

Практика по матану, 3 сем

(преподаватель Роткевич А. С.)
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [вконтакте](#)

Содержание

1	Функции от нескольких переменных	2
1.1	02.09.2019	2
1.1.1	Основные определения	2
1.2	05.09.2019	5
1.2.1	Примеры для \mathbb{R}^2	5
1.3	09.09.2019	7
1.3.1	Ещё больше определений	7
1.3.2	Ещё больше примеров	7
1.4	12.09.2019	9
1.4.1	Некоторые особенные примеры	9
1.4.2	Частные производные. Определения	9
1.4.3	Частные производные. Примеры	10
1.5	16.09.2019	12
1.5.1	Дифференцирование неявных функций	13
1.6	19.09.2019	14
1.6.1	Неявные функции наносят ответный удар	14
1.7	23.09.2019	16
1.7.1	Дифференциалы высших порядков	17
1.8	26.09.2019	18
1.8.1	Ничего интересного	18

1 Функции от нескольких переменных

1.1 02.09.2019

1.1.1 Основные определения

Опр

$\rho : X * X \rightarrow \mathbb{R}$ - метрика, если

1. $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

(X, ρ) - метрическое пространство

Примеры

1. $\mathbb{R} \rho(x, y) = |x - y|$

2. $x \neq \emptyset \rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

3. $\mathbb{R}^n, n \geq 1 \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$
где $x = (x_1, \dots, x_n) \ y = (y_1, \dots, y_n)$

Опр

$\rho_1, \rho_2 : X * X \rightarrow \mathbb{R}$ - метрики, тогда ρ_1, ρ_2 - эквивалентны, если

(они задают одну топологию) $c_1 \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq c_2 \rho_1(x, y)$ для $c_1, c_2 > 0$ - const

Пример

$\mathbb{R}^2 \rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{2} \rho_2(x, y)$

$\rho_2(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ (упр.)

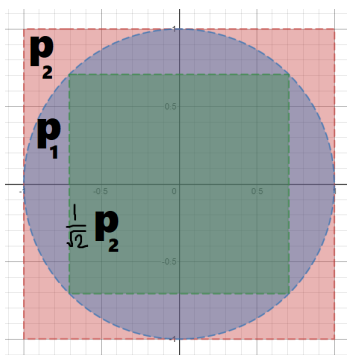
$\frac{1}{\sqrt{2}} \rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y)$

Пусть $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$

Если $p \rightarrow \infty \rho_3 \rightarrow \rho_2$

$l_p^n = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$ - пространство Лебега конечномерное

(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны (ρ_1, ρ_2, ρ_3)

**Опр**

$\rho : X * X \rightarrow \mathbb{R}$ - метрика,

Открытым шаром в X относительно метрики ρ называется мн-во

$$B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

Замкнутым шаром называется $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leq r\}$

Сферой называется $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

Упр

Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

Пример

$$l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

l^p - пр-во Лебега (последовательностей)

Пример

$C[0, 1]$ - пр-во непр. функций

$\rho(f, g) = \max_{[0, 1]} |f - g|$ - полна (любая фундаментальная последовательность сходится)

$$\rho_p(f, g) = \left(\int_0^1 |f - g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \text{не полная}$$

Опр

(X, ρ) - метр. пр-во, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $a \in X$ $x_k \rightarrow a$ в пр-ве X по метрике ρ , если $\rho(x_n, a) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Примеры

\mathbb{R}^2 $M_k = (x_k, y_k)$ $P = (a, b)$ $M_k \rightarrow P$ в евкл. метрике, т.е. $\rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ $x_k \rightarrow a$, $y_k \rightarrow b$

Замечание

Есть ρ_1, ρ_2 - экв. метрики, то $\rho_1(x_k, a) \rightarrow 0, \rho_2(x_k, a) \rightarrow 0$

Упр

$$x_k \rightarrow a, x_k \rightarrow b \Rightarrow a = b$$

$$(\rho(a, b) \leq \rho(a, x_k) + \rho(x_k, b) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(a, b) \rightarrow 0 \Rightarrow a = b)$$

Опр

$E \subset X$, (X, ρ) - метр. пр-во, то $a \in X$ - т. сгущ. E , если
 $\forall \mathcal{E} \exists x \in E : \rho(a, x) < \mathcal{E}$

Опр

$f : E \rightarrow Y$ ((X, ρ) , (Y, d) - метр. пр-ва ($E \subset X$), a - т. сгущ. E , $A \in Y$,
тогда A - предел отображения f в точке a , если

$$f(x) \rightarrow A \text{ при } x \in E \setminus \{a\} \rightarrow a$$

(или $\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \rho(x, a) < \delta$ и $x \in E \setminus \{a\}$, то $d(f(x), A) < \mathcal{E}$)

Обозначение: $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ или $f(x) \rightarrow A \text{ } x \rightarrow a$

Замечание

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\mathcal{E}(A)$$

1.2 05.09.2019

1.2.1 Примеры для \mathbb{R}^2

Будем в \mathbb{R}^2 , $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Опр

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ - точка сгущения, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = F$, если
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x, a) < \delta, x \in E \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon$

В \mathbb{R}^2 работают:

арифм. действия, теор. о двух милиционерах, критерий Коши:

Опр

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, частный случай $\exists \lim_{x \rightarrow a} f \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$
 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad 0 < \rho(x, a), \rho(y, a) < \delta$ (упр)

Упр

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \rightarrow a \quad (\rho(x_n, a) \rightarrow 0) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

Обозначение: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ - предел функции в т.
 (x_0, y_0)

Пример

$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, т.к. $|f(x, y)| \leq |x| + |y| \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}]{} 0$,
 $\nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow y} f(x, y)$

Пример

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ - не существует, так как $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1$, $f(x, 2x) = 0$

Пример

Построить $f(x, y)$ т.ч. $\forall a, b \quad \exists \lim_{t \rightarrow 0} f(at, bt) = A$, но $\nexists \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$

$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a} t \rightarrow 0$, но при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ предел - единица

Замечание

Если $\gamma(t) \quad a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t))$

Замечание

Если $\forall \gamma : \gamma(t) \rightarrow a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t)) = A$

Замечание

$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ - не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$
 $\bar{f}(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \neq (\text{не обязательно}) \neq f(x, y_0)$

Опр

$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = A$, если
 $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \forall x, y : \max(x, y) > M \implies |f(x, y) - A| < \varepsilon$

Пример

$f = \frac{y}{x} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{x+y}\right)$ - не имеет предела, $f(x, x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(x, x^2) = x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{1+x}\right) \rightarrow 0$

1.3 09.09.2019

1.3.1 Ещё больше определений

Опр

$$1. A = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y), \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \ y > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

$$2. A = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y), \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : |x| > M \ |y| > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

$$3. A = \lim_{P \rightarrow \infty} f(P) \ P \in \mathbb{R}^2, \text{ если}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : \rho(0, P) > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Замечание

Демидович по первым двум определениям

Опр

Для конечного предела: $A = \lim_{x \rightarrow a \ y \rightarrow +\infty} f(x, y)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \ \delta > 0 : y > M \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

1.3.2 Ещё больше примеров

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

Решение

Заметим, что $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leq (x - y)^2$ для $x \neq y$

Значит дробь стремится к 0

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$$

Решение

При $x = y$ предел $\frac{1}{2}$

При $x = y^2$ предел 0

Пример

$$f = \sin\left(\frac{\pi y^2}{x^2 + 3y^2}\right)$$

Найти $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow \infty} f$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f$

Решение

Первый не имеет предела ($x = y$, $x = \sqrt{y}$). Второе $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Третье 0

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{\sin(y - x^2)}{y - x^2}$$

Решение

$$z = y - x^2, z \rightarrow 0 \Rightarrow x, y \rightarrow 0$$

$$|z| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

Пример

$$f = \frac{1 - \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ найти } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f$$

Решение

$$1 - \sqrt[3]{t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{3} \quad (\text{т.к. } 1 - \sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1 + \sqrt[5]{t} + \sqrt[3]{t^2}})$$

$$\text{Значит } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - (\sin^4 x + \cos^4 y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2\sin^2 y - \sin^4 y - \sin^4 x}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Заменим по Тейлору: } = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2y^2 + \bar{o}(y^3) - x^4 + \bar{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Попробуем оценить по модулю $\left| \frac{2y^2 - x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$, заметим что $y^2 \leq x^2 + y^2$,

$$x^4 \leq 2(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2 \quad (\text{для } x^2 + y^2 < 1),$$

чтобы избавиться от \bar{o} оценим так:

$$\bar{o} + y^2 \leq 2(x^2 + y^2), \quad \bar{o} + x^4 \leq 2(x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2$$

$$\text{Тогда } \left| \frac{2y^2 - x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 2 \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 6\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

1.4 12.09.2019

1.4.1 Некоторые особенные примеры

Пример

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} (1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} ((1+x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{1+xy}} = e$$

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ a & , \text{else} \end{cases}$$

1) $a = ?$, т.ч. f - непр2) $a = ?$, f - непрю на прямых, проходящих через 0Решение

$$1) a = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Замечание

$$x^n y^m \leq (\sqrt{x^2 + y^2})^{n+m} \text{ и } |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

1.4.2 Частные производные. Определения

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, P_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Опр f - диф. в точке P_0 , если $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, т.ч.

$$f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z) = f(x_0, y_0, z_0) + A\delta x + B\delta y + C\delta z + o(\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2})$$

Пусть $h = (\delta x, \delta y, \delta z)^T$

$$f(P_0 + h) = f(P_0) + \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}^T h + o(|h|)$$

$$df(x, y, z) = A dx + B dy + C dz$$

Дифференциал сопоставляет $(dx, dy, dz) \rightarrow A dx + B dy + C dz$ ОпрЧастной произв. по перем. x в т. (x_0, y_0, z_0) называется предел (если \exists)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

1.4.3 Частные производные. Примеры

УТВ

f - дифф. $\Rightarrow \exists$ част. пр. и $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}$, $C = \frac{\partial f}{\partial z}$

Производные старшего порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \neq (\text{не всегда}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Частные производные сложной функции

$$w = f(x, y, z), \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3. (u, v) \rightarrow (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$w = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Пример

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \dots$$

Пример

$$F = f(x, xy, xyz) = f(u, v, w)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} 1 + \frac{\partial f}{\partial v} y + \frac{\partial f}{\partial w} yz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v} + yz \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) y + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} (y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) yz + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x} (yz)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + yz \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (yz)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + zy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y^2 z \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\end{aligned}$$

Пример

Дано $u = x^y$, найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x)x^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \ln^2(x)x^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y \ln(x)x^{y-1}$$

1.5 16.09.2019

Пример

Выяснить, есть ли производная у $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Решение

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad x^3 + y^3 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^3 + 0^3} - \sqrt[3]{0^3 + 0^3}}{t} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \text{ не } \exists$$

Пусть $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ - диф. в точке $(0, 0) \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = 0 + x + y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\sqrt[3]{(0 + \delta x)^3 + (0 + \delta y)^3} = f(x, y) + \underset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\delta x} + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\delta y} + \underset{=1}{o(\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2})}$$

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x + y + o(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad x, y \rightarrow 0$$

$$x_n = y_n \quad \sqrt[3]{2x} = 2x + o(x)$$

$$\sqrt[3]{2} - 2 = o(1) \text{?!}$$

То есть из существования ч.п. не следует дифференцируемость

Теорема

Если существуют ч.п. и они непр. в рассм. точке \Rightarrow ф-ия диф. в этой точке

Пример

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0 \Rightarrow f - \text{непр. в } 0$$

$$g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x^2y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{(0,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{t^3}{t^2} - 0}{t} \right) = -1$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1$$

Теорема

Если $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \exists$ в окр. точки, непр. в этой точке \Rightarrow в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

1.5.1 Дифференцирование неявных функций

Опр

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x_1, \dots, x_n; y)$, $F(x_1^0, \dots, x_n^0; y^0) = 0$

$y = f(x_1, \dots, x_n)$ - ф-ия задана неявно уравнением $F(x_1, \dots, x_n; y) = 0$
в откр. точке $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$, если $(x = (x_1, \dots, x_n))$:

1. $\underset{=}{F}(x, f(x)) = 0$ (в окр. x^0)

2. $f(x^0) = y^0$

Теорема (о неявном отображении)

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x^0, y^0) = 0$, F - непр. диф. в окр (x^0, y^0) ,

$F'_y(x^0, y^0) \neq 0$, тогда:

1. $\exists y = f(x_1, \dots, x_n)$ зад. неявно ур. $F(x, y) = 0$

2. f диф. в окр. x^0

3. $\frac{\partial f}{\partial x_0} = -\frac{\partial F}{\partial x_0} / \frac{\partial F}{\partial y}$ в окр. x^0

1.6 19.09.2019

1.6.1 Неявные функции наносят ответный удар

Пример

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n), \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$x_0 = 0 \quad y(0) = ? \quad ye^y = 0 \quad y = 0$$

$$F'_y = e^y + ye^y|_{(0,0)} = 1 \neq 0$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x}{F'_y}|_{(0,0)} = -\frac{1+2x}{1} = -1 \text{ т.о. неявное отображение}$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}$$

$$y(x) = 0 - x + \bar{o}(x)$$

Что теперь делать? Способ 1:

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left(-\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}\right)' = \left(-\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}\right)' \\ &= -\frac{2}{(y(x)+1)e^{y(x)}} + \frac{1+2x}{((y(x)+1)e^{y(x)})^2} (y(x)+2)e^{y(x)} y'(x) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -2 - 4 = -6 \end{aligned}$$

Наш ряд Тэйлора:

$$y(x) = -x - 3x^2 + \bar{o}(x^2)$$

Способ 2 (метод неопр. коэфФициентов)

$$y(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$F(x, y(x)) = 0 \text{ в опр } x=0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} + x + x^2 = 0$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \bar{o}(t^3), \quad t \rightarrow 0$$

$$t = y(x)$$

$$(-x + ax^2 + bx^3)[1 + (-x + ax^2 + bx^3) + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^2}{2} + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^3}{6} + o(x^2)] + x + x^2 = 0$$

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))(1 - x + (a + \frac{1}{2})x^2 + (b - a - \frac{1}{6})x^3 + \bar{o}(x^3)) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) - x + x^2(1 + a) + x^3(b - a - \frac{1}{2}) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) + (a + 2)x^2 + (b - 2a - \frac{1}{2})x^3 = 0$$

$$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ b - 2a - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{система должна быть диагональной}$$

$$a = -2 \quad b = -\frac{7}{2}$$

Пример

$$\cos(xy) + \sin x + e^{y+x} = 2$$

Проверить условие т.о неявной ф-ии и найти разл $y(x)$ по Тейлору до $\bar{o}(x^3)$

$$x = 0, \quad F(0, y) = 0 \rightarrow y(0)$$

$$1. \quad 1 + e^y = 2, \quad y = 0, \quad F(0, 0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$2. \quad \begin{aligned} F'_y &= -x \sin(xy) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 1 \neq 0 \\ F'_x &= -y \sin(xy) + \cos(x) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 2 \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

Методом неявных коэффициентов

$$y(x) = -2x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$\cos(-2x^2 + ax^3 + bx^4 + \bar{o}(x^4)) + \sin x + e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} = \dots$$

1.7 23.09.2019

$$F(u; x, y) = 0$$

\exists неявная ф-ия $u(x, y)$

$$\begin{aligned} F(u_0; x_0, y_0) &= 0 \\ F'_u(u_0; x_0, y_0) &\neq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u(x_0, y_0) &= u_0 \\ F(u(x, y), x, y) &= 0 \\ u'_x &= -\frac{F'_x}{F'_y} \\ u'_y &= -\frac{F'_y}{F'_u} \end{aligned}$$

Ф-ла Тейлора для функций от неск. перемен.

$$u : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in E \rightarrow u(x)$$

$$T_R(x, x^0) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha u(x^0)}{\partial x^\alpha} \frac{(x - x^0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{j=0}^k \frac{d^j u(x^0)[x - x^0]}{j!}$$

$$\alpha - \text{мультииндекс}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (x - x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

Теорема

$$u \in C^k \overset{\text{в окр. } x^0}{\Rightarrow}$$

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) +'_x (x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ u''_{xx} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + u''_{xy} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{1!} + u''_{yy} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \\ &+ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{(x - x_0)^2 (y - y_0)}{2!1!} + \dots + \bar{o}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^3 \end{aligned}$$

1.7.1 Дифференциалы высших порядков

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \rightarrow u(x, y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} dy = du[dx, dy]$$

$du : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (dx, dy) \rightarrow du[dx, dy]$ - дифференциал первого порядка

$$d^2 u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

$$d_d^k (d^{k-1} u) = \sum_{j=0}^k C_j^k \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j} dx^j dy^{k-j}} = d^k u[dx, dy], \quad u \in C^k$$

$$= dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}$$

Понятно, что можно дальше обобщать, но делать мы это, конечно, не будем

Пример

$$f = x^y = e^{y \ln x}, \quad d^2 f \text{ в точке } (2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \ln x$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \ln x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - e^{y \ln x} \frac{y}{x^2} \stackrel{(2,1)}{=} 0$$

$$f''_{yy} = e^{y \ln x} \ln^2 \stackrel{(2,1)}{=} \ln^2 2$$

$$f''_{xy} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \ln x + e^{y \ln x} \frac{1}{x} \stackrel{(2,1)}{=} \ln 2 + 1$$

Тогда наш ответ:

$$d^2 u|_{(2,1)} = 2(\ln 2 + 1) dx dy + 2 \ln^2 2 dy^2$$

Пример

$$\text{Найти } d^3 f \text{ для } f = x^4 + xy^2 + yz^2 + zx^2$$

Как понять, что такое $d^3 f$ от трех переменных?

$$d^3 u = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z}\right)^3 u$$

$$d^3 \stackrel{(0,1,2)}{=} 3 * 2 dx^2 dz + 3 * 2 dy dz^2 + 3 * 2 dx^2 dy$$

1.8 26.09.2019

1.8.1 Ничего интересного