1 Применение интеграла Римана для вычисления площадей и объемов. Примеры.

Опр **(школьное)**

Пусть $P \in \mathbb{R}^2$("фигрура"), $\mathcal{P}$ - некоторый набор плоских "фигур”, $P_i \in \mathcal{P}$
$g : \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ - называется площадью, если:

1. $\forall P \in \mathcal{P}$, $S(P) \geqslant 0$

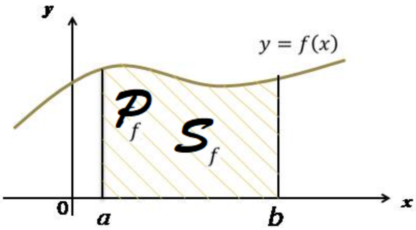
2. $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

Опр

$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняет расстояние

3. $\forall P \in \mathcal{P}$ τ-движения $S(\tau(P)) = S(P)$

Площадь криволинейной трапеции.



Опр

Подграфиком $f \in R[a, b]$ называется $P_f := \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Возьмём разбиение и верх. и нижн. суммы Дарбу. S - монотонна, т.е.

$$P_1 \subset P_2 \Rightarrow S(P_1) \leqslant S(P_2),\ S_*(\tau) = S(P_*(\tau)),\ S^*(\tau) = S(P^*(\tau))$$

$$P_*(f, \tau) \subset P(f) \subset R^*(f, \tau)$$

$$\begin{matrix} S(P_*(f, \tau)) = S_*(f, \tau) \to \int_a^b f \\ S(P^*(f, \tau)) = S^*(f, \tau) \to \int_a^b f \end{matrix} \qquad S(P_f) := \int_a^b f$$

Пример

Первая четверть эллипса с радиусами (a, b).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad S=\int\limits_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \text{ - сложно, перейдём в поляры}$$

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

$$\int\limits_0^a f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t d(a\cos t)=ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt=-ab(t-\frac{\sin 2t}{2})|_{\frac{\pi}{2}}^0=0-(-\frac{\pi ab}{4})=\frac{\pi ab}{4}$$

Вычисление объемов

Утв

Принцип Кавальери. Если у двух тел одни сечения на одном уровне, то их объемы равны.

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} S(\xi_k)\Delta_k$ - сумма Римана

$V=\int\limits_a^b S(x)dx$ - измельчаем плоскости

Пример

(на самом деле тела вращения можно считать как $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$)

2 Путь. Длина пути. Спрямляемый путь. Аддитивность длины пути.

Опр

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ ... \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, $\gamma_k : [a, b] \to \mathbb{R}$. Расстояние считается как $d(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$, γ - путь, если $\forall i \in \{1, ...k\}$ $\gamma_i \in C[a, b]$

Опр

Путь называется r-гладким, если $\forall i \in \{1, ...k\}$ $\gamma_i \in C^r[a, b]$

Опр

Два пути считаются эквивалентными если можно сделать замену переменной. Т.е. пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, тогда:
$\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow \exists \varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ - строго возрастающая, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi$

Опр

Кривая - класс эквивалентности путей. $\forall$путь - представитель класса эквивалентности называется "параметризацией"

Пример

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = \sin t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t^2 & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = \sin t^2 & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, определяют одну и ту же кривую (окружность)

Опр

Кривая называется r-гладкой, если у неё есть r-гладкая параметризация

Опр

γ - простой путь $\Leftrightarrow \gamma$ - биекция на (a, b), т.е. $\forall t_1, t_2 \in (a, b) : \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (без самопересечений).
Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ - замкнутый путь.

Опр (длины пути)

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\tau - [a, b] : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Соединим $[\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})]$ отрезками - получим вписанную ломанную.

$$\text{Длина } k\text{-ого звена: } \sqrt{\sum_{j=0}^{m} (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$$

Тогда длина вписанной ломанной: $l = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$

Длиной пути назовём $S_\gamma := \sup\limits_{\tau} l_\tau$ - всевозможных ломанных

Опр

Путь называется спрямляемым, если $S_\gamma < +\infty$

Утв

Аддитивность длины пути. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, пусть γ_1 - сужение γ на $[a,c]$, γ_2 - сужение γ на $[c,b]$. Тогда $S_\gamma = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Док-во

а) $S_\gamma \geqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?
Пусть τ_1 - разбиение $[a,c]$, τ_2 - разбиение $[c,b]$,
$\tau = \tau_1 + \tau_2$, $l_{\tau_1} + l_{\tau_2} = l_\tau \leqslant S_\gamma$
(т.к. $S_\gamma - \sup$)
Возьмём sup по всем разбиениям отрезка $[a,c]$
$\Rightarrow \sup\limits_{\tau_1}(l_{\tau_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + l_{\tau_2} \leqslant S_\gamma$
Теперь sup по всем разбиениям отрезка $[c,b]$
$\Rightarrow \sup\limits_{\tau_1}(S_{\gamma_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2} \leqslant S_\gamma$

б) $S_\gamma \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?
Пусть τ - разбиение $[a,b]$.
Пусть $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. $l_\tau \leqslant l_{\tau^*}$, $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$,
где τ_1 - разбиение $[a,c]$, τ_2 - разбиение $[c,b]$.
$l_\tau \leqslant l_{\tau^*} = l_{\tau^1} + l_{\tau^2} \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$
Возьмём sup по всем разбиениям τ: $\sup\limits_{\tau}(l_\tau) = S_\gamma \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Примеры

Неспрямляемые пути:
1) Кривая Пеано

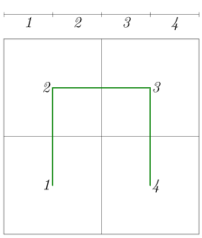


Fig. 1.

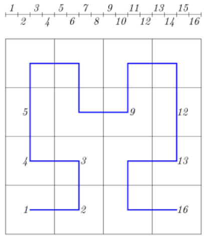


Fig. 2.

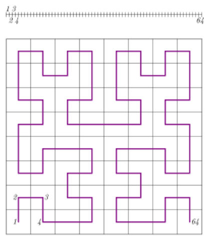
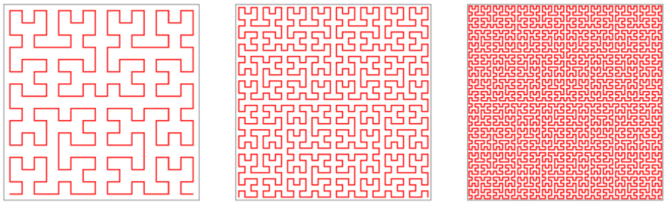
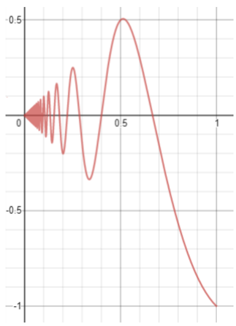


Fig. 3.



В пределе $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ - сюръективное отображение. В итоге получается прямая заполняющая весь квадрат с пересеченями (в смысле дополнение до подкривых пределе пусто)

2) $y = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Докажем, что прямая не является спямляемой.
Пусть $\tau : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1} < \ldots < 1$, $t_N = \frac{1}{N}$, тогда

$$y(t_k) = \frac{1}{k} \cos \pi k = \frac{1}{k}(-\pi)^k$$

Длина k-ого звена:

$$\frac{1}{k} - (-\frac{1}{k+1}) \geqslant \frac{2}{k} \Rightarrow l_\tau \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \Rightarrow \sup l_\tau = +\infty$$

3 Кривая. Длина кривой.

Опр. см. в билете 32

Теорема (о длинах эквивалентных путей)

Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^m$. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$

Док-во

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \exists \varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ - строго возрастающая, $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$, $\varphi(\tau_1) = \tau_2$ - разбиение $[a_2, b_2]$,

$$l_{\tau_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^{m} (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} = l_{\tau_2} \leqslant S_{\tau_2}$$

Перейдём к sup по всем τ_1: $\sup\limits_{\tau_1}(l_{\tau_1}) = S_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$

Аналогично получим неравенство $S_{\tau_2} \leqslant S_{\tau_1}$

Замечание

Корректность определения (с классами эквивалентности) длины пути следует из доказанной выше теоремы

4 Теорема о вычислении длины гладкого пути.

Теорема

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ - C^1-гладкая кривая, тогда γ - спрямляется, $S_\gamma = \int\limits_a^b |\gamma'|$

Док-во

1) γ - спрямляемая?
$\gamma_j \in C^1[a, b]\ \forall j \in \{1, 2, ..., m\}$ $\Rightarrow$(ф-ия достигает min и max на $[a, b]$ по т.Вейерштрасса)

$$m_j \leqslant \gamma_j \leqslant M_j,\ M := \sqrt{\sum_{j=1}^{m} M_j},\ m := \sqrt{\sum_{j=1}^{m} m_j},\ \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ ... \\ \gamma_n' \end{pmatrix}$$

$\forall \tau$-разбиения $[a, b] : l_\tau = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} =$
(по т. Лагранжа $\forall k = 0, 1, ...n-1\ \exists \xi_k \in [t_k, t_{k+1}] : \gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k) = \gamma_j'(\xi_k)\Delta_{t_k}$)
$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j'(\xi_k))^2 \Delta_{t_k}^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j'(\xi_k))^2} \Delta_{t_k} \Rightarrow m \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta_{t_k} \leqslant l_\tau \leqslant M \sum\limits_{k=0}^{n-1}$
$\Rightarrow m(b - a) \leqslant l_\tau \leqslant M(b - a) \underset{sup}{\to} m(b - a) \leqslant S_\gamma \leqslant M(b - a) \Rightarrow -\infty < S_\gamma < +\infty$

2) $S_\gamma = \int\limits_a^b |\gamma'|$?
Пусть $\gamma^{(k)}$ - сужение γ на $[t_k, t_{k+1}]$. Для него выполняется пункт (1):

переобозначим γ' как $\overset{\bullet}{\gamma}$ из-за сложности обозначений

$$m_j^{(k)} = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\overset{\bullet}{\gamma}_j (t)|,\ M_j^{(k)} = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\overset{\bullet}{\gamma}_j (t)|$$

$$m^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (m_j^{(k)})^2},\ M^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (M_j^{(k)})^2}$$

$$m^{(k)} \Delta t_k \leqslant S_{\gamma^{(k)}} \leqslant M^{(k)} \Delta t_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leqslant S_\gamma \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)} \Delta t_k$$

$$m_j^{(k)} \leqslant |\overset{\bullet}{\gamma}_j^{(k)} (t) \leqslant M_j^{(k)}|\ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1},\ \forall j = 1, ..., m$$

Суммируем, возводим в квадрат, иззвлекаем корень:

$$m^{(k)} \leqslant |\overset{\bullet}{\gamma}^{(k)} (t)| \leqslant M^{(k)}|\ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$$

Проинтегрируем по $\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} dt :\ m^{(k)} \Delta t_k \leqslant \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\overset{\bullet}{\gamma}^{(k)} (t)| dt \leqslant M^{(k)} \Delta t_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leqslant \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} | \overset{\bullet}{\gamma}^{(k)}(t)|dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)}\Delta t_k, \text{ оценим } \sum_{k=1}^{n-1}(M^{(k)} - m^{(k)}\Delta t_k) :$$

$$M^{(k)} - m^{(k)} = \frac{(M^{(k)})^2 - (m^{(k)})^2}{M^{(k)} + m^{(k)}} = \sum_{j=1}^{m}(M_j^{(k)} - m_j^{(k)})\frac{M_j^{(k)} + m_j^{(k)}}{M^{(k)} + m^{(k)}} \leqslant \sum_{j=1}^{m}(M_j^{(k)} - m_j^{(k)})$$

$$\gamma_j \in C^1[a,b] \Rightarrow \gamma_j' \in C[a,b] \Rightarrow \text{р/н} \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta_j > 0 :$$

$$\lambda(\tau) < \delta_j \Rightarrow 0 \leqslant M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \leqslant \frac{\mathcal{E}}{m(b-a)} \underset{\delta = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \delta_j}{\overset{\sum\limits^{m}}{\Rightarrow}} 0 \leqslant M^{(k)} - m^{(k)} \leqslant \frac{\mathcal{E}}{b-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(M^{(k)-m^{(k)}}\Delta t_k < \frac{\mathcal{E}}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k = \mathcal{E} \Rightarrow S_\gamma = \int\limits_a^b | \overset{\bullet}{\gamma} |$$

5 Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Примеры.

Опр

$$f_n : E \to \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}$$

Говорят, что функ. последовательность сходится поточечно к $f : E \to \mathbb{R}$, если:

$$\forall x \in E \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(x,\mathcal{E})} : \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$$

Опр

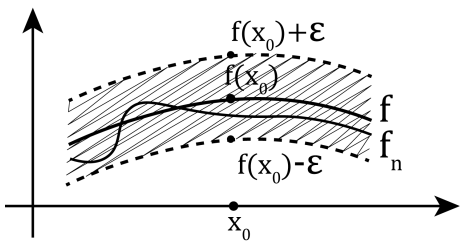
Говорят, что функ. послед. сходится к f равномерно на E

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$$

$$\text{Если } \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(\mathcal{E})} \quad \forall n > N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$$

$$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(\mathcal{E})} \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$$



Примеры

1. $f_n(x) = \dfrac{sin^2(e^x) - \arctan(n^2\sqrt{x})}{\sqrt{n}} \qquad x \in [0; +\infty)$

$$0 \leqslant \sup_{[0,+\infty)} |f_n(x)| \leqslant \frac{10}{\sqrt{n}} \to 0$$

$$\Rightarrow f_n \underset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows} 0$$

2. $f_n(x) = x^n - x^{2n} \qquad x \in [0,1]$

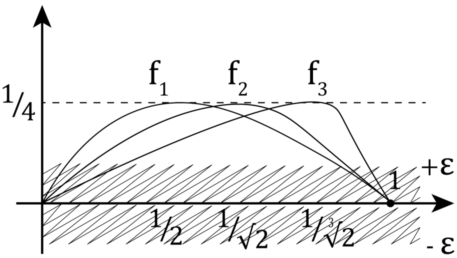
$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall x \in [0,1] \text{ - поточечно. Равномерно ли?}$$

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = x^{n-1}(n - 2nx^n)$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \text{ - крит. точка}$$

$$f_n(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{ равномерной сх-ти нет}$$



Горбик убегает

<u>Замечание</u>

Из равномерной сх-ти ⇒ поточечная

6 Критерий Коши для равномерной сходимости функциональной последовательности.

<u>**Теорема**</u> **(Критерий Коши для равномерной сходимости функ. послед.)**

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \qquad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \mathcal{E}$$

<u>**Док-во**</u>

($\Rightarrow$):

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} > 0 : \quad \forall m, n > N_{\mathcal{E}} :$$

$$\sup |f_n - f_m| \leqslant \sup(|f_n - f| + |f - f_m|) < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$$

($\Leftarrow$):

$$\forall x \in E \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \mathcal{E}$$

т.е. $\{f_n(x)\}$ - сх. в себе $\Leftrightarrow \{f_n(x)\}$ имеет конеч. предел

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \text{ т.о. } f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in E$$

(т.е. f - поточеч. предел послед.)

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \quad \forall x \in E$$

$$f_m(x) - \mathcal{E} < f_n(x) < f_m(x) + \mathcal{E} \underset{n \to \infty}{\to} f_m(x) - \mathcal{E} \leqslant f(x) \leqslant f_m(x) + \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leqslant \mathcal{E} < 2\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \sup |f_m(x) - f(x)| < \mathcal{E}$$

7 Сохранение непрерывности при равномерном предельном переходе. Теорема Дини (б/д). Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема (о равномерном пределе непр. функции)

$$f_n \text{ - непр в т. } x_0 \in E, \qquad f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$$

$$\text{Тогда } f \text{ - непр. в т. } x_0$$

Док-во

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \text{(зафиксир.), т.к. } f_n \rightrightarrows f, \text{ то:}$$

$$\exists N_{\mathcal{E}} : \forall n > N_{\mathcal{E}} \quad (\text{зафикс } n^* > N_{\mathcal{E}}) \quad \sup_E |f_n - f| < \frac{\mathcal{E}}{3} \quad (*)$$

$$\text{В частности, для } n^* > N_{\mathcal{E}} \quad \sup_E |f_n - f| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$f_{n^*} \text{ - непр. в т. } x_0 : \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in E : \quad |t - x_0| < \delta \quad |f_{n^*}(t) - f_{n^*}(x_0)| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$\text{Тогда } \forall x \in E : \quad |x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| \overset{\triangle}{\leqslant} |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| + |f_{n^*}(x_0) - f(x_0)| < \mathcal{E}$$

Следствие

$$\text{Если } f_n \in C(E), \quad f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f, \text{ то } f \in C(E)$$

Теорема (Дини)

$$f_n \in C[a, b] \qquad f_n(x) \to f(x) \quad (\text{поточ. на } [a, b])$$

$$\text{Причем} \quad \forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \searrow \ (\text{по n}) \ (f_n \searrow f), \ \text{т.е } f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

$$\text{Если } f \in C[a, b], \text{ то } f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$$

Док-во (не нужно доказывать)

$$\text{Т.к. } f_n \searrow f, \ \text{то} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E},x} : \forall n > N_{\mathcal{E},x} \quad 0 \leqslant f_n(x) - f(x) < \mathcal{E}$$

$$n_x \text{ - зафикс. } (n_x > N_{\mathcal{E},x})$$

$$f_{n_x} - f \text{ - непр. на } [a, b] \text{ и в т. х}$$

$$\Rightarrow \exists U_x\text{-окр.: } \forall t \in U_x \quad 0 \leqslant f_{n_x}(t) - f(t) < \mathcal{E} \quad (*)$$

и по т. о стабилизации знака в каждой х выбираем окр. такую что:

$$[a,b] \subset \bigcap_{x\in[a,b]} U_x \Rightarrow \exists \{x_j\}_{j=1}^N : [a,b] \subset \bigcap_{j=1}^{N} U_{x_j}$$

(компакт, значит можем выделить конечное подпокрытие)

$$n_{\mathcal{E}} := \max_{1\leqslant j\leqslant N}(n_{x_j}) \text{ - номера } f_n \text{ для } \forall x_j \text{ такие что } (*):$$

$$\forall \xi \in [a,b] \quad \exists j = 1...N : \xi \in U_{x_j} \Rightarrow \forall n > n_{\mathcal{E}} > n_{x_j}$$

$$0 \leqslant f_n(\xi) - f(\xi) < \mathcal{E}$$

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла)

$$f_n \in R[a,b] \quad f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \in R[a,b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f$$

Док-во

$$a < b$$

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| < \sup_{[a,b]} \left| \underset{\to 0}{f_n - f} \right| \cdot (b-a) \to 0$$

Утв

Функ. ряд сход равномерно $\Leftrightarrow$ посл-ть частичных сумм сход равномерно

Следствие (1)

$$f_n \in C[a,b] \quad \sum_{n=1}^{N} f_n \rightrightarrows f, \text{ тогда:}$$

$$1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C[a,b]$$

$$2) \quad \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Следствие (2)

$$\text{Если } f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b] \qquad f_n \in C[a,b]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in C[a,b]$$

$$\text{То } \sum f_n \text{ - сход. равномерно на } [a,b]$$

8 Дифференцируемость и равномерная сходимость.

Теорема (диф-сть и равном. сх-ть)

$$f_n \in C^1[a,b] \quad f'_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$$

$$\text{и } \exists c \in [a,b]: \quad \{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty} \text{ - сх}$$

Тогда:

1. $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$
2. $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$

Док-во

1. Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup |f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c) + f(c) - f(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup \left| \int_c^x f'_n - \int_c^x g + f_n(c) - f(c) \right| \leqslant \sup \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| + |f_n(c) - f(c)| \qquad (*)$$

$$f'_n \rightrightarrows g \Rightarrow \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| \leqslant \underbrace{\sup |f'_n - g|}_{\to 0} \underbrace{(x-c)}_{\leqslant (a-b)}$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| < \mathcal{E}$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |f_n(c) - f(c)| < \mathcal{E} \Rightarrow (*) < 2\mathcal{E} \Rightarrow f_n \rightrightarrows f$$

2. $$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f'_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_c^x g \overset{1.}{\underset{(*)}{=}} f(x) - f(c) \overset{1.}{\Rightarrow} f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$$

(по т. о предельном переходе под знаком интеграла)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = \int_c^x g + f(c) \Rightarrow f'(x) = g$$

т.о $\quad f_n(x) \to f(x)$ поточ. на $[a,b]$

$f'(x) = g(x)$ непр. (равн. предел непр ф.)

$$\Rightarrow f \in C^1[a,b]$$

Пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(x^n)$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n} \to 0 \qquad \text{т.е. } f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 = f$$

$$f'_n(1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+x^{2n}} \cdot n \cdot x^{n-1} \Big|_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Но } (\lim_{n\to\infty} f_n)'_{x=1} = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1)$$

9 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема (признак Вейерштрасса равн сх-ти)

$$f_n : E \to \mathbb{R}$$

$$\forall n\ \exists M_n : \quad |f_n(x)| \leqslant M_n \quad \forall x \in E$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \text{ (сход. мажоранта)}$$

$$\text{Тогда ряд } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ сх. равномерно и абсолютно на } E$$

Док-во

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N \Leftrightarrow \sum M_k < \infty$$

$$\text{Тогда } |S_n - S_{m-1}| = \left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \left|\sum_{k=m}^{n} M_k\right| < \mathcal{E}$$

$$\text{Т.е. } |S_n - S_{m-1}| < \mathcal{E}, \text{ т.е. вып. кр. Коши для } S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$$\text{част. суммы сх равн. } \Rightarrow \text{ функ. ряд сх. равн.}$$

Теорема* (Вейерштрасса о плотности алгебраических многочленов в C[a,b])

$$\text{Пусть } f \in C[a,b], \text{ тогда } \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists P(x) : \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \mathcal{E}$$

Лемма*

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{k}{n} - x)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Опр*

$$b_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n$$

$$B_n(f;x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x) \text{ - многочлен Бернштейна}$$

$$\sup |f(x) - B_n(x)| < \mathcal{E}$$

10 Степенной ряд (в $\mathbb{C}$). Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.

Опр

Будем рассматривать

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad c_k, z \in \mathbb{C}$$

Опр

$$z = x + iy$$

$$x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = |z| \cos\varphi \qquad y = |z| \sin\varphi$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$C_n = a_n + ib_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c, \text{ если } \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |c_n - c| < \mathcal{E}$$

Утв

$$c_n \underset{n\to\infty}{\to} c \Leftrightarrow \begin{matrix} a_n \to a \\ b_n \to b \end{matrix} \quad (n \to \infty)$$

$$c_n = a_n + ib_n$$

$$c = a + ib$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

Док-во

здесь когда-нибудь будет док-во

Лемма

здесь когда-нибудь будет лемма

Замечание

здесь когда-нибудь будет замечание

Док-во

здесь когда-нибудь будет док-во

Следствие

здесь когда-нибудь будет следствие

Опр

Радиусом сх-ти степ. ряда $\sum c_n z^n$ назыв $R \in [0, +\infty]$ такое, что $(z \neq 0)$

$$\forall z : |z| < R \text{ - ряд. сх}$$

$$\forall z : |z| > R \text{ - ряд расх.}$$

Примеры

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k! z^k$ по пр. Даламб $\quad$ расх $\forall z \neq 0 \quad R = 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|(k+1)! z^{k+1}\right|}{|k! z^k|} = \infty, \quad z \neq 0$$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ - сх. $\forall z \in \mathbb{C}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$\begin{aligned} z^* = -1 \quad &: \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ - сх } \Rightarrow \text{ сх. равн. } \forall\, |z| \leqslant d < 1 \\ z_0 = 1 \quad &: \quad \sum \frac{1}{n} \text{ - расх } \Rightarrow \forall\, |z| > 1 \end{aligned}$$

Теорема (ф-ма Коши-Адамара)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad R \text{ - рад. сх-ти}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

Док-во

здесь когда-нибудь будет док-во