż test Wilcoxona na całym przedziale poza jednym punktem alternatywy (który prawdopodobnie pojawił się losowo) oraz poza punktami skupiającymi się wokół wartości μ_0 .

Następnie rozważamy wykres który dotyczy różnicy między funkcjami mocy testu z oraz testu t-Studenta. Widzimy że blisko wartości μ z hipotezy zerowej ta różnica kręci się wokół zera. Natomiast dla alternatyw test z jest widocznie mocniejszy na całym przedziale. Istnieją pojedyncze punkty w których różnica jest mniejsza od zera. Jednak zakładamy że są one spowodowane niedokładnością metody empirycznej i wykonanie tego porównania dla większej ilości powtórzeń

Monte Carlo pokaże nam że test z jest jednostajnie najmocniejszy wśród tych trzech testów.

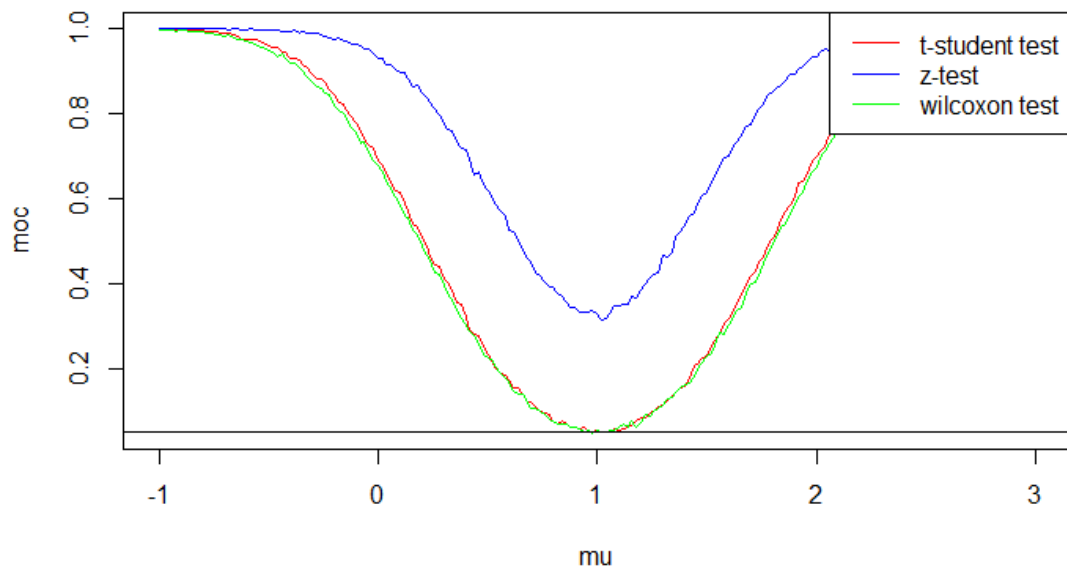
Zadanie 2

Rozważmy próbę (X_1, \dots, X_{100}) z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, 4^2)$. Wykonaj wykres funkcji mocy na wybranym przedziale zawierającym przynajmniej po jednym punkcie z hipotezy zerowej i alternatywnej. Jak zmieniała się funkcja mocy testów? Czy w tym przypadku istnieje test jednostajnie najmocniejszy spośród nich?

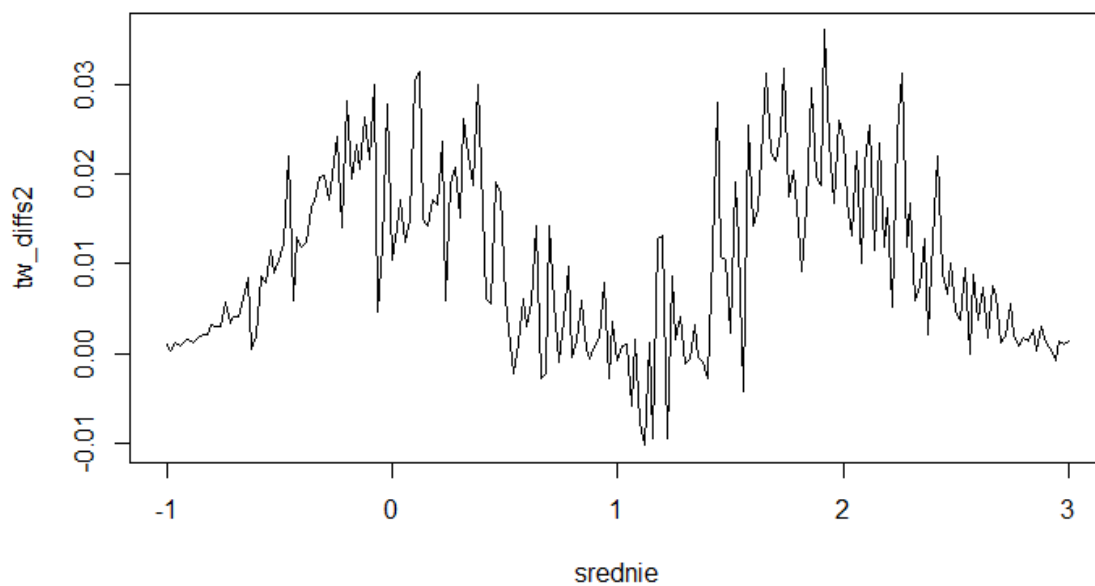
```
ztest2_pows <- sapply(srednie, monte_ztest2)
tstudent2_pows <- sapply(srednie, monte_tstudent2)
plot(srednie, tstudent2_pows, type="l", main='Funkcje mocy dla N(mu, 4^2)', xlab='mu',
     ylab='moc', col='red')

lines(srednie, ztest2_pows, type='l', col='blue')
wilcoxon2_pows <- sapply(srednie, monte_wilcoxon2)
lines(srednie, wilcoxon2_pows, type='l', col='green')
abline(h=alpha)
legend(x='topright', legend=c('t-student test', 'z-test', 'wilcoxon test'),
      col=c('red', 'blue', 'green'), lty=1)
tw_diffs2 <- tstudent2_pows - wilcoxon2_pows
plot(srednie, tw_diffs2, type='l', main='Roznice mocy testu t studenta i testu Wilcoxona')
```

Funkcje mocy dla $N(\mu, 4^2)$



Roznice mocy testu t studenta i testu Wilcoxona



Wnioski

Nasza próba nie spełniała założenia o wariancji dla testu z. W skutku tego widzimy, że test z już nie trzyma zadanego poziomu istotności, czyli będzie prowadził do dużej ilości błędów. Widać to z wykresu, ponieważ funkcja mocy testu z nie osiąga wartości α w tym punkcie, gdzie rzeczywisty parametr μ jest równy parametrowi z hipotezy zerowej H_0 . Natomiast testy t-studenta oraz Wilcoxona trzymają poziom istotności i ich wykresy wyglądają dość podobnie i są blisko siebie.

Mimo to wydaje się, że test t-studenta jest mocniejszy. Żeby sprawdzić czy rzeczywiście tak jest wykonujemy wykres różnic mocy tych testów. Widzimy że blisko wartości z H_0 ta różnica około zera, czasem nawet trochę poniżej zera. Takie zachowanie wokół wartości z H_0 jest oczekiwane, a niedokładności prawdopodobnie wynikają z niewystarczającej ilości powtórzeń Monte Carlo. Natomiast dla 'wszystkich' ('wszystkie' tutaj jest przybliżeniem wynikającym z niedokładności metody empirycznej) alternatyw widzimy, że test t studenta ma większą moc. Stąd możemy stwierdzić że w przypadku próby z rozkładu normalnego z 'nieznana' wariancją (tutaj 'nieznana' oznacza niespełniająca nasze założenie o wariancji. Oczywiście do porównania empirycznego musieliśmy użyć konkretnej wartości wariancji) test t-Studenta jest jednostajnie najmocniejszy.

Zadanie 3

Rozważmy próbę (X_1, \dots, X_{100}) z rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}(1/\mu)$. Wykonaj wykres funkcji mocy na wybranym przedziale zawierającym przynajmniej po jednym punkcie z hipotezy zerowej i alternatywnej. Jak zmieniała się funkcja mocy testów? Czy w tym przypadku istnieje test jednostajnie najmocniejszy spośród nich?

```
library(BSDA)

srednie <- seq(-1,3,by=0.02)
alpha <- 0.05
n = 100
mu0 <- 1
N <- 1000

ztest2_pows <- sapply(srednie, monte_ztest2)
tstudent2_pows <- sapply(srednie, monte_tstudent2)
plot(srednie,tstudent2_pows,type="l", main='Funkcje mocy dla E(1/mu)', xlab='mu',
     ylab='moc', col='red')

lines(srednie,ztest2_pows, type='l', col='blue')
wilcoxon2_pows <- sapply(srednie, monte_wilcoxon2)
lines(srednie, wilcoxon2_pows, type='l',col='green')
abline(h=alpha)
legend(x='topright', legend=c('t-student test', 'z-test','wilcoxon test'),
      col=c('red','blue', 'green'),lty=1)
tw_diffs2 <- tstudent2_pows-wilcoxon2_pows
plot(srednie,tw_diffs2, type='l', main='Roznice mocy testu t studenta i testu Wilcoxona')

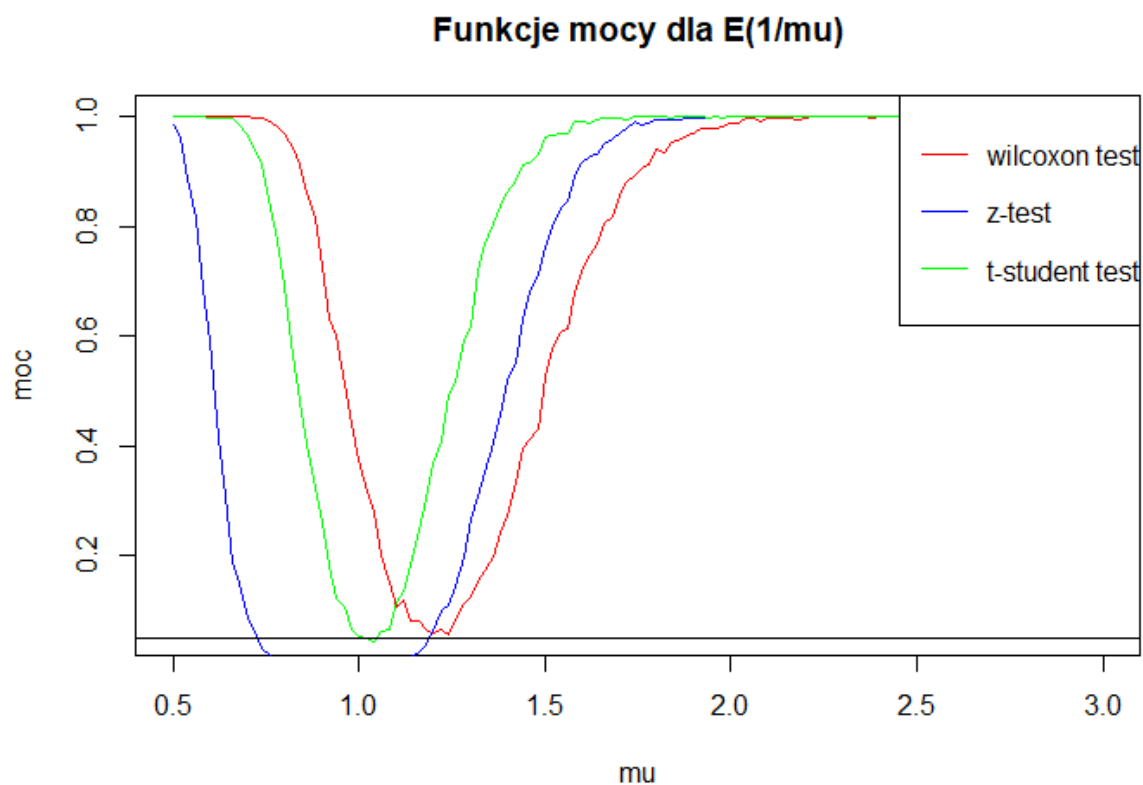
ztest_exp <- function(mu){
  x = rexp(n,1/mu)
  pvalue <- z.test(x, mu=mu0, sigma.x=2, conf.level=alpha)$p.value
  return(pvalue)
}
tstudent_exp <- function(mu){
  x = rexp(n,1/mu)
  pvalue <- t.test(x, mu=mu0, conf.level=alpha)$p.value
  return(pvalue)
}
wilcoxon_exp <- function(mu){
```

```

x = rexp(n,1/mu)
pvalue <- wilcox.test(x,mu=mu0, conf.level=alpha)$p.value
return(pvalue)
}
monte_ztest3 <- function(mu){
  values <- replicate(N,ztest_exp(mu))
  return(sum(values<alpha)/N)
}
monte_tstudent3 <- function(mu){
  values <- replicate(N, tstudent_exp(mu))
  return(sum(values<alpha)/N)
}
monte_wilcoxon3 <- function(mu){
  values <- replicate(N,wilcoxon_exp(mu))
  return(sum(values<alpha)/N)
}

srednie <- seq(0.5,3,by=0.02)
start <- Sys.time()
ztest3_pows <- sapply(srednie, monte_ztest3)
tstudent3_pows <- sapply(srednie, monte_tstudent3)
wilcoxon3_pows <- sapply(srednie, monte_wilcoxon3)
plot(srednie,wilcoxon3_pows,type="l", main='Funkcje mocy dla E(1/mu)', xlab='mu',
      ylab='moc', col='red')
end <- Sys.time()
end-start
lines(srednie,ztest3_pows, type='l', col='blue')
lines(srednie, tstudent3_pows, type='l,col='green')
abline(h=alpha)
legend(x='topright', legend=c('wilcoxon test', 'z-test','t-student test'),
      col=c('red','blue', 'green'),lty=1)

```



Wnioski

Z wykresu widzimy, iż test Wilcoxona nie sięga zadanego poziomu istotności, gdyż nie spełnione są założenia testu. Jednak również jest to najsilniejszy z zebranych w tym przypadku trzech testów.