



Санкт-Петербургский  
государственный  
университет  
[www.spbu.ru](http://www.spbu.ru)

# Практика по математическому анализу

3 семестр, преподаватель Роткевич А. С.  
Записал Костин П.А.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах [вконтакте](#) (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

# Содержание

<b>1</b>	<b>Функции от нескольких переменных</b>	<b>3</b>
1.1	02.09.2019 . . . . .	3
1.1.1	Основные определения . . . . .	3
1.2	05.09.2019 . . . . .	5
1.2.1	Примеры для $\mathbb{R}^2$ . . . . .	5
1.3	09.09.2019 . . . . .	7
1.3.1	Ещё больше определений . . . . .	7
1.3.2	Ещё больше примеров . . . . .	7
1.4	12.09.2019 . . . . .	8
1.4.1	Некоторые особенные примеры . . . . .	8
1.4.2	Частные производные. Определения . . . . .	9
1.4.3	Частные производные. Примеры . . . . .	9
1.5	16.09.2019 . . . . .	11
1.5.1	Дифференцирование неявных функций . . . . .	12
1.6	19.09.2019 . . . . .	13
1.6.1	Неявные функции наносят ответный удар . . . . .	13
1.7	23.09.2019 . . . . .	15
1.7.1	Дифференциалы высших порядков . . . . .	16
1.8	26.09.2019 . . . . .	17
1.8.1	Ничего интересного . . . . .	17
1.9	03.10.2019 . . . . .	17
1.9.1	Ф-ла Тейлора для неявной функции . . . . .	17
1.10	07.10.2019 . . . . .	18
1.10.1	Готовимся к к.р. . . . .	18
1.11	14.10.2019 . . . . .	19
1.11.1	Замена переменных в дифференциальных выраже- ниях . . . . .	19
1.12	17.10.2019 . . . . .	21
1.12.1	Я не знаю название этой темы . . . . .	21
1.13	21.10.2019 . . . . .	25
1.13.1	Продолжаем делать примеры . . . . .	25
1.14	24.10.2019 . . . . .	27
1.14.1	Экстремумы . . . . .	27
1.15	28.10.2019 . . . . .	29
1.15.1	Экстремумы . . . . .	29
1.15.2	Условный экстремум . . . . .	30
1.16	02.09.2019 . . . . .	34
1.16.1	Снова та же тема . . . . .	34

# 1 Функции от нескольких переменных

## 1.1 02.09.2019

### 1.1.1 Основные определения

#### Опр

$\rho : X * X \rightarrow \mathbb{R}$  - метрика, если

1.  $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

$(X, \rho)$  - метрическое пространство

#### Примеры

1.  $\mathbb{R} \rho(x, y) = |x - y|$

2.  $x \neq y \rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

3.  $\mathbb{R}^n, n \geq 1 \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$   
где  $x = (x_1, \dots, x_n) \ y = (y_1, \dots, y_n)$

#### Опр

$\rho_1, \rho_2 : X * X \rightarrow \mathbb{R}$  - метрики, тогда  $\rho_1, \rho_2$  - эквивалентны, если

(они задают одну топологию)  $c_1 \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq c_2 \rho_1(x, y)$  для  $c_1, c_2 > 0$  - const

#### Пример

$\mathbb{R}^2 \rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{2\rho_2^2(x, y)}$

$\rho_2(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$  (упр.)

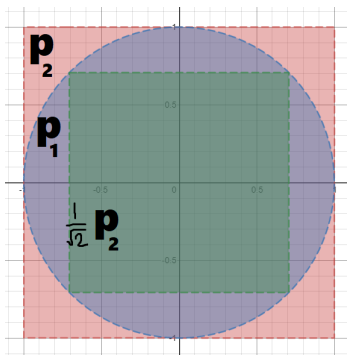
$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y)$

Пусть  $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$

Если  $p \rightarrow \infty \rho_3 \rightarrow \rho_2$

$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$  - пространство Лебега конечномерное

(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$



## Опр

$\rho : X * X \rightarrow \mathbb{R}$  - метрика,

Открытым шаром в  $X$  относительно метрики  $\rho$  называется мн-во

$$B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

Замкнутым шаром называется  $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leq r\}$

Сферой называется  $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

## Упр

Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

## Пример

$$l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$l^p$  - пр-во Лебега (последовательностей)

## Пример

$C[0, 1]$  - пр-во непр. функций

$$\rho(f, g) = \max_{[0, 1]} |f - g| \quad \text{- полна (любая фундаментальная последовательность сходится)}$$

тельность сходится)

$$\rho_p(f, g) = \left( \int_0^1 |f - g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{- не полная}$$

## Опр

$(X, \rho)$  - метр. пр-во,  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ ,  $a \in X$   $x_k \rightarrow a$  в пр-ве  $X$  по метрике  $\rho$ , если  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$   $_{k \rightarrow \infty}$

## Примеры

$$\mathbb{R}^2 \quad M_k = (x_k, y_k) \quad P = (a, b) \quad M_k \rightarrow P \text{ в евкл. метрике, т.е. } \rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \rightarrow 0 \quad x_k \rightarrow a, y_k \rightarrow b$$

### Замечание

Есть  $\rho_1, \rho_2$  - экв. метрики, то  $\rho_1(x_k, a) \rightarrow 0, \rho_2(x_k, a) \rightarrow 0$

### Упр

$$x_k \rightarrow a, x_k \rightarrow b \Rightarrow a = b \\ (\rho(a, b) \leq \rho(a, x_k) + \rho(x_k, b) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(a, b) \rightarrow 0 \Rightarrow a = b)$$

### Опр

$E \subset X, (X, \rho)$  - метр. пр-во, то  $a \in X$  - т. сгущ.  $E$ , если  $\forall \mathcal{E} \exists x \in E : \rho(a, x) < \mathcal{E}$

### Опр

$f : E \rightarrow Y$  ( $X, \rho$ ), ( $Y, d$ ) - метр. пр-ва ( $E \subset X$ ), а - т. сгущ.  $E$ ,  $A \in Y$ , тогда  $A$  - предел отображения  $f$  в точке  $a$ , если  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \in E \setminus \{a\} \rightarrow a$  (или  $\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \rho(x, a) < \delta$  и  $x \in E \subset \{a\}$ , то  $d(f(x), A) < \mathcal{E}$ )  
Обозначение:  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  или  $f(x) \rightarrow A$   $x \rightarrow a$

### Замечание

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\mathcal{E}(A)$$

## 1.2 05.09.2019

### 1.2.1 Примеры для $\mathbb{R}^2$

$$\text{Будем в } \mathbb{R}^2, \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

### Опр

$f : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^2, a \in \mathbb{R}^2$  - точка сгущения,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$ , если  $\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x, a) < \delta, x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < \mathcal{E}$

В  $\mathbb{R}^2$  работают:

арифм. действия, теор. о двух милиционерах, критерий Коши:

### Опр

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , частный случай  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \mathcal{E} \ 0 < \rho(x, a), \rho(y, a) < \delta$  (упр)

### Упр

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \rightarrow a \quad (\rho(x_n, a) \rightarrow 0) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

Обозначение:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  - предел функции в т.  
 $(x_0, y_0)$

### Пример

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0, \text{ т.к. } |f(x, y)| \leq |x| + |y| \xrightarrow{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} 0,$$

$$\nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow y} f(x, y)$$

### Пример

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} - \text{ не существует, так как } \lim f(x, x) = 1, f(x, 2x) = 0$$

### Пример

Построить  $f(x, y)$  т.ч.  $\forall a, b \exists \lim_{t \rightarrow 0} f(at, bt) = A$ , но  $\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$

$$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a} t \rightarrow 0, \text{ но при } x = \frac{1}{n^2}, y = \frac{1}{n} \text{ предел - единица}$$

### Замечание

$$\text{Если } \gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a \in \mathbb{R}^2 \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \text{ то } \exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t))$$

### Замечание

$$\text{Если } \forall \gamma : \gamma(t) \rightarrow a \in \mathbb{R}^2 \text{ и } \exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)), \text{ то } \exists \lim_{x \rightarrow a} f$$

### Замечание

$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  - не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть  $\bar{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{f}(x)$

$$\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \neq (\text{не обязательно}) \neq f(x, y_0)$$

### Опр

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \forall x, y : \max(x, y) > M \quad |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

### Пример

$$f = \frac{y}{x} tg\left(\frac{x}{x+y}\right) - \text{ не имеет предела, } f(x, x) = tg\left(\frac{1}{2}\right), f(x, x^2) = xtg\left(\frac{1}{1+x}\right) \rightarrow 0$$

## 1.3 09.09.2019

### 1.3.1 Ещё больше определений

#### Опр

1.  $A = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \ y > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

2.  $A = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : |x| > M \ |y| > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

3.  $A = \lim_{P \rightarrow \infty} f(P) \ P \in \mathbb{R}^2$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \rho(0, P) > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

#### Замечание

Демидович по первым двум определениям

#### Опр

Для конечного предела:  $A = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ \delta > 0 : y > M \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

### 1.3.2 Ещё больше примеров

#### Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

#### Решение

Заметим, что  $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq (x - y)^2$  для  $x \neq y$

Значит дробь стремится к 0

#### Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

#### Решение

При  $x = y$  предел  $\frac{1}{2}$

При  $x = y^2$  предел 0

### Пример

$$f = \sin\left(\frac{\pi y^2}{x^2 + 3y^2}\right)$$

Найти  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} f$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f$

### Решение

Первый не имеет предела ( $x = y$ ,  $x = \sqrt{y}$ ). Второй  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Третий 0

### Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{\sin(y - x^2)}{y - x^2}$$

### Решение

$$z = y - x^2, z \rightarrow 0 \Rightarrow x, y \rightarrow 0$$
$$|z| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

### Пример

$$f = \frac{1 - \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ найти } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f$$

### Решение

$$1 - \sqrt[3]{t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{3} \quad (\text{т.к. } 1 - \sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1 + \sqrt[5]{t} + \sqrt[3]{t^2}})$$

$$\text{Значит } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - (\sin^4 x + \cos^4 y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2\sin^2 y - \sin^4 y - \sin^4 x}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Заменим по Тейлору: } = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2y^2 + \bar{o}(y^3) - x^4 + \bar{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Попробуем оценить по модулю  $\left| \frac{2y^2 - x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$ , заметим что  $y^2 \leq x^2 + y^2$ ,

$$x^4 \leq 2(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 \quad (\text{для } x^2 + y^2 < 1),$$

чтобы избавиться от  $\bar{o}$  оценим так:

$$\bar{o} + y^2 \leq 2(x^2 + y^2), \quad \bar{o} + x^4 \leq 2(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2$$

$$\text{Тогда } \left| \frac{2y^2 - x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 2 \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 6\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

## 1.4 12.09.2019

### 1.4.1 Некоторые особенные примеры

### Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2 y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} ((1+x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{1+xy}} = e$$



### Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ a & , \text{else} \end{cases}$$

1)  $a = ?$ , т.ч.  $f$  - непр

2)  $a = ?$ ,  $f$  - непрю на прямых, проходящих через 0

### Решение

$$1) a = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

### Замечание

$$x^n y^m \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^{n+m} \text{ и } |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

### 1.4.2 Частные производные. Определения

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

### Опр

$f$  - дифф. в точке  $P_0$ , если  $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$ , т.ч.

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + A\delta x + B\delta y + C\delta z + o(\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2})$$

Пусть  $h = (\delta x, \delta y, \delta z)^T$

$$f(P_0 + h) = f(P_0) + \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}^T h + o(|h|)$$

$$df(x, y, z) = A dx + B dy + C dz$$

Дифференциал сопоставляет  $(dx, dy, dz) \rightarrow A dx + B dy + C dz$

### Опр

Частной произв. по перем.  $x$  в т.  $(x_0, y_0, z_0)$  называется предел (если  $\exists$ )

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

### 1.4.3 Частные производные. Примеры

### УТВ

$f$  - дифф.  $\Rightarrow \exists$  част. пр. и  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $C = \frac{\partial f}{\partial z}$

Производные старшего порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \neq (\text{не всегда}) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Частные производные сложной функции

$$w = f(x, y, z), \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3. (u, v) \rightarrow (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$w = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

### Пример

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \dots$$

### Пример

$$F = f(x, xy, xyz) = f(u, v, w)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} 1 + \frac{\partial f}{\partial v} y + \frac{\partial f}{\partial w} yz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v} + uz \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right) y + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} (y) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial w} \right) yz + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x} (yz)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + yz \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (yz)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + zy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y^2 z \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} \end{aligned}$$

### Пример

Дано  $u = x^y$ , найти  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x)x^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \ln^2(x)x^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y \ln(x)x^{y-1}$$

## 1.5 16.09.2019

### Пример

Выяснить, есть ли производная у  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

### Решение

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad x^3 + y^3 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^3 + 0^3} - \sqrt[3]{0^3 + 0^3}}{t} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \text{ не } \exists$$

Пусть  $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$  - диф. в точке  $(0, 0) \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = 0 + x + y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\sqrt[3]{(0 + \delta x)^3 + (0 + \delta y)^3} = \underset{=0}{f(x, y)} + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\delta x} + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\delta y} + o(\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2})$$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + o(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad x, y \rightarrow 0$$

$$x_n = y_n \quad \sqrt[3]{2}x = 2x + o(x)$$

$$\sqrt[3]{2} - 2 = o(1)??!$$

То есть из существования ч.п. не следует дифференцируемость

### Теорема

Если существуют ч.п. и они непр. в рассм. точке  $\Rightarrow$  ф-ия диф. в этой точке

### Пример

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, f(0, 0) = 0 \Rightarrow f - \text{непр. в } 0$$

$$g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x^2y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) |_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{-\frac{t^3}{t^2} - 0}{t} \right) = -1$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1$$

### Теорема

$$\text{Если } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \exists \text{ в окр. точки, непр. в этой точке} \Rightarrow \text{в этой точке}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

#### 1.5.1 Дифференцирование неявных функций

### Опр

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x_1, \dots, x_n; y), \quad F(x_1^0, \dots, x_n^0; y^0) = 0$$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$  - ф-ия задана неявно уравнением  $F(x_1, \dots, x_n; y) = 0$  в откр. точке  $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$ , если  $(x = (x_1, \dots, x_n))$ :

$$1. \quad \underline{F(x, f(x)) = 0} \text{ (в окр. } x^0)$$

$$2. \quad f(x^0) = y^0$$

### Теорема (о неявном отображении)

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x^0, y^0) = 0, \quad F - \text{непр. диф. в окр. } (x^0, y^0),$$

$$F'_y(x^0, y^0) \neq 0, \quad \text{тогда:}$$

$$1. \quad \exists y = f(x_1, \dots, x_n) \text{ зад. неявно ур. } F(x, y) = 0$$

$$2. \quad f \text{ диф. в окр. } x^0$$

$$3. \quad \frac{\partial f}{\partial x_0} = - \frac{\partial F}{\partial x_0} / \frac{\partial F}{\partial y} \text{ в окр. } x^0$$

## 1.6 19.09.2019

### 1.6.1 Неявные функции наносят ответный удар

#### Пример

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n), \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$x_0 = 0 \quad y(0) = ? \quad ye^y = 0 \quad y = 0$$

$$F'_y = e^y + ye^y|_{(0,0)} = 1 \neq 0$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x}{F'_y}|_{(0,0)} = -\frac{1+2x}{1} = -1 \text{ т.о. неявное отображение}$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}$$

$$y(x) = 0 - x + \bar{o}(x)$$

Что теперь делать? Способ 1:

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left(-\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}\right)' = \left(-\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}\right)' \\ &= -\frac{2}{(y(x)+1)e^{y(x)}} + \frac{1+2x}{((y(x)+1)e^{y(x)})^2} (y(x)+2)e^{y(x)}y'(x) \underset{\substack{x=0 \\ y=0}}{=} -2-4 = -6 \end{aligned}$$

Наш ряд Тэйлора:

$$y(x) = -x - 3x^2 + \bar{o}(x^2)$$

Способ 2 (метод неопр. коэффициентов)

$$y(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$F(x, y(x)) = 0 \text{ в опр } x=0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} + x + x^2 = 0$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \bar{o}(t^3), \quad t \rightarrow 0$$

$$t = y(x)$$

$$(-x + ax^2 + bx^3)[1 + (-x + ax^2 + bx^3) + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^2}{2} + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^3}{6} + o(x^2)] + x + x^2 = 0$$

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))(1 - x + (a + \frac{1}{2})x^2 + (b - a - \frac{1}{6})x^3 + \bar{o}(x^3)) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) - x + x^2(1 + a) + x^3(b - a - \frac{1}{2}) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) + (a + 2)x^2 + (b - 2a - \frac{1}{2})x^3 = 0$$

$$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ b - 2a - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{система должна быть диагональной}$$

$$a = -2 \quad b = -\frac{7}{2}$$

### Пример

$$\cos(xy) + \sin x + e^{y+x} = 2$$

Проверить условие т.о неявной ф-ии и найти разл  $y(x)$  по Тейллору до  $\bar{o}(x^3)$

$$x = 0, \quad F(0, y) = 0 \rightarrow y(0)$$

$$1. \quad 1 + e^y = 2, \quad y = 0, \quad F(0, 0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$2. \quad \begin{aligned} F'_y &= -x \sin(xy) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 1 \neq 0 \\ F'_x &= -y \sin(xy) + \cos(x) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 2 \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

Методом неявных коэффициентов

$$y(x) = -2x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$\cos(-2x^2 + ax^3 + bx^4 + \bar{o}(x^4)) + \sin x + e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} = \dots$$

## 1.7 23.09.2019

$$F(u; x, y) = 0$$

$\exists$  неявная ф-ия  $u(x, y)$

$$\begin{aligned} & u(x_0, y_0) = u_0 \\ & F(u(x, y), x, y) = 0 \\ & \begin{aligned} F(u_0; x_0, y_0) &= 0 \\ F'_u(u_0; x_0, y_0) &\neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u'_x &= -\frac{F'_x}{F'_y} \\ u'_y &= -\frac{F'_y}{F'_u} \end{aligned} \end{aligned}$$

Ф-ла Тейлора для функций от неск. перем.

$$u : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in E \rightarrow u(x)$$

$$T_R(x, x^0) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha u(x^0)}{\partial x^\alpha} \frac{(x - x^0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{j=0}^k \frac{d^j u(x^0)[x - x^0]}{j!}$$

$\alpha$  - мультииндекс,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

### Теорема

$$u \in C^k \overset{\text{в окр. } x^0}{\Rightarrow}$$

### Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) +'_x (x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ u''_{xx} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + u''_{xy} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{1!} + u''_{yy} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{(x - x_0)^2 (y - y_0)}{2!1!} + \dots + \bar{o}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^3 \end{aligned}$$

## 1.7.1 Дифференциалы высших порядков

### Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \rightarrow u(x, y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} dy = du[dx, dy]$$

$du : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (dx, dy) \rightarrow du[dx, dy]$  - дифференциал первого порядка

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

$$d_d^k(d^{k-1}u) = \sum_{j=0}^k C_j^k \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j} dx^j dy^{k-j}} = d^k u[dx, dy], \quad u \in C^k$$

$$= dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}$$

Понятно, что можно дальше обобщать, но делать мы это, конечно, не будем

### Пример

$$f = x^y = e^{y \ln x}, \quad d^2 f \text{ в точке } (2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \ln x$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \ln x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - e^{y \ln x} \frac{y}{x^2} \stackrel{(2,1)}{=} 0$$

$$f''_{yy} = e^{y \ln x} \ln^2 \stackrel{(2,1)}{=} \ln^2 2$$

$$f''_{xy} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \ln x + e^{y \ln x} \frac{1}{x} \stackrel{(2,1)}{=} \ln 2 + 1$$

Тогда наш ответ:

$$d^2u|_{(2,1)} = 2(\ln 2 + 1)dxdy + 2\ln^2 2dy^2$$

### Пример

$$\text{Найти } d^3 f \text{ для } f = x^4 + xy^2 + yz^2 + zx^2$$

Как понять, что такое  $d^3 f$  от трех переменных?

$$d^3 u = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z}\right)^3 u$$

$$d^3 \stackrel{(0,1,2)}{=} 3 * 2dx^2 dz + 3 * 2dydz^2 + 3 * 2dx^2 dy$$



## 1.8 26.09.2019

### 1.8.1 Ничего интересного

## 1.9 03.10.2019

### 1.9.1 Ф-ла Тейлора для неявной функции

#### Пример

$$F(x, y; u) = u^3 + 3yu - 4x = 0, \quad u(x, y) \text{ в окр. } (1, 1)$$

Задача. Написать ф. Тейлора для  $u(x, y)$  с точностью до  $\underbrace{o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2})^n}_{\varphi}$

$$(x, y) = (1, 1) \quad u^3 + 3u - 4 = 0 \Rightarrow (u^2 + u + 4)(u - 1) = 0 \Rightarrow u(1, 1) = 1$$

Проверим, что  $F'_u(1, 1; 1) \neq 0$ ,  $3u^2 + 3y \neq 0$

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{2}{3} \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

$$u(x, y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \bar{o}(\varphi) \quad n = 1$$

Способ 1 ( $n = 2, 3, \dots$ )

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{4}{3u^2 + 3y} \quad u''_{xx} = \frac{4 * 6uu'_x}{(3u^2 + 3y)^2} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$$

$$u''_{xy} = \frac{4(6uu'_y + 3)}{(3u^2 + 3y)^2} = 0 \quad u''_{yy} = \left(-\frac{3u}{3u^2 + 3y}\right)'_y = -\frac{u'_y(u^2 + y) - (2uu' + 1)u}{(u^2 + y)^2} = \frac{1}{4}$$

$$u(x, y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2\right) + \bar{o}(\varphi^2)$$

Способ 2 (более высокие степени, метод неопр. коэф.)

$$u^3(x, y) = \left(1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + a(x-1)^2 + b(x-1)(y-1) + c(y-1)^2 + \bar{o}(\varphi^2)\right)^3$$

$$t = x - 1 \quad s = y - 1$$

$$\begin{aligned} 0 = u^3 + 3yu - 4x &= \bar{o}(\varphi^2) + 1 + 3 * 1^2 \left( \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + at^2 + bts + cs^2 \right) + \\ &+ 3 \left( \left( \frac{2}{3}t \right)^2 + \frac{s^2}{4} - \frac{2}{3}ts \right) + 3(s+1)u - 4(t+1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( (s+1)u = s + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + s \left( \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s \right) + at^2 + bts + cs^2 + \bar{o}(\varphi^2) \right) \\
& = \bar{o}(\varphi^2) + \cancel{(1+3-4)} + t \left( \cancel{3\frac{2}{3} + 3\frac{2}{3} - 4} \right) + s \left( \cancel{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} \right) + t^2 \underbrace{\left( 3a + 3\frac{4}{9} + 3a \right)}_{=0} + \\
& \quad + ts \underbrace{\left( 3b - 2 + 3 \left( \frac{2}{3} + b \right) \right)}_{=0} + s^2 \underbrace{\left( 3c + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 3c \right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Приравняли к 0, т.к. у найденного выше  $u(x, y)$  эти коэф. = 0

$$\Rightarrow a = -\frac{2}{9} \quad b = 0 \quad c = \frac{1}{8}$$

ДЗ: 3127-3186 (10 задач)

## 1.10 07.10.2019

### 1.10.1 Готовимся к к.р.

#### Пример

$$ue^{x+u} + y \cos(x+y) = 0 \quad (x_0, y_0) \quad o(\varphi^2) \quad o(\varphi^3) \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

#### Решение

Решил у доски

#### Замечание

Можно подставлять  $(0, y)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x, x)$

#### Пример

$$u \cos(x-u) + e^u \sin(x+u) = 0$$

$$u(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_6x^6 + \overline{x^6} \quad x_0 = 0 \quad u(0) = 0$$

$$F'_u = \cos(x-u) + u \sin(x-u) + 2ue^{u^2} \sin(x+u) + e^{u^2} \cos(x+u) \stackrel{(0,0)}{=} 2$$

$$c_1 = u'_x(0) = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что  $F(-x, -u) = -F(x, u)$

$$\Rightarrow F(x, yu) = 0 \Rightarrow F(-x, -u) = 0$$

$u$  - нечетна  $\Rightarrow c_{2n} = 0$

$$u(x) = -\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_4x^5 + o(x^6)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_5x^5 + o(x^6)\right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{2} - c_3x^3\right) + \frac{1}{4!} \left(\frac{3x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right) + \\ & + \left(1 + \left|-\frac{x}{2} + c_3x^3\right| + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right) \\ & \left(\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_5x^5 + o(x^6)\right) - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} + c_3x^3\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

### Замечание

1. Если  $F(-x, u) = F(x, u)$  или  $F(-x, u) = -F(x, u) \Rightarrow u$  - четна
2. Если  $F(-x, -u) = F(x, u)$  или  $F(-x, -u) = -F(x, u) \Rightarrow u$  - нечетна

## 1.11 14.10.2019

### 1.11.1 Замена переменных в дифференциальных выражениях

Замена перем. в выражениях с полными производными

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

$$\begin{array}{ccc} (x, y) \rightarrow & (u, v) & \\ y(x) & u(v) & y'_x, y''_{xx}, \dots \text{ нужно выразить через } u'_v, u''_{vv} \end{array}$$

$$\exists x = f(u, v) \quad y = g(u, v)$$

$$y(x) = y(f(u, v)) = y(f(u(v), v)) = g(u(v), v)$$

$$\text{Дифференцируем по } v: \frac{\partial g}{\partial u} u'_v + \frac{\partial g}{\partial v} = y'_x \left( \frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad (*)$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial u} u'_v + \frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

Другой способ воспринимать:  $y = y(x)$

Продифференцируем ещё раз (\*) по  $v$ :

$$\begin{aligned} u''_{vv} \frac{\partial y}{\partial u} + u'_v \left( \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} u'_v + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \\ = y''_{xx} \left( \frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + y'_x \left( u''_{vv} \frac{\partial f}{\partial u} + (u'_v)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u'_v \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

Второй способ:

$$x = f(u(v), v) \quad y'_x = h(u(v), \underbrace{u'_v(v)}_w, v) \leftarrow *$$

$$y''_{xx} = \frac{\frac{\partial h}{\partial u} u'_v + \frac{\partial h}{\partial w} u''_{vv} + \frac{\partial h}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

### Пример

Подставить в дифференциальное уравнение выражения

$$y^4 y'' + xy y' - 2y^2 = 0 \quad y(x) \rightarrow u(t)$$

$$x = e^t \quad y = ue^{2t}$$

### Решение

Проблема в том, что мы не знаем, что такое  $y'$ , т.к. в диф. ур-ии производная по  $x$

$$x = f(u, t) = e^t \quad y = g(u, t) = ue^{2t}$$

$$u(t)e^{2t} = y = y(e^t)$$

$$u'_t e^{2t} + 2ue^{2t} = y'_x e^t \Rightarrow y'_x(e^t) = y'_x|_{x=e^t} = (u'_t + 2u)e^t$$

$$y''_{xx} e^t = ((u'_t + 2u) + (u''_{tt} + 2u'_t)) e^t$$

### Пример

$$y' y''' - 3(y'')^2 = x$$

$$y(x) \rightarrow x(y)$$

## Решение

$$x = u \quad y = t \quad u(t)$$

$$(x, y) \rightarrow (u, t)$$

$$t = y(u(t)) \Rightarrow 1 = y' u' \Rightarrow y' = \frac{1}{u'}$$

$$y'' = \frac{u''}{(u')^3}$$

$$y''' = \frac{u'''(u')^3 - 3(u'')^2(u')^2}{(u')^7} = \frac{u'''}{(u')^4} - 3 \frac{(u'')^2}{(u')^5}$$

Подставляя, получаем:

$$-\frac{x'''_{yyy}}{(x'_y)^5} = x$$

ДЗ: 3431-3449

## 1.12 17.10.2019

### 1.12.1 Я не знаю название этой темы

1. Замена независимой переменной

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dots)$$

$$z(x, y)$$

$$x = f(u, v)$$

$$y = g(u, v)$$

$$z = z(x, y) = z(f(u, v), g(u, v))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} &= \dots \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial y} &= \dots \end{aligned}$$

Нужно учитывать Якобиан  $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$  - без этого нет

решения системы

Вторые производные:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{array} \right.$$

### Пример

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{aligned}$$

### 2. Замена переменных и функций

$$(x, y, z(x, y)) \rightarrow (u, v, w(u, v))$$

$$x = f(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

$$\Rightarrow h(u, v, w(u, v)) = z(x, y) = z(f(u, v, w(u, v)), g(u, v, w(u, v)))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} = \dots \\ \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \dots \end{array} \right.$$

### Пример

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \\
& (x, y, z(x, y)) \rightarrow (r, \varphi, z(r, \varphi)) \\
& \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi \\
& \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \varphi) \\
& \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
& ad - bc = 1
\end{aligned}$$

Наша зависимость:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
\left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 &= \left( \frac{\partial z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 + (\dots + \dots)^2 = \\
&= \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2
\end{aligned}$$

Упр

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

3. Новые переменные выражены через старые

$$\begin{aligned}
& (x, y, z(x, y)) \rightarrow (u, v, w(u, v)) \\
& u = p(x, y, z) \\
& v = q(x, y, z) \\
& w = r(x, y, z) \\
& \Rightarrow r(x, y, z(x, y)) = w = w(u, v) = w(p(x, y, z(x, y)), q(x, y, z(x, y))) \\
& \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left( \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = F\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, x, y, z\right)$$

Проблема в том, что он выражен через старые переменные, а нужно как-то выражать через новые  $(u, v, w)$

$$\begin{array}{ll} \text{Можно попробовать через} & \begin{array}{ll} u = p(x, y, z) & x = f(u, v, w) \\ v = q(x, y, z) & \rightarrow y = g(u, v, w) \\ w = r(x, y, z) & z = h(u, v, w) \end{array} \end{array}$$

## Пример

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

$$u = \frac{x}{y} \quad v = x \quad w = xz - y$$

$$xz(x, y) - y = w(u, v) = w\left(\frac{x}{y}, x\right)$$

Выражение через старые переменные тут лучше, потому что нам нужно считать меньше производных

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = \frac{\partial w}{\partial u} \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{2x}{y^3}$$

$$y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{x}{y^4} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{2}{y^3} \right) + 2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0 \leftarrow \text{Ура, не зависит от } x, y$$

$$x = v$$

$$\text{Альтернативный вариант был} \rightarrow y = \frac{v}{u}$$

$$z = \frac{w + \frac{v}{u}}{v}$$



## 1.13 21.10.2019

### 1.13.1 Продолжаем делать примеры

#### Пример (3475)

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

$$x, y, z(x, y) \rightarrow u, v, w(u, v)$$

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$$

#### Решение

Выразим старые переменные через новые:

$$x = u, \quad y = \frac{u}{uv + 1}, \quad z = \frac{u}{uw + 1}$$

Можем составить тождество:

$$\frac{u}{uw + 1} = z(x, y) = z(u, \frac{u}{uv + 1})$$

Продифференцируем ЛЧ:

$$\Rightarrow \left( \frac{u}{uw + 1} \right)'_u = \frac{(uw + 1) - (w + uw'_u)u'}{(uw + 1)^2} = \frac{1 - uw'_u u'}{(uw + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{u}{uw + 1} \right)'_v = \frac{-u^2 w'_v}{(uw + 1)^2}$$

Теперь продифференцируем ПЧ и составим систему:

$$\begin{cases} z \left( u, \frac{u}{uv + 1} \right)'_u = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{1(uv + 1) - v}{(uv + 1)^2} \right) = \frac{1 - uw'_u u'}{(uw + 1)^2} \\ z \left( u, \frac{u}{uv + 1} \right)'_v = \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{-u^2}{(uv + 1)^2} \right) = \frac{1 - uw'_u u'}{(uw + 1)^2} \end{cases}$$

Мы нашли то что хотели:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{w'_v (uv + 1)^2}{(uw + 1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - u^2 w'_u}{(uw + 1)^2} - \frac{w'_v (vu + 1)^2}{(uw + 1)^2} \frac{1}{(uv + 1)^2}$$

## Пример

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = xy - z$$

## Решение

Составим тождество

$$xy - z = w(x + y, x - y) = w(u, v)$$

Дифференцируем по  $x$ :

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} + \frac{\partial w}{\partial v} = y - z'_x$$

$$w'_x = (xy - z)'_x = y - z'_x$$

Дифференцируем по  $y$ :

$$\frac{\partial w}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial w}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=-1} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} = x - z'_y$$

$$w'_y = (xy - z)'_y = x - z'_y$$

$$z'_x = y - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}}_{w(u,v)=h(x+y, x-y)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h(\underbrace{x+y}_u, \underbrace{x-y}_v) \right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v} = - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

из начальных уравнений

$$z'_y = x + \frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y} (h_1(x+y, x-y)) = \frac{\partial h_1}{\partial u} - \frac{\partial h_1}{\partial v} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

## 1.14 24.10.2019

### 1.14.1 Экстремумы

#### Теорема (необходимое условие лок. экстремума)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $x^0$  - внутр. точка D,  $f$  - диф. в  $x^0$

$$\text{в } x^0 \text{ лок. экстр.} \Rightarrow \forall j \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = 0$$

#### Опр

$x^0$  - стационарная, если  $\forall g \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = 0$

#### Пример

$f = x^3 \quad f'(0) = 0$ , но  $x_0 = 0$  - не экстр. точка

#### УТВ

Достаточное условие лок. экстремума: Пусть  $f \in C^2$ ,  $x^0$  - стационарная точка, тогда:

1.  $d^2 f$  - строго пол. определен  $\Rightarrow$  в  $x^0$  лок. мин.

2.  $d^2 f$  - отриц. опр.  $\Rightarrow$  лок. макс.

3.  $\exists e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n : \left. \begin{array}{l} d^2 f(x^0)[e_1] > 0 \\ d^2 f(x^0)[e_2] < 0 \end{array} \right| \Rightarrow$  в  $x^0$  нет экстр.

$$d^2 f = \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = dx^T A dx$$

$$dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad A = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$$

#### Опр

Кв. форма пол. определена  $\Leftrightarrow$  она принимает пол. значения на вект  $\neq 0$

Кв. форма отр. определена  $\Leftrightarrow$  -/- отр. знач.

$$f(x) = f(x^0) + d^2 f(x^0)[x - x^0] + o(|x - x^0|^2)$$

## Теорема (критерий Сильвестра)

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \quad a_{ij} = a_{ji} \quad F(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j$$

Кв. форма пол. опр.  $\Leftrightarrow A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$

Кв. форма отр. опр.  $\Leftrightarrow A_1 < 0, A_2 < 0, \dots, A_n < 0$

$$A_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^k) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \dots & & & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix}$$

## Пример (n=2)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\Rightarrow \mathbb{R} & (x_0, y_0) - \text{стац.} \\ (x, y) &\rightarrow f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$x^0$  - лок. мин  $\Leftrightarrow A > 0$  и  $AC - B^2 > 0$

$x^0$  - лок. макс  $\Leftrightarrow A < 0$  и  $AC - B^2 < 0$

Если  $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$  нет экстр.  
упр.

## Пример

$$f = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y + 1 = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow (1, 0) - \text{стац. точка}$$

$$d^2 f = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 2 > 0$$

$$AC - B^2 = 5 > 0$$

$\Rightarrow (1, 0) - \text{лок. экстр.}$

## 1.15 28.10.2019

### 1.15.1 Экстремумы

#### Пример

Найти экстремумы

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$$

#### Решение

Найдем первые производные и приравняем к 0:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \\ f'_y = 2y - 6 = 0 \\ f'_z = -2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \quad y = -3 \quad z = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = \det \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2 \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \quad A_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8$$

$$\partial^2 f = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$$

$$d^2 f(e_1) > 0 \quad \left( \overset{dx}{1}, \overset{dy}{1}, \overset{dz}{0} \right)$$

$$d^2 f(e_2) < 0 \quad (0, 0, 1)$$

$$d^2 f = (dx + dy)^2$$

$$f(x, -x)$$

#### Пример

$$f(x, y, z) = (x + 7z)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\begin{cases} f'_x = e^{-(\cdot)} + (x + 7z)(-2x)e^{-(\cdot)} = 0 \\ f'_y = (x + 7z)(-2y)e^{-(\cdot)} = 0 \\ f'_z = 7e^{-(\cdot)} + (x + 7z)(-2z)e^{-(\cdot)} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \pm \frac{1}{10}$$

Можно не дифференцировать всё, т.к. нас интересуют только слагаемые, которые мы обнуляем

$$f''_{xx} \stackrel{\text{в инт. точке}}{\sim} (-4x-14z)e^{(\cdot)} \quad f''_{yy} \sim -2(x+7z)e^{(\cdot)} \quad f''_{zz} \sim (-28z-2x)e^{(\cdot)}$$

$$f''_{xy} \sim 0 \quad f''_{xz} = (-14x)e^{(\cdot)} \quad f''_{yz} = 0$$

Матрица для точки  $x = \frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \frac{1}{10}$ :

$$\begin{pmatrix} -102 & 0 & -14 \\ 0 & -100 & 0 \\ -14 & 0 & -198 \end{pmatrix}$$

$$A_1 < 0 \quad A_2 > 0 \quad A_3 < 0 \Rightarrow \text{лок. max}$$

Матрица для точки  $x = -\frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = -\frac{1}{10}$ :

$$\begin{pmatrix} 102 & 0 & 14 \\ 0 & 100 & 0 \\ 14 & 0 & 198 \end{pmatrix}$$

$$A_1, A_2, A_3 > 0 \Rightarrow \text{лок. min}$$

### Замечание

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow (fg)'(x_0) = fg'(x_0)$$

### 1.15.2 Условный экстремум

#### Теорема

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad k < n$$

$$\text{Локальный экстр. } f \text{ при условии } \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases} \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_k - \text{лин. незав.}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$L(x) = f(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_k \varphi_j(x) - \text{ф-ия Лагранжа}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$  - мн-ли Лагранжа

Алгоритм:

1. Ищем стац. точки L:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} L(x) = 0, & j = 1 \dots n \\ \varphi_i(x) = 0, & i = 1 \dots k \end{cases} \text{ - система из } k + n \text{ уравнений}$$

$\Rightarrow$  находим стац. точки (это точки, подозр. на экстр.)

2. Нужно проверить, что в стац. точках условия  $\varphi_i = 0$  должны быть независимы в том смысле, что вектора  $\nabla \varphi_1, \dots, \nabla \varphi_k$  - лин. независимы или:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k$$

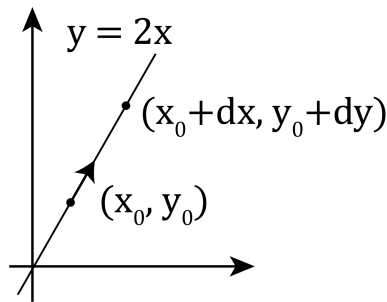
$k = 1$  означает  $\nabla \varphi_1 \neq 0$

3. Исследуем  $d^2L$  в стац. точках

$d^2L > 0$  при усл., что  $d\varphi_i = 0 \ j = 1 \dots k \Rightarrow$  усл. лок.  $\min$   
 $d^2L < 0$  при усл., что  $d\varphi_i = 0 \ j = 1 \dots k \Rightarrow$  усл. лок.  $\max$

"Пример"  $f = \frac{x^2 - y^2}{2}$

$$d^2L = dx^2 - dy^2 \mid \varphi(x) = x + \frac{1}{2}y = 0$$



$$d\varphi = dx + \frac{dy}{2} = 0$$

$$d^2L = \left(\frac{dy}{2}\right)^2 - (dy)^2 = -\frac{3}{4}dy^2 < 0$$

### Пример

$$\varphi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$f(x) = x^3$$

### Решение

Шаг 1:

$$L(x) = x^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 = x(2x + 2\lambda) \\ L'_y = 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \quad y^2 + z^2 = 1$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow y = z = 0 \quad x = 1 \quad \lambda = -\frac{3}{2} \quad x = -1 \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Шаг 2:  $(x, y, z, \lambda)$  - стационарная точка

$$d^2L = (2\lambda + 6x)d^2x + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2$$

Можем изучать при  $0 = d(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = \underset{\text{фикс}}{2x dx} + \underset{\text{фикс}}{2y dy} + \underset{\text{фикс}}{2z dz} \underset{\text{усл. на } (dx, dy, dz)}{=} 0$

Случай 2:

$$\lambda \neq 0 \quad dx = \frac{ydy + zdz}{x} = 0 \quad (y = z = 0)$$

$$d^2L = 2\lambda(dy^2 + dz^2)$$

$\lambda > 0$  - пол. опр.  $(-1, 0, 0)$ ,  $\lambda < 0$  - отр. опр.  $(1, 0, 0)$

$(-1, 0, 0)$  - лок. макс.

$(1, 0, 0)$  - лок. мин.

Случай 1:

$$x = 0 \quad \lambda = 0 \quad d^2L = 0 \text{ - метод не работает}$$

Но  $f(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$  нет лок. мин. и лок. макс.



## Пример

$$u = xyz \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_2(x + y + z)$$

$$\begin{cases} yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}xyz$$

$$\stackrel{1+2+3}{\Rightarrow} \lambda_2 = -\frac{1}{3}(yz + xz + xy)$$

$$\stackrel{4}{\Rightarrow} (x + y + z)^2 \underset{=0}{=} 2(x + y + z) \underset{=\frac{1}{2}}{=} 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} (z - 2\lambda_1)(y - x) = 0 \\ (x - 2\lambda_1)(z - y) = 0 \\ (y - 2\lambda_1)(x - z) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left( \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \mp \frac{2}{\sqrt{6}}; \pm \frac{1}{2\sqrt{6}}, \pm \frac{1}{6} \right) \text{ и ещё } \dots$$

Следующий шаг:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \text{ кроме } x = y = z$$

Следующий шаг:

$$d^2L = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2xdydz + 2ydx dz + 2zdx dy$$

Но нам известно:

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases}$$

$$\text{Посмотрим на точку } x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow dz = 0 \quad dx = -dy \Rightarrow d^2L = (4\lambda_1 - 2z)dx^2 = \pm \sqrt{6}dx^2$$

Ответ:  $\left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$  - усл. лок. мин.,  $\left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$  - усл. лок. макс.

Остальные аналогично

## 1.16 02.09.2019

### 1.16.1 Снова та же тема

#### Пример

$$f = xy + 2xz + 2yz, \quad xyz = 108$$

$$L(x) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 108)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, z) = y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, z) = x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x, y, z) = 2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$2xz + 2yz + 108\lambda = 0$$

$$x + y + 4z + \lambda \underbrace{(xz + yz)}_{=-54\lambda} = 0$$

$$xy + 2xz + 108\lambda = 0$$

$$xy + 2yz + 108\lambda = 0$$

$$\Rightarrow xz = yz \xrightarrow{z \neq 0} x = y$$

$$xyz = 4z^3 = 108 \Leftrightarrow z = 3, \quad z = y = 6$$

$$2 * 6 * 3 + 2 * 6 * 3 = -108\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$dL_{(x,y,z)} = (y + 2z - \frac{2}{3}yz)dx + (x + 2z - \frac{2}{3}xz)dy + (2x + 2y - \frac{2}{3}xy)dz$$

$$d^2_{(x,y,z)}L = 0dx^2 + 2(1 - \frac{2}{3}z)dx + dy + 2(2 - \frac{2}{3}y)dxdz + 2(2 - \frac{2}{3}x)dydz$$

$$d^2_{(x,y,z)}L = 2(1 - \frac{2}{3}3)dxdy + 2(2 - \frac{2}{3}6)dxdy + 2(2 - \frac{2}{3}6)dy = -2dxdy - 4dxdz - 4dydz \boxed{=}$$

$$d(xyz) = 0 \text{ в } (6,6,3)$$

$$= yzdx + xzdy + xydz$$

$$d_{(6,6,3)}(xyz) = 18dx + 18dy + 36dz = 0 \Rightarrow dz = -\frac{dx + dy}{2}$$

$$\boxed{=} -2dxdy + 2(dx^2 + dxdy) + 2(dy^2 + dxdy) =$$

$$dz = \frac{dx + dy}{2}$$

$$= 2(dx^2 + 2\frac{1}{2}dxdy + dy^2) > 0, \quad dx^2 + dy^2 > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

т.о. в  $(6,6,3)$  - лок. усло. мин.

### Пример

$$F(x, y, u) = 2x^2 + 2y^2 + u^2 + 8yu - u + 8 = 0$$

Найти экстр.  $u(x, y)$

### Решение

В принципе это квадратное уравнение и мы можем выразить  $u$  просто его решив, но давайте забудем, что мы так умеем...

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{4x}{2u+8y-1} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{4y+8u}{2u+8y-1} = 0 \end{cases}$$

$$F'_u = 2u + 8y - 1 \neq 0$$

$$x = 0 \quad y = -2u \text{ в стац. точке}$$

$$F(x, y, u) = 0 - \text{и это условие}$$

$$F(0, -2u, u) = 8u^2 + u^2 - 16u^2 - u + 8 = -7u^2 - u + 8 = 0$$

$$u_1 = 1 \quad u_2 = -\frac{8}{7}$$

$$\text{Подозрительные точки } (0, -2, 1) \quad F'_u(0, -2, 1) = -15 \neq 0$$

$$(0, \frac{16}{7}, -\frac{8}{7}) \quad F'_u(0, \frac{16}{7}, -\frac{8}{7}) = -1 - 14u = -15$$

В стационарных точках

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{4}{F'_u} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{4 + \overbrace{8u'_y}^{=0}}{F'_u}$$

Пояснение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{(F''_{xx} + \overbrace{F''_{xu} u'_x}^{=0})F'_u - \overbrace{F'_x}^{=0}(F''_{xu} + F''_{uu}u'_x)}{(F'_u)^2} \\ &= -\frac{F''_{xx}}{F'_u} \text{ в стац. точке!} \end{aligned}$$

$$F'_u(x, y, u(x, y))'_x$$

$$(0, -2, 1) \quad d^2u = \frac{u}{15}(dx^2 + dy^2) - \text{стр. пол. опр.} \Rightarrow \text{точка лок. min}$$

$$(0, \frac{16}{7}, -\frac{8}{7}) \quad d^2u = -\frac{4}{15}(dx^2 + dy^2) \leq 0 \Rightarrow \text{лок max}$$

### Пример

$$F(x, y, u) = (x^2 + y^2 + u^2)^2 - 8(x^2 + y^2 - u^2) = 0, \quad u > 0$$

$$F'_x = 4x(x^2 + y^2 + u^2) - 16x = 0$$

$$F'_y = 4y(x^2 + y^2 + u^2) - 16y = 0$$

ТУТ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО (я занимался файликами)

То есть стационарные точки находятся на:

$$u = 1 \quad x^2 + y^2 = 3$$

Функция постоянна на целой окружности, значит нет строго экстремума. Можем только надеяться, что в других направлениях форма положительно определена

$$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad t^2 = x^2 + y^2$$

$$(t^2 + f^2)^2 - 8(t^2 - f^2) = 0$$

$$f'_t = 0 \quad t = \sqrt{3} - \text{стац. точка } f(\sqrt{3}) = 1$$