2019-10-01

Напоминание

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m^2\}$$

Док-во

$$\sum_{g\in G}|M^g| = |\{(g,m) \in G \times M : gm = m\}| =$$

$$= \sum_{m\in M}|Stab\ m| = |G|\sum_{m\in M}\frac{1}{|Orb\ m|} = |G| \cdot \text{Кол-во орбит}$$

1 Евклидовы и унитарные пр-ва

Опр

V - в.п. над $\mathbb{R}$

Введем отображение

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(u, v)$$

Свойства этого отображения

1. Симметричность

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in V$$

2. Линейность

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \quad u, v \in V$$

$$(u + u', v) = (u, v) + (u', v) \qquad u, u', v \in V$$

3. $(u, v) \geqslant 0 \qquad \forall u \in V$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Такое пр-во V с введенным на нем таким отображением мы называем Евклидовым пр-вом, а отображение скалярным.

Напоминание

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \text{ - квадр. матрица}$$

$$Tr\ C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \text{ - след (Trace)}$$

(Сумма элементов главной диагонали)

Примеры

1. Школьные вектора
2. $\mathbb{R}^n$

$$((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_n$ конечномерное пр-во

$$(f, g) = \int_a^b fg dx$$

4. $V = M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) = Tr\ AB^T$$

(См. след в напоминании)

Опр

$$e = \{e_1, ..., e_n\} \text{ - базис } V$$

$$a_{ij} = (e_i, e_j)$$

$$\Gamma_e = \{a_{ij}{}_{i,j=1}^{n}\} \text{ - матрица Грама}$$

Свойства (матрицы Грама)

1. Матрица невырожд
2. e, f - базисы

$$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e M_{e\to f}$$

3. $\Gamma_e = \{a_i j\}$

$$u = \sum \lambda_i e_i$$

$$v = \sum \mu_j e_j$$

$$(u, v) = (\sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j)$$

$$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e [v]_e$$

Док-во

1. $\exists\, |\Gamma_e| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ не все 0 :

$$\sum \lambda_i (e_i, e_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum \lambda_i e_i,\ e_j\right) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum_i \lambda_i e_i,\ \sum_j \lambda_j e_j\right) = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_i e_i = 0$$

противоречие

2. $\exists M_{e \to f} = \{a_{ik}\} \qquad f_k = \sum a_{ik} e_i$

$$f_l = \sum a_{jl} e_j$$

$$(f_k, f_l) = \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} (e_i, e_j)$$

$$a_{ik} (e_i, e_j) a_{je}$$

Напоминание: X, Y- матр $\qquad X \times Y = Z \quad z_{ij} = \sum x_{is} y_{sj}$

Опр

V - в.п. над $\mathbb{R}$

$V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$v \to \|v\|$ - норма

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V$

2. Нер-во треугольника

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

3. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Если такое отобр. существует, то оно называется нормой

Утв

(u, v) - ск. пр-ве

$\Rightarrow \|u\| = \sqrt{(u, u)}$

Пример

$\mathbb{R}^n$

$\|x\| = \max |x_i|$

$\|x\| = \sum\limits_i |x_i|$

Теорема (Нер-во Коши - Буняковского)

$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$

Док-во

$\varphi(t) = \|u + rv\|^2 = (u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + 2(u, v)t + t^2\|v\|^2$

$D = 4(u, v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$

$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

$(u + v, u + v) \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$

$(u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$

$2(u, v) \leqslant 2\|u\|\|v\|$

Утв (Теорема Пифагора)

Если $u \perp v \Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Док-во

$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$

Опр (Ортогональное дополнение)

V - евкл. пр-во

$U \subset V \qquad U^{\perp} = \{v \in V : (v, u) = 0 \quad \forall u \in U\}$

Множество всех векторов, которые ортогональны всем векторам из U
Такое мн-во называется ортогональным дополнением

Утв

$U^{\perp}$ - под-пр V

Док-во

$$\begin{matrix} (v, u) = 0 \quad \forall u \\ (v', u) = 0 \quad \forall u \end{matrix} \Rightarrow (v + v', u) = 0 \quad \forall u$$

$(v, u) = 0 \quad \forall u$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda v, u) = 0 \quad \forall u$

Тогда $U^{\perp}$ дей-во линейное под-прво V

Свойства

$V = U \oplus U^{\perp}$

$u \in U \cap U^{\perp}$

$u \in U \quad u \in U^{\perp}$

$(u, u) = 0$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - базис U дополняем до базиса V

$e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$ - базис V

$v \in U^{\perp} \quad v = \sum \lambda_i e_i + \sum \mu_j f_j$

$v \in U^{\perp} \Leftrightarrow (v, e_k) = 0 \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$

$(v, e_k) = \sum \lambda_i (e_i, e_k) + \sum \mu_j (f_j, e_k) = 0 \qquad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$

это матрица

$$\begin{array}{c|c|c} & \mathrm{n} & \mathrm{m} \\ \hline \mathrm{n} & \Gamma_e & \mathrm{C} \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \Gamma_e x + C_y = 0\}$ - размерность этого m

$(x, y) \to y$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$x = -\Gamma_e^{-1} e_y$

$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$