[2019-10-17]

Опр

$$X(t,x) \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

X уд-т, условию Липшеца по x на $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

(Обозн. $X \in \mathrm{Lp}_x(D)$, если

$\exists L > 0 : \forall (t, \overline{x}), (t, \overline{\overline{x}}) \in D$

$\left| X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}}) \right| \leqslant L \left| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right| \qquad (1)$

Пример

$n = 1$

1. $X = t + \sin x \in \mathrm{Lp}_x(\mathbb{R}) \quad \left| X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}}) \right| = \left| \sin \overline{x} - \sin \overline{\overline{x}} \right| \leqslant \left| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right|$

2. $X = x^2 \qquad \left| X(\overline{x}) - X(\overline{\overline{x}}) \right| = \left| \overline{x}^2 - \overline{\overline{x}}^2 \right| = \left| \overline{x} + \overline{\overline{x}} \right| \cdot \left| \overline{x} - \overline{\overline{x}} \right|$

$$D \text{ - огр.} \Rightarrow X = x^2 \in \mathrm{Lp}_x(D) \;\; \notin \mathrm{Lp}_x(\mathbb{R})$$

Опр

$X \in \mathrm{Lp}_x^{loc}(G) \qquad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

если $\forall (t_0, x_0) \in G \quad \exists$ окр. $U(t_0, x_0) \subset G :$

$X \in \mathrm{Lp}_x(U(t_0, x_0))$

Пример

$$X = x^2 \in \mathrm{Lp}_x^{loc}(\mathbb{R})$$

Замечание

$X \in \mathrm{Lp}_x(G) \Rightarrow X \in \mathrm{Lp}_x^{loc}(G)$

$\not\Leftarrow$

Теорема

$X(t,x)$ - непр

$X(t,x)\in \mathrm{Lp}_x^{loc}(G)\quad G$ - обл. $\quad G\subset \mathbb{R}^{n+1}$

D - комп. $\quad D\subset G$

$\Rightarrow X(t,x)\in \mathrm{Lp}_x(D)$

Док-во (от противного)

$\exists \underbrace{D}_{\text{комп.}} \subset G$

$\forall L>0 \quad \exists (t,\ \overline{x}),\ (t,\ \overline{\overline{x}})\in D:$

$\left|X(t,\overline{x})-X(t,\overline{\overline{x}})\right| > L\left|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\right| \qquad (2)$

$\{L_k\}_{k=1}^{\infty}:\ L_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty \qquad \exists\{(t_k,\overline{x}_k)\}_1^{\infty},\ \{(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\}_1^{\infty}\subset \underset{\text{комп}}{D}:$

$\left|X(t_k,\overline{x}_k)-X(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\right| > L_k\left|\overline{x}_k-\overline{\overline{x}}_k\right| \qquad (3)$

$\exists$п/послед $\{(t_k,\overline{x}_k)\}$, сх к $(t_0,\overline{x_0}):(t_{k_m},\overline{x}_{k_m}) \underset{n\to+\infty}{\to} (t_0,\overline{x}_0)$

$\exists$п/послед $\{(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\}$, сх к $(t_0,\overline{\overline{x_0}}):(t_{k_{m_j}},\overline{\overline{x}}_{k_{m_j}}) \underset{j\to+\infty}{\to} (t_0,\overline{\overline{x}}_0)\in D\Rightarrow$

$\Rightarrow (t_{k_{m_j}},\overline{x}_{k_{m_j}}) \underset{k\to+\infty}{\to} (t_0,\overline{x}_0)$

$$\begin{cases}(t_k,\ \overline{x_k})\to(t_0,\ \overline{x_0})\in D\\ (t_k,\ \overline{\overline{x}}_k)\to(t_0,\ \overline{\overline{x_0}})\in D\end{cases}$$

I) $\quad \overline{x}_0\neq\overline{\overline{x}}_0$

$$\frac{\left|X(t_k,\overline{x}_k)-X(t_k,\overline{\overline{x}})\right|}{\left|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\right|} \underset{k\to+\infty}{\to} \frac{\left|X(t_0,\overline{x})-X(t_0,\overline{\overline{x}})\right|}{\left|\overline{x}_0-\overline{\overline{x}}_0\right|}=N$$

$\Rightarrow \exists k_1:\forall k>k_1 \quad \left|X(t_k,\overline{x}_k)-X(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\right|\leqslant (N+1)\left|\overline{x}_k-\overline{\overline{x}}_k\right| \qquad (4)$

$\exists k_2:\forall k>k_2 \quad L_k>N+1 \qquad \forall k>\max(k_1,k_2)$ верно (3), (4)?

II) $\quad \overline{x}_0=\overline{\overline{x}}_0$

$\exists U(t_0,\overline{x}_0)\subset G: \quad X(t,x)\in \mathrm{Lp}_x(U(t_0,x_0))$

$\exists k_0:\forall k>k_0 \qquad (t_k,\overline{x}_k)\in U(t_0,\overline{x_0}), \quad (t_k,\overline{\overline{x}}_k)\in W(t_0,x_0)$

$\exists L:\forall (t_k,\overline{x}_k),(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\in U(t_0,\overline{x}_0)$

$\left|X(t_k,\overline{x}_k)-X(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\right|\leqslant L\left|\overline{x}-\overline{\overline{x}}_k\right| \qquad (5)$

$\exists k_{00}:\forall k>k_{00} \qquad L_k>L$

Теорема

$$X \in (t,x) \in C(G), \quad G \text{ - обл} \qquad \frac{\partial X_j}{\partial x_m} \in C(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \in \mathrm{Lp}_x^{loc}(G)$$

Док-во

$(t_0, x_0) \in G$

$\exists \underset{\text{комп}}{D} = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\} \subset G$

$(a > 0, b > 0)$

фикс $j \qquad X_j(t,x) = X_j(t, x_1, ..., x_n)$

$(t, \overline{x}), (t, \overline{\overline{x}}) \in D$

$f(s) = X_j(t, s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}}) = X_j(t, s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}}, ..., s\overline{x}_n + (1-s)\overline{\overline{x}}_n) \qquad s \in [0,1]$

Докажем: $\quad (t, s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}}) \in D \quad \forall s \in [0,1]$

$$\left|s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}} - x_0\right| = \left|s(\overline{x} - x_0) + (1-s)(\overline{\overline{x}} - x_0)\right| \leqslant s\left|\overline{x} - x_0\right| + (1-s)\left|\overline{\overline{x}} - x_0\right| \leqslant$$

$$\leqslant sb + (1-s)b = b$$

$$\left|X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,\overline{\overline{x}})\right| = |f(1) - f(0)| = |f'(\sigma)| \qquad \exists \sigma \in (0,1) \qquad (6)$$

$$f'(s) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial X_j(...)}{\partial x_m}(\overline{x}_m - \overline{\overline{x}}_m)$$

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_m} \in C(\underset{\text{комп}}{D}) \Rightarrow \exists K : \left|\frac{\partial X_j}{\partial x_m}\right| \leqslant K \qquad \forall m = 1, ..., n$$

Очев. $\left|\overline{x}_m - \overline{\overline{x}}_m\right| \leqslant \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right|$

$$\Rightarrow |f'(\sigma)| \leqslant \sum_{m=1}^{n} K\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| = nK \cdot \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad (8)$$

$$(6), (8) \Rightarrow \left|X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,\overline{\overline{x}})\right| \leqslant nK\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad \forall j = 1, ..., n$$

$$\Rightarrow \left|X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}})\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,\overline{\overline{x}}))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} n^2k^2\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right|^2} =$$

$$= n\sqrt{n}K\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \Rightarrow$$

$$\exists U(t_0, x_0) \subset D \subset G : \qquad X(t,x) \in \mathrm{Lp}_x(U(t_0, x_0))$$

1 Приближение Пикара

Опр (инт. дифф. уравнение)

(1) $\dot{x} = X(t,x) \qquad X(t,x) \in C(D) \qquad (D$ – произв. мн-во)

(2) $(t_0, x_0) \in D$ - з. Коши

(3) $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, x) d\tau$

Решение (3) - ф-я $x = \varphi(t) \qquad t \in <a, b>$, подстав в (3) $\to$ тождество

Утв

З.Коши $(1), (2)$ эквив. инт. уравнению (3)

Док-во

1. $\Leftarrow \quad \exists x = \varphi(t)$ - реш (3) $\Leftrightarrow \varphi(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \qquad (4)$

$t = t_0 : \quad \varphi(t_0) = x_0$

$\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$\Rightarrow \varphi(t)$ - реш з. К $(1), (2)$

2. $\Rightarrow \quad x = \varphi(t)$ - реш. з.К $(1), (2) \qquad t \in (a, b)$

$\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

инт. от t_0 до t

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \Rightarrow \varphi(\tau) \text{ - решение з.К.}$$

$\varphi_0(t) = x_0 \qquad \exists (t_0, x_0) \in D \quad \forall t \in <a_1, b_1>$

$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_0(\tau))) d\tau \quad \exists (t, \varphi_1(t)) \in D \qquad \forall t \in <a_2, b_2> \subset <a_1, b_1>$

$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_1(\tau)) d\tau ...$

$\exists (t, \varphi_{k-1}(t)) \in D \qquad \forall t \in <a_k, b_k> \subset <a_{k-1}, b_{k-1}>$

$\Rightarrow \varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau \qquad$ (6) опред $\varphi_k(t)$ при $t \in <a_k, b_k>$)