

Практика по матану, 3 сем

(преподаватель Роткевич А. С.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [вконтакте](#)

Содержание

1	Функции от нескольких переменных	3
1.1	02.09.2019	3
1.1.1	Основные определения	3
1.2	05.09.2019	6
1.2.1	Примеры для \mathbb{R}^2	6
1.3	09.09.2019	8
1.3.1	Ещё больше определений	8
1.3.2	Ещё больше примеров	8
1.4	12.09.2019	10
1.4.1	Некоторые особенные примеры	10
1.4.2	Частные производные. Определения	10
1.4.3	Частные производные. Примеры	11
1.5	16.09.2019	13
1.5.1	Дифференцирование неявных функций	14
1.6	19.09.2019	15
1.6.1	Неявные функции наносят ответный удар	15
1.7	23.09.2019	17
1.7.1	Дифференциалы высших порядков	18
1.8	26.09.2019	19
1.8.1	Ничего интересного	19
1.9	03.10.2019	19
1.9.1	Ф-ла Тейлора для неявной функции	19
1.10	07.10.2019	21
1.10.1	Готовимся к к.р.	21
1.11	14.10.2019	22
1.11.1	Замена переменных в дифференциальных выражениях	22
1.12	17.10.2019	24
1.12.1	Я не знаю название этой темы	24
1.13	21.10.2019	28
1.13.1	Продолжаем делать примеры	28
1.14	24.10.2019	30

1.14.1	Экстремумы	30
1.15	28.10.2019	32
1.15.1	Экстремумы	32
1.15.2	Условный экстремум	33

1 Функции от нескольких переменных

1.1 02.09.2019

1.1.1 Основные определения

Опр

$\rho : X * X \rightarrow \mathbb{R}$ - метрика, если

1. $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

(X, ρ) - метрическое пространство

Примеры

1. $\mathbb{R} \quad \rho(x, y) = |x - y|$

2. $x \neq \emptyset \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

3. $\mathbb{R}^n, n \geq 1 \quad \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$
где $x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$

Опр

$\rho_1, \rho_2 : X * X \rightarrow \mathbb{R}$ - метрики, тогда ρ_1, ρ_2 - эквивалентны, если

(они задают одну топологию) $c_1 \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq c_2 \rho_1(x, y)$ для $c_1, c_2 > 0$ - const

Пример

$\mathbb{R}^2 \quad \rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{2\rho_2^2(x, y)}$

$\rho_2(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ (упр.)

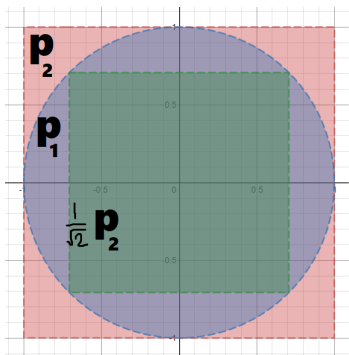
$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y)$

Пусть $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$

Если $p \rightarrow \infty \quad \rho_3 \rightarrow \rho_2$

$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$ - пространство Лебега конечномерное

(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны (ρ_1, ρ_2, ρ_3)



Опр

$\rho : X * X \rightarrow \mathbb{R}$ - метрика,

Открытым шаром в X относительно метрики ρ называется мн-во

$$B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

Замкнутым шаром называется $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leq r\}$

Сферой называется $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

Упр

Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

Пример

$$l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

l^p - пр-во Лебега (последовательностей)

Пример

$C[0, 1]$ - пр-во непр. функций

$$\rho(f, g) = \max_{[0, 1]} |f - g| \quad \text{- полна (любая фундаментальная последовательность сходится)}$$

тельность сходится)

$$\rho_p(f, g) = \left(\int_0^1 |f - g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{- не полная}$$

Опр

(X, ρ) - метр. пр-во, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $a \in X$ $x_k \rightarrow a$ в пр-ве X по метрике ρ , если $\rho(x_n, a) \rightarrow 0$ $k \rightarrow \infty$

Примеры

$$\mathbb{R}^2 \quad M_k = (x_k, y_k) \quad P = (a, b) \quad M_k \rightarrow P \text{ в евкл. метрике, т.е. } \rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \rightarrow 0 \quad x_k \rightarrow a, y_k \rightarrow b$$

Замечание

Есть ρ_1, ρ_2 - экв. метрики, то $\rho_1(x_k, a) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho_2(x_k, a) \rightarrow 0$

Упр

$$x_k \rightarrow a, x_k \rightarrow b \Rightarrow a = b \\ (\rho(a, b) \leq \rho(a, x_k) + \rho(x_k, b) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(a, b) \rightarrow 0 \Rightarrow a = b)$$

Опр

$E \subset X$, (X, ρ) - метр. пр-во, то $a \in X$ - т. сгущ. E , если $\forall \mathcal{E} \exists x \in E : \rho(a, x) < \mathcal{E}$

Опр

$f : E \rightarrow Y$ ((X, ρ) , (Y, d) - метр. пр-ва ($E \subset X$), a - т. сгущ. E , $A \in Y$, тогда A - предел отображения f в точке a , если $f(x) \rightarrow A$ при $x \in E \setminus \{a\} \rightarrow a$ (или $\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \rho(x, a) < \delta$ и $x \in E \setminus \{a\}$, то $d(f(x), A) < \mathcal{E}$)
Обозначение: $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ или $f(x) \rightarrow A$ $x \rightarrow a$

Замечание

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\mathcal{E}(A)$$

1.2 05.09.2019

1.2.1 Примеры для \mathbb{R}^2

Будем в \mathbb{R}^2 , $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Опр

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ - точка сгущения, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$, если
 $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x, a) < \delta, x \in E \Rightarrow |f(x) - F| < \mathcal{E}$

В \mathbb{R}^2 работают:

арифм. действия, теор. о двух милиционерах, критерий Коши:

Опр

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, частный случай $\exists \lim_{x \rightarrow a} f \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 :$
 $|f(x) - f(y)| < \mathcal{E} \quad 0 < \rho(x, a), \rho(y, a) < \delta$ (упр)

Упр

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \rightarrow a \quad (\rho(x_n, a) \rightarrow 0) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Обозначение: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ - предел функции в т.

(x_0, y_0)

Пример

$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, т.к. $|f(x, y)| \leq |x| + |y| \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}]{} 0$,

$\nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow y} f(x, y)$

Пример

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ - не существует, так как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1$, $f(x, 2x) = 0$

Пример

Построить $f(x, y)$ т.ч. $\forall a, b \quad \exists \lim_{t \rightarrow 0} f(at, bt) = A$, но $\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$

$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a} t \rightarrow 0$, но при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ предел - единица

Замечание

Если $\gamma(t) \quad a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t))$

Замечание

Если $\forall \gamma : \gamma(t) \rightarrow a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = A$

Замечание

$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ - не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$
 $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \neq (\text{не обязательно}) \neq f(x, y_0)$

Опр

$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A$, если
 $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \forall x, y : \max(x, y) > M \mid f(x, y) - A < \varepsilon$

Пример

$f = \frac{y}{x} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x+y}\right)$ - не имеет предела, $f(x, x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(x, x^2) = x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{1+x}\right) \rightarrow 0$

1.3 09.09.2019

1.3.1 Ещё больше определений

Опр

1. $A = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \ y > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

2. $A = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : |x| > M \ |y| > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

3. $A = \lim_{P \rightarrow \infty} f(P) \ P \in \mathbb{R}^2$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \rho(0, P) > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Замечание

Демидович по первым двум определениям

Опр

Для конечного предела: $A = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ \delta > 0 : y > M \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

1.3.2 Ещё больше примеров

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

Решение

Заметим, что $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq (x - y)^2$ для $x \neq y$

Значит дробь стремится к 0

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

Решение

При $x = y$ предел $\frac{1}{2}$

При $x = y^2$ предел 0

Пример

$$f = \sin\left(\frac{\pi y^2}{x^2 + 3y^2}\right)$$

Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} f$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f$

Решение

Первый не имеет предела ($x = y$, $x = \sqrt{y}$). Второй $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Третий 0

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{\sin(y - x^2)}{y - x^2}$$

Решение

$$z = y - x^2, z \rightarrow 0 \Rightarrow x, y \rightarrow 0$$
$$|z| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Пример

$$f = \frac{1 - \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ найти } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f$$

Решение

$$1 - \sqrt[3]{t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{3} \quad (\text{т.к. } 1 - \sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1 + \sqrt[5]{t} + \sqrt[3]{t^2}})$$

$$\text{Значит } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - (\sin^4 x + \cos^4 y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2\sin^2 y - \sin^4 y - \sin^4 x}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Заменим по Тейлору: } = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2y^2 + \bar{o}(y^3) - x^4 + \bar{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Попробуем оценить по модулю $\left| \frac{2y^2 - x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$, заметим что $y^2 \leq x^2 + y^2$,

$$x^4 \leq 2(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 \quad (\text{для } x^2 + y^2 < 1),$$

чтобы избавиться от \bar{o} оценим так:

$$\bar{o} + y^2 \leq 2(x^2 + y^2), \quad \bar{o} + x^4 \leq 2(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2$$

$$\text{Тогда } \left| \frac{2y^2 - x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 2 \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 6\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

1.4 12.09.2019

1.4.1 Некоторые особенные примеры

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} ((1+x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{1+xy}} = e$$

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ a & , else \end{cases}$$

1) $a = ?$, т.ч. f - непр

2) $a = ?$, f - непрю на прямых, проходящих через 0

Решение

$$1) a = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Замечание

$$x^n y^m \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^{n+m} \text{ и } |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

1.4.2 Частные производные. Определения

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Опр

f - диф. в точке P_0 , если $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, т.ч.

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + A\delta x + B\delta y + C\delta z + o(\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2})$$

Пусть $h = (\delta x, \delta y, \delta z)^T$

$$f(P_0 + h) = f(P_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}^T h + o(|h|)$$

$$df(x, y, z) = A dx + B dy + C dz$$

Дифференциал сопоставляет $(dx, dy, dz) \rightarrow A dx + B dy + C dz$

Опр

Частной произв. по перем. x в т. (x_0, y_0, z_0) называется предел (если \exists)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

1.4.3 Частные производные. Примеры

УТВ

f - дифф. $\Rightarrow \exists$ част. пр. и $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial x}$, $C = \frac{\partial f}{\partial x}$

Производные старшего порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \neq (\text{не всегда}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Частные производные сложной функции

$$w = f(x, y, z), \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3. (u, v) \rightarrow (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$w = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Пример

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \dots$$

Пример

$$F = f(x, xy, xyz) = f(u, v, w)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} 1 + \frac{\partial f}{\partial v} y + \frac{\partial f}{\partial w} yz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v} + uz \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) y + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} (y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) yz + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x} (yz)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + yz \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (yz)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + zy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y^2 z \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\end{aligned}$$

Пример

Дано $u = x^y$, найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x)x^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \ln^2(x)x^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y \ln(x)x^{y-1}$$

1.5 16.09.2019

Пример

Выяснить, есть ли производная у $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Решение

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad x^3 + y^3 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^3 + 0^3} - \sqrt[3]{0^3 + 0^3}}{t} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \text{не } \exists$$

Пусть $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ - диф. в точке $(0, 0) \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = 0 + x + y + \bar{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\sqrt[3]{(0 + \delta x)^3 + (0 + \delta y)^3} = \underset{=0}{f(x, y)} + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\delta x} + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\delta y} + \bar{o}(\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2})$$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + \bar{o}(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad x, y \rightarrow 0$$

$$x_n = y_n \quad \sqrt[3]{2x} = 2x + \bar{o}(x)$$

$$\sqrt[3]{2} - 2 = \bar{o}(1) \text{?!}$$

То есть из существования ч.п. не следует дифференцируемость

Теорема

Если существуют ч.п. и они непр. в рассм. точке \Rightarrow ф-ия диф. в этой точке

Пример

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0 \Rightarrow f - \text{непр. в } 0$$

$$g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x^2y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{t^3}{t^2} - 0}{t} \right) = -1$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1$$

Теорема

Если $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \exists$ в окр. точки, непр. в этой точке \Rightarrow в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

1.5.1 Дифференцирование неявных функций

Опр

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x_1, \dots, x_n; y)$, $F(x_1^0, \dots, x_n^0; y^0) = 0$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ - ф-ия задана неявно уравнением $F(x_1, \dots, x_n; y) = 0$
в откp. точке $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, если $(x = (x_1, \dots, x_n))$:

1. $\underline{\underline{F(x, f(x)) = 0}}$ (в окр. x^0)

2. $f(x^0) = y^0$

Теорема (о неявном отображении)

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x^0, y^0) = 0$, F - непр. диф. в окр (x^0, y^0) ,

$F'_y(x^0, y^0) \neq 0$, тогда:

1. $\exists y = f(x_1, \dots, x_n)$ зад. неявно ур. $F(x, y) = 0$

2. f диф. в окр. x^0

3. $\frac{\partial f}{\partial x_0} = -\frac{\partial F}{\partial x_0} / \frac{\partial F}{\partial y}$ в окр. x^0

1.6 19.09.2019

1.6.1 Неявные функции наносят ответный удар

Пример

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n), \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$x_0 = 0 \quad y(0) = ? \quad ye^y = 0 \quad y = 0$$

$$F'_y = e^y + ye^y|_{(0,0)} = 1 \neq 0$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x}{F'_y}|_{(0,0)} = -\frac{1+2x}{1} = -1 \text{ т.о. неявное отображение}$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}$$

$$y(x) = 0 - x + \bar{o}(x)$$

Что теперь делать? Способ 1:

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left(-\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}\right)' = \left(-\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}\right)' \\ &= -\frac{2}{(y(x)+1)e^{y(x)}} + \frac{1+2x}{((y(x)+1)e^{y(x)})^2} (y(x)+2)e^{y(x)}y'(x) \underset{\substack{x=0 \\ y=0}}{=} -2-4 = -6 \end{aligned}$$

Наш ряд Тэйлора:

$$y(x) = -x - 3x^2 + \bar{o}(x^2)$$

Способ 2 (метод неопр. коэффициентов)

$$y(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$F(x, y(x)) = 0 \text{ в опр } x=0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} + x + x^2 = 0$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \bar{o}(t^3), \quad t \rightarrow 0$$

$$t = y(x)$$

$$(-x + ax^2 + bx^3)[1 + (-x + ax^2 + bx^3) + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^2}{2} + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^3}{6} + o(x^2)] + x + x^2 = 0$$

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))(1 - x + (a + \frac{1}{2})x^2 + (b - a - \frac{1}{6})x^3 + \bar{o}(x^3)) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) - x + x^2(1 + a) + x^3(b - a - a - \frac{1}{2}) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) + (a + 2)x^2 + (b - 2a - \frac{1}{2})x^3 = 0$$

$$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ b - 2a - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{система должна быть диагональной}$$

$$a = -2 \quad b = -\frac{7}{2}$$

Пример

$$\cos(xy) + \sin x + e^{y+x} = 2$$

Проверить условие т.о неявной ф-ии и найти разл $y(x)$ по Тейллору до $\bar{o}(x^3)$

$$x = 0, \quad F(0, y) = 0 \rightarrow y(0)$$

$$1. \quad 1 + e^y = 2, \quad y = 0, \quad F(0, 0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$2. \quad \begin{aligned} F'_y &= -x \sin(xy) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 1 \neq 0 \\ F'_x &= -y \sin(xy) + \cos(x) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 2 \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

Методом неявных коэффициентов

$$y(x) = -2x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$\cos(-2x^2 + ax^3 + bx^4 + \bar{o}(x^4)) + \sin x + e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} = \dots$$

1.7 23.09.2019

$$F(u; x, y) = 0$$

\exists неявная ф-ия $u(x, y)$

$$\begin{aligned} & u(x_0, y_0) = u_0 \\ & F(u(x, y), x, y) = 0 \\ & \begin{aligned} F(u_0; x_0, y_0) &= 0 \\ F'_u(u_0; x_0, y_0) &\neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u'_x &= -\frac{F'_x}{F'_y} \\ u'_y &= -\frac{F'_y}{F'_u} \end{aligned} \end{aligned}$$

Ф-ла Тейлора для функций от неск. перем.

$$u : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in E \rightarrow u(x)$$

$$T_R(x, x^0) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha u(x^0)}{\partial x^\alpha} \frac{(x - x^0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{j=0}^k \frac{d^j u(x^0)[x - x^0]}{j!}$$

α - мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

Теорема

$$u \in C^k \overset{\text{в окр. } x^0}{\Rightarrow}$$

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) +'_x (x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ u''_{xx} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + u''_{xy} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{1!} + u''_{yy} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{(x - x_0)^2 (y - y_0)}{2!1!} + \dots + \overline{o}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^3 \end{aligned}$$

1.7.1 Дифференциалы высших порядков

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \rightarrow u(x, y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} dy = du[dx, dy]$$

$du : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (dx, dy) \rightarrow du[dx, dy]$ - дифференциал первого порядка

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

$$d_d^k(d^{k-1}u) = \sum_{j=0}^k C_j^k \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j}} dx^j dy^{k-j} = d^k u[dx, dy], \quad u \in C^k$$
$$= dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}$$

Понятно, что можно дальше обобщать, но делать мы это, конечно, не будем

Пример

$$f = x^y = e^{y \ln x}, \quad d^2 f \text{ в точке } (2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \ln x$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \ln x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - e^{y \ln x} \frac{y}{x^2} \stackrel{(2,1)}{=} 0$$

$$f''_{yy} = e^{y \ln x} \ln^2 \stackrel{(2,1)}{=} \ln^2 2$$

$$f''_{xy} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \ln x + e^{y \ln x} \frac{1}{x} \stackrel{(2,1)}{=} \ln 2 + 1$$

Тогда наш ответ:

$$d^2 u|_{(2,1)} = 2(\ln 2 + 1)dxdy + 2\ln^2 2dy^2$$

Пример

$$\text{Найти } d^3 f \text{ для } f = x^4 + xy^2 + yz^2 + zx^2$$

Как понять, что такое $d^3 f$ от трех переменных?

$$d^3 u = (dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z})^3 u$$

$$d^3 \stackrel{(0,1,2)}{=} 3 * 2dx^2 dz + 3 * 2dy dz^2 + 3 * 2dx^2 dy$$

1.8 26.09.2019

1.8.1 Ничего интересного

1.9 03.10.2019

1.9.1 Ф-ла Тейлора для неявной функции

Пример

$$F(x, y; u) = u^3 + 3yu - 4x = 0, \quad u(x, y) \text{ в окр. } (1, 1)$$

Задача. Написать ф. Тейлора для $u(x, y)$ с точность. до $\underbrace{o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2})^n}_{\varphi}$

$$(x, y) = (1, 1) \quad u^3 + 3u - 4 = 0 \Rightarrow (u^2 + u + 4)(u - 1) = 0 \Rightarrow u(1, 1) = 1$$

Проверим, что $F'_u(1, 1; 1) \neq 0, 3u^2 + 3y \neq 0$

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{2}{3} \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

$$u(x, y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \bar{o}(\varphi) \quad n = 1$$

Способ 1 ($n = 2, 3, \dots$)

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{4}{3u^2 + 3y} \quad u''_{xx} = \frac{4 * 6uu'_x}{(3u^2 + 3y^2)^2} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$$

$$u''_{xy} = \frac{4(6uu'_y + 3)}{(3u^2 + 3y^2)^2} = 0 \quad u''_{yy} = \left(-\frac{3u}{3u^2 + 3y} \right)'_y = -\frac{u'_y(u^2 + y) - (2uu' + 1)u}{(u^2 + y)^2} = \frac{1}{4}$$

$$u(x, y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2\right) + \bar{o}(\varphi^2)$$

Способ 2 (более высокие степени, метод неопр. коэф.)

$$u^3(x, y) = \left(1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + a(x-1)^2 + b(x-1)(y-1) + c(y-1)^2 + \bar{o}(\varphi^2)\right)^3$$

$$t = x - 1 \quad s = y - 1$$

$$0 = u^3 + 3yu - 4x = \bar{o}(\varphi^2) + 1 + 3 * 1^2 \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + at^2 + bts + cs^2 \right) +$$

$$+ 3 \left(\left(\frac{2}{3}t \right)^2 + \frac{s^2}{4} - \frac{2}{3}ts \right) + 3(s+1)u - 4(t+1) =$$

$$\begin{aligned}
& \left((s+1)u = s + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + s \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s \right) + at^2 + bts + cs^2 + \bar{o}(\varphi^2) \right) \\
& = \bar{o}(\varphi^2) + \cancel{(1+3-4)} + t \left(\cancel{3\frac{2}{3} + 3\frac{2}{3} - 4} \right) + s \left(\cancel{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} \right) + t^2 \underbrace{\left(3a + 3\frac{4}{9} + 3a \right)}_{=0} + \\
& \quad + ts \underbrace{\left(3b - 2 + 3 \left(\frac{2}{3} + b \right) \right)}_{=0} + s^2 \underbrace{\left(3c + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 3c \right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Приравняли к 0, т.к. у найденного выше $u(x, y)$ эти коэф. = 0

$$\Rightarrow a = -\frac{2}{9} \quad b = 0 \quad c = \frac{1}{8}$$

ДЗ: 3127-3186 (10 задач)

1.10 07.10.2019

1.10.1 Готовимся к к.р.

Пример

$$ue^{x+u} + y \cos(x+y) = 0 \quad (x_0, y_0) \quad o(\varphi^2) \quad o(\varphi^3) \quad \varphi = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Решение

Решил у доски

Замечание

Можно подставлять $(0, y)$, $(x, 0)$, (x, x)

Пример

$$u \cos(x-u) + e^u \sin(x+u) = 0$$

$$u(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_6x^6 + \overline{x^6} \quad x_0 = 0 \quad u(0) = 0$$

$$F'_u = \cos(x-u) + u \sin(x-u) + 2ue^{u^2} \sin(x+u) + e^{u^2} \cos(x+u) \stackrel{(0,0)}{=} 2$$

$$c_1 = u'_x(0) = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что $F(-x, -u) = -F(x, u)$

$$\Rightarrow F(x, yu) = 0 \Rightarrow F(-x, -u) = 0$$

$$u - \text{нечетна} \Rightarrow c_{2n} = 0$$

$$u(x) = -\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_4x^5 + o(x^6)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_5x^5 + o(x^6)\right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3x}{2} - c_3x^3\right) + \frac{1}{4!} \left(\frac{3x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right) + \\ & + \left(1 + \left|-\frac{x}{2} + c_3x^3\right| + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right) \\ & \left(\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_5x^5 + o(x^6)\right) - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2} + c_3x^3\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Замечание

1. Если $F(-x, u) = F(x, u)$ или $F(-x, u) = -F(x, u) \Rightarrow u - \text{четна}$
2. Если $F(-x, -u) = F(x, u)$ или $F(-x, -u) = -F(x, u) \Rightarrow u - \text{нечетна}$

1.11 14.10.2019

1.11.1 Замена переменных в дифференциальных выражениях

Замена перем. в выражениях с полными производными

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

$$\begin{array}{ll} (x, y) \rightarrow (u, v) & y'_x, y''_{xx}, \dots \text{ нужно выразить через } u'_v, u''_{vv} \\ y(x) & u(v) \end{array}$$

$$\exists x = f(u, v) \quad y = g(u, v)$$

$$y(x) = y(f(u, v)) = y(f(u(v), v)) = g(u(v), v)$$

Дифференцируем по v: $\frac{\partial g}{\partial u} u'_v + \frac{\partial g}{\partial v} = y'_x \left(\frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad (*)$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial u} u'_v + \frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

Другой способ воспринимать: $y = y(x)$

Продифференцируем ещё раз (*) по v:

$$\begin{aligned} u''_{vv} \frac{\partial y}{\partial u} + u'_v \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} u'_v + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \\ = y''_{xx} \left(\frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + y'_x \left(u''_{vv} \frac{\partial f}{\partial u} + (u'_v)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u'_v \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

Второй способ:

$$x = f(u(v), v) \quad y'_x = h(u(v), \underbrace{u'_v(v)}_w, v) \leftarrow *$$

$$y''_{xx} = \frac{\frac{\partial h}{\partial u} u'_v + \frac{\partial h}{\partial w} u''_{vv} + \frac{\partial h}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} u'_v + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

Пример

Подставить в дифференциальное уравнение выражения

$$y^4 y'' + x y y' - 2 y^2 = 0 \quad y(x) \rightarrow u(t)$$

$$x = e^t \quad y = u e^{2t}$$

Решение

Проблема в том, что мы не знаем, что такое y' , т.к. в диф. ур-ии производная по x

$$x = f(u, t) = e^t \quad y = g(u, t) = ue^{2t}$$

$$u(t)e^{2t} = y = y(e^t)$$

$$u'_t e^{2t} + 2ue^{2t} = y'_x e^t \Rightarrow y'_x(e^t) = y'_x|_{x=e^t} = (u'_t + 2u)e^t$$

$$y''_{xx} e^t = ((u'_t + 2u) + (u''_{tt} + 2u'_t)) e^t$$

Пример

$$y'y''' - 3(y'')^2 = x$$

$$y(x) \rightarrow x(y)$$

Решение

$$x = u \quad y = t \quad u(t)$$

$$(x, y) \rightarrow (u, t)$$

$$t = y(u(t)) \Rightarrow 1 = y'u' \Rightarrow y' = \frac{1}{u'}$$

$$y'' = \frac{u''}{(u')^3}$$

$$y''' = \frac{u'''(u')^3 - 3(u'')^2(u')^2}{(u')^7} = \frac{u'''}{(u')^4} - 3\frac{(u'')^2}{(u')^5}$$

Подставляя, получаем:

$$-\frac{x'''_{yyy}}{(x'_y)^5} = x$$

ДЗ: 3431-3449

1.12 17.10.2019

1.12.1 Я не знаю название этой темы

1. Замена независимой переменной

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dots)$$

$$z(x, y)$$

$$x = f(u, v)$$

$$y = g(u, v)$$

$$z = z(x, y) = z(f(u, v), g(u, v))$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

Нужно учитывать Якобиан $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$ - без этого нет

решения системы

Вторые производные:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{array} \right.$$

Пример

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \end{aligned}$$

2. Замена переменных и функций

$$(x, y, z(x, y)) \rightarrow (u, v, w(u, v))$$

$$x = f(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

$$\Rightarrow h(u, v, w(u, v)) = z(x, y) = z(f(u, v, w(u, v)), g(u, v, w(u, v)))$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \\ \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} = \dots \\ \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \dots \end{cases}$$

Пример

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

$$(x, y, z(x, y)) \rightarrow (r, \varphi, z(r, \varphi))$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \varphi)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = 1$$

Наша зависимость:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 + (\dots + \dots)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 \end{aligned}$$

Упр

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

3. Новые переменные выражены через старые

$$(x, y, z(x, y)) \rightarrow (u, v, w(u, v))$$

$$u = p(x, y, z)$$

$$v = q(x, y, z)$$

$$w = r(x, y, z)$$

$$\Rightarrow r(x, y, z(x, y)) = w = w(u, v) = w(p(x, y, z(x, y)), q(x, y, z(x, y)))$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = F\left(\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, x, y, z\right)$$

Проблема в том, что он выражен через старые переменные, а нужно как-то выражать через новые (u, v, w)

$$\begin{array}{ll} u = p(x, y, z) & x = f(u, v, w) \\ \text{Можно попробовать через} & v = q(x, y, z) \rightarrow y = g(u, v, w) \\ & w = r(x, y, z) & z = h(u, v, w) \end{array}$$

Пример

$$y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

$$u = \frac{x}{y} \quad v = x \quad w = xz - y$$

$$xz(x, y) - y = w(u, v) = w\left(\frac{x}{y}, x\right)$$

Выражение через старые переменные тут лучше, потому что нам нужно считать меньше производных

$$x \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = \frac{\partial w}{\partial u} \left(-\frac{x}{y^2} \right)$$

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(-\frac{x}{y^2} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{2x}{y^3}$$

$$y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{x}{y^4}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{2}{y^3}\right)+2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{2}{x}$$

$$\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0\leftarrow \text{Ура, не зависит от x,y}$$

$$x=v$$

$$\text{Альтернативный вариант был} \quad \rightarrow \quad y=\frac{v}{u}$$

$$z=\frac{w+\frac{v}{u}}{v}$$

1.13 21.10.2019

1.13.1 Продолжаем делать примеры

Пример (3475)

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

$$x, y, z(x, y) \rightarrow u, v, w(u, v)$$

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$$

Решение

Выразим старые переменные через новые:

$$x = u, \quad y = \frac{u}{uv + 1}, \quad z = \frac{u}{uw + 1}$$

Можем составить тождество:

$$\frac{u}{uw + 1} = z(x, y) = z(u, \frac{u}{uv + 1})$$

Продифференцируем ЛЧ:

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{uw + 1} \right)'_u = \frac{(uw + 1) - (w + uw'_u)u'}{(uw + 1)^2} = \frac{1 - uw'_u u'}{(uw + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{uw + 1} \right)'_v = \frac{-u^2 w'_v}{(uw + 1)^2}$$

Теперь продифференцируем ПЧ и составим систему:

$$\begin{cases} z \left(u, \frac{u}{uv + 1} \right)'_u = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{1(uv + 1) - v}{(uv + 1)^2} \right) = \frac{1 - uw'_u u'}{(uw + 1)^2} \\ z \left(u, \frac{u}{uv + 1} \right)'_v = \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{-u^2}{(uv + 1)^2} \right) = \frac{1 - uw'_u u'}{(uw + 1)^2} \end{cases}$$

Мы нашли то что хотели:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{w'_v (uv + 1)^2}{(uw + 1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - u^2 w'_u}{(uw + 1)^2} - \frac{w'_v (vu + 1)^2}{(uw + 1)^2} \frac{1}{(uv + 1)^2}$$

Пример

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = xy - z$$

Решение

Составим тождество

$$xy - z = w(x + y, x - y) = w(u, v)$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} + \frac{\partial w}{\partial v} = y - z'_x$$

$$w'_x = (xy - z)'_x = y - z'_x$$

Дифференцируем по y:

$$\frac{\partial w}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial w}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=-1} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} = x - z'_y$$

$$w'_y = (xy - z)'_y = x - z'_y$$

$$z'_x = y - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}}_{w(u,v)=h(x+y, x-y)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x} (h(\underbrace{x+y}_u, \underbrace{x-y}_v)) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

из начальных уравнений

$$z'_y = x + \frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y} (h_1(x+y, x-y)) = \frac{\partial h_1}{\partial u} - \frac{\partial h_1}{\partial v} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

1.14 24.10.2019

1.14.1 Экстремумы

Теорема (необходимое условие лок. экстремума)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ x^0 - внутр. точка D, f - диф. в x^0

$$\text{в } x^0 \text{ лок. экстр.} \Rightarrow \forall j \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = 0$$

Опр

x^0 - стационарная, если $\forall g \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = 0$

Пример

$f = x^3 \quad f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ - не экстр. точка

УТВ

Достаточное условие лок. экстремума: Пусть $f \in C^2$, x^0 - стационарная точка, тогда:

1. $d^2 f$ - строго пол. определен \Rightarrow в x^0 лок. мин.

2. $d^2 f$ - отриц. опр. \Rightarrow лок. макс.

3. $\exists e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n : \left. \begin{array}{l} d^2 f(x^0)[e_1] > 0 \\ d^2 f(x^0)[e_2] < 0 \end{array} \right| \Rightarrow$ в x^0 нет экстр.

$$d^2 f = \sum_{i,j=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = dx^T A dx$$

$$dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$$

Опр

Кв. форма пол. определена \Leftrightarrow она принимает пол. значения на вект $\neq 0$

Кв. форма отр. определена \Leftrightarrow -/- отр. знач.

$$f(x) = f(x^0) + d^2 f(x^0)[x - x^0] + o(|x - x^0|^2)$$

Теорема (критерий Сильвестра)

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \quad a_{ij} = a_{ji} \quad F(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j$$

Кв. форма пол. опр. $\Leftrightarrow A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$

Кв. форма отр. опр. $\Leftrightarrow A_1 < 0, A_2 < 0, \dots, A_n < 0$

$$A_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^k) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ \dots & & & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Пример (n=2)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\Rightarrow \mathbb{R} & (x_0, y_0) - \text{стац.} \\ (x, y) &\rightarrow f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

x^0 - лок. мин $\Leftrightarrow A > 0$ и $AC - B^2 > 0$

x^0 - лок. макс $\Leftrightarrow A < 0$ и $AC - B^2 < 0$

Если $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ нет экстр.
упр.

Пример

$$f = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y + 1 = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow (1, 0) - \text{стац. точка}$$

$$d^2 f = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 2 > 0$$

$$AC - B^2 = 5 > 0$$

$\Rightarrow (1, 0) - \text{лок. экстр.}$

1.15 28.10.2019

1.15.1 Экстремумы

Пример

Найти экстремумы

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$$

Решение

Найдем первые производные и приравняем к 0:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \\ f'_y = 2y - 6 = 0 \\ f'_z = -2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \quad y = -3 \quad z = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = \det \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2 \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \quad A_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8$$

$$\partial^2 f = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$$

$$d^2 f(e_1) > 0 \quad \left(\overset{dx}{1}, \overset{dy}{1}, \overset{dz}{0} \right)$$

$$d^2 f(e_2) < 0 \quad (0, 0, 1)$$

$$d^2 f = (dx + dy)^2$$

$$f(x, -x)$$

Пример

$$f(x, y, z) = (x + 7z)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\begin{cases} f'_x = e^{-(\cdot)} + (x + 7z)(-2x)e^{-(\cdot)} = 0 \\ f'_y = (x + 7z)(-2y)e^{-(\cdot)} = 0 \\ f'_z = 7e^{-(\cdot)} + (x + 7z)(-2z)e^{-(\cdot)} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \pm \frac{1}{10}$$

Можно не дифференцировать всё, т.к. нас интересуют только слагаемые, которые мы обнуляем

$$f''_{xx} \stackrel{\text{в инт. точке}}{\sim} (-4x-14z)e^{(\cdot)} \quad f''_{yy} \sim -2(x+7z)e^{(\cdot)} \quad f''_{zz} \sim (-28z-2x)e^{(\cdot)}$$

$$f''_{xy} \sim 0 \quad f''_{xz} = (-14x)e^{(\cdot)} \quad f''_{yz} = 0$$

Матрица для точки $x = \frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \frac{1}{10}$:

$$\begin{pmatrix} -102 & 0 & -14 \\ 0 & -100 & 0 \\ -14 & 0 & -198 \end{pmatrix}$$

$$A_1 < 0 \quad A_2 > 0 \quad A_3 < 0 \Rightarrow \text{лок. max}$$

Матрица для точки $x = -\frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = -\frac{1}{10}$:

$$\begin{pmatrix} 102 & 0 & 14 \\ 0 & 100 & 0 \\ 14 & 0 & 198 \end{pmatrix}$$

$$A_1, A_2, A_3 > 0 \Rightarrow \text{лок. min}$$

Замечание

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow (fg)'(x_0) = fg'(x_0)$$

1.15.2 Условный экстремум

Теорема

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad k < n$$

$$\text{Локальный экстр. } f \text{ при условии } \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases} \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_k - \text{лин. незав.}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$L(x) = f(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_k \varphi_j(x) - \text{ф-ия Лагранжа}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - мн-ли Лагранжа

Алгоритм:

1. Ищем стац. точки L:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_{\nabla}} L(x) = 0, & j = 1 \dots n \\ \varphi_1(x) = 0, & i = 1 \dots k \end{cases} - \text{система из } k + n \text{ уравнений}$$

\Rightarrow находим стац. точки (это точки, подозр. на экстр.)

2. Исследуем d^2L в стац. точках

d^2L - пол. опр. при усл., что $d\varphi_i = 0 \Rightarrow$ усл. лок. min

d^2L - отр. опр. при усл., что $d\varphi_i = 0 \Rightarrow$ усл. лок. max

Пример

$$\varphi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$f(x) = x^3$$

Решение

Шаг 1:

$$L(x) = x^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 = x(2x + 2\lambda) \\ L'_y = 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \quad y^2 + z^2 = 1$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow y = z = 0 \quad x = 1 \quad \lambda = -\frac{3}{2} \quad x = -1 \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Шаг 2: (x, y, z, λ) - стац. точка

$$d^2L = (2\lambda + 6x)d^2x + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2$$

Можем изучать при 0 $= d(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = \underset{\text{фикс}}{2x dx} + \underset{\text{фикс}}{2y dy} + \underset{\text{фикс}}{2z dz} \underset{\text{усл. на } (dx, dy, dz)}{=} 0$

Случай 2:

$$\lambda \neq 0 \quad dx = \frac{ydy + zdz}{x} = 0 \quad (y = z = 0)$$

$$d^2L = 2\lambda(dy^2 + dz^2)$$

$\lambda > 0$ - пол. опр. $(-1, 0, 0)$, $\lambda < 0$ - отр. опр. $(1, 0, 0)$

$(-1, 0, 0)$ - лок. макс.

$(1, 0, 0)$ - лок. мин.

Случай 1:

$x = 0 \quad \lambda = 0 \quad d^2L = 0$ - метод не работает

Но $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ нет лок. мин. и лок. макс.