

[2019-10-03]

Напоминание

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1) \quad M, N \in C(G)$$

$$y = \varphi(x) - \text{реш (1), } x \in (a, b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0 \text{ на } (a, b)$$

Опр

$$u(x, y) \in C^1(G)$$

Интл (1), если

$$1. \text{ хоть одна из } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \text{ не } 0 \text{ в } \forall \text{ обыкн. точке } G$$

$$2. N \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0 \text{ в } G \quad (4)$$

$$(5) \quad u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (x_0, y_0) \in G$$

u - инт-л (1) в G

Теорема (2)

$$N(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow$$

рав-во (5) разрешимо отн y : его решение

$$y = \varphi(x) \text{ опред на } (a, b) \quad x_0 \in (a, b) \quad \varphi(x_0) = y_0$$

$$y = \varphi(x) \text{ непр дифф на } (a, b) \text{ и явля реш ур (1)}$$

Док-во

$$N(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow N(x, y) \neq 0 \text{ в нек. окр-ти } V(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0 \text{ (из (4): если } \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \text{ то } \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = 0)$$

Противореч. с тем, что (x_0, y_0) - обыкн

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \neq 0 \text{ в нек. окр } \tilde{V}(x_0, y_0)$$

\Rightarrow теорема о неявн. функции $\exists y = \varphi(x)$ - реш (5) : $y_0 = \varphi(x_0)$

$\varphi(x)$ - непр дифф $x \in (a, b)$ ($x_0 \in (a, b)$)

$u(x, \varphi(x)) = u(x_0, y_0)$ на (a, b)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial x}}{\frac{\partial u(x, \varphi(x))}{\partial y}}$$

$$\begin{aligned} \text{в (2)} \quad M(\dots) + N(\dots) \left(-\frac{\frac{\partial u(\dots)}{\partial x}}{\frac{\partial u(\dots)}{\partial y}} \right) = \\ = -\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}(\dots)} \left[N(\dots) \frac{\partial u}{\partial x}(\dots) - M(\dots) \frac{\partial u(\dots)}{\partial y} \right] \equiv 0 \text{ в } G \end{aligned}$$

Теорема (2)

Следствие

(x_0, y_0) - обычн точка G , то рав-во (5)

разрешн. отн y или отн x и его реш - реш (1)

$(M \neq 0 \text{ или } N \neq 0)$

Опр

равн-во $u(x, y) = c$ - общ. инт-л (1)

Пример

$$x dx + y dy = 0$$

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{u(x, y)} = c$$

1 Уравнения в полных дифф.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

Опр

(1) - ур в полных дифф, если

$$\exists u(x, y) : \quad du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (2)$$

((1) : $du = 0$)

Теорема (1)

(1) - ур в полных дифф $\Rightarrow u(x, y)$ - инт-л (1)

Док-во

1. $u(x, y)$ - непр дифф.

$$2. \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \quad (3)$$

$$3. N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial u}{\partial y} = N \cdot M - M \cdot N \equiv 0$$

Теорема

если $\exists \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(G)$ (1) - ур. в полных дифф

$$\text{то } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ в } G \quad (4)$$

Док-во

(1) - ур в п. дифф $\Rightarrow \exists u(x, y)$ (2), (3)

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$G = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$$

$$(\text{м.б } a = -\infty, c = -\infty \quad b = +\infty, d = +\infty)$$

Теорема (3)

$$\exists \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(G)$$

И вып (4) \Rightarrow (1) - ур. в п. д.

Док-во

$$(x_0, y_0), (x, y) \in G$$

$$\forall t \in [x_0, x] \quad (t, y) \in G$$

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial x} = M(t, y) - \text{инт от } x_0 \text{ до } x$$

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt \quad (5)$$

$$\forall t \in [y_0, y] \quad (x_0, y) \in G$$

$$\frac{\partial u(x_0, t)}{\partial y} = N(x_0, t) - \text{инт от } y_0 \text{ до } y$$

$$u(x_0, y) - \underbrace{u(x_0, y_0)}_{\text{НУО} = 0} = \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt \quad (6)$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y) dt + \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt \quad (7)$$

Проверяем, что это та функция, которая нужна

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(t, y) dt + N(x_0, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} dt + N(x_0, y) = \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} dt + N(x_0, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + N(x_0, y) \end{aligned}$$

Замечание (1)

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y N(x, t) dt \quad (7')$$

УТВ

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad \text{Вып (4)} \quad G - \text{односвяз.}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \int_{\Gamma} M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (8) - \text{криволин. инт}$$

Γ - любая кривая, соединяющая (x_0, y_0) и (x, y)

Условие (4) гарантирует нам, что криволин. интеграл не зависит от кривой интегрирования

Замечание (2)

Прямоугольность области G не требуется по-существу, нужна только односвязность (отсутствие дырок или возможность стянуть любой путь в точку)

Опр

$$(1) \quad \mu = \mu(x, y) \in C(G) \quad \mu(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in G$$

μ - интегр мн-ль для (1), если

$$(9) \quad (\mu M)dx + (\mu N)dy = 0 - \text{ур. в п. д}$$

$$\exists M, N, \mu \in C^1(G) \quad (G - \text{односвяз})$$

$$(9) - \text{ур в п.д.} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1)$$

Частный случай 1

$$\underline{\mu = \mu(x)}$$

$$\text{из (10): } \frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (11)$$

$$N = f(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(x)dx$$

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x f(t)dt}$$

Частный случай 2

$$\underline{\mu = \mu(y)}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \quad (12)$$

$$M = g(y)$$