0.1 05.09.2019

0.1.1 Примеры для $\mathbb{R}^2$

Будем в $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Опр

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ - точка сгущения, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$, если
$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x, a) < \delta$, $x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < \mathcal{E}$

В $\mathbb{R}^2$ работают:
арифм. действия, теор. о двух миллиционерах, критерий Коши:

Опр

$f : E \to \mathbb{R}$, частный случай $\exists \lim\limits_{x \to a} f \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 :$
$|f(x) - f(y)| < \mathcal{E}$ $0 < \rho(x, a), \rho(y, a) < \delta$ (упр)

Упр

$\exists \lim\limits_{x \to a} f \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \to a$ $(\rho(x_n, a) \to 0)$ $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ - предел функции в т. (x_0, y_0)

Пример

$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$, т.к.$|f(x, y)| \leqslant |x| + |y| \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\to} 0$, $\nexists \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to y} f(x, y)$

Пример

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ - не существует, так как $\lim f(x, x) = 1$, $f(x, 2x) = 0$

Пример

Построить $f(x, y)$ т.ч. $\forall a, b \; \exists \lim\limits_{t \to 0} f(at, bt) = A$, но $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$

$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a} t \to 0$, но при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ предел - единица

Замечание

Если $\gamma(t) \underset{t \to t_0}{a} \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $\exists \lim\limits_{t \to t_0} f(\gamma(t))$

Замечание

Если $\forall \gamma : \gamma(t) \to a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim f(\gamma(t))$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} f$

Замечание

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ - не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть $= \lim\limits_{x\to x_0}\overline{f}(x)$

$\overline{f}(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \neq$(не обязательно) $\neq f(x,y_0)$

Опр

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y) = A$, если

$\forall\mathcal{E}>0\ \exists M>0 : \forall x,y : \max(x,y)>M\ |f(x,y)-A|<\mathcal{E}$

Пример

$f=\frac{y}{x}tg(\frac{x}{x+y})$ - не имеет предела, $f(x,x)=tg(\frac{1}{2})$, $f(x,x^2)=xtg(\frac{1}{1+x})\to 0$