

Лекции по геометрии, 3 сем

(преподаватель Солянин А. А.)
Записали Костин П.А., Щукин И.В.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [ВКонтакте](#)

Содержание

1 Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей (в \mathbb{R}^3)

1.1 Дифференциальная геометрия кривых

1.1.1 Понятие кривой

Опр

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$
2. Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ (особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)
3. Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x, y) = 0$

Пример

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Теорема (о неявной функции)

$F(x, y) = 0$, F - дифференцируема ($\exists \frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ - в окр. (x_0, y_0)). $F(x_0, y_0) = 0$
Если $\frac{dF}{dy}(x_0, y_0) \neq 0 \rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E}) \subset \mathbb{R} F(x, f(x)) = 0$

Напоминание

$$\frac{dF}{dx}|_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$y = f(x) \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$$

$\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0$: если $\rho(t, t_0) < \delta$, то $\rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$ ($\rho(t, t_0) = |t - t_0|$,

$$f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}$$

Св-ва пределов:

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \pm g(t)) = \lim f(t) \pm \lim g(t)$
2. $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t); g(t)) = (\lim f(t); \lim g(t))$ - скалярное умножение
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t)xg(t)) = \lim f(t)x \lim g(t)$

Док-во

$\lim f(t) = (\lim x(t), \lim y(t), \lim z(t))$, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем $\delta : |x(t) - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$, аналогично $|y(t) - y_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ и $|z(t) - z_0| < \frac{\varepsilon}{3}$
 Значит $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$

Опр

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Свойства

1. $(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm g'(t)$
2. $(cf(t))' = cf'(t)$
3. $(f(t); g(t))' = (f'(t); g'(t))$
4. $(f(t)xg(t))' = f'(t)xg(t) + f(t)xg'(t)$
5. $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

Доказывается через $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Докажем векторное произведение $(f(t)xg(t))'|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)xg(t) - f(t_0)xg(t_0)}{t - t_0} =$
 $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)xg(t) - f(t_0)xg(t) + f(t_0)xg(t) - f(t_0)xg(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f(t) - f(t_0))xg(t)}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t_0)x(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} =$
 $f'(t_0)xg(t_0) + f(t_0)xg'(t_0)$

Пример

Контрпример (т. Лагранжа) - не всегда верна

$$\text{Можно ли } \int_a^b \vec{f}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right)$$

$$\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$$

$$\vec{F}(b) - \vec{F}(a) = \int_a^b \vec{f}(t) dt$$

$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \dots \right) = (X(b) - X(a) + \dots \text{ (по ф-ле Н-Л)})$$

Опр

Гладкая кривая - образ вектороднозначной функции

Опр

Кривая называется регулярной, если
существует производная и $f'(t) \neq \vec{0}$

Опр

Кривая называется бирегулярной, если
существует вторая производная и $f''(t) \nparallel f'(t)$

Опр

Параметризации $\vec{f}(t), \vec{g}(t)$ ($f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$) эквивалентны,
если \exists биекция $\tau: [a, b] \rightarrow [c, d]: \tau(a) = c, \tau(b) = d, f(t) = g(\tau(t))$

Опр

Гладкая кривая - класс эквивалентности параметризации

Док-во

Докажем, что экв. параметризации - отношение эквивалентность:

1. (рефл.) $\tau = id$
2. (симм.) $f(t) = g(\tau(t)), g(t) = f(\tau(t))$
3. (тран.) $f(t) = g(b(t)), g(t) = h(\tau(t)), f(t) = h(\tau(b(t)))$

Лемма

$\vec{f}(t)$ - вектор-функция (регулярная), $|\vec{f}(t)| = 1 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$

Док-во

$(f(t); f(t)) = 1 \rightarrow 0 = (f(t); f(t))' = 2(f'(t); f(t)). f(t) \neq 0$ и
 $f'(t) \neq 0 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$

Теорема

$\vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) + \vec{f}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\vec{f}''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{\vec{f}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n$, если $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{g}(t)}{(t - t_0)^n} = \vec{0}$

1.1.2 Длина кривой

Опр

Пусть есть кривая $\vec{f}(t)$, $t \in [a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

$$a) \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$б) \lim_{\max_{i=1..n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \dots$$

-длина кривой

Утв

Определения а) и б) эквивалентны

Опр

Прямая называется спрямляемой, если её длина конечна

Опр

Если $|\vec{f}(t)|$ - интегр, то спрямляемая

Пример

$$y = \sin \frac{1}{x} \quad (0, 1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во

$$\Delta_i t = t_i - t_{i-1}, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i], \Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \right| &\leq \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| = I + II \end{aligned}$$

$$II \leq \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \Delta_i t - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \Delta_i t$$

$f'(t)$ - непр на $[a, b] \Rightarrow$ равномерно непр. на $[a, b]$ (м. Кантора)

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ если } |\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$$

$$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}, \text{ если } |\sigma_i - \tau_i| < \delta$$

$$II \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \Delta_i t = \mathcal{E}(b-a) \xrightarrow{\mathcal{E} \rightarrow 0} 0$$

$$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leq ||f'(\tau_i)| - |f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \Delta_i t$$

Опр

Параметризация $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Лемма

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ - монотонная биекция ($\tau' > 0$), тогда $f \circ \tau : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Длина кривой (f) не зависит от перепараметризации ($f \circ \tau$)

Док-во

$$\int_a^b |f'(t)| dt \stackrel{?}{=} \int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)| dt$$

$$t = \tau(s)$$

Теорема

Натуральная параметризация \exists и единственная

Док-во

Существование

Хотим подобрать $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)| ds$$

$$\sigma : [a, b] \rightarrow [0, S]$$

S - длина кривой

σ - возрастающая и дифф. ($\sigma'(t) = |f'(t)|$)

σ - биекция $\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$

$$\int_0^t |(f \circ \tau)'(s)| ds = \int_0^t |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds =$$

$$= \int_0^t |f'(\tau(s))| \frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|} ds = t$$

Единственность

$f(t)$ и $g(t)$ - нят. параметризации

$$f, g : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f - g$$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)| dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)| dt \leq \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)|| dt = 0$$

Примеры

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)} dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y' = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$\left| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

1.1.3 Ренер Френе

Опр

$$\vec{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\vec{v} = f'(t)$ - если параметризация натуральная

v - касательный вектор

Опр

Прямая, содержащая \vec{v} наз. касательной к $\vec{f}(t)$ в точке t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \vec{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \vec{g}(t)$$

$\vec{g}(t)$ - ур-е касат. прямой

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\vec{h} - \vec{f}(t_0)) = 0$$

Теорема

δ - расстояние от $f(t)$ до касат. прямой

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

Док-во