Содержание

11.10.19 Условные экстремумы

$$u = f(x_1, ..., x_n) \text{ при усл } \begin{cases} \Phi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad m < n$$

1. Точка недифф-ти f или Φ_i
2. $\operatorname{rk} \Phi' < m$
3. $\mathscr{L} = f(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 \Phi_1(x_1, ..., x_n) - \lambda_2 \Phi_2(x_1, ..., x_n) - ... - \lambda_m \Phi_m(x_1, ..., x_n)$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad m \times n$$

Точка экстремума удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \Phi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad m + n \text{ уравнений}$$

$m + n$ неизвестных $\quad x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$

<u>Задача</u> (1)

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \qquad a, b > 0 \text{ при усл. } x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 1 = 0}_{\Phi} \qquad M$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \qquad 1 \text{ ур-е } \Rightarrow 1 \text{ строка в матрице}$$

$$\operatorname{rk} \Phi' < 1 \Rightarrow \operatorname{rk} \Phi' = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \notin M$$

$$\forall (x, y) \in M \qquad \operatorname{rk} \Phi' = 1$$

$$\mathscr{L} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = \frac{1}{a} - 2\lambda \cdot x = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 & x = \frac{1}{2a\lambda} \\ \mathscr{L}'_y = \frac{1}{b} - a\lambda \cdot y = 0 \Rightarrow & y = \frac{1}{2b\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} = 1$$

$$\frac{b^2 + a^2}{4a^2b^2\lambda^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 4a^2b^2\lambda^2$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}$$

$$1. \begin{cases} x = \frac{1 \cdot 2ab}{2a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda = +\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \end{cases}$$

Выясним, что будет в этих точках

$$\mathscr{L}''_{x^2} = -2\lambda$$

$$\mathscr{L}''_{xy} = 0$$

$$\mathscr{L}''_{y^2} = -2\lambda$$

$$\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 2\lambda \quad \Delta_2 = 4\lambda^2$$

$$\begin{array}{lllll} \text{для} & 1. & - & + & \max \\ & 2. & + & + & \min \end{array}$$

Задача (2)

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b > c > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk}\Phi' = 0 \Rightarrow \quad x = y = z = 0 \qquad (0,0,0) \not\in M$$

$$\mathscr{L} = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = 2x - \frac{2x\lambda}{a^2} = 0 \Rightarrow x(1 - \frac{\lambda}{a^2}) = 0 \\ \mathscr{L}'_y = 2y - \frac{2y\lambda}{b^2} = 0 \Rightarrow y(1 - \frac{\lambda}{b^2}) = 0 \\ \mathscr{L}'_z = 2z - \frac{2z\lambda}{c^2} = 0 \Rightarrow z(1 - \frac{\lambda}{c^2}) = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$1 - \frac{\lambda}{b^2} = 0 \Rightarrow \lambda = b^2$$

$$x = z = 0 \qquad y \pm b$$

$$1 - \frac{\lambda}{c^2} = 0 \Rightarrow \lambda = c^2$$

$$x = y = 0 \qquad z = \pm c$$

$$1 - \frac{\lambda}{a^2} = 0$$

$$\lambda = a^2 \qquad 1 - \frac{a^2}{b^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$1 - \frac{a^2}{c^2} \neq 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda = a^2 \end{cases}$$

6 решений $\begin{pmatrix} \pm a & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm b & 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm c & c^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{2\lambda}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2\lambda}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{2\lambda}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 - \frac{2\lambda}{a^2} = 2(1 - \frac{\lambda}{a^2})$$

$$\Delta_2 = 4(1 - \frac{\lambda}{a^2})(1 - \frac{\lambda}{b^2})$$

$$\Delta_3 = 8(1 - \frac{\lambda}{a^2})(1 - \frac{\lambda}{b^2})(1 - \frac{\lambda}{c^2})$$

1. $\lambda = a^2 \qquad 0,\ 0,\ 0$
2. $\lambda = b^2 \qquad 1 - \frac{b^2}{a^2} > 0,\ 0,\ 0$
3. $\lambda = c^2 \qquad 1 - \frac{c^2}{a^2} > 0,\ (1 - \frac{c^2}{a^2})(1 - \frac{c^2}{b^2}) > 0,\ 0$

Но у нас 2 независимые переменные

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{\lambda^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{\lambda}{b^2})(dy)^2 + 2(1 - \frac{\lambda}{c^2})(dz)^2$$

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0$$

- линейная однородная система относительно диф-лов

dx, dy, dz - зависимы между собой

В точке $\left(\pm a,\quad 0,\quad 0,\quad a^2\right)$ - максимум

$$\frac{\pm 2a}{a^2}dx = 0 \Rightarrow dx \equiv 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{a^2}{b^2})(dy)^2 + 2(1 - \frac{a^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{a^2}{b^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{a^2}{c^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \Delta_1 = & 2(1 - \frac{a^2}{b^2}) < 0 \\ \Delta_2 = & 4(1 - \frac{a^2}{b^2})(1 - \frac{a^2}{c^2}) > 0 \\ - \quad + & \underline{\text{максимум}} \end{array}$$

В точке $\left(0,\quad \pm b,\quad 0,\quad b^2\right)$ нет экстремума

$$\pm\frac{2b}{b^2}dy = 0 \Rightarrow dy = 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{b^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{b^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{b^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{b^2}{c^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \Delta_1 = & 2(1 - \frac{b^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = & 4(1 - \frac{b^2}{a^2})(1 - \frac{b^2}{c^2}) < 0 \\ + \quad - & \underline{\text{нет экстремума}} \end{array}$$

В точке $\left(0,\quad 0,\quad \pm c,\quad c^2\right)$ - минимум

$$\pm\frac{2c}{c^2}dz = 0 \Rightarrow dz = 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{c^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{c^2}{b^2})(dy)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{c^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{c^2}{b^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \Delta_1 = & 2(1 - \frac{c^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = & 4(1 - \frac{c^2}{a^2})(1 - \frac{c^2}{b^2}) > 0 \\ + \quad + & \underline{\text{минимум}} \end{array}$$

Задача (3)

$$u = xy + yz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad M$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rk}\Phi' < 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{противоречие с } x^2 + y^2 = 2$$

$$\forall (x, y) \in M \qquad \operatorname{rk}\Phi' = 2$$

$$\mathscr{L} = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(y + z - 2)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = y - 2\lambda_1 x & = 0 \\ \mathscr{L}'_y = x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 & = 0 \\ \mathscr{L}'_z = y - \lambda_2 & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 2 \\ y + z & = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \quad \lambda_1 = \frac{y}{2x}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ - противореч с $x^2 + y^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + z - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = z \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + 2 - y - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 - y \end{cases} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x^2 + 2(1-y)x - y^2 = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ 2 - 2y^2 + 2(1-y)x = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ (1-y)(1+y) + x(1-y) = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases}$$

$$(1-y)(1+y+x) = 0$$

1. $\quad y = 1$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$z = 2 - y = 1$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$(1)\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

2. $\quad 1 + y + x = 0$

$$x = -1 - y$$

$$(-1-y)^2 = 2 - y^2 \qquad y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$y^2 + 2y + 1 = 2 - y^2 \qquad z = 1 - \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{-2 + 1 \mp \sqrt{3}}{2}$$

$$2y^2 + 2y - 1 = 0$$

2019-10-25

Неявные функции. Вычисл. их диф-лов, производных. Разложения неявных функций по ф-ле Тейлора

Напоминание

неявные ф-ии задаются системой ур-й

$$F_i \in C^1(G)$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0 \\ ... \\ F_n(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0 \end{cases} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_m) \\ ... \\ y_n = f_n(x_1, ..., x_m) \end{cases}$$

$m + n$ - перем. $\quad n -$ ур-ний

Теорема

Если сис-ма удовлетв-ся в точке $(x_1^0, ..., x_m^0, y_1^0, ..., y_n^0)$ и в этой точке

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

То в окрестн. точки $(x_1^0, ..., x_m^0, y_1^0, ..., y_n^0)$ система однозн. разрешима и $f_k \in C^1(u(x_1^0, ..., x_m^0))$

Если $F_i \in C^r(G) \qquad \Rightarrow f_k \in C^r(u(x_1^0, ..., x_m^0))$

Вычислим диф-лы от каждого ур-я

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + ... + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} dx_m + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + ... + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} dy_n = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + ... + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_m} dx_m + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + ... + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_n} dy_n = 0 \\ ... \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} dx_1 + ... + \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} dx_m + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} dy_1 + ... + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} dy_n = 0 \end{cases}$$

Линейная однородная система относительно $dy_1, .., dy_n$

$\Rightarrow$ система однозначно разрешима (т.к.)

$$dy_1 = \underbrace{...}_{\to \frac{\partial F_1}{\partial x_1}} dx_1 + \underbrace{...}_{\to \frac{\partial F_1}{\partial x_2}} dx_2 + ... + \underbrace{...}_{\to \frac{\partial F_1}{\partial x_m}} dx_m +$$

$$...$$

$$dy_n = ...dx_1 + ...dx_2 + ... + ...dx_m$$

Задача (1)

$$F = z^3 - 3xyz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = z(x, y)$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1 \Rightarrow z_0 = 1$$

Хотим найти $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$... (В том числе в точке $(0, 1)$)

$$dF = -3yzdx - 3xzdy + (3z^2 - 3xy)dz = 0$$

$$3z_0^2 - 3x_0y_0 = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow dz = +\frac{yz}{z^2 - xy}dx + \frac{xz}{z^2 - xy}dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = +\frac{yz}{z^2 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = +\frac{xz}{z^2 - xy}$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0$$

hint: Если нужны только в конкрет. точке, то проще подставить точку в ур-е

$$-3 \cdot 1 \cdot 1dx - 3 \cdot 0 \cdot 1dy + 3(1 - 0 \cdot 1)dz = 0$$

$$\Rightarrow dz = dx = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy$$

$$-yzdx - xzdy + (z^2 - xy)dz = 0$$

$$hint: \quad d(P \cdot Q) = P \cdot dQ + Q \cdot dP$$

$$d(-yz)dx + (-yz)d^2x + d(-xz)dy + (-xz)d^2y + d(z^2 - xy)dz + (z^2 - xy)d^2z = 0$$

x, y - нез. перем. (т.к. z - функция) $\Rightarrow d^2x, d^2y = 0$

Задача (3)

$$(F)(\underset{1}{x},\ x \underset{2}{+} y,\ x + \underset{3}{y} + z))'_x = 0$$

$$z = z(x,y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ?$$

$$F'_1 \cdot (x)'_x + F'_2 \cdot (x+y)'_x + F'_3 \cdot (x+y+z)'_x = 0$$

$$F'_1 \cdot 1 + F'_2 \cdot 1 + F'_3 \cdot (1 + z'_x) = 0$$

$$F'_3 \cdot z'_x = -F'_1 - F'_2 - F'_3 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1$$

$$(F'_1(\underset{1}{x}, x \underset{2}{+} y, x + \underset{3}{y} + z))'_x = F''_{11} \cdot (x)'_x + F''_{12} \cdot (x+y)'_x + F''_{13} \cdot (x+y+z)'_x =$$

$$= F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x$$

$$(F'_3 \cdot z'_x)'_x = (F'_3)'_x \cdot z'_x + F'_x \cdot z''_{xx}$$

$$F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23} + F''_{23} \cdot z'_x + F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x +$$

$$+ (F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x) \cdot z'_x + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F''_{11} + 2F''_{12} + 2F''_{13} + F''_{22} + 2F''_{23} + F''_{33} + (2F''_{13} + 2F''_{23} + 3F''_{33}) \cdot z'_x + F''_{33} \cdot (z'_x)^2 + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F'_3 \cdot z''_{xx} = -F''_{11} - 2F''_{12} - ... - (2F''_{13} + 2F''_{23} + 2F''_{33}) \cdot (-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1) -$$

$$-F''_{33}(-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1)^2$$

z''_{xx} - из ур=я

$$z''_{xx} = -(\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3})'_x$$

Задача (4 Замена переменных в дифф. ур)

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z}, ...) = 0$$

$$z = z(x,y)$$

новые переменные u, v $\qquad$ $w(u,v)$ - новая функция

$$\begin{cases} x = f(u,v,w) y = g(u,v,w) \\ z = h(u,b,w) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

через $u, v, w,\ \frac{\partial w}{\partial u},\ \frac{\partial w}{\partial v}$

$$x'_u = f'_1 \cdot (u)'_u + f'_2 \cdot (v)'_u + f'_3(w)'_u = f'_1 + f'_3 \cdot w'_u$$

$$x'_v = f'_1 \cdot (u)'_v + f'_2 \cdot (v)'_v + f'_3 \cdot w'_v = f'_2 + f'_3 w'_v$$

$$y'_u = g'_1 + g'_3 w'_u$$

$$y'_v = g'_2 + g'_3 w'_v$$

$$z(x(u,v), y(u,v)) = h(u,v,w)$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u & = h'_1 + h'_3 w'_u \\ z'_x x'_v + z'_y y'_v & = h'_2 + h'_3 w'_v \end{cases}$$

$$z'_x = \Phi(y, v, w, w'_u, w'_v)$$

$$z'_y = \Psi(u, v, w, w'_u, w'_v)$$

Распишем как композицию

$$z'_x(x(u,v), y(u,v)) = \Phi(...)$$

$$z''_{xx} x'_u + z''_{xy} y'_u = (\Phi(...))'_u$$

$$z''_{xx} \cdot x'_v + z''_{xy} y'_v = (\Phi(...))'_v$$

Аналогично

$$z'_x(x(u,v), y(u,v)) = \Psi(...)$$

$$z''_{yx} x'_u + z''_{yy} y'_u = (\Psi(...))'_u$$

$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} y'_v = (\Psi(...))'_v$$

Задача (5)

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Ввести новые переменные

$\exists x$ - новая ф-я, y, z - новые нез. переменные

!Переобозначим, чтобы не запутаться

$$\begin{cases} x = w & \quad w(u,v) \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$x'_u = w'_u \qquad x'_v = w'_v$$

$$y'_u = 1 \qquad y'_v = 1$$

$$z(x(u,v), y(u,v)) = v$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$$

$$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot w'_u + z'_y \cdot 1 = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z'_y = -z'_x \cdot w'_x = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$(w - v) \cdot \frac{1}{w'_v} - u\frac{w'_u}{w'_v} = 0$$

$$w - v - u \cdot w'_u = 0$$

$$w'_u = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

Задача (6) Мы перепутали знак, осторожно !

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \qquad x \text{ - нез перем.} \quad y(x) \text{ - ф-я}$$

φ - новая нез перем $\qquad r(\varphi)$ - новая ф-я

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r\sin'\varphi$$

$$y(x(\varphi)) = r\sin\varphi$$

$$y'_x(x(\varphi)) \cdot x'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x \cdot (r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi) = r'_\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x = \frac{r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\frac{r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$(r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) = (\cos\varphi - \sin\varphi)\cdot(r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi)$$

$$r'_\varphi \sin\varphi\cos\varphi + r'_\varphi \sin^2_\varphi - r\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$r'_\varphi \cos^2\varphi + r'_\varphi \cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi$$

$$r'_\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$r'_\varphi = -r$$

Задача (7)

$$\begin{cases} x = w'_u \\ y = u\cdot w'_u - w \end{cases}$$

x - старая нез. $y(x)$ - ф-я u - новая $w(u)$ - ф-я

Найти y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx}

$$x'_u = w''_{uu}$$

$$y'_x \cdot x'_u = 1\cdot w'_u + uw''_{uu} - w'_u$$

$$y'_x \cdot w''_{uu} = uw''_{uu}$$

$$y'_x = u$$

$$y'_x(x(u)) = u$$

$$y''_{xx}\cdot x'_u = 1$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{w''_u u}$$

$$y''_{xx}(x(u)) = \frac{1}{w''_{uu}}$$

$$y'''_{xxx}\cdot x'_u = -\frac{1}{(w''_{uu})^2}\cdot w'''_{uuu}$$

$$y'''_{xxx} = -\frac{w'''_{uuu}}{(w''_{uu})^3}$$

Задача (8 3502 - частный случай)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$x=\frac{u}{u^2+v^2} \qquad y=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

$z=w$ старая функция равна новой

$$x'_u=\frac{1\cdot(u^2+v^2)-2u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_u=\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_v=\frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_u=\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_v=\frac{-(u^2+v^2)+2v^2}{(u^2+v^2)^2}=\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$z(x(u,v),y(u,v))$$

$$z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u=w'_u$$

Дз: 3388, 3395, 3404, 3502 закончить, 3433, 3471

2019-11-01

разбор дз от 2019-10-25

Задача (3404)

$$\begin{cases} u+v=x+y \\ \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y} \end{cases}$$

Найти $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$

$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$

$y\cdot\sin u=x\cdot\sin v$

$du+dv=dx+dy$

$\sin u\cdot dy+y\cdot\cos u\cdot du=\sin v\cdot dx+x\cos v\cdot dv$

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy \\ y\cos u\cdot du-x\cos v\cdot dv=\sin v\cdot dx-\sin u dy \end{cases}$$

Решаем по правилу Крамора

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y\cos u & -x\cos v \end{vmatrix}=-x\cos v-y\cos u$$

$$\Delta_{du}=\begin{vmatrix} dx+dy & 1 \\ \sin v\cdot dx-\sin u\cdot dy & -x\cos v \end{vmatrix}=-x\cos v\cdot dx-x\cdot\cos v\cdot dy-$$

$$-\sin v\cdot dx+\sin u\cdot dy$$

$$du=\frac{(-x\cos v+\sin v)dx+(-x\cos v+\sin u)dy}{-x\cos v-y\cos u}$$

$$\Delta_{dv}=\begin{vmatrix} 1 & dx+dy \\ y\cos u & \sin v\cdot dx-\sin u\cdot dy \end{vmatrix}=(\sin v-y\cos u)dx+(-\sin u-y\cos u)dy$$

$$dv=\frac{(\sin v-y\cos u)dx+(-\sin u-y\cos u)dy}{-x\cos v-y\cos u}$$

$d^2u+d^2v=d^2x+d^2y\equiv 0\qquad$ (x, y - нез. перем)

$$dy\cos u\cdot du-y\sin u\cdot du\cdot du+y\cos u\cdot d^2u-dx\cos v\cdot dv+x\sin v\cdot dv\cdot dv-x\cos v\cdot d^2v$$

$$=\cos v\cdot dv\cdot dx+\sin v\cdot d^2x-\cos u\cdot du\cdot dy-\sin u\cdot d^2y$$

$$\begin{cases} d^2u+d^2v=0 \\ y\cos u\cdot d^2u-x\cos v\cdot d^2v=-\cos u\cdot dy\cdot du+y\sin u\cdot(du)^2+\cos v\cdot dx\cdot dv- \\ -x\sin v\cdot(dv)^2+\cos v\cdot dv\cdot dx-\cos u\cdot du\cdot dy \end{cases}$$

Подставить $du,\ dv$ через $dx,\ dy$

Задача

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \qquad y'_x, y''_{xx} \text{ через новые } w, t$$

x - новая ф-я

$t = xy$ - новая нез. перем

$x = w$ - новая ф-я

$$y = \frac{t}{x} = \frac{t}{w}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = \frac{t}{w} \end{cases}$$

$$x'_t = w'_t$$

$$y(x(t)) = \frac{t}{w} = t \cdot w^{-1}$$

$$y'_x \cdot x'_t = w^{-1} + t \cdot (-1)w^{-2} \cdot w'_t = \frac{1}{w} - w^2$$

Подставим

$$y'_x \cdot w'_t = \frac{1}{w} - \frac{t \cdot w'_t}{w^2}$$

$$y'_x = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y'_x(x(t)) = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y''_{xx} \cdot x'_t = -\frac{1}{w^2 \cdot (w'_t)^2} \cdot (w \cdot w'_t)'_t - 1 \cdot w^{-2} - t \cdot (-2)w^{-3} \cdot w'_t =$$

$$= -\frac{w'_t w'_t + w \cdot w''_{tt}}{w^2 \cdot (w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2t \cdot w'}{w^3}$$

$$y''_{xx} \cdot w'_t = -\frac{1}{w^2} - \frac{w''_{tt}}{w(w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2tw'_t}{w^3}$$

$$y''_{xx} = -\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3}$$

$$-\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3} + \frac{2}{w^2 w'_t} - \frac{2t}{w^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-\frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-w''_{tt} + t \cdot (w'_t)^3 = 0$$
$$w'_t = p$$
$$-p'_t + tp^3 = 0$$
$$\frac{dp}{dt} = t \cdot p^3$$

Замена переменных

Опр

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} ...) = 0$$

x, y - нез. $\qquad z(x, y)$ - ф-я

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \\ v = g(x, y, z) \\ w = h(x, y, z) \end{cases}$$

u, v - нез $\qquad w(u, v)$ - ф-я

Вычисляем производные по x, y

$$f(x, y, z(x, y))$$

$$u'_x = f'_1 \cdot (x)'_x + f'_2 \cdot (y)'_x + f'_3 \cdot z'_x = f'_1 + f'_3 \cdot z'_x$$
$$v'_x = g'_1 \cdot (x)'_x + g'_2 \cdot (y)'_x + g'_3 \cdot z'_x = g'_1 + g'_3 \cdot z'_x$$
$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$

Берем пр-дную от левой части как от композиции

$$w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = h'_1 \cdot (x)'_x + h'_2 \cdot (y)'_x + h'_3 \cdot z'_x = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

В последнее уравнение подставляем u'_x и v'_x

$$w'_u \cdot (f'_1 + f'_3 \cdot z'_x) + w'_v \cdot (g'_1 + g'_3 \cdot z'_x) = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

Получили линейное уравнение относительно z'_x

$$z'_x = \Phi(x, y, z, w'_u, w'_v)$$

Для нахождения z'_y берем производную от уравнения по y

$$u'_y = f'_1(x)'_y + f'_2 \cdot (y)'_y + f'_3 \cdot z'_y = f'_2 + f'_3 \cdot z'_y$$

$$u = f(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, z(\underset{3}{x, y}))$$

$$v = g(x, y, z(x, y))$$

$$v'_y = g'_1 \cdot (x)'_y + g'_2 \cdot (y)'_y + g'_3 \cdot z'_y$$

$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$

$$w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = h'_1 \cdot (x)'_y + h'_2 \cdot (y)'_y + h'_3 \cdot z'_y$$

Подставим и получим уравнение

$$w'_u \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w'_v \cdot (g'_2 + g'_3 \cdot z'_y) = h'_2 + h'_3 \cdot z'_y$$

лин. ур отн z'_y

$$z'_y = \psi(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, \underset{3}{z}, \underset{4}{w'_u}, \underset{5}{w'_v})$$

$$z = z(x, y) \qquad w'_u(u(x, y), v(x, y))$$

$$z''_{yy} = \psi'_1 \cdot (x)'_y + \psi'_2 \cdot (y)'_y + \psi'_3 \cdot z'_y + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_y + \psi'_5 \cdot (w'_v)'_y$$

$$(w'_u(u(x, y), v(x, y)))'_y = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y =$$

Подставим

$$= w''_{u^2} \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w''_{uv} \cdot (g'_3 + g'_3 \cdot z'_y)$$

Подставим z'_y

$$(w'_v(u(x, y), v(x, y)))'_y = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y$$

подставим u'_y, v'_y, z'_y

$$w''_{vu} = w''_{uv}$$

$$z''_{yx} = z''_{xy}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \psi'_1 \cdot (x)'_x + \psi'_2 \cdot (y)'_x + \psi'_3 \cdot z'_x + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_x + \psi'_5 \cdot (w_v)'_x$$

$$(w'_u(u(x, y), v(x, y)))'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x$$

Подставить z'_x

Замечание

Существует методичка на кафедре анализа по замене переменных

Задача (1)

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z \qquad u = x^2+y^2 \qquad v = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \qquad w = \ln z-(x+y)$$

Найти производные от всех ур-ний по x, потом от всех по y

$$w(u,v) = w(u(x,y), v(x,y))$$

$$u'_x = 2x$$

$$v'_x = -1 \cdot x^{-2}$$

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = \frac{1}{z} \cdot z'_x - 1$$

$$w'_u \cdot 2x + w'_v \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{z} \cdot z'_x - 1 \qquad z \cdot (w'_u 2x + w'_v \frac{-1}{x^2}) + z = z'_x$$

Аналогично от всех по y

$$u'_y = 2y$$

$$v'_y = \frac{-1}{y^2}$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = \frac{1}{z} \cdot z'_y - 1$$

$$2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v = \frac{1}{z} \cdot z'_y - 1$$

$$z'_y = z \cdot (2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v) + z$$

Подставим производные в уравнение

$$y \cdot z \cdot (w'_v 2x + w'_v \frac{-1}{x^2}) + yz - xz(2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v) - xz = yz - xz$$

$$z(2xyw'_u - \frac{y}{x^2}w'_v - 2yxw'_u + \frac{x}{y^2}w'_v) = 0$$

$$z \cdot w'_v \cdot (-\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}) = 0$$

Получили три варианта

$z \equiv 0$ - реш. уравнения

$\underline{w'_v = 0}$ новый вид нашего уравнения

$\dfrac{-y^3 + x^3}{x^2y^2} = 0 \Leftrightarrow y = x$ особенность нашей замены, а не уравнения

$w'_v = 0 \Leftrightarrow w = \varphi(u) \quad$ (произвольная функция) $\in C^1$

$\ln z - (x = y) = \varphi(x^2 + y2)$

$\ln z = \varphi(x^2 + y^2) + x + y$

$z = e^{\varphi(x^2+y^2)+x+y}$

Если заменить z на $-z$ уравнение удовл.

$z = c \cdot e^{\varphi(x^2+y^2)+x+y}$ на самом деле решение выглядит так

Задача (2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + \frac{\partial z}{\partial y})^3$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + z \\ w = z \quad \text{по умолч.} \end{cases}$$

$w(u, v) = w(u(x, y), v(x, y))$

$u'_x = 1$

$v'_x = z'_x$

$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = z'_x$

$w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot z'_x = z'_x$

$z'_x = \dfrac{w'_u}{1 - w'_v}$

Я писал у доски

Можно было решать и первым способом

$x = u$

$y = v - z = v - w$

$z = w$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v - w \\ z = w \end{cases}$$

Задача (3512)

$$z(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}) = (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

$$\begin{cases} w = z^2 \\ \text{по умолч} \\ u = x \\ v = y \end{cases}$$

$$z^2 = (z(x, y))^2$$

$$u'_x = 1$$

$$v'_x = 0$$

$$(w)'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot u'_x = 2zz'_x$$

$$w'_u = 2zz'_x$$

$$z'_x = \frac{w'_u}{2z}$$

$$u'_y = 0$$

$$v'_y = 1$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = 2zz'_y$$

$$w'_v = 2zz'_y$$

$$z'_y = \frac{w'_v}{2z}$$

$$(z'_x)'_x = \frac{1}{2}\frac{(w'_u)'_x \cdot z - (z)'_x \cdot w'_u}{z^2}$$

$$(w'_u)'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu}$$

$$(z'_x)'_x = \frac{1}{2}\frac{w''_{uu} \cdot z - \frac{w'_u}{2z} \cdot w'_u}{z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2 w'_{uu} - (w'_u)^2}{2z^3}\right)$$

$$(z'_y)'_y = \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2 w'_{vv} - (w'_v)^2}{2z^3}\right)$$

$$z\left(\frac{2z^2(w''_{uu} + w''_{vv}) - (w'_v)^2 - (w'_u)^2}{4z^3}\right) = \left(\frac{w'_u}{2z}\right)^2 + \left(\frac{w'_v}{2z}\right)^2$$

$$2z^2w''_{uu} + 2z^2w''_{vv} - 2(w'_u)^2 - 2(w'_v)^2 = 0$$

$$w(w''_{uu} + w''_{ww}) - (w'_u)^2 - (w'_v)^2 = 0$$

$$w(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$$

Задача (3507)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} u = x + z \\ v = y + z \\ w = z \end{cases}$$

$$u'_x = 1 + z'_x$$

$$v'_x = z'_x$$

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = z'_x$$

$$w'_u + w'_u z'_x + w'_v \cdot z'_x = z'_x$$

Линейное уравнение отн z'_x

$$z'_x = \frac{w'_u}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$u'_y = z'_y$$

$$v'_y = 1 + z'_y$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = z'_y$$

$$z'_y = \frac{w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$(w'_u)'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu}(1 + z'_x) + w''_{uv} \cdot z'_x$$

$$(w'_v)'_x = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{uu}(1 + z'_x) + w''_{vv} \cdot z'_x$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{w'_u}{1 - (w'_u + w'_v)}\right)'_x = \frac{(w'_u)'_x(1 - (w'_u + w'_v)) - w'_u \cdot ((w'_u)'_x + (w'_v)'_x)}{(1 - (w'_u + w'_v))^2}$$

$$\frac{(w'_u(1 + z'_x) + w''_{vu}z'_x)(1 - (w'_u + w'_v)) + w'_u(w''_{uu} \cdot (1 + z'_x) + z'_x(w''_{vu} + w''_{vv}))}{(1 - (w'_u + w'_v)^2)} \stackrel{*}{=}$$

$$1 + z'_x = \frac{w'_u + 1 - w'_u - w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)} = \frac{1 - w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$\overset{*}{=} \frac{w''_{uu}(1 - w'_v) + w''_{vu} \cdot w'_u + \frac{w'_u \cdot w''_{uu} w''_{vu}(1-w'_v)}{1-(w'_u+w'_v)} + \frac{w'_u}{1-(w'_u+w'_v)}(w''_{vu} + w''_{uu})}{}$$

Закончить дома

<u>Задача</u> (3525)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

Доказать, что не меняется при любом распределении ролей между перем.
Будем делать первым методом

$$y, z \text{ - нез. перем} \qquad x \text{ - ф-я}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$u, v \text{ - нез.} \qquad w(u, v) \text{ - ф-я}$$

$$x'_u = w'_u \qquad y'_u = 1$$

$$x'_v = w'_v \qquad y'_v = 0$$

$$z(x(u, v), y(u, v)) = v$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$$

$$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$$

$$\begin{cases} z'_x w'_u + z'_y \cdot 1 & = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 & = 1 \end{cases}$$

$$z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$z'_y = -z'_x w'_u = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z'_x(x(u, v), y(u, v)) = \frac{1}{w'_v}$$

$$z''_{xx} \cdot x'_u + z''_{xy} \cdot y'_u = \left(\frac{1}{w'_v}\right)'_u = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} \cdot x'_v + z''_{xy} \cdot y'_v = \left(\frac{1}{w'_v}\right)'_v = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} w'_u + z''_{xy} \cdot 1 = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} \cdot w'_v + z''_{xy} \cdot 0 = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^3}$$

$$z''_{xy} = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} - z''_{xx} \cdot w'_u = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} + \frac{w''_{vv} \cdot w'_u}{(w'_v)^3}$$

$$z'_y(x(u,v), y(u,v)) = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z''_{yx} \cdot x'_u + z''_{yy} = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_u$$

$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} \cdot y'_v = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_v$$

$$z''_{yx} \cdot w'_u + z''_{yy} \cdot 1 = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_u$$

$$z''_{yx} \cdot w'_v + z''_{yy} \cdot 0 = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_v$$