# Лекции по дифференциальным уравнениям (читает Звягинцева Т. Е.)

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вк

## Содержание

# 1. Введение

## 1.1. Литература.

Учебник Бибиков "Обыкновенные дифферинциальные уравнения"
Филиппов - задачи
"Методы интегрирования"
Каддинктон Ливенгсон "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
Яругии

## 1.2. Введение.

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
$x$ - неизвестная переменная
$y = y(x)$ - неизвестная функция лалалалалалала

**Опр.** Порядок уравнения - порядок старшей производной

Кроме того, $x = \frac{dx}{dt}$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$

## 1.3. Применение.

1) механика
2) электротехника
3) физика: $\dot{Q} = kQ$, $Q = Q_0 e^{kt}$
4) упр. движением
5) биология, экология

Пример из биологии:
x - хищник
y - жертва

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + cxy \\ \dot{y} = by - dxy \end{cases}$$

$$a, b, c, d > 0,\ \ x, y > 0$$

# 2. Дифферинциальные уравнения первого порядка

## 2.1. Введение.

(1) $\dot{x} = X(t, x)$
$X(t, x) \in C(G)$, G - обл, $G \subset \mathbb{R}^2$
Но чаще будем $\in C(D)$ $D \subset \mathbb{R}^2$

**Опр.** Решение (1) - функция $x = \varphi(t)$, $t \in < a, b >$: $\dot{\varphi}(t) \equiv X(t, \varphi(t))$ на <a,b>

1) $\forall t \in < a, b > (t, \varphi(t)) \in D$
2) $\varphi(t)$ - дифф на $< a, b >$
3) $\varphi(t)$ - непр. дифф. (X- непр на D)

**Опр.** (2) Задача Коши - задача нахождения решения (1) $x = \varphi(t): \ \varphi(t_0) = x_0$ $((t_0, x_0) \in D)$

Геометрический смысл уравнения первого порядка - уравнение 1 задаёт поле направлений на множестве G

**Опр.** График решения называется интегральной кривой

В каждой точке задано направление, которое совпадает с касательной в этой точке к интегральной кривой
$\dot{\varphi}(t)|_{t=t_0} = X(t_0, x_0)$

### 2.2. Метод изоклин.

**Опр.** Изоклина - это кривая, на которой поле направлений постоянно

Уравнение изоклин $X(t, x) = c$, где $c = const$

**Пример.**
$\dot{x} = -\frac{t}{x}$ $(x = \varphi(t))$
$-\frac{t}{x} = tg\alpha$
$x = -\frac{1}{c}t$, $c \neq 0$
$c = 1$ $(\alpha = \frac{\pi}{4})$ $x = -t$ - уравнение изоклин
$c = -1$ $(\alpha = -\frac{\pi}{4})$ $x = t$
Решение задачи Коши (1, 1) - это $x = \sqrt{2 - t^2}$
Решение задачи Коши (1,-1) - это $x = -\sqrt{2 - t^2}$

### 2.3. Теорема Пеано.
(1) $\dot{x} = X(t, x)$, $X \in C(D)$
$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant ... \leqslant |x - x_0| \leqslant b\}$
(2) $(t_0, x_0)$
По теореме Вейерштрасса $\exists M: \ |X(t, x)| \leqslant M \ \forall (t, x) \in D$
$h = min(a, \frac{b}{M})$

**Теорема (Пеано).**
$\exists$ реш. задачи К. (1), (2) $x = \varphi(t)$ опр-е на $[t_0 - h, \ t_0 + h]$ - отрезок Пеано

**Опр.** $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in [c, d]$

1) $\varphi_k(t)$ - равномерно ограничена на $[c, d]$, если $\exists N: \ |\varphi_k(t)| \leqslant N \ \forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [c, d]$

2) $\varphi_k(t)$ - равностепенно непр на [c,d], если $\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [c, d]$ $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \mathcal{E} \ \forall k \in \mathbb{N}$

**Лемма (Арцелло - Асколи).**
$\varphi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, равномерно огр. и равностепенно непр на $[c, d] \Rightarrow \exists$ подпосл $\varphi_{kj}(t)$ : $\varphi_{kj}(t) \underset{j \Rightarrow +\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$