2019-10-15

Свойство

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Док-во

$$\left.\begin{aligned}\dim U^\perp + \dim U = \dim V\\ \dim(U^\perp)^\perp + \dim U^\perp = \dim V\end{aligned}\right| \Rightarrow \dim(U^\perp)^\perp = \dim U$$

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V\}$$

Опр

$$U < V, \quad v \in V$$

$$U \oplus U^\perp = V$$

$$\Rightarrow \exists! u \in U,\ w \in U^\perp : v = u + w$$

u называется ортогональной проекцией

$$\text{Обозначение: } \operatorname{pr}_U v \overset{\text{def}}{=} u$$

$$v = \operatorname{pr}_U v + w \Rightarrow (v, u) = (\operatorname{pr}_U v, u)$$

Свойства (орт. проекции)

1. $\operatorname{pr}_U(v + v') = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{pr}_U v'$

$$v = u + w,\ u \in U, w \in U^\perp$$

$$v' = u' + w',\ u \in U,\ w' \in U^\perp$$

$$v + v' = (\underset{\in U}{u + u'}) + (\underset{\in U^\perp}{w + w'})$$

2. $\|v - \operatorname{pr}_U v\| \leqslant \|v - u\| \quad \forall u \in U$

$$\|v - u\|^2 = \|\underset{\in U^\perp}{v - \operatorname{pr}_U v}\|^2 + \|\underset{\in U}{\operatorname{pr}_U v - u}\|^2$$

Опр

$e_1, ..., e_n$ - базис V

Базис называется ортогональным, есди $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ - ортогональный баз

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{bmatrix} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{bmatrix}$$

Процесс ортоганализации Грамма-Шмидта:

$e_1, ..., e_n$ - базис

Хотим ортонормированный $f_1, ..., f_n :< f_1, ..., f_k >=< e_1, ...e_k > \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$:
Строим по индуции:
Б.И. k=1:

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

И.П. $k - 1 \to k$:

$$f_k = e_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f_i$$

$$(f_k, f_j) \stackrel{?}{=} 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1$$

$$(f_k, f_j) = (e_k, f_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \underbrace{(f_i, f_j)}_{=\lambda_j}$$

$$\lambda_j = -(e_k, f_j) \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant k-1$$

Ортонормируем f_k, чтобы $(f_k, f_k) = 1$

Утв

Если $e_1, ..., e_n$ - ОНБ U

$$\mathrm{pr}_U\, v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i$$

Док-во

Хотим доказать $v - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i \in U^{\perp}$
Достаточно доказать, что вектор ортогонален любому

$$\underbrace{(v - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i) e_j}_{1 \leqslant j \leqslant n} = (v, e_i) - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)(e_i, e_j)$$