

Содержание

1	Дифф. геом. кривых	2
	Т. о неявной функции	2
	Свойства пределов	3
	Гладкая кривая, регулярная кривая	5
	Ф-ма Тейлора	7
	Длина кривой	7
	Т. о длине кривой	7
2	Ренер Френе	11

1 Дифф. геом. кривых

Опр

1) Понятие кривой (рис 1)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ - вектор функция

Образ f назыв. кривой

f - параметризация кривой

Способы задания кривых:

1. параметрический $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

2. явное задание

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

(особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)

3. неявное задание (на плоскости)

$$F(x, y) = 0$$

$F(x, y) = 0$ и (x_0, y_0) - подх,

$z = F(x, y)$ рис 2

Пример

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y = (+-)\sqrt{1 - x^2}$ явное задание

рис3

Теор (О неявной функции)

$$F(x, y) = 0$$

$$F - \text{дифф} \left(\exists \frac{\partial F}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y} - \text{непр в окр } (x_0, y_0) \right)$$

$$F(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{Если } \frac{\partial F}{\partial y}_{(x_0, y_0)} \neq 0 \rightarrow \exists f \quad \exists \mathcal{E} > 0 : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

Опр

$$\frac{\partial F}{\partial x}_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \text{аналогично}$$

$$y = f(x) \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Опр

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 - \text{вектор. функция, то}$$

$$f(t) = (x(t); y(t); z(t))$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0) :$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 \text{ если}$$

$$\rho(t, t_0) < \delta, \text{ то } \rho(f(t), (x_0, y_0, z_0)) < \mathcal{E}$$

$$|t - t_0| \quad \sqrt{((x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2)}$$

Теор (свойства пределов)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t)(+-)g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)(+-) \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot g(t)) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \right) (,) - \text{скалярное умножение}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \times g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

Док-во

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\varepsilon > 0 \quad \text{Выберем такое } \delta : |x(t) - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{если } |t - t_0| < \delta \rightarrow \begin{matrix} |y(t) - y_0| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |z(t) - z_0| < \frac{\varepsilon}{3} \end{matrix} \rightarrow \sqrt{\dots} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} < \varepsilon$$

Опр

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Теор (свойства)

1.

$$(f(t)(+-)g(t))' = f'(t)(+-)y'(t)$$

2.

$$(cf(t))' = cf'(t)$$

3.

$$(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t); g'(t))$$

4.

$$(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$$

5.

$$(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$$

$$f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\begin{aligned}
(f(t) \times g(t))'|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} = \\
&= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x) \times g(x) - f(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} \\
&= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f(t) - f(t_0)) \times g(t)}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t_0) \times (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = \\
&= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)
\end{aligned}$$

Пример

Контрпример

Т. Лагранжа - неверна рис 4

$$\int_b^a \vec{f}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right)$$

$$\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$$

$$\vec{F}(b) - \vec{F}(a) = \int_a^b \vec{f}(t) dt$$

$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \dots \right) = (X(b) - X(a), \dots)$$

Опр

Гладкая кривая - диффер. векторнозначная функция и ее образ тоже

Кривая называется регулярной, если $f'(t) \neq \vec{0}$

(Кривая называется бирегулярной, если $\exists f''(t)$ и $f''(t) \nparallel f'(t)$)

рис 5

гладкая кривая = класс эквивалентности параметризаций

Опр

Параметризации $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(t)$ эквивалентны

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Если \exists биекция $\tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$

$$\tau(a) = c; \quad \tau(b) = d :$$

$$f(t) = g(\tau(t)) \quad (\tau \text{ возрастает и гладкая})$$

Лемма

Эквив параметризаций - эквив.

Док-во

Рефл.

$$\tau = id$$

Симм.

$$f(t) = g(\tau(t))$$

$$g(t) = f(\tau(t))$$

Транз.

$$f(t) = g(\sigma(t)) \quad f(t) = h(\tau(b(t)))$$

$$\tau \circ \sigma - \text{перепарам.}$$

Лемма

$\vec{f}(t)$ - вектор-функция/регуляр.

$$|\vec{f}(t)| = 1 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

Док-во

$$(f(t); f(t)) = 1$$

$$0 = (f(t), f(t))' = 2(f'(t), f(t))$$

$$f(t) \neq 0$$

$$f'(t) \neq 0 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

2019-09-16

Теор (Ф-ма Тейлора)

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \vec{t}_0 + \vec{f}'(t)(t - t_0) + \frac{\vec{f}''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{\vec{f}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n \\ \vec{g}(t) &= o(t - t_0)^n, \text{ если} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{g}(t)}{(t - t_0)^n} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Опр (Длина кривой) рисунок 1

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

1. $\sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$
2. $\lim_{\max_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \dots$ - длина кривой

УТВ

оба определения дают одно и то же

Теор

S - длина кривой \Rightarrow

$$S = \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt$$

Опр

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

Замеч

Если $|\vec{f}'(t)|$ - интер. \rightarrow кривая спрямляемая

Пример

$$y = \sin \frac{1}{x} \quad (0, 1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во

$$\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$$

$$\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$$

$$\left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t + \left| \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| = I + II$$

$$2 \leq \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \Delta_i t - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| =$$

$$= \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \Delta_i t$$

$f'(t)$ - непр на $[a, b] \Rightarrow$ равномерно непр. на $[a, b]$ (т. Кантора)

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$, если $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$, если $|\sigma_i - \tau_i| < \delta$

$$II \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \Delta_i t = \mathcal{E}(b - a) \xrightarrow{\mathcal{E} \rightarrow 0} 0$$

$$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leq ||f'(\tau_i)| - |f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \Delta_i t$$

Опр

Параметризация $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Теор

Натуральная параметризация \exists и ед.

Док-во

$$f(t) \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ - монотонная биекция

$$(\tau' > 0)$$

$$f = \tau : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Лемма

Длина кривой не зависит от параметризации

Док-во

$$\int_a^b |f'(t)| dt$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)| ds =$$

$$= \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)| dt$$

$$t = \tau(s)$$

Док-во (Т)

Существование

Хотим подобрать $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)| ds$$

$$\sigma : [a, b] \rightarrow [0, S]$$

S - длина кривой

σ - возрастающая и дифф. ($\sigma'(t) = |f'(t)|$)

σ - биекция $\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$

$$\begin{aligned}\int_0^t |(f \circ t)'(s)| ds &= \int_0^t |f'(\tau(s))| \cdot t'(s) ds = \\ &= \int_0^t |f'(\tau(s))| \frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|} ds = t\end{aligned}$$

Единственность

$f(t)$ и $g(t)$ - *нат. параметризации*

$$f, g : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f - g$$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)| dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)| dt \leq \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)|| dt = 0$$

Примеры

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)} dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y' = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 \cos^2 2\varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \\
 &= \sqrt{r'^2 + r^2} \\
 S &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi
 \end{aligned}$$

2 Ренер Френе

Опр

$$\vec{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\vec{v} = f'(t)$ - если парам. натуральн.

v - касательный вектор

Прямая, содержащая \vec{v} наз. касательной к $\vec{f}(t)$ в точке t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \vec{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \vec{g}(t)$$

$\vec{g}(t)$ - ур-е касат. прямой

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\vec{h} - \vec{f}(t_0)) = 0$$

Теор

δ - расстояние от $f(t)$ до касат. прямой

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

Док-во