



Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Лекции по геометрии

3 семестр, преподаватель Солянин ?. ?.
Записал Костин П.А.¹

¹Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах [вконтакте](#) (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

1	Дифференциальная геометрия кривых	3
1.1	Теорема о неявной функции	3
1.2	Свойства пределов	4
1.3	Гладкая кривая, регулярная кривая	5
1.4	Формула Тейлора	7
1.5	Длина кривой	7
1.6	Теорема о длине кривой	7
1.7	Репер Френе	10
1.8	Вектор кривизны	14
1.9	Формула Френе	16
1.10	Вычисление кривизны кручения	17
1.11	Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми	19
1.12	Дополнение 2: натур. ур-я кривой	21
2	Дифференциальная геометрия поверхностей	23
2.1	Понятие поверхности	23
2.2	Касательная плоскость	24
2.3	Первая квадратичная плоскость	26
2.4	Теорема про угол между кривыми	27
2.5	Изометричные поверхности	27
2.6	Площадь поверхности	29
2.7	II квадратичная форма	32
2.8	Соприкас. параболоид	35
2.9	Теорема Гаусса	37
2.10	Теорема Эйлера	38

Дифф. геометрия кривых (в \mathbb{R}^3) и поверхностей (в \mathbb{R}^3) 2019-09-09

1 Дифференциальная геометрия кривых

Опр

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

2. Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

(особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)

3. Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x, y) = 0$

Пример

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ явное задание

рис 3

Теорема (о неявной функции)

$$F(x, y) = 0$$

F - дифф ($\exists \frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ - непр в окр (x_0, y_0)), $F(x_0, y_0) = 0$

Если $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, f(x)) = 0$$

Напоминание

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$y = f(x) \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \text{если } \rho(t, t_0) < \delta, \text{ то } \rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$$

$$(\rho(t, t_0) = |t - t_0|, \quad f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2})$$

Теорема (свойства пределов)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \pm g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot g(t)) = (\lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)) - \text{скалярное умножение}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \times g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

Док-во

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{Пусть } \mathcal{E} > 0, \quad \text{выберем } \delta : |x(t) - x_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$\text{если } |t - t_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y(t) - y_0| < \frac{\mathcal{E}}{3} \\ |z(t) - z_0| < \frac{\mathcal{E}}{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$$

Опр

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Теорема (свойства)

$$1. (f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm g'(t)$$

2. $(cf(t))' = cf'(t)$
3. $(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t); g'(t))$
4. $(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$
5. $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

Доказывается через $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\begin{aligned}
 \text{Докажем ВП: } (f(t) \times g(t))'|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x) \times g(x) - f(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f(t) - f(t_0)) \times g(t)}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t_0) \times (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = \\
 &= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)
 \end{aligned}$$

Пример

Контрпример

Т. Лагранжа - неверна рис 4

$$\int_b^a \vec{f}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right)$$

$$\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$$

$$\vec{F}(b) - \vec{F}(a) = \int_a^b \vec{f}(t) dt$$

$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \dots \right) = (X(b) - X(a), \dots)$$

Опр

Гладкая кривая - образ вектороднозначной функции

Опр

Кривая называется регулярной, если существует производная и $f'(t) \neq \vec{0}$

Опр

Кривая называется бирегулярной, если существует вторая производная и $f''(t) \nparallel f'(t)$

Опр

Параметризации $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(t)$ эквивалентны

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Если \exists биекция $\tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$

$$\tau(a) = c; \quad \tau(b) = d :$$

$$f(t) = g(\tau(t)) \quad (\tau \text{ возрастает и гладкая})$$

Лемма

Эквив параметризаций - эквививалентность

Док-во

Докажем, что экв. параметризаций - отношение эквивалентности:

1. (рефл.) $\tau = id$
2. (симм.) $f(t) = g(\tau(t)), g(t) = f(\tau(t))$
3. (тран.) $f(t) = g(b(t)), g(t) = h(\tau(t)), f(t) = h(\tau(b(t)))$

Лемма

$\vec{f}(t)$ - вектор-функция/ регуляря.

$$|\vec{f}(t)| = 1 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

Док-во

$$(f(t); f(t)) = 1$$

$$0 = (f(t), f(t))' = 2(f'(t), f(t))$$

$$f(t) \neq 0$$

$$f'(t) \neq 0 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

2019-09-16

Теорема (Ф-ма Тейлора)

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{t}_0 + \vec{f}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\vec{f}''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{\vec{f}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n \\ \vec{g}(t) &= o(t - t_0)^n, \text{ если} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{g}(t)}{(t - t_0)^n} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Опр (Длина кривой) рисунок 1 Пусть есть кривая $\vec{f}(t), t \in [a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

$$\text{а) } \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$\text{б) } \lim_{\max_{i=1..n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \dots$$

-длина кривой

Утв

Оба определения эквивалентны

Теорема

$$S - \text{длина кривой} \Rightarrow S = \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt$$

Опр

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

ЗамечаниеЕсли $|\vec{f}'(t)|$ - интегр. \Rightarrow кривая спрямляемая**Пример**

$$y = \sin \frac{1}{x} \quad (0, 1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \right| &\leq \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| = I + II \end{aligned}$$

$$II \leq \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \Delta_i t - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \Delta_i t$$

$f'(t)$ - непр на $[a, b] \Rightarrow$ равномерно непр. на $[a, b]$ (т. Кантора)

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$, если $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$, если $|\sigma_i - \tau_i| < \delta$

$$II \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \Delta_i t = \mathcal{E}(b - a) \xrightarrow{\mathcal{E} \rightarrow 0} 0$$

$$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leq ||f'(\tau_i)| - ||f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \Delta_i t$$

Опр

Параметризация $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Теорема

Натуральная параметризация \exists и ед.

Лемма

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ - монотонная биекция ($\tau' > 0$), тогда $f \circ \tau : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Длина кривой (f) не зависит от перепараметризации ($f \circ \tau$)

Док-во

$$\int_a^b |f'(t)| dt \stackrel{?}{=} \int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)| dt$$

$$t = \tau(s)$$

Док-во (Т)

Существование

Хотим подобрать $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)| ds$$

$$\sigma : [a, b] \rightarrow [0, S]$$

 S - длина кривой σ - возрастающая и дифф. ($\sigma'(t) = |f'(t)|$) σ - биекция $\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$

$$\begin{aligned} \int_0^t |(f \circ \tau)'(s)| ds &= \int_0^t |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \\ &= \int_0^t |f'(\tau(s))| \frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|} ds = t \end{aligned}$$

Единственность

 $f(t)$ и $g(t)$ - нат. параметризации

$$f, g : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f - g$$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)| dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)| dt \leq \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)|| dt = 0$$

Примеры

$$1. y = y(x)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)} dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y' = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$\left| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

1.7 Репер Френе

Опр

$$\vec{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\vec{v} = f'(t)$ - если парам. натуральн.

v - касательный вектор

Опр Прямая, содержащая \vec{v} наз. касательной к $\vec{f}(t)$ в точке t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \vec{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \vec{g}(t)$$

$\vec{g}(t)$ - ур-е касат. прямой

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\vec{h} - \vec{f}(t_0)) = 0$$

Теорема

δ - расстояние от $f(t)$ до касат. прямой

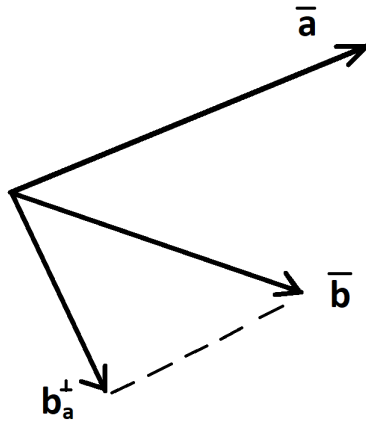
$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

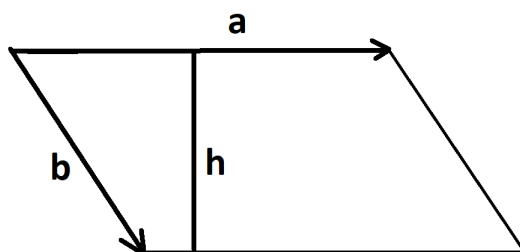
2019-09-23

Напоминание

$$\begin{aligned}
& \left| \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum \|f(t_i) - f(t_{i-1})| - |f'(\tau_i)\Delta t_i| \right| \leq \\
& \leq \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)| dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(\tau_i)| dt \right| = \\
& \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'(\tau_i)| dt < \sum \mathcal{E} \Delta_i t = \mathcal{E}(b-a) \\
& \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ если } f_i - f_{i-1} < \delta \\
& \Rightarrow |f'(t) - f'(\tau_i)| < \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Лемма

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \text{Pr}_a b + b \frac{1}{a} \\
\overrightarrow{\text{Pr}_a b} &= \frac{(a, b)}{|a|^2} \vec{a} \\
\left| b \frac{1}{a} \right| &= \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|a|}
\end{aligned}$$

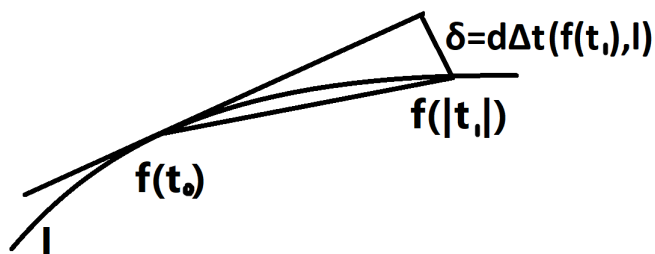
Док-во

$$h = \frac{S}{|a|}$$

$$\frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|a|^2} = b \frac{1}{a}$$

$(a, b, a \times b)$ - прав. тройка

$(a \times b, a, b)$ - прав. тройка

Теорема

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t_1) - f(t_0)|} = 0$$

$$\vec{f}'(t_0) \Rightarrow \text{по лемме}$$

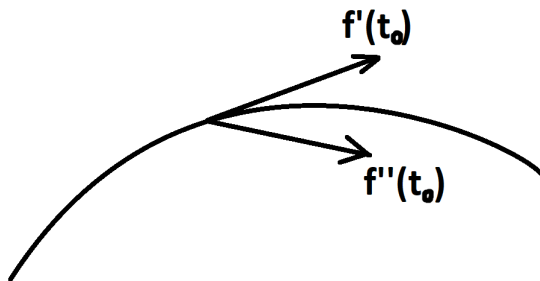
$$\delta = \frac{|f'(t_0) \times (f(t_1) - f(t_0))|}{|f'(t_0)|}$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\delta}{\underbrace{|f(t_1) - f(t_0)|}_{\vec{a}(t_0)}} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{|f'(t_0) \times \vec{a}(t_1)|}{|f'(t_0)| \cdot |a(t_1)|}$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\left| f'(t_0) \times \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \right|}{\left| f'(t_0) \cdot \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \right|} = \frac{f'(t_0) \times f'(t_0)}{|f'(t_0)|^2} = 0$$

\Leftarrow очев

1.8 Вектор кривизны



Опр

$$g(\varphi(t)) = g(s) = f(t) \quad s = \varphi(t)$$

$$\vec{f}'(t) = (g(\varphi_i t_i))' = \vec{g}' \cdot \varphi'(t)$$

$$\vec{v}(t_0) = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} \quad \vec{n} : |\vec{n}| = 1; \quad \vec{n} \perp \vec{v}$$

$$n \in \langle f', f'' \rangle \quad \vec{n} \text{ и } \vec{f}'' \text{ в одной полуплоскости } f'(t)$$

$$\vec{v}'(t) \perp \vec{v}(t)$$

$$\vec{v}'(t) = k \cdot \vec{n}$$

$$|\vec{n}| = 1 \quad k(t) - \text{кривизна кривой} \quad k(t) \geq 0 \text{ в точке } t$$

$$\vec{n} - \text{вектор главной нормали}$$

$$\vec{v} - \text{касат. вект}$$

УТВ

$$f(t) - \text{натуральная парам.}$$

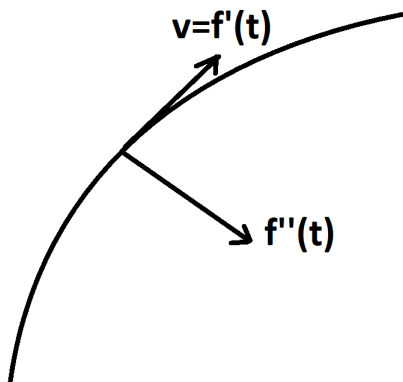
$$|f'(t)| = 1 \Rightarrow v = f'(t)$$

$$f''(t) = k \vec{n}$$

$$\vec{n} = \frac{f''(t)}{|f''(t)|}$$

$$k = |f''(t)|$$

рисунок 5 (центростр. ускорение)



$f(t)$ - любая параметризация, $g(s)$ - натур. парам.

$$f(t) = g(\varphi(t)) \quad s = \varphi(t) - \text{нат. парам}$$

$$s = \underbrace{\int_a^t (f'(\tau)) d\tau}_{=\varphi(t)}$$

$$f'(t) = g'(s) \cdot \varphi'(t)$$

$$f''(t) = (g'(\varphi(t)))' \cdot \varphi'(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) =$$

$$= \underbrace{g''(s) \cdot \varphi'^2(t)}_{\perp \vec{v}} + \underbrace{g'(s) \varphi''(t)}_{\|g'(s)=v}$$

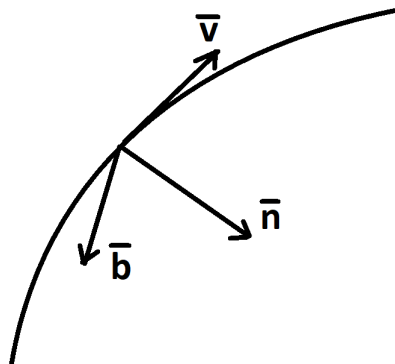
Теорема

Плоск. на вект $f'(t)$ и $f''(t)$ не зависит от параметризации

Опр

Эта плоскость (на вект. \vec{v} и \vec{n}) наз. соприкасающейся плоск.

1.9 Формула Френе



Опр

$\vec{b} = \vec{v} \times \vec{n}$ - вектор бинормали

$(\vec{v}, \vec{n}, \vec{b})$ - базис Френе

Трехвекторник Френе или ренер Френе

$$\vec{v}' = k \cdot \vec{n}$$

$$b' \perp b$$

$$b' = (\vec{v} \times \vec{n})' = \underbrace{\vec{v}' \times \vec{n}}_{=0} + \vec{v} \times n' \perp \vec{v}$$

$$\vec{v}' = k \vec{n}$$

$$\Rightarrow b' \parallel \vec{n} \Rightarrow b' = -\kappa \cdot \vec{n} - \text{капа}$$

κ наз. кручением кривой

Теорема

$$\kappa = 0 \Leftrightarrow \text{Кривая плоская}$$

$$\text{Кривая плоская} \Leftrightarrow \text{она лежит в плоск } \langle v, n \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{нормаль к } \langle v, n \rangle \text{ постоянна} \Leftrightarrow b = \text{const} \Leftrightarrow b' = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$$

$$n' = (\vec{b} \times v)' = b' \times v + b \times v' = -\varkappa n \times v + k \cdot b \times n =$$

$$\varkappa \cdot \vec{b} - k \vec{v}$$

$$v' = kn$$

$$n' = -kv + \varkappa b$$

$$b' = -\varkappa n$$

	v	n	b
v'	0	k	0
n'	-k	0	\varkappa
b'	0	$-\varkappa$	0

1.10 Вычисление кривизны кручения

Теорема

$$k = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

Док-во

$$g(s) \text{ - нат. парам } f(t) = g(\varphi(t)) \quad s = \varphi(t) \quad \varphi(t) = \int_a^t |f'(\tau)| d\tau$$

$$g'(s) = \vec{v} \quad g''(s) = k \vec{n} \quad \varphi'(t) = |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(s) \cdot \varphi^2(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) = k \cdot \vec{n} \cdot |f'(t)|^2 + v \cdot \varphi''(t)$$

$$f''(t) \times f'(t) = k |f'(t)|^2 \cdot \vec{n} \times f'(t) + 0 = \quad v'(t) = |f'(t)| \vec{v}$$

$$k \cdot \vec{n} \times \vec{v} |f'(t)|^3$$

$$|f''(t) \times f'(t)| = k |f'(t)|^3$$

$$k = \frac{|f''(t) \times f'(t)|}{|f'(t)|^3}$$

2019-09-30 Вычисление кручения

Напоминание

$$(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c} + \alpha \vec{a})$$

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

Теорема

$g(s)$ - нат. парам., тогда:

$$\kappa = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

Док-во

$$g'(s) = \vec{v} \quad |\vec{v}| = 1$$

$$g''(s) = v' = k \vec{n}$$

$$g'''(s) = kn' = k(-k \vec{v} + \kappa \vec{b}) = -k^2 \vec{v} + \kappa k \vec{b}$$

$$(g', g'', g''') = (\vec{v}; k \vec{n}; -k^2 \vec{v} + \kappa k \vec{b}) = (v; kn; \kappa kb) = \kappa k^2$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

Теорема

$f(t)$ - парам (\forall) , тогда:

$$\kappa = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

Док-во

$f(t)$ - парам (\forall)

$$S = \psi(t) = \int_a^t |f'(\tau)| d\tau \quad g(s) - \text{нат. парам}$$

$$\psi'(t) = |f'(t)|$$

$$g(S) = g(\psi(t)) = f(t)$$

$$f'(t) = g'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = g'(s) \cdot |f'(t)|$$

$$\begin{aligned}
f''(t) &= g''(\psi(t))(\psi(t))^2 + g'(\psi(t))\psi''(t) = g''(s) \cdot |f'(t)|^2 + g'(s) \cdot \psi''(t) \\
f'''(t) &= g'''(\psi(t))(\psi'(t))^3 + g''(\psi(t)) \cdot 3\psi'(t)\psi''(t) + g'(\psi(t)) \cdot \psi'''(t) \\
(f', f'', f''') &= (\vec{f}'(s) \cdot |f'(t)|; \vec{g}''(s) |f'(t)|^2, g'''(s) \cdot |f'(t)|^3) = \\
&= (g', g'', g''') \cdot |f'(t)|^6 \\
\kappa &= \frac{(g', g'', g''')}{k^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f'(t)|^6} \cdot \frac{|f'(t)|^6}{|f' \times f''|^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}
\end{aligned}$$

Пример

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$y = f(x) \quad \vec{f} = (x; f(x); 0) \quad \vec{f}' = (1; f'(x); 0) \quad f''(0; f''(x); 0)$$

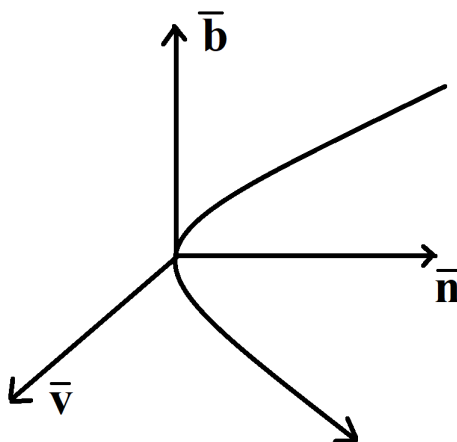
$$f''' = (0; f'''(x); 0)$$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$f' \times f'' = (0; 0; f''(x))$$

$$\kappa = 0$$

1.11 Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми



Опр

Соприкас плоскость : $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

Нормальная плоскость кривой : $\langle n, b \rangle$

Спрямяющая плоскость : $\langle v, b \rangle$

Теорема

$\vec{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t))$ ур-е нормали плоск.

$$\vec{v} \parallel f'(t) = (f'_1, f'_2, f'_3) \quad f'_1(t_0) \cdot (x - f_1(t_0)) + f'_2(t_0) \cdot (y - f_2(t_0)) + f'_3(t_0) \cdot (z - f_3(t_0)) = 0$$

$$f' \times f'' \parallel b$$

так как л.н.

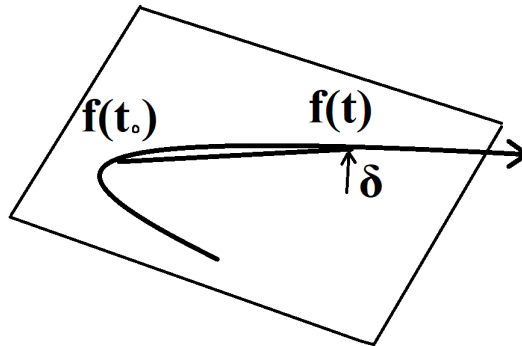
$$(f'_1, f'_2, f'_3) \times (f''_1, f''_2, f''_3) = (f'_2 f''_3 - f'_3 f''_2; f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3; f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1)$$

Соприкас плоск.

$$\begin{vmatrix} f'_1(t_0) & f'_2(t_0) & f'_3(t_0) \\ f''_1(t_0) & f''_2(t_0) & f''_3(t_0) \\ x - f_1(t_0) & y - f_2(t_0) & z - f_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$(f'(t_0) \times f''(t_0)) \times f'(t_0) \parallel \vec{n}$$

Ур-е спрям. плоск - УПР

Теорема

δ - расст. от $f(t)$ до соприкас. плоскости

Если плоскость явл. соприкас., то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|^2} = 0$$

Плоскость с таким соотношением ед.

Док-во Условия достигаются за счет подходящей системы координат

- a) $f(t_0) = (0, 0, 0)$
- b) $OX \parallel \vec{v}(t_0)$
- c) $OY \parallel \vec{n}(t_0)$
- d) $t_0 = 0$
- e) t - нат. параметр
- б, в $\Rightarrow OZ \parallel \vec{b}(t_0)$

$$f(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \Rightarrow \delta = |f_3(t)s|$$

Соприкас $z = 0$

$$\vec{v} \parallel f' = (f'_1, f'_2, f'_3) \parallel OX \Rightarrow f'_2(0) = 0, \quad f'_3(0) = 0 \quad f'_1(0) \neq 0$$

$$\vec{n} \parallel f'' = (f''_1, f''_2, f''_3) \parallel OY \Rightarrow f''_1(0) = 0; \quad f''_3(0) = 0$$

Следует из пункта е)

$$\text{Хотим } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f_3(t)|}{|f(t)|^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_3(t)}{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'_3(t)}{2f_1(t)f'_1(t) + 2f_2(t)f'_2(t) + 2f_3(t)f'_3(t)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f''_3(t)}{f_1'^2(t) + f_1(t)f''_1(t) + f_2(t)f''_2(t) + f_3'^2(t) + f_3(t)f''_3(t)} \end{aligned}$$

Все кроме первого слагаемого в знаменателе стремятся к 0, числитель тоже стремится к 0. Замечание. Можно было разложить f_1, f_2, f_3 по Тейлору. Можно зачеркнуть пункт д(е)) и $f''_1(0) = 0$

1.12 Дополнение 2: натур. ур-я кривой

Теорема

$g_1(s)$ и $g_2(s)$ - нат. парам. двух кривых

$k_1(s) \quad k_2(s)$
 $\mathfrak{a}_1(s) \quad \mathfrak{a}_2(s)$ - кривизны и кручения

Если $k_1(s) = k_2(s)$
 $\mathfrak{a}_1(s) = \mathfrak{a}_2(s) \Rightarrow$ кривые наклад. при движении пр-ва

Док-во

$v_1(s), n_1(s), b_1(s)$ - базис Френе I кривой

$v_2(s), n_2(s), b_2(s)$ - базис Френе II кривой

Считаем $v_1(s_0) = v_2(s_0)$

$n_1(s_0) = n_2(s_0)$

$b_1(s_0) = b_2(s_0)$

В данной точке базисы кривой одинаковы, а дальше возможно не совпадают. Почему не может?

$$h(s) = \vec{v}_1(s) \vec{v}_2(s) + \vec{n}_1(s) \vec{n}_2(s) + \vec{b}_1(s) \vec{b}_2(s) \quad h(s_0) = 3$$

$$h'(s) = v'_1 v_2 + v_1 v'_2 + n'_1 n_2 + n_1 n'_2 + b'_1 b_2 + b_1 b'_2 =$$

По формуле Френе

$$= \underline{k_1 n_1 v_2} + \underline{k_2 v_1 n_2} + (\underline{-k_1 v_1} + \underline{\varkappa_1 b_1}) n_2 + n_1 (\underline{-k_2 v_2} + \underline{\varkappa_2 b_2}) - \underline{\varkappa_1 n_1 b_2} - \underline{\varkappa_2 b_1 n_2} = 0$$

$$\Rightarrow h(s_0) \equiv 3$$

$$\Rightarrow v_1 \equiv v_2 \quad n_1 \equiv n_2 \quad b_1 \equiv b_2$$

2019-09-30

2 Дифференциальная геометрия поверхностей

2.1 Понятие поверхности

Пример (способы задания поверхностей) 1. $z = f(x, y)$ - явное задание

2. $F(x, y, z) = 0$ - неявное задание

Теорема (о неявной функции)

$$F(x, y, z) = 0, \quad F - \text{непр. дифф.}, \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists f(x, y) : F(x, y, f(x, y)) = 0 \text{ в некоторой окр.}$$

Опр

$$D \subset \mathbb{R}^2, \quad \forall (u, v) \in D, \quad \bar{r} -$$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad \bar{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Пример

$$z = f(x, y)$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Координат. линии поверхности:

$$u = u_0 \quad \bar{r}(u, v) - \text{кривая}$$

$$\bar{r}(u, v) - \text{другое семейство}$$

Замечание

Линии перпендикулярны

Опр

Перепараметризация биекция

Опр

Параметризация называется регулярной, если

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ не перпендикулярны ни в одной точке

$$(\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq 0)$$

Опр

Кривая лежит на поверхности, если все её точки лежат на поверхности

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{r} = (x(u(t), v(t)), y(\dots)\dots)$$

Опр

Вектор называется касательным, если он является касательным к кривой на поверхности

Теорема

Если поверхность регулярная \Rightarrow касательные векторы образуют плоскость

Опр

Касательная плоскость - плоскость из касательных векторов

Док-во

Базис: $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} A$ и $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} A$

$$\begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 = u_0 \\ v = t \end{cases} \quad \bar{r}(t) = (x(t_0, v_0), y(t_0, v_0), z(t_0, v_0))$$

$$\bar{r}'(t) = (x'(t_0, v_0), y'(t_0, v_0), z'(t_0, v_0)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \dots \right)$$

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

$$\frac{dr}{dt} \Big|_A = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right) \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \Big| + a$$

Наоборот $\alpha \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \Big|_A + \beta \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \Big|_A$ - вектор

$$\begin{cases} u(t) = \alpha t \\ v(t) = \beta t \end{cases}$$

Как задать касательную плоскость в координатах?

Пусть \bar{n} - нормаль к плоскости

$$\bar{n} = (A, B, C)$$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

$$\bar{r} = (x, y, z)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$\bar{n} = \left(\begin{pmatrix} \left| \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \right| & \left| \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \right| & \left| \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \right| \\ \left| \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \right| & \left| \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \right| & \left| \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \right| \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 - \text{уравнение касательной плоскости}$$

УТВ

В неявном виде

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) - \text{перп. плоскости}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla F \circ \underset{\text{касат. вектор}}{(x', y', z')} = 0$$

$$\nabla F \perp \text{касат. вектору (любому)} \Rightarrow \nabla F - \text{норм пов-ть}$$

УТВ

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0)$$

2.3 Первая квадратичная плоскость

Длина кривой на поверхности

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

\bar{r} - пов-ть

$$r = (x, y, z) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

$$\text{Длина кривой} = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d}{dt} \bar{r}(u(t), v(t)) \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v', \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v', \frac{\partial z}{\partial u} u' + \frac{\partial z}{\partial v} v' \right) \right| dt$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

Опр

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt - \text{первая квадратичная форма}$$

2019-10-14

Теорема

Угол между кривыми

$$\cos \alpha = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv + 1'v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu'_1v'_1 + Gv_1'^2}\sqrt{\dots}}$$

Док-во

Найдем, как вычисляется угол между кривыми

$$\begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}$$

Нужно найти угол между $\bar{r}'_t(u_1(t), v_1(t))$ и $\bar{r}'_t(u_2(t), v_2(t))$

$$\cos \alpha = \frac{\bar{r}'_t(u_1(t), v_1(t)) * \bar{r}'_t(u_2(t), v_2(t))}{|\bar{r}'_t(u_1(t), v_1(t))| |\bar{r}'_t(u_2(t), v_2(t))|}$$

$$r'_t(u_1(t), v_1(t)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv_1}{dt}; \dots \right)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}(u_i(t), v_i(t)) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} u'_i + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} v'_i$$

$$\frac{dr}{dt}(u_1(t), v_1(t)) \frac{dr}{dt}(u_2(t), v_2(t)) = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} u'_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} v'_1 \right) \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} u'_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} v'_2 \right) = Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv + 1'v'_2$$

$$\cos \alpha = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv + 1'v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu'_1v'_1 + Gv_1'^2}\sqrt{\dots}}$$

Опр

Поверхности Φ_1 и Φ_2 называются изометричными, если \exists параметризации \bar{r}_1 у Φ_1 и \bar{r}_2 у Φ_2 $r_1, r_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ и \forall кривой D длины $|r_1(l)| = |r_2(l)|$

Опр

Внутренняя метрика поверхности $(A, B) = \inf \{ \text{длина кривой на поверхности, с} \dots \}$

Теорема

Если у Φ_1 и Φ_2 совпадают коэффициенты I кв. формы, то они изометричны

Док-во

Уже доказали, потому что форма вычисления длины кривой одинаковая на обеих поверхностях

Замечание

Если поверхности изометричны, то $\exists D$ и параметризации $\bar{r}_1, \bar{r}_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, r_i - параметризация поверхности Φ_i такие что E, F, G совпадают для \bar{r}_1 и \bar{r}_2

Док-во

f - изометрия

Кривая в D: $\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = v_0 & v' = 0 \end{cases}$

$$l_1 = \int_a^b \sqrt{E_1} dt$$

$$l_2 = \int_a^b \sqrt{E_2} dt$$

т.к. $l_1 = l_2 \Rightarrow E_1 = E_2$

Аналогично $G_1 = G_2$ ($\begin{cases} u = u_0 \\ v = t \end{cases}$)

$$\begin{cases} u = t + u_0, & u' = 1 \\ v = t + v_0, & v' = 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1} dt = \int_a^b \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2} dt$$

$$E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2 \Rightarrow F_1 = F_2$$

Следствие

I кв. форма определяет внутреннюю геометрию

Пример

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \psi \\ y = R \sin \varphi \cos \psi \\ z = R \sin \psi \end{cases}$$

$$\bar{r} = (R \cos \varphi \cos \psi, R \sin \varphi \cos \psi, R \sin \psi)$$

$$r'_\varphi = (-R \sin \varphi \cos \psi, R \cos \varphi \cos \psi, 0)$$

$$r'_\psi = (R \cos \varphi \sin \psi, -R \sin \varphi \sin \psi, R \cos \psi)$$

$$E = r'^2_\varphi = R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = R^2 \cos^2 \psi$$

$$F = R^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \varphi \sin \psi - R^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + 0 = 0$$

$$G = R^2$$

Пример (параметризация поверхности вращения)

$$\begin{cases} x = f(t) \cos \varphi \\ y = f(t) \sin \varphi \\ z = g(t) \end{cases}$$

Упр

У любой поверхности вращения $F = 0$, E не зависит от φ , G тоже

Теорема

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

Док-во

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = (\bar{x}_u, \bar{y}_u, \bar{z}_u) \times (\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{z}_v) = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = \sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2} =$$

$$= \sqrt{(y_u^2 z_v^2 + z_u^2 y_v^2) - 2(y_u z_v z_u y_v + z_u x_u z_v x_u + x_u x_v y_u y_v)} =$$

$$EG - F^2 = (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(z_v^2 + y_v^2 + x_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 =$$

$$= (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) + (A) - (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) - 2(B)$$

Следствие

$$EG - F^2 > 0$$

Теорема

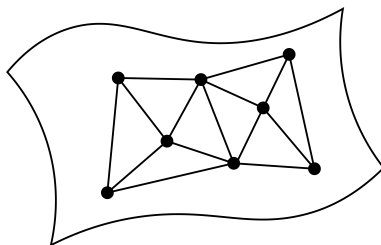
$$\text{Площадь поверхности } S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

2019-10-21

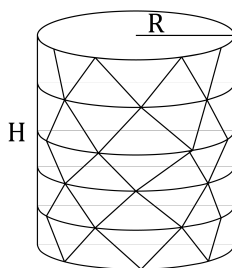
Как не нужно вводить площадь?

Конструкция: Φ - пов-ть, впишем в Φ кус.-лин. пов-ть

$$\lim_{|\Delta_i| \rightarrow 0} \sum_{\Delta} S_{\Delta} \stackrel{?}{=} S_{\text{пов-ти}}$$



Контрпример: сапог Шварца

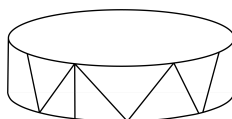


h - высота каждого
 k слоев

$$H = kh$$

$$k \rightarrow \infty$$

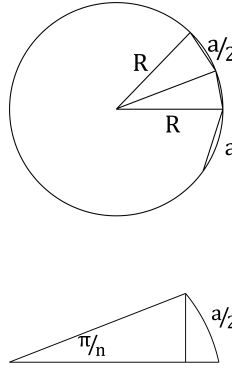
$$n \rightarrow \infty$$



В слое $2n$ Δ

$$h' = \sqrt{h^2 + b^2}$$

Всего $2nk \Delta$



$$\frac{a}{2} = R \sin \frac{\pi}{n}$$

$$a = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

$$b = R - R \cos \frac{\pi}{n} \quad h = \frac{H}{K}$$

$$h' = \sqrt{h^2 + R^2(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah' = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{h^2 + R^2(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2}$$

$$\sum_{\Delta} S_{\Delta} = 2nkR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{K^2} + R^2(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n,k \rightarrow \infty} 2nkR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{K^2} + R^2(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2} &= \\ &= 2\pi R \lim_{n,k \rightarrow \infty} \sqrt{H^2 + R^2(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2 K^2} = \\ &= 2\pi R \sqrt{H^2 + R^2 \lim_{n,k \rightarrow \infty} K^2(1 - \cos \frac{\pi}{n})^2} = \\ &= 2\pi K \sqrt{H^2 + R^2 \frac{\pi^4}{4} \lim_{k,n \rightarrow \infty} \frac{k^2}{n^4}} \end{aligned}$$

Если $k = o(n^2) \Rightarrow \pi RH$
 $n \rightarrow \infty$

Если $k = n^2 \Rightarrow 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{\pi^4}{n} R^2} \neq 2\pi RH$

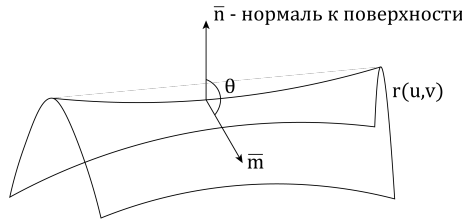
Если $k = n^3 \Rightarrow \dots = \infty$

Почему так?

Посмотрим, что происходит, когда k растет быстрее, чем n^2

При маленьком a выходит тонкий слой и получается "помятый" сапог Шварца

2.7 II квадратичная форма



$$\psi(s) \quad k = \psi''(s)$$

θ - угол между \bar{m} и \bar{n}

$$k = |\psi''(s)| = \frac{\bar{\psi}''(s) \cdot \bar{n}}{\cos \theta}$$

$u(s), v(s)$ - внутр. ур-я кривой

$$\psi' = r_u u' + r_v v'$$

$$\psi'' = \bar{r}_{uu} u'^2 + \bar{r}_{uv} u' v' + \bar{r}_u u'' + \bar{r}_{uu} u' v' + \bar{r}_{vv} v'^2 + \bar{r}_v v''$$

$$\psi'' n = \bar{r}_{uu} \bar{n} u'^2 + 2\bar{r}_{uv} n u' v' + \bar{r}_{vv} n v'^2 = L u'^2 + 2M u' v' - N v'^2 = \Pi(u', v')$$

$$\bar{r}_u \bar{n} = 0$$

$$\bar{r}_v \bar{n} = 0$$

$$\begin{cases} \bar{r}_{uu} \bar{n} = L \\ \bar{r}_{uv} \bar{n} = M \\ \bar{r}_{vv} \bar{n} = N \end{cases} \quad \text{- коэф. II кв. формы пов-ти}$$

$$I(u', v') = R u'^2 + 2F u' v' + G v'^2$$

Теорема

Если s - н.т. параметризация, $k = \cos \theta = \Pi(u'(s), v'(s))$

Теорема

\forall параметризации $\Rightarrow k \cos \theta = \frac{\Pi(u'(t); v'(t))}{I(u'(t); v'(t))}$

Док-во

Пусть теперь $\psi(t)$ - произвольная параметризация

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$$

$$(u'(s), v'(s)) = \frac{(u'(t), v'(t))}{|\varphi'(t)|}$$

$$|\varphi'(t)| = Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t)$$

$$k \cos \theta = \frac{\Pi(u'(t), v'(t))}{|\varphi'(t)|} = \frac{\Pi(u'(t); v'(t))}{I(u'(t); v'(t))}$$

Пример

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \psi \\ y = R \sin \varphi \cos \psi \\ z = R \sin \psi \end{cases} \quad - \text{сфера}$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}}{R} = (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi)$$

$$\bar{r}_{\varphi\varphi} = (-R \cos \varphi \cos \psi, -R \sin \varphi \cos \psi, 0)$$

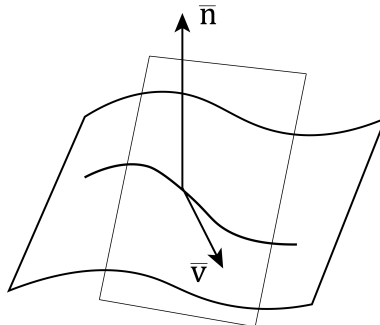
$$L = -R \cos^2 \psi$$

$$\bar{r}_{\varphi\psi} = (R \sin \varphi \sin \psi, -R \cos \varphi \sin \psi, 0)$$

$$M = 0$$

$$\bar{r}_{\psi\psi} = (-R \cos \varphi \cos \psi, -R \sin \varphi \cos \psi, -R \sin \psi)$$

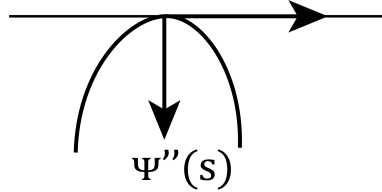
$$N = -R$$



Теорема

Проекция векторов кривизны кривых на поверхности с данным касательным вектором на вектор нормали к поверхности одинаковы (все это $k \cos \theta$)

$(u'(s_0), v'(s_0))$ - у всех таких кривых одинак.



Теорема

$k \cos \theta = \Pi(u'(s), v'(s))$, если s - натур. параметризация

Док-во

Пусть параметризации натуральные

Возьмем кривую: $\cos \theta = \pm 1$ (знак зависит от \bar{n})

Рассмотрим кривые с данным единичным кас. вектором и $\cos \theta = \pm 1 \Rightarrow$ у них одинаковые кривизны

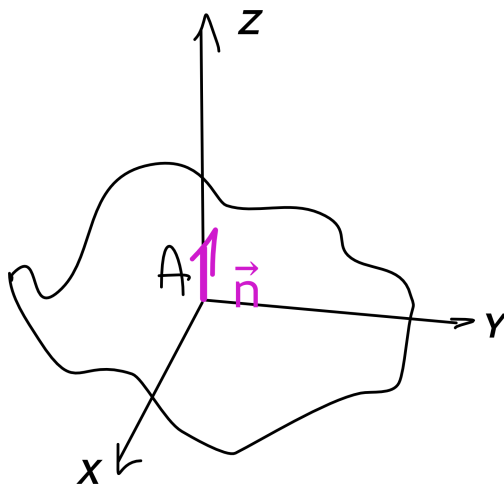
$$k_{\nabla} = \Pi(u'(s), v'(s))$$

Нормальная кривизна поверхности в направлении ∇

2019-10-28

Напоминание**2.8 Соприкас. параболоид**

«Введем нового героя»

Опр A - точка на пов-ти \Rightarrow в окр. A поверхность задается $z = f(x, y)$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = f(x_0, y_0) = 0$$

Разложим $z = f(x, y)$ по ф. Тейлора

$$z = f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y +$$

$$\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)xy + f_{yy}(x_0, y_0)y^2)$$

$$f_x(0, 0) = 0 \quad f_y(0, 0) = 0$$

$$r(v, u) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \quad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$$

r_u и r_v - лежат в кас. плоск, а это OXY

$$z = \underbrace{\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2)}_{\text{пов-ть 2 порядка}} + o(x^2 + y^2)$$

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$z = Ax^2 + Cy^2$ можем поворотом привести к этому

Это может быть:

- эллиптич. параболоид A, C - одного знака
- гипербол. параболоид A, C - разных знаков
- параболический цилиндр $A = 0, C \neq 0$ или наоборот
- плоскость $A = 0, C = 0$

Опр

Точка A наз. эллиптической, если соприкас. параболоид - эллипт.

A - гиперболическая, если соприкас параболоид - гиперб.

A - парабол., если соприкас параб - параб. цилиндр или плоскость

Опр

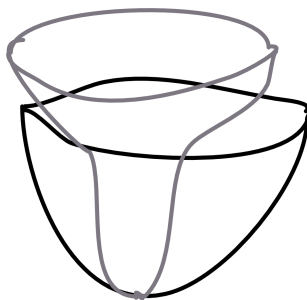
Точка A наз. точкой округления (омбилическая), если сопр. параб. - пар. вращения

Опр

Точка A - точка уплощения, если соприкас. параб - плоскость

Теорема

I и II формы в точке A у поверхности и параболоида совпадают



$$\text{В параметризации } \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Док-во

очевидно

Давайте поймем, от чего зависят E, F, G, \dots, M, V ?

от $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}, \bar{r}_{uv}, \bar{r}_{vv}$

Следствие

Норм. кривизны у поверх-ти и соприкас. параб совпадают

Опр

Главные кривизны k_1 и k_2

\vec{a} - направление в кас. плоск

$\bar{k}_{\vec{a}}$ - нормальная кривизна

$k_{\vec{a}}$ - норм. кривизина в напр. \vec{a}

$$\bar{k}_{\vec{a}} = k_{\vec{a}} \bar{n}$$

$$k_1 = \min_{\vec{a}} k_{\vec{a}} \quad k_2 = \max_{\vec{a}} k_{\vec{a}}$$

Опр

\vec{a}_1 и \vec{a}_2 , соотв k_1 и k_2 наз. главными направлениями

Утв

$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$ (докажем позже)

Опр

$K = k_1 \cdot k_2$ - гауссова кривизна

«Главный герой всего нашего курса»

Свойства

$K > 0 \Leftrightarrow A$ - эллипт типа

$K < 0 \Leftrightarrow A$ - гиперб. типа

$K = 0 \Leftrightarrow A$ - параб. типа

Утв ("Блистательная теорема Гаусса")

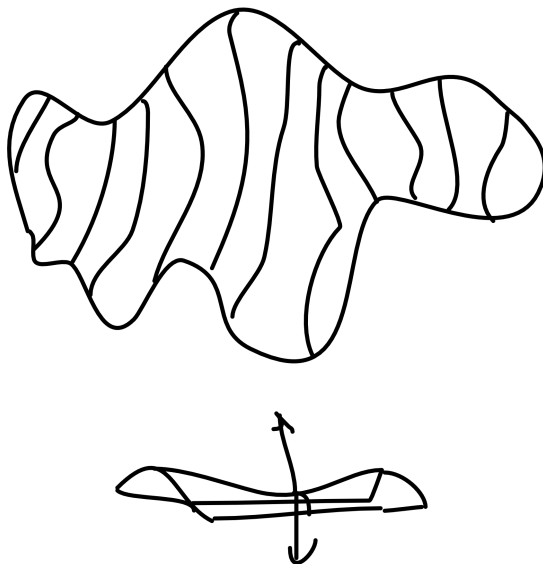
K - инвариант относительно изометрии пов-ти

Опр

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} - \text{средняя кривизна}$$

Смысл: В мыльных пленках (незамкн.) средняя кривизна = 0

Пример: мыльная плёнка

Теорема (Эйлера)

$$k_{\vec{a}} = k_1 \cos^2 \Theta + k_2 \sin^2 \Theta$$

где k_1, k_2 - гл. кривизны, Θ - угол между напр. \vec{a} и \vec{a}_1

Док-во

$z = Ax^2 + Cy^2$ - сопр. парабол.

$\vec{a} = (\cos \Theta; \sin \Theta)$ - направление

$$\begin{cases} x = t \cos \Theta \\ y = t \sin \Theta \\ z = Ax^2 + Cy^2 = t^2(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{cases}$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{cases} \cos \Theta \\ \sin \Theta \\ 2t(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{cases}$$

$$r''(t) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ r(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{cases}$$

$$k = \frac{|r'(t_0) \times r''(t_0)|}{|r'(t_0)|^{3/2}}$$

$$t_0 = 0$$

$$r'(t_0) = \begin{pmatrix} \sin \Theta \\ \cos \Theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad |r'(t)| = 1$$

$$r''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{pmatrix}$$

$$|r''(t_0)| = 2 |A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta|$$

$$r'' \perp r'$$

$$\text{В данном случае } k = |r''(t_0)| = 2 |A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta|$$

$$k_{\vec{a}} = \pm k \quad (\text{от сонапр. с } \vec{n})$$

$$k_{\vec{a}} = 2(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta)$$

Хотим теперь найти минимум и максимум этой штуки

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$z = Ax^2 + Cy^2$$

$$\frac{dk_{\vec{a}}}{d\Theta} =$$

Мы не хотим брать произв.

$$k_{\vec{a}} = 2(A \cos^2 \Theta + C(1 - \cos \Theta)) = 2C + \cos^2 \Theta(2A - 2C)$$

При $A = C$ A - точка окружл.

$$\exists A > C$$

$$\max k_{\vec{a}} \text{ достиг при } \Theta = 0 \quad (\text{или } \pi)$$

$$k_1 = 2C + 2A - 2C = 2A$$

$$\min k_{\vec{a}} \text{ при } \frac{\pi}{2} \quad (\text{или } -\frac{\pi}{2})$$

$$k_2 = 2C$$

Следствие (1)

Пов-ть задана ур-ем $z = f(x, y)$

$$f(0, 0) = 0 \quad f_x(0, 0) = 0 \quad f_y(0, 0) = 0 \quad f_{xy}(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = f_{xx}(0, 0) \quad k_2 = f_{yy}(0, 0)$$

(или наоборот мы рассматривали только $A > C$)

Следствие (2)

Главные напр \perp