2019-3-29

Опр

L - орт. оператор на плоскости, $\det L = 1$, тогда L - поворот

e - ортнорм. базис, $[L]_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

$$a = \cos\varphi, \quad c = \sin\varphi$$

$$b = \sin\varphi, \quad d = \cos\psi$$

$$\underbrace{\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi}_{=\sin(\varphi+\psi)} = 0$$

$$\underbrace{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi}_{=\cos(\varphi+\psi)} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi + \psi = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Опр

Если e - ортогональный оператор на пл-ти, $\det L = -1$
S - какая-то осевая симметрия
Тогда:

1. $L = S \circ R_\psi$
2. $L = R_\varphi \circ S$

Рассмотрим $S^{-1} \circ L$ - ортогональный оператор с определителем 1, значит по предыдущему определению $S^{-1} \circ L = R_\varphi$

Утв (теорема Эйлера)

В трехмерном пространстве с определителем 1 является поворотом относительно некоторой оси

Следствие: берем две прямые. Поворачиваем сначала относительно одной, потом относительно другой. И их композицией будет поврот

<u>Док-во</u> (теоремы Эйлера)

L - орт. оператор в пр-ве

$$\det L = 1$$

$$\chi_L(t) \in \mathbb{R}[x], \quad \deg \chi_i = 3$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - корни

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

Два варианта:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$
2. $\lambda_1 \in \mathbb{R},\ \lambda_2 = \overline{\lambda_3}$

В 1 случае одно из λ равно 1, пусть λ_1
Во 2 случае $\lambda_1 = 1$ т.к. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\overline{\lambda_2}\lambda_3 = \lambda_1\underbrace{|\lambda_3|^2}_{=1} = \lambda_1$
С.в. остается неподвижным при повороте. Ось тоже. Значит собственный вектор при повороте и есть ось
Осталось д-ть, что ортогональное дополнение есть вращение. Тогда докажем, что наш исходный оператор - вращение относительно оси

$$\exists Lv = v$$

$$v^{\perp}$$

Докажем, что эта плоскость - инвариантное подпространство. Нужно доказать:

$$(u, v) = 0 \to (Lu, v) = 0$$

То есть результат будет тоже из ортогонального дополнения

$$(Lu, v) = (Lu, Lv) = (u, v) = 0 \text{ ч.т.д.}$$

Так как инвариантное подпространство, можем сузить L. Оно является плоскостью. Т.к. L - орт. оператор, значит он сохраняет расстояние. Т.к. S тоже сохраняет расстояние, значит L является ортоганальным оператором на плоскости. Осталось убедиться, что модуль равен 1. Если исходный оператор сохраняет расстояние, то и его сужение сохраняет ориентацию. Другой способ: построим матрицу L в базисе: V, {два ортогональных вектора на плоскости}, матрица L будет такой:

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Вместо ? будет матрица сужения. Мы должны доказать, что это матрица поворота. Определитель большой матрицы равен определителю маленькой, но т.к. большая 1, то и он 1.

По предыдущим рассуждениям - это поврот. То есть у нас есть пространство с осью, на которую оператор действует тождественно, а на другое он действует как поврот.

Утв

Если L - ортогональный оператор в пре-ве с определитем -1 равен композиции поврота, относительно оси и симметрии, то это поворот.

Док-во

Аналогично

Теорема

Унитарный оператор имеет ортонормированный базис из с.в.

Док-во

Индукция по размерности пр-ва.
Пусть одномерное пр-во ($n = 1$) - очевидно, т.к. оператор-вектор v

$$Lv = u, \quad \|u\| = \|v\| \Rightarrow u = \lambda v, \quad |\lambda| = 1$$

Значит $Lv = \lambda v$ - подходит, когда ортонормируем
v - с.в. L с каким-то λ

$$Lv = \lambda v$$

$$< v >^{\perp}$$

Хотим доказать, что подпространство инвариантно относительно действия L:

$$(v,\ u) = 0 \Rightarrow (v,\ Lu) = 0$$

$$(v,\ Lu) = (L^* v,\ u) \overset{(*)}{=} (\overline{\lambda} v,\ u) = \overline{\lambda}(v, u) = 0$$

$(*)$ т.к. мы доказывали, что у собственного оператора. Если v - вектор унитарного оператора с с.ч. λ
Раз исходный оператор унитарный, то сужение тоже унитарно. Значит мы можем применить индукционное предположение у сужению. На этом ортогональном дополнении у оператора есть базис ортогональных векторов. Добавим к нему отнонормированный вектор v. Очевидно, получим ортонормированный базис из собственных векторов всего пр-ва

Переформулируем на языке матриц

Теорема

U - унитарная матрица, тогда:

$$U = MDM^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1, \quad M \text{ - унитарная}$$

Док-во

$$\mathbb{C}^n \quad Lz = Uz \qquad [L]_e = U$$

$$e \text{ - есть базис } \mathbb{C}^n$$

$$[L^*L]_e = [L^*]_e[L]_e = [L]_e^*[L]_e = U^*U = E$$

($*$) Из какого-то рассуждения получается

$\Rightarrow$ L - унитарный оператор

По теореме, которую доказали ранее, f - ортонормированный базис $\mathbb{C}^n$ из с.в. L

$$D = [L]_f = M_{e\to f}^{-1}\underbrace{[L]_e}_{=U}M_{e\to f}$$

($*$) У D - на диагонали с.ч., по модулю равные 1

Хотим д-ть: у нас есть два ОНБ, тогда матрица перехода между ними будет унитарна

$$M_{e\to f} = \{a_{ij}\}$$

$$f_j = \sum a_{ij}e_i$$

$$\delta_{jk} = (f_j,\ f_k) = \left(\sum_i a_{ij}e_{ij},\ \sum_l a_{ij}\overline{a}_{lk}e_l\right) = \sum_{i,l} a_{ij}\overline{a}_{lk}(e_i,\ e_l)\sum a_{ij}\overline{a}_{ik}$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$ - эрмитова, если $A^* = A$

$L \in \mathscr{L}(V)$ - самосопряженный, если $L^* = L$

Свойства

1. L - самосопряженный, тогда $[L]_e$ - эрмитова, если e - ортонормированный

$$[L]_e^* = [L^*]_e = [L]_e$$

2. L - самосопряженный, тогда с.ч.$\in \mathbb{R}$

$$\exists Lv = \lambda v, \quad v \neq 0$$

$$\lambda(u,\ v) = (Lv,\ v) = (v,\ Lv) = (v,\ \lambda v) = \overline{\lambda}(v,\ v)$$

3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \qquad \lambda \neq \mu \Rightarrow (u,\ v) = 0$

$$\lambda(v,\ u) = (Lv,\ u) = (v,\ Lu) = (v,\ \mu u) = \mu(v,\ u)$$