1 Функции от нескольких переменных

1.1 02.09.2019

1.1.1 Основные определения

Опр

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика, если

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$
   (X, ρ) - метрическое пространство

Примеры

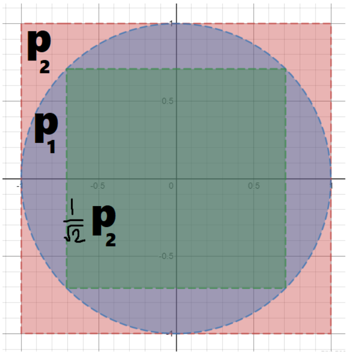
1. $\mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |x - y|$
2. $x \neq \varnothing$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
3. $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$,
   где $x = (x_1, ..., x_n)$ $y = (y_1, ..., y_n)$

Опр

$\rho_1, \rho_2 : X * X \to \mathbb{R}$ - метрики, тогда ρ_1, ρ_2 - эквивалентны, если
(они задают одну топологию) $c_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant c_2\rho_1(x, y)$ для $c_1, c_2 > 0$ - const

Пример

$\mathbb{R}^2$ $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{2\rho_2^2(x, y)}$
$\rho_2(x, y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ (упр.)
$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \rho_1(x, y)$
Пусть $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + ...|x - n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$
Если $p \to \infty$ $\rho_3 \to \rho_2$
$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$ - пространство Лебега конечномерное
(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны (ρ_1, ρ_2, ρ_3)



Опр

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика,

Открытым шаром в X относительно метрики ρ называется мн-во $B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$

Замкнутым шаром называется $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leqslant r\}$

Сферой называется $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

Упр

Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

Пример

$l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ $1 \leqslant p < \infty$

$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$

l^p - пр-во Лебега (последовательностей)

Пример

$C[0, 1]$ - пр-во непр. функций

$\rho(f, g) = \max\limits_{[0,1]} |f - g|$ - полна (любая фундаментальная последовательность сходится)

$\rho_p(f, g) = (\int\limits_0^1 |f - g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ - не полная

Опр

(X, ρ) - метр. пр-во, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $a \in X$ $x_k \to a$ в пр-ве X по метрике ρ, если $\rho(x_n, a) \underset{k\to\infty}{\to} 0$

Примеры

$\mathbb{R}^2$ $M_k = (x_k, y_k)$ $P = (a, b)$ $M_k \to P$ в евкл. метрике, т.е. $\rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \underset{k\to\infty}{\to} 0 x_k \to a,\ y_k \to b$

Замечание

Есть ρ_1, ρ_2 - экв. метрики, то $\rho_1(x_k, a) \to 0 \rho_2(x_k, a) \to 0$

Упр

$x_k \to a,\ x_k \to b \Rightarrow a = b$

$(\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_k) + \rho(x_k, b) \to 0 \Rightarrow \rho(a, b) \to 0 \Rightarrow a = b)$

Опр

$E \subset X$, (X, ρ) - метр. пр-во, то $a \in X$ - т. сгущ. E, если

$\forall \mathcal{E}\ \exists x \in E : \rho(a, x) < \mathcal{E}$

Опр

$f : E \to Y\ (X, \rho)$, (Y, d) - метр. пр-ва $(E \subset X)$, a - т. сгущ. E, $A \in Y$,

тогда A - предел отображения f в точке a, если

$f(x) \to A$ при $x \in E \setminus \{a\} \to a$

(или $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \rho(x, a) < \delta$ и $x \in E \subset \{a\}$, то $d(f(x), A) < \mathcal{E}$)

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to A\ x \to a$

Замечание

$A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\mathcal{E}(A)$