2019-10-25

Задача (1)

Изоморфны ли $C_8 \times C_3$ и $C_4 \times C_6$?

В $C_8 \times C_3$ есть эл-ты порядка 24
В $C_4 \times C_6$ макс порядок 12
$f : G \to H$ изоморфизм
$g \to h$ и у g и h разные порядки?

$$(f(g))^{12} = f(g^{12}) = e$$

h - порядка 24 $\quad h \in C_8 \times C_3$

$$f : C_4 \times C_6 \to C_8 \times C_3$$

$$g \to h$$

$$g = f^{-1}(h)$$

$$f(g^{12}) = e = (f(g))^{12}$$

$$f : G \to H$$

$$g \to h \qquad \exists \text{ порядок } g = n \qquad \text{порядок } h = m$$

$$h^n = (f(g))^n = f(g^n) = f(e_1) = e_2 \qquad m \,\vdots\, n \qquad m \geqslant n$$

$$e_2 = h^m = (f(g))^m = f(g^m) \Rightarrow e_1 = g^m \Rightarrow n \,\vdots\, m \quad n \geqslant m \Rightarrow n = m$$

Задача (2)

Для каких G следующие отображения $f : G \to G$
гомоморфизмы

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^{-1}$

Если взять $(Z, +)$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x + y) = 2(x + y)$$

Нужно проверить, выполняется ли такое соотношение:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x \cdot y) = x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y$$

Для этого нужна комм. группа

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = (x \cdot y)(x \cdot y)$$

$$f(x) \cdot f(y) = x^2 \cdot y^2 = x \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$x \cdot (y \cdot x) = x \cdot (x \cdot y) \Leftrightarrow x \cdot y \cdot x = x \cdot x \cdot y \Leftrightarrow y \cdot x = x \cdot y$$

Ответ для 1. Необходима комм. группа

$$f(x) = x^{-1}$$

$$f(x \cdot y) = f(x)f(y) = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

$$f(x \cdot y) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = e$$

$$y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad \Big| \cdot x$$

$$xy^{-1}x^{-1} = y^{-1} \quad \Big| \cdot y$$

$$yxy^{-1}x^{-1} = e$$

$$yx = xy$$

Задача (3)

Найти нормальные подгруппы S_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3 подгруппы, (1 элемент остается на месте)
Рассмотрим циклы длины 3
Если возвести цикл в квадрат, то мы получим обратную перестановку
2 подгруппы (2 цикла)
1 группа из id

$$\{e, (1\ 2)\}$$

$$\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \text{ - нормальная?}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

порядок (1 2 3) $\quad = 3$

В S_3 $\quad$ 3 элемента

$g(1\ 2\ 3)g^{-1} =$ цикл длины 3

$\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ - действительно нормальная

Проверим $\{e, (1\ 2)\}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Элемент не остался на месте

$\{e, (1\ 2)\}$ не нормальная

$S_{3/H} \simeq C_2$

Утв

Если есть цикл длины n, то порядок $= n$

Напоминание

$Q_8 \qquad \pm 1 \quad \pm i \quad \pm j \quad \pm k$

-1 коммутирует со всеми

$i \cdot j = k$

$j \cdot i = -k$

$j \cdot k = i$

$i \cdot k = -j$

$i^2 = -1$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Задача (4)

(!) Q_8 изоморфна группе матриц по умножению

$$E = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \pm I = \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

$$J = \pm\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} \qquad \pm K = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\pm 1 \to \pm E$$

$$\pm i \to \pm I$$

$$\pm j \to \pm J$$

$$\pm k \to \pm K$$

$$K^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -E$$

Надо все проверить

Упр

Досчитать 4 дома

Задача (5)

Найти все гомоморфизмы $Z_6 \to Z_{18}$

$$(\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_{/18}\mathbb{Z}, +)$$

$$(\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{/18}\mathbb{Z}, +)$$

Вариант от Сережи

Слева порядок, а справа элемент из $\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ll} 1 & 0 \to 0\\ 6 & 1 \to 3\\ 3 & 2 \to 6\\ 2 & 3 \to 9\\ 3 & 4 \to 12\\ 6 & 5 \to 15 \end{array}$$

$$f(x) = 3kx, \quad k \in N$$

$$f(x) = 3x$$

$$f(x) = 3kx \mod 18$$

$$f(x+y) = 3k(x+y) = 3kx + 3ky = f(x) + f(y)$$

Почему нельзя взять любое k?

$$0 = f(0) = f(1_1^6) = f(1_1)^6 = 6(1_2) \neq 0$$

$$f(1_1) \rightarrow$$

$$f(2_1) = f(1_1 + 1_1) = f(1_1) + f(1_1)$$

$$f(k_1) = kf(1_1)$$

1_1 - имеет порядок 6, значит она не может отобразиться в элементы с порядком не делителем 6, а иначе противоречие

$$f(1_1) \rightarrow 9_2$$

$$f(1_1) \rightarrow 12_2$$