2019-10-11 Классы смежности

Опр

G - группа $\qquad H \leqslant G$

$g \in G \qquad gH = \{gh \ \mid \ h \in H\}$ левый класс смежности

$$g_1, g_2 \in G \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g_1H = g_2H \\ g_1H \cap g_2H \quad = 0 \end{array}\right.$$

$gh_1 = gh_2$

$g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2$

$\Rightarrow h_1 = h2$

Следствие (Теор. Лагранжа)

$|G| = n$ и $H \leqslant G \qquad |H| = k$

$\Rightarrow n \,\vdots\, k$

Следствие (2)

$g \in G \quad n \,\vdots\, \operatorname{ord} g$

Док-во (2)

$H = \{g^0, g^1, g^2, ..., g^{\operatorname{ord} g - 1}\} \qquad |H| = \operatorname{ord} g$

Опр

Если $\forall g \in G \qquad gH = Hg$, то H - назыв. нормальной под-пой G

$\Leftrightarrow \forall g \in G \qquad H = gHg^{-1}$

2019-10-18

<u>Задача</u> (1)

Доказать: $\operatorname{ord}(g) = \operatorname{ord}(xgx^{-1}) \qquad g, x \in G$

$$(g)^n = e$$

$$(xgx^{-1})^m = e$$

т.к. есть ассоц., то можно скобки переставлять

$$(xgx^{-1})(xgx^{-1}) \cdot ... \cdot (xgx^{-1}) = xg^m x^{-1}$$

$$xg^m x^{-1} = e$$

$$x^{-1}xg^m x^{-1}x = x^{-1}x = e$$

$$g^m = e$$

$$xg^n x^{-1} = e$$

$$= (xgx^{-1})(xgx^{-1}) \cdot ... \cdot (xgx^{-1}) = e$$

$$\Rightarrow (xgx^{-1})^n = e$$

$$\Rightarrow m = n$$

<u>Задача</u> (2)

Доказать: $\operatorname{ord}(ab) = \operatorname{ord}(ba) \qquad a, b \in G$

$$\urcorner \quad \begin{matrix} \operatorname{ord}(ab) = n \\ \operatorname{ord}(ba) = m \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (ab)^n = e \\ (ba)^m = e \end{matrix}$$

$$1) \quad \underbrace{(ab)(ab)...(ab)}_{n} = e$$

$$2) \quad \underbrace{(ba)(ba)...(ba)}_{m} = e$$

$$\Rightarrow \underbrace{(ab)(ab)...(ab)}_{m} = b^{-1}eb = e$$

$$\Rightarrow m \geqslant n$$

Аналогично $n \leqslant m$

$$\Rightarrow m = n$$

Задача (3)

Найти классы смежности

1. $(\mathbb{Z}, +)$ (по подгруппе $n\mathbb{Z}$)
   отв: остатки от деления на n

2. $(\mathbb{C}, +)$ по подгруппе целых Гаусовых чисел

Опр

f - гомоморфизм групп $f: \ G \to H, \ $ если

$(G, \cdot), (H, \circ) \qquad f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$

Опр

f - изоморфизм, если f - гомоморфизм и биекция

Теорема

$f : G \to H$, тогда

$G_{/\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$

Утв

изоморфизм сохраняет порядок

Задача (1)

(!) $(G, \cdot) \simeq (G, \circ), \ $ где $x \circ y = x \cdot a \cdot y \quad a$ - фикс эл-нт G

Задача (2)

Изморфны ли группы?
C - цикл. группа

1. $C_2 \times C_3$ и S_3

2. $C_2 \times C_3$ е и C_6

3. $C_4 \times C_6$ и $C_8 \times C_3$

2019-10-25

Задача (1)

Изоморфны ли $C_8 \times C_3$ и $C_4 \times C_6$?

В $C_8 \times C_3$ есть эл-ты порядка 24
В $C_4 \times C_6$ макс порядок 12
$f : G \to H$ изоморфизм
$g \to h$ у g и h разные порядки?

$$(f(g))^{12} = f(g^{12}) = e$$

h - порядка 24 $h \in C_8 \times C_3$

$$f : C_4 \times C_6 \to C_8 \times C_3$$

$$g \to h$$

$$g = f^{-1}(h)$$

$$f(g^{12}) = e = (f(g))^{12}$$

$$f : G \to H$$

$$g \to h \qquad \exists \text{ порядок } g = n \qquad \text{порядок } h = m$$

$$h^n = (f(g))^n = f(g^n) = f(e_1) = e_2 \qquad m \,\vdots\, n \qquad m \geqslant n$$

$$e_2 = h^m = (f(g))^m = f(g^m) \Rightarrow e_1 = g^m \Rightarrow n \,\vdots\, m \quad n \geqslant m \Rightarrow n = m$$

Задача (2)

Для каких G следующие отображения $f : G \to G$
гомоморфизмы

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^{-1}$

Если взять $(Z, +)$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x + y) = 2(x + y)$$

Нужно проверить, выполняется ли такое соотношение:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x \cdot y) = x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y$$

Для этого нужна комм. группа

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = (x \cdot y)(x \cdot y)$$

$$f(x) \cdot f(y) = x^2 \cdot y^2 = x \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$x \cdot (y \cdot x) = x \cdot (x \cdot y) \Leftrightarrow x \cdot y \cdot x = x \cdot x \cdot y \Leftrightarrow y \cdot x = x \cdot y$$

Ответ для 1. Необходима комм. группа

$$f(x) = x^{-1}$$

$$f(x \cdot y) = f(x)f(y) = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

$$f(x \cdot y) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = e$$

$$y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad \Big| \cdot x$$

$$xy^{-1}x^{-1} = y^{-1} \quad \Big| \cdot y$$

$$yxy^{-1}x^{-1} = e$$

$$yx = xy$$

Задача (3)

Найти нормальные подгруппы S_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3 подгруппы, (1 элемент остается на месте)
Рассмотрим циклы длины 3
Если возвести цикл в квадрат, то мы получим обратную перестановку
2 подгруппы (2 цикла)
1 группа из id

$$\{e, (1\ 2)\}$$

$$\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \text{ - нормальная?}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

порядок (1 2 3) $= 3$

В S_3 3 элемента

$g(1\ 2\ 3)g^{-1} =$ цикл длины 3

$\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ - действительно нормальная

Проверим $\{e, (1\ 2)\}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Элемент не остался на месте

$\{e, (1\ 2)\}$ не нормальная

$S_{3/H} \simeq C_2$

Утв

Если есть цикл длины n, то порядок $= n$

Напоминание

$Q_8 \qquad \pm 1 \quad \pm i \quad \pm j \quad \pm k$

-1 коммутирует со всеми

$i \cdot j = k$

$j \cdot i = -k$

$j \cdot k = i$

$i \cdot k = -j$

$i^2 = -1$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Задача (4)

(!) Q_8 изоморфна группе матриц по умножению

$$E = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pm I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \pm K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pm 1 \to \pm E$$

$$\pm i \to \pm I$$

$$\pm j \to \pm J$$

$$\pm k \to \pm K$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

Надо все проверить

Упр

Досчитать 4 дома

Задача (5)

Найти все гомоморфизмы $Z_6 \to Z_{18}$

$$(\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_{/18}\mathbb{Z}, +)$$

$$(\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{/18}\mathbb{Z}, +)$$

Вариант от Сережи
Слева порядок, а справа элемент из $\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ll} 1 & 0 \to 0 \\ 6 & 1 \to 3 \\ 3 & 2 \to 6 \\ 2 & 3 \to 9 \\ 3 & 4 \to 12 \\ 6 & 5 \to 15 \end{array}$$

$$f(x) = 3kx, \quad k \in N$$

$$f(x) = 3x$$

$$f(x) = 3kx \mod 18$$

$$f(x+y) = 3k(x+y) = 3kx + 3ky = f(x) + f(y)$$

Почему нельзя взять любое k?

$$0 = f(0) = f(1_1^6) = f(1_1)^6 = 6(1_2) \neq 0$$

$$f(1_1) \to$$

$$f(2_1) = f(1_1 + 1_1) = f(1_1) + f(1_1)$$

$$f(k_1) = kf(1_1)$$

1_1 - имеет порядок 6, значит она не может отобразиться в элементы с порядком не делителем 6, а иначе противоречие

$$f(1_1) \to 9_2$$

$$f(1_1) \to 12_2$$