2019-09-16

Теорема **(Ф-ма Тейлора)**

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{t_0} + \overrightarrow{f'}(t_))(t-t_0) + \frac{\overrightarrow{f''}(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + ...$$

$$+\frac{\overrightarrow{f^{(m)}}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + o(t-t_0)^n$$

$$\overrightarrow{g}(t) = o(t-t_0)^n, \textit{ если}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{g}(t)}{(t-t_0)^n} = \overrightarrow{0}$$

Определение **(Длина кривой)** *рисунок 1*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$$

1. $\sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$

2. $\lim\limits_{\max\limits_{i=1,...n} |t_i - t_{i-1}| \to 0}$ ... - *длина кривой*

Утверждение

оба определения дают одно и то же

Теорема

$$\int \text{ - длина кривой } \Rightarrow$$

$$\int = \int_a^b |\overrightarrow{f'}(t)| dt$$

Определение

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

Замечание

Если $|\overrightarrow{f'}(t)|$ *- интер.* $\to$ *кривая спрямляемая*

Пример

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad (0,1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во

$$\triangle_i t = t_i - t_{i-1}$$

$$\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\triangle_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$$

$$|\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq$$

$$\leq |\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|\triangle_i t| + |\sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|\triangle t_i| - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = I + II$$

$$2 \leq \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \triangle t_i - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| =$$

$$= \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \triangle_i t$$

$f'(t)$ - *непр на* $[a,b] \Rightarrow$ *равномерно непр. на* $[a,b]$*(т. Кантора)*

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0,$ *если* $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E},$ *если* $|\sigma_i - \tau_i| < \delta$

$$II \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \triangle_i t = \mathcal{E}(b-a) \underset{\mathcal{E}\to 0}{\to} 0$$

$$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leq ||f'(\tau_i)| - ||f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \triangle_i t$$

Определение

Параметризация $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *называется натуральной, если* $|f'(t)| = 1$

Теорема

Натуральная параметризация $\exists$ *и ед.*

Док-во

$$f(t) \quad f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$\tau : [c, d] \to [a, b]$ - *монотонная биекция*

$$(\tau' > 0)$$

$$f = \tau : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

Лемма

Длина кривой не зависит от параметризации

Док-во

$$\int_a^b |f'(t)|dt$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)|ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)|ds =$$

$$= \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s)ds = \int_a^b |f'(t)|dt$$

$$t = \tau(s)$$

Док-во (Т)

Существование

Хотим подобрать $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)|ds$$

$$\sigma : [a, b] \to [0, S]$$

S - *длина кривой*

σ - *возрастающая и дифф.* $(\sigma'(t) = |f'(t)|)$

σ - *биекция* $\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$

$$\int_0^t |(f\circ t)'(s)|ds = \int_0^t |f'(\tau(s))|\cdot t'(s)ds =$$

$$= \int_0^t |f'(\tau(s)|\frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|}ds = t$$

Единственность

$f(t)$ *и* $g(t)$ - *нат. параметризации*

$f, g : [0, s] \to \mathbb{R}^3$

$f - g$

$$\int_0^s |(f\circ g)(t)|dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)|dt \leq \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)||dt = 0$$

Примеры

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)}dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = & r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y' = & r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$$| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} | = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 cos'2\varphi + r^2 sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

2. Ренер Френе

Определение

$$\overrightarrow{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\overrightarrow{v} = f'(t)$ *- если парам. натуральн.*

v *- касательный вектор*

Прямая, содерж в $\overrightarrow{v}$ *наз. касательной к* $\overrightarrow{f}(t)$ *в точке* t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \overrightarrow{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \overrightarrow{g}(t)$$

$\overrightarrow{g}(t)$ *- ур-е касат. прямой*

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\overrightarrow{h} - \overrightarrow{f}(t_0)) = 0$$

Теорема

δ *- расстояние от* $f(t)$ *до касат. прямой*

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

Док-во