Содержание

1 Метрические пространства **2**

Топология $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sqrt{\sum_j^n |x_j - y_j|^2}$ 5

Топологические св-ва 5

Ограниченность 6

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса 6

2 Компатные множества в $\mathbb{R}^n$ **7**

3 Отображения в $\mathbb{R}^n$ **12**

Непрерывные отображения 13

Локальные свойства непрерывности 15

4 Глобальные св-ва непрерывности **16**

Диф-ние композиции 29

5 Частные производные композиции (в усл. теоремы) **30**

Геометрические св-ва градиента 31

5.1 Непрерывно дифференцируемые отображения 33

Лемма о среднем 33

Т. о непр. диф. отображении в точке 34

5.2 Непрерывно дифференцируемые отображения 34

6 Теория функций компл. переменного **37**

6.1 Комплексное дифференциирование 49

2019-09-04

1 Метрические пространства

$$M \text{ - мн-во}, \quad d : M \times M \to [0; +\infty) \text{ - метрика}$$

Теорема

Аксиомы метрики:

1. $d(x, y) \geqslant 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Примеры

1. $M = \mathbb{R}^n \quad x \in M \quad x = (x_1, ..., x_n)$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j|$$

2. $M = \mathbb{R}^n$,

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum |x_j - y_j|^n_{j=1}}$$

$$\text{В частн. } d_2(x, y) = \sqrt{\sum^n |x_j - y_j|^2}$$

3. $M = C[0, 1]$

$$f, g \in M$$

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

4. $M = C[-1, 1] \quad d(f, g) = \int_{-1}^{1} |f - g|$

Утв

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} \leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j|$$

$$d_\infty(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant n \cdot d_\infty(x, y)$$

Опр

$$x^{(m)} \in M$$

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x \Leftrightarrow d(x^{(m)}, x) \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

Пример

1. $M = C[0,1] \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

$$f^{(m)} \underset{d}{\to} f \Leftrightarrow f^{(m)} \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$$

2. $M = \mathbb{R}^n, \quad d_2(x,y) \quad x^{(m)} = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$

$$x^{(m)} \underset{d_2}{\to} x \Leftrightarrow x_j^{(m)} \to x_j \quad \forall j = 1, ...n$$

Т.о сходимостьть по метрике d_2 в $\mathbb{R}^n$ равносильна покоординатной сх-ти

Теорема (Критерий Коши)

$$(\mathbb{R}^n, d_2)$$

$$x^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} x \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n, k \geqslant N$$

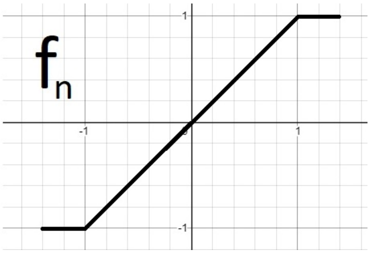
$d_2(x^{(n)}, x^{(k)}) < \mathcal{E}$ (упр, доказывается покоординатно)

Замечание

Аналогичн. Т. Верна не для всех метрич. пр

Пример

$$M = C[-1,1] \quad d(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} |f - g|$$

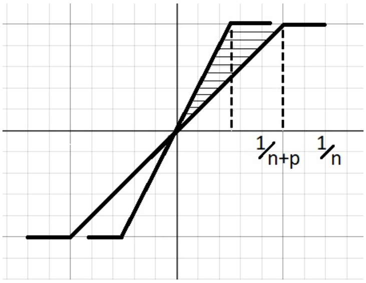


$\{f_n\}$ - сх. в себе:

$\forall\mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n > N \ \forall p > 0 \quad d(f_n, f_{n+p}) \overset{?}{<} \mathcal{E}$

$$d(f_n, f_{n+p}) = \int_{-1}^{1} |f_n - f_{n+p}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{1}{n} \to 0$$

$\Rightarrow \forall\mathcal{E} \quad \exists N : \forall n > N, p > 0 \ d(f_n, f_{n+p}) < \mathcal{E}$



Усл. Коши удовл. (сх в себе)

Есть ли $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$?

$g(x) = \operatorname{sign} x$ - поточечный предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_b - g| = 0$, но $g \notin C[-1, 1]$

Предположим, что $\exists f \in C[-1, 1] : \quad \lim f_n = f$, т.е $\displaystyle\int |f_n - f| \to 0$

$$0 \leqslant \int_{-1}^{1} |f - g| \leqslant \int_{-1}^{1} |f_n - f| + \int_{-1}^{1} |f_n - g| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{|f - g|}_{\in C[-1;1]} = 0$$

$$= \int_{-1}^{0} |\underbrace{f - g}_{=0}| + \int_{0}^{1} |\underbrace{f - g}_{=0}| \to \begin{matrix} f(x) = 1 & \forall x > 0 \\ f(x) = -1 & \forall x < 0 \end{matrix}$$

- неустранимый разрыв в точке $x = 0 \Rightarrow \lim f_n$ не существует

Упр

$C[0, 1] \quad d(f, g) = \sup\limits_{1\leqslant x\leqslant y} |f(x) - g(x)|$

Выполняется ли Т. Коши?

Топология $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_j^n |x_j - y_j|^2}$

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < r\}$

$X \subset \mathbb{R}^n \quad X$ - откр, если $\forall a \in X \quad \exists B_a : B_a \subset X$

X - замкнуто $\Leftrightarrow X^C$ - открыто

Теорема (св-ва)

1. U_α - откр $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ - откр.
2. $\{U_k\}_{k=1}^N$ - откр $\Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ - откр
3. F_α - замк $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$
4. F_k - замкн $\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$ - замк

Опр

Окрестность т. а:
U - откр: $a \in U$
δ-окр. т. а:
$U_a(\delta) = B(a, \delta)$
Прокол. δ-окр. т а:

$$\overset{\circ}{U}_a(\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\}$$

Внутренность $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\text{int}(X) = \{a \in X : \exists B_a \subset X\}$$

Внешность $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\text{ext}(X) = \text{int}(X^c) = \{b \in X^c : \exists B_b \subset X^c\}$$

Замыкание:

$$\text{Cl}(X) = (\text{ext}(X))^c$$

Граница:

$$\partial X = \text{Cl}(x) \setminus \text{int}(X) = \mathbb{R}^n \setminus (\text{int}\, X \cup \text{ext}\, X)$$

Примеры

$$X = B(0,1)$$

$$\operatorname{int} X = B(0,1)$$

$$\operatorname{ext} X = \{x : d(0,x) > 1\}$$

$$\operatorname{Cl} X = \overline{B}(0,1) = \{x : d(0,x) \leqslant 1\}$$

Рисунок шарика

$$\partial X = S(0,1) = \{x : d(0,x) = 1\}$$

Упр

Доказать или опровергнуть

1. $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$
2. $\partial(\partial X) = \partial X$
3. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} X) = \operatorname{Cl} X$

Утв

$$X \text{ - замкн } \Leftrightarrow ClX = X$$

Док-во

$$U \text{ - откр} \quad \operatorname{int} U = U$$

$$\Rightarrow X \text{ - замкн } \Leftrightarrow X^c \text{ - откр.} \Leftrightarrow \operatorname{ext} X = \operatorname{int}(X^c) = X^c \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Cl} X = (\operatorname{ext} X)^c = X^{cc} = X$$

Опр

Ограниченность:

$$X \subset \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$$

$$X \text{ - огр. если } \operatorname{diam} X < \infty \Leftrightarrow \exists R > 0 : X \subset B(0,R) \text{ (УПР)}$$

Теорема (принцип выбора Больцано-Вейерштр.)

$$\forall \text{ огр. послед. } \{X^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n \text{ можно выделить сх. подпослед.}$$

2 Компатные множества в $\mathbb{R}^n$

Опр

$K \subset \mathbb{R}^n$ - компактное мн-во $\Leftrightarrow \forall$ откр. покр. можно выделить конеч. подпокр.

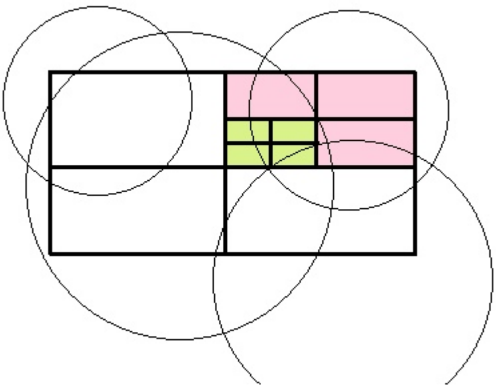
Т.е. если $U_\alpha -$ откр. $\forall \alpha \in A : K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in A :$

$K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_\alpha$

Примеры

1. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ - компакт.

2. $I := \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$



$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n$

$\operatorname{diam} I_n = \dfrac{\operatorname{diam} I}{2^n} \to 0$

I_n - замк

$I_k = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \qquad \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] = \{c_j\} \forall j$

$[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \supset [a_j^{(k+1)}], b_j^{(k+1)}$

$x^* \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k$

Если $y^* \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k \Rightarrow d(x^*, y^*) \leqslant \operatorname{diam} I_k \to 0$

$\Rightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$

$x^* = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$

$x^* \in I \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow$

$\exists \alpha^* : x^* \in U_{\alpha^*}$ - откр

$\exists B(x^*, \delta) \subset U_{\alpha^*}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : I_N \subset U_{\alpha^*}$

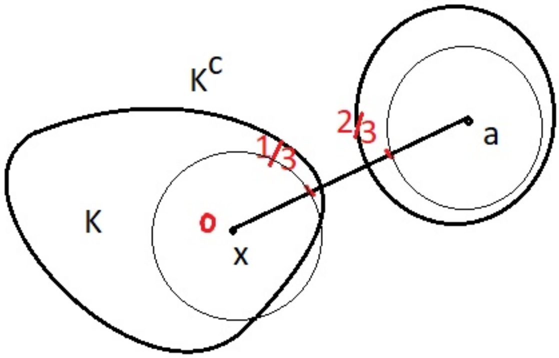
2019-09-11

Лемма

$K \subset \mathbb{R}^n$ - компакт, тогда:

1. K - замкн
2. K - огр
3. $\forall D \subset K \quad D$ - замк $\rightarrow D$ - комп

Док-во



1) $\quad K^c \ni a$

$\forall x \in K \quad d(a, x) > 0$

$r_x = \dfrac{1}{3} d(x, a)$

$\forall x \in K$

$B(x, r_x)$ - откр

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, r_x)$ - откр. покр. компакта K

$\exists x_1, ..., x_N \in K : K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B(x_j, r_{x_j})$

$a \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} B(a, r_{x_k}) = B(a, r_{\min}$

$r = \min(r_x, r_{x_N}) > 0$

причем $\bigcap\limits_{1}^{N} B(a, r_{x_k})$ не имеет общих точек

$\bigcup\limits_{1}^{N} B(x_k, r_{x_k}) \supset K$

$\exists B(a, e_{mn}) \subset K^c \to K^c$ - откр $\to$ K - замкн

2) комп - $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B(0, k)$ - откр. покр

$\Rightarrow \exists k_1, ..., k_n$

$K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B(0, k_j) = B(0, \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N}(k_j)) \Rightarrow K$ - огр

3) замкн - $D \subset K$ - комп

Пусть откр. покр

$D \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$

$U^* = D^c$ - откр - добавим к покр. K$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

$\Rightarrow$ выд. конечн. подпокрытие $K \quad \{U_{\alpha_j}\}_{j=1}^{N} \cup \{U^*\}$

$D \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} U_\alpha$

Теорема (След. усл. равносильны)

1. K - компакт.
2. K - замк. и огр.
3. $\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \; x_m \in K$

   $\exists$ подпосл $x_{m_k} \to x \in K$

Док-во

$(1 \Rightarrow 2)$ было

$(2 \Rightarrow 1)$

т.к. K - огр $\Rightarrow \exists I = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$

замкн - $K \subset I$ - комп

$\Rightarrow$ (лемма) K - комп

$(2 \Rightarrow 3)$

$x_m \in K$ - замк и огр

$\Rightarrow \exists x_{m_k}$ - сх (пр. выб. Б-В)

$x_{m_k} \to x$ предпол $x \notin K$

$x \in K^c$ - откр $\Rightarrow \exists B_x \subset K^c$

Но $K \ni d(x_{m_k}, x) \to 0$ противореч $x \in K$

$(3 \to 2)$

а) предп.K не явл. огр.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K : d(0, x_n) > n$

$\{x_n\}$ не огр $\Rightarrow$ не сх.

$\Rightarrow K$ - огр

б) предп., что K - не явл. замкн

K^c - не откр

$\exists a \in K^c : \forall \delta > 0 \ B(a, \delta) \cap K \neq \varnothing$

$\exists x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap K$

$x_n \in K$

$0 \leqslant d(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0 \quad x_n \to a; \ x_{n_k} \to x \in K$

Упр

$K_1 \supset K_2 \supset ...$

д-ть $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j \neq \varnothing$

3 Отображения в $\mathbb{R}^n$

Опр

$E \subset \mathbb{R}^n, \quad f : E \to \mathbb{R}^m$ - отобр-е (вект. ф-я)

($m = 1$ - ф-я)

$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$

$x = (x_1, ..., x_n) \quad f_j : E \to \mathbb{R}$ коорд. функ-ия

Опр

$a \in \mathbb{R}^n$

a - пред. т. E, если

$\forall \delta > 0 \quad U()(a, \delta) \cap E \neq \varnothing$

Опр

$f : E \to \mathbb{R}^m, a$ - пред. т E

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, если

(Коши)$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E$

$0 < d(x, a) < \delta \to d(f(x), L) < \mathcal{E}$

(Гейне) $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad x_k \in E \setminus \{a\} x_k \to_{k \to \infty} a \to F(x_k) \to_{k \to \infty} L$

Упр

Эквивалентность определений

Упр

Сходимость $\Leftrightarrow$ покоординатная сходимость

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

$$f(\delta,\delta) = \frac{1}{2} \underset{\delta\to 0}{\to} \frac{1}{2}$$

$$f(\delta,-\delta) = -\frac{1}{2}$$

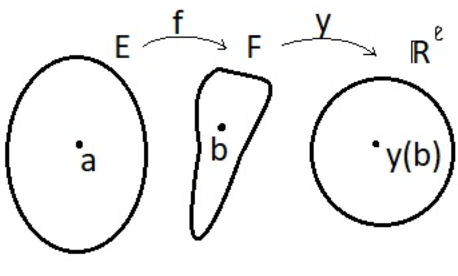
т.е $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не сущ.

Теорема (предел композиции)

$E \subset \mathbb{R}^n, \quad F \subset \mathbb{R}^m \qquad \mathbb{R}^n \ni a$ - пред т. E $F \ni b$ - пред. т. F

$f : E \to F; \quad g : F \to \mathbb{R}^l$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b; \quad \lim\limits_{x\to b} g(x) = g(b)$



Тогда $\lim\limits_{x\to a} g\circ f = g(b)$

Теорема (Крит. Коши)

a - пред т. E

$f(x)$ имеет предел в т.a

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overset{\circ}{U} (a,\delta) \cap E \to d(f(x), f(y)) < \mathcal{E}$

Опр (непрерывные отображения)

$a \in E \qquad f: E \to \mathbb{R}^m$

Если a - изол $\to f$ - непр в a,
если a - пред, то f - непр в т. $a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

f - непр в т.$a \Leftrightarrow f_j$ - непр. в т a $\forall 1 \leqslant j \leqslant m$

f - непр в т. $a; g$ - непр в $f(a) \Leftrightarrow g \circ f$ - непр в т a

непр сохр. при $+$, умн. на число

f - непр на $E \Leftrightarrow$ непр $\forall a \in E$

Теорема (эквивалентность определений непрерывности)

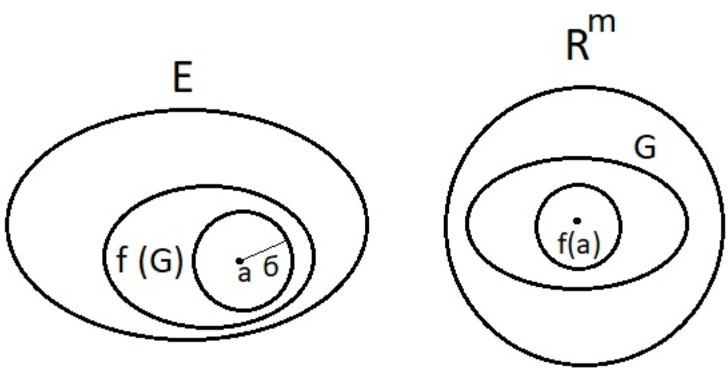
$f: E \to \mathbb{R}^m$

f - непр на $E \Leftrightarrow \forall G \subset \mathbb{R}^m \quad G$ - откр $\to f^{-1}(G)$ - откр в E

Док-во

G - откр.

$f^{-1}(G)$ - откр ?



$a \in f^{-1}(G)$

$f(a) \in G$ - откр $\to \exists U(f(a), \mathcal{E}) \subset G$

рисунок

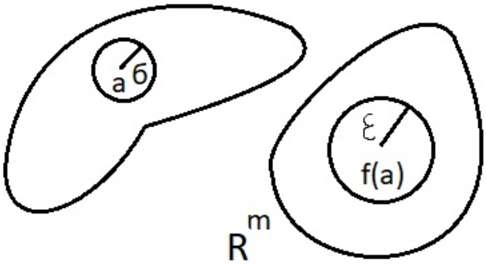
т.к f непр в т. a

$\exists\delta : d(a,x) < \delta \to d(f(a), f(x)) < \mathcal{E}$

$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\mathcal{E}) \subset G$

$\to B(a,\delta) \subset f^{-1}(G)$

$\leftarrow a \in E \to ?f$ - непр в т. а (рисунок)



$\forall\mathcal{E} > 0 B(f(a),\mathcal{E})$ - откр в $\mathbb{R}^m$

$\to f^{-1}(B(f(a),\mathcal{E})$ - откр. $\to \exists\delta : B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\mathcal{E})) \to f$ - непр. в т a

<u>Теорема</u> (локальные свойства непр. функций)

(дописать)

1. непрерывна в т. а $\Rightarrow$ найдетс
2. f - непр в т. a; g непр в a, $f \circ g$ непр в a.
3. f - непр в т. a, g - непр в f(a) $\Rightarrow$

$f : E \to \mathbb{R}^1$ - непр. в x_0

если $f(x^0) > 0 \to$

4 Глобальные св-ва непрерывности

Теорема (непрерывный образ компатка)

$f \in C(E, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f : E \to \mathbb{R}^m$ - непр. в E

K - компакт $\qquad K \subset \mathbb{R}^n$

$f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда $f(K)$ - компакт

рисунок 1

Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - откр. покр $f(K)$

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$\to f^{-1}(U_\alpha)$ - откр, причем

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) \text{ - откр. покр. комп } \to \exists f^{-1}(U_{\alpha 1}) ... f^{-1}(U_{\alpha_N})$$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(U_{\alpha_k}) \to$$

$$f(K) \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k} \text{ - выделили конечное подпокрытие}$$

$f(K)$ - компакт

Теорема (Вейерштрасс)

K - компакт; $f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда

1. f - огр.
2. Если m = 1, то f достигает sup и inf на K

Док-во

$$f : K \to \mathbb{R}^m \text{ - огр} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in K \quad d(f(x), 0) < M$$

1. $f(k)$ - комп $\to$ огр
2. $f : K \to \mathbb{R} \to M = \sup\limits_{x \in K} f(x) < +\infty$ рисунок 2

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x^k \in K :$

$M - \dfrac{1}{k} < f(x^k) \leqslant M \to f(x^k) \underset{k\to\infty}{\to} M$

$f(x^k) \in f(K)$ - компакт $\to$ замнг

$M \in f(K)$

Теорема (Кантор)

$$f \in C(K, \mathbb{R}^m) \quad K \subset \mathbb{R}^n \text{ - компакт } \to f \text{ - равном. непр на } K$$

Док-во

f - непр $\to$ непр. $\forall x \in K \quad \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_x :$

$\forall x' \in K \quad d(x', x) < 2\delta_x \to d(f(x'), f(x)) < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

рисунок 3

$\{B_x(\delta_x)\}_{x \in K}$ - откр. покрытие K - комп.

выделим конечное поддпокр.

$K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B_{x_j}(\delta_{x_j})$

$\delta = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \delta_{x_j}$ - то, что надо

Пусть $d(\widetilde{x}, \widetilde{\widetilde{x}}) < \delta$

$\widetilde{x} \in K \to \exists x_l : \widetilde{x} \in B(x_l, \delta_{x_l})$

$d(\widetilde{\widetilde{x}}, x_l) \leqslant d(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{x}) + d(\widetilde{x}, x_l) < \delta + \delta_{x_l} < 2\delta_{x_l}$

$\to d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$ и $d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

$d(f(\widetilde{x}), f(\widetilde{\widetilde{x}})) \leqslant d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) + d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \mathcal{E}$

$\mathbb{R}^n$ как лин. пр-во

Опр

$$\text{Норма в } \mathbb{R}^n: \quad ||\cdot||: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

Аксиомы нормы

1. $||x|| \geqslant 0$
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $||k \cdot x|| = |k| \cdot ||x||$
4. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Стандартная норма в $\mathbb{R}^n$

$$||x|| = d(x, 0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$||x + y|| = d(x + y, 0) = d(x, -y) \leqslant d(x, 0) + d(0, -y) = ||x|| + ||y||$$

Бывают другие нормы
УПР.1 пусть $|||\cdot|||$ - другая норма в $\mathbb{R}^n$
Тогда $\quad \exists c, C > 0:$

$$c \cdot ||x|| \leqslant |||x||| \leqslant C \cdot ||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

УПР.2 $\forall$ норма непр в $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ - пр-во со скал. пр-нием

Опр

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x \cdot y = (x; y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$||x||^2 = (x; x)$$

н-во К-Б

$$(x, y)^2 \leqslant ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

Линейные операторы в $\mathbb{R}^n$

Опр

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - лин. операторы

$L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m):$

$\forall x, t \in \mathbb{R}^n; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}:$

$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$

пишут Lx вместо $L(x)$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - лин. пр-во:

если $A, B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

то $(A + B)(x) = Ax + Bx$

$A + B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$\forall k \in \mathbb{R}$

$(kA)(x) : k \cdot Ax$

kA - тоже лин. оператор

Кроме того $A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

$AB = A \circ B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис (ортонорм) в $\mathbb{R}^n$; $\quad \{e_j^*\}_{j=1}^m$ - базис в $\mathbb{R}^m$

Тогда $\forall$ лин. оператору соотв. $Mat(A)$

$$Ae_j = \sum_{k=1}^m ae_k^* \qquad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq Mat_{\mathbb{R}}(m \times n) \simeq \mathbb{R}^{mn}$

$Mat(A \cdot B) = Mat(A) \cdot Mat(B)$ - матричное произв.

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

Теорема

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Док-во

$d(x, y) = ||x - y||$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - лин. оператор

$$||Ax - Ay|| = ||\underbrace{A(x-y)}_{A(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j) e_j)}|| = ||\sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \cdot Ae_j|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \cdot ||Ae_j|| \leqslant M\sqrt{n}||x - y||$$

$$M = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} ||Ae_j|| \qquad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{M\sqrt{n}}$$

$B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ - компакт

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - непр на $B_0(1)$

$\to$ огр.

$||Ax||$ - нерп $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\to$ достигает наиб. знач. на комп. $B_0(1)$

Следствие

$$\sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| = \max_{||x|| \leqslant 1} ||A_x|| < \infty$$

Опр

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Норма лин. оператора A

$$||A|| = \max_{|x| \leqslant 1} ||A_x||$$

Теорема

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||A_x||}{||x||}$$

т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad ||A_x|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$

Док-во

Если $A \equiv 0$ - очев. $\quad (||A|| = 0)$

Пусть $A \not\equiv 0 \to$

$\exists x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : ||Ax^*|| \neq 0$

$$0 \neq \frac{||Ax^*||}{||x^*||} = ||A \underbrace{\frac{x^*}{||x^*||}}_{=y^* \in \phi_1 \subset B_0}||$$

$\to ||A|| > 0$

Пусть max достигается внутри ед. шара:

$||A|| = ||A\widetilde{x}||$

где $||\widetilde{x}|| < 1$

Рассм. $\widetilde{y} = \dfrac{\widetilde{x}}{||x||}$

рисунок5?

$$||A\widetilde{y}|| = \frac{||A\widetilde{x}||}{||\widetilde{x}||} > ||A\widetilde{x}||$$

т.е. $||A\widetilde{x}||$ не max!

$\to \max ||Ax||$ в $||x|| \leqslant 1 \quad$ достиг. на сфере $||x|| = 1$

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||A_x||$$

$$||A|| = max_{||x||=1}||Ax|| = \sup_{||x||=1} \frac{||Ax||}{||x||} \leqslant \sup_{||x||\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

$$\sup_{||x||\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||\neq 0} ||A\frac{x}{||x||}|| \leqslant \max_{||y||=1} ||Ay|| = ||A||$$

Теорема

1. Норма оператора действительно норма
2. $||A \cdot B|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$

Док-во

1. проверим аксиомы нормы

$$(1)\quad ||A|| \geqslant 0 \text{ - очев}$$

$$(2)\quad ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ (начало предыдущей теоремы)}$$

$$(3)\quad ||k \cdot A|| = \max_{||x||=1} ||(k \cdot A)x|| = \max_{||x||=1} |k| \cdot ||Ax|| = |k| \cdot ||A||$$

$$(4)\quad ||A + B|| = \max_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leqslant \max_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leqslant$$

$$\leqslant ||A|| + ||B||$$

2. $||(AB)x|| = ||A(Bx)|| \leqslant ||A|| \cdot ||Bx|| \leqslant ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x||$

$$\sup_{||x||\neq 0} \frac{||ABx||}{||x||} \leqslant ||A|| \cdot ||B||$$

$$\sup = ||AB||$$

Теорема (оценка нормы лин. оператора)

$$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$||A||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 = ||A||^2_{HS} \text{ - норма Гильберта Шмидта}$$

$$y = Ax = A(\sum_{j=1}^{n} \cdot x_j \cdot e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot Ae_j$$

$$\underset{\text{k-я координата}}{y_k} = \sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k \text{ - к-я координата}$$

$$1 \leqslant k \leqslant m$$

$$|y_k|^2 = |\sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(Ae_j)^2_k}_{=a_{jk}} =$$

$$= ||x||^2 \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$||y||^2 = ||Ax||^2 = \sum_{k=1}^{m} |y_k|^2 \leqslant ||x||^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2$$

$$||A|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|}$$

УПР $||A||_{HS} \leqslant \sqrt{n} \cdot ||A||$

Дифференцирование

<u>Опр</u>

$$E \subset \mathbb{R}^n, \quad E \text{ - откр.} \quad a \in E$$

$$f : E \to \mathbb{R}^m$$

f - дифф-мо в т. a, если $\exists L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$f(a+h) = f(a) + Lh + \underset{\alpha(h)}{o(||h||)} \qquad ||h|| \to 0$$

рисунок 6

$$(h : a + h \in E)$$

$$\alpha(h) = o(||h||) = o(h) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\alpha(h)||}{||h||} = 0$$

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(||h||) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

Если такой L $\exists$ то он ед.

Пусть $h \in \mathbb{R}^n : ||h|| = 1$

$$a + t \cdot h$$

рисунок 7

$$f(a+th) = f(a) + \underbrace{L(th)}_{=t \cdot Lh} + o(th)$$

$||th|| \to 0$

$\dfrac{f(a+th)f(a)}{t} = Lh + \dfrac{o(th)}{t} \underset{t\to 0}{\to} 0$

$Lh = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t}$

$\forall h : ||h|| = 1 \quad L$ опеределен однозначно $\to \forall x \neq 0$

$Lx = ||x|| \cdot L\dfrac{x}{||x||}$

L - дифференциал. f в т. а

$d_a f = L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$h \in \mathbb{R}^n \qquad d_a f(h) \in \mathbb{R}^m$

Примеры

$$lim_{||h||\to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

1. $f = const \to d_a f = 0$
2. $f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = f(a+h) - f(a) = f(h) \to Lh = f(h)$

   $$d_a f = f(\text{если f линеен})$$

3. если $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - диф. в т. а, то

   $$d_a(f+g) = d_a f + d_a g$$

   $$lim_{||h||\to 0} \frac{||(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - d_a f(h) - d_a g(h)||}{||h||} =$$

   $$\leqslant \lim \frac{||f(a+h) = f(a) - d_a f(h)|| + ||g(a+h) - g(a) - d_a g(h)||}{||h||} = 0$$

4. $d_a(kf) = k d_a f$

Производная по направлению

Опр

$$\text{Пусть } ||e|| = 1, \quad e \in \mathbb{R}^n \qquad f : E \to \mathbb{R}^m \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t}$$

Теорема (о производной по напр.)

$$f : E \to \mathbb{R}^m \text{ - дифф. в т. } a$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e)$$

рисунок 7

$$z = f(x, y)$$

$$f : E \to \mathbb{R}^1 \qquad E \subset \mathbb{R}^2$$

Док-во

$$f(a+te) - f(a) = d_a f(te) + o(te) \quad ||te|| \to 0 \qquad ||te|| = |t|$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t} = d_a f(e)$$

Опр

Частные производные $\{e_k\}_{k=1}^n$ - базис $\mathbb{R}^n$

$$f : E \to \mathbb{R}^m \qquad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{x_k}(a) = \frac{\partial t}{\partial e_k}(a)$$

Матрица Якоби

Опр

Пусть f - диф. в т. $a \in E$

Временно вернмеся к обозначению$L = d_a f$

$Mat(L)$ - матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad j \text{ - й столбец - координаты вектора}$$

$$d_a f(e_j) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$a_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

$$Mat(d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & & \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & & & \end{pmatrix}$$

2019-09-18

Напоминание

$$f : U \to \mathbb{R}^m, \quad a \in U, \quad f \text{ - диф в т} a \Rightarrow$$

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{Mat } (d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Якобиан - определитель матр. Якоби

Пример

$$f_1(\rho, \phi)$$

$$f(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi; \rho \sin \phi)$$

$$f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$J = d_{(\rho,\phi)} f = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \rho$$

Замечание

Но! из существования частной произв. (в общем случае) не следует диф-сть!

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

Частн. пр-ые в т. $(0, 0)$

$$f'_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x, 0) - f(0, 0)}{\triangle x} = 0$$

$$f'_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0, \triangle y) - f(0, 0)}{\triangle y} = 0$$

Если бы f - диф. в т. $(0, 0)$, то

$$f(x, y) = f(0, 0) + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||f(x,y) - f(0,0) - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}||}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

При $(x,y) = (t,t)$

$$\frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

частн. произв. $\exists$ во всех т., но f разрывна в $(0,0)$

3)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$a = (1,-1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$$

$$\mathrm{Mat}(d_a f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ - прирощение}$$

$$d_n f(h) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$$

Опр

Пусть $m = 1$

$f : U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad f$ - диф. в a

$d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ - лин. ф

$$\mathrm{Mat}(d_a f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} ... \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

∇ - "набла"

Градиент f в т. а (f диф в т. а)

$$\mathrm{grad}_a f = \nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot h_k$$

Теорема (Диф-ние композиции)

$$f : U \to \mathbb{R}^m; \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

$$g : V \to \mathbb{R}^k \qquad\qquad U, V \text{ - откр.}$$

f - диф. в т. $a \in U$

g - диф. в т. $f(a) = b$

Тогда $h = g \circ f$ - диф. в т. a, причем

$$d_a h = d_{f(a)} g \circ d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

Док-во

$$A = d_a f; \quad B = d_b g \qquad f(x) = f(a) + A(x-a) + o||x-a|| \quad x \to a$$

$$r_f(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) = o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$r_g(y) = g(y) - g(b) - B(y-b) = o||y-b|| \quad (y \to b)$$

...

$$r_h(x) = h(x) - h(a) - BA(x-a)? =?o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$g(f(a)) = h(a)$$

Хотим показать, что

$$r_h(x) = o(||x-a||) \quad x \to a$$

$$r_h(x) = \underbrace{g(f(x)) - g(b) - B(f(x)-b)}_{=r_g(f(x))} + B(f(x)-b) - BA(x-a) =$$

$$= r_g(f(x)) + B(\underbrace{f(x) - f(a) - A(x-a)}_{=r_f(x)})$$

$$r_h(x) = r_g(f(x)) + B(r_f(x)) \qquad ||Ax|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$$

$$||r_h(x)|| \leqslant ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)||$$

Пусть $\mathcal{E} > 0$

1. (Из дф-сти g) $\exists \delta > 0$:

   $\forall y : ||y - b|| < \delta \Rightarrow$

   $r_g(y) < \mathcal{E} \cdot ||y - b||$

2. $\exists \alpha$:

   (a) (Из диф-сти f в т. a)

   $||r_f(x)|| < \mathcal{E}||x - a||\forall x : ||x - a|| < \alpha$

   (b) $\forall x : ||x - a|| < \alpha$

   $||f(x) - f(a)|| < \delta$ (т.к. f непр в т. a) $\qquad f(a) = b$

Возьмем $x : ||x - a|| < \alpha \overset{2б}{\Rightarrow} ||f(x) - b|| < \delta \overset{(1)}{\Rightarrow} ||r_g(f(x))|| < \mathcal{E} \cdot ||f(x) - b||$

$$||f(x) - b|| = ||r_j(x) + A(x - a)|| \leqslant ||r_f(x)|| + ||A|| \cdot ||x - a|| \underset{2a}{<}$$

$$< \mathcal{E} \cdot ||x - a|| + ||A|| \cdot ||x - a||$$

$$||r_h(x)|| \leqslant ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)|| < \mathcal{E}(\mathcal{E}||x - a|| + ||A|| \cdot ||x - a||) + ||B|| \cdot \mathcal{E}||x - a|| =$$

$$= (\mathcal{E}^2 + ||A||\mathcal{E} + ||B||\mathcal{E}) \cdot ||x - a||$$

5 Частные производные композиции (в усл. теоремы)

Теорема

$$\frac{\partial (g \circ g)_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

$d_a g \circ f = d_{f(a)} g \circ d_a f \qquad$ комп. $\leftrightarrow$ пр-ие матриц

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & & \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial g_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Следствие (2)

$U \subset \mathbb{R}^n$

$f, g : U \to \mathbb{R}$ - диф в т. a

Тогда $d_a(fmulg) = f(a) \cdot d_a g + g(a) d_a f$

Док-во

1. Пусть $f = g \quad d_a f^2$

$$\phi(t) = t^2 \qquad d_t\phi(h) = 2t \cdot h$$

$$d_a f^2 = d_a \phi \circ f = d_{f(a)}\phi \circ d_a f$$
$$= 2f(a) \cdot d_a f$$

2. $d_a(f \cdot g) = d_a(\frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]) =$

$$= \frac{1}{4}[2(f(a)+g(a))d_a(f+g) - 2(f(a)-g(a))d_a(f-g)]$$

$$f(a)d_a g + g(a)d_a f$$

Следствие (3)

$$f, g : U \to \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^m$$

f, g - диф. в т. $a \in U$

$(f; g)$ - ск. пр-ие:

Тогда $d_a(f, g) = (f(a); d_a g) + (d_a f; g(a))$

Опр

Вернемся к градиенту

$$f : U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f \text{ - диф. в т а} \in U$$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h)$$
$$\nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

Свойства (геометрич. св-ва градиента)

1. f возрастает в напр. h в т. a, если $(\nabla_a f; h) > 0$
   и убывает, если $(\nabla_a f; h) < 0$ рисунок 1

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + (\nabla_a f; th) + o(||th||) \qquad o(||t-h||) = o(t)$$

Пусть $t > 0$

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \frac{t \cdot (\nabla_a f, h)}{t} + \frac{o(t)}{t} > 0$$

начиная с нек. числа $(\forall 0 < t < \delta)$

$$\overset{0<t<\delta}{\Rightarrow} f(a+th) > f(a)$$

2. (Экстремальное св-во градиента)
   Если $\nabla_a f \neq 0$, то направление наибольшего возрастания f совпадает с направлением градиента

$$||e|| = 1$$

$$|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = |d_a f(e)| = |(\overrightarrow{\nabla}_a f; \overrightarrow{e})| \leqslant$$

$$\leqslant ||\nabla_a f|| \cdot \underbrace{||e||}_{=1} = ||\nabla_a f||$$

   Если $e = \frac{\nabla_a f}{||\nabla_a f||}$ то $|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = ||\nabla_a f||$

3. $f : U \to \mathbb{R}$ f - диф в т. $a \in U$ $U \subset \mathbb{R}^n$
   Если a - т. локального экстремума f $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{\nabla_a} f = \overrightarrow{0}$$

4. Пусть $\Gamma_a = \{x \in U : f(x) - f(a)\}$

   Тогда $\nabla_a f \perp \Gamma_a$

   Т.е. $\forall$ Гладкой кривой $\gamma : [-1, 1] \to \Gamma_a$,

   проход. через т. a $(\gamma(0) = a)$

$$\gamma(t)' = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} \text{ - касат. вектор к } \Gamma_a \text{ в т. a}$$

   Говорят, что $\overrightarrow{v}$ - ортог. Γ_a в т. a

   Если $\overrightarrow{v} \perp \gamma'(0)$ $\forall$ гладкой кривой $\gamma : \gamma(0) = a$

Пример

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla_{(x,y,z)} f = (2x; 2y; 2z) = 2(x, y, z)$$

Опр

$f : U \to \mathbb{R};$ $a \in U$ - т. лок. макс. (минимума)

Если $\exists V_a : \forall x \in V_a$

$f(x) \leqslant f(a)$ $(f(x) \geqslant f(a))$

Пример (К свойствам)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$a(1, 1, 1)$$

$$\Gamma_a = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

$$\nabla_a f = 2(a1, a2, a3) = (2, 2, 2)$$

Док-во

$$\Gamma_a = \{x \in U \quad f(x) = f(a)\}$$

$$\gamma : [-1, 1] \to \Gamma_a \quad \gamma(0) = a$$

$$\underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{обычная ф-я 1 перем}} = f(a) \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$$0 = d_0(\gamma(t)) = d_{\gamma(0)} f \circ d_0 \gamma = d_a f \circ \gamma'(0) =$$

$$= \nabla_a f \cdot \gamma'(0) \Rightarrow \nabla_a f \perp \gamma'(0)$$

5.1 Непрерывно дифференцируемые отображения

Опр

$$f : U \to \mathbb{R}^m \quad U \subset \mathbb{R}^n \quad a \in U$$

f - непр. диф в т. a, если

1. Все частные производные определены в некоторой окрестности т. a
2. Непр. в т. a

Говорят, что f - непр. диф. на U, если она непр. диф. в каждой точке

$$f \in C^1(U)$$

Лемма (т. о среднем)

$$f : U \to \mathbb{R} \quad a \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{Все частные пр-е определены в } V_a \subset U$$

$$\sqsupset h : a + h \in V_a$$

Тогда $\exists c^1, c^2, ..., c^k$:

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) \cdot h_k$$

Док-во Рисунок 2 (куб и система коорд.)

$$F_k(t) = f(a^{k-1} + t \cdot h_k e_k)$$

a^{k-1} - т. ребра $(a^{k-1}; a^k) \qquad o \leqslant t \leqslant 1$

$$F_k'(t) = f_{x_k}'(\underbrace{a^{k-1} + t \cdot h_k \cdot e_k}_{=a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_{k-1}+h_{k-1}, a_k+th_k})$$

По т. Лагранжа $\exists \xi^k \in (0,1)$

$$F_k(1) - F_k(0) = F_k'(\xi^k)(1-0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a^{k-1} + \xi^k h_k e_k)$$

$$c^k \in V_a$$

$$f(\underbrace{a+h}_{=a^n}) - f(\underbrace{a}_{=a^0}) = \sum_{l=1}^{n} f(a^k) - f(a^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(1) - F_k(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$$

Теорема (О непр. диф. отобр. в точке)

$$f : U \to \mathbb{R}^n \qquad U \in \mathbb{R}^n \quad a \in U$$

f - непр. диф в т. а

Тогда

1. f - непр в V_a
2. f - диф в т. а

НЕОЖИДАННО ТО ЧТО ПИСАЛ ПАША

5.2 Непрерывно дифференцируемые отображения

Опр

$f : U \to \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n, a \in U$, f - непр диф в т. а., если все ч.п. определены в некоторой окр. V_a и непрерывны в т. а

Опр

Говорят, что f - непр дифферецируема на U, если она непр дифф в каждой точке. Ооозначают $f \in C^1(U)$

Лемма (теорема о среднем)

$f: U \to \mathbb{R}$, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, все частные производные опр. в $V_a \subset U$, пусть $h: h+a \in V_a$

Тогда $\exists c^1, c^2, ..., c^k : f(a+h) - f(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(c^k 0 h_k)$

Док-во

$F_k(t) = f(a^{k-1} + th_k e_k)$

т.ребра (a^{k-1}, a^k) $o \leqslant t^2 \leqslant 1$

$F_k'(t) = f_{x_k}'(\underbrace{a^{k-1} + th_k e_k}_{a_1+h_1, a_2+h_2, ..., a_{k-1}+h_{k-1}, a_k+th_k, a_{k+1}, ..., a_n})$

По формуле Лагранжа: $\exists \xi^k \in (0,1) : F_k(1) - F_k(0) = F_k'(\xi^k)(1-0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\underbrace{a^{k-1} + \xi^k h_k e_k}_{e_k \text{ - промеж. точка}})$, $e_k \in V_a$

$$f(\underbrace{a+h}_{a^n}) - f(\underbrace{a}_{a_0}) = \sum_{k=1}^{n} f(a^k) - f(a^{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F_k(1) - F_k(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$$

Теорема (о непр диф отображении в точке)

$f: U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$

f - непр диф в точке a

Тогда

1) f - непрерывна в V_a

2) f - дифф в точке a

Док-во

f - непр диф в точке a $\Leftrightarrow$ все ч.п. опр. в V_a и непр в т.а.

Из лок св-ва непр ф-ий $\Rightarrow \exists$ окр $V_a(\delta)$: все ч.п. огр конст $M > 0$

$|\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)| < M \ \forall x \in V_a(\delta)$

$|f(x+h) + f(x)| = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) h_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(c^k)||h_k| \leqslant M \sum\limits_{k=1}^{n} |h_k| \leqslant Mn||h||$,

если $||h|| \to 0 \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \to 0$

../../../template/template

Пример

Экстремум кв. форму ны ед. сфере

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n_1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x) = (Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\text{При условии } \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$$

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 1$$

Если в т. x^* - отн. экстремум, то

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \lambda \nabla \Phi(x^*) = 0 \\ \Phi(x^*) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f = 2Ax$$

$$\nabla \Phi = 2x$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} Ax^* = \lambda x^* \\ \sum x^{*2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda \text{ - с.ч.} \quad x^* \text{ - с.в соотв. } \lambda$$

$$\|x^*\| = 1$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ищем экстр. $f(x) = (Ax, x)$

$$\Rightarrow f(x^*) = (Ax^*, x^*) = (\lambda x^*, x^*) = \lambda \underbrace{(x^*, x^*)}_{=1} = \lambda$$

$$\Rightarrow \max \text{ и } \min \text{ знач. кв. ф. на ед. сфере равны}$$

$$\max \text{ и } \min \text{ с.ч. } A$$

Опр

$$L \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \qquad (x, Ly) = (L^* x, y)$$

$$\text{Норма } L: \quad \|L\| = \max_{x \in S} \|L_x\|$$

$$f(x) = \|Lx\|^2_{x \in S} = (Lx, Lx) = (L^* Lx, x)$$

$$\|L\|^2 - \max \text{ с.ч. } (L^* L)$$

6 Теория функций компл. переменного

Напоминание

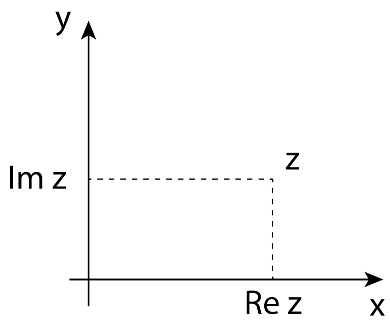
$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$i^2 = -1$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\overline{z} = x - iy \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

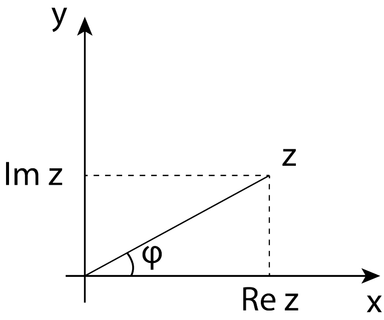


$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$k \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{z}{k} = \frac{x}{k} + i\frac{y}{k}$$

Сложение действует как на векторах, что с умножением?
Перейдем к полярной системе координат



$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$\operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$$

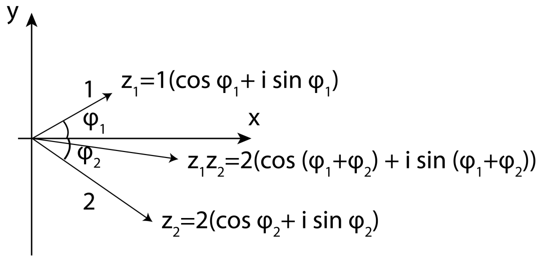
$$\operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$$

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$$

$$z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$



Теорема **(Ф-ла Муавра)**

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

Опр **(н-во $\triangle$)**

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Опр **(н-во Коши)**

$$z_j, w_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, ..., n$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot w_j\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$

Док-во

$$\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} \qquad z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z \qquad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j - \lambda \overline{w}_j|^2 = \sum |z_j|^2 + |\lambda|^2 \sum |w_j|^2 - 2\operatorname{Re}(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{\lambda} w_j)$$

$$\lambda = \frac{\sum z_j w_j}{\sum |w_j|^2}$$

$$0 \leqslant \sum |z_j|^2 + \frac{|\sum z_j w_j|^2}{(\sum |w_j|^2)^2} \cdot \sum |w_j|^2 - 2\operatorname{Re}\left[\frac{\sum \overline{z_j} \cdot \overline{w_j}}{\sum |w_j|^2} \sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right]$$

$$\text{hint: } [...] \leqslant \frac{|\sum z_j w_j|^2}{\sum |w_j|^2}$$

$$0 \leqslant \sum |z_j|^2 + \frac{|\sum z_j w_j|^2}{\sum |w_j|} - 2\frac{|\sum z_j w_j|^2}{\sum |w_j|^2}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$

Опр

Комплексная последовательность

$$c_n \in \mathbb{C}$$

$$c_n = a_n + ib_n, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

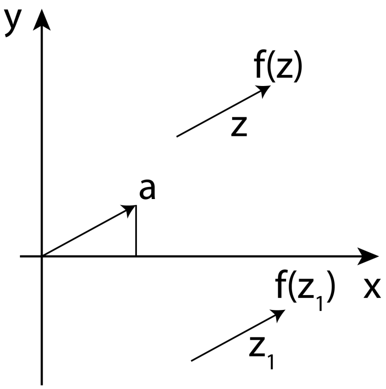
$$c_n \to c \in \mathbb{C} \Leftrightarrow |c_n - c| \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \to a \\ b_n \to b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ - сх. в себе}$$

$$\text{при } n \to \infty \qquad \text{т.е } \begin{matrix} \operatorname{Re} c_n \to \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c_n \to \operatorname{Im} c \end{matrix}$$

Примеры **(функций к. п.)**

1. $\underset{\text{зафикс}}{a \in \mathbb{C}} \qquad f(z) = z + a \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

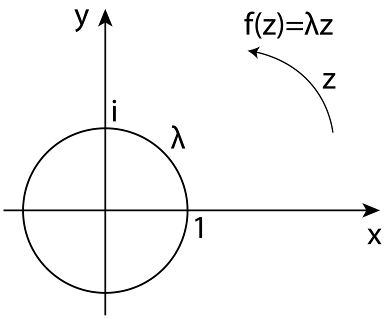
   парал. перенос вдоль вектора $\overline{a} = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} a)$



2. $\lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| = 1 \quad \lambda = \cos\Theta + i\sin\Theta \quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$f(z) = \lambda z = |z|(\cos(\varphi+\Theta) + i\sin(\varphi+\Theta))$$

Поворот вокруг O на угол Θ против часовой стрелки



3. $k \in [0, +\infty)$

$$f(z) = kz = k \cdot |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|f(z)| = k|z|$$

Гомотетия с коэф. k

4. $f(z) = z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$$z:\ |z| < 1 \qquad \Rightarrow z:\ |z| < 1$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

5. Инверсия (относительно ед. окружности)

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

$$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Какие точки останутся неподвижными? Их ровно две -1 и 1 $\left(z = \frac{1}{z}\right)$

6. Дробно-линейные отобр-я (преобр Мёбиуса)

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (c,d) \neq (0,0)$$

Если $c = 0$, то L - афинное преобразование, т.е композиция гомотетий, поворотов и пар. переносов

$$L : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$$

Если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то $L(z) = const$

Доопр. инв. $f(z) = \dfrac{1}{z} \qquad f(0) = \infty \qquad f(\infty) = 0$

L - доопределим

$$L(-\frac{d}{c}) \qquad L(\infty) = \frac{a}{c}$$

Тогда $L : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ - вз. однозн., если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$czw + dw = az + b$$

$$z(cw - a) = b - dw$$

$$z = \frac{b - dw}{cw - a} \qquad \begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Сфера римана $\Leftrightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Утв

Если известно, что $L(z_1) = w_1 \qquad L(z_2) = w_2 \qquad L(z_3) = w_3$

$\Rightarrow$ можно восстановить дробно-лин. отобр L

$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \qquad w_1 \neq w_2 \neq w_3$

Опр

Обобщенная окр-ть = окр-ть или прямая

Утв (круговое св-во)

Дробно-лин отобр. переводит обощенные окр. в обобщ. окр.

Док-во

Дробно-лин. отобр - композиция

1. гомотетий
2. пар. переносов.
3. поворотов
4. инверсий

$1-3$ - переводят окр $\rightarrow$ окр $\qquad$ прямые $\rightarrow$ прямые

Надо разобраться, что делает инверсия с окр

$\alpha \cdot |z|^2 + \beta \operatorname{Re} z + \gamma \operatorname{Im} z + \delta = 0$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$\alpha(x^2+y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$

$\alpha = 0$ - прямые

$\alpha \neq 0$ - окружности

$$x^2 + y^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}y + \frac{\delta}{\alpha} = 0$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(y + \frac{\gamma}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta^2+\gamma^2}{4\alpha^2} = 0$$

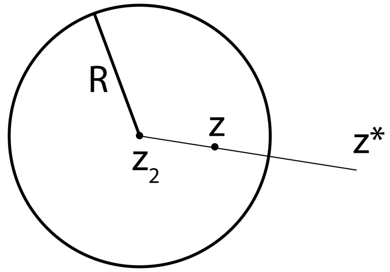
$4\alpha\delta \leqslant \beta^2 + \gamma^2$

$$z \to \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{|z|^2}$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{|z|^2} + \beta\frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - \gamma\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} + \delta = 0$$

$\alpha + \beta \operatorname{Re} z - \gamma \operatorname{Im} z + \delta\, |z|^2 = 0$

$4\alpha\delta \leqslant \beta^2 + \gamma^2$

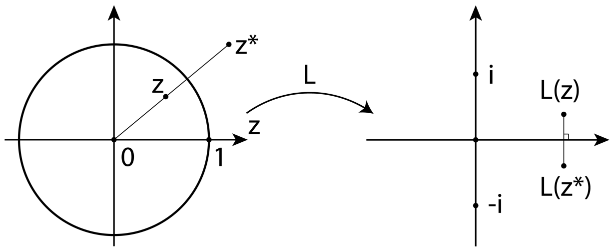


Опр (симметрия отн. окружности)

$$|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = R^2$$

z^* - симметрична z отн окр. $|z - z_0| = R$

Рассмотрим



$$z^* = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z}{|z|}$$

$$L: \qquad L(y) = \frac{z+b}{cz+d}$$

$$L(0) = i \qquad L(0) = i = \frac{b}{d}$$

$$L(-1) = 0 \quad L(-1) = \frac{b-1}{d-c} = 0$$

$$L(1) = \infty \quad L(1) = \frac{1+b}{c+d} = \infty$$

$$b = 1 \qquad d = -i \qquad \frac{1+1}{c-i} = \infty \quad c = i$$

$$L(z) = \frac{z+1}{iz-i} = -i\frac{z+1}{z-1}$$

$$L(z) = -i\frac{z+1}{z-1}$$

$$L(z^*) = -i\frac{\frac{z}{|z|^2}+1}{\frac{z}{|z|^2}-1} = -i\frac{z+|z|^2}{z-|z|^2}$$

$$\overline{L(z)} = \overline{-i}\frac{(\overline{z}+1)^2 z}{(\overline{z}-1)^2 z} = i\frac{|z|^2+z}{|z|^2-z} = L(z^*)$$

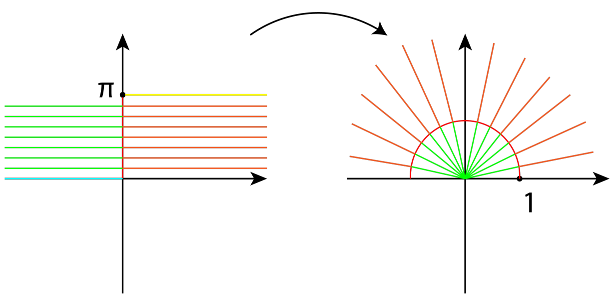
Пример

7) $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ (по ф. Эйлера)

$e^{iy} = \cos y + i\sin y$

$e^{i\pi} = -1$ Замечательная формула, которая связывает 3 числа

$(x, y) \xrightarrow{e^z} (e^x \cos y;\ e^x \sin y)$



$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 \leqslant x < \infty \end{cases} \xrightarrow{e^z} e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x \geqslant 1$$

$$\begin{pmatrix} x = 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{pmatrix} \xrightarrow{e^z} e^0(\cos y + i\sin y)$$

$$\begin{cases} y = \pi \\ 0 \leqslant x < +\infty \end{cases} \xrightarrow{e^z} e^x\underbrace{(\cos\pi + i\sin\pi)}_{-1} = -e^x \leqslant -1$$

hint: "для понимания можно представлять это как веер"

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x(\cos(y+2\pi k) + i\sin(y+2\pi k)) =$$

$$= e^{x+i(y+2\pi k)} = e^{z+i\cdot 2\pi k}$$

Период e^z $\quad T = e\pi ki$

../../../template/template

Опр (Функция Жуковского)

$$Ж(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$T = \{z : |z| = 1\}$$

$$z = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

$$Ж(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t = Ж(e^{-it})$$

$$Ж(T) = [-1, 1] \text{не вз-одн}$$

Прообраз $\forall a \in (-1, 1)$ сост из двух т.

$$rT = \{re^{it}, -\pi \leqslant t \leqslant \pi\}$$

$$0 < r < 1$$

$$Ж(re^{it}) = \frac{1}{2}(re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \cos t + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \sin t$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} Ж(re^{it}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \cos t \\ \operatorname{Im} Ж(re^{it}) = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \sin t \end{cases} \quad \text{- пар. ур. эллипса с полуосями}$$

$$a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \geqslant 1$$

$$-b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$$

$$b = \frac{1}{2}(\frac{1}{r} - r)$$

$$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

$$R > 1 \qquad Ж(Re^{it}) = \frac{1}{2}(\underbrace{R + \frac{1}{R}}_{\geqslant 1}) \cos t + i\frac{1}{2}(\underbrace{R - \frac{1}{R}}_{\geqslant 0}) \sin t$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{z} = Ж(e^{iz})$$

Опр (Аргумент комплексного числа)

$$z = x + iy; \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z \to |z|\,; \text{ угол } \varphi \qquad z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Подходят все углы $\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Arg} z = \{\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \text{ - полное знач. арг.}$$

Отображегие $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \to$
$\forall z \in \mathbb{C}$ сопоставляет множество

Опр (Непрерывная ветвь аргемнта)

$$\text{Ф-я } \alpha : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subset \mathbb{C}$$

Называется непр. ветвью аргумента z, если

$$\alpha \in C(\Omega) \text{ и } \forall z \in \Omega \quad \alpha(z) \in \ \mathrm{Arg} z$$

Пример

$$\Omega = \{|z| < 1\} \text{ здесь нельзя определить однозн. ветвь аргумента}$$

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x; \quad x \in (-\infty, 0]\}$$

Главное значение аргумента

$$\begin{cases} \arg(z) \in \mathrm{Arg}(z) \\ \arg(z) \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

$$z = x < 0 \qquad \arg(z) = \pi$$

$$\mathrm{Arg}\ z = \{\arg\ z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathrm{Arg}\ z = \arg\ z + 2\pi k$$

Пример (Некоторые многозначные функции)

$$w^n = z, \quad n \in \mathbb{N}$$

Уравнение имеет n решений

$$w = |w| \cdot e^{i\mathrm{Arg}\ w} \quad z = |z| \cdot e^{i\mathrm{Arg}\ z}$$

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\text{Arg } w = \text{Arg } z \end{cases}$$

$$|w| = \underset{\mathbb{R}}{\sqrt[n]{|z|}} \qquad \underset{\mathbb{R}}{\sqrt[n]{x}} = x^{\frac{1}{n}} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$n\text{Arg } w = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg } w = \left\{ \frac{\arg z}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$w = \underset{\mathbb{C}}{\sqrt[n]{z}} = \underset{\mathbb{R}}{\sqrt[n]{|z|}} \cdot e^{i(\frac{\arg z}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$\sqrt[n]{z}$ принимает n разл. знач.

<u>Опр</u> (Комплексный логарифм)

$$e^w = z$$

$$w = u + iv$$

$$e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = |z| \cdot e^{i\text{Arg z}}$$

$$\begin{cases} e^u = |z| \\ v = \text{Arg } z \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \underset{\mathbb{R}}{\ln} |z| \\ v = \arg z + 2\pi k \end{cases}$$

$$w = \underset{\mathbb{R}}{\ln} |z| + i(\arg z + 2\pi k) = \underset{\mathbb{R}}{\ln} |z| + i\text{Arg } z$$

$$\ln z = \underset{\mathbb{R}}{\ln} |z| + i\arg z$$

Если $x > 0$, то $\arg x = 0$

$$\ln x = \underset{\mathbb{R}}{\ln} x + i0$$

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i\text{Arg } z$$

$$\text{Ln } z = \ln z + 2\pi k i$$

$$a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$$

$$a^b = e^{(\text{Ln a})b}$$

$$i^i = e^{(\text{Ln } i)i}$$

$$\text{Ln } i = \ln |i| + i\text{Arg } i = 0 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

Опр (Обратные тригонометрические функции)

$$\cos w = z$$

$$e^{iw} + e^{-iw} = 2z$$

$$e^{iw} = t \qquad t^2 - 2t \cdot z + 1 = 0$$

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{iw}$$

$$iw = \text{Ln}\ (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\arccos z = -i \cdot \text{Ln}\ (z = \sqrt{z^2 - 1}) \overset{*}{=}$$

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z - \sqrt{z^2 - 1}}$$

$$\overset{*}{=} i\text{Ln}\ (z - \sqrt{z^2 - 1})$$

Пример

Решим уравнение $\sin z = i$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i^2 = -2$$

$$e^{iz} = t$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t = -1 + \underset{\mathbb{C}}{\sqrt{1+1}} = \underset{\mathbb{R}}{\pm\sqrt{2}} - 1 \qquad \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$iz = \text{Ln}(\pm\sqrt{2} - 1)$$

$$\left[\begin{array}{l} iz = \ln(\sqrt{2} - 1) + i(2\pi k) \\ iz = \ln(-\sqrt{2} - 1) + i(\pi + 2\pi k) = \end{array}\right.$$

$$= \ln(-\frac{1}{\sqrt{2} - 1}) + i(\pi + 2\pi k) = -\ln(\sqrt{2} - 1) + i2\pi k$$

6.1 Комплексное дифференциирование

Опр

$\Omega \subset \mathbb{C} \qquad \Omega$ - область, если

1. Ω - откр.
2. $\forall a, b \in \Omega$ можно соед. ломанной (Ω - связно)

Опр

$$f : \Omega \to \mathbb{C} \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

f - ди-ма ($\mathbb{C}$ - диф-ма) в т. z_0, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : \quad f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(|z - z_0|) \qquad z \to z_0$$

$$A = \underset{\text{произв } f}{f'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$z - z_0 = \Delta z$$

Предел не зависит от того, как $z \to 0$

Пример (1)

$$f(z) = \overline{z} \qquad z_0 = 0$$

$$f'(0) =? \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z} - 0}{\Delta z} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Если $\Delta z = \Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$

Если $\Delta z = i\Delta y \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$

Пример (2)

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^n + n\Delta z z_0^{n-1} + C_n^2 \Delta z^2 z_0^{n-2} + ... + \Delta z^n - z_0^n}{\Delta z} = n \cdot z_0^{n-1}$$

Теорема (**Основные правила диф-я**)

1. $(f + g) = f' + g'$

2. $(const \cdot f)' = const \cdot f'$
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4. $[f(g(z))]' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

Утв

Если f - диф-ма в т z_0, то она непр в z_0

Док-во

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad z \to z_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) \to f(z_0) \quad z \to z_0$$

Опр

$$\underset{\text{Область}}{\Omega \subset \mathbb{C}} \qquad z = x + iy \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}$$

$$f : \Omega \to \mathbb{C} \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$z \to (x, y) \to u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$v : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

Теорема (условие Коши-Римана (Эйлера - Даламбера))

$\Omega \subset \mathbb{C}$ - область

$$f : \Omega \to \mathbb{C} \qquad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Следующие условия равносильны

1. f - диф-ма ($\mathbb{C}$) в т. $z_0 \in \Omega$
2. u, v - диф-мы в т. $(x_0, y_0) \quad z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Док-во

$(1 \Rightarrow 2)$ предпол, что f - диф-ма в т. z_0 $\qquad \Delta z = z - z_0$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot \Delta z + o(|\Delta z|) \qquad f(z) = u + iv$$
$$f'(z_0) = A = a + ib \qquad z = \Delta x + i\Delta y$$
$$o(|\Delta z|) = h(\Delta z) \cdot |\Delta z| = (\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y)) |\Delta z|$$

$$u(x,y) + iv(x,y) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\delta x, \delta y)) |\Delta z|$$

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + a \cdot \Delta x - b\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$u(x,y) = v(x_0,y_0) + b \cdot \Delta x - a\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\alpha, \beta \to 0 \qquad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$$

т.о u, v - дифф-мы в т. (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = a \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -b$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = v \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = - & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Условие К-Р, Э-Д

$(2 \Rightarrow 1)$ Пусть $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ диф-мы (x_0, y_0)

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) |\Delta z| \qquad \Delta z \to 0$$

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y) |\Delta z|$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -b \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = f(z_0) + a\Delta x - b\Delta y + ib\Delta x + ia\Delta y + (\alpha + i\beta)\,|\Delta z|$$

$$\Delta z \to 0$$

$$f(z) = f(z_0) + (a+ib)\Delta x + i(a+ib)\Delta y + \mathcal{E}(\Delta z)\,|\Delta z|$$

$$(a+ib)\Delta z$$

<u>Замечание</u>

$$f'(z_0) = a + ib = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = v'_y - iu'_y = u'x - iu'_y =$$

$$= v'_y + iv'_x$$

<u>Теорема</u>

$$\underset{\text{область}}{\Omega \subset \mathbb{C}} \qquad f : \Omega \to \mathbb{C}$$

Предположим, что f - диф-ма $\forall z \in \Omega$ и $f'(z) \in C(\Omega)$, тогда

1. Если $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega \Rightarrow f = const$
2. Если $\operatorname{Re} f(z) \equiv const \quad \forall z \in \Omega \Rightarrow f(z) \equiv const \quad \forall z \in \Omega$

   $$(\operatorname{Im} f = const \Rightarrow f = const)$$

3. Если $|f(z)| \equiv const \Rightarrow f(z) \equiv const$
4. Если $\arg\, f(z) \equiv const \Rightarrow f(z) \equiv const$

<u>Напоминание</u> (лемма(т. о среднем))

$$f : U \to \mathbb{R}$$

ч.пр f опр. $V_{x_0} \subset U \quad x \in V_{x_0}$

$$\exists c^1, c^2 : \quad f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(c^1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(c^2)\Delta y$$

<u>Док-во</u>

$$1) \quad f'(z) = 0 = u'_x + iu'_y = v'_y + iv'_x$$

$$\begin{cases} u'_x \equiv 0 \\ u'_y \equiv 0 \\ v'_x \equiv 0 \\ v'_y \equiv 0 \end{cases} \qquad \forall (x, y) \in \Omega$$

По лемме $f(z_2) = f(z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega$

2) $\quad \operatorname{Re} f = u(x, y) = const$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \Omega \Rightarrow (+\text{ К-Р}) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

По лемме $v = const$ в $\Omega \Rightarrow f(z) = const$

3) $\quad |f| = const \Rightarrow |f|^2 = u^2 + v^2 = const$

$$\begin{cases} 2u \cdot u'_x + 2vv'_x = 0 \\ 2u \cdot u'_y + 2vv'_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u \cdot u'x - v \cdot u'_y = 0 \\ u \cdot u'y + v \cdot u'_x = 0 \end{cases}$$

Определитель системы л. ур

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = y^2 + v^2 \neq 0$$

Если $u^2 + v^2 \neq 0 \Rightarrow u'_x = 0, u'_y = 0 \Rightarrow u \equiv const \Rightarrow v \equiv const$

4) $\quad \arg\, f(z) \equiv const \quad \forall z \in \Omega$

Введем функцию $k = \dfrac{u}{v} \Rightarrow k = const$

дифф $\forall z \in \Omega \quad (1 + ik)f = (1 + ik)(u + iv) = u + iku + iv - u$

$\operatorname{Re}((1 + ik)f) = 0 \Rightarrow (1 + ik)f \equiv const$