Содержание

11.10.19

1 Условные экстремумы

$$u = f(x_1, ..., x_n) \text{ при усл } \begin{cases} \Phi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad m < n$$

1. Точка недифф-ти f или Φ_i
2. $\operatorname{rk}\Phi' < m$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad m \times n$$

3. $\mathscr{L} = f(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 \Phi_1(x_1, ..., x_n) - \lambda_2 \Phi_2(x_1, ..., x_n) - ... - \lambda_m \Phi_m(x_1, ..., x_n)$

Точка экстремума удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \Phi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad m + n \text{ уравнений}$$

$m + n$ неизвестных $\quad x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$

Задача (1)

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \qquad a, b > 0 \text{ при усл. } x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\Phi} = 0 \qquad M$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \qquad 1 \text{ ур-е } \Rightarrow 1 \text{ строка в матрице}$$

$$\operatorname{rk}\Phi' < 1 \Rightarrow \operatorname{rk}\Phi' = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \notin M$$

$$\forall (x, y) \in M \qquad \operatorname{rk}\Phi' = 1$$

$$\mathscr{L} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = \frac{1}{a} - 2\lambda \cdot x = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 & x = \frac{1}{2a\lambda} \\ \mathscr{L}'_y = \frac{1}{b} - 2\lambda \cdot y = 0 \Rightarrow & y = \frac{1}{2b\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} = 1$$

$$\frac{b^2+a^2}{4a^2b^2\lambda^2}=1$$

$$a^2+b^2=4a^2b^2\lambda^2$$

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$$

$$1.\begin{cases}x=\frac{1\cdot 2ab}{2a\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \lambda=+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}\end{cases}$$

$$2.\begin{cases}x=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \lambda=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}\end{cases}$$

Выясним, что будет в этих точках

$$\mathscr{L}''_{x^2}=-2\lambda$$

$$\mathscr{L}''_{xy}=0$$

$$\mathscr{L}''_{y^2}=-2\lambda$$

$$\begin{pmatrix}-2\lambda & 0\\ 0 & -2\lambda\end{pmatrix}\qquad \Delta_1=2\lambda\quad \Delta_2=4\lambda^2$$

$$\begin{array}{lllll}\text{для} & 1. & - & + & \max\\ & 2. & + & + & \min\end{array}$$

Задача (2)

$$u=x^2+y^2+z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\qquad a>b>c>0$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

$$\Phi'=\begin{pmatrix}\frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk}\Phi'=0\Rightarrow\quad x=y=z=0\qquad (0,0,0)\not\in M$$

$$\mathscr{L}=x^2+y^2+z^2-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$$

$$\begin{cases}\mathscr{L}'_x=2x-\frac{2x\lambda}{a^2}=0\Rightarrow x(1-\frac{\lambda}{a^2})=0\\ \mathscr{L}'_y=2y-\frac{2y\lambda}{b^2}=0\Rightarrow y(1-\frac{\lambda}{b^2})=0\\ \mathscr{L}'_z=2z-\frac{2z\lambda}{c^2}=0\Rightarrow z(1-\frac{\lambda}{c^2})=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

$$1-\frac{\lambda}{b^2}=0\Rightarrow\lambda=b^2$$

$$x=z=0\qquad y\pm b$$

$$1-\frac{\lambda}{c^2}=0\Rightarrow\lambda=c^2$$

$$x=y=0\qquad z=\pm c$$

$$1-\frac{\lambda}{a^2}=0$$

$$\lambda=a^2\qquad 1-\frac{a^2}{b^2}\neq 0$$

$$\Rightarrow y=0$$

$$1-\frac{a^2}{c^2}\neq 0\Rightarrow z=0$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=1$$

$$\begin{cases}x=\pm a\\ y=0\\ z=0\\ \lambda=a^2\end{cases}$$

6 решений $\begin{pmatrix}\pm a & 0 & 0 & a^2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & \pm b & 0 & b^2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0 & 0 & \pm c & c^2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2-\frac{2\lambda}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & 2-\frac{2\lambda}{b^2} & 0\\ 0 & 0 & 2-\frac{2\lambda}{c^2}\end{pmatrix}$$

$$\Delta_1=2-\frac{2\lambda}{a^2}=2(1-\frac{\lambda}{a^2})$$

$$\Delta_2=4(1-\frac{\lambda}{a^2})(1-\frac{\lambda}{b^2})$$

$$\Delta_3=8(1-\frac{\lambda}{a^2})(1-\frac{\lambda}{b^2})(1-\frac{\lambda}{c^2})$$

1. $\lambda=a^2\qquad 0,\ 0,\ 0$
2. $\lambda=b^2\qquad 1-\frac{b^2}{a^2}>0,\ 0,\ 0$
3. $\lambda=c^2\qquad 1-\frac{c^2}{a^2}>0,\ (1-\frac{c^2}{a^2})(1-\frac{c^2}{b^2})>0,\ 0$

Но у нас 2 независимые переменные

$$d^2\mathscr{L}=2(1-\frac{\lambda^2}{a^2})(dx)^2+2(1-\frac{\lambda}{b^2})(dy)^2+2(1-\frac{\lambda}{c^2})(dz)^2$$

$$\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy+\frac{2z}{c^2}dz=0$$

- линейная однородная система относительно диф-лов

dx, dy, dz - зависимы между собой

В точке $\begin{pmatrix}\pm a, & 0, & 0, & a^2\end{pmatrix}$ - максимум

$$\frac{\pm 2a}{a^2}dx=0\Rightarrow dx\equiv 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1-\frac{a^2}{b^2})(dy)^2 + 2(1-\frac{a^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1-\frac{a^2}{b^2}) & 0 \\ 0 & 2(1-\frac{a^2}{c^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lc} \Delta_1 = & 2(1-\frac{a^2}{b^2}) < 0 \\ \Delta_2 = & 4(1-\frac{a^2}{b^2})(1-\frac{a^2}{c^2}) > 0 \\ - \quad + & \underline{\text{максимум}} \end{array}$$

В точке $\big(0, \quad \pm b, \quad 0, \quad b^2\big)$ нет экстремума

$$\pm\frac{2b}{b^2}dy = 0 \Rightarrow dy = 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1-\frac{b^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1-\frac{b^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1-\frac{b^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1-\frac{b^2}{c^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lc} \Delta_1 = & 2(1-\frac{b^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = & 4(1-\frac{b^2}{a^2})(1-\frac{b^2}{c^2}) < 0 \\ + \quad - & \underline{\text{нет экстремума}} \end{array}$$

В точке $\big(0, \quad 0, \quad \pm c, \quad c^2\big)$ - минимум

$$\pm\frac{2c}{c^2}dz = 0 \Rightarrow dz = 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1-\frac{c^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1-\frac{c^2}{b^2})(dy)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1-\frac{c^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1-\frac{c^2}{b^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{lc} \Delta_1 = & 2(1-\frac{c^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = & 4(1-\frac{c^2}{a^2})(1-\frac{c^2}{b^2}) > 0 \\ + \quad + & \underline{\text{минимум}} \end{array}$$

Задача (3)

$$u = xy + yz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad M$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rk}\Phi' < 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{противоречие с } x^2 + y^2 = 2$$

$$\forall (x, y) \in M \qquad \operatorname{rk}\Phi' = 2$$

$$\mathscr{L} = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(y + z - 2)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = y - 2\lambda_1 x & = 0 \\ \mathscr{L}'_y = x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 & = 0 \\ \mathscr{L}'_z = y - \lambda_2 & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 2 \\ y + z & = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \neq 0 \quad \lambda_1 = \dfrac{y}{2x}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ - противореч с $x^2 + y^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + z - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = z \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + 2 - y - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 - y \end{cases} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x^2 + 2(1-y)x - y^2 = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ 2 - 2y^2 + 2(1-y)x = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ (1-y)(1+y) + x(1-y) = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases}$$

$(1-y)(1+y+x) = 0$

1. $y = 1$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$z = 2 - y = 1$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = \pm\dfrac{1}{2}$

$$(1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

2. $1 + y + x = 0$

$x = -1 - y$

$(-1-y)^2 = 2 - y^2 \qquad y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$y^2 + 2y + 1 = 2 - y^2 \qquad z = 1 - \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \dfrac{-2 + 1 \mp \sqrt{3}}{2}$

$2y^2 + 2y - 1 = 0$

$$(3)\begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_1 = ... \\ \lambda_2 = ... \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_1 = ... \\ \lambda_2 = ... \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{gathered} \Delta_1 = -2\lambda_1 \\ \Delta_2 = 4\lambda_1^2 - 1 \\ \Delta_3 = -1 \begin{vmatrix} -2\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 \end{gathered}$$

В (1) - 0 $+$ экстр. нет?
В (2) $+$ 0 - экстр. нет?

$$d^2\mathscr{L} = (-2\lambda_1)(dx)^2 + 2dxdy + (-2\lambda_1)(dy)^2 + 2dydz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$$

В точке $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -dy \\ dz = -dy \end{cases}$$

$$d^2\mathscr{L} = (-dy)^2 + 2(-dy)dy - (dy)^2 + 2dy(-dy) = (-6)(dy)^2$$

$\begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}$ матрица из одного элемента

$\Delta_1 < 0 \qquad -\max$

В точке $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -\dfrac{1}{2}$

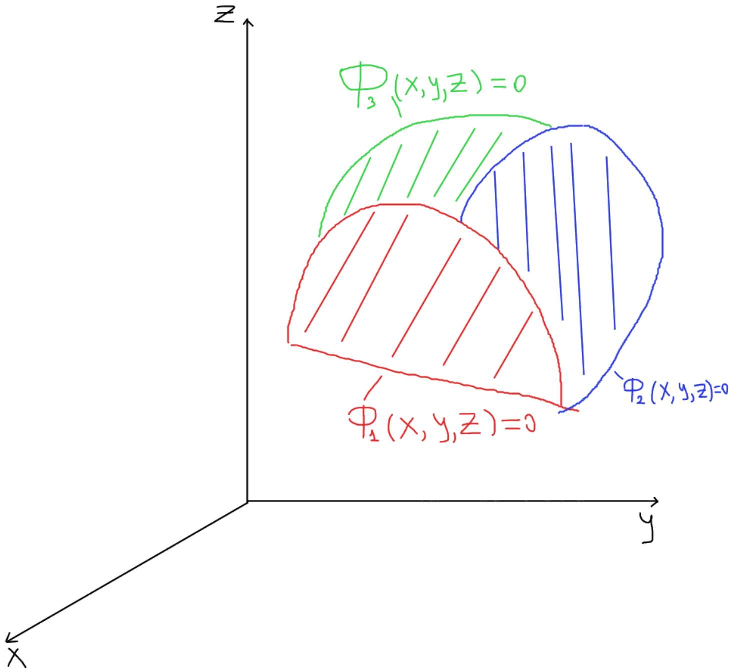
$$\begin{cases} -dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = dy \\ dz = -dy \end{cases}$$

$$d^2\mathscr{L} = 1 \cdot (dy)^2 + 2dydy + 1 \cdot (dy)^2 + 2dy \cdot (-dy) = 2(dy)^2$$

$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 > 0 \qquad \Rightarrow \min$

$\begin{pmatrix} -1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \qquad -\min$

2 наиб. и наим. значения функций от нескольких перем.



Опр

наиб и наим знач. ф. $u = f(x, y, z)$ на E

1. внутри $E \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$ - реш. системы
   (только принадлежащие E. Решения могут лежать вне E)
   Или точка недифф.
2. На участке $\Phi_1(x, y, z) = 0$
   (a) точка недифф-ти
   (b) $\operatorname{rk} \Phi'_1 < 1$
   (c) $\mathscr{L} = f - \lambda_1 \Phi_1$

   «Не нужно считать 2 пр-дные и делать лишнее!»
3. На участке $\Phi_2(x, y, z) = 0$
   Аналогично
4. На $\Phi_3(x, y, z) = 0$ Аналогично

5. на ребре

$$\begin{cases} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

   (a) Не дифф

   (b) $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \end{pmatrix} < 2$

   (c) $\mathscr{L} = f - \lambda_1\Phi_1 - \lambda_2\Phi_2$

6. на ребре

7. на ребре

8. в точках

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \\ \Phi_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

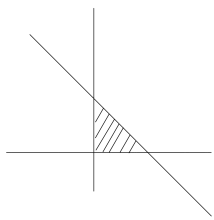
Все точки проверяем на $\in$ E
$f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2), \ldots$ выбираем точку с $\underset{\text{наим}}{\text{наиб}}$ знач.

Задача (1)

$$z = x^2 - xy + y^2$$

на мн-ве $\{(x, y) :\ |x| + |y| \leqslant 1\}$

1)

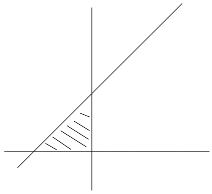


$x \geqslant 0$

$y \geqslant 0$

$x + y \leqslant 1$

2)

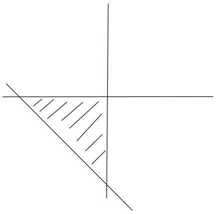


$x < 0$

$y \geqslant 0$

$-x + y \leqslant 1$

3)

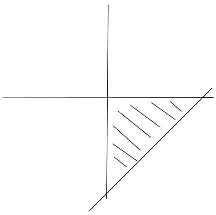


$x < 0$

$y < 0$

$-x - y \leqslant 1$

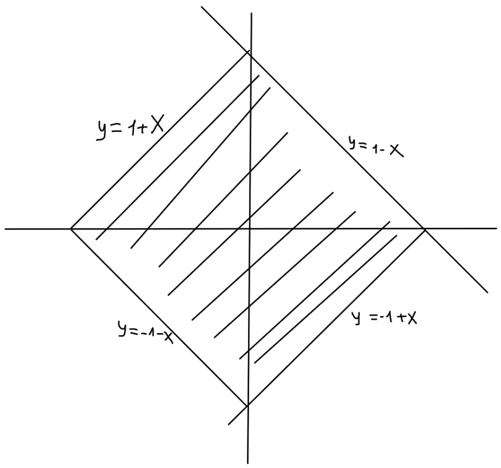
4)



$x \geqslant 0$

$y < 0$

$x - y \leqslant 1$



1)

$z'_x = 2x - y = 0$

$z'_y = -x + 2y = 0$

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \\ 4x - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ входит в множество

---

2)

$\begin{cases} y = 1 - x \\ z = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 3x^2 - 3x + 1 \end{cases}$

$z'_x = 6x - 3 = 0$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ входит в мн-во

---

3)

$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = x^2 - x(x-1) + (x-1)^2 \end{cases}$

$z'_x = 2x - 1 = 0$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Догадались о симметрии

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Входят в множество

---

4)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$z(0,0) = 0 \leftarrow \min$$

$$z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$z(1,0) = 1$$

$$z(-1,0) = 1$$

$$z(0,1) = 1$$

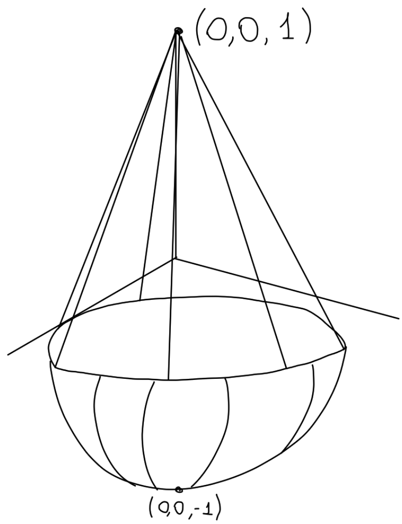
$$z(0,-1) = 1 \leftarrow \max$$

Задача (2 Найти max min)

$$u = x + y + 2z$$

на мн-ве $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant (z-1)^2, \quad (z \leqslant 1), \quad z \geqslant x^2 + y\}$

$x^2 + y^2 \leqslant (z-1)^2$ - конус



1)

$$\begin{cases} u'_x = 1 \quad \neq 0 \\ u'_y = 1 \quad \neq 0 \\ u'_z = 2 \quad \neq 0 \end{cases}$$

Внутри точек нет

2) на $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$

$\operatorname{rk}\big(2x \quad 2y \quad -2(z-1)\big) < 1$

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$ на пов-ти

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \qquad \in E \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathscr{L} = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - (z-1)^2) \\ \mathscr{L}'_x = 1 - 2x\lambda = 0 \\ \mathscr{L}'_y = 1 - 2y\lambda = 0 \\ \mathscr{L}'_z = 2 + 2\lambda(z-1) = 0 \end{cases}$$

$x = \dfrac{1}{2\lambda}$

$y = \dfrac{1}{2\lambda}$

$y - 1 = -\dfrac{1}{\lambda}$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$1 + 1 = 4 \quad \nexists$

3) на $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$

$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x, & 2y, & -1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rk} \Phi' = 1$

$\mathscr{L} = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - z - 1)$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = 1 - 2\lambda x = 0 & x = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \\ \mathscr{L}'_y = 1 - 2\lambda y = 0 & y = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \\ \mathscr{L}'_z = 2 + \lambda = 0 & \lambda = -2 \\ x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - 1 = z \qquad z = -\frac{14}{16} = -\frac{7}{8}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z-1) \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & -2(z-1) \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -2x + 4x(z-1) = 2x(-1 + 2z - 2) = 2x(2z-3) = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2y & -2(z-1) \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = 2y(2z-3) = 0$$

$x = 0$
1) $y = 0$
$z = -1$

1 - ур не вып.

2)$z = \frac{3}{2}$

Но $z \leqslant 1$ не входит в E

5)

$\mathscr{L} = x + y + 2z - \lambda_1(x^2 + y^2 - (z-1)^2) - \lambda_2(x^2 + y^2 - z - 1)$

Закончить дома

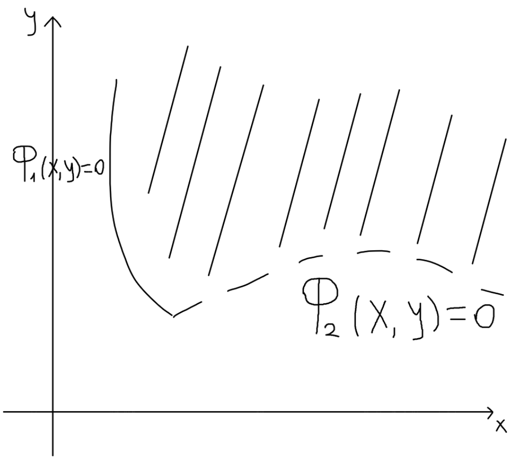
Дз 3657 б
3663 а
3668

18.10.19

Опр

$E \subset \mathbb{R}^2$ - не замк. и не огр $\qquad f$ - непр

$\exists \sup\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) \qquad \inf\limits_{(x,y)\in E} f(x,y)$



$\exists\ (x_n, y_n) \in E : f(x_n, y_n) \to \sup f$

$\exists \{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$

$x_{n_k} \to a, \quad y_{n_k} \to b$

$x_{n_k} \to a, \quad y_{n_k} \to \pm\infty$

$x_{n_k} \to +\infty, \quad y_{n_k} \to b$

$x_{n_k} \to \pm\infty, \quad y_{n_k} \to \pm\infty$

$x_{n_k} \to -\infty, \quad y_{n_k} \to b$

Если $(a,b) \in E$, то $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(a,b)$
т.е $f(a,b) = \sup = \max$

Если $(a,b) \notin E$, то $(a,b) \in \underset{\text{Граница}}{\text{Fr E}}$

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \sup f$$

$$\underset{\substack{x_{n_k} \to +\infty \\ y_{n_k} \to b}}{f(x_{n_k}, y_{n_k})} \to \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} f(x,y)$$

Подозр. точки

1. Внутри
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

2. На уч-ке $\Phi_1(x, y) = 0$
$$\operatorname{rk} \Phi'_1 < 1$$
$$\text{или } \mathscr{L} = f - \lambda \Phi_1$$

3. На участке $\Phi_2(x, y) = 0$
$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$$
$$\mathscr{L} = f(a, b) - \lambda \Phi_2(a, b)$$

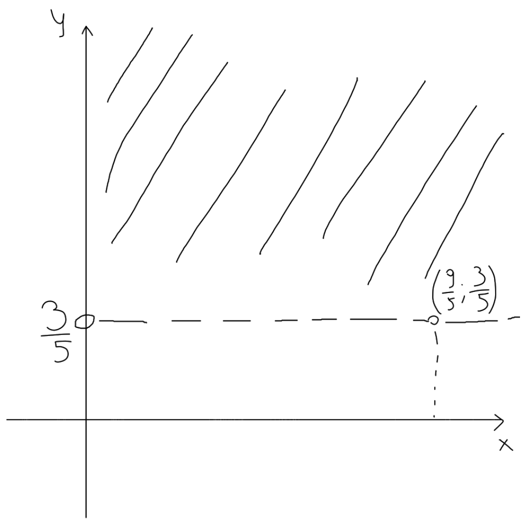
4. $$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to +\infty}} f(x, y)$$
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} f(x, y)$$
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y)$$

Если наиб - предел, то sup не достигается, иначе достигается

Задача (1)

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-x-2y}$$

$$\sup, \inf \text{ на множестве } E = \{(x, y) |\ x \geqslant 0,\ t > \frac{3}{5}\}$$



1) внутри

$$\begin{cases} f'_x = 2xe^{-x-2y} - (x^2+y^2)e^{-x-2y} = 0 \\ f'_y = 2ye^{-x-2y} - 2(x^2+y^2)e^{-x-2y} = 0 \end{cases}$$

$e^{-x-2y} \neq 0$

$$\begin{cases} 2x - (x^2+y^2) = 0 \\ 2y - 2(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x^2+y^2 \\ y = x^2+y^2 \end{cases}$$

$y = 2x$

$2x = x^2 + 4x^2$

$5x^2 - 2x = 0$

$x(5x-2) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \not\in E \text{ и не явл. границей}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \in E$$

2) на участке $x = 0, \quad y > \dfrac{3}{5}$

Просто подставим $x = 0$ (можно без ф. Лагранжа)

$f(0,y) = y^2e^{-2y}$

$f' = 2ye^{-2y} - 2y^2e^{-2y} = 0 \qquad e^{-2y} \neq 0$ делим

$2y - 2y^2 = 0$

$y(1-y) = 0$

$y = 0 \not\in E$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \in E$$

3) на участке границы $y = \dfrac{3}{5}, \ x \geqslant 0$

т.к непр на все плоск.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to \frac{3}{5}}} (x^2+y^2)e^{-x-2y} = (a^2 + \frac{9}{25})e^{-a-\frac{6}{5}} \qquad a \geqslant 0$$

$$((a^2 + \frac{9}{25})e^{-\frac{5}{9}}e^{-a})' = e^{-\frac{6}{5}}(2ae^{-a} - (a^2 + \frac{9}{25})e^{-a}) = 0$$

$$2a - a^2 - \frac{9}{25} = 0$$

$$25a^2 - 50a + 9 = 0$$

$$d = 2500 - 900 = 400^2$$

$$a_{1,2} = \frac{50 \pm 40}{50} = \frac{9}{5}, \quad \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{9}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

4) угловые точки

$(0, \dfrac{3}{5})$ на границе, не берем

Значения:

$$f(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = (\frac{4}{25} + \frac{16}{25})e^{-\frac{2}{5} - \frac{8}{5}} = \frac{4}{5}e^{-2} \approx 0,108$$

$$f(0,1) = (0+1)e^{-0-2} = e^{-2} \approx 0,135..$$

т.к. f -непр $\Rightarrow$ предел $=$ значению

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{5} \\ y \to \frac{3}{5}}} f(x,y) = (\frac{1}{25} = \frac{9}{25})e^{-\frac{1}{5} - \frac{6}{5}} = \frac{2}{5}e^{-\frac{7}{5}} \approx 0,099..$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{9}{5} \\ y \to \frac{3}{5}}} f(x,y) = (\frac{81}{25} + \frac{9}{25})e^{-\frac{9}{5} - \frac{6}{5}} = \frac{18}{5}e^{-3} \approx 0,1792$$

(т.к предел, то sup не достигается)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to \frac{3}{5}}} f(x,y) = (0 + \frac{9}{25})e^{-0-\frac{6}{5}} = \frac{9}{25}e^{-\frac{6}{5}} \approx 0,1084...$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} (x^2e^{-x}e^{-2y} + y^2e^{-x}e^{-2y}) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to +\infty}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to +\infty}} (x^2e^{-x}e^{-2y} + y^2e^{-2y}e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2e^{-x}e^{-2y} + y^2e^{-2y}e^{-x}) = 0$$

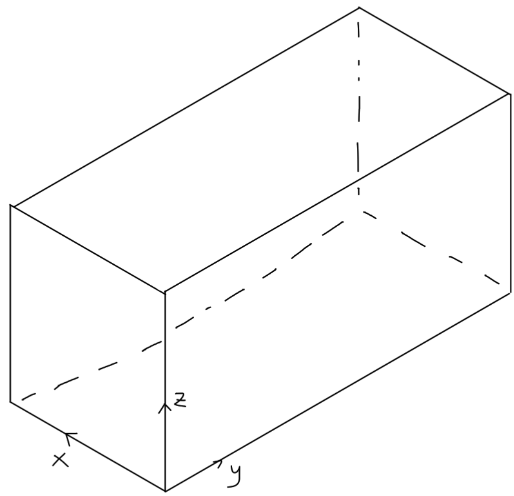
Наим - 0 - inf (не достиг., т.к. предел)

$$0 < (x^2 + y^2)e^{-x-2y} < \frac{18}{5}e^{-3}$$

$$(x,y) \in E$$

Задача (2)

При каких размерах открытая коробка постоянного объема имеет наим. поверхность?



1. постановка задачи

$S = xy + 2xz + 2yz \qquad x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0$

$V = xyz = const$

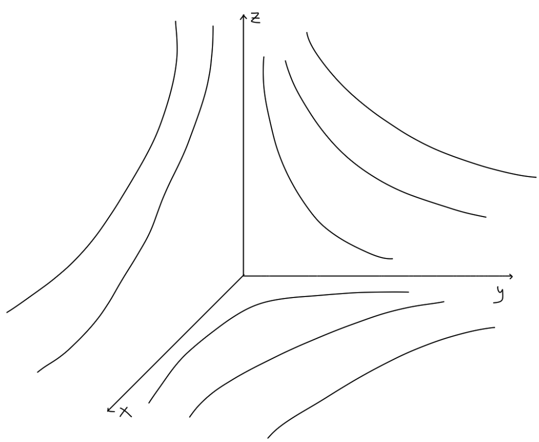
$\Phi = xyz - V = 0$

$\Phi' = \big(yz, \quad xz, \quad xy\big)$

$\operatorname{rk} \Phi' = 1$

$\mathscr{L} = xy + 2xz + 2yz - \lambda(xyz - V)$

На этой пов-ти



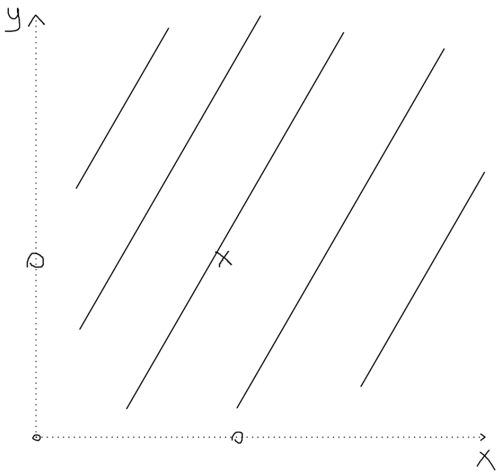
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0+ \\ z \to ?}} S = ?$$

2. постановка задачи

$z = \dfrac{V}{xy}$

$S = xy + 2x \cdot \dfrac{V}{xy} + 2y \cdot \dfrac{V}{xy} = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$

Наим значение S в обл. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$



1) Внутри

$\begin{cases} f'_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ f'_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$

$y = \dfrac{2V}{x^2}$

$x - \dfrac{2Vx^2}{4V^2} = 0$

$1 - \dfrac{x^3}{2V} = 0$

$x^3 = 2V$

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

$$y = \frac{2V}{(2V)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{2V}$$

$$S(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \sqrt[3]{4V^2} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} = \sqrt[3]{4V^2} + 2\sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}$$

2)

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0+}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to a}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to a>0\\ y\to +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a>0}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

Наим. знач $3\sqrt[3]{4V^2}$

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

$$y = \sqrt[3]{2V}$$

$$z = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}V}$$

2019-10-25

3 Неявные функции. Вычисл. их диф-лов, производных. Разложения неявных функций по ф-ле Тейлора

Напоминание

неявные ф-ии задаются системой ур-й

$F_i \in C^1(G)$

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0 \\ ... \\ F_n(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0 \end{cases} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y_1=f_1(x_1,...,x_m) \\ ... \\ y_n=f_n(x_1,...,x_m) \end{cases}$$

$m+n$ - перем. $\quad n-$ ур-ний

Теорема

Если сис-ма удовлетв-ся в точке $(x_1^0,...,x_m^0,y_1^0,...,y_n^0)$ и в этой точке

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & ... & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

То в окрестн. точки $(x_1^0,...,x_m^0,y_1^0,...,y_n^0)$ система однозн. разрешима и $f_k \in C^1(u(x_1^0,...,x_m^0))$

Если $F_i \in C^r(G) \qquad \Rightarrow f_k \in C^r(u(x_1^0,...,x_m^0))$
Вычислим диф-лы от каждого ур-я

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+...+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}dx_m+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+...+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}dy_n=0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1+...+\dfrac{\partial F_2}{\partial x_m}dx_m+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}dy_1+...+\dfrac{\partial F_2}{\partial y_n}dy_n=0 \\ ... \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}dx_1+...+\dfrac{\partial F_n}{\partial x_m}dx_m+\dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}dy_1+...+\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}dy_n=0 \end{cases}$$

Линейная однородная система относительно $dy_1,..,dy_n$
$\Rightarrow$ система однозначно разрешима (т.к.)

$$dy_1=\underbrace{...}_{\to\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}dx_1+\underbrace{...}_{\to\frac{\partial F_1}{\partial x_2}}dx_2+...+\underbrace{...}_{\to\frac{\partial F_1}{\partial x_m}}dx_m+$$

...

$$dy_n=...dx_1+...dx_2+...+...dx_m$$

Задача (1)

$F = z^3 - 3xyz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = z(x, y)$

$x_0 = 0, y_0 = 1 \Rightarrow z_0 = 1$

Хотим найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$... (В том числе в точке $(0, 1)$)

$dF = -3yzdx - 3xzdy + (3z^2 - 3xy)dz = 0$

$3z_0^2 - 3x_0y_0 = 3 \neq 0$

$$\Rightarrow dz = +\frac{yz}{z^2 - xy}dx + \frac{xz}{z^2 - xy}dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = +\frac{yz}{z^2 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = +\frac{xz}{z^2 - xy}$$

$x_0 = 0$

$y_0 \Rightarrow z_0 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0$$

hint: Если нужны только в конкрет. точке, то проще подставить точку в ур-е

$-3 \cdot 1 \cdot 1dx - 3 \cdot 0 \cdot 1dy + 3(1 - 0 \cdot 1)dz = 0$

$\Rightarrow dz = dx = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy$

$-yzdx - xzdy + (z^2 - xy)dz = 0$

$hint: \quad d(P \cdot Q) = P \cdot dQ + Q \cdot dP$

$d(-yz)dx + (-yz)d^2x + d(-xz)dy + (-xz)d^2y + d(z^2 - xy)dz + (z^2 - xy)d^2z = 0$

x, y - нез. перем. (т.к. z - функция) $\Rightarrow d^2x, d^2y = 0$

$-dy \cdot z \cdot dx - y \cdot xz \cdot dx - dx \cdot z \cdot dy - x \cdot dz \cdot dy + (2zdz - ydx - xdy)dz+$

$+(z^2 - xy)d^2z = 0$

d^2z через dx, dy

Если в конкретной точке: подставим точку $x = 0, y = 1, z = 1$

$dz = dx$ (в этой точке)

$-dy \cdot 1dx - 1 \cdot dx \cdot dx - dx \cdot 1 \cdot dy - 0 \cdot dx \cdot dy+$

$+(2 \cdot 1dx - 1 \cdot dx - 0 \cdot dy)dx + (1^2 - 0 \cdot 1)d^2z = 0$

$-dy \cdot dx - (dx)^2 - dxdy + 2 \cdot (dx)^2 - (dx)^2 + d^2z = 0$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\partial y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,1) = 0$$

Ф-ла Тейлора:

$$z(x,y) = z(0,1) + \frac{1}{1!}dz + \frac{1}{2!}d^2z + O(\|h\|^3) =$$

$$= 1 + dx + dxdy + O(\|h\|^3)$$

Задача (2)

$$\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v + \ln u \\ z = 2u + v \end{cases} \qquad x = 1, \quad y = 1 \Rightarrow u = 1, \quad v = 1, \quad z = 3$$

$u(x,y), \quad v(x,y), \quad z(x,y)$ - неявные функции

$$\begin{cases} x - u - \ln v = 0 \\ y - v + \ln u = 0 \\ z - 2u - v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & u & v & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{v} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{u} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{v} & 0 \\ \frac{1}{u} & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & -1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{uv} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ условие теоремы выполнено

Найдим диф-лы

$$\left.\begin{aligned} dx &= du + \tfrac{1}{v}dv \\ dy &= dv - \tfrac{1}{u}du \\ dz &= 2du + dv \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ находим } du, dv, dz \text{ через } dx, dy$$

В точке $x = 1, \quad y = 1 \quad u = 1, \quad v = 1, \quad z = 3$

$$\begin{cases} dx = du + dv \\ dy = dv - du \\ dz = 2du + dv \end{cases} \qquad \begin{cases} du = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy \\ dv = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy \\ dz = \frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}dy \end{cases}$$

Вторые диф-лы

$$d^2x = 0 = d^2u + (-\frac{1}{v^2})dv \cdot dv + \frac{1}{v}d^2v$$

$$d^2y = 0 = d^2v - (-\frac{1}{u^2})du \cdot du - \frac{1}{u}d^2u$$

$$d^2z = 2d^2u + d^2v$$

В точке:

$$\begin{cases} 0 = d^2u - \frac{1}{v^2}(dv)^2 + \frac{1}{v}d^2v = d^2u - (dv)^2 + d^2v \\ d^2v + (du)^2 - d^2u = 0 \\ d^2z = 2d^2u + d^2v \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = (dv)^2 = (\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy)^2 \\ d^2v - d^2u = -(du)^2 = -(\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy)^2 \\ d^2z = 2d^2u + d^2v \end{cases}$$

$$2d^2v = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}dxdy$$

$$2d^2u = 2\frac{1}{4}(dx)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}(dy)^2$$

$$d^2v = \frac{1}{2}dxdy$$

$$d^2u = \frac{1}{4}(dx)^2 + \frac{1}{4}(dy)^2$$

$$d^2z = \frac{1}{2}(dx)^2 + \frac{1}{2}(dy)^2 + \frac{1}{2}dxdy$$

Ф-ла Тейлора:

$$z = 3 + \frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}dy + \frac{1}{4}(dx)^2 + \frac{1}{4}(dy)^2 + \frac{1}{4}dxdy + O(\|h\|^3)$$

Задача (3)

$$(F)(\underset{1}{x},\ x \underset{2}{+} y,\ x + \underset{3}{y} + z))'_x = 0$$

$$z = z(x,y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ?$$

$$F'_1 \cdot (x)'_x + F'_2 \cdot (x+y)'_x + F'_3 \cdot (x+y+z)'_x = 0$$

$$F'_1 \cdot 1 + F'_2 \cdot 1 + F'_3 \cdot (1 + z'_x) = 0$$

$$F'_3 \cdot z'_x = -F'_1 - F'_2 - F'_3 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1$$

$$(F'_1(\underset{1}{x}, x \underset{2}{+} y, x + \underset{3}{y} + z))'_x = F''_{11} \cdot (x)'_x + F''_{12} \cdot (x+y)'_x + F''_{13} \cdot (x+y+z)'_x =$$

$$= F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x$$

$$(F'_3 \cdot z'_x)'_x = (F'_3)'_x \cdot z'_x + F'_x \cdot z''_{xx}$$

$$F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23} + F''_{23} \cdot z'_x + F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x +$$

$$+ (F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x) \cdot z'_x + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F''_{11} + 2F''_{12} + 2F''_{13} + F''_{22} + 2F''_{23} + F''_{33} + (2F''_{13} + 2F''_{23} + 3F''_{33}) \cdot z'_x + F''_{33} \cdot (z'_x)^2 + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F'_3 \cdot z''_{xx} = -F''_{11} - 2F''_{12} - ... - (2F''_{13} + 2F''_{23} + 2F''_{33}) \cdot (-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1) -$$

$$-F''_{33}(-\frac{F'_1+F'_2}{F'_3}-1)^2$$

z''_{xx} - из ур=я

$$z''_{xx}=-(\frac{F'_1+F'_2}{F'_3})'_x$$

Опр (Замена переменных в дифф. ур)

$$F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial z},...)=0$$

$z=z(x,y)$

новые переменные u,v $\quad w(u,v)$ - новая функция

$$\begin{cases} x=f(u,v,w)\\ y=g(u,v,w)\\ z=h(u,v,w)\end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

через $u,v,w,\ \frac{\partial w}{\partial u},\ \frac{\partial w}{\partial v}$

$$x'_u=f'_1\cdot(u)'_u+f'_2\cdot(v)'_u+f'_3(w)'_u=f'_1+f'_3\cdot w'_u$$

$$x'_v=f'_1\cdot(u)'_v+f'_2\cdot(v)'_v+f'_3\cdot w'_v=f'_2+f'_3w'_v$$

$$y'_u=g'_1+g'_3w'_u$$

$$y'_v=g'_2+g'_3w'_v$$

$$z(x(u,v),y(u,v))=h(u,v,w)$$

$$\begin{cases} z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u &=h'_1+h'_3w'_u\\ z'_xx'_v+z'_yy'_v &=h'_2+h'_3w'_v\end{cases}$$

$$z'_x=\Phi(y,v,w,w'_u,w'_v)$$

$$z'_y=\Psi(u,v,w,w'_u,w'_v)$$

Распишем как композицию

$$z'_x(x(u,v),y(u,v))=\Phi(...)$$

$$z''_{xx}x'_u+z''_{xy}y'_u=(\Phi(...))'_u$$

$$z''_{xx}\cdot x'_v+z''_{xy}y'_v=(\Phi(...))'_v$$

Аналогично

$$z'_x(x(u,v),y(u,v))=\Psi(...)$$

$$z''_{yx}x'_u+z''_{yy}y'_u=(\Psi(...))'_u$$

$$z''_{yx}\cdot x'_v+z''_{yy}y'_v=(\Psi(...))'_v$$

Задача (4)

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Ввести новые переменные

$\exists x$ - новая ф-я, y, z - новые нез. переменные

!Переобозначим, чтобы не запутаться

$$\begin{cases} x = w \qquad w(u,v) \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$x'_u = w'_u \qquad x'_v = w'_v$

$y'_u = 1 \qquad y'_v = 1$

$z(x(u,v), y(u,v)) = v$

$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$

$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$

$$\begin{cases} z'_x \cdot w'_u + z'_y \cdot 1 = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z'_y = -z'_x \cdot w'_x = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$(w-v) \cdot \frac{1}{w'_v} - u\frac{w'_u}{w'_v} = 0$$

$$w - v - u \cdot w'_u = 0$$

$$w'_u = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

Задача (5) Мы перепутали знак, осторожно !

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \qquad x \text{ - нез перем.} \quad y(x) \text{ - ф-я}$$

φ - новая нез перем $\quad r(\varphi)$ - новая ф-я

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r\sin'\varphi$$

$$y(x(\varphi)) = r\sin\varphi$$

$$y'_x(x(\varphi)) \cdot x'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x \cdot (r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi) = r'_\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x = \frac{r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\frac{r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$(r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) = (\cos\varphi - \sin\varphi) \cdot (r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi)$$

$$r'_\varphi \sin\varphi\cos\varphi + r'_\varphi \sin^2_\varphi - r\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$r'_\varphi \cos^2\varphi + r'_\varphi \cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi$$

$$r'_\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$r'_\varphi = -r$$

Задача (6)

$$\begin{cases} x = w'_u \\ y = u \cdot w'_u - w \end{cases}$$

x - старая нез. $y(x)$ - ф-я

u - новая $w(u)$ - ф-я

Найти y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx}

$$x'_u = w''_{uu}$$

$$y'_x \cdot x'_u = 1 \cdot w'_u + uw''_{uu} - w'_u$$

$$y'_x \cdot w''_{uu} = uw''_{uu}$$

$$y'_x = u$$

$$y'_x(x(u)) = u$$

$$y''_{xx} \cdot x'_u = 1$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{w''_u u}$$

$$y''_{xx}(x(u)) = \frac{1}{w''_{uu}}$$

$$y'''_{xxx} \cdot x'_u = -\frac{1}{(w''_{uu})^2} \cdot w'''_{uuu}$$

$$y'''_{xxx} = -\frac{w'''_{uuu}}{(w''_{uu})^3}$$

Задача (7 3502 - частный случай)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \qquad y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$

$z = w$ старая функция равна новой

$$x'_u = \frac{1\cdot(u^2+v^2) - 2u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_u = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_v = \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_u = \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_v = \frac{-(u^2+v^2)+2v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$z(x(u,v), y(u,v))$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = w'_u$$

Дз: 3388, 3395, 3404, 3502 закончить, 3433, 3471

2019-11-01

3.1 разбор дз от 2019-10-25

Задача (3404)

$$\begin{cases} u+v=x+y \\ \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y} \end{cases}$$

Найти $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$

$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$

$y\cdot\sin u=x\cdot\sin v$

$du+dv=dx+dy$

$\sin u\cdot dy+y\cdot\cos u\cdot du=\sin v\cdot dx+x\cos v\cdot dv$

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy \\ y\cos u\cdot du-x\cos v\cdot dv=\sin v\cdot dx-\sin u dy \end{cases}$$

Решаем по правилу Крамора

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y\cos u & -x\cos v \end{vmatrix}=-x\cos v-y\cos u$$

$$\Delta_{du}=\begin{vmatrix} dx+dy & 1 \\ \sin v\cdot dx-\sin u\cdot dy & -x\cos v \end{vmatrix}=-x\cos v\cdot dx-x\cdot\cos v\cdot dy-$$

$-\sin v\cdot dx+\sin u\cdot dy$

$$du=\frac{(-x\cos v+\sin v)dx+(-x\cos v+\sin u)dy}{-x\cos v-y\cos u}$$

$$\Delta_{dv}=\begin{vmatrix} 1 & dx+dy \\ y\cos u & \sin v\cdot dx-\sin u\cdot dy \end{vmatrix}=(\sin v-y\cos u)dx+(-\sin u-y\cos u)dy$$

$$dv=\frac{(\sin v-y\cos u)dx+(-\sin u-y\cos u)dy}{-x\cos v-y\cos u}$$

$d^2u+d^2v=d^2x+d^2y\equiv 0 \qquad$ (x, y - нез. перем)

$dy\cos u\cdot du-y\sin u\cdot du\cdot du+y\cos u\cdot d^2u-dx\cos v\cdot dv+x\sin v\cdot dv\cdot dv-x\cos v\cdot d^2v$

$=\cos v\cdot dv\cdot dx+\sin v\cdot d^2x-\cos u\cdot du\cdot dy-\sin u\cdot d^2y$

$$\begin{cases} d^2u+d^2v=0 \\ y\cos u\cdot d^2u-x\cos v\cdot d^2v=-\cos u\cdot dy\cdot du+y\sin u\cdot(du)^2+\cos v\cdot dx\cdot dv- \\ -x\sin v\cdot(dv)^2+\cos v\cdot dv\cdot dx-\cos u\cdot du\cdot dy \end{cases}$$

Подставить $du,\ dv$ через $dx,\ dy$

Задача (9)

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \qquad y'_x, y''_{xx} \text{ через новые } w, t$$

x - новая ф-я

$t = xy$ - новая нез. перем

$x = w$ - новая ф-я

$$y = \frac{t}{x} = \frac{t}{w}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = \frac{t}{w} \end{cases}$$

$$x'_t = w'_t$$

$$y(x(t)) = \frac{t}{w} = t \cdot w^{-1}$$

$$y'_x \cdot x'_t = w^{-1} + t \cdot (-1)w^{-2} \cdot w'_t = \frac{1}{w} - w^2$$

Подставим

$$y'_x \cdot w'_t = \frac{1}{w} - \frac{t \cdot w'_t}{w^2}$$

$$y'_x = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y'_x(x(t)) = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y''_{xx} \cdot x'_t = -\frac{1}{w^2 \cdot (w'_t)^2} \cdot (w \cdot w'_t)'_t - 1 \cdot w^{-2} - t \cdot (-2)w^{-3} \cdot w'_t =$$

$$= -\frac{w'_t w'_t + w \cdot w''_{tt}}{w^2 \cdot (w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2t \cdot w'}{w^3}$$

$$y''_{xx} \cdot w'_t = -\frac{1}{w^2} - \frac{w''_{tt}}{w(w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2tw'_t}{w^3}$$

$$y''_{xx} = -\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3}$$

$$-\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3} + \frac{2}{w^2 w'_t} - \frac{2t}{w^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-\frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-w''_{tt} + t \cdot (w'_t)^3 = 0$$

$$w'_t = p$$

$$-p'_t + tp^3 = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = t \cdot p^3$$

4 Замена переменных 2 метод

Опр

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} ...) = 0$$

x, y - нез. $\quad z(x, y)$ - ф-я

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \\ v = g(x, y, z) \\ w = h(x, y, z) \end{cases}$$

u, v - нез $\quad w(u, v)$ - ф-я

Вычисляем производные по x, y

$$f(x, y, z(x, y))$$

$$u'_x = f'_1 \cdot (x)'_x + f'_2 \cdot (y)'_x + f'_3 \cdot z'_x = f'_1 + f'_3 \cdot z'_x$$

$$v'_x = g'_1 \cdot (x)'_x + g'_2 \cdot (y)'_x + g'_3 \cdot z'_x = g'_1 + g'_3 \cdot z'_x$$

$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$

Берем пр-дную от левой части как от композиции

$$w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = h'_1 \cdot (x)'_x + h'_2 \cdot (y)'_x + h'_3 \cdot z'_x = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

В последнее уравнение подставляем u'_x и v'_x

$$w'_u \cdot (f'_1 + f'_3 \cdot z'_x) + w'_v \cdot (g'_1 + g'_3 \cdot z'_x) = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

Получили линейное уравнение относительно z'_x

$$z'_x = \Phi(x, y, z, w'_u, w'_v)$$

Для нахождения z'_y берем производную от уравнения по y

$$u = f(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, \underset{3}{z(x, y)})$$

$$u'_y = f'_1 \cdot (x)'_y + f'_2 \cdot (y)'_y + f'_3 \cdot z'_y = f'_2 + f'_3 \cdot z'_y$$

$$v = g(x, y, z(x, y))$$

$$v'_y = g'_1 \cdot (x)'_y + g'_2 \cdot (y)'_y + g'_3 \cdot z'_y$$

$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$

$$w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = h'_1 \cdot (x)'_y + h'_2 \cdot (y)'_y + h'_3 \cdot z'_y$$

Подставим и получим уравнение

$$w'_u \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w'_v \cdot (g'_2 + g'_3 \cdot z'_y) = h'_2 + h'_3 \cdot z'_y$$

лин. ур отн z'_y

$$z'_y = \psi(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, \underset{3}{z}, \underset{4}{w'_u}, \underset{5}{w'_v})$$

$$z = z(x,y) \qquad w'_u(u(x,y), v(x,y))$$
$$z''_{yy} = \psi'_1 \cdot (x)'_y + \psi'_2 \cdot (y)'_y + \psi'_3 \cdot z'_y + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_y + \psi'_5 \cdot (w'_v)'_y$$
$$(w'_u(u(x,y), v(x,y)))'_y = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y =$$

Подставим

$$= w''_{u^2} \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w''_{uv} \cdot (g'_3 + g'_3 \cdot z'_y)$$

Подставим z'_y

$$(w'_v(u(x,y), v(x,y)))'_y = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y$$

подставим u'_y, v'_y, z'_y

$$w''_{vu} = w''_{uv}$$

$$z''_{yx} = z''_{xy}$$
$$z''_{xy} = z''_{yx} = \psi'_1 \cdot (x)'_x + \psi'_2 \cdot (y)'_x + \psi'_3 \cdot z'_x + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_x + \psi'_5 \cdot (w_v)'_x$$

$$(w'_u(u(x,y), v(x,y)))'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x$$

Подставить z'_x

Замечание

Существует методичка на кафедре анализа по замене переменных

Задача (1)

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z \qquad u = x^2 + y^2 \qquad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad w = \ln z - (x+y)$$

Найти производные от всех ур-ний по x, потом от всех по y

$$w(u,v) = w(u(x,y), v(x,y))$$

$$u'_x = 2x$$
$$v'_x = -1 \cdot x^{-2}$$
$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = \frac{1}{z} \cdot z'_x - 1$$

$$w'_u \cdot 2x + w'_v \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{z} \cdot z'_x - 1 \qquad z \cdot (w'_u 2x + w'_v \frac{-1}{x^2}) + z = z'_x$$

Аналогично от всех по y

$$u'_y = 2y$$

$$v'_y = \frac{-1}{y^2}$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = \frac{1}{z} \cdot z'_y - 1$$

$$2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v = \frac{1}{z} \cdot z'_y - 1$$

$$z'_y = z \cdot (2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v) + z$$

Подставим производные в уравнение

$$y \cdot z \cdot (w'_v 2x + w'_v \frac{-1}{x^2}) + yz - xz(2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v) - xz = yz - xz$$

$$z(2xyw'_u - \frac{y}{x^2}w'_v - 2yxw'_u + \frac{x}{y^2}w'_v) = 0$$

$$z \cdot w'_v \cdot (-\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}) = 0$$

Получили три варианта

$z \equiv 0$ - реш. уравнения

$\underline{w'_v = 0}$ новый вид нашего уравнения

$\frac{-y^3 + x^3}{x^2y^2} = 0 \Leftrightarrow y = x$ особенность нашей замены, а не уравнения

$w'_v = 0 \Leftrightarrow w = \varphi(u)$ (произвольная функция) $\in C^1$

$$\ln z - (x = y) = \varphi(x^2 + y2)$$

$$\ln z = \varphi(x^2 + y^2) + x + y$$

$$z = e^{\varphi(x^2+y^2)+x+y}$$

Если заменить z на $-z$ уравнение удовл.

$z = c \cdot e^{\varphi(x^2+y^2)+x+y}$ на самом деле решение выглядит так

<u>Задача</u> (2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + \frac{\partial z}{\partial y})^3$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + z \\ w = z \quad \text{по умолч.} \end{cases}$$

$$w(u, v) = w(u(x, y), v(x, y))$$

$$u'_x = 1$$

$$v'_x = z'_x$$

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = z'_x$$

$$w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot z'_x = z'_x$$

$$z'_x = \frac{w'_u}{1 - w'_v}$$

Я писал у доски

Можно было решать и первым способом

$$x = u$$

$$y = v - z = v - w$$

$$z = w$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v - w \\ z = w \end{cases}$$

<u>Задача</u> (3512)

$$z(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}) = (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

$$\begin{cases} w = z^2 \\ \text{по умолч} \\ u = x \\ v = y \end{cases}$$

$$z^2 = (z(x, y))^2$$

$$u'_x = 1$$

$$v'_x = 0$$

$$(w)'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot u'_x = 2zz'_x$$

$$w'_u = 2zz'_x$$

$$z'_x = \frac{w'_u}{2z}$$

$$u'_y = 0$$

$$v'_y = 1$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = 2zz'_y$$

$$w'_v = 2zz'_y$$

$$z'_y = \frac{w'_v}{2z}$$

$$(z'_x)'_x = \frac{1}{2} \frac{(w'_u)'_x \cdot z - (z)'_x \cdot w'_u}{z^2}$$

$$(w'_u)'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu}$$

$$(z'_x)'_x = \frac{1}{2}\frac{w''_{uu} \cdot z - \frac{w'_u}{2z} \cdot w'_u}{z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2 w'_{uu} - (w'_u)^2}{2z^3}\right)$$

$$(z'_y)'_y = \frac{1}{2}\left(\frac{2z^2 w'_{vv} - (w'_v)^2}{2z^3}\right)$$

$$z\left(\frac{2z^2(w''_{uu} + w''_{vv}) - (w'_v)^2 - (w'_u)^2}{4z^3}\right) = \left(\frac{w'_u}{2z}\right)^2 + \left(\frac{w'_v}{2z}\right)^2$$

$$2z^2 w''_{uu} + 2z^2 w''_{vv} - 2(w'_u)^2 - 2(w'_v)^2 = 0$$

$$w(w''_{uu} + w''_{ww}) - (w'_u)^2 - (w'_v)^2 = 0$$

$$w(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$$

Задача (3507)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} u = x + z \\ v = y + z \\ w = z \end{cases}$$

$$u'_x = 1 + z'_x$$

$$v'_x = z'_x$$

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = z'_x$$

$$w'_u + w'_u z'_x + w'_v \cdot z'_x = z'_x$$

Линейное уравнение отн z'_x

$$z'_x = \frac{w'_u}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$u'_y = z'_y$$

$$v'_y = 1 + z'_y$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = z'_y$$

$$z'_y = \frac{w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$(w'_u)'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu}(1 + z'_x) + w''_{uv} \cdot z'_x$$

$$(w'_v)'_x = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{uu}(1 + z'_x) + w''_{vv} \cdot z'_x$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{w'_u}{1 - (w'_u + w'_v)}\right)'_x = \frac{(w'_u)'_x(1 - (w'_u + w'_v)) - w'_u \cdot ((w'_u)'_x + (w'_v)'_x)}{(1 - (w'_u + w'_v))^2}$$

$$\frac{(w'_u(1+z'_x)+w''_{vu}z'_x)(1-(w'_u+w'_v))+w'_u(w''_{uu}\cdot(1+z'_x)+z'_x(w''_{vu}+w''_{vv}))}{(1-(w'_u+w'_v)^2)} \overset{*}{=}$$

$$1+z'_x=\frac{w'_u+1-w'_u-w'_v}{1-(w'_u+w'_v)}=\frac{1-w'_v}{1-(w'_u+w'_v)}$$

$$\overset{*}{=} \frac{w''_{uu}(1-w'_v)+w''_{vu}\cdot w'_u+\frac{w'_u\cdot w''_{uu}w''_{vu}(1-w'_v)}{1-(w'_u+w'_v)}+\frac{w'_u}{1-(w'_u+w'_v)}(w''_{vu}+w''_{uu})}{}$$

Закончить дома

Задача (3525)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

Доказать, что не меняется при любом распределении ролей между перем.
Будем делать первым методом

y, z - нез. перем $\qquad x$ - ф-я

$$\begin{cases} x=w \\ y=u \\ z=v \end{cases}$$

u, v - нез. $\qquad w(u,v)$ - ф-я

$$x'_u=w'_u \qquad y'_u=1$$

$$x'_v=w'_v \qquad y'_v=0$$

$$z(x(u,v),y(u,v))=v$$

$$z'_x\cdot x'_u+z'_y\cdot y'_u=0$$

$$z'_x\cdot x'_v+z'_y\cdot y'_v=1$$

$$\begin{cases} z'_xw'_u+z'_y\cdot 1 &=0 \\ z'_x\cdot w'_v+z'_y\cdot 0 &=1 \end{cases}$$

$$z'_x=\frac{1}{w'_v}$$

$$z'_y=-z'_xw'_u=-\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z'_x(x(u,v),y(u,v))=\frac{1}{w'_v}$$

$$z''_{xx}\cdot x'_u+z''_{xy}\cdot y'_u=\left(\frac{1}{w'_v}\right)'_u=-\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx}\cdot x'_v+z''_{xy}\cdot y'_v=\left(\frac{1}{w'_v}\right)'_v=-\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx}w'_u+z''_{xy}\cdot 1=-\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} \cdot w'_v + z''_{xy} \cdot 0 = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^3}$$

$$z''_{xy} = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} - z''_{xx} \cdot w'_u = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} + \frac{w''_{vv} \cdot w'_u}{(w'_v)^3}$$

$$z'_y(x(u,v), y(u,v)) = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z''_{yx} \cdot x'_u + z''_{yy} = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_u$$

$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} \cdot y'_v = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_v$$

$$z''_{yx} \cdot w'_u + z''_{yy} \cdot 1 = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_u$$

$$z''_{yx} \cdot w'_v + z''_{yy} \cdot 0 = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_v$$