Практика по дифференциальным уравнениям, 3 сем

(преподаватель Звягинцева Т. Е.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Введение

Разрешимо в квадратурах=разрешимо в интеграллах
$y(x)$ - неизв. функция
$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$
(1) $y' = f(x, y)$ - дифференциальное уравнение 1-го порядка

Пример

$y' = y$, решение $y = ce^x$

Опр

Задача Коши: найти решение $y = \phi(x) : \phi(x_0) = y_0$ ((2) (x_0, y_0))

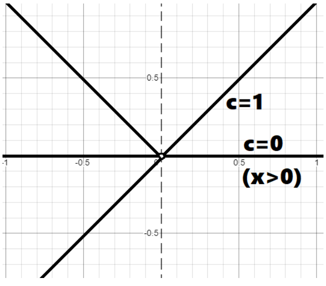
Считаем, что $f(x, y) \in C(G)$
И пока что предполагаем, что $df(x, y) \in C(G)$ (решение существует), $dy \in C(G)$ (решение единственное)
$(x_0, y_0) \in G$ $y = \phi(x)$ - решение (1) $\Rightarrow \phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$ $(y_0 = \phi(x_0))$
В каждой точке области G определено направление касательной к кривой, проходящей через эту точку

Опр

Кривые, в которых направление поля постоянно называются изоклины

Пример (стоим изоклины)

$$y' = \frac{y}{x}$$



$$x \neq 0, \quad \frac{y}{x} = c(= tg\alpha) \text{ - уравнение изоклин}$$

$$(y' = f(x, y) \Rightarrow y' = c \Rightarrow f(x, y) = c)$$

$$\Rightarrow y = cx$$

При $c = 0$ $(\operatorname{ctg}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0) \Rightarrow y = 0$

При $c = 1$ $(\operatorname{ctg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow y = x$

З. Коши для (-1,1): $y = -x,\ x < 0$

Пример (больше изоклин)

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{y}{x} = c \text{ - уравнение изоклин}$$

$$\Rightarrow c = 0\ (tg\alpha = 0) \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow c = 1\ (\alpha = \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3}\ (\alpha = \frac{\pi}{3}) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x$$

Пример (16, дополнительно)

Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнений:

$$a) \quad y' = y - x^2$$

$$b) \quad y' = f(x, y)$$

Решение

Условие перегиьа графика $y = f(x)$ - это $y'' = 0$
a) $y' = y - x^2$

$$y'' = y' - 2x = (y - x^2) - 2x = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x$$

b) Возьмем полный лифференциал от обеих частей равенства:

$$dy' = df(x, y) \Rightarrow dy' = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f dy}{\partial y dx}$$

$$\Rightarrow y'' = f'_x + f'_y y' = 0 \Rightarrow f'_x + f'_y y' = 0$$

Пример (замена переменной спасёт)

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

Пусть $z = 4x + 2y - 1 \Rightarrow z' = 4 + 2y' \Rightarrow \dfrac{z' - 4}{2} = \sqrt{z}$

$$\frac{z'}{2} = \sqrt{z} + 2 \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z} + 2} = 2dx$$

(дорешать)

<u>Пример</u> (не пугаться замен)

$$y' = \cos(y - x)$$

$$y - x = z \Rightarrow z' = y' - 1$$

$$z' = \cos z - 1$$

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$

$$\cos z = 1$$

$$z = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + 2\pi k$$

<u>Пример</u> (асимптота)

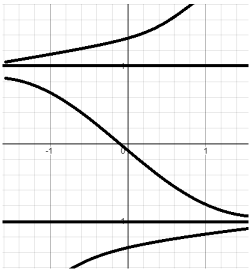
$$y' = y^2 - 1, \quad y \equiv 1, \; y \equiv -1$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow y^2 > 1$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow y^2 < 1$$

$$y'' = 2yy'$$

$$y'' = 2yy(y^2 - 1)$$

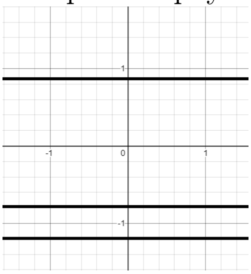


<u>Пример</u> (теоретическая задача)

Доказатать, что решение ограничено сверху или снизу

$$Y' = P_n(y), \; n = 2m - 1, \; m \in \mathbb{N}$$

У многочлена нечетной степени всегда есть вещественный корень, y_j - корень, $j = 1, ..., k$, $y = y_j$ - реш. Значит остальные решения не пересекают на графике это $\Rightarrow$ те которыые снизу, ограничены сверху, те которые сверху ограничены снизу



Пример (24, дополнительно)

Составить диф. уравнение для семейства линий $y = ax^2 + be^x$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = 2ax + be^x \\ y' = 2a + be^x \end{cases}$$

Нетрудно найти:

$$a = \frac{y' - y''}{2(x-1)}$$

Подставляя во второе уравнение:

$$b = \frac{y''x - y'}{e^x(x-1)}$$

После подстановки в исходное:

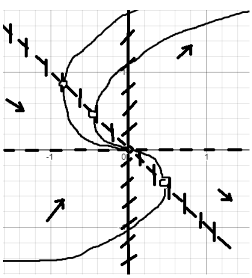
$$y''x(x-2) - y'(x^2-2) + 2(x-1)y = 0$$

2 Геометрические уравнения

Пример

$$y' = \frac{y}{x+y}$$

$$y \neq x$$



$y \equiv 0$ - реш

$y + x > 0 \equiv y > -x$

$y > 0$

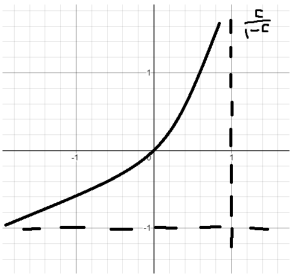
$\dfrac{y}{z+y} = c$ - ур-ие изоклин

$c = 1 \quad y = x + y$

$y = cx + cy$

$y(1-c) = cx$

$y = \dfrac{c}{1-c}x, \quad c \neq 1$

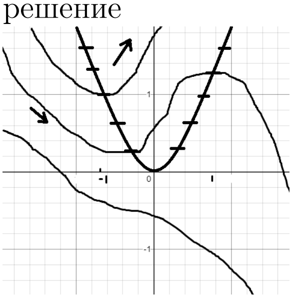


(упр.) Подставить точки

Пример

$$y' = y - x^2 \Rightarrow y = x^2 + c$$

Сократится тогда, когда уравнение второй степени $y = x^2 + ax + b$, подставим: $2x + a = ax + b \Rightarrow a = 2$ $b = 2$, значит $y = x^2 + 2x + 2$ - решение



$$y'' = y' - 2x = y - x^2 - 2x, \quad y = x^2 + 2x$$

Пример

Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

◀ Как видим из рис. 1, площадь указанного треугольника равна $S = \frac{1}{2}|NK|y$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (это вытекает из геометрического смысла производной), то $S = \frac{y^2}{2y'}$, $y' > 0$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y^2}{2} = a^2 y'.$$

Считая $y \neq 0$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{2\,dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}.$$

Отсюда находим $-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C$, или

$$y = -\frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

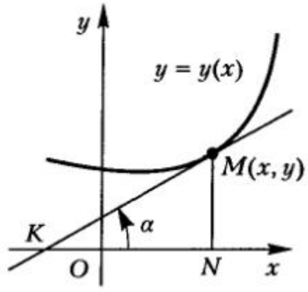


Рис. 1

Если $y' < 0$ (см. рис. 2), то $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$. Интегрируя это уравнение, получаем

$$y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}.$$

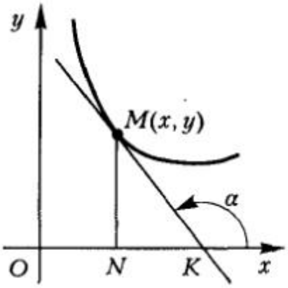


Рис. 2

Наконец, обозначив $Ca^2 = -\widetilde{C}$, оба ответа объединяем в один:

$$y = \frac{2a^2}{\widetilde{C} \pm x}. \blacktriangleright$$

3 Однородные уравнения

Опр

$M(x,y)$ - однор. ур-ие степени k, если $\forall\lambda > 0$ $M(\lambda x, \lambda y)\lambda^k M(x,y)$

Опр

Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ - однородное, если M, N - однородное одинаковой степени k

Опр

Уравнение $y' = f(x,y)$ - однородное, если $f(x,y)$ - однородное степени 0

Пример (однородное уравнение)

$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
Замена $y = tx$
То есть мы подставляем сперва $y = ay$, $x = ax$ и если а сокращаются, то уравнение однородное и можно сделать замену $y = tx$
$y' = t'x + t$
$dy = tdx + xdt$
$t'x = \operatorname{tg} t$

Дз: 73, 76, 80, 84, 107, 109, 110, 101-112 (выбрать любую), 113

Пример (пересекающиеся прямые)

$(2x-4+6)dx+(x+y-3)dy = 0$, чтобы сделать его однородным сделаем замену из системы (они не 0)
$\begin{cases} 2x - 4 + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \widetilde{x} + 1 \\ y = \widetilde{y} + 2 \end{cases}$
$(2\widetilde{x} - 4\widetilde{y})d\widetilde{x} + (\widetilde{x} + \widetilde{y})dy = 0$
$\widetilde{y} = t\widetilde{x} \Rightarrow d\widetilde{y} = \widetilde{x}dt + td\widetilde{x}$
И так далее

Пример (параллельные прямые)

$$(2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 3)dy = 0$$
$$2x + y + 1 = z \Rightarrow 4x + 2y - 3 = 2z - 5$$
$$2dx + dy = dz \Rightarrow dy = dz - 2dx$$
$$zdx - (2z - 5)(dz - 2dx) = 0$$

Решаем уравнение для $\dfrac{dz}{dx}$ и возващаемся к прежним переменным

Пример (страшное выражение)

$2xdy + (\underbrace{x^2y^4} + \underbrace{1})ydx = 0$
Степени должны быть равны при замене $y = z^m$, если это однородное, то есть $2 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{\sqrt{z}}$, если y>0
$y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$, если y<0
Но при такой замене теряем решение $y \equiv 0$
При замене y_0 на $-y_0$ получается то же самое
$x = \frac{t}{y^2} \Rightarrow = \frac{y^2dt - 2ytdy}{y^4}$
$\Rightarrow 2tdy + (t^2 + 1)(ydt - 2tdy) = 0$

ДЗ: 119, 120, 124, 127, 131, 132, 135 (любой из а-в)

Теорема

$$y' = p(x)y + q(x) \quad p(x), q(x) \in C(a, b)$$

$$\Rightarrow \exists! \text{ реш. з. Коши } (x_0, y_0) : x_0 \in (a, b) \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Замечание

1. $y' = p(x)y + q(x)$ - лин. неоднородное ($q(x) \not\equiv 0$)
2. $y' = p(x)y$ - лин. однородное

Если y_1, y_2 - реш (2), $y_{1,2} \not\equiv 0 \Rightarrow \exists c = \text{const} : y_2 = cy_1$

Док-во

$$y_1' = p(x)y_1$$

$$y_2' = p(x)y_2$$

$$(\frac{y_2}{y_1})' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{py_2 - py_2}{y_1} = 0$$

Действительно, y_1, y_2 отличаются на константу
Решение однор. $y = cy_1$ $\forall$частн. решение $y_1 \not\equiv 0$

ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, Я ОТВЛЕКСЯ НА ОБДУМЫВАНИЕ ПРОШЛОГО ДОК-ВА

4 Метод вариации произвольной переменной

1) Решаем однородное
2) Варьируем const
Найдем общеее решение л.о.у.:

$$\text{I)} \quad \frac{dy}{y} = p(x)dx$$

$$\ln|y| = \int p(x)dx + \ln|c|$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

$$\text{II)} \quad c'e^{\int p(x)dx} + ce^{\int p(x)dx}p(x) = p(x)ce^{\int p(x)dx} + q(x)$$

$$x' = q(x)e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow c(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + \widetilde{c}$$

$$y = e^{\int p(x)dx}(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + \widetilde{c})$$

$$\text{З. К. } (x_0, y_0) \quad y = e^{\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds}d\tau)$$

Пример

$$(2x+1)y' = 4x + 2y$$

I) Решим сперва такое уравнение: $(2x+1)y' = 2y$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + \ln|c|$$

$$y = c(2x+1)$$

II) $(2x+1)(2c + (2x+1)c') = 4x + 2c(2x+1)$

$$c'\frac{4x}{(2x+1)^2}$$

$$c = \int \frac{4x}{(2x+1)^2}dx = /u = 2x+1/ = \int \frac{u-1}{u^2}du =$$

$$= \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2})du = \ln|u| + \frac{1}{u} + \widetilde{c} = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + \widetilde{c}$$

Ответ: $y = (\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + \widetilde{c})(2x+1)$

$$\underbrace{y}_{\text{общее н.}} = \underbrace{(2x+1)\ln|2x+1| + 1}_{\text{частное н.}} + \underbrace{\widetilde{c}(2x+1)}_{\text{общее о.}}$$

Теорема (Бернулли)

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha} \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \text{особое реш. } y \equiv 0$$

Варьируем константу! Не делаем как в Филиппове

Пример

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$y' = -2y \Rightarrow y = ce^{-2x}$ - подставим

$c' = c^2 e^{-x}$ - нужно разделить переменные

$$\int \frac{dc}{c^2} = \int e^{-x} dx \Rightarrow \frac{1}{c} = e^{-x} + \widetilde{c} \Rightarrow c = \frac{1}{e^{-x} + \widetilde{c}}$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{e^{-x} + \widetilde{e}} e^{-2x}, \quad y \equiv 0$

ДЗ: 136-160 (найти интересные), 146/148, 161-164, 178, 173/174

Пример (162)

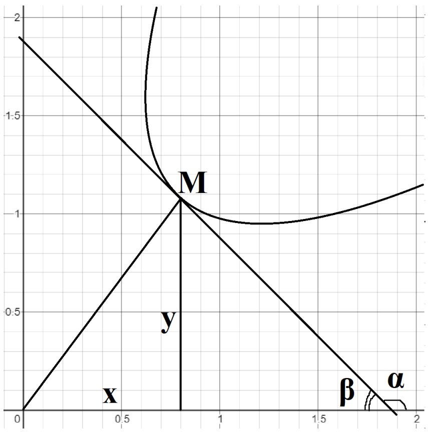
$$(x+1)(yy' - 1) = y^2$$

$$y^2 = z \Rightarrow 2yy' = z'$$

$$(x+1)(\frac{z'}{z} - 1) = z$$

Пример (174, геометрическая задача)

Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2



$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha = -y'$$

$$\frac{1}{2}(x - \frac{y}{y'})y = a^2$$

$$xy - 2a^2 = y^2 \frac{dx}{dy}$$

<u>Пример</u> (178, мат. анализ наносит ответный удар)

Найти то решение дифференциального уравнения

$$y' sin 2x = 2(y + cos x),$$

которое остается ограниченным при $x \to \frac{\pi}{2}$

<u>Решение</u>

$$y = C \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$$

Следует, что

<u>Замечание</u> (Риккати)

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (1)$$

В общем случае не интегрируется в квадратурах.

$$y = y_1(x) \text{ - реш } (1) \Rightarrow \text{замена } y = z + y_1$$

$$z' + y_1' = a(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) + b(z + y_1) + c$$

$$z' + \cancel{y_1'} = a(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) + bz + \cancel{ay_1^2 + by_1} + c$$

$$z' = (2ay_1 + b)z + az^2 \text{ - уравнение Бернулли}$$

<u>Пример</u>

Как подбирать? $y' + y^2 = x^2 + 2$

Попробуем подобрать степень x для y: $a^2x^{2n} + ... = x^2 - 2x$

$$a = 1, \quad n = 1$$

$$y = x + c, \quad -1 + x^2 + 2xc + c^2 = x^2 - 2x \Rightarrow c = 1$$

$$y = x - 1 \Rightarrow -1 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x$$

<u>Пример</u> (ещё пример)

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$$

$$y = \frac{a}{x} \Rightarrow -\frac{a}{x^2} + \frac{2a^2}{x^2} = \frac{6}{x^2}$$

$$2a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Пример (171)

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$$

$$y = e^x + z \Rightarrow z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 \overset{z \neq 0}{\Rightarrow} z = -\frac{1}{x+C}$$

Но при $z = 0$ полуаем решение $y = e^x$
Ответ: $y = e^x - \frac{1}{x+C}, \quad y = e^x$

4.1 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Опр

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ - уравнение в полных дифф, если $M, N \in C^1(G)$

$$\exists u(x,y) : du = \underbrace{M}_{\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x} dx + \underbrace{N}_{\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y} dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = u''_{xy} = u''_{yx} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Пример (187)

Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его:

$$\underbrace{(2 - 9xy^2)x}_{M}\, dx + \underbrace{(4y^2 - 6x^3)y}_{N}\, dy = 0$$

$$M'_y = -18x^2y \qquad N'_x = -19x^2y$$

$$M = u'_x \Rightarrow u = \int (2x - 9x^2y^2)dx + \varphi(y) = x^2 - 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$u'_y = -6x^3y + \varphi'(y) = N = 4y^3 - 6x^3y$$

$$\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$$

$$u(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + y^4$$

Ответ: $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$, т.к.$du = 0 \Rightarrow u = c$

Для сравнения:

$$\underbrace{2xdx}_{d(x^2)} - \underbrace{9x^2y^2dx - 6x^3ydy}_{-3(y^2\underbrace{3x^2dx}_{d(yx^3)}+x^3\underbrace{2ydy}_{d(y^2)})} + \underbrace{4y^3dy}_{d(y^4)} = 0$$

Дифференциал произведения $d(x^3y^2)$

Пример (193)

Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его:

$$\underbrace{3x^2dx}_{d(x^3)}(1+\ln y) = \underbrace{2ydy}_{-d(y^2)} - x^3 \underbrace{\frac{1}{y}dy}_{d(\ln y)}$$

Опр

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \text{ - уравнение в полных дифф (1)}$$

$\mu = \mu(x,y)$ - инт. мн-ль (1), если $(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$ - ур. в полных лиф.

Пример (195, фокус) Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных:

$$(x^2+y^2+x)dx + ydy = 0$$

$$(x^2+y^2)dx + \underbrace{xdx+ydy}_{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)} = 0$$

$$dx + \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0$$

Значит $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$

$$dx + \frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2) = 0$$

Ответ: $x + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = c$

Пример (196, фокус) Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных:

$$(x^2+y^2+x)dx - xdy = 0$$

$$(x^2+y^2)dx + ydx - xdy = 0 \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dyx - ydx}{x^2}$$

$$(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2)dx - \underbrace{\frac{xdy - ydx}{x^2}}_{d\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\mu = \frac{1}{x^2(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2)} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

ДЗ: 167-170 (интересные), 188-194 (интересные), 196, 201, 203

5 ПРОПУЩЕННАЯ ПАРА

6 В ожидании кр...

Пример

$$xy^2(xy'+y) = 1 \qquad \text{Заметим, что } xy'+y = (xy)'$$

$$xy'+y-\frac{1}{xy^2} = 0 \qquad xy = z \Rightarrow \frac{z^2}{x}z' = 1$$

$$xdy + \frac{xy^3-1}{xy^2}dx = 0$$

$$x^2y^2dy + xy^3dx - dx = 0$$

$$\mu = ?$$

$$\underbrace{xdy+ydx}_{d(xy)} - \frac{dx}{xy^2} = 0$$

$$c = \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

Пример (203)

$$y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$$

$$yxdx + y^2dx + xydy + dy = 0$$

$$yxdx + y(\underbrace{ydx+xdy}_{d(xy)}) + dy = 0| \cdot \frac{1}{y}$$

$$xdx + d(xy) + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| + c = 0$$

Пример **(301)**

$$xy' + x^2 + xy - y$$

Док-во **(похоже на частного, на однородное не тянет, но замена проходит**

$$\frac{xy' - y}{x^2} + 1\frac{y}{x} = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

Пример **(308)**

$$x^2y' = y(x + y)$$

Док-во **(однородное/Бернулли)**

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2}$$

Пример **(309)**

$$(1 - x^2)dy + xydx$$

Док-во **(уравнение с разделяющимися переменными)**

Пример **(311)**

$$(y + y' \ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$$

Док-во **(линейное уравнение)**

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

$$x'_y y = x + 2\ln y 0 \ln^2 y$$

$$ydx - xdy(2\ln y - \ln^2 y)dy$$

Пример **(320)**

$$2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$$

Док-во **(производная произведения)**

$$(x^3y^2)' + 7 = 0'$$

<u>Пример</u> (330)

$$(1-x^2)y^2 - 2xy^2 = xy$$

<u>Док-во</u> (переменные разделяются, Бернелли)

<u>Пример</u> (333)

$$(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$$

<u>Док-во</u> (уравнение в полных дифференциалах)

$$\underbrace{\sin x dy + y\cos x dx}_{d(yx)} - ydy - x^2dx = 0$$

<u>Пример</u> (338)

$$x(x+1)(y'-1) = y$$

<u>Пример</u> (349)

$$xy' = 2\sqrt{y}\cos x - 2y$$

<u>Док-во</u> (Бернулли, вариация переменной)

<u>Пример</u> (359)

$$xy'(\ln y - \ln x) = y$$

<u>Док-во</u> (однородное)

$$y' \ln\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

<u>Пример</u> (361)

$$(2x^2y - 3y^2)y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1$$

<u>Пример</u> (368)

$$y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2$$

<u>Пример</u> (371)

$$2(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2})dx + x^3dy$$

Пример (374)

$$(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$$

Док-во (параллельные прямые)

$$2x+3y-1=z \Rightarrow 2dx+3dy=dz$$

Пример (414)

$$(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0$$

Пример (438)

$$(2x+y+5)y'=3x+6$$

Док-во (пересекающиеся прямые)

$$(2x+y+5)dy-(3x+6)dx=0$$

Замена $x+2=\widetilde{x} \quad y+1=\widetilde{y}$

7 Уравнения первого порядка, не разряшенные относительно производной

2 способа решения:

1. (a) $(y')^2=y^2 \to \left[\begin{aligned} y'&=y \\ y'&=-y \end{aligned}\right.$???

   (b) $\sin(y'-1)=0$???

2. Метод введения параметра

$$f(x,\ y,\ y')=0$$

$$y=g(x,\ y') \qquad x=h(y,\ y')$$

$$y'=\frac{gy}{gx}=p$$

$$y=g(x,\ p) \qquad x=h(y,\ p)$$

$$\underbrace{dy}_{=dpx}=dg(x,\ p) \qquad \underbrace{dx}_{\frac{dy}{p}}=dh(y,\ p)$$

Ответ $\begin{cases} x=x(p) \\ y=y(p) \end{cases}$???

<u>Пример</u> (267-286)

$$y'(x - \ln y') = 1$$

$$x = \ln y' + \frac{1}{y'}$$

$$y' = p \quad y' > 0$$

$$x = \ln p + \frac{1}{p}$$

$$\frac{dy}{p} = dx = \frac{dp}{p} - \frac{dp}{p^2}$$

$$\int dy = \int (1 - \frac{1}{p})dp$$

$$\begin{cases} y = p - \ln|p| + C \\ x = \ln p + \frac{1}{p} \end{cases}$$

<u>Пример</u> (280)

$$x^2(y')^2 = xyy' + 1$$

$$y = \frac{x^2(y')^2 - 1}{xy'} = xy' - \frac{1}{xy'}$$

$$y' = p$$

$$y'[x - \frac{1}{xp}$$

$$dy = xdppdx - \frac{1}{x^2p^2}(xdp + pdx)$$

$$pdx = xdp + pdx + \frac{1}{x^2p^2}(xdp + pdx) \quad |x^2p^2$$

$$0 = x^3pdp + xdp + pdx$$

$pdx = -(x^3p^2 + x)dp$ - уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dp} = -(x^3p + \frac{x}{p})$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{x}{p}$$

$$\int \frac{dp}{x} = -\int \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln|x| = \ln|\frac{1}{p}| + \ln|C|$$

$$x \neq 0 \quad p \neq 0$$

$$x = \frac{C(p)}{p}$$

$$\frac{C'p - C}{p^2} = \frac{-C^3}{p^2} - \frac{C}{p^2} \Rightarrow C'p = -C^3$$

$$\frac{dc}{dp}p = -c^3 \Rightarrow \int \frac{dc}{c^3} = -\int \frac{dp}{p}$$

$$\frac{C^{-2}}{2} = \ln|p| + C^* \Rightarrow \frac{1}{C^2} = 2\ln|p| + C^{**}$$

$$C = \pm(\sqrt{2\ln|p| + C^{**}})^{-1}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{p\sqrt{2\ln|p| + C^{**}}} \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2 < ... >}} + \dfrac{1}{p\sqrt{< ... >}} \end{cases}$$

<u>Пример</u>

$$y = y'x + \varphi(y') \text{ - ур. Клеро}$$

Всегда касается решения?

$$y = f(y')x + g(y') \text{ - ур. Лагранжа}$$

Всегда имеет вид линейного уравнения

<u>Док-во</u> (Клеро)

$$y = xy' - (y')^2$$

$$y' = p \quad dy = pdx$$

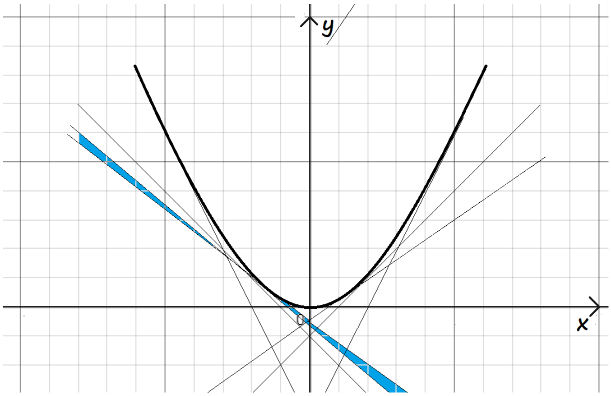
$$y = xp - p^2$$

$$\cancel{pdx} = \cancel{pdx} + xdp - 2pdp \text{ (всегда сокращается)}$$

$$0 = dp(x - 2p)$$

1. $dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$ - общее решение

2. $x = 2p \Rightarrow y = 2p^2 - p^2 = p^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases} \qquad y = \dfrac{x^2}{4}$ - особое решение



Прямые образуют параболу

Через каждую точку параболы проходит бесконечно решений

$$(y')^2 - xy^2 + y = 0$$

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

Дз: 264 - 267, 282, 269, 271, 289, 290, 292 (Лагранж)

Пример (292)

$$y = x(y')^2 - 2(y')^3$$

$$y' = p \quad y = xp^2 - 2p^3$$

$$pdx = p^2dx + 2xpdp - 6p^2dp$$

$$(p - p^2)dx = (2xp - 6p^2)dp$$

$$p = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$p = 1 \Rightarrow y = x - 2$$

$\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2x}{1-p} - \dfrac{6p}{1-p}$ - линейное уравнение