0.1 02.09.2019

0.1.1 Снова та же тема

Пример

$$f = xy + 2xz + 2yz, \qquad xyz = 108$$

$$L(x) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 108)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,\ y,\ z) = y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,\ y,\ z) = x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(z,\ y,\ z) = 2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$2xz + 2yz + 108\lambda = 0$$

$$x + y + 4z + \lambda(\underbrace{xz + yz}_{=-54\lambda}) = 0$$

$$xy + 2xz + 108\lambda = 0$$

$$xy + 2yz + 108\lambda = 0$$

$$\Rightarrow xz = yz \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} x = y$$

$$xyz = 4z^3 = 108 \Leftrightarrow z = 3, \qquad z = y = 6$$

$$2*6*3 + 2*6*3 = -108\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$dL_{(x,y,z)} = (y + 2z - \frac{2}{3}yz)dx + (x + 2z - \frac{2}{3}xz)dy + (2x + 2y - \frac{2}{3}xy)dz$$

$$d^2_{(x,y,z)}L = 0dx^2 + 2(1 - \frac{2}{3}z)dx + dy + 2(2 - \frac{2}{3}y)dxdz + 2(2 - \frac{2}{3}x)dydz$$

$$d^2_{(x,y,z)}L = 2(1 - \frac{2}{3}3)dxdy + 2(2 - \frac{2}{3}6)dxdy + 2(2 - \frac{2}{3}6)dy = -2dxdy - 4dxdz - 4dydz \boxed{=}$$

$$\underbrace{d(xyz)}_{=yzdx+xzdy+xydz} = 0 \text{ в } (6,6,3)$$

$$d_{(6,6,3)}(xyz) = 18dx18dy + 36dz = 0 \Rightarrow dz = -\frac{dx + dy}{2}$$

$$\underset{dz=\frac{dx+dy}{2}}{\boxed{=}} -2dxdy + 2(dx^2 + dxdy) + 2(dy^2 + dxdy) =$$

$$= 2(dx^2 + 2\frac{1}{2}dxdy + dy^2) > 0, \qquad dx^2 + dy^2 > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

т.о. в (6,6,3) - лок. усло. мин.

Пример

$$F(x,y,u) = 2x^2 + 2y^2 + u^2 + 8yu - u + 8 = 0$$

Найти экстр. $u(x,y)$

Решение

В принципе это квадратное уравнение и мы можем выразить u просто его решив, но давайте забудем, что мы так умеем...

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{4x}{2u+8y-1} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{4y+8u}{2u+8y-1} = 0 \end{cases}$$

$$F'_u = 2u + 8y - 1 \neq 0$$

$$x = 0 \qquad y = -2u \text{ в стац. точке}$$

$$F(x,y,u) = 0 \text{ - и это условие}$$

$$F(0,-2u,u) = 8u^2 + u^2 - 16u^2 - u + 8 = -7u^2 - u + 8 = 0$$

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = -\frac{8}{7}$$

$$\text{Подозрительные точки } (0,-2,1) \qquad F'_u(0,-2,1) = -15 \neq 0$$

$$(0,\frac{16}{7},-\frac{8}{7}) \qquad F'_u(0,\frac{16}{7},-\frac{8}{7}) = -1 - 14u = -15$$

В стационарных точках

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{4}{F'_u} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{4 + \overbrace{8u'_y}^{=0}}{F'_u}$$

Пояснение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(F''_{xx} + F''_{xu}\overbrace{u'_x}^{=0})F'_u - \overbrace{F'_x}^{=0}(F''_{xu} + F''_{uu}u'_x)}{(F'_u)^2}$$

$$= -\frac{F''_{xx}}{F'_u} \text{ в стац. точке!}$$

$$F'_u(x,y,u(x,y))'_x$$

$$(0,-2,1) \qquad d^2u = \frac{u}{15}(dx^2 + dy^2) \text{ - стр. пол. опр.} \Rightarrow \text{точка лок. min}$$

$$(0,\frac{16}{7},-\frac{8}{7}) \qquad d^2u = -\frac{4}{15}(d^2x + dy^2) \leqslant 0 \Rightarrow \text{лок } \max$$

Пример

$$F(x,y,u) = (x^2+y^2+u^2)^2 - 8(x^2+y^2-u^2) = 0, \qquad u > 0$$

$$F'_x = 4x(x^2+y^2+u^2) - 16x = 0$$
$$F'_y = 4y(x^2+y^2+u^2) - 16y = 0$$

ТУТ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО (я занимался файликами)
То есть стационарные точки находятся на:

$$u = 1 \qquad x^2+y^2 = 3$$

Функция постоянна на целой окружности, значит нет строго экстремума. Можем только надеяться, что в других направлениях форма положительно определена

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad t^2 = x^2+y^2$$

$$(t^2+f^2)^2 - 8(t^2-f^2) = 0$$

$$f'_t = 0 \qquad t = \sqrt{3} \text{ - стац. точка } f(\sqrt{3}) = 1$$