

# 1 Некоторые определения из теории множеств. Прямое произведение, разбиение множеств. Мощность объединения

## Опр

Пустое множество ( $\emptyset$ ) - мно-во, которому  $\notin$  ни один элемент

## Опр

Число элементов мн-ва  $A$  - мощность  $|A|$

## Опр

Множество чисел от  $k$  до  $l$  обозначается  $k : l$

## Опр

Мн-во  $A$  - подмн-во мн-ва  $B$  ( $A \subset B$ ), если каждый элемент из  $A$  принадлежит  $B$

## Опр

$C$  - объединение  $A$  и  $B$  ( $A \cup B$ ), если оно состоит из всех элементов  $A$  и  $B$  ( $C = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$ )

## Опр

$\bigcap_{i=1}^n A_i, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i$  - объединение и пересечение конечного числа мн-в

$(\bigcap_{i \in I} A_i, \quad \bigcup_{i \in I} A_i)$  - аналогично

## Опр

Если пересечение мн-в пусто, то они называются дизъюнктивными

## Опр

Мн-во  $C$  называется разностью мн-в  $A$  и  $B$  ( $C = A \setminus B$ ), если оно состоит из всех эл-в, принадлежащих  $A$  и не принадлежащих  $B$

## Опр

$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$  - симметрическая разность

## Опр

Мн-во упорядоченных пар  $(i, j)$ , где  $i \in A, j \in B$  называется прямым произведением мн-в  $A$  и  $B$

$$A \times B = \{(i, j) | i \in A, \quad j \in B\}$$

### Замечание

Мощность прямого произведения  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . Аналогично произведение  $\forall$  конечного числа множеств

### Опр

Пусть  $A_1, \dots, A_k$  - ненулевые и попарно дизъюнктивные,  $M = A_1 \cap \dots \cap A_k$  и мн-во  $\{A_1, \dots, A_k\}$  называется разбиением  $M$  (если они попарно не дизъюнктивные, то это покрытие)

### Опр

Разбиение  $A$  мн-ва  $M$  называется измельчением  $B$ , если  $\forall A_i \in A$  содержится в некотором  $B_i \in B$

### Опр

Пусть  $A, B$  - размельчения мн-ва  $M$ , разбиение  $C$  называется произведением  $A$  и  $B$ , если оно является из измельчением, причем самым крупным  $C = A \cdot B$

### Теорема

Произведение двух разбиений существует

### Док-во

Предъявим разбиение, которое будет пересечением  $A = \{A_1, \dots, A_k\}$  и  $B = \{B_1, \dots, B_l\}$ , точнее  $D_{ij} = A_i \cup B_j$ ,  $i \leq k$ ,  $j \leq l$  и  $\mathcal{P} = \cup D_{ij}$  (т.е. без пустых строк). Покажем, что тогда оно самое крупное.

Пусть  $\exists F = \{F_1, \dots, F_t\}$  - измельчение  $A$  и  $B$ , тогда  $\forall F_k \quad \exists A_{i_k}, B_{j_k} : F_k A_{i_k}, B_{j_k} \Rightarrow F_k \subset (A_{i_k} \cup B_{j_k}) = D_{i_k j_k} \Rightarrow$  мельче  $F$

## 2 Вектора из нулей и единиц

Пусть мн-во  $B$  состоит из двух элементов которые отождествляются с 0 и 1, т.е.  $B = 0 : 1$

Произведение  $m$  экземпляров такого мн-ва обозначим за  $B^m = (0 : 1)^m$ , состоит из  $2^m$  эл-ов

### Опр

Вектор из нулей и единиц - упорядоченный набор из фиксированного числа нулей и единиц, т.е. эл-т мн-ва  $B^m$

Упорядоченный набор из чисел обычно называется вектором,  $m$  - размерностью вектора, каждый отдельный элемент набора - компонента вектора

### Замечание

Модели, в которых используются наборы из 0 и 1:

#### 1. Геометрическая интерпретация

Точкой в  $m$ -мерном пространстве является  $m$ -мерный вектор, каждая его компонента - одна из декартовых координат точки. Набор из 0 и 1, рассматриваемый как точка в пространстве, определяет вершину куба, построенного на ортах (единичных отрезках) координатных вероятностей

#### 2. Логическая интерпретация

Операции над векторами выполняются покомпонентно, т.е. независимо над соотв. компонентами векторов-операндов

### Пример

$x$	0	0	0	1	1
$y$	1	1	1	0	1
$x \wedge y$	0	0	0	0	1
$x \vee y$	1	1	1	1	1
$x \equiv y$	0	0	0	0	1
$x \neq y$	1	1	1	1	0

#### 3. Двоичное представление (натуральные числа)

Число представляется в виде суммы степеней 2

#### 4. Состояние памяти компьютера

#### 5. Сообщение, передаваемое по каналу связи

#### 6. Можно задавать подмножества мн-ва $1 : n$

### 3 Алгоритм перебора 0-1 векторов. Коды Грея

#### Опр

Код Грея — такое упорядочение  $k$ -ичных (обычно двоичных) векторов, что соседние вектора отличаются только в одном разряде

#### Алгоритм

$it$  - номер итерации,  $k_{it}$  - номер обновляемой компоненты

$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$it$	$k_{it}$
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	2
0	0	1	1	2	1
0	0	1	0	3	3
0	1	1	0	4	1
0	1	1	1	5	2
0	1	0	1	6	1
0	1	0	0	7	4
...				...	

Суть алгоритма: зафиксируем нулевое значение у  $m$ -й компоненты и переберем все наборы длины  $m - 1$  для ост. компонент. Перебрав их меняем значение  $m$ -й компоненты на 1 и перебираем набор длины  $m - 1$  в обратном порядке

#### Замечание\*

Явная формула для проверки  $G_i = i \oplus (\lfloor i/2 \rfloor)$

## 4 Перебор элементов прямого произведения множеств

## 5 Размещения, сочетания, перестановки без повторений

## **6 Размещения, сочетания, перестановки с повторениями**

## 7 Два алгоритма перебора перестановок. Нумерация перестановок



## 8 Задача о минимуме скалярного произведения

## 9 Числа Фибоначчи. Теорема о представлении

## 10 Перебор сочетаний. Нумерация сочетаний

## 11 Бином Ньютона и его комбинаторное использование

## 12 Свойства биномиальных коэффициентов

## 13 Основные определения теории вероятностей

## 14 Условные вероятности и формула Байеса

## **15 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины**



## 16 Схема Бернулли

## 17 Случайные числа. Схема Уолкера

## 18 Двоичный поиск и неравенство Крафта

## 19 Энтропия. 2 леммы

## 20 Теорема об энтропии

## **21    Операции над строками переменной длины**

## 22 Поиск образца в строке (Карпа-Рабина, Бойера-Мура)

## 23 Суффиксное дерево



## 24    Задача о максимальном совпадении двух строк

## 25 Код Шеннона-Фано. Алгоритм Хаффмена. 3 леммы

## 26 Сжатие информации по методу Зива-Лемпеля

## 27 Метод Барроуза-Уилера

## 28 Избыточное кодирование. Коды Хэмминга

## 29 Шифрование с открытым ключом

## 30 Сортировки (5 методов)

## **31 Информационный поиск и организация информации**





### 33 АВЛ-деревья



## 35 Биноминальные кучи

## 36 Основные определения теории графов

## 37 Построение транзитивного замыкания

## 38 Обходы графа в ширину и глубину. Топологическая сортировка





## 40 Алгоритм поиска контура и построение диаграммы порядка

## 41 Теорема о связном подграфе

## 42   Деревья. Теорема о шести эквивалентных определениях дерева

## 43    Задача о кратчайшем остовном дереве. Алгоритм Прима

## 44 Алгоритм Краскала

## 45    Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры



## 47 Задача о кратчайшем дереве путей



## 48 Сетевой график и критические пути. Нахождение резервов работ

49    Задача о максимальном паросочетании в графе.  
         Алгоритм построения



## 51 Алгоритм построения контролирующего множества

## 52    Задача о назначениях. Венгерский метод

## 53    Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ

## 54    Метод динамического программирования. Задача линейного раскроя

**55    Приближенные методы решения дискретных задач.  
      Жадные алгоритмы**



56    Алгоритмы с гарантированной оценкой точности.  
         Алгоритм Эйлера

**57 Жадные алгоритмы. Задача о системе различных  
представителей**









62 ?Алгоритм Кристофидеса (возможно будет)