1 Некоторые определения из теории множеств. Прямое произведение, разбиение множеств. Мощность объединения

Опр

Пустое множество ($\varnothing$) - мно-во, которому $\notin$ ни один элемент

Опр

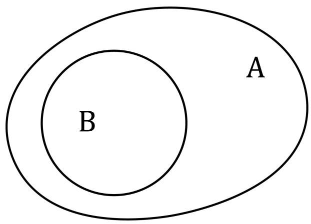
Число элементов мн-ва A - мощность $|A|$

Опр

Множество чисел от k до l обозначается $k : l$

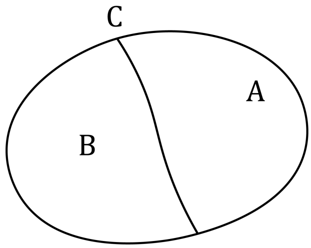
Опр

Мн-во A - подмн-во мн-ва B ($A \subset B$), если каждый элемент из A принадлежит B



Опр

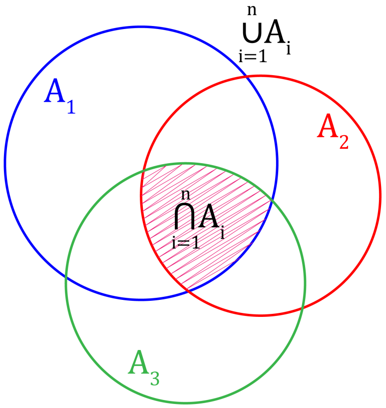
C - объединение A и B ($A \cup B$), если оно состоит из всех элементов A и B ($C = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$)



Опр

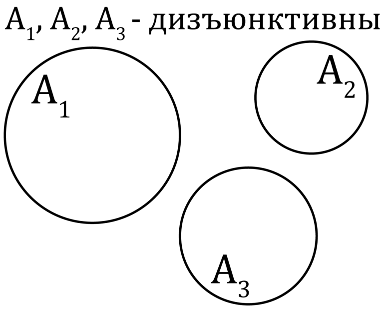
$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ - объединение и пересечение конечного числа мн-в

$$(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \quad \bigcap\limits_{i\in I} A_i) \text{ - аналогично}$$



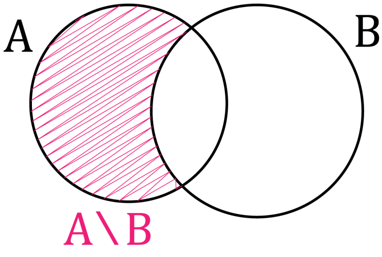
Опр

Если пересечение мн-в пусто, то они называются дизъюнктивными



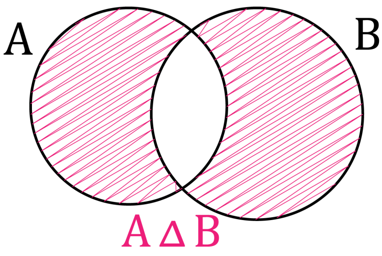
Опр

Мн-во C называется разностью мн-в A и B ($C = A \setminus B$), если оно состоит из всех эл-в, принадлежащих A и не принадлежащих B



Опр

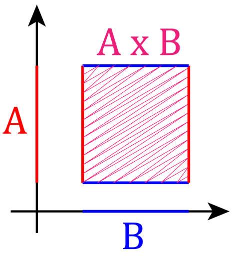
$A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$ - симметрическая разность



Опр

Мн-во упорядоченных пар (i, j), где $i \in A$, $j \in B$ называется прямым произведением мн-в A и B

$$A \times B = \{(i, j) \mid i \in A, \quad j \in B\}$$

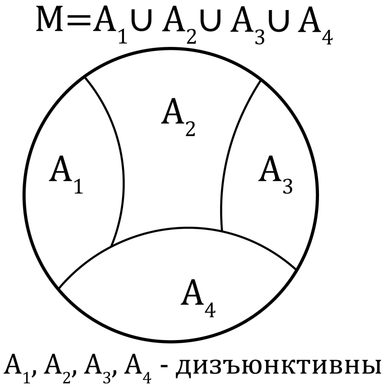


Замечание

Мощность прямого произведения $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Аналогично произведение $\forall$ конечного числа множеств

Опр

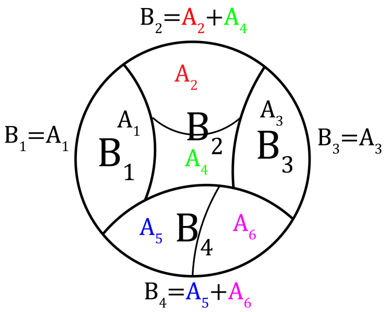
Пусть $A_1, ..., A_k$ - ненулевые и попарно дизъюнктивные, $M = A_1 \cup ... \cup A_k$, тогда мн-во $\{A_1, ..., A_k\}$ называется разбиением M
(если они попарно не дизъюнктивные, тогда это покрытие)



Опр

Разбиение A мн-ва M называется измельчением B, если $\forall A_i \in A$ содержится в некотором $B_i \in B$

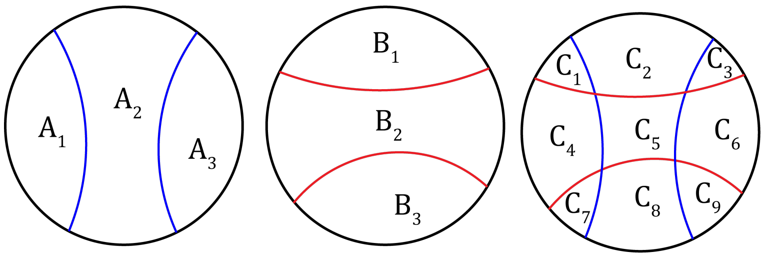
A, B - разбиения M



A - измельчение B

Опр

Пусть A, B - размельчения мн-ва M, разбиение C называется произведением A и B, если оно является из измельчением, причем самым крупным $C = A \cdot B$



C - произведение разбиений A и B

Замечание

На картинке это будет

Теорема

Произведение двух разбиений существует

Док-во

Предъявим разбиение, которое будет пересечением $A = \{A_1, ..., A_k\}$ и $B = \{B_1, ..., B_l\}$, точнее $D_{ij} = A_i \cup B_j, \quad i \leqslant k, \quad j \leqslant l$ и $\mathcal{P} = \cup D_{ij}$ (т.е. без пустых строк). Покажем, что тогда оно самое крупное.

Пусть $\exists F = \{F_1, ..., F_t\}$ - измельчение A и B, тогда $\forall F_k \quad \exists A_{i_k}, \ B_{i_k} : F_k A_{i_k}, \ B_{i_k} \Rightarrow F_k \subset (A_{i_k} \cup B_{i_k}) = D_{i_k j_k} \Rightarrow$ мельче F