

# Билеты по мат. анализу, 2 сем

(преподаватель Кононова А. А.)  
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах  
в [ВКонтакте](#)

## Содержание

1	Интегральные суммы Римана. Интегрируемость по Риману.	5
2	Интегрируемость по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.	7
3	Суммы Дарбу, их свойства (связь с суммами Римана, поведение при измельчении).	8
4	Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Критерий Римана (б/д).	9
5	Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции.	10
6	Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.	11
7	Интегрируемость суммы, произведения, модуля.	12
8	Интегрируемость функции и ее сужений.	13
9	Свойства интеграла Римана (линейность; аддитивность; свойства, связанные с неравенствами).	14
10	Первая теорема о среднем. Следствие для непрерывных функций.	16
11	Формула Ньютона-Лейбница. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.	17
12	Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Применение: формула Валлиса.	20
13	Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.	22
14	Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Вторая теорема о среднем.	23

15 Замена переменной в определенном интеграле (две формулировки, доказательство одной).	24
16 Признаки сравнения для положительных рядов.	26
17 Признаки Даламбера и Коши для положительных рядов.	27
18 Абсолютная и условная сходимость рядов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.	29
19 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$	30
20 Перестановка абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана (б/д).	31
21 Асимптотика частичных сумм расходящегося ряда (случай гармонического ряда). Постоянная Эйлера.	33
22 Несобственные интегралы. Примеры. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов.	34
23 Свойства несобственных интегралов (линейность, аддитивность, монотонность, формула Ньютона-Лейбница).	36
24 Свойства несобственных интегралов (интегрирование по частям, замена переменной).	38
25 Интегральный признак Коши сходимости несобственных интегралов и рядов.	39
26 Признаки сравнения для несобственных интегралов.	40
27 Абсолютная и условная сходимость интегралов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.	42
28 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$	43
29 Признаки Дирихле и Абеля для несобственных интегралов (док-во одного из них).	44
30 Признаки Дирихле и Абеля для рядов (док-во одного из них).	45
31 Применение интеграла Римана для вычисления площадей и объемов. Примеры.	46

32 Путь. Длина пути. Спрямолинейный путь. Аддитивность длины пути.	49
33 Кривая. Длина кривой.	52
34 Теорема о вычислении длины гладкого пути.	53
35 Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Примеры.	55
36 Критерий Коши для равномерной сходимости функциональной последовательности.	57
37 Сохранение непрерывности при равномерном предельном переходе. Теорема Дини (б/д). Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.	58
38 Дифференцируемость и равномерная сходимость.	60
39 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.	61
40 Степенной ряд (в $\mathbb{C}$ ). Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.	62
41 Теорема о комплексной дифференцируемости степенного ряда. Следствие: единственность разложения в степенной ряд.	64
42 Ряд Тейлора. Примеры $(e^x, \sin x, \ln(1+x), e^{-\frac{1}{x^2}})$ .	65
43 Биномиальный ряд $(1+x)^\alpha$	66
44 Признак Абеля-Дирихле для равномерной сходимости функциональных рядов (доказательство одного).	67
45 Теорема Абеля. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .	68
46 Интеграл комплекснозначной функции. Скалярное произведение и норма в пространстве $C(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ , в пространстве $R([a; b])$ . Ортогональность. Пример: $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ .	69
47 Свойства скалярного произведения и нормы (теорема Пифагора, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника).	70

48 Коэффициенты Фурье функции по ортогональной системе $e_k$ . Ряд Фурье. Пример: тригонометрический полином.	71
49 Свойства коэффициентов Фурье (коэффициенты Фурье сдвига, производной).	72
50 Неравенство Бесселя. Лемма Римана-Лебега (light).	73
51 Вычисление интеграла Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ .	74
52 Ядра Дирихле, их свойства. Выражение частичных сумм ряда Фурье через ядра Дирихле.	75
53 Свертка. Простейшие свойства. Свертка с тригонометрическими и алгебраическими полиномами.	76
54 Принцип локализации Римана.	77
55 Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье для локально-Гельдеровой функции.	78
56 Ядра Фейера, их свойства. Связь с $\sigma_N(f)$ .	79
57 Аппроксимативная единица. Определение, примеры. Теорема о равномерной сходимости свертки с аппроксимативной единицей.	80
58 Теорема Фейера. Теорема Вейерштрасса.	81
59 Среднеквадратичное приближение функций, интегрируемых по Риману, тригонометрическими полиномами.	82
60 Равенство Парсеваля.	83
61 Замечания из конспектов, которые не вошли в билеты	84
61.1 Множества меры ноль . . . . .	84
61.2 Критерий Лебега интегрируемости функции . . . . .	84

## 1 Интегральные суммы Римана. Интегрируемость по Риману.

### Опр

$\tau$ -разбиение на  $[a; b]$ :

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

### Опр

Мелкость разбиения  $\tau$ :

$$\lambda(\tau) = \max_{k=0 \dots n-1} \Delta_k = x_{k+1} - x_k$$

### Опр

Оснащение разбиения  $\tau$ :

$$\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

### Опр

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда сумма Римана:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta_k$$

### Опр

Интегралом Римана функции  $f$  по отрезку  $[a, b]$  называется  $I \in \mathbb{R}$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$

то есть неформально

$$\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) = I$$

### Опр

Будем говорить, что  $f$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$ , если  $\exists I$  - интеграл функции  $f$  по Риману на  $[a, b]$ . И записывать это как

$$f \in R[a, b], \quad I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

### Пример

$$f(x) = C$$

### Решение

$$\forall \tau \forall \xi \quad S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = C(b-a)$$

$$I = C(b-a) = \int_a^b C dx$$

### Пример

Функция Дирихле  $\mathcal{D}(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$  на отрезке  $[0, 1]$

### Опр

$$A \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{X}_A = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

### Решение

Пусть  $\tau$  - произвольное разбиение.

$\xi^* = \{\xi_k^*\} : \xi_k^* \in \mathbb{Q} \cap [x_k, x_{k+1}]$  - рациональное оснащение

$\tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_k\} : \tilde{\xi}_k \in [x_k, x_{k+1}] \setminus \mathbb{Q}$  - иррациональное оснащение

$$S(f, \tau, \xi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_k^*) \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = b-a$$

$$S(f, \tau, \tilde{\xi}) = 0$$

$\mathcal{D} \notin R[0, 1]$ . Док-во от противного, пусть это не так, тогда

$$\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$

Возьмём  $\xi^*$  и  $\tilde{\xi}$ :

$$1 = |S(f, \tau, \xi^*) - S(f, \tau, \tilde{\xi})| \leq |S(f, \tau, \xi^*) - I| + |S(f, \tau, \tilde{\xi}) - I| \leq 2\varepsilon$$

### Пример

$$f(x) = \mathcal{X}_0, \quad f \in R[-1, 1]$$

### Решение

Покажем, что  $I = 0$ .  $\xi_i$  на интервалах  $\delta_i$  может *max* два раза попадать в 0.

Пусть это будет при  $k, k+1$ . Тогда:

$$\begin{aligned} S(f, \tau, \xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i = \sum_{i=0, i \neq k, k+1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i + f(\xi_k) \Delta_k + f(\xi_{k+1}) \Delta_{k+1} = \\ &= f(\xi_k) \Delta_k + f(\xi_{k+1}) \Delta_{k+1} \leq \Delta_k + \Delta_{k+1} < 2\lambda(\tau) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 2 Интегрируемость по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.

Определение интегрируемости см. в первом билете.

### Утв

Если  $f \in R[a, b]$ , то  $f$  - ограничена на  $[a, b]$ .

### Док-во (от противного)

Пусть  $\sup_{[a,b]} f(x) = +\infty$ .

Для  $\mathcal{E} = 1 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \mathcal{E}$ .

Зафиксируем  $\tau^* : \lambda(\tau^*) < \delta$ :

$$\text{Так как } \sup_{[a,b]} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists k : \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = +\infty.$$

"отпустим  $\xi_k^*$ ".  $S(f, \tau, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i = \sum_{i \neq k}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i + f(\xi_k) \Delta_k$  (неограничена, выберем  $\xi_k$  так чтобы)  $> \mathcal{E} + I$ , Противоречие.

### 3 Суммы Дарбу, их свойства (связь с суммами Римана, поведение при измельчении).

#### Опр

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau$ -разбиение.

$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$ ,  $m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$ , тогда:

$S^*(f, \tau) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k$  - верхняя сумма Дарбу

$S_*(f, \tau) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k$  - нижняя сумма Дарбу

#### Опр

$\tau'$  называется измельчением  $\tau$  ( $\tau' \prec \tau$ ), если  $\tau \subset \tau'$

#### Свойства

1.  $\forall \xi, f, \tau$  - зафикс  $\Rightarrow S_*(f, \tau) \leq S(f, \tau, \xi) \leq S^*(f, \tau)$
2. (а)  $S^*(f, \tau) = \sup_{\xi} S(f, \tau, \xi)$ , (б)  $S_*(f, \tau) = \inf_{\xi} S(f, \tau, \xi)$
3.  $S^*(f, \tau') \leq S^*(f, \tau)$ ,  $S_*(f, \tau') \geq S_*(f, \tau)$
4.  $\forall \tau_1, \tau_2 : S_*(\tau_1) \leq S^*(\tau_2)$

#### Док-во

1. Очевидно из определения
2. Докажем пункт (а). Нужно доказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi^* S(f, \tau, \xi^*) > S^*(f, \tau) - \varepsilon$$

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \Rightarrow \exists \xi_k^* : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$S(f, \tau, \xi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta_k > \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = S^*(f, \tau) - \varepsilon$$

3. Пусть  $\tau : x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , добавим  $x'$ :

$$\tau' : x_0 < x_1 < \dots < x_k < x' < x_{k+1} < \dots < x_n,$$

$$\begin{aligned} S^*(f, \tau) - S^*(f, \tau') &= \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k) - \sup_{[x_k, x']} f(x)(x' - x_k) - \sup_{[x', x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x') \geq \\ &\geq \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k - x' + x_k - x_{k+1} + x') = 0, \Rightarrow S^*(f, \tau') \leq S^*(f, \tau) \end{aligned}$$

4. Пусть  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$  (произведение разбиений в обозначениях Кононовой), тогда  $\tau \prec \tau_1, \tau_2$ , значит

$$S_*(f, \tau_1) \leq S_*(f, \tau) \leq S^*(f, \tau) \leq S^*(f, \tau_2)$$



#### 4 Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Критерий Римана (б/д).

##### Теорема (критерий Дарбу)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon$$

##### Док-во

( $\Rightarrow$ ) Необходимость.  $f \in R[a, b] \Rightarrow I \in \mathbb{R}$  :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq S_*(f, \tau) \leq S(f, \tau, \xi) \leq S^*(f, \tau) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$0 \leq S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ) Достаточность.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon$$

$$I^* := \inf_{\tau} S^*(f, \tau), \quad I_* := \sup_{\tau} S_*(f, \tau)$$

$$0 \leq I^* - I_* \leq S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon \Rightarrow I^* = I_* = I$$

$$\forall \xi S_*(f, \tau) \leq S(f, \tau, \xi) \leq S^*(f, \tau) \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$

##### Теорема (критерий Римана)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau : S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon$$

## 5 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции.

### Опр

Колебание  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  на  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$ ,

$$d_k = [x_k, x_{k+1}], S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k$$

### Теорема (критерий Дарбу, другая форма)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0, \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k < \mathcal{E}$$

$$(\text{неформально } \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k = 0)$$

### Следствие (1)

$$C[a, b] \subset R[a, b]$$

### Док-во

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$  равн. непр. на  $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E \text{ справедливо } |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \omega(f, d_k) < \mathcal{E}, \text{ рассмотрим}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k < \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \mathcal{E}(b-a) \tilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \text{ по критерию Дарбу } f \in R[a, b]$$

### Следствие (2)

$f$ -ограничена и монотонна на  $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$

### Док-во

$$(f \nearrow) \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{f(b) - f(a)}, \text{ пусть } \lambda(\tau) < \delta$$

$$\sum_{k=0}^{k-1} \omega(f, d_k) \Delta_k \leq \delta \sum_{k=0}^{k-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \delta(f(b) - f(a)) = \mathcal{E}$$

## 6 Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.

### Опр

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - кусочно-непрерывная функция, если:

$f \in C([a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\})$  и  $t_1, \dots, t_n$  - точки разрыва I рода

### Следствие (3)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - кусочно-непрерывная  $\Rightarrow f \in R[a, b]$

### Док-во

Пусть  $A = \{k \in \mathbb{N} | \exists j : t_j \in d_k\}$ ,  $C = \omega(f, [a, b]) < \infty$

Если  $k \notin A \Rightarrow f$  - непр. на  $d_k \Rightarrow$  р/н  $\Rightarrow \exists \delta_k$  из р/н. Причем  $|A| \leq 2n$ , потому что  $t_j$  могут попасть в макс два соседних промежутка.

Возьмём  $\delta = \min_{k \notin A} \delta_k$ , если  $\tau : \lambda(\tau) < \delta$ , то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k = \sum_{k \in A} \omega(f, d_k) \Delta_k + \sum_{k \notin A} \omega(f, d_k) \Delta_k \leq 2nC\lambda_k + \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k <$$

$$< 2nC\lambda(\tau) + \mathcal{E}(b-a) < (\text{пусть } \tilde{\delta} = \min(\delta, \frac{\mathcal{E}}{2nC}), \text{ тогда } \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta)$$

$$< \mathcal{E} + \mathcal{E}(b-a) = \mathcal{E}(1+b-a)$$

## 7 Интегрируемость суммы, произведения, модуля.

### Свойство (1)

$$f, g \in R[a, b] \Rightarrow f + g \in R[a, b]$$

### Док-во

$$\begin{aligned} \omega(f + g, E) &= \sup_E (f + g) - \inf_E (f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g - \inf_E f - \inf_E g \\ &\leq \omega(f, E) + \omega(g, E) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow_{\text{кр. Дарбу}} f + g \in R[a, b] \end{aligned}$$

### Свойство (2)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow f^2 \in R[a, b]$$

### Док-во

$$f - \text{ограничено} \Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \omega(f^2, E) &= \sup_E (f^2) - \inf_E (f^2) = \sup_{x_1, x_2 \in E} (f^2(x_2) - f^2(x_1)) = \\ &= \sup_{x_1, x_2 \in E} (f(x_2) - f(x_1))(f(x_2) + f(x_1)) \leq 2M\omega(f, E) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

### Свойство (3)

$$f, g \in R[a, b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$$

### Док-во

$$\text{Так как } f \in R[a, b] \Rightarrow -f \in R[a, b]$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \in R[a, b]$$

### Свойство (4)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b]$$

### Док-во

$$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leq |f(x_2) - f(x_1)| \xrightarrow{\text{sup}} \omega(|f|, E) \leq \omega(f, E) \rightarrow 0 \Rightarrow |f| \in R[a, b]$$

## 8 Интегрируемость функции и ее сужений.

### Свойство (5)

$$f \in R[a, b], [c, d] \subset [a, b] \Rightarrow f \in R[c, d]$$

### Док-во

$$f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 :$$

для всех  $\tau'$  на  $[c, d]$  расширенных до  $\tau$  на  $[a, b]$  :

$$\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau'} \omega(f, d_k) \Delta_k \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau} \omega(f, d_k) \Delta_k \Rightarrow < \mathcal{E}$$

### Свойство (6)

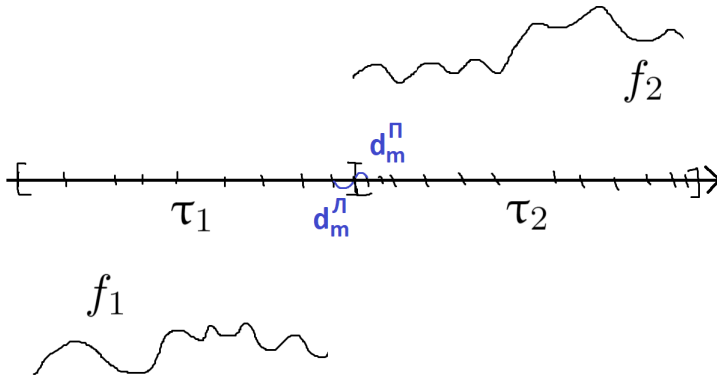
$$a < c < b \Rightarrow R[a, c] \cup R[c, b] \subset R[a, b]$$

### Док-во

$$\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_1 > 0 \text{ на } [a, c] : \lambda(\tau_1) < \delta_1 \Rightarrow S^*(f_1, \tau_1) - S_*(f_1, \tau_1) < \mathcal{E}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ на } [c, b] : \lambda(\tau_2) < \delta_2 \Rightarrow S^*(f_2, \tau_2) - S_*(f_2, \tau_2) < \mathcal{E}$$

$$\text{Пусть } \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \tau = \tau_1 \cup \tau_2, \lambda(\tau_1) < \delta, \lambda(\tau_2) < \delta$$



Мог произойти разрыв, но  $|f| \leq M \Rightarrow \omega(f, [a, b]) < W$

$$\begin{aligned} \sum \omega(f, d_k) \Delta_k &= S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) \leq S^*(f, \tau_1) - S_*(f, \tau_1) + S^*(f, \tau_2) - S_*(f, \tau_2) + \\ &+ d_m^I \Delta_m^I + d_m^{II} \Delta_m^{II} \leq (d_m = d_m^I \cup d_m^{II}, \tilde{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\mathcal{E}}{W})) 2\mathcal{E} + W\tilde{\delta} < 3\mathcal{E} \end{aligned}$$

## 9 Свойства интеграла Римана (линейность; аддитивность; свойства, связанные с неравенствами).

### Опр

Если  $a < b$ , то  $\int_b^a f = -\int_a^b f$  и  $\int_a^a = 0$

### Свойство (1, линейность)

$$\forall f, g \in R[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_b^a (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_b^a f + \beta \int_b^a g$$

### Док-во

Знаем, что  $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$ ,

$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$  (очевидно из определения сумм Римана)

### Свойство (2, аддитивность)

$$\forall f \in R[a, b], a < c < b \Rightarrow \int_b^a f = \int_c^a f + \int_b^c f$$

### Док-во

Очевидно (аналогично прошлому)

### Свойство (3)

$$\forall f \in R[a, b], a < b, f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

### Док-во

Очевидно из определения суммы Римана

### Свойство (4)

$$\forall f, g \in R[a, b], g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b], a < b \Rightarrow \int_b^a g \leq \int_b^a f$$

### Док-во

Очевидно, если взять одно разбиение и оснащение

**Свойство (5)**

$$\forall f \in R[a, b], m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b], a < b \Rightarrow m(b-a) \leq \int_b^a f \leq M(b-a)$$

**Док-во**

С использованием предыдущего свойства взять интеграл

**Свойство (6)**

$$f \in R[a, b], m = \inf_{[a, b]} f, M = \sup_{[a, b]} f \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_b^a f = \mu(b-a)$$

**Док-во**

$$\mu = \frac{\int_b^a f}{b-a} \in [m, M] \text{ (по предыдущему неравенству)}$$

**Свойство (7)**

$$f \in C[a, b], \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_b^a f = f(\xi)(b-a)$$

**Док-во**

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя предыдущее свойство

**Свойство (8)**

$$f \in R[a, b], \Rightarrow \left| \int_b^a f \right| \leq \int_b^a |f|$$

**Док-во**

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_b^a |f| \leq \int_b^a f \leq \int_b^a |f| \Rightarrow \left| \int_b^a f \right| \leq \int_b^a |f|$$

## 10 Первая теорема о среднем. Следствие для непрерывных функций.

### Теорема

$$f, g \in R[a, b], \quad g \geq 0, \quad m \leq f \leq M$$

$$\forall x \in [a, b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_b^a fg = \mu \int_b^a g$$

### Док-во

$$mg \leq fg \leq Mg \Rightarrow m \int_b^a g \leq \int_b^a fg \leq M \int_b^a g$$

$$\frac{m \int_b^a g}{\int_b^a g} \leq \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leq \frac{M \int_b^a g}{\int_b^a g}$$

$$m \leq \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leq M$$

а)  $\int_b^a g = 0$ , тогда  $\mu$  - любое.

б)  $\int_b^a g \neq 0 \Rightarrow \mu := \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \in [m, M]$

### Следствие

$$\text{Если } f \in C[a, b], \quad g \in R[a, b], \quad g \geq 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_b^a fg = f(\xi) \int_b^a g$$

### Док-во

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя неравенство из последнего доказательства для  $m = \inf_{[a,b]} f$ ,  $M = \sup_{[a,b]} f$



## 11 Формула Ньютона-Лейбница. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.

### Опр

$$E \subset \mathbb{R}, \quad F : E \rightarrow \mathbb{R} \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда  $F$  называется первообразной  $f$ , если  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in E$

### УТВ

$F_1, F_2$  - первообразные  $f$  на  $E$ , тогда:

$$F(x_1) - F(x_2) = \text{const} \quad (\text{т. Лагранжа})$$

### Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in R[a, b]$ ,  $F$  - первообразная  $f$ , тогда:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

### Док-во

$\forall \tau$  на  $[a, b]$  по теореме Лагранжа:

$$\exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] : F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta_k$$

Так как  $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$   
Возьмём оснащение  $\xi$  из теоремы Лагранжа:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

### Опр

$E \subset \mathbb{R}$ ,  $E$  - невырожденный промежуток,

$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \alpha, \beta \in E : \alpha < \beta \quad f \in R[\alpha, \beta] \quad \text{для } a \in E \text{ (фиксированного)}$

$F(x) := \int_a^x f(t)dt$  - интеграл с переменным верхним пределом

$$F : E \rightarrow \mathbb{R}$$

### Теорема

$f \in R[a, b]$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , тогда:

1.  $F \in C[a, b]$
2. (теорема Барроу) Если  $f$  - непр. в т.  $x_0 \in [a, b]$ , то  $F'(x_0) = f(x_0)$

### Док-во

$x \in [a, b]$ ,  $h : x + h \in [a, b]$

$$1) F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_a^{x+h} f + \int_x^a f = \int_x^{x+h} f$$

Так как  $f \in R[a, b] \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |f| < M$ , значит:

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} f \right| \leq \int_x^{x+h} |f| \leq M|h|$$

Кроме того,  $\forall \mathcal{E} > 0$ ,  $\delta = \frac{\mathcal{E}}{M}$  если  $|h| < \delta \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| < \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Рассмотрим } & \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} dt \right| = \\ & = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} \mathcal{E} dt = \mathcal{E} \\ & (\text{при } |h| < \delta \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \mathcal{E}) \end{aligned}$$

### Следствие

$$F \in C[a, b] \Rightarrow \exists F : F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$$

### Пример

$$f(x) = |x|, F(x) = \int_0^x |t|dt = \begin{cases} \frac{t^2}{2} \Big|_0^x, & x \geq 0 \\ -\frac{t^2}{2} \Big|_0^x, & x < 0 \end{cases}$$

### Пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$F(x) = |x| \forall x \neq 0$ , видно что неверно для первообразной, но:

### Опр

F - "почти первообразная", если:

1.  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$
2.  $F \in C[a, b]$

## Пример

Пример для "почти первообразной". Найти  $\int_0^2 f(x)$ , для  $f(x) = \max(1, x)$

$$F(t) = ? \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ \frac{t^2}{2}, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

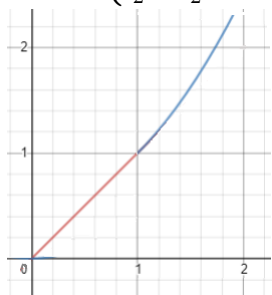


Попробуем использовать Н-Л:  $F(t)|_0^2 = F(2) - F(0) = 2$

Неверно, потому что это не первообразная и даже не "почти первообразная".

Поправим F(x):

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, & t \in [1, 2] \end{cases}$$



Это уже "почти первообразная" можно применять Н-Л.

## 12 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Применение: формула Валлиса.

### Теорема

$F, G$  - первообразные  $f, g \in R[a, b]$  на  $[a, b]$ , тогда  $\int_a^b Fg = FG|_a^b - \int_a^b fG$

$$\left( \int_a^b uv' = uv|_a^b - \int_a^b u'v \right)$$

### Док-во

$$(FG)' = fG + Fg, \text{ по ф-ле Н-Л: } \int_a^b (FG)' = FG|_a^b = \int_a^b fG + |_a^b Fg$$

### Пример

Если  $I_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$ , то:

$$I_m = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m - \text{четное} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m - \text{нечетное} \end{cases}$$

### Док-во

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{m-1} x dx = \\ &= -\cos x \sin^{m-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (m-1) \sin^{m-2} x dx = \\ &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{m-2} x - \sin^m x) dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m) \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2}, \quad I_{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

## Теорема (Формула Валлиса)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 * 2 * 4 * 4 * \dots * (2n)(2n)}{1 * 3 * 3 * 5 * 5 \dots (2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \pi)$$

### Док-во

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ верно } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$A_n = \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} = B_n$$

$$\begin{aligned} B_n - A_n &= \frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} - \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \\ &= \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \left( \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n-1)!!} \right) \frac{1}{(2n+1)(2n)} = \\ &= A_n \frac{1}{2n} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

### 13 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

#### Теорема

$$f \in C^{m+1}([a, b]) \Rightarrow f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + R_n(b, a),$$

$$\text{где } R_n(b, a) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n dt$$

#### Замечание

$$f \in C^{m+1}([a, b]) \Rightarrow f^{(n+1)} \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] :$$

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b (b-t)^n dt = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

#### Док-во (по индукции)

1)  $n = 0$

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt - \text{формула Н-Л}$$

2) Инд. переход. Пусть для  $n-1$  - доказано,  $f \in C^{m-1}[a, b] \subset C^m[a, b]$ , по инд. предположению:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + R_{n-1}(* )$$

$$R_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(t) (b-t)^{n-1} dt = \left[ \begin{array}{l} u = f^{(n)}(t) \\ dv = (b-t)^{n-1} dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left( -f^{(n)}(t) \frac{(b-t)^n}{n} \Big|_a^b + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{(n)!} (f^{(n)}(a) (b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n dt) - \text{подставить в } (*)$$

## 14 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Вторая теорема о среднем.

Формулу интегрирования по частям см. в [12 билете](#).

### Теорема (Бонне или вторая теорема о среднем)

$f \in C[a, b]$ ,  $g \in C^1[a, b]$ ,  $g$  — монотонна

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f$$

### Док-во

$$(\text{для } g \nearrow) F(x) := \int_a^x f \Rightarrow F' = f$$

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg|_a^b - \int_a^b Fg' = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b Fg' =$$

$$(\text{т.к. } g \nearrow g \geq 0 \Rightarrow \text{по т. о среднем } \exists \xi \in [a, b] :)$$

$$= F(b)g(b) - g(a)F(a) - F(\xi) \int_a^b g' = g(b)(F(b) - F(\xi)) + g(a)(F(\xi) - F(a))$$

## 15 Замена переменной в определенном интеграле (две формулировки, доказательство одной).

### Теорема

$$\varphi \in C^1[\alpha, \beta], \quad f \in C(\varphi([\alpha, \beta])), \quad \text{тогда} \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$$

### Док-во

$$f \in C(\varphi([\alpha, \beta])) \Rightarrow \exists F : F' = f$$

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \varphi' = (f \circ \varphi) \varphi' \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha)$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$$

### Теорема

$f \in R[a, b], \quad \varphi \in C^1[\alpha, \beta], \quad \varphi$  - строго возрастает,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad \text{тогда} \quad \int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$$

### Пример

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad \varphi(t) = \cos t, \quad \varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi(\beta) = 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \left( -\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}$$



## Напоминание (про ряды)

### Опр

Числовой ряд из элементов  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  - это  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$

### Опр

Частичная сумма ряда  $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$

### Опр

Говорят, что сумма ряда  $S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

## Замечание

Ряд  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  сходится или расходится одновременно с рядом  $\sum_{j=N}^{\infty} a_j$

## Теорема (необходимое условие сходимости)

Если  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  - сходится, то  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$

### Опр

Ряд Лейбница  $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j$ ,  $a_j > 0$ , где  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ ,  $a_j \searrow$

## Теорема

Пусть  $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$  - ряд Лейбница, тогда:

1. Ряд Лейбница сходится
2.  $S_{2n} \searrow, S_{2n-1} \nearrow$
3.  $|S - S_n| < a_{n+1}$

## Теорема

Критерий Коши для числовых последовательностей.

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j - \text{сх} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > n > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

## 16 Признаки сравнения для положительных рядов.

### Опр

Если  $a_j \geq 0$ , то  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  - положительный ряд

### Теорема

Положительный ряд сходится  $\Leftrightarrow S_n$  - ограничены

### Следствие

Пусть  $0 \leq a_j \leq b_j$ , тогда:

1.  $\sum b_j$  - сх  $\Rightarrow \sum a_j$  - сх (первый признак сходимости)
2.  $\sum a_j$  - расх  $\Rightarrow \sum b_j$  - расх (первый признак сравнения)

### Следствие

$$a_k \geq 0, b_k \geq 0, \exists c, d > 0 \exists N : \forall n > N \quad 0 < c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq d < \infty$$

Тогда  $\sum a_k$  и  $\sum b_k$  сх. или расх. одновременно

### Док-во

$$\begin{aligned} & (\text{т.е. } \sum a_k - \text{сх} \Leftrightarrow \sum b_k - \text{сх}) \\ & (\Leftrightarrow) 0 \leq a_n \leq db_n \text{ т.к. } db_n - \text{сх} \Rightarrow a_n - \text{сх} \\ & (\Rightarrow) 0 \leq cb_n \leq a_n \text{ т.к. } a_n - \text{сх} \Rightarrow cb_n - \text{сх} \Rightarrow b_n - \text{сх} \end{aligned}$$

### Следствие (второй признак сравнения)

Пусть  $a_n, b_n \geq 0$ , тогда если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty), \text{ то } \sum a_n \text{ и } \sum b_n \text{ сх или расх одновременно}$$

### Док-во

$$\text{Возьмём } \varepsilon := \frac{L}{2} \Rightarrow \exists N : \forall n > N \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} < +\infty \Rightarrow \text{по предыдущему следствию верно}$$

## 17 Признаки Даламбера и Коши для положительных рядов.

### Теорема (радикальный признак Коши для положительных рядов)

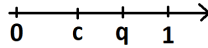
$$a_k \geq 0, c := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$$

Если  $c < 1$ , то  $\sum a_k$  - сх

Если  $c > 1$ , то  $\sum a_k$  - расх

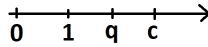
### Док-во

а)  $0 \leq c < 1$



$q := \frac{c+1}{2}$ ,  $c < q < 1$ , по характеристике  $\overline{\lim} : \exists N : \forall n > N \sqrt[n]{a_n} < q$   
т.е.  $0 \leq a_n < q^n$  и  $\sum q^n$  - сх  $\Rightarrow \sum a_n$  - сх

б)  $c > 1$



$q := \frac{c+1}{2}$ ,  $1 < q < c$ , по характеристике  $\overline{\lim} : \forall N : \exists n > N \sqrt[n]{a_n} > q$   
т.е.  $\exists$  бесконечное мн-во  $n \sqrt[n]{a_{n_k}} > q$ ,  $a_{n_k} > q^{n_k} > 1$   
 $\Rightarrow \lim a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$  - расх

### Теорема (признак Даламбера сходимости положительных рядов)

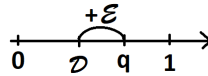
$$a_k \geq 0, D := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Если  $D < 1$ , то  $\sum a_k$  - сх

Если  $D > 1$ , то  $\sum a_k$  - расх

### Док-во

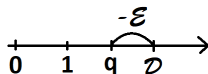
а)  $D < 1$ ,  $q := \frac{D+1}{2}$   $\mathcal{E} := \frac{1-D}{2}$



$\exists N : \forall k > N D - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < D + \mathcal{E} = q$  - геом пр.  $q < 1$

$a_{k+1} < qa_k < q^2 a_{k-1} < \dots < q^{k-N+1} a_N$ ,  $\sum q^{k-N+1} a_k$  - сх  $\Rightarrow \sum a_{k+1}$  - сх по  
первому пр. сходимости

б)  $D < 1$ ,  $q := \frac{D+1}{2}$   $\mathcal{E} := \frac{D-1}{2}$



$$\exists N : \forall k > N \quad q = \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E}, \quad q > 1$$

$$a_{k+1} > qa_k > q^2 a_{k-1} > \dots > q^{k-N+1} a_N, \quad \sum q^{k-N+1} a_N - \text{расх} \Rightarrow \sum a_{k+1} -$$

расх по первому пр. сравнения

## 18 Абсолютная и условная сходимость рядов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

Опр

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  - сх абсолютно, если  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$  - сх

Опр

Ряд сходится условно если сходится, но не абсолютно

Теорема

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится

Док-во

$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$  - сх, по критерию Коши  $\forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall m > n > N :$

$||a_{n+1}| + \dots + |a_m|| < \mathcal{E}$ , по неравенству треугольника:

$$|a_{n+1} + \dots + a_m| < \mathcal{E} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \text{сх.}$$

**19 Абсолютная и условная сходимость. Пример:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Определения см. в [предыдущем](#) билете.

Ряд не сходится абсолютно, т.к.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  - расх. ряд, т.к.:

**Теорема (критерий Коши сходимости последовательности)**

$x_n$  - сх  $\Leftrightarrow x_n$  - сх в себе.

Покажем, что для  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$   $\exists \mathcal{E} > 0 : \forall N \exists m, n \geq N : |x_m - x_n| > \mathcal{E}$ :

Возьмём  $\mathcal{E} = \frac{1}{4}$   $n = N, m = 2N$  :

$$|S_{2N} - S_N| = \left| \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} \right| > N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} > \mathcal{E}$$

Но ряд сходится (значит условно сходится) по признаку Лейбница (или это можно показать прямо, доказав что  $S_{2n} \nearrow$  и ограничена сверху единицей, а  $S_{2n+1} = S_{2n}$  в пределе)

## 20 Перестановка абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана (б/д).

### Опр

Пусть есть ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  и биективная функция  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$  называется перестановкой ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

### Теорема (Римана v1)

Пусть ряд  $\sum a_n$  - условно сходится, тогда:

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}} \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \sum a_{\varphi(k)} = S$$

### Опр

$$a_k^+ = \max\{a_k, 0\}, a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$$

### Теорема (Дирихле, о перестановке абсолютно сходящегося ряда)

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$  сх абсолютно, то

$$\forall \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ где } \varphi - \text{биекция} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$$

### Док-во

а) Пусть  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сх} \Leftrightarrow \text{все частичные суммы ограничены, } S_n \leq S \forall n \in \mathbb{N}$$

Частичные суммы  $\sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$  обозначим перестановками ряда  $T_n := \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$

Пусть  $m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$

$$T_n \leq S_m := \sum_{n=1}^m a_{\varphi(a_n)} \leq S \Rightarrow T_n \nearrow - \text{огр} \Leftrightarrow \text{ряд } T := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)} \text{ сходится.}$$

Предельный переход даёт  $T \leq S$ , но так как  $S$  - тоже перестановка  $T \Rightarrow S \leq T$

$$\text{Значит } S = T, \text{ то есть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$$

б) Общий случай,  $a_k \in \mathbb{R}$

$$a_k = a_k^+ - a_k^-, |a_k| = a_k^+ + a_k^- \Rightarrow a_k^+ = \frac{a_k + |a_k|}{2}, a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}$$

т.к.  $\sum a_k$  - сх абсолютно  $\Rightarrow \sum |a_k|$  - сх

$$\Rightarrow \sum a_k^+, \sum a_k^- - \text{сх (причем абсолютно)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{\varphi(k)}^+ - a_{\varphi(k)}^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^- = (\text{п. а}) \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

### Теорема (Римана v2)

Пусть ряд  $\sum a_n$  - условно сходится. Тогда  $\sum a_n^+ - \sum a_n^- = +\infty$

### Док-во

Можно доказать одну из теорем



**21 Асимптотика частичных сумм расходящегося ряда (случай гармонического ряда). Постоянная Эйлера.**

$$\frac{1}{1+k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} < \ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 < \frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Значит,

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) \right) &< \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n := \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) \right) \nearrow \text{и ограничено сверху} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = -\ln 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \dots - \ln(n) + \ln(n+1) =$$

$$= \ln(n+1) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

Опр

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,5722\dots - \text{постоянная Эйлера}$$

## 22 Несобственные интегралы. Примеры. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов.

### Опр (1)

$f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \in R[a, b] \forall b \in (a, +\infty).$

Если  $\exists \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$ , то говорят, что несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f - \text{сходится и равен } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$$

### Опр (2)

$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty < a < \omega \leq +\infty, f \in R[a, b] \forall b \in (a, +\infty).$

Если  $\exists \lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f$ , то говорят, что несобственный интеграл

$$\int_a^{\omega} f - \text{сх и равен } \lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f$$

### Опр (3)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\forall a < b \in \mathbb{R} : f \in R[a, b]$ , тогда  $\int_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f$ ,

Если оба предела  $\exists$  и конечны, то говорят что  $\int_{-\infty}^{+\infty} f$  - сходится

### Опр (4)

Аналогично  $\int_{\omega_1}^{\omega_2}$ , если  $f \in R[a, b] \forall [a, b] \subset (\omega_1, \omega_2)$ .  $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f = \int_{\omega_1}^c f + \int_c^{\omega_2} f$

### Пример

$$1. \alpha = 1, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^b = +\infty - \text{расх}$$

$$2. \alpha > 1, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = 0 - \frac{1}{1-\alpha} - \text{сх}$$

$$3. \alpha < 1, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty - \text{расх}$$

### Пример

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0-} \int_{-1}^a \frac{dx}{x} + \lim_{b \rightarrow 0+} \int_b^1 \frac{dx}{x} - \text{расх по опр, т.к. оба предела расх}$$

### Опр

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\forall a < b \in \mathbb{R} : f \in R[a, b]$ , тогда (V.P.)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f$

### Пример

$$(V.P.) \int_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-A}^A = 0$$

$$(\text{Ho}) \int_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x - \text{расх}$$

### Теорема (критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов)

$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < a < \omega \leq +\infty, \quad f \in R[a, b] \quad \forall b \in (a, +\infty),$  тогда:

$$\int_a^\omega f - \text{сх} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, \omega) : \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) \left| \int_{b_1}^{b_2} \right| < \varepsilon$$

### Док-во

$$\int_a^\omega f - \text{сх} \Leftrightarrow \exists \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f \Leftrightarrow (\text{кр Коши для пределов ф.})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall b_1, b_2 \in (\omega - \delta, \omega) \left| \int_a^{b_1} f - \int_a^{b_2} f \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \varepsilon$$

## 23 Свойства несобственных интегралов (линейность, аддитивность, монотонность, формула Ньютона-Лейбница).

### Свойство (1, линейность)

$$\int_a^{\omega} f_1, \int_a^{\omega} f_2 - \text{сх} \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \int_a^{\omega} (k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 \int_a^{\omega} f_1 + k_2 \int_a^{\omega} f_2$$

### Свойство (2, монотонность)

$$f, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in R[a, b], \quad \forall b \subset [a, \omega), \quad f(x) \leq g(x),$$

$$\forall x \in [a, \omega) \Rightarrow \int_a^{\omega} f \leq \int_a^{\omega} g$$

### Лемма

$$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b], \quad \forall b \in (a, \omega).$$

Пусть  $c \in (a, \omega)$ , тогда  $\int_a^{\omega} f$  и  $\int_c^{\omega} f$  - сх или расх одновременно

### Док-во

$$\int_a^{\omega} f - \text{сх} \Leftrightarrow \lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f = A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \int_c^{\omega} f = \lim_{b \rightarrow \omega-} \int_c^b f = \lim_{b \rightarrow \omega-} \left( \int_a^b f - \int_a^c f \right) = A - \int_a^c f \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_c^{\omega} f - \text{сх}$$

### Свойство (3, аддитивность)

$$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b] \quad \forall b \subset [a, \omega)$$

$$\forall c \in [a, \omega) \Rightarrow \int_a^{\omega} f = \int_a^c f + \int_c^{\omega} f, \text{ причем } \int_a^{\omega} f \text{ и } \int_c^{\omega} f - \text{сх или расх одновременно}$$

### Свойство (4, формула Н-Л)

Если  $F$  - первообразная  $f$ , то:

$$\int_a^{\omega} f = \lim_{b \rightarrow \omega-} (F(b) - F(a)) =: F|_a^{\omega-} = F(\omega-) - F(a)$$

Свойство (5)

Если  $f \in R[a, \omega]$  ( $\omega \in \mathbb{R}$ ), то (несоб. инт)  $\int_a^\omega f = \int_a^\omega f$  (инт Римана)

Док-во

$$f \in R[a, \omega] \Rightarrow F(x) := \int_a^x f \in C[a, \omega],$$

$$(\text{несоб. инт}) \int_a^\omega f = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f (= F(b) \text{ (непр. в т } \omega)) = F(\omega) = \int_a^\omega f \text{ (инт Римана)}$$

## 24 Свойства несобственных интегралов (интегрирование по частям, замена переменной).

### Свойство (интегрирование по частям)

Пусть  $f, g \in C^1[a, \omega)$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega_-} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$ , тогда:

$$\int_a^\omega f'g \text{ и } \int_a^\omega fg' - \text{сх или расх одновременно, причем}$$

$$\int_a^\omega fg' = fg|_a^\omega - \int_a^\omega f'g(fg|_a^\omega = \lim_{x \rightarrow \omega_-} (f(x)g(x) - f(a)g(a))$$

### Свойство (замена переменной)

Если  $\int_a^\omega f$  - сх,  $\varphi : [\alpha, \upsilon) \rightarrow [a, \omega)$ ,  $\varphi \in C^1[\alpha, \upsilon)$ ,  $\varphi$  - монот.,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \upsilon} \varphi(t) = \omega, \quad \text{тогда} \quad \int_a^\omega f = \int_\alpha^\upsilon (f \circ \varphi) \varphi'$$

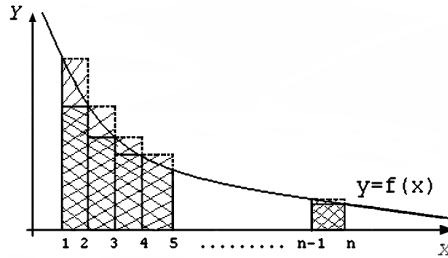
## 25 Интегральный признак Коши сходимости несобственных интегралов и рядов.

### Теорема

Пусть  $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f \in R[1, A] \forall A > 1$ ,  $f$  - строго убывает (можно строго возрастает)

Тогда  $\int_1^\infty f$  и  $\sum_{n=1}^\infty f(n)$  - сх или расх одновременно, причем

$$\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \leq \int_1^\infty f \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$



### Лемма

Если  $f > 0$ ,  $f \in [a, \omega] \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $f \in R[a, b] \forall b \in (a, \omega)$

Тогда  $\int_a^\omega f$  - сх  $\Leftrightarrow F(x) = \int_a^x f$ ,  $\exists M < \infty : F(x) \leq M \forall x \in [a, \omega)$

### Док-во

( $\Rightarrow$ ) очевидно

( $\Leftarrow$ ) почти очевидно,  $f \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$  и огр  $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \omega} F(x) = \int_a^\omega f < +\infty$

### Док-во

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n) \text{ (видно через суммы Дарбу) } \mid \sum_{n=1}^N$$

$$\sum_{n=1}^N f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f \leq \sum_{n=1}^N f(n), \text{ при } N \rightarrow +\infty \text{ получим наше уравнение}$$

$$1) \text{ Если } \sum_1^\infty f(n) - \text{сх} \Leftrightarrow \sum_1^N f(n) \leq A \in \mathbb{R} \Rightarrow F(N+1) = \int_1^{N+1} f \leq A \in \mathbb{R} \text{ сх}$$

$$2) \text{ Если } \int_1^\infty f - \text{сх} \Rightarrow \sum_1^N f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f \leq \int_1^\infty f \in \mathbb{R} - \text{огр} \Rightarrow \sum_1^N f(n+1) \text{ сх}$$

### Примеры

$$1. \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}. \text{ Рассмотрим } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^\infty = 0 - (-1) - \text{сх}$$

$$2. \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}. \text{ Сх. при } \alpha > 1, \text{ расх. при } \alpha \leq 1 \text{ (аналогично интегралу } \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha})$$

## 26 Признаки сравнения для несобственных интегралов.

### Теорема (I признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \geq 0, \quad f, g \in R[a, b], \quad b \in (a, \omega),$$

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, \omega)$$

$$\text{Тогда } \int_a^\infty g - \text{сх} \Rightarrow \int_a^\omega f - \text{сх} \quad \left( \int_a^\omega f - \text{расх} \Rightarrow \int_a^\infty g - \text{расх} \right)$$

### Док-во

$$F(b) := \int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^\omega g \in \mathbb{R}$$

То есть  $\int_a^\omega f - \text{сх}$ , т.к.  $F \nearrow$  и огр сверху на  $[a, \omega)$

### Теорема (II признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty), \quad f, g \in R[a, b] \quad \forall b \in (a, \omega)$$

Тогда если  $\exists \lim_{x \rightarrow \omega-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$ , то  $\int_a^\omega f$  и  $\int_a^\omega g - \text{сх}$  или  $\text{расх}$  одновременно

### Док-во

$$k := \lim_{x \rightarrow \omega-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty), \quad \mathcal{E} := \frac{k}{2}$$

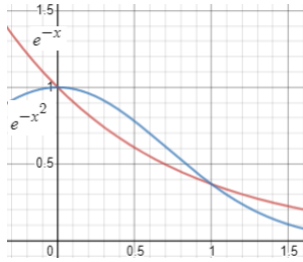
$$\Rightarrow \exists b \in (a, \omega) : \forall x \in (b, \omega) \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} < \frac{f(x)}{g(x)} < 3\mathcal{E}$$

То есть с некоторого места  $f(x) \leq g(x)$ , а так как  $\int_a^\omega = \int_a^b + \int_b^\omega$  и  $\int_a^b f, \int_a^b g -$  конечные числа, то  $\int_a^\omega f$  и  $\int_a^\omega g - \text{сх}$  или  $\text{расх}$  одновременно по первому признаку

### Пример

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$





$$e^{-x^2} \geq e^{-x} \Rightarrow x \in [0, 1], \quad \int_0^1 e^{-x} = \frac{1}{e} \text{ по I пр. ср. } \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2} - \text{сх}$$

### Пример

$$\int_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx \text{ и } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - \text{сх или расх одновр} \Rightarrow \text{сх}$$

**27 Абсолютная и условная сходимость интегралов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.**

**Опр**

$$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, f \in R[a, b] \quad \forall b \in (a, \omega)$$

$$\int_a^\omega f - \text{сх абсолютно} \Leftrightarrow \int_a^\omega |f| - \text{сх}$$

$$\int_a^\omega f - \text{сх условно} \Leftrightarrow \int_a^\omega f - \text{сх}, \int_a^\omega |f| - \text{расх}$$

**Утв**

$$\int_a^\omega f - \text{сх абсолютно} \Rightarrow \text{сходится}$$

**Док-во**

Пусть  $\int_a^\omega |f| - \text{сх} \Leftrightarrow$  (кр. Больцано-Коши)  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in (a, \omega) : \forall b_1, b_2 \in (A, \omega)$

$$|\int_{b_1}^{b_2} |f|| < \varepsilon \Rightarrow \text{т.к. } |\int_{b_1}^{b_2} f| \leq |\int_{b_1}^{b_2} |f|| < \varepsilon, \text{ то по кр. Б-К } \int_{b_1}^{b_2} f - \text{сх}$$

**Пример**

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^3) dx = \left| \begin{matrix} x^3 = t \\ x = \sqrt[3]{t} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3} \int_0^\infty \cos t \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \frac{\sin t}{t^{\frac{2}{3}}} \Big|_0^\infty + \frac{2}{9} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{9} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}}$$

Исследуем  $\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} = \int_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} + \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} :$

а)  $\int_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}, |\sin t| \leq t \text{ на } [0, 1]$

$$\int_0^1 \frac{t}{t^{\frac{5}{3}}} = \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} = 3t^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 = 3 - \text{сх} \quad \text{по I пр ср} \Rightarrow \int_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} - \text{сх}$$

б)  $\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}, \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} = -\frac{3}{2} t^{-\frac{2}{3}} \Big|_1^\infty = \frac{3}{2} - \text{сх} \quad \text{по I пр ср} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} - \text{сх}$$

Значит  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} - \text{абс сх} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos(x^3) - \text{сх}$

## 28 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$

Определения и теорему см. в билете [27](#)

### Пример

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \left. \frac{-\cos x}{x} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$$

Исследуем  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$  на абс сходимость.  $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ , а  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}$  - сходится

$\Rightarrow$  по 1 признаку сравнения  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| - cx \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} - cx \text{ абс} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} - cx$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}$$

Знаем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$ . Кроме того,  $\frac{|\sin x|}{x} < 1$ , значит на конечном

промежутке  $(0, \frac{\pi}{2}]$  интеграл конечный  $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} - cx$

3) Покажем, что  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} - \text{расх.} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} - \text{расх}$

$$|\sin x| \geq |\sin^2 x|, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x} (\text{расх}) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} (cx)$$

## 29 Признаки Дирихле и Абеля для несобственных интегралов (док-во одного из них).

### Теорема (признак Абеля-Дирихле)

$f, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C[a, \omega), \quad g \in C^1[a, \omega), \quad g - \text{монотонна.}$

Тогда если выполнено одно из условий:

$$(A) \quad \int_a^\omega f - \text{сх}, \quad g - \text{огр}$$

$$(D) \quad F(x) := \int_a^x f - \text{огр}, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \omega_-} 0$$

Тогда  $\int_a^\omega fg - \text{сх}$

### Док-во

(Д) без теоремы Бонне

$$|F(x)| \leq C : g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \omega_-} 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \omega_-} \int_a^b fg = \lim_{b \rightarrow \omega_-} (Fg|_a^b - \int_a^b Fg') = F(a)g(a) - \lim_{b \rightarrow \omega_-} \int_a^b Fg'$$

Исследуем интеграл на абс сходимость.

$$\int_a^b |Fg'| \leq C \int_a^b |g'| = (\text{т.к. } g - \text{монотонна}) C \left| \int_a^b g' \right| = C |g(b) - g(a)| \xrightarrow{b \rightarrow \omega_-} C |g(a)|$$

Таким образом инт. ограничен  $\Rightarrow$  изначальный сходится

### 30 Признаки Дирихле и Абеля для рядов (док-во одного из них).

Опр

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad A_0 = 0$$

Теорема (преобразование Абеля)

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Док-во

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

Теорема (признак Дирихле для рядов)

Пусть  $A_n$  - огр.,  $b_k \rightarrow 0$ ,  $b_k$  - монотонно. Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  - сх

Док-во

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  - сх  $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$  - сх  $\Leftrightarrow$  все частичные суммы огр

$$\sum_{k=1}^N |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^N |b_k - b_{k+1}| = M |b_1 - b_{N+1}| \leq 2M |b_1| \Rightarrow \text{исх ряд сх}$$

Теорема (признак Абеля для рядов)

Пусть  $A_n$  - сх.  $b_k$  - монотонно,  $b_k$  - огр. Тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  - сх

### 31 Применение интеграла Римана для вычисления площадей и объемов. Примеры.

#### Опр (школьное)

Пусть  $P \in \mathbb{R}^2$  ("фигура"),  $\mathcal{P}$  - некоторый набор плоских "фигур",  $P_i \in \mathcal{P}$   
 $g : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty)$  - называется площадью, если:

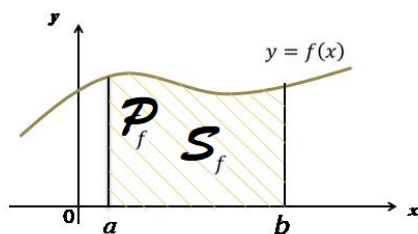
1.  $\forall P \in \mathcal{P}, S(P) \geq 0$
2.  $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

#### Опр

$\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , сохраняет расстояние

3.  $\forall P \in \mathcal{P}$   $\tau$ -движения  $S(\tau(P)) = S(P)$

**Площадь криволинейной трапеции.**



#### Опр

Подграфиком  $f \in R[a, b]$  называется  $P_f := \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Возьмём разбиение и верх. и нижн. суммы Дарбу.  $S$  - монотонна, т.е.

$$P_1 \subset P_2 \Rightarrow S(P_1) \leq S(P_2), S_*(\tau) = S(P_*(\tau)), S^*(\tau) = S(P^*(\tau))$$

$$P_*(f, \tau) \subset P(f) \subset P^*(f, \tau)$$

$$S(P_*(f, \tau)) = S_*(f, \tau) \rightarrow \int_a^b f, S(P^*(f, \tau)) = S^*(f, \tau) \rightarrow \int_a^b f, S(P_f) := \int_a^b f$$

#### Пример

Первая четверть эллипса с радиусами  $(a, b)$ .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad S = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx - \text{сложно, перейдём в полярны}$$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t d(a \cos t) = ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = -ab \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 0 - \left( -\frac{\pi ab}{4} \right) = \frac{\pi ab}{4}$$

## Вычисление объемов

### УТВ

Принцип Кавальери. Если у двух тел одни сечения на одном уровне, то их объемы равны.

$$\sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) \Delta_k \text{ - сумма Римана}$$

$$V = \int_a^b S(x) dx \text{ - измельчаем плоскости}$$

### Пример

(на самом деле тела вращения можно считать как  $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ )



## 32 Путь. Длина пути. Спрямо́ляемый путь. Аддитивность длины пути.

Опр

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Расстояние считается как

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \gamma - \text{путь, если } \forall i \in \{1, \dots, n\} \gamma_i \in C[a, b]$$

Опр

Путь называется  $r$ -гладким, если  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \gamma_i \in C^r[a, b]$

Опр

Два пути считаются эквивалентными если можно сделать замену переменной. Т.е. пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , тогда:  
 $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \exists \varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  - строго возрастающая,  $\alpha = \varphi(a)$ ,  $\beta = \varphi(b)$ ,  
 $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$

Опр

Кривая - класс эквивалентности путей.  $\forall$  путь - представитель класса эквивалентности называется "параметризацией"

Пример

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t^2 & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \sin t^2 & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ , определяют одну и ту же кривую (окружность)

Опр

Кривая называется  $r$ -гладкой, если у неё есть  $r$ -гладкая параметризация

Опр

$\gamma$  - простой путь  $\Leftrightarrow \gamma$  - биекция на  $(a, b)$ , т.е.  $\forall t_1, t_2 \in (a, b) : \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  (без самопересечений).

Если  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,  $\gamma$  - замкнутый путь.

Опр (длины пути)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tau \subset [a, b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Соединим  $[\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})]$  отрезками - получим вписанную ломанную.

$$\text{Длина } k\text{-ого звена: } \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$$

Тогда длина вписанной ломанной: 
$$l = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$$

Длиной пути назовём  $S_\gamma := \sup_{\tau} l_\tau$  - всевозможных ломанных

### Опр

Путь называется спрямляемым, если  $S_\gamma < +\infty$

### Утв

Аддитивность длины пути.  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$ , пусть  $\gamma_1$  - сужение  $\gamma$  на  $[a, c]$ ,  $\gamma_2$  - сужение  $\gamma$  на  $[c, b]$ . Тогда  $S_\gamma = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

### Док-во

а)  $S_\gamma \geq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$ ?

Пусть  $\tau_1$  - разбиение  $[a, c]$ ,  $\tau_2$  - разбиение  $[c, b]$ ,

$\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ ,  $l_{\tau_1} + l_{\tau_2} = l_\tau \leq S_\gamma$

(т.к.  $S_\gamma = \sup$ )

Возьмём  $\sup$  по всем разбиениям отрезка  $[a, c]$

$\Rightarrow \sup_{\tau_1} (l_{\tau_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + l_{\tau_2} \leq S_\gamma$

Теперь  $\sup$  по всем разбиениям отрезка  $[c, b]$

$\Rightarrow \sup_{\tau_1} (S_{\gamma_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2} \leq S_\gamma$

б)  $S_\gamma \leq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$ ?

Пусть  $\tau$  - разбиение  $[a, b]$ .

Пусть  $\tau^* = \tau \cup \{c\}$ .  $l_\tau \leq l_{\tau^*}$ ,  $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ ,

где  $\tau_1$  - разбиение  $[a, c]$ ,  $\tau_2$  - разбиение  $[c, b]$ .

$l_\tau \leq l_{\tau^*} = l_{\tau_1} + l_{\tau_2} \leq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Возьмём  $\sup$  по всем разбиениям  $\tau$ :  $\sup_{\tau} (l_\tau) = S_\gamma \leq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

### Примеры

Неспрямляемые пути:

1) Кривая Пеано

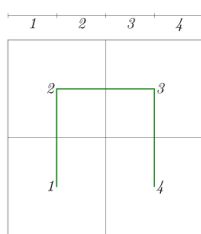


Fig. 1.

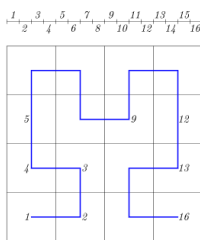


Fig. 2.

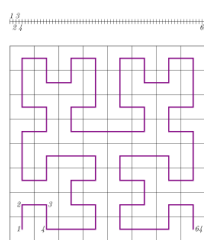
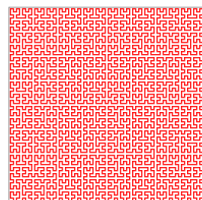
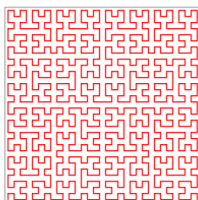
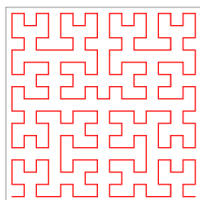
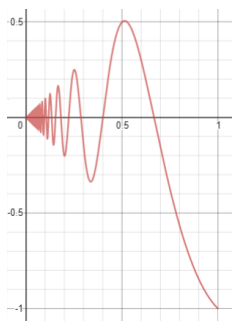


Fig. 3.



В пределе  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  - сюръективное отображение. В итоге получается прямая заполняющая весь квадрат с пересечениями (в смысле дополнение до подкривых пределе пусто)

$$2) y = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Докажем, что прямая не является сямляемой.

Пусть  $\tau : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1} < \dots < 1$ ,  $t_N = \frac{1}{N}$ , тогда

$$y(t_k) = \frac{1}{k} \cos \pi k = \frac{1}{k} (-\pi)^k$$

Длина  $k$ -ого звена:

$$\frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{2}{k} \Rightarrow l_\tau \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \Rightarrow \sup l_\tau = +\infty$$

### 33 Кривая. Длина кривой.

Опр. см. в билете [32](#)

#### Теорема (о длинах эквивалентных путей)

Пусть  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Если  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$

#### Док-во

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \exists \varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  - строго возрастающая,  $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$ ,  
 $\varphi(\tau_1) = \tau_2$  - разбиение  $[a_2, b_2]$ ,

$$l_{\tau_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} = l_{\tau_2} \leq S_{\tau_2}$$

Перейдём к  $\sup$  по всем  $\tau_1$ :  $\sup_{\tau_1} (l_{\tau_1}) = S_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$

Аналогично получим неравенство  $S_{\tau_2} \leq S_{\tau_1}$

#### Замечание

Корректность определения (с классами эквивалентности) длины пути следует из доказанной выше теоремы

### 34 Теорема о вычислении длины гладкого пути.

#### Теорема

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  -  $C^1$ -гладкая кривая, тогда  $\gamma$  - спрямляется,  $S_\gamma = \int_a^b |\gamma'|$

#### Док-во

1)  $\gamma$  - спрямляемая?

$\gamma_j \in C^1[a, b] \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \Rightarrow$  (Ф-ия достигает  $\min$  и  $\max$  на  $[a, b]$  по т. Вейерштрасса)

$$m_j \leq \gamma_j \leq M_j, \quad M := \sqrt{\sum_{j=1}^m M_j^2}, \quad m := \sqrt{\sum_{j=1}^m m_j^2}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \dots \\ \gamma'_n \end{pmatrix}$$

$$\forall \tau\text{-разбиения } [a, b] : l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2} =$$

(по т. Лагранжа  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1 \exists \xi_k \in [t_k, t_{k+1}] : \gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k) = \gamma'_j(\xi_k) \Delta t_k$ )

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma'_j(\xi_k))^2 \Delta t_k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma'_j(\xi_k))^2} \Delta t_k \Rightarrow m \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k \leq l_\tau \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq l_\tau \leq M(b-a) \xrightarrow{\sup} m(b-a) \leq S_\gamma \leq M(b-a) \Rightarrow -\infty < S_\gamma < +\infty$$

$$2) S_\gamma = \int_a^b |\gamma'|?$$

Пусть  $\gamma^{(k)}$  - сужение  $\gamma$  на  $[t_k, t_{k+1}]$ . Для него выполняется пункт (1):

\*переобозначим  $\gamma'$  как  $\dot{\gamma}$  из-за сложности обозначений\*

$$m_j^{(k)} = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot{\gamma}_j^{(k)}(t)|, \quad M_j^{(k)} = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot{\gamma}_j^{(k)}(t)|$$

$$m^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (m_j^{(k)})^2}, \quad M^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (M_j^{(k)})^2}$$

$$m^{(k)} \Delta t_k \leq S_{\gamma^{(k)}} \leq M^{(k)} \Delta t_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leq S_\gamma \leq \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)} \Delta t_k$$

$$m_j^{(k)} \leq |\dot{\gamma}_j^{(k)}(t)| \leq M_j^{(k)} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Суммируем, возводим в квадрат, извлекаем корень:

$$m^{(k)} \leq |\dot{\gamma}^{(k)}(t)| \leq M^{(k)} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\text{Проинтегрируем по } \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt : m^{(k)} \Delta t_k \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{\gamma}^{(k)}(t)| dt \leq M^{(k)} \Delta t_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{\gamma}^{(k)}(t)| dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)} \Delta t_k, \text{ оценим } \sum_{k=1}^{n-1} (M^{(k)} - m^{(k)} \Delta t_k) :$$

$$M^{(k)} - m^{(k)} = \frac{(M^{(k)})^2 - (m^{(k)})^2}{M^{(k)} + m^{(k)}} = \sum_{j=1}^m (M_j^{(k)} - m_j^{(k)}) \frac{M_j^{(k)} + m_j^{(k)}}{M^{(k)} + m^{(k)}} \leq \sum_{j=1}^m (M_j^{(k)} - m_j^{(k)})$$

$$\gamma_j \in C^1[a, b] \Rightarrow \gamma'_j \in C[a, b] \Rightarrow p/n \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_j > 0 :$$

$$\lambda(\tau) < \delta_j \Rightarrow 0 \leq M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \leq \frac{\mathcal{E}}{m(b-a)} \stackrel{\sum_{1 \leq j \leq m}^m}{\cong} 0 \leq M^{(k)} - m^{(k)} \leq \frac{\mathcal{E}}{b-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (M^{(k)} - m^{(k)}) \Delta t_k < \frac{\mathcal{E}}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \mathcal{E} \Rightarrow S_\gamma = \int_a^b |\dot{\gamma}|$$

### 35 Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Примеры.

#### Опр

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}$$

говорят, что функ. последовательность сходится поточечно

к ф.  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{(x, \varepsilon)} : \forall n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

#### Опр

Говорят, что функ. послед. сходится к  $f$  равномерно на  $E$

$$f_n \xrightarrow{E} f$$

Если  $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{(\varepsilon)} \quad \forall n > N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{(\varepsilon)} \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

#### Примеры

$$1. f_n(x) = \frac{\sin^2(e^x) - \arctan(n^2 \sqrt{x})}{\sqrt{n}} \quad x \in [0; +\infty)$$

$$0 \leq \sup_{[0, +\infty)} |f_n(x)| \leq \frac{10}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{[0, +\infty)} 0$$

$$2. f_n(x) = x^n - x^{2n} \quad x \in [0, 1]$$

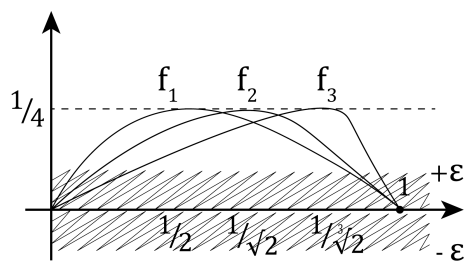
$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 1]$  - поточечно. Равномерно ли?

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = x^{n-1}(n - 2nx^n)$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} - \text{крит. точка}$$

$$f_n(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{равномерной сх-ти нет}$$



Горбик убегает

### Замечание

Из равномерной сх-ти  $\Rightarrow$  поточечная



### 36 Критерий Коши для равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема (Критерий Коши для равномерной сходимости функ. послед.)

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Док-во

( $\Rightarrow$ ):

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 : \quad \forall m, n > N_\varepsilon :$$

$$\sup |f_n - f_m| \leq \sup (|f_n - f| + |f - f_m|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ):

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

т.е.  $\{f_n(x)\}$  - сх. в себе  $\Leftrightarrow \{f_n(x)\}$  имеет конеч. предел

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ т.о. } f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in E$$

(т.е.  $f$  - поточеч. предел послед.)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon \quad \forall x \in E$$

$$f_m(x) - \varepsilon < f_n(x) < f_m(x) + \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_m(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_m(x) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**37 Сохранение непрерывности при равномерном предельном переходе. Теорема Дини (б/д). Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.**

**Теорема (о равномерном пределе непр. функции)**

$f_n$  - непр в т.  $x_0 \in E$

$$f_n \xrightarrow{E} f$$

Тогда  $f$  - непр. в т.  $x_0$

**Док-во**

$\forall \varepsilon > 0$  (зафиксир.)

Т.к.  $f_n \xrightarrow{E} f$ , то  $\exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$  (зафикс  $n^* > N_\varepsilon$ )  $\sup_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$  (\*)

В частности, для  $n^* > N_\varepsilon$   $\sup_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$

$f_{n^*}$  - непр. в т.  $x_0$  :  $\exists \delta > 0 \quad \forall t \in E : |t - x_0| < \delta \quad |f_{n^*}(t) - f_{n^*}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда  $\forall x \in E : |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| + |f_{n^*}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Следствие**

Если  $f_n \in C(E)$ ,  $f_n \xrightarrow{E} f$ , то  $f \in C(E)$

**Теорема (Дини)**

$f_n \in C[a, b] \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$  (поточ. на  $[a, b]$ )

причем  $\forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \searrow$  (по n). т.е  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

Если  $f \in C[a, b]$ , то  $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$

**Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла)**

$f_n \in R[a, b] \quad f_n \xrightarrow{[a, b]} f \in R[a, b]$

Тогда  $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$

### Док-во

$$a < b$$

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \sup_{[a,b]} |f_n - f| \cdot (b - a) \rightarrow 0$$

### Утв

Функ. ряд сход равномерно  $\Leftrightarrow$  посл-ть частичных сумм сход равномерно

### Следствие (1)

$$f_n \in C[a, b] \quad \sum_{n=1}^N f_n \Rightarrow f, \text{ тогда:}$$

$$1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C[a, b]$$

$$2) \quad \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

### Следствие (2)

$$\text{Если } f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad f_n \in C[a, b]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in C[a, b]$$

$$\text{То } \sum f_n - \text{сход. равномерно на } [a, b]$$

### 38 Дифференцируемость и равномерная сходимость.

#### Теорема (диф-сть и равном. сх-ть)

$$f_n \in C^1[a, b] \quad f'_n \rightrightarrows_{[a, b]} g$$

$$\text{и } \exists c \in [a, b] : \quad \{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty} - \text{сх}$$

Тогда:

1.  $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$
2.  $f \in C^1[a, b]$  и  $f' = g$

#### Док-во

$$(b) \quad f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^x g = f(x) - f(c) \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c)$$

(по т. о предельном переходе под знаком интеграла)

$$f(x) = \int_c^x g + f(c)$$

$$\text{т.о. } f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ поточ. на } [a, b] \quad f'(x) = g(x) \text{ непр (равн. предел непр ф.)}$$

$$\Rightarrow f \in C^1[a, b]$$

$$(a) \quad \text{покажем, что } f_n \rightrightarrows f$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup \left| f_n(x) - f_n(c) + \underbrace{f_n(c) - f(c)}_{\rightarrow 0} + f(c) - f(x) \right| \leq \\ &\leq \sup \left| \int_c^x f'_n - \int_c^x g + f_n(c) - f(c) \right| \leq \sup \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| + |f_n(c) - f(c)| \quad (*) \\ f'_n \rightrightarrows g &\Rightarrow \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} |f'_n - g|}_{\rightarrow 0} \underbrace{(x - c)}_{\leq (a-b)} \end{aligned}$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| < \mathcal{E}$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |f_n(c) - f(c)| < \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow (*) < 2\mathcal{E}$$

#### Пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(x^n)$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{т.е. } f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = f$$

$$f'_n(1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + x^{2n}} \cdot n \cdot x^{n-1} \Big|_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Но } (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'_{x=1} = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$$

### 39 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

#### Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall n \exists M_n \quad |f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in E$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad (\text{сход. мажоранта})$$

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сх. равн. (и абс) на  $E$

#### Док-во

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N \quad \left| \sum_{k=m}^n M_k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sum M_k < \infty$$

$$\text{Тогда } |S_n - S_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(x)| \leq \left| \sum_{k=m}^n M_k \right| < \varepsilon$$

$$\text{Т.е. } |S_n - S_{m-1}| < \varepsilon \text{ т.е. вып. кр. Коши для } S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

част. суммы сх равн.  $\Rightarrow$  функ. ряд сх. равн.

## 40 Степенной ряд (в $\mathbb{C}$ ). Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.

### Опр

Будем рассматривать

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad c_k, z \in \mathbb{C}$$

### Опр

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = |z| \cos \varphi$$

$$y = |z| \sin \varphi$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$C_n = a_n + ib_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |c_n - c| < \varepsilon$$

### Утв

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \Leftrightarrow \begin{matrix} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \end{matrix} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$c_n = a_n + ib_n$$

$$c = a + ib$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

### Опр

Радиусом сх-ти степ. ряда  $\sum c_n z^n$  назыв  $R \in [0, +\infty]$  такое, что ( $z \neq 0$ )

$$\forall z : |z| < R \text{ - ряд сх}$$

$$\forall z : |z| > R \text{ - ряд расх.}$$

### Примеры

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$  по пр. Даламб    расх  $\forall z \neq 0$      $R = 0$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(k+1)! z^{k+1}|}{|k! z^k|} = \infty, \quad z \neq 0$$

2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  - сх.  $\forall z \in \mathbb{C}$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$z^* = -1 \quad : \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} - \text{сх} \Rightarrow \text{сх. равн. } \forall |z| \leq d < 1$$

$$z_0 = 1 \quad : \quad \sum \frac{1}{n} - \text{расх} \Rightarrow \forall |z| > 1$$

### Теорема (ф-ма Коши-Адамара)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad R - \text{рад. сх-ти}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

41 Теорема о комплексной дифференцируемости степенного ряда. Следствие: единственность разложения в степенной ряд.



## 42 Ряд Тейлора. Примеры $(e^x, \sin x, \ln(1+x), e^{-\frac{1}{x^2}})$ .

### Опр

$$f \in C^\infty(U_{x_0}) \quad U_{x_0} - \text{окр } x_0$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  назыв. Рядом Тейлора ф-и в т  $x_0$

### Примеры

$$1. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$2. \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$3. \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

### 43 Биномиальный ряд $(1+x)^\alpha$

Опр

$$(1+x)^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Запишем (формально) ряд Тейлора для  $(1+x)^\alpha$  в т.  $x_0 = 0$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} = C_\alpha^k$$

Найдем интервал сходимости  $\sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k z^k \quad z \in \mathbb{C}$  (по Даламберу)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{C_\alpha^{k+1} z^{k+1}}{C_\alpha^k z^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty}$$

- 44    Признак Абеля-Дирихле для равномерной сходимости функциональных рядов (доказательство одного).

45 Теорема Абеля. Сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

**46** Интеграл комплекснозначной функции. Скалярное произведение и норма в пространстве  $C(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ , в пространстве  $R([a; b])$ . Ортогональность. Пример:  $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ .

47 Свойства скалярного произведения и нормы (теорема Пифагора, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника).

- 48 Коэффициенты Фурье функции по ортогональной системе  $e_k$ .  
Ряд Фурье. Пример: тригонометрический полином.

**49 Свойства коэффициентов Фурье (коэффициенты Фурье сдвига, производной).**





51 Вычисление интеграла Дирихле  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}.$

52 Ядра Дирихле, их свойства. Выражение частичных сумм ряда Фурье через ядра Дирихле.

**53   Свертка. Простейшие свойства. Свертка с  
тригонометрическими и алгебраическими полиномами.**

## 54 Принцип локализации Римана.

**55 Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье для локально-Гельдеровской функции.**

56 Ядра Фейера, их свойства. Связь с  $\sigma_N(f)$ .

**57**    **Аппроксимативная единица. Определение, примеры. Теорема о равномерной сходимости свертки с аппроксимативной единицей.**





**59 Среднеквадратичное приближение функций, интегрируемых по Риману, тригонометрическими полиномами.**

## 60 Равенство Парсеваля.

### 61.1 Множества меры ноль

#### Опр

$E \subset \mathbb{R}$ , говорят, что  $E$  - мн-во меры ноль, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_j = (\alpha_j, \beta_j) : E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon \quad (|I_j| = \beta_j - \alpha_j)$$

не более чем сч.  
набор откр. инт.

#### Примеры

1)  $\forall$  Конечное множество - мн-во меры ноль

$$E = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad I_j := (x_j - \frac{\varepsilon}{4n}, x_j + \frac{\varepsilon}{4n}), \quad \sum_{j=1}^n |I_j| = \frac{\varepsilon}{2}$$

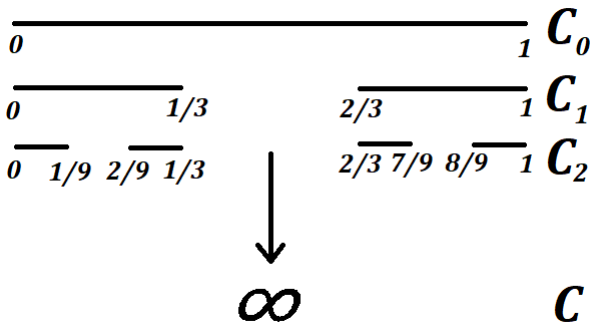
2)  $A = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  - счётное  $\Rightarrow$  имеет меру 0.

Как покрыть  $\mathbb{N}$ ?  $|I_j| = \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$  - геом. прогрессия

3) Несчетное множество меры ноль:

Канторовское мн-во (Канторовский компакт), построение:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$



Определим  $C_{\frac{1}{3^p}}$  как множество отрезков, полученных для  $\varepsilon = \frac{1}{3^p}$  для крайних точек каждого отрезка из  $C_p$  (они их покроют "вплотную" и по краям будет немного лишнего). На каждом шаге  $p$  у нас  $2^p$  отрезков

$$\Rightarrow |C_{\frac{1}{3^p}}| = 5 \frac{2^{p-1}}{3^p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

### 61.2 Критерий Лебега интегрируемости функции

#### Теорема

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда:

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$  имеет ограниченное мн-во точек разрыва и меру 0

## Примеры

1) Функция Дирихле  $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\mathcal{D} \notin R[0, 1]$ . Проверим по критерию Лебега. Множество точек разрыва -  $\mathbb{R}$ , но оно не множество меры 0 (слишком много точек).

2) Функция Римана  $\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} - \text{несократимая дробь} \end{cases}$

Оказывается, она интегрируема по Риману на любом отрезке. Рассмотрим  $[0, 1]$ :

а)  $\forall a \in \mathbb{Q}$  - точка разрыва  $\Phi$ :

$\Phi(a) > 0$  по определению. С другой стороны как угодно близко найдётся иррациональная точка, в которой функция принимает значение 0.

б)  $\forall a \notin \mathbb{Q}$  - непрерывна:

Для произвольного  $\mathcal{E} > 0$  рассмотрим множество  $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \mathcal{E}\}$ .

Никакая иррациональная точка не лежит в  $M$ , поскольку в иррациональных точках функция  $f$  обращается в ноль.

Если  $x \in M$ , тогда  $x$  есть рациональное число вида  $x = \frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , дробь  $\frac{m}{n}$  несократима, и тогда  $f(x) = \frac{1}{n} \geq \mathcal{E}$  и, следовательно,  $n \leq \frac{1}{\mathcal{E}}$ . Из ограничения на  $n$  следует, что пересечение множества  $M$  и любого ограниченного интервала состоит из конечного числа точек.

Пусть  $\alpha$  - произвольное иррациональное число. По определению  $f(\alpha) = 0$ . Мы можем выбрать окрестность точки  $\alpha$  так, чтобы в ней не содержалась ни одна точка множества  $M$ . Если же  $x \notin M$ , то  $f(x) < \mathcal{E}$ . Таким образом, мы нашли интервал, который требуется в определении непрерывности.