лектор **А.Н.Подкорытов**

ПЕРЕСТАНОВКИ ОПЕРАЦИЙ АНАЛИЗА И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

§1. Постановка задачи

Операциями анализа называют такие операции над функциями, которые (в отличие от арифметических операций) основаны на предельном переходе – дифференцирование, интегрирование, вычисление суммы ряда и т.д.. Довольно часто приходится, имея дело с функцией двух переменных, применять к ней одну операцию по какой-то переменной, а затем – ещё одну операцию по другой. Возникает естественный вопрос: существенен ли порядок применения этих операций анализа? можно ли его изменить? Например, верны ли равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\,dt, \qquad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\ ?$$

Легко привести примеры, показывающие, что без дополнительных предположений (кроме тех, которые необходимы, чтобы поставить задачу) эти и многие подобные утверждения неверны.

Примеры.

1^0. Пусть $[a,b]=[0,1]$; $f_n(t)=n(t^n-t^{2n})$. Ясно, что $f_n(t)\to 0$ при $n\to\infty$ для всех $t\in[0,1]$. В то же время

$$\int_0^1 f_n(t)dt = n\int_0^1 (t^n-t^{2n})dt = \frac{n}{n+1}-\frac{n}{2n+1}\to\frac12\neq 0=\int_0^1\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\Big)\,dt.$$

2^0. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}$ сходится всюду, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nt$ всюду расходится (его общий член не стремится к нулю: в силу тождества $\cos 2nt = 2\cos^2 nt-1$ по крайней мере одно из слагаемых с номером n или $2n$ по абсолютной величине не меньше $\frac12$, а так как n произвольно, то таких слагаемых бесконечно много).

В то же время нам уже доводилось переставлять операции анализа: по теореме о дифференцировании суммы степенно́го ряда $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right)_z' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_n(z-a)^n)_z'$ внутри круга сходимости.

Таким образом, следует определить те дополнительные ограничения, которые гарантировали бы возможность перестановки операций анализа. В основе многих таких ограничений лежит понятие *равномерной сходимости,* определению и простейшим свойствам которой посвящен следующий параграф. Однако, два несложных утверждения о перестановке операций анализа, основанных на теореме Кантора, мы можем получить уже сейчас.

Лемма (непрерывность интеграла, зависящего от параметра).
Пусть $f \in C([a,b]\times[A,B])$. *Тогда функция* $I(y) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x,y)dx$ *непрерывна на* $[A,B]$.

Доказательство. Проверим непрерывность функции I в произвольной точке $y_0 \in [A,B]$. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [A,B]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon/(b-a)$ для всех $y \in [A,B], |y-y_0| < \delta$, и для всех $x \in [a,b]$. Следовательно, для таких y имеем

$$|I(y)-I(y_0)| = \left|\int_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x,y)-f(x,y_0)|dx < (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру).
Пусть функция $f \in C([a,b]\times[A,B])$ *такова, что существует частная производная* $f'_y \in C([a,b]\times[A,B])$. *Тогда функция* $I(y) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x,y)dx$ *непрерывно дифференцируема на* $[A,B]$, *и для всех* $y \in [A,B]$

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой точки $y_0 \in [A,B]$ дробь $\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0}$ стремится к интегралу $J \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f'_y(x,y_0)dx$ при $y \to y_0$. В силу леммы отсюда вытекает непрерывность производной I' на промежутке $[A,B]$.

Так как функция f'_y равномерно непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[A,B]$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что $|f'_y(x,\overline{y}) - f'_y(x,y_0)| < \varepsilon/(b-a)$ для всех $\overline{y} \in [A,B], |\overline{y} - y_0| < \delta$, и всех $x \in [a,b]$. Возьмём произвольный $y \in [A,B],\ 0 < |y-y_0| < \delta$, и в равенстве

$$\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0} - J = \int_a^b \left(\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} - f'_y(x,y_0)\right)dx$$

применим теорему Лагранжа о среднем (формулу конечных приращений):

$$\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0} - J = \int_a^b \left(f'_y(x,\overline{y}) - f'_y(x,y_0)\right)dx.$$

Здесь $\overline{y}$ — некоторое число (зависящее от y, y_0 и x), лежащее между y_0 и y. Ясно, что $|\overline{y} - y_0| \leqslant |y-y_0| < \delta$. Поэтому для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f'_y(x,\overline{y}) - f'_y(x,y_0)| < \varepsilon/(b-a)$. Следовательно, $\left|\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0} - J\right| \leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$, если $0 < |y-y_0| < \delta$.

Теорема доказана.

Пример. Пользуясь правилом Лейбница, вычислим интеграл

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y\ \mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x} dx.$$

Вычисления, обоснование которых мы проведём чуть позже, довольно просты. Считая $y \geqslant 0$ (функция I, очевидно, нечетная) имеем:

$$I'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+y^2\mathrm{tg}^2 x} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+y^2t^2)} \overset{y\neq 1}{=} \frac{1}{1-y^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\right) dt =$$
$$= \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y\right) = \frac{\pi/2}{1+y}$$

(при $y = 1$ это равенство почти очевидно: $I'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$). Учитывая, что $I(0) = 0$, получаем отсюда $I(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y)$ для $y \geqslant 0$.

В этих вычислениях вызывает сомнение применимость правила Лейбница. Во-первых, функция $f(x,y) = \frac{\operatorname{arctg}(y\ \mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x}$ не определена при $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$. Это легко исправить, положив $f(0,y) = y$ и $f(\frac{\pi}{2}, y) \equiv 0$. Ясно, что тогда $f \in C([0,\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R})$. Отсюда с помощью леммы получаем, что функция I непрерывна на любом промежутке $[A,B] \subset \mathbb{R}$, то есть $I \in C(\mathbb{R})$. Во-вторых, частная производная f'_y разрывна в точке $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Однако, она непрерывна на прямоугольнике $[0,\frac{\pi}{2}] \times [y_0, Y]$ для любых чисел $0 < y_0 < Y < \infty$. Применять правило Лейбница на этом прямоугольнике можно. Поэтому для всех $y > 0$ (так как y_0, Y произвольны) $I'(y) = \frac{\pi/2}{1+y}$ и, следовательно, $I(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y) + \mathrm{const}$. Осталось заметить, что константа равна нулю, так как функция I непрерывна в нуле и $I(0) = 0$. Таким образом, $I(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y)$ при $y \geqslant 0$.

Теорема (о повторных интегралах). *Пусть* $f \in C([a,b] \times [A,B])$. *Тогда функции*

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx,\ \ y \in [A,B], \quad \textit{и} \quad J(x) = \int_A^B f(x,y)dy,\ \ x \in [a,b],$$

непрерывны и имеют равные интегралы: $\int_A^B I = \int_a^b J$, *то есть*

$$\int_A^B \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_A^B f(x,y)dy\right) dx.$$

Доказательство. Непрерывность функций I и J следует из леммы. Для доказательства равенства повторных интегралов рассмотрим на промежутке $[A,B]$ вспомогательные функции

$$F(t) = \int_A^t I(y)dy = \int_A^t \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy \quad \text{и} \quad G(t) = \int_a^b \left(\int_A^t f(x,y)dy\right) dx.$$

Утверждение теоремы означает, что $F(B) = G(B)$. Проверим, что функции F и G совпадают не только в точке $t = B$, но и на всём промежутке $[A, B]$. На левом конце они обращаются в нуль, и поэтому достаточно проверить, что $F' \equiv G'$. По теореме об интеграле с переменным верхним пределом (она применима, так как в силу леммы подынтегральная функция непрерывна) производная $F'(t)$ существует и равна $\int_a^b f(x,t)dx$. С другой стороны, пользуясь правилом Лейбница, получаем, что функция G имеет такую же производную:

$$G'(t) = \int_a^b \left(\int_A^t f(x,y)dy \right)'_t dx = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Убедимся теперь, что применять правило Лейбница здесь можно. Подынтегральная функция $\widetilde{f}(x,t) = \int_A^t f(x,y)dy$ имеет (по теореме об интеграле с переменным верхним пределом) непрерывную производную по второй переменной. Осталось доказать непрерывность функции $\widetilde{f}$. В силу леммы она непрерывна по первой переменной. Кроме того, по теореме Вейерштрасса её производная по второй переменной ограничена: $|\widetilde{f}'_t(x,t)| = |f(x,t)| \leqslant C$. Поэтому

$$|\widetilde{f}(x,t) - \widetilde{f}(x_0,t_0)| \leqslant |\widetilde{f}(x,t) - \widetilde{f}(x,t_0)| + |\widetilde{f}(x,t_0) - \widetilde{f}(x_0,t_0)| \leqslant |\widetilde{f}(x,t_0) - \widetilde{f}(x_0,t_0)| + C|t-t_0|.$$

Отсюда следует, что $\widetilde{f}(x,t) \to \widetilde{f}(x_0,t_0)$ при $(x,t) \to (x_0,t_0)$, то есть функция $\widetilde{f}$ непрерывна в каждой точке (x_0,t_0) из $[a,b] \times [A,B]$.

Теорема доказана.

§2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Определение. *Пусть на множестве $T \neq \varnothing$ заданы функции $f, f_1, f_2, \dots$ (принимающие вещественные или комплексные значения).*

I. Говорят, что последовательность функций $\{f_n\}$ сходится на множестве T к функции f поточечно (обозначение $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\to}} f$), если $f_n(t) \to f(t)$ при $n \to \infty$ для любой точки $t \in T$, то есть

$$\forall t \in T\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon(t) :\ \forall n > N \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

II. Говорят, что последовательность функций $\{f_n\}$ сходится на множестве T к функции f равномерно, или равномерно относительно $t \in T$ (обозначение $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} f$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon :\ \forall n > N\ \forall t \in T \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Замечания.

1^0. При всей внешней схожести этих двух определений бросается в глаза различие между ними: в первом номер N появляется позже аргумента t, и поэтому N

может быть разным при разных значениях аргумента. В частности, если множество T содержит бесконечно много точек, то не исключено, что совокупность всех номеров $\{N_\varepsilon(t)\}_{t\in T}$ окажется неограниченной при каком-то $\varepsilon > 0$. Во втором определении это исключено – номер N появляется раньше аргумента t, и поэтому он "обслуживает" все аргументы $t \in T$. Таким образом, *равномерная сходимость влечёт поточечную.* Обратное, разумеется, неверно, если множество T бесконечно. Например, если $\{t_1, t_2, t_3, \dots\} \subset T$, то последовательность функций

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t = t_n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

очевидно, сходится поточечно к функции $f(t) \equiv 0$, но не сходится к ней равномерно на T. Если же множество T конечно, то равномерная и поточечная сходимости на нём совпадают – достаточно в качестве N_ε взять $\max_{t\in T} N_\varepsilon(t)$.

2^0. Отсутствие равномерной сходимости к функции f на множестве T означает, что

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N\ \exists t \in T \quad |f_n(t) - f(t)| \geqslant \varepsilon.$$

Стоит отметить, что оба параметра $n \in \mathbb{N}$ и $t \in T$ могут зависить от N и ε.

3^0. Записав финальное неравенство определения равномерной сходимости в виде $f(t)-\varepsilon < f_n(t) < f(t)+\varepsilon$, получим её графическое истолкование: любая ε-окрестность графика функции f, то есть множество $\{(t,s) | t \in T,\ f(t) - \varepsilon < s < f(t) + \varepsilon\} \subset T\times\mathbb{R}$, содержит графики всех функций f_n с достаточно большими номерами n.

4^0. При изучении равномерной сходимости удобно использовать понятие чебышевского расстояния между двумя функциями: $\rho_T(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t\in T} |f(t) - g(t)|$ для любых функций f и g, заданных на множестве T. Действительно, определение равномерной сходимости не изменится, если в нём финальное строгое неравенство заменить на нестрогое. Но тогда утверждение $\forall t \in T\ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ можно заменить на равносильное $\rho_T(f_n, f) \leqslant \varepsilon$, что приводит к такой переформулировке определения равномерной сходимости: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \rho_T(f_n, f) \leqslant \varepsilon$, а это равносильно тому, что $\rho_T(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$. *Таким образом, равномерная сходимость функций f_n к f равносильна стремлению к нулю чебышевского расстояние между ними.*

Упражнения.

1^0. Пусть $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} f$ и $g_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} g$. Докажите, что $(\lambda f_n + \mu g_n) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} (\lambda f + \mu g)$ для любых чисел λ и μ.

2^0. Докажите, что для любой функции F, заданной на T, равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ равносильна равномерной сходимости последовательности $\{f_n + F\}$.

3^0. Докажите, что из равномерной сходимости $\{f_n\}$ к f следует равномерная сходимость $\{Ff_n\}$ к Ff для любой ограниченной функции F. Покажите на примере, что ограниченность функции F существенна.

4^0. Пользуясь тем, что для любых множеств $\widetilde{E} \subset E \subset \overline{\mathbb{R}}$ справедливо неравенство $\sup\widetilde{E} \leqslant \sup E$, покажите, что любого подмножества $\widetilde{T} \subset T$ справедливо неравенство $\rho_{\widetilde{T}}(f_n, f) \leqslant \rho_T(f_n, f)$, и, следовательно, *равномерная сходимость на бо́льшем множестве влечёт равномерную сходимость на меньшем множестве.*

5^0. Предыдущее упражнение можно дополнить. Так как $\max\{\sup E_1,\ \sup E_2\} = \sup E_1 \cup E_2$ для любых множеств $E_1, E_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$, то $\max\{\rho_{T_1}(f_n, f), \rho_{T_2}(f_n, f)\} = \rho_{T_1 \cup T_2}(f_n, f)$. Отсюда получаем, что *равномерная сходимость на объединении двух множеств равносильна равномерной сходимости на каждом из этих множеств.* Разумеется, вместо двух множеств T_1 и T_2 можно рассмотреть любой *конечный* набор множеств $T_1, \dots, T_M$.

6^0. Пусть $T = \cup_{m=1}^{\infty} T_m$. Как следует из упражнения 4^0, равномерная сходимость на множестве T влечёт равномерную сходимость на каждом множестве T_m. Покажите на примерах, что обратное утверждение неверно.

7^0. Пусть φ – некоторое отображение из множества S в T. Обозначим $\widetilde{f}_n = f_n(\varphi)$ и $\widetilde{f} = f(\varphi)$. Докажите, что $\widetilde{f}_n \underset{n\to\infty}{\overset{S}{\rightrightarrows}} \widetilde{f}$, если $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} f$, то есть *замена переменной сохраняет равномерную сходимость.* Если же эта замена переменных обратима (то есть отображение $\varphi : S \to T$ является биекцией), то равномерная сходимость $\{f_n\}$ на T равносильна равномерной сходимости $\{\widetilde{f}_n\}$ на S.

8^0. Пусть $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} f$. Докажите равносильность трёх утверждений:

а) функция f ограничена на T;

б) для достаточно больших n функции f_n ограничены на T;

в) среди функций $\{f_n\}$ имеется бесконечно много ограниченных на T.

Теорема (Стокса–Зайделя о перестановке двух пределов). *Пусть $T \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ – точка сгущения множества T. Если последовательность функций (вещественных или комплексных) $\{f_n\}$ такова, что $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} f$, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует конечный предел $l_n = \lim\limits_{t\to t_0} f_n(t)$, то пределы $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$ существуют, конечны и равны:*

$$\lim_{t\to t_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to t_0} f_n(t)\right).$$

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим два частных случая.

I. Теорема о непрерывности предельной функции.

Если в условиях теоремы $t_0 \in T$ и все функции f_n непрерывны в этой точке (то есть $l_n = f_n(t_0)$), то функция f также непрерывна в точке t_0.

Разумеется, предположение, что t_0 – точка сгущения T, здесь излишне, так как любая функция непрерывна в изолированной точке множества задания. Поэтому,

если $\{f_n\} \subset C(T)$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} f$, то $f \in C(T)$.

II. Теорема о повторном пределе двойной последовательности. Пусть $T = \mathbb{N}$, $t_0 = +\infty$. Обозначим значение n-ой функции в точке $m \in \mathbb{N}$ через $f_{n,m}$. Тогда

если двойная последовательность $\{f_{n,m}\}$ такова, что для некоторых числовых последовательностей $\{f_m\}$ и $\{l_n\}$

$$f_{n,m} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f_m \quad \textit{равномерно относительно } m \in \mathbb{N} \qquad \textit{и} \qquad f_{n,m} \underset{m\to\infty}{\to} l_n,$$

то существуют конечные и равные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$ *и* $\lim\limits_{m\to\infty} f_m$*:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} f_{n,m}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} f_{n,m}\right).$$

Доказательство. Докажем сначала существование конечного предела $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)$. По теореме Больцано-Коши для этого достаточно доказать сходимость в себе, то есть доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $U(t_0)$, что для всех $t',t''\in T\cap\dot U(t_0)$ выполняется неравенство $|f(t')-f(t'')|<\varepsilon$ (напомним, что $\dot U(t_0)$ обозначает проколотую окрестность точки t_0, то есть $\dot U(t_0)=U(t_0)\setminus\{t_0\}$). Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и, пользуясь равномерной сходимостью последовательности $\{f_n\}$, подберем такой номер $N=N_{\varepsilon/3}$, что для всех $n\geqslant N$ и всех $t\in T$ выполнялось бы неравенство $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon/3$. Так как в точке t_0 функция f_N имеет конечный предел, то существует такая окрестность $U(t_0)$, что $|f_N(t')-f_N(t'')|<\varepsilon/3$ для всех t',t'' из $T\cap\dot U(t_0)$. Эта окрестность – требуемая. Действительно,

$$|f(t')-f(t'')|\leqslant|f(t')-f_N(t')|+|f_N(t')-f_N(t'')|+|f_N(t'')-f(t'')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Таким образом, сходимость в себе, а с ней и существование конечного предела $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)$ доказаны. Обозначим этот предел l и проверим, что $l_n\to l$. Поскольку $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon/3$ для всех $n\geqslant N$ и $t\in T$, переходя в этом неравенстве к пределу по $t\to t_0$, получаем $|l_n-l|\leqslant\varepsilon/3<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$, если только $n\geqslant N$.

Теорема доказана.

Замечания.

1^0. Пользуясь локальностью предела, можно несколько ослабить условия теоремы, потребовав равномерной сходимости не на всём множестве T, а лишь вблизи точки сгущения.

2^0. Утверждение теоремы сохраняется и в более общей ситуации, когда функции $\{f_n\}$ заданы не на подмножестве вещественной оси, а на подмножестве T евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ (t_0 – точка сгущения T). Доказательство при этом не меняется.

3^0. Пример двойной последовательности $f_{n,m}=\frac{n}{n+m}$ показывает, что равномерную сходимость по одной из переменных нельзя заменить на поточечную. Действительно, в этом случае $1=\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,m})\neq 0=\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} f_{n,m})$.

Теорема (предельный переход под знаком интеграла). *Пусть* $T=[a,b]$, *где* $a,b\in\mathbb{R}$; $\{f_n\}\subset C(T)$ *и* $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} f$. *Тогда*

$$f\in C(T)\ \text{и}\ \int_a^b f_n\to\int_a^b f,\ \text{то есть}\ \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)dt.$$

Доказательство. Непрерывность предельной функции установлена ранее. Для доказательства сходимости интегралов воспользуемся очевидным неравенством

$|f_n(t) - f(t)| \leqslant \rho_T(f_n, f)$ справедливым для всех $t \in T$. Из него немедленно следует

$$\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))dt\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \leqslant (b-a)\rho_T(f_n, f) \to 0.$$

Теорема доказана.

Пример, приведённый в самом начале этой главы, показывает, что заменить равномерную сходимость на поточечную, вообще говоря, нельзя. В то же время ясно, что условие равномерной сходимости довольно обременительно – зачастую оно либо не выполняется, либо его проверка затруднительна. Позже (в теории интеграла Лебега) будут доказаны более сильные утверждения о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема (предельный переход под знаком производной). *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых на промежутке* $[a, b]$ *функций* $\{f_n\}$ *такова, что*

а) в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$ *последовательность значений* $\{f_n(t_0)\}$ *имеет конечный предел* y_0;

б) последовательность производных $\{f_n'\}$ *равномерно на* $[a, b]$ *сходится к некоторой функции* φ.

Тогда существует такая непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ *функция* f, *что*

$$f(t_0) = y_0; \quad f_n \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f; \quad f' \equiv \varphi \text{ на } [a, b].$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(t) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)'.$$

Замечание. В отличие от предыдущей теоремы, где из равномерной сходимости функций *выводилась сходимость* интегралов, в этой теореме *предполагается сходимость* производных и выводится равномерная сходимость функций.

Доказательство. Функция φ непрерывна на промежутке $[a, b]$ как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Рассмотрим на промежутке $[a, b]$ функцию

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + \int_{t_0}^t \varphi(s)ds.$$

Ясно, что $f(t_0) = y_0$ и $f' = \varphi$. Кроме того, для любого $t \in [a, b]$ имеем

$$f_n(t) - f(t) = f_n(t_0) + \int_{t_0}^t f_n'(s)ds - \left(y_0 + \int_{t_0}^t \varphi(s)ds\right) = (f_n(t_0) - y_0) + \int_{t_0}^t (f_n'(s) - \varphi(s))\,ds.$$

Поэтому

$$|f_n(t)-f(t)| \leqslant |f_n(t_0)-y_0|+|t-t_0| \max_{a\leqslant s\leqslant b} |f_n'(s)-\varphi(s)| \leqslant |f_n(t_0)-y_0|+(b-a)\rho_{[a,b]}(f_n', \varphi).$$

Так как t – произвольная точка из промежутка $[a, b]$, то отсюда следует, что

$$\rho_{[a,b]}(f_n, f) \leqslant |f_n(t_0) - y_0| + (b - a)\rho_{[a,b]}(f_n', \varphi).$$

Итак, $\rho_{[a,b]}(f_n, f) \to 0$, то есть $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(t)$ относительно $t \in [a, b]$.

Теорема доказана.

§3. Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. *Пусть на множестве $T \neq \varnothing$ заданы функции $\{u_n\}$, принимающие вещественные или комплексные значения. Для $t \in T$ и $N \in \mathbb{N}$ обозначим $S_N(t) = u_1(t) + \ldots + u_N(t)$ — значение N-ой частичной суммы в точке t.*

I. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ поточечно сходится на множестве T, если для любого $t \in T$ последовательность его частичных сумм $\{S_N(t)\}$ имеет конечный предел $S(t)$ при $N \to \infty$, то есть для каждого $t \in T$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ сходится к сумме $S(t)$.

II. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ равномерно сходится на множестве T, если последовательность его частичных сумм $\{S_N(t)\}$ равномерно сходится на множестве T к некоторой функции $S(t)$.

Ясно, что для равномерной сходимости ряда *необходима* его поточечная сходимость. Как и в случае функциональных последовательностей это условие *недостаточно.* Следующее простое утверждение даёт исчерпывающий ответ на вопрос, чем же различаются поточечно и равномерно сходящиеся ряды.

Лемма. *Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ на множестве T необходимо и достаточно, чтобы он поточечно сходился на T, а остаток $r_N(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n>N} u_n(t)$ равномерно относительно $t \in T$ стремился к нулю при $N \to \infty$.*

Доказательство. При доказательстве обоих утверждений леммы (необходимости и достаточности) можно пользоваться поточечной сходимостью. Поэтому и в том, и в другом случае ряд $r_N(t) = \sum_{n>N} u_n(t)$ сходится для всех $t \in T$. Это позволяет записать частичную сумму ряда в виде $S_N(t) = S(t) - r_N(t)$, откуда сразу следует, что равномерная сходимость ряда, то есть утверждение $S_N(t) \underset{N\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} S(t)$, равносильна равномерной сходимости остатка к нулю ($r_N(t) \underset{N\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} 0$).

Лемма доказана.

Лемма (необходимое условие равномерной сходимости ряда).

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ *равномерно сходится на множестве* T, *то* $u_n(t) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} 0$.

Доказательство. Ясно, что $u_n(t) = S_n(t) - S_{n-1}(t)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ равномерно сходится на T к сумме $S(t)$, то $S_n(t) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} S(t)$, а, следовательно, и $S_{n-1}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} S(t)$. Поэтому $u_n(t) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} S(t) - S(t) = 0$.

Лемма доказана.

Упражнения.

1^0. Ясно, что в условиях леммы можно утверждать равномерную сходимость к нулю не одного, а любого *фиксированного* числа слагаемых: $\forall M = 0, 1, \ldots$ $u_n(t) + \ldots + u_{n+M}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} 0$. Покажите на примерах, что даже это усиленное утверждение *недостаточно* для равномерной сходимости ряда.

2^0. Докажите, что равномерная на множестве T сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ равносильна его равномерной сходимости в себе на этом множестве:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon \ \forall M = 0, 1, \ldots \ \forall t \in T \quad |u_n(t) + \ldots + u_{n+M}(t)| < \varepsilon.$$

3^0. Докажите, что равномерная на множестве T сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ равносильна утверждению: для любой последовательности $\{M_n\} \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$ $u_n(t) + \ldots + u_{n+M_n}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} 0$ (определение равномерной сходимости ряда в себе на языке последовательностей).

4^0. Докажите, что отсутствие равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ на множестве T равносильно существованию таких последовательностей $\{t_j\} \subset T$, $\{n_j\} \uparrow \infty$ и $\{M_j\} \subset \{0, 1, \ldots\}$, что при некотором $\varepsilon > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|u_{n_j}(t_j) + \ldots + u_{n_j+M_j}(t_j)| \geqslant \varepsilon$.

Следующие две теоремы – это переформулировки на случай рядов результатов, установленных в предыдущем параграфе. Они не требуют специального доказательства, так как достаточно применить соответствующие утверждения к последовательности частичных сумм ряда.

Теорема (свойства суммы равномерно сходящегося ряда). *Пусть* $T \subset \mathbb{R}$ *и последовательность функций (вещественных или комплексных)* $\{u_n\}$ *такова, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ *равномерно сходится на* T *к сумме* $S(t)$. *Тогда*

I. если $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *– точка сгущения множества* T *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *существует конечный предел* $l_n = \lim\limits_{t\to t_0} u_n(t)$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ *сходится, сумма ряда* $S(t)$ *имеет конечный предел в точке* t_0 *и он равен* $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$, *то есть*

$$\lim_{t\to t_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{t\to t_0} u_n(t)\right);$$

II. если $t_0 \in T$ и все функции u_n непрерывны в этой точке, то сумма ряда S также непрерывна в точке t_0; в частности, если $u_n \in C(T)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $S \in C(T)$;

III. если $T = [a,b]$ – конечный промежуток вещественной оси и $u_n \in C([a,b])$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $S \in C([a,b])$ и

$$\int_a^b S(t)dt = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_a^b u_n(t)dt\Big).$$

Теорема (почленное дифференцирование суммы ряда). *Если последовательность непрерывно дифференцируемых на промежутке $[a,b]$ функций $\{u_n\}$ такова, что в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t_0)$ сходится, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)$ <u>равномерно</u> сходится на $[a,b]$, то сумма ряда $S(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[a,b]$, а её производная равна сумме почленно продифференцированного ряда:*

$$\forall t \in [a,b] \quad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t).$$

Пример. Вычислим сумму $s = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{1}{2^n}$.

Сходимость ряда очевидна, так как его общий член эквивалентен $\frac{1}{4^n}$.

Как это часто бывает, для решения конкретной задачи полезно рассмотреть более общую ситуацию. Вместо вычисления суммы s *числового* ряда рассмотрим *функциональный* ряд $S(t) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{t}{2^n}$, где $|t| \leqslant \pi/2$. Ясно, что $s = S(1)$ и ряд $S(t)$ сходится. Более того, он сходится равномерно на множестве $T = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$|r_N(t)| = \Big|\sum_{n>N} \frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{t}{2^n}\Big| \leqslant \sum_{n>N} \frac{1}{2^n}\Big|\mathrm{tg}\frac{t}{2^n}\Big| \leqslant \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N},$$

так как для всех $t \in T = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ справедливо неравенство $|\mathrm{tg}\frac{t}{2^n}| \leqslant \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Таким образом, $\sup_{t\in T} |r_N(t)| \leqslant \frac{1}{2^N} \to 0$, и, следовательно, равномерная сходимость ряда $S(t)$ на множестве T установлена. Тем более этот ряд равномерно сходится на всех меньших промежутках, в частности, на промежутках вида $[0,x]$, где $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Воспользовавшись теоремой о почленном интегрировании суммы ряда, получим

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}\int_0^x \mathrm{tg}\frac{t}{2^n}\,dt = -\sum_{n\geqslant 1} \ln\cos\frac{x}{2^n}.$$

Найти сумму возникшего ряда несложно. Для этого рассмотрим его частичные суммы:

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \ln\cos\frac{x}{2^n} = \ln\Big(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^N}\Big) = \ln\left(\frac{2\cos\frac{x}{2}2\cos\frac{x}{4}\cdots 2\cos\frac{x}{2^N}\sin\frac{x}{2^N}}{2^N\sin\frac{x}{2^N}}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\sin x}{2^N\sin\frac{x}{2^N}}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\frac{\sin x}{x}.$$

Итак, для любого $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ справедливо равенство $\int_0^x S(t)\,dt = -\ln\frac{\sin x}{x}$. По теореме об интеграле с переменным верхним пределом отсюда следует

$$S(x) = \left(\int_0^x S(t)\,dt\right)'_x = \left(-\ln\frac{\sin x}{x}\right)'_x = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x.$$

В частности, $s = S(1) = 1 - \operatorname{ctg} 1$.

Для эффективного исследования функциональных свойств суммы ряда было бы неудобно каждый раз проверять равномерную сходимость по определению или с помощью приведённой после него леммы (как в только что рассмотренном примере). Желательно иметь легко проверяемые достаточные условия — признаки равномерной сходимости. Мы рассмотрим несколько таких утверждений, получающихся из хорошо известных утверждений о числовых рядах.

Лемма (признак Лейбница равномерной сходимости ряда). *Пусть последовательность функций $\{u_n\}$, заданных на множестве T, удовлетворяет двум условиям:*

$$u_1(t) \geqslant u_2(t) \geqslant u_3(t) \geqslant \ldots \quad \textit{для всех } t \in T \quad \textit{и} \quad u_n \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} 0.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(t)$ равномерно сходится на множестве T.

Доказательство. Поточечная сходимость вытекает из признака Лейбница сходимости *числовых* рядов. Для доказательства равномерной сходимости остаётся проверить, что остаток ряда равномерно на T сходится к нулю. Воспользуемся оценкой суммы лейбницевского ряда:

$$\textit{если } \{\alpha_n\} \downarrow 0, \textit{ то } 0 \leqslant \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots \leqslant \alpha_1.$$

Отсюда сразу следует, что

$$|r_N(t)| = |\textstyle\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n u_n(t)| = u_{N+1}(t) - u_{N+2}(t) + \ldots \leqslant u_{N+1}(t).$$

Поэтому

$$0 \leqslant \rho_T(r_N, 0) \leqslant \rho_T(u_{N+1}, 0) \to 0 \text{ при } N \to \infty, \text{ так как } u_N \underset{N\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} 0.$$

Лемма доказана.

Сопоставив это утверждение с необходимым условием равномерной сходимости, получаем, что *для убывающей в каждой точке $t \in T$ последовательности функций $\{u_n\}$ равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(t)$ равносильна равномерной сходимости общего члена ряда к нулю.* К сожалению, условия этого признака (чередование знаков и монотонность) очень ограничительны. Поэтому им редко удаётся воспользоваться. Следующий простой признак применяется значительно чаще.

Теорема (признак Вейерштрасса). *Пусть последовательность функций $\{u_n\}$, заданных на множестве T, такова, что существует неотрицательная числовая последовательность $\{c_n\}$, удовлетворяющая двум условиям:*

$$|u_n(t)| \leqslant c_n \; \textit{для всех } t \in T \quad \textit{и ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \textit{сходится.}$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ равномерно сходится на множестве T.

Доказательство. Поточечная сходимость (даже абсолютная) вытекает из теоремы сравнения числовых рядов. Оценим остаток ряда:

$$|r_N(t)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(t)\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(t)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_N \quad \text{для всех } t \in T.$$

Поэтому $\rho_T(r_N, 0) \leqslant \alpha_N$. Осталось заметить, что α_N – это остаток сходящегося числового ряда, и поэтому $\alpha_N \to 0$. Следовательно, $\rho_T(r_N, 0) \to 0$ при $N \to \infty$.

Теорема доказана.

Существование сходящегося мажорантного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ достаточно, но не обязательно для равномерной сходимости (например, если существует хотя бы одна точка $t_0 \in T$, в которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t_0)|$ расходится, то расходится и мажорантный ряд, хотя равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ не исключена – см. первый из следующих примеров). Ясно, что наименьший мажорантный ряд мы получим, взяв $c_n = \sup_{t\in T} |u_n(t)|$. Отсюда следует, что для применимости признака Вейерштрасса необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t\in T} |u_n(t)|$. Если он расходится, то признак Вейерштрасса неприменим. Однако, в этом случае нельзя утверждать, что нет равномерной сходимости — требуется дополнительное исследование ряда. На практике целесообразно исследование ряда на равномерную сходимость начинать с оценки величины $c_n = \sup_{t\in T} |u_n(t)|$: если эта последовательность не стремится к нулю, то в силу необходимого условия нет равномерной сходимости, если же она достаточно быстро стремится к нулю (так, что сходится ряд $\sum c_n$), то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum u_n(t)$ равномерно сходится. Таким образом, более детального исследования требует лишь промежуточный случай, когда последовательность $\{c_n\}$ стремится к нулю, но недостаточно быстро (например, она убывает как $\frac{1}{n^p}$, где $0 < p \leqslant 1$).

Примеры. 1^0. Докажем, что на промежутке $(-1, \infty)$ сумма ряда

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$$

— бесконечно дифференцируемая, вогнутая и возрастающая от $-\infty$ до 0 функция.

По признаку Лейбница этот ряд равномерно сходится на $(-1, \infty)$. Ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$ также равномерно сходится на этом промежутке. Для доказательства можно воспользоваться и признаком Лейбница, и признаком Вейерштрасса – для него мажорантным рядом служит $\sum \frac{1}{(n-1)^2}$ (так как первое слагаемое этого ряда не определено, то признак Вейерштрасса надо применять к ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \ldots$). Поэтому функция S непрерывно дифференцируема на $(-1, \infty)$. С помощью индукции легко показать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $S^{(k)}(t) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+t)^{k+1}}$. Таким образом, сумма ряда бесконечно дифференцируема на $(-1, \infty)$. Пользуясь оценкой суммы лейбницевского ряда, получаем, что функция S возрастает и вогнута:

$$S'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(2+t)^2} + \ldots \geqslant 0 \quad \text{и} \quad S''(t) = -2\left(\frac{1}{(1+t)^3} - \frac{1}{(2+t)^3} + \ldots\right) \leqslant 0.$$

Кроме того, по теореме о свойствах суммы равномерно сходящегося ряда

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Осталось заметить, что $S(t) = -\frac{1}{1+t} + \sigma(t)$, где сумма $\sigma(t)$ равномерно ограничена на $(-1,\infty)$:

$$0 \leqslant \sigma(t) = \frac{1}{2+t} - \frac{1}{3+t} + \frac{1}{4+t} - \frac{1}{5+t} + \ldots \leqslant \frac{1}{2+t} < 1 \quad \text{для всех } t > -1.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to-1} S(t) = \lim\limits_{t\to-1} -\frac{1}{1+t} = -\infty.$

2^0. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{t}{n}$ на равномерную сходимость.

Так как $|\sin\theta| \leqslant |\theta|$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$, то на любом конечном промежутке $[-R,R]$ этот ряд сходится равномерно — в качестве мажорантного ряда можно взять ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n^2}$. В то же время в окрестности бесконечности равномерной сходимости нет. Для доказательства этого достаточно показать, что суммы

$$\sigma_N(t) = \sum_{N<n\leqslant 2N} \frac{1}{n} \sin\frac{t}{n} = r_N(t) - r_{2N}(t)$$

не стремятся равномерно к нулю на множестве $T = [R,\infty)$ (при равномерной сходимости $r_N(t), r_{2N}(t) \rightrightarrows 0$, а тогда и $\sigma_N(t) \rightrightarrows 0$). Ясно, что

$$\rho_T(\sigma_N, 0) = \sup_{t\geqslant R} |\sigma_N(t)| \geqslant \sigma_N\Big(\frac{\pi N}{3}\Big) = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sin\frac{\pi N}{3n}}{n} \geqslant \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2N} = \frac{1}{4} \not\to 0.$$

Рассмотрим теперь более тонкие признаки равномерной сходимости, основанные на признаках Дирихле и Абеля для числовых рядов: для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ достаточно выполнение хотя бы одного из двух условий

условие Дирихле: *последовательность* $\{\alpha_n\}$ *убывает к нулю, а последовательность* $\{\beta_n\}$ *имеет ограниченные частичные суммы, т.е. существует такое число* B, *что* $|\beta_1 + \ldots + \beta_n| \leqslant B$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$;

условие Абеля: *последовательность* $\{\alpha_n\}$ *монотонна и ограничена, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ *сходится.*

Существенно, что последовательность $\{\alpha_n\}$ вещественная (лишь в этом случае имеет смысл монотонность). Последовательность $\{\beta_n\}$ может быть комплексной.

Оба утверждения легко получаются с помощью преобразования Абеля:

$$\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_N\beta_N = \alpha_N(\beta_1 + \ldots + \beta_N) + \sum_{1\leqslant n<N} (\alpha_n - \alpha_{n+1})(\beta_1 + \ldots + \beta_n).$$

Отсюда следует *неравенство Абеля* для конечной суммы:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\beta_n\Big| \leqslant \alpha_1 \max_{1\leqslant n\leqslant N}|\beta_1+\ldots+\beta_n|, \quad \text{если} \quad \alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_N\geqslant 0.$$

С помощью предельного перехода получаем неравенство Абеля для суммы ряда:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n\Big| \leqslant \alpha_1 \sup_{n\geqslant 1}|\beta_1+\ldots+\beta_n|,$$

если $\alpha_n \downarrow 0$ и последовательность частичных сумм $\{\beta_1+\ldots+\beta_n\}$ ограничена.

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости рядов). *Пусть на множестве T заданы две последовательности функций $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, удовлетворяющие трём условиям*

(1) *все функции a_n принимают на T лишь вещественные значения, причём последовательность значений $\{a_n(t)\}$ монотонна для каждого $t\in T$;*

(2) $a_n(t) \underset{n\to\infty}{\overset{T}{\rightrightarrows}} 0$;

(3) *частичные суммы $b_1(t)+\ldots+b_k(t)$ равномерно ограничены, т.е. $\exists B>0: \quad \forall k\in\mathbb{N}\ \forall t\in T \quad |b_1(t)+\ldots+b_k(t)|\leqslant B$.*

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)b_n(t)$ равномерно сходится на T.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда последовательность $\{a_n(t)\}$ убывает (к нулю, как это следует из второго условия) для каждого $t\in T$.

Поточечная сходимость рассматриваемого ряда следует из признака Дирихле для числовых рядов и нам остаётся проверить равномерное стремление остатка к нулю. Для этого воспользуемся неравенством Абеля для суммы ряда:

$$|r_N(t)| = |a_{N+1}(t)b_{N+1}(t)+a_{N+2}(t)b_{N+2}(t)+\ldots| \leqslant 2Ba_{N+1}(t)$$

для всех $t\in T$, так как

$$\begin{aligned}|b_{N+1}(t)+\ldots+b_{N+k}(t)| &= |(b_1(t)+\ldots+b_{N+k}(t))-(b_1(t)+\ldots+b_N(t))| \leqslant \\ &\leqslant |b_1(t)+\ldots+b_{N+k}(t)|+|b_1(t)+\ldots+b_N(t)|\leqslant 2B.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho_T(r_N,0)=\sup_{t\in T}|r_N(t)|\leqslant \sup_{t\in T}2Ba_{N+1}(t)=2B\rho_T(a_{N+1},0)\to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty,$$

поскольку $a_{N+1}(t)\rightrightarrows 0$ на T. Следовательно, $r_N(t)\rightrightarrows 0$ на T, то есть равномерная сходимость ряда установлена.

Рассмотрим теперь общий случай: характер монотонности последовательности значений $\{a_n(t)\}$ зависит от t. Тогда множество T распадается на две части — подмножество тех точек, в которых $\{a_n(t)\}$ убывает, и подмножество, в точках которого $\{a_n(t)\}$ возрастает. По доказанному на первом подмножестве ряд $\sum a_n(t)b_n(t)$

равномерно сходится. Кроме того, по той же причине на втором подмножестве равномерно сходится ряд $\sum\bigl(-a_n(t)\bigr)b_n(t)$, что равносильно равномерной сходимости на этом подмножестве исходного ряда. Таким образом, он равномерно сходится и на первом, и на втором подмножествах. Поскольку их объединение равно T, это доказывает равномерную сходимость ряда $\sum a_n(t)b_n(t)$ на всём множестве T.

Теорема доказана.

При применении этой теоремы на практике наибольшее затруднение вызывает проверка третьего условия (требуется найти константу B, которая не зависит не только от $k \in \mathbb{N}$, но и от $t \in T$). Поэтому полезно отметить важный частный случай теоремы, в котором это условие выполняется автоматически.

Теорема (о равномерной сходимости тригонометрических рядов). *Пусть* $\Delta \in (0,\pi)$. *Если последовательность функций* $\{a_n\}$ *удовлетворяет на множестве* $T = [\Delta, 2\pi-\Delta]$ *условиям* (1) *и* (2) *признака Дирихле, то ряды* $C(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cos nt$ *и* $S(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin nt$ *равномерно сходятся на* T.

Если ещё все функции a_n *непрерывны на* T, *то и суммы рядов* C *и* S *также непрерывны на* T.

Доказательство. Воспользуемся признаком Дирихле, взяв в качестве функций $b_n(t)$ либо $\cos nt$, либо $\sin nt$. Надо проверить, что выполнено условие (3). С помощью элементарных преобразований получаем

$$|\cos t + \ldots + \cos kt| = \frac{|2\sin\frac{t}{2}\cos t + \ldots + 2\sin\frac{t}{2}\cos kt|}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{|-\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{3t}{2} + \sin\frac{5t}{2} - \ldots - \sin(k-\frac{1}{2})t + \sin(k+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}} =$$
$$= \frac{|\sin(k+\frac{1}{2})t - \sin\frac{t}{2}|}{2\sin\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\Delta}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} B.$$

Сумма $|\sin t + \ldots + \sin kt|$ оценивается аналогично.

Теорема доказана.

Заметим, наконец, что если функции a_n постоянны на T, т.е. $a_n(t) = \alpha_n \in \mathbb{R}$ для всех $t \in T$, то условия (1) и (2) сводятся к простому соотношению $\alpha_n \downarrow 0$.

Пример. Пусть $\alpha_n \downarrow 0$. Из теоремы сразу следует, что ряд $S(t) = \sum\limits_n \alpha_n \sin nt$ равномерно сходится, а его сумма непрерывна на любом промежутке вида $[\Delta, 2\pi-\Delta]$, $0 < \Delta < \pi$. Поэтому $S \in C((0,2\pi))$. Непрерывность в точках $t=0$ и $t=2\pi$ кажется вполне правдоподобной, но она не вытекает из этой теоремы. Более того, всякая попытка доказать равномерную сходимость ряда вблизи этих точек без дополнительных предположениях о последовательности коэффициентов $\{\alpha_n\}$ обречена на неудачу: *непрерывность суммы* S *в точке* $t=0$ *возможно лишь* *при условии* $n\alpha_n \to 0$. Прежде чем доказывать это утверждение, отметим, что условие $n\alpha_n \to 0$ не только необходимо, но и достаточно для непрерывности S в нуле (более того, три утверждения равносильны: сумма S непрерывна в нуле, $S \in C(\mathbb{R})$ и $n\alpha_n \to 0$; по этому поводу см. упражнение, приведённое после этого примера).

Докажем теперь, что из непрерывности S в нуле следует соотношение $n\alpha_n \to 0$. Применив преобразование Абеля к ряду $S(t)$ и учитывая, что $\sin t + \ldots + \sin nt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$, получим

$$S(t) = \sum_{n\geqslant 1}(\alpha_n - \alpha_{n+1})\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \sum_{n\geqslant 1}(\alpha_n - \alpha_{n+1})\frac{1 - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{t}{4}\sum_{n\geqslant 1}(\alpha_n - \alpha_{n+1}).$$

Следовательно,

$$S(t) = \sum_{n\geqslant 1}(\alpha_n - \alpha_{n+1})\frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{\alpha_1}{2}\mathrm{tg}\frac{t}{4}.$$

Из непрерывности S в нуле следует, что $S(\frac{2}{N}) \to 0$, и поэтому

$$\sum_{n\geqslant 1}(\alpha_n - \alpha_{n+1})\frac{\sin^2(n+\frac{1}{2})\frac{1}{N}}{\sin\frac{1}{N}} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty.$$

Все слагаемые этого ряда неотрицательны. Поэтому с помощью неравенства $\varphi \geqslant \sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$ для $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ получаем

$$\varepsilon_N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}(\alpha_n - \alpha_{n+1})n^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Так как $(\alpha_n - \alpha_{n+1})n^2 = n\varepsilon_n - (n-1)\varepsilon_{n-1}$, то

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{n} - \frac{\varepsilon_{n-1}}{n} + \frac{\varepsilon_{n-1}}{n^2} = \frac{\varepsilon_n}{n} - \frac{\varepsilon_{n-1}}{n-1} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Просуммировав эти неравенства при $n \geqslant N$, получим $\alpha_N = o(1/N)$.

В конце параграфа мы вычислим сумму ряда $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nt$ и убедимся в существовании правостороннего предела $S(+0) = \frac{\pi}{2}$.

Упражнения.

1^0. Пусть $\alpha_n \downarrow 0$. Докажите, что равномерная сходимость на $[0, 2\pi]$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin nt$ равносильна соотношению $n\alpha_n \to 0$.

2^0. Пусть $\alpha_n \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Какое дополнительное условие на коэффициенты $\{\alpha_n\}$ равносильно равномерной сходимости на $[0, 2\pi]$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \cos nt$?

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости рядов). *Пусть на множестве T заданы две последовательности функций $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, удовлетворяющие трём условиям*

(1) *все функции a_n принимают на T лишь вещественные значения, и для каждого $t \in T$ последовательность значений $\{a_n(t)\}$ монотонна;*
(2) *функции a_n равномерно ограничены на T, т.е. существует такое число $A > 0$, что $|a_n(t)| \leqslant A$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in T$;*
(3) *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)$ равномерно сходится на T.*

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(t)$ равномерно сходится на множестве T.

Доказательство. Поточечная сходимость вытекает из признака Абеля сходимости числовых рядов. Как и в признаке Дирихле, доказывая равномерную сходимость, достаточно рассмотреть случай, когда последовательность $\{a_n(t)\}$ убывает для каждого t из T. При этом существует конечный предел $a(t) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(t)$ (убывающая ограниченная последовательность имеет конечный предел). Ясно, что $|a(t)| \leqslant A$ всюду на T в силу второго условия теоремы. Поэтому её третье условие обеспечивает равномерную на T сходимость ряда $\sum a(t) b_n(t)$ и остаётся установить такую сходимость для ряда $\sum \bigl(a_n(t) - a(t)\bigr) b_n(t)$, где $a_n(t) - a(t) \downarrow 0$. Иначе говоря, достаточно доказать теорему при дополнительном предположении, что $a_n(t) \downarrow 0$ для всех t из T. Это позволит нам воспользоваться неравенством Абеля.

Чтобы доказать равномерную сходимость на T ряда $\sum a_n(t) b_n(t)$, положим

$$r_N(t) = \sum_{n>N} a_n(t) b_n(t) \quad \text{и} \quad \gamma_N(t) = \sum_{n>N} b_n(t).$$

Тогда согласно неравенству Абеля

$$|r_N(t)| \leqslant a_{N+1}(t) \sup_{k>N} |b_{N+1}(t) + \ldots + b_k(t)| = a_{N+1}(t) \sup_{k>N} \bigl|\gamma_N(t) - \gamma_k(t)\bigr|.$$

Так как $0 \leqslant a_{N+1}(t) \leqslant A$, то

$$|r_N(t)| \leqslant A \sup_{k>N} \bigl(|\gamma_N(t)| + |\gamma_k(t)|\bigr) \leqslant 2A \sup_{k\geqslant N} |\gamma_k(t)| \leqslant 2A \sup_{k\geqslant N} \rho_T(\gamma_k, 0).$$

Итак,

$$\rho_T(r_N, 0) = \sup_{t\in T} |r_N(t)| \leqslant 2A \sup_{k\geqslant N} \rho_T(\gamma_k, 0).$$

Осталось заметить, что из сходимости $\rho_T(\gamma_k, 0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (в силу третьего условия теоремы) следует, что и грани $\sup_{k\geqslant N} \rho_T(\gamma_k, 0)$ стремятся к нулю при $N \to \infty$. Это влечёт равномерное стремление к нулю остатка $r_N(t)$ ряда $\sum a_n(t) b_n(t)$. Следовательно, этот ряд равномерно сходится на T.

Теорема доказана.

Отметим частный случай этой теоремы, когда $T = [0,1]$, $a_n(t) = t^n$, а функции b_n постоянны: $b_n(t) = \beta_n \in \mathbb{C}$ для всех $t \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда *из сходимости ряда* $\sum \beta_n$ *вытекает равномерная на* $[0,1]$ *сходимость ряда* $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$. *При этом функция* f *непрерывна на промежутке* $[0,1]$ (так как все слагаемые непрерывны), *и поэтому* $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n \underset{t \to 1-0}{\longrightarrow} f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$.

Легко привести примеры, показывающие, что существование конечного предела $\lim\limits_{t \to 1-0} f(t)$ не влечёт сходимости ряда $\sum \beta_n$. Например, если $\beta_n = (-1)^n$, то ряд $\sum \beta_n = \sum (-1)^n$ расходится, хотя $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^n = -\frac{t}{1+t} \to -\frac{1}{2}$ при $t \to 1$.

Это позволяет ввести понятие обобщённой (в смысле Абеля-Пуассона) суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$, определив её как предел $\lim\limits_{t \to 1-0} f(t) = \lim\limits_{t \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n$, в том случае, когда он существует. Тогда частный случай признака Абеля можно перефразировать так:

обобщённая сумма сходящегося ряда совпадает с его обычной суммой.

Пример. Вычислим суммы тригонометрических рядов

$$C(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} \quad \text{и} \quad S(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}.$$

Обе функции 2π-периодические, причем первая – чётная, а вторая – нечётная. Поэтому можно ограничиться случаем $\varphi \in (0, \pi)$. Формула Эйлера позволяет рассматривать эти ряды одновременно – как вещественную и мнимую части ряда

$$C(\varphi) + iS(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\varphi} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

Он сходится довольно медленно. Вычислим обобщённую в смысле Абеля-Пуассона сумму этого ряда. Пусть

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t^n, \ t \in [0,1].$$

За счёт множителя t^n получившийся ряд при каждом фиксированном t из $[0,1)$ быстро сходится. Кроме того, по признаку Вейерштрасса на любом промежутке $[0,\tau]$, $\tau \in (0,1)$ равномерно сходится и ряд из производных (мажорантный ряд – $\sum \tau^{n-1}$). На каждом таком промежутке (по теореме о почленном дифференцировании суммы ряда) справедливо равенство

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} t^{n-1} = e^{i\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} (e^{i\varphi} t)^m = \frac{e^{i\varphi}}{1 - te^{i\varphi}}.$$

Так как τ – любое число из промежутка $(0,1)$, то это равенство справедливо на всём промежутке $[0,1)$. Отделим вещественную и мнимую части:

$$f'(t) = -\frac{t - \cos\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2} + i \frac{\sin\varphi}{1 - 2t\cos\varphi + t^2}.$$

Поэтому

$$f(t) = -\int \frac{(t-\cos\varphi)dt}{(t-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} + i\sin\varphi \int \frac{dt}{(t-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left((t-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\right) + i\ \mathrm{arctg}\left(\frac{t-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) + C_\varphi.$$

Так как $f(0)=0$, то $C_\varphi = i\,\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\varphi) = i\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\varphi)) = i\,(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ (здесь существенно, что $\varphi\in(0,\pi)$, так как в этом случае $|\frac{\pi}{2}-\varphi| < \frac{\pi}{2}$). Поскольку функция f непрерывна на $[0,1]$, формула для $f(t)$ справедлива для всех t из этого промежутка. В частности, при $t=1$ мы получаем

$$C(\varphi)+i\,S(\varphi)=f(1)=-\frac{1}{2}\ln\left((1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi\right)+i\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}\right)+i\,(\frac{\pi}{2}-\varphi)=$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 + i\ \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + i\ (\frac{\pi}{2}-\varphi) = -\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right) + i\ \frac{\varphi}{2} + i\ (\frac{\pi}{2}-\varphi).$$

Таким образом, для всех $\varphi\in(0,\pi)$ справедливы равенства

$$C(\varphi) = -\ln(2\sin\frac{\varphi}{2}) \quad \text{и} \quad S(\varphi) = \frac{\pi-\varphi}{2}.$$

Так как функции C и S непрерывны в точке $\varphi=\pi$, то эти равенства справедливы и для $\varphi=\pi$. Учитывая чётность и периодичность функции $C(\varphi)$, получаем, что $C(\varphi) = -\ln|2\sin\frac{\varphi}{2}|$ для всех $\varphi\in\mathbb{R}$, $\varphi\neq 2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$. Аналогично, из нечётности функции $S(\varphi)$ следует, что $S(\varphi) = -\frac{\pi+\varphi}{2}$ при $\varphi\in[-\pi,0)$ и, следовательно, $S(\varphi) = = \frac{\pi-\varphi}{2}$ для $\varphi\in(0,2\pi)$. Ясно, что $S(\pi k)=0$ при $k\in\mathbb{Z}$, причём в точках $2\pi k$ функция $S(\varphi)$ имеет разрыв первого рода. В частности, $S(+0)=\frac{\pi}{2}$.

Пример. Вычислим сумму ряда

$$\zeta_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Для этого рассмотрим вспомогательную 2π-периодическую функцию

$$D(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^2}.$$

Ясно, что $\zeta_2 = D(0)$. По признаку Вейерштрасса ряд, определяющий функцию D, равномерно сходится на $\mathbb{R}$. По теореме о свойствах суммы равномерно сходящегося ряда $D\in C(\mathbb{R})$ и, кроме того, среднее значение функции D на периоде равно нулю:

$$\int_0^{2\pi} D(\varphi)d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi d\varphi = \sum 0 = 0.$$

По теореме о равномерной сходимости тригонометрических рядов почленно продифференцированный ряд $\sum -\frac{\sin n\varphi}{n}$ равномерно сходится на каждом промежутке вида $[\Delta, 2\pi - \Delta]$ при $0 < \Delta < \pi$. Сумма этого ряда найдена в предыдущем примере: $\sum -\frac{\sin n\varphi}{n} = -S(\varphi) = \frac{\varphi-\pi}{2}$. Пользуясь теоремой о почленном дифференцировании суммы ряда, получаем, что на промежутке $[\Delta, 2\pi - \Delta]$ функция D дифференцируема и $D'(\varphi) = \frac{\varphi-\pi}{2}$. Так как Δ – произвольно, то отсюда следует, что $D(\varphi) = \frac{1}{4}(\varphi-\pi)^2 + \text{const}$ на промежутке $(0, 2\pi)$, а так как $D \in C([0, 2\pi])$, то последнее равенство справедливо на всем промежутке $[0, 2\pi]$. Чтобы определить неизвестную пока константу, воспользуемся тем, что среднее значение функции D на $[0, 2\pi]$ равно нулю:

$$0 = \int_0^{2\pi} D(\varphi)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\varphi - \pi)^2 d\varphi + 2\pi\,\text{const} = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi\,\text{const}.$$

Следовательно, $\text{const} = -\frac{\pi^2}{12}$ и $D(\varphi) = \frac{(\varphi-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$ на промежутке $[0, 2\pi]$. При $\varphi = 0$ получаем искомую сумму: $\zeta_2 = D(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

Упражнение. Используя тот же приём, докажите, что

$$\zeta_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta_6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Ясно, что так можно вычислить любую сумму ζ_{2k}, $k \in \mathbb{N}$. В то же время, для сумм ζ_{2k+1} подобные (или какие-нибудь другие "конечные") формулы неизвестны.

Упражнение. Другое простое и естественное обобщение понятия "сумма числового ряда" получим, рассмотрев предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(S_1 + \ldots + S_n)$, где $S_n = \beta_1 + \ldots + \beta_n$ – частичная сумма ряда $\sum \beta_n$. Если этот предел средних арифметических существует, то его называют обобщённой суммой в смысле Чезаро. Докажите, что

а) если ряд сходится, то его обобщённая в смысле Чезаро сумма существует и совпадает с обычной суммой;

б) метод Абеля-Пуассона сильнее метода Чезаро: если числовой ряд имеет сумму в смысле Чезаро, то он имеет такую же сумму в смысле Абеля-Пуассона;

в) не все ряды, имеющие сумму в смысле Абеля-Пуассона, имеют сумму в смысле Чезаро.

В завершение этой темы рассмотрим пример Вейерштрасса непрерывной на $\mathbb{R}$, но нигде не дифференцируемой функции. В своё время он вызвал очень оживлённое обсуждение: "Как интуиция может обмануть нас до такой степени?" (А.Пуанкаре). Ш.Эрмит пишет, что он "с ужасом отворачивается от внушающей сожаление язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной" (по авторитетному мнению Н.Бурбаки, это сказано "не без некоторого юмора, который, по-видимому, дошёл не до всех комментаторов"). Вскоре, однако, эмоции угасли. И дело не только в том, что изучение таких экзотических примеров сделало их "почти привычными". Оказалось, что они зачастую встречаются и в анализе (как решения естественных экстремальных задач), и в теории вероятностей, и в физике. Более того, выяснилось, что в пространстве непрерывных функций это "типичные" функции – функции, имеющие производную хотя бы в одной точке, образуют очень "редкое" множество в этом пространстве (подобно тому как рациональные и алгебраические числа "редки" на вещественной оси, а "типичными" являются трасцендентные числа). Сейчас у нас нет возможности дать чёткую формулировку последнему утверждению. Тем не менее следующий пример показывает, что при построении функций с такими непривычными свойствами имеется большая свобода выбора.

Пример. Возьмём какую-нибудь 1-периодическую функцию V, удовлетворяющую условию Липшица: $|V(t') - V(t'')| \leqslant L|t' - t''|$ для всех $t', t'' \in \mathbb{R}$. Зафиксируем два параметра $q \in (0,1)$ и $Q > 1$, выбор которых уточним позже, и рассмотрим ряд

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n V(Q^n t).$$

По признаку Вейерштрасса он сходится равномерно на $\mathbb{R}$ (мажорантный ряд – $\sum q^n \max|V|$). Так как все слагаемые ряда непрерывны, то $W \in C(\mathbb{R})$. Докажем, что если исходная функция V не постоянна, то есть $\Delta = \max V - \min V > 0$, то при достаточно малом q (точнее $0 < q \leqslant \frac{1}{4}$) и достаточно большом Q (точнее $qQ > 1+6\frac{L}{\Delta}$) функция W не имеет конечной производной ни в одной точке $t \in \mathbb{R}$. Для этого построим такую последовательность $\{t_m\}$, что $t_m \to t$ и $|W(t_m) - W(t)|/|t_m - t| \to \infty$.

Зафиксировав $t \in \mathbb{R}$, для каждого $m \in \mathbb{N}$ обозначим $k_m = [Q^m t] \in \mathbb{Z}$ (здесь [..] – знак целой части). Так как в силу периодичности $\max\limits_{[k_m, 1+k_m]} V - \min\limits_{[k_m, 1+k_m]} V = \Delta$, то существует такое число $\theta_m \in [k_m, 1+k_m]$, что $|V(\theta_m) - V(Q^m t)| \geqslant \frac{\Delta}{2}$. Положим $t_m = \frac{\theta_m}{Q^m}$. Тогда $|V(Q^m t_m) - V(Q^m t)| \geqslant \frac{\Delta}{2}$, а так как $Q^m t_m, Q^m t \in [k_m, 1+k_m]$, то $|Q^m t_m - Q^m t| \leqslant 1$, то есть $|t_m - t| \leqslant Q^{-m}$.

Оценим теперь разность $W(t_m) - W(t)$:

$$|W(t_m) - W(t)| = \left|\sum_{n=0}^{m-1} \ldots + q^m \left(V(Q^m t_m) - V(Q^m t)\right) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \ldots \right| \geqslant$$

$$\geqslant q^m \frac{\Delta}{2} - \sum_{n=0}^{m-1} |\ldots| - \sum_{n=m+1}^{\infty} |\ldots|.$$

Так как функция V удовлетворяет условию Липшица, то при $qQ > 1$ первая сумма не превосходит

$$\sum_{n=0}^{m-1} q^n L Q^n |t_m - t| = L|t_m - t| \frac{(qQ)^m - 1}{qQ - 1} < L|t_m - t| \frac{(qQ)^m}{qQ - 1}.$$

Кроме того, $|V(t') - V(t'')| \leqslant \max V - \min V = \Delta$, и поэтому вторая сумма не превосходит $\sum_{n=m+1}^{\infty} q^n \Delta = \Delta \frac{q^{m+1}}{1-q}$. Таким образом,

$$|W(t_m) - W(t)| \geqslant q^m \frac{\Delta}{2} - L|t_m - t| \frac{(qQ)^m}{qQ - 1} - \Delta \frac{q^{m+1}}{1-q} =$$

$$= q^m \Delta \Big(\frac{1}{2} - \frac{q}{1-q}\Big) - L|t_m - t| \frac{(qQ)^m}{qQ - 1}.$$

Для q из промежутка $(0, \frac{1}{4}]$, очевидно, $\frac{1}{2} - \frac{q}{1-q} \geqslant \frac{1}{6}$. Поскольку $|t_m - t| \leqslant Q^{-m}$, мы видим, что

$$\Big|\frac{W(t_m) - W(t)}{t_m - t}\Big| \geqslant \frac{\Delta}{6}(qQ)^m - L\frac{(qQ)^m}{qQ-1} = (qQ)^m\Big(\frac{\Delta}{6} - \frac{L}{qQ-1}\Big) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

если ещё $\frac{\Delta}{6} - \frac{L}{qQ-1} > 0$, то есть $qQ > 1 + 6\frac{L}{\Delta}$.

Замечание. В качестве начальной функции можно взять “очень хорошую” функцию, например, $V(t) = \sin 2\pi t$. Несмотря на то, что в этом случае все частичные суммы ряда $W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \sin 2\pi Q^n t$ бесконечно дифференцируемы, сумма этого ряда всюду непрерывна, но нигде не имеет конечной производной, если $Q > 4 + 24\pi$.

Упражнение. Пусть V – такая 1-периодическая функция, что $V(t) = |t|$, если $|t| \leqslant \frac{1}{2}$. Докажите, что непрерывная функция $W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} V(4^n t)$ не имеет производной ни в одной точке $t \in \mathbb{R}$ (см. книгу Г.М.Фихтенгольц “Курс диффренциального и интегрального исчисления”, т. II, n^0 444.) Постройте графики первых пяти частичных сумм этого ряда.