

2019-10-22

Опр (унитарного пространства)

U - в.п. над \mathbb{C}

$$U \times U \rightarrow ()$$

1. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w) \quad \forall u, v, w \in U$
 $(\lambda v, w) = \lambda(v, w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad v, w \in U$
2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
3. $(u, u) \geq 0$
4. $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Пример

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \Bigg| \quad (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

e_1, \dots, e_n - базис

$\Gamma_e = \{(e_i, e_j)\}_{i,j}$ - матрица грамма

$$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e [\overline{v}]_e$$

$$\Gamma_f = M_{e \rightarrow f}^T \Gamma_e \overline{M}_{e \rightarrow f}$$

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

$$\|tu + v\|^2 = t^2 \|u\|^2 + t((u, v) + (v, u)) + \|v\|^2$$

$= 2 \operatorname{Re}(u, v)$

$$\operatorname{Re}(u, v) \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$(u, v) = |(u, v)| \cdot z \Rightarrow |z| = 1$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z} u, v\right) \leq \left\|\frac{1}{z} u\right\|^2 \|v\|^2 = \|u\| \|v\|$$

$$\text{Напоминание: } \|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} (u, u)} = |\lambda| \|u\|$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} (u, v) = \operatorname{Re} |(u, v)| = |(u, v)|$$

Доказали КБШ

Опр

V - в.п. над K

$$V^* = L(V, K)$$

Пример

$v \in V$ - евклидово пр-во (унитарное)

$$\varphi_v(w) = (w, v) \quad \varphi_v : V \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Хотим доказать: $\varphi \in V^* \Rightarrow \exists! v \in V : \varphi = \varphi_v$

Док-во

e_1, \dots, e_n - ОНБ V

$$v = \sum \lambda_i e_i$$

Нужно $\forall w \in V \quad (w, v) = \varphi(w)$, т.к. φ - линейный функционал

$$\Leftrightarrow \forall j \quad (e_j, v) = \varphi(e_j)$$

$$(e_j, \sum \lambda_i e_i) = \sum_i \bar{\lambda}_i (e_j, e_i)$$

Опр

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$A^* = \bar{A}^T$ - сопряженная матрица

Свойства

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

УТВ

V - унитарное пр-во, $L \in L(V)$, $u \in V$

$$\varphi_n(v) = (Lv, u) \in V^*$$

$$\Rightarrow (Lv, u) = (v, w_u)$$

$$\exists! w_u \in V : (v, u) = (v, w_u)$$

$$u \rightarrow w_u$$

Утверждается, что отображение линейно

Док-во

$$\begin{aligned} (Lv, u) = (v, w_u) \quad \Bigg| \quad (Lv, u+u') = (Lv, u) + (Lv, u') = \\ (Lv, u') = (v, w_{u'}) \quad \Bigg| = (u, w_u) + (v, w_{u'}) = (v, w_u + w_{u'}) = (v, w_{u+u'}) \end{aligned}$$

$$(Lv, \lambda u) = \bar{\lambda}(Lv, u) = \bar{\lambda}(v, w_u) = (v, \lambda w_u)_{=w_{\lambda u}}$$

$$L^*u = w_u \quad (Lv, u) = (v, L^*u)$$

Опр

L^* - эрмитов сопряженный оператор

Свойства

1. $L^{**} = L$

$$(L^*v, u) = (v, L^{**}u)$$

$$(L^*v, u) = \overline{(u, L^*v)} = \overline{(Lu, v)} = (v, Lu)$$

$$\Rightarrow L^{**}u = Lu \quad \forall u \in V$$

Почему так? $(v, w) = (v, w') \quad \forall v \Rightarrow w = w'$

$$(v, w - w') = 0$$

$$v = w - w'$$

$$\|w - w'\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow w - w' = 0$$

2. $(\lambda L)^* = \bar{\lambda}L^*$

$$(\lambda L)v, u) = (v, (\lambda L)^*u)$$

$$(\lambda L)v, u) = (\lambda \cdot Lv, u) = \lambda(Lv, u) = \lambda(v, L^*u) = (v, \bar{\lambda}L^*u)$$

3. $(L + L')^* = L^* + L'^*$ аналогично

4. $(LNv, u) = (v, (LN)^*u)$

$(LNv, u) = (v, N^*L^*u)$ и то же, что делали раньше

5. $[L]_e^* = [L^*]_e$, если e - ОНБ

$$Le_i = \sum a_{li}e_l \quad [L]_e = \{a_{ij}\}$$

$$Le_j = \sum b_{kj}e_k \quad [L]_e = \{b_{kj}\}$$

$$(Le_i, e_j) = (e_i, L^*e_j) \\ = a_{ij} \qquad \qquad \qquad = \bar{b}_{ij}$$

Опр

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

A - унитарная, если $A^*A = E$

$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : (\text{то что сверху})\}$$

Док-во (что это группа по умножению)

$$\left. \begin{array}{l} A^*A = R \\ B^*B = E \end{array} \right| \Rightarrow (AB)^*AB = B^* \underbrace{A^*A}_{=E} B = E$$

$$(A^{-1})^*A^{-1} \stackrel{?}{=} E$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1})^* = A$$

$$\Leftrightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

Докажем, что любая унитарная матрица обратима и модуль определителя равен единице

$$A^*A = E$$

$$\overline{\det A} \cdot \det A = 1$$

$$|\det A|^2 = 1$$

УТВ

$$L \in L(V)$$

Следующие условия равносильны:

1. $\|Lv\| = \|v\| \quad \forall v$
2. $(Lv, Lu) = (v, u) \quad \forall v, u$
3. $[L]_e \in U_n, \quad e - \text{ортонорм.}$
4. $L^*L = \text{id}_V$

И оператор, удовлетворяющий этим условиям называется "унитарным" (в евклидовом случае называется "ортогональным")

Док-во

(4 \Rightarrow 2):

$$(v, L^*Lu) = (Lv, Lu) \\ =_{(v,u)}$$

(2 \Rightarrow 4):

$$(v, L^*Lu) = (Lv, Lu) = (v, u)$$

По заклианию $L^*L = \text{id}_V$

УТВ

1. $|\det L| = 1$
2. Если L - унитарный, $Lv = \lambda v \xRightarrow{v \neq 0} |\lambda| = 1$
3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow (u, v) = 0$

Док-во

1 и 2:

$$\|v\| = \|Lv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

3:

$$(u, L^*v) = (u, \bar{\lambda}v) = \lambda(u, v)$$

$$(u, L^*v) = (Lu, v) = (\mu u, v) = \mu(u, v)$$

Хотим доказать: $Lv = \lambda v \Rightarrow L^*v = \bar{\lambda}v$

$$v = L^*Lv = L^*(\lambda v) = \lambda L^*v$$

Делим на λ и туда переносится $\bar{\lambda}$