0.1 24.10.2019

0.1.1 Экстремумы

Теорема (необходимое условие лок. экстремума)

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x^0 \text{ - внутр. точка D, f - диф. в } x^0$$

$$\text{в } x^0 \text{ лок. экстр. } \Rightarrow \forall j \quad \frac{\partial f}{\partial x_0}(x^0) = 0$$

Опр

x^0 - страционарная, если $\forall g \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_0}(x^0) = 0$

Пример

$$f = x^3 \quad f'(0) = 0, \text{ но } x_0 = 0 \text{ - не экстр. точка}$$

Утв

Достаточное условие лок. экстремума: Пусть $f \in C^2$, $\quad x^0$ - страционарная точка, тогда:

1. $d^2 f$ - строго пол. определен $\Rightarrow$ в x^0 лок. мин.
2. $d^2 f$ - отриц. опр. $\Rightarrow$ лок. макс.
3. $\exists e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n : \left.\begin{matrix} d^2 f(x^0)[e_1] > 0 \\ d^2 f(x^0)[e_2] < 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ в x^0 нет экстр.

$$d^2 f = \sum_{i,j=0}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{a_{ij}} dx_i dx_j = dx^T A dx$$

$$dx = \begin{matrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{matrix} \quad A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2_{i,j=1}$$

Опр

Кв. форма пол. определена $\Leftrightarrow$ она принимает пол. значения на вект $\neq 0$
Кв. форма отр. определена $\Leftrightarrow$ -//- отр. знач.

$$f(x) = f(x^0) + d^2 f(x^0)[x - x^0] + \overline{o}(|x - x^0|^2)$$

Теорема (критерий Сильвестра)

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j$$

Кв. форма пол. опр. $\Leftrightarrow A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ ...,\ A_n > 0$
Кв. форма отр. опр. $\Leftrightarrow A_1 < 0,\ A_2 < 0,\ ...,\ A_n < 0$

$$A_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^{k}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ ... & & & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Пример (n=2)

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \Rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f(x,y) \end{array} \qquad (x_0,\ y_0) \text{ - стац.}$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & d'_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

x^0 - лок. мин $\Leftrightarrow A > 0$ и $AC - B^2 > 0$
x^0 - лок. макс $\Leftrightarrow A < 0$ и $AC - B^2 < 0$
Если $AC - B^2 > 0 \underset{\text{упр.}}{\Rightarrow}$ нет экстр.

Пример

$$f = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 2x - y - 2 & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & -x + 2y + 1 & = & 0 \end{array}\right| \Rightarrow (1, 0) \text{ - стац. точка}$$

$$d^2 f = 2dx^2 - \underset{2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{2dxdy} + 2dy^{@}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 2 > 0$$

$$AC - B^2 = 5 > 0$$

$$\Rightarrow (1,\ 0) \text{ - лок. экстр.}$$