Напоминание

$$(1) \qquad \dot{x} = X(t,x) \qquad \underset{\text{обл}}{G} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$X \in C(G), \qquad X \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(G)$$

Теорема (3) (о поведении решения при приближении к концу макс. промежутка задания)

G - огр, $\quad X$ - огр на G

$x = \varphi(t)$ - реш (1), $\quad t \in (\alpha, \beta)$ макс промеж. задания φ

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t) = \xi, \quad$ и $\quad (\beta, \xi) \in \partial G$

Док-во

$\delta > 0$

$t_1, t_2 \in (\beta - \delta, \beta)$

$\varphi(t_1) = x_1 \Rightarrow \varphi(t)$ уд З.К. (t_1, x_1)

$\Rightarrow \varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$

В частн., $\varphi(t_2) = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$

$\Rightarrow |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leqslant \left| \int_{t_1}^{t_2} \left| \underset{\leqslant M}{X(\tau, \varphi(\tau))} \right| d\tau \right|$

X - огр на $G \Rightarrow \; \exists\, M : \; |X(t,x)| \leqslant M, \qquad \forall (t,x) \in G$

$\Rightarrow |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant M \cdot |t_2 - t_1| \qquad (2)$

$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |t_2 - t_1| < \delta \;\Rightarrow\; |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < \mathcal{E}$

$\delta \leqslant \min(\beta - \alpha, \dfrac{\mathcal{E}}{M})$

$\overset{\text{кр. Коши}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{t \to \beta-} \varphi(t) = \xi$

$\underset{\forall t \in (\alpha,\beta)}{(t, \varphi(t))} \in G \;\Rightarrow\; (\beta, \xi) \in \underset{\text{замык}}{\overline{G}}$

Если $(\beta, \xi) \in G \underset{\text{T1}}{\Rightarrow} \varphi(t)$ продолж. вправо за β противореч.

$\Rightarrow (\beta, \xi) \in \overline{G} \setminus G = \partial G$

Теорема (3')

Аналогичная (3) для левого конца промежутка

Теорема (о выходе макс. продолж. решения из компакта или Еругина)

$$(1) \qquad \dot{x} = X(t, x)$$

$x = \varphi(t)$ - реш. (1) $\qquad t \in (\alpha, \beta)$ - макс. пр-к задания φ

$\underset{\text{комп}}{D} \subset G$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \quad \forall t \in (\beta - \delta, \beta) \qquad (t, \varphi(t)) \not\in D$

Док-во (от противного)

$\underset{\text{комп}}{D} \subset G$ - зафиксировали

$\forall \delta > 0 \quad \exists t \in (\beta - \delta, \beta) : \quad (t, \varphi(t)) \in D$

$\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty} \qquad \delta_k > 0 \qquad \delta_1 > \delta_2 > ... > \delta_k > \delta_{k+1} > ...$

$\delta_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0 \qquad \delta_1 < \beta - \alpha$

$\Rightarrow \ \exists t_k : \quad t_k \in (\beta - \delta_k, \beta)$ и $(t_k, \varphi(t_k)) \in \underset{\text{комп}}{D}$

$t_k \underset{k \to +\infty}{\to} \beta$

$\exists$ под/послед. $\{(t_k, \varphi(t_k))\}_{k=1}^{\infty}$, сх-ся к $(\beta, \xi) \in D \subset G$

$\Rightarrow \exists \ a > 0, \ b > 0 :$

$$D_0 = \{(t, x) : \ |t - \beta| \leqslant 2a, \ |x - \xi| \leqslant 2b\} \subset G \qquad (3)$$

$X \in C(D_0) \ \Rightarrow \exists M : \quad |X(t, x)| \leqslant M \quad \forall (t, x) \in D_0$

$h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$

$$t_k \underset{k \to +\infty}{\to} \beta \ \Rightarrow \ \exists k_1 : \ \forall k > k_1 \qquad \beta - h < t_k < \beta \qquad (4)$$

$$\varphi(t_k) \underset{k \to +\infty}{\to} \xi \Rightarrow \exists k_2 : \ \forall k > k_2 \qquad |\varphi(t_k) - \xi| < b \qquad (5)$$

фикс $k > \max(k_1, k_2) \ \Rightarrow$ вып $(4), (5)$

$D_k = \{(t, x) : \ |t - t_k| \leqslant a, \ |x - \varphi(t_k)| \leqslant b\}$

Докажем: $D_k \subset D_0$

Взяли произвольную точку $\quad (t, x) \in D_k$

$$|t-\beta| \leqslant \Big|\underbrace{t-t_k}_{\leqslant a}\Big| + \Big|\underbrace{t_k-\beta}_{\leqslant h \leqslant a}\Big| \leqslant 2a$$

$$|x-\xi| \leqslant \Big|\underbrace{x-\varphi(t_k)}_{\leqslant b}\Big| + \Big|\underbrace{\varphi(t_k)-\xi}_{\leqslant b}\Big| \leqslant 2b$$

$\Rightarrow (t,x) \in D_0$

з. Коши $\quad (t_k, \varphi(t_k))$

$\exists$ реш $x=\psi(t),$ опред на $[t_k-h,\ t_k+h]$

и реш $x=\varphi(t) \quad (t\in(\alpha,\beta))$ проходит через $(t_k,\varphi(t_k))$

из $(4): \ \beta < t_k + h$

$x = \begin{cases} \varphi(t), & t\in(\alpha,\beta) \\ \psi(t), & t\in[t_k-h,\ t_k+h] \end{cases}$ - продолжение $\varphi(t)$ вправо за β

противоречие
(опред. корректно: $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ на общ мн-ве)

1 Системы сравнимые с линейными

Напоминание

(1) $\qquad \dot{x} = X(t,x) \qquad X\in C(G), \quad X\in \mathrm{Lip}_x^{loc}(G)$

$G = \{(t,x): \quad t\in(a,b), \quad x\in\mathbb{R}^n\}$ $\qquad$ м.б $a=-\infty \quad b=-\infty$

$|x| < +\infty$

Опр

(1) - сравнима с линейной, если

$\exists\ M(t)\geqslant 0,\ N(t)\geqslant 0$ - непрер. на (a,b)

(2) $\quad |X(t,x)| \leqslant M(t)\cdot|x| + N(t) \qquad \forall t\in(a,b)$

Теорема

(1) ср с лин.

$x=\varphi(t)$ - реш. (1) $\ \Rightarrow\ \varphi(t)$ опред на (a,b)

Док-во (от противного)

$\urcorner\,\exists$ решение (1) $x = \varphi(t)$, определена на (α, β) макс. пром. задания

$(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, но $(\alpha, \beta) \neq (a, b)$

НУО $\beta < b$:

$t_0 \in (\alpha, \beta) \quad \varphi(t_0) = x_0$

$$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \qquad \forall t \in [t_0, \beta)$$

$$|\varphi(t)| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} |X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau| \leqslant |x_0| + \int_{t_0}^{t} N(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} M(\tau) |\varphi(\tau)| d\tau$$

$[t_0, \beta] \subset (a, b) \quad (\beta < +\infty)$

M - непр на $[t_0, \beta] \;\Rightarrow\; \exists L > 0 : \quad |M(t)| \leqslant L \qquad \forall t_0 \in [t_0, \beta]$

$$\int_{t_0}^{t} N(\tau) d\tau \leqslant \int_{t_0}^{\beta} N(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \underset{\forall t \in\ [t_0, \beta)}{|\varphi(t)|} \leqslant \underbrace{|x_0| + \int_{t_0}^{\beta} N(\tau) d\tau}_{\text{c - const}} + L \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau$$

$\Rightarrow$ (Лемма Гронуолла) $|\varphi(t)| \leqslant ce^{L(t-t_0)} \leqslant ce^{L(\beta - t_0)}$ (3)

$D = \{(t, x) : t \in [t_0, \beta],\ |x| \ \leqslant\ ce^{L(\beta - t_0)}\}$из (3) следует, что

$(t, \varphi(t)) \in \underbrace{D}_{\text{комп}} \forall t \in [t_0, \beta)$— противоречие с теорией о выходе макс. пр. реш-я.