2019-09-17

Утв

$|G| = p$, p - простое $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Док-во

$g \in G$, $g \neq e$, $\operatorname{ord} g = p$
$\Rightarrow G = \{e = g^0, g, ..., g^{p-1}\}$

Утв

H, G - группы, $\varphi : G \to H$ - изоморфизм $\Rightarrow n = \operatorname{ord} g = \operatorname{ord} \varphi(g)$

Док-во

Пусть $g^n = e,\ \varphi(g^n) = \varphi(e) \overset{?}{=} e$

$$\varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$$

Теперь докажем, что меньшего нет

$$\varphi(g)^m = e,\ m \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} m \geqslant n$$

$$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = e = \varphi(e) \quad \Rightarrow g^m = e \Rightarrow m \geqslant n$$

Опр

$H < G$, тогда H - нормльная подгруппа, если $\forall h \in H, g \in G \Rightarrow g^{-1}hg \in H$ - сопряжение элемента h с помощью элемента g, обозначается: $H \triangleleft G$

Замечание

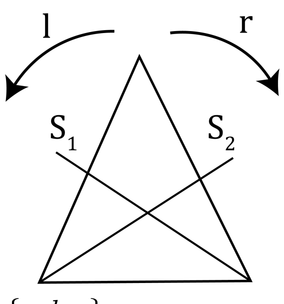
Элементы подгруппы при сопряжении переходят в элементы подгруппы

Замечание

Подгруппа любой коммунитативной группы нормальна

Пример

D_3 - 6 элементов, 3 поворота и 3 симметрии



$\{e, l, r\}$ - нормальная
$\{e, s_1\}$ - не нормальная

Утв

$H \triangleleft G \Leftrightarrow$ разбиение на Л и П кдассы смежности по H совпадают

$$\forall g \quad gH = Hg$$

Док-во

Берем произвольный элемент из левого и правого и докажем, что совпадают. Берем слева:

$$h \in H \quad gh \in gH$$

$$gh = \underbrace{(g^{-1})^{-1}hg^{-1}}_{\in H} g = h_1 g$$

Теперь справа:

$$g \in G, \quad h \in H, \quad g^{-1}hg = h_1$$

$$hg \in Hg = gH \Rightarrow gh_1, h_1 \in H$$

Опр (умножение классов смежности)

$$H \triangleleft G$$

$$g_1 H * g_2 H \overset{\text{def}}{=} g_1 g_2 H$$

Док-во (корректности)

Хотим проверить, что

$$\widetilde{g}_1 H = g_1 H, \quad \widetilde{g}_2 H = g_2 H \overset{?}{\Rightarrow} \widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 H = g_1 g_2 H$$

Аналогично прошлому доказательству

$$g_2^{-1} h_1 g_2 = h_3 \in H$$

$$\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 h = g_1 h_1 g_2 h_2 h = g_1 g_2 (\underset{=h_3}{g_2^{-1} h_1 g_2}) h_2 h$$

$$\widetilde{g}_1 H = g_1 H \Rightarrow \widetilde{g}_1 = g_1 h_1$$

$$\widetilde{g}_2 H = g_2 H \Rightarrow \widetilde{g}_2 = g_2 h_2$$

Не использовали условие $g_2^{-1} h_1 g_2 = h_3 \in H$

$$\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 H = g_1 h_1 g_2 h_2 h = g_1 g_2 (\underset{=h_3}{g_2^{-1} h_1 g_2}) h_2 h$$

Осталось доказать, что получается группа

1) Нейтральный элемент $\quad eH = H, \quad eH * gH = (eg)H = gH$

2) Ассоциативность $\quad (g_1 H + g_2 H) * g_3 H \overset{?}{=} g_1 H * (g_2 H * g_3 H)$

$$(g_1 g_2) H * g_3 H = (g_1 g_2) g_3 H$$

3) $\quad gH * g^{-1} H = (gg^{-1}) H = eH$

$$G/H$$

$$\text{Была эквивалентность: } a \sim b \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, h$$

$$G = \mathbb{Z}$$

$$H = h\mathbb{Z}, \quad g_1 g_2^{-1} \in H \text{ - мульт. запись }, \quad g_1 - g_2 \in n\mathbb{Z} \text{ - адд. запись}$$

$$[a] + [b] = [a + b]$$

Аддитивная группа кольца класса вычетов - это то же самое, что фактор группа группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$

Опр

Как в произвольной группе найти подгруппу?

$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$ - коммутатор элементов $h, g \in G$

Коммутант - множество проззведений всех возможных коммунтаторов

Обозначается $K(G) = \{[g_1, h_1]...[g_n, h_n],\ g_1, h_1 \in G\}$

Док-во (коммутант - подгруппа)

$K(G) < G$

Нейтральный элемент: $[e, e] = e$

Обратный элемент? $[g_1, h_1]...[g_n, h_n]$

Как его найти? $[g, h^{-1}]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h, g]$

$([g_1, h_1]...[g_n, h_n])^{-1} = [g_1, h_1]...[g_n, h_n]$

Значит это подгруппа

Нормальная ли? $g^{-1}[g_1, h_1]...[g_n, h_n]g$

$g^{-1}[g_1, h_1]g(g^{-1}[g_2, h_2]g)...(g^{-1}[g_n, h_n]g)$

Нужно доказать, что сопряжение коммунтатора лежит в коммутанте

$g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}g = \underbrace{g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}}_{=[g^{-1}g_1, h_1]}\underbrace{h_1g^{-1}h_1^{-1}g}_{=[h_1, g^{-1}]}$

Утв

Фактор-группа $(G/K(G))$ по коммутанту - коммунитативна

Док-во

$$g_1, g_2 \in G \qquad g_1K(G)g_2K(G) \stackrel{?}{=} g_2K(G)g_1K(G)$$

$$g_1g_2K(G) = g_1g_2K(G) \qquad g_2K(G)g_1K(G) = g_2g_1K(G)$$

$$[g_1, g_2] = g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in K(G)$$

Утв

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{mn}, \text{ если } (m,n)=1$$

Док-во

Нужно построить изоморфизм $[a]_{mn} \mapsto ([a]_n, [a]_m)$

$[a]_{mn} = [a']_{mn} \Rightarrow [a]_n = [a']_n$, $[a]_m = [a']_m$

Теперь нужно проверить биекцию

Сюръекция: $\forall b, c \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} [x]_n = [b]_n \\ [x]_m = [c]_m \end{cases}$, по КТО всё хорошо

Инъективность:

$$\begin{matrix} [a]_n = [b]_n \\ [a]_m = [b]_m \end{matrix} \Rightarrow [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

На языке сравнений:

$$\begin{matrix} a \equiv b(n) \\ a \equiv b(m) \end{matrix} \Rightarrow a \equiv b(mn)$$

На самом деле достаточно было проверить одно

Опр

$$\varphi : G \to H \text{ - гомоморфизм, если } \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

$$\text{изоморфизм} = \text{гомоморфизм} + \text{биективность}$$

$$\varphi \in \operatorname{Hom}(G,H) \text{ - множество гомоморфизмов}$$

Примеры

$$1) \quad \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$$

$$z \to |z|$$

$$2) \quad GL_n(K) \to K^*$$

$$A \to \det A$$

$$3) \quad S_n \to \{\pm 1\}$$

$$\sigma \to \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ - четн.} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ - неч.} \end{cases}$$

$$4) \quad a \in G \quad G \to G$$

$$g \to a^{-1} g a$$

$$(a^{-1} g a)(a^{-1} g_1 a) = a^{-1} g_1 g a$$