

Билеты по мат. анализу, 2 сем

(преподаватель Кононова А. А.)
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах
в [вконтакте](#)

Содержание

1 Интегральные суммы Римана. Интегрируемость по Риману.

Опр

τ -разбиение на $[a; b]$:

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Опр

Мелкость разбиения τ :

$$\lambda(\tau) = \max_{k=0 \dots n-1} \Delta_k = x_{k+1} - x_k$$

Опр

Оснащение разбиения τ :

$$\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

Опр

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, тогда сумма Римана:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta_k$$

Опр

Интегралом Римана функции f по отрезку $[a, b]$ называется $I \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$

то есть неформально

$$\lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} S(f, \tau, \xi) = I$$

Опр

Будем говорить, что f интегрируема по Риману на $[a; b]$, если $\exists I$ - интеграл функции f по Риману на $[a, b]$. И записывать это как

$$f \in R[a, b], \quad I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

Пример

$$f(x) = C$$

Решение

$$\forall \tau \forall \xi \quad S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = C(b-a)$$

$$I = C(b-a) = \int_a^b C dx$$

Пример

Функция Дирихле $\mathcal{D}(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ на отрезке $[0, 1]$

Опр

$$A \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{X}_A = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

Решение

Пусть τ - произвольное разбиение.

$\xi^* = \{\xi_k^*\} : \xi_k^* \in \mathbb{Q} \cap [x_k, x_{k+1}]$ - рациональное оснащение

$\tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_k\} : \tilde{\xi}_k \in [x_k, x_{k+1}] \setminus \mathbb{Q}$ - иррациональное оснащение

$$S(f, \tau, \xi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_k^*) \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = b-a$$

$$S(f, \tau, \tilde{\xi}) = 0$$

$\mathcal{D} \notin R[0, 1]$. Док-во от противного, пусть это не так, тогда

$$\exists I : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$

Возьмём ξ^* и $\tilde{\xi}$:

$$1 = |S(f, \tau, \xi^*) - S(f, \tau, \tilde{\xi})| \leq |S(f, \tau, \xi^*) - I| + |S(f, \tau, \tilde{\xi}) - I| \leq 2\varepsilon$$

Пример

$$f(x) = \mathcal{X}_0, \quad f \in R[-1, 1]$$

Решение

Покажем, что $I = 0$. ξ_i на интервалах δ_i может *max* два раза попадать в 0.

Пусть это будет при $k, k+1$. Тогда:

$$\begin{aligned} S(f, \tau, \xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i = \sum_{i=0, i \neq k, k+1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i + f(\xi_k) \Delta_k + f(\xi_{k+1}) \Delta_{k+1} = \\ &= f(\xi_k) \Delta_k + f(\xi_{k+1}) \Delta_{k+1} \leq \Delta_k + \Delta_{k+1} < 2\lambda(\tau) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2 Интегрируемость по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.

Определение интегрируемости см. в первом билете.

Утв

Если $f \in R[a, b]$, то f - ограничена на $[a, b]$.

Док-во (от противного)

Пусть $\sup_{[a,b]} f(x) = +\infty$.

Для $\mathcal{E} = 1 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \mathcal{E}$.

Зафиксируем $\tau^* : \lambda(\tau^*) < \delta$:

Так как $\sup_{[a,b]} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists k : \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = +\infty$.

"отпустим ξ_k^* ". $S(f, \tau, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i = \sum_{i \neq k}^{n-1} f(\xi_i) \Delta_i + f(\xi_k) \Delta_k$ (неограничена, выберем ξ_k так чтобы $> \mathcal{E} + I$, Противоречие.

3 Суммы Дарбу, их свойства (связь с суммами Римана, поведение при измельчении).

Опр

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τ -разбиение.

$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, тогда:

$S^*(f, \tau) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k$ - верхняя сумма Дарбу

$S_*(f, \tau) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k$ - нижняя сумма Дарбу

Опр

τ' называется измельчением τ ($\tau' \prec \tau$), если $\tau \subset \tau'$

Свойства

1. $\forall \xi, f, \tau$ - зафикс $\Rightarrow S_*(f, \tau) \leq S(f, \tau, \xi) \leq S^*(f, \tau)$
2. (а) $S^*(f, \tau) = \sup_{\xi} S(f, \tau, \xi)$, (б) $S_*(f, \tau) = \inf_{\xi} S(f, \tau, \xi)$
3. $S^*(f, \tau') \leq S^*(f, \tau)$, $S_*(f, \tau') \geq S_*(f, \tau)$
4. $\forall \tau_1, \tau_2 : S_*(\tau_1) \leq S^*(\tau_2)$

Док-во

1. Очевидно из определения
2. Докажем пункт (а). Нужно доказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi^* S(f, \tau, \xi^*) > S^*(f, \tau) - \varepsilon$$

$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \Rightarrow \exists \xi_k^* : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$S(f, \tau, \xi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^*) \Delta_k > \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = S^*(f, \tau) - \varepsilon$$

3. Пусть $\tau : x_0 < x_1 < \dots < x_n$, добавим x' :

$$\tau' : x_0 < x_1 < \dots < x_k < x' < x_{k+1} < \dots < x_n,$$

$$\begin{aligned} S^*(f, \tau) - S^*(f, \tau') &= \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k) - \sup_{[x_k, x']} f(x)(x' - x_k) - \sup_{[x', x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x') \geq \\ &\geq \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)(x_{k+1} - x_k - x' + x_k - x_{k+1} + x') = 0, \Rightarrow S^*(f, \tau') \leq S^*(f, \tau) \end{aligned}$$

4. Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ (произведение разбиений в обозначениях Кононовой), тогда $\tau \prec \tau_1, \tau_2$, значит

$$S_*(f, \tau_1) \leq S_*(f, \tau) \leq S^*(f, \tau) \leq S^*(f, \tau_2)$$

4 Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Критерий Римана (б/д).

Теорема (критерий Дарбу)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon$$

Док-во

(\Rightarrow) Необходимость. $f \in R[a, b] \Rightarrow I \in \mathbb{R} :$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq S_*(f, \tau) \leq S(f, \tau, \xi) \leq S^*(f, \tau) \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$0 \leq S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

(\Leftarrow) Достаточность.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon$$

$$I^* := \inf_{\tau} S^*(f, \tau), \quad I_* := \sup_{\tau} S_*(f, \tau)$$

$$0 \leq I^* - I_* \leq S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon \Rightarrow I^* = I_* = I$$

$$\forall \xi S_*(f, \tau) \leq S(f, \tau, \xi) \leq S^*(f, \tau) \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$$

Теорема (критерий Римана)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau : S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) < \varepsilon$$

5 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции.

Опр

Колебание $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ на $E \subset \mathbb{R}$, $\omega(f, E) = \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x)$,

$$d_k = [x_k, x_{k+1}], \quad S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k$$

Теорема (критерий Дарбу, другая форма)

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0, \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k < \mathcal{E}$$

$$(\text{неформально } \lim_{\lambda(\tau) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k = 0)$$

Следствие (1)

$$C[a, b] \subset R[a, b]$$

Док-во

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ равн. непр. на $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E \text{ справедливо } |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \omega(f, d_k) < \mathcal{E}, \text{ рассмотрим}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k < \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \mathcal{E}(b - a) = \tilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \text{по критерию Дарбу } f \in R[a, b]$$

Следствие (2)

f -ограничена и монотонна на $[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$

Док-во

$$(f \nearrow) \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{f(b) - f(a)}, \text{ пусть } \lambda(\tau) < \delta$$

$$\sum_{k=0}^{k-1} \omega(f, d_k) \Delta_k \leq \delta \sum_{k=0}^{k-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \delta(f(b) - f(a)) = \mathcal{E}$$

6 Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.

Опр

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - кусочно-непрерывная функция, если:

$f \in C([a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\})$ и t_1, \dots, t_n - точки разрыва I рода

Следствие (3)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - кусочно-непрерывная $\Rightarrow f \in R[a, b]$

Док-во

Пусть $A = \{k \in \mathbb{N} | \exists j : t_j \in d_k\}$, $C = \omega(f, [a, b]) < \infty$

Если $k \notin A \Rightarrow f$ - непр. на $d_k \Rightarrow$ р/н $\Rightarrow \exists \delta_k$ из р/н. Причем $|A| \leq 2n$, потому что t_j могут попасть в макс два соседних промежутка.

Возьмём $\delta = \min_{k \notin A} \delta_k$, если $\tau : \lambda(\tau) < \delta$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k) \Delta_k = \sum_{k \in A} \omega(f, d_k) \Delta_k + \sum_{k \notin A} \omega(f, d_k) \Delta_k \leq 2nC\lambda_k + \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k <$$

$$< 2nC\lambda(\tau) + \mathcal{E}(b-a) < (\text{пусть } \tilde{\delta} = \min(\delta, \frac{\mathcal{E}}{2nC}), \text{ тогда } \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta)$$

$$< \mathcal{E} + \mathcal{E}(b-a) = \mathcal{E}(1+b-a)$$

7 Интегрируемость суммы, произведения, модуля.

Свойство (1)

$$f, g \in R[a, b] \Rightarrow f + g \in R[a, b]$$

Док-во

$$\begin{aligned}\omega(f + g, E) &= \sup_E(f + g) - \inf_E(f + g) \leq \sup_E f + \sup_E g - \inf_E f - \inf_E g \\ &\leq \omega(f, E) + \omega(g, E) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow_{\text{кр. Дарбу}} f + g \in R[a, b]\end{aligned}$$

Свойство (2)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow f^2 \in R[a, b]$$

Док-во

$$f - \text{ограничено} \Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned}\omega(f^2, E) &= \sup_E(f^2) - \inf_E(f^2) = \sup_{x_1, x_2 \in E} (f^2(x_2) - f^2(x_1)) = \\ &= \sup_{x_1, x_2 \in E} (f(x_2) - f(x_1))(f(x_2) + f(x_1)) \leq 2M\omega(f, E) \rightarrow 0\end{aligned}$$

Свойство (3)

$$f, g \in R[a, b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$$

Док-во

$$\text{Так как } f \in R[a, b] \Rightarrow -f \in R[a, b]$$

$$\Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \in R[a, b]$$

Свойство (4)

$$f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b]$$

Док-во

$$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leq |f(x_2) - f(x_1)| \xrightarrow{\text{sup}} \omega(|f|, E) \leq \omega(f, E) \rightarrow 0 \Rightarrow |f| \in R[a, b]$$

8 Интегрируемость функции и ее сужений.

Свойство (5)

$$f \in R[a, b], [c, d] \subset [a, b] \Rightarrow f \in R[c, d]$$

Док-во

$$f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 :$$

для всех τ' на $[c, d]$ расширенных до τ на $[a, b]$:

$$\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau'} \omega(f, d_k) \Delta_k \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau} \omega(f, d_k) \Delta_k \Rightarrow < \mathcal{E}$$

Свойство (6)

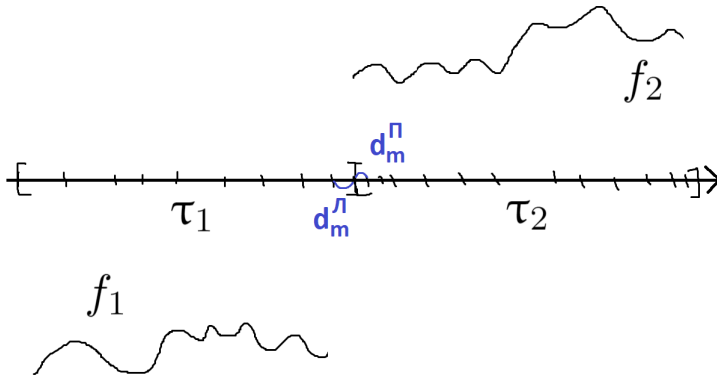
$$a < c < b \Rightarrow R[a, c] \cup R[c, b] \subset R[a, b]$$

Док-во

$$\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_1 > 0 \text{ на } [a, c] : \lambda(\tau_1) < \delta_1 \Rightarrow S^*(f_1, \tau_1) - S_*(f_1, \tau_1) < \mathcal{E}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ на } [c, b] : \lambda(\tau_2) < \delta_2 \Rightarrow S^*(f_2, \tau_2) - S_*(f_2, \tau_2) < \mathcal{E}$$

$$\text{Пусть } \delta = \min(\delta_1, \delta_2), \tau = \tau_1 \cup \tau_2, \lambda(\tau_1) < \delta, \lambda(\tau_2) < \delta$$



Мог произойти разрыв, но $|f| \leq M \Rightarrow \omega(f, [a, b]) < W$

$$\begin{aligned} \sum \omega(f, d_k) \Delta_k &= S^*(f, \tau) - S_*(f, \tau) \leq S^*(f, \tau_1) - S_*(f, \tau_1) + S^*(f, \tau_2) - S_*(f, \tau_2) + \\ &+ d_m^{\tau_1} \Delta_m^{\tau_1} + d_m^{\tau_2} \Delta_m^{\tau_2} \leq (d_m = d_m^{\tau_1} \cup d_m^{\tau_2}, \tilde{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\mathcal{E}}{W})) 2\mathcal{E} + W\tilde{\delta} < 3\mathcal{E} \end{aligned}$$

9 Свойства интеграла Римана (линейность; аддитивность; свойства, связанные с неравенствами).

Опр

Если $a < b$, то $\int_b^a f = -\int_a^b f$ и $\int_a^a = 0$

Свойство (1, линейность)

$$\forall f, g \in R[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_b^a (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_b^a f + \beta \int_b^a g$$

Док-во

Знаем, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$,

$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$ (очевидно из определения сумм Римана)

Свойство (2, аддитивность)

$$\forall f \in R[a, b], a < c < b \Rightarrow \int_b^a f = \int_c^a f + \int_b^c f$$

Док-во

Очевидно (аналогично прошлому)

Свойство (3)

$$\forall f \in R[a, b], a < b, f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

Док-во

Очевидно из определения суммы Римана

Свойство (4)

$$\forall f, g \in R[a, b], g(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b], a < b \Rightarrow \int_b^a g \leq \int_b^a f$$

Док-во

Очевидно, если взять одно разбиение и оснащение

Свойство (5)

$$\forall f \in R[a, b], m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b], a < b \Rightarrow m(b-a) \leq \int_b^a f \leq M(b-a)$$

Док-во

С использованием предыдущего свойства взять интеграл

Свойство (6)

$$f \in R[a, b], m = \inf_{[a, b]} f, M = \sup_{[a, b]} f \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_b^a f = \mu(b-a)$$

Док-во

$$\mu = \frac{\int_b^a f}{b-a} \in [m, M] \text{ (по предыдущему неравенству)}$$

Свойство (7)

$$f \in C[a, b], \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_b^a f = f(\xi)(b-a)$$

Док-во

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя предыдущее свойство

Свойство (8)

$$f \in R[a, b], \Rightarrow \left| \int_b^a f \right| \leq \int_b^a |f|$$

Док-во

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow -\int_b^a |f| \leq \int_b^a f \leq \int_b^a |f| \Rightarrow \left| \int_b^a f \right| \leq \int_b^a |f|$$

10 Первая теорема о среднем. Следствие для непрерывных функций.

Теорема

$$f, g \in R[a, b], \quad g \geq 0, \quad m \leq f \leq M$$

$$\forall x \in [a, b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_b^a fg = \mu \int_b^a g$$

Док-во

$$mg \leq fg \leq Mg \Rightarrow m \int_b^a g \leq \int_b^a fg \leq M \int_b^a g$$

$$\frac{m \int_b^a g}{\int_b^a g} \leq \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leq \frac{M \int_b^a g}{\int_b^a g}$$

$$m \leq \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leq M$$

а) $\int_b^a g = 0$, тогда μ - любое.

б) $\int_b^a g \neq 0 \Rightarrow \mu := \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \in [m, M]$

Следствие

$$\text{Если } f \in C[a, b], \quad g \in R[a, b], \quad g \geq 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_b^a fg = f(\xi) \int_b^a g$$

Док-во

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя неравенство из последнего доказательства для $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$

11 Формула Ньютона-Лейбница. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.

Опр

$$E \subset \mathbb{R}, \quad F : E \rightarrow \mathbb{R} \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда F называется первообразной f , если $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in E$

УТВ

F_1, F_2 - первообразные f на E , тогда:

$$F(x_1) - F(x_2) = \text{const} \quad (\text{т. Лагранжа})$$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in R[a, b]$, F - первообразная f , тогда:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

Док-во

$\forall \tau$ на $[a, b]$ по теореме Лагранжа:

$$\exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] : F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta_k$$

Так как $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta, \forall \xi |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon$
Возьмём оснащение ξ из теоремы Лагранжа:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

Опр

$E \subset \mathbb{R}$, E - невырожденный промежуток,

$f : E \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \alpha, \beta \in E : \alpha < \beta \quad f \in R[\alpha, \beta] \quad \text{для } a \in E \text{ (фиксированного)}$

$F(x) := \int_a^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

$$F : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Теорема

$f \in R[a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, тогда:

1. $F \in C[a, b]$
2. (теорема Барроу) Если f - непр. в т. $x_0 \in [a, b]$, то $F'(x_0) = f(x_0)$

Док-во

$x \in [a, b]$, $h : x + h \in [a, b]$

$$1) F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_a^{x+h} f + \int_x^a f = \int_x^{x+h} f$$

Так как $f \in R[a, b] \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |f| < M$, значит:

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \left| \int_x^{x+h} f \right| \leq \int_x^{x+h} |f| \leq M |h|$$

Кроме того, $\forall \mathcal{E} > 0$, $\delta = \frac{\mathcal{E}}{M}$ если $|h| < \delta \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| < \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Рассмотрим } & \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} dt \right| = \\ & = \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} \mathcal{E} dt = \mathcal{E} \\ & (\text{при } |h| < \delta \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \mathcal{E}) \end{aligned}$$

Следствие

$$F \in C[a, b] \Rightarrow \exists F : F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$$

Пример

$$f(x) = |x|, F(x) = \int_0^x |t|dt = \begin{cases} \frac{t^2}{2} \Big|_0^x, & x \geq 0 \\ -\frac{t^2}{2} \Big|_0^x, & x < 0 \end{cases}$$

Пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$F(x) = |x| \forall x \neq 0$, видно что неверно для первообразной, но:

Опр

F - "почти первообразная", если:

1. $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$
2. $F \in C[a, b]$

Пример

Пример для "почти первообразной". Найти $\int_0^2 f(x)$, для $f(x) = \max(1, x)$

$$F(t) = ? \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ \frac{t^2}{2}, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

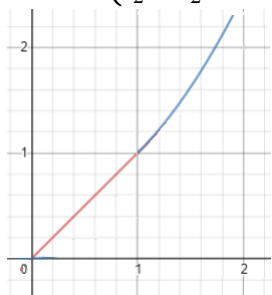


Попробуем использовать Н-Л: $F(t)|_0^2 = F(2) - F(0) = 2$

Неверно, потому что это не первообразная и даже не "почти первообразная".

Поправим $F(x)$:

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, & t \in [1, 2] \end{cases}$$



Это уже "почти первообразная" можно применять Н-Л.

12 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Применение: формула Валлиса.

Теорема

F, G - первообразные $f, g \in R[a, b]$ на $[a, b]$, тогда $\int_a^b Fg = FG|_a^b - \int_a^b fG$

$$\left(\int_a^b uv' = uv|_a^b - \int_a^b u'v \right)$$

Док-во

$$(FG)' = fG + Fg, \text{ по ф-ле Н-Л: } \int_a^b (FG)' = FG|_a^b = \int_a^b fG + |_a^b Fg$$

Пример

Если $I_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$, то:

$$I_m = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m - \text{четное} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m - \text{нечетное} \end{cases}$$

Док-во

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{m-1} x dx = \\ &= -\cos x \sin^{m-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (m-1) \sin^{m-2} x dx = \\ &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{m-2} x - \sin^m x) dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m) \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}, \quad I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2}, \quad I_{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

Теорема (Формула Валлиса)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 * 2 * 4 * 4 * \dots * (2n)(2n)}{1 * 3 * 3 * 5 * 5 \dots (2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \pi)$$

Док-во

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ верно } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$A_n = \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} = B_n$$

$$\begin{aligned} B_n - A_n &= \frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} - \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \\ &= \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{(2n+1)(2n)} = \\ &= A_n \frac{1}{2n} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

13 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема

$$f \in C^{m+1}([a, b]) \Rightarrow f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + R_n(b, a),$$

$$\text{где } R_n(b, a) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n dt$$

Замечание

$$f \in C^{m+1}([a, b]) \Rightarrow f^{(n+1)} \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] :$$

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b (b-t)^n dt = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(b-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Док-во (по индукции)

1) $n = 0$

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt - \text{формула Н-Л}$$

2) Инд. переход. Пусть для $n-1$ - доказано, $f \in C^{m-1}[a, b] \subset C^m[a, b]$, по инд. предположению:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + R_{n-1}(*)$$

$$R_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b f^{(n)}(t) (b-t)^{n-1} dt = \left[\begin{array}{l} u = f^{(n)}(t) \\ dv = (b-t)^{n-1} dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left(-f^{(n)}(t) \frac{(b-t)^n}{n} \Big|_a^b + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{(n)!} (f^{(n)}(a) (b-a)^n + \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n dt) - \text{подставить в } (*)$$

14 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Вторая теорема о среднем.

Формулу интегрирования по частям см. в [12 билете](#).

Теорема (Бонне или вторая теорема о среднем)

$f \in C[a, b]$, $g \in C^1[a, b]$, g — монотонна

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f$$

Док-во

$$(\text{для } g \nearrow) F(x) := \int_a^x f \Rightarrow F' = f$$

$$\int_a^b fg = \int_a^b F'g = Fg|_a^b - \int_a^b Fg' = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b Fg' =$$

$$(\text{т.к. } g \nearrow g \geq 0 \Rightarrow \text{по т. о среднем } \exists \xi \in [a, b] :)$$

$$= F(b)g(b) - g(a)F(a) - F(\xi) \int_a^b g' = g(b)(F(b) - F(\xi)) + g(a)(F(\xi) - F(a))$$

15 Замена переменной в определенном интеграле (две формулировки, доказательство одной).

Теорема

$$\varphi \in C^1[\alpha, \beta], \quad f \in C(\varphi([\alpha, \beta])), \quad \text{тогда} \quad \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$$

Док-во

$$f \in C(\varphi([\alpha, \beta])) \Rightarrow \exists F : F' = f$$

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \varphi' = (f \circ \varphi) \varphi' \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi' = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha)$$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$$

Теорема

$f \in R[a, b], \quad \varphi \in C^1[\alpha, \beta], \quad \varphi$ - строго возрастает,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad \text{тогда} \quad \int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'$$

Пример

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx, \quad \varphi(t) = \cos t, \quad \varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi(\beta) = 1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \left(-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}$$

Напоминание (про ряды)

Опр

Числовой ряд из элементов $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ - это $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$

Опр

Частичная сумма ряда $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$

Опр

Говорят, что сумма ряда $S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Замечание

Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{j=N}^{\infty} a_j$

Теорема (необходимое условие сходимости)

Если $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ - сходится, то $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$

Опр

Ряд Лейбница $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j$, $a_j > 0$, где $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$, $a_j \searrow$

Теорема

Пусть $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ - ряд Лейбница, тогда:

1. Ряд Лейбница сходится
2. $S_{2n} \searrow, S_{2n-1} \nearrow$
3. $|S - S_n| < a_{n+1}$

Теорема

Критерий Коши для числовых последовательностей.

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j - \text{сх} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > n > N |S_m - S_n| < \varepsilon$$

16 Признаки сравнения для положительных рядов.

Опр

Если $a_j \geq 0$, то $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ - положительный ряд

Теорема

Положительный ряд сходится $\Leftrightarrow S_n$ - ограничены

Следствие

Пусть $0 \leq a_j \leq b_j$, тогда:

1. $\sum b_j$ - сх $\Rightarrow \sum a_j$ - сх (первый признак сходимости)
2. $\sum a_j$ - расх $\Rightarrow \sum b_j$ - расх (первый признак сравнения)

Следствие

$$a_k \geq 0, b_k \geq 0, \exists c, d > 0 \exists N : \forall n > N \quad 0 < c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq d < \infty$$

Тогда $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сх. или расх. одновременно

Док-во

$$\begin{aligned} & (\text{т.е. } \sum a_k - \text{сх} \Leftrightarrow \sum b_k - \text{сх}) \\ & (\Leftrightarrow) 0 \leq a_n \leq db_n \text{ т.к. } db_n - \text{сх} \Rightarrow a_n - \text{сх} \\ & (\Rightarrow) 0 \leq cb_n \leq a_n \text{ т.к. } a_n - \text{сх} \Rightarrow cb_n - \text{сх} \Rightarrow b_n - \text{сх} \end{aligned}$$

Следствие (второй признак сравнения)

Пусть $a_n, b_n \geq 0$, тогда если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty), \text{ то } \sum a_n \text{ и } \sum b_n \text{ сх или расх одновременно}$$

Док-во

$$\text{Возьмём } \varepsilon := \frac{L}{2} \Rightarrow \exists N : \forall n > N \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} < +\infty \Rightarrow \text{по предыдущему следствию верно}$$

17 Признаки Даламбера и Коши для положительных рядов.

Теорема (радикальный признак Коши для положительных рядов)

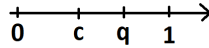
$$a_k \geq 0, c := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$$

Если $c < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $c > 1$, то $\sum a_k$ - расх

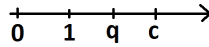
Док-во

а) $0 \leq c < 1$



$q := \frac{c+1}{2}$, $c < q < 1$, по характеристике $\overline{\lim} : \exists N : \forall n > N \sqrt[n]{a_n} < q$
т.е. $0 \leq a_n < q^n$ и $\sum q^n$ - сх $\Rightarrow \sum a_n$ - сх

б) $c > 1$



$q := \frac{c+1}{2}$, $1 < q < c$, по характеристике $\overline{\lim} : \forall N : \exists n > N \sqrt[n]{a_n} > q$
т.е. \exists бесконечное мн-во $n \sqrt[n]{a_{n_k}} > q$, $a_{n_k} > q^{n_k} > 1$
 $\Rightarrow \lim a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расх

Теорема (признак Даламбера сходимости положительных рядов)

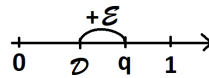
$$a_k \geq 0, D := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Если $D < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $D > 1$, то $\sum a_k$ - расх

Док-во

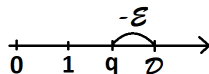
а) $D < 1$, $q := \frac{D+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{1-D}{2}$



$\exists N : \forall k > N D - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < D + \mathcal{E} = q$ - геом пр. $q < 1$

$a_{k+1} < qa_k < q^2 a_{k-1} < \dots < q^{k-N+1} a_N$, $\sum q^{k-N+1} a_k$ - сх $\Rightarrow \sum a_{k+1}$ - сх по
первому пр. сходимости

б) $D < 1$, $q := \frac{D+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{D-1}{2}$



$$\exists N : \forall k > N \quad q = \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E}, \quad q > 1$$

$$a_{k+1} > qa_k > q^2 a_{k-1} > \dots > q^{k-N+1} a_N, \quad \sum q^{k-N+1} a_N - \text{расх} \Rightarrow \sum a_{k+1} -$$

расх по первому пр. сравнения

18 Абсолютная и условная сходимость рядов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

Опр

$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ - сх абсолютно, если $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх

Опр

Ряд сходится условно если сходится, но не абсолютно

Теорема

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится

Док-во

$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх, по критерию Коши $\forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall m > n > N :$

$||a_{n+1}| + \dots + |a_m|| < \mathcal{E}$, по неравенству треугольника:

$$|a_{n+1} + \dots + a_m| < \mathcal{E} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j - \text{сх.}$$

19 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Определения см. в [предыдущем](#) билете.

Ряд не сходится абсолютно, т.к. $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расх. ряд, т.к.:

Теорема (критерий Коши сходимости последовательности)

x_n - сх $\Leftrightarrow x_n$ - сх в себе.

Покажем, что для $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ $\exists \mathcal{E} > 0 : \forall N \exists m, n \geq N : |x_m - x_n| > \mathcal{E}$:

Возьмём $\mathcal{E} = \frac{1}{4}$ $n = N, m = 2N$:

$$|S_{2N} - S_N| = \left| \frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N} \right| > N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} > \mathcal{E}$$

Но ряд сходится (значит условно сходится) по признаку Лейбница (или это можно показать прямо, доказав что $S_{2n} \nearrow$ и ограничена сверху единицей, а $S_{2n+1} = S_{2n}$ в пределе)

20 Перестановка абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана (б/д).

Опр

Пусть есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и биективная функция $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ называется перестановкой ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Теорема (Римана v1)

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится, тогда:

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}} \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \sum a_{\varphi(k)} = S$$

Опр

$$a_k^+ = \max\{a_k, 0\}, a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$$

Теорема (Дирихле, о перестановке абсолютно сходящегося ряда)

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сх абсолютно, то

$$\forall \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ где } \varphi - \text{биекция} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$$

Док-во

а) Пусть $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{сх} \Leftrightarrow \text{все частичные суммы ограничены, } S_n \leq S \forall n \in \mathbb{N}$$

Частичные суммы $\sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$ обозначим перестановками ряда $T_n := \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}$

Пусть $m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$

$$T_n \leq S_m := \sum_{n=1}^m a_{\varphi(a_n)} \leq S \Rightarrow T_n \nearrow - \text{огр} \Leftrightarrow \text{ряд } T := \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)} \text{ сходится.}$$

Предельный переход даёт $T \leq S$, но так как S - тоже перестановка $T \Rightarrow S \leq T$

$$\text{Значит } S = T, \text{ то есть } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$$

б) Общий случай, $a_k \in \mathbb{R}$

$$a_k = a_k^+ - a_k^-, |a_k| = a_k^+ + a_k^- \Rightarrow a_k^+ = \frac{a_k + |a_k|}{2}, a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}$$

$$\text{т.к. } \sum a_k - \text{сх абсолютно} \Rightarrow \sum |a_k| - \text{сх} \\ \Rightarrow \sum a_k^+, \sum a_k^- - \text{сх (причем абсолютно)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{\varphi(k)}^+ - a_{\varphi(k)}^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^- = (\text{п. а}) \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Теорема (Римана v2)

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится. Тогда $\sum a_n^+ - \sum a_n^- = +\infty$

Док-во

Можно доказать одну из теорем

21 Асимптотика частичных сумм расходящегося ряда (случай гармонического ряда). Постоянная Эйлера.

$$\frac{1}{1+k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} < \ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 < \frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Значит,

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) \right) &< \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n := \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k}) \right) \nearrow \text{ и ограничено сверху } \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = -\ln 1 + \ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \dots - \ln(n) + \ln(n+1) =$$

$$= \ln(n+1) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

Опр

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,5722\dots - \text{постоянная Эйлера}$$

22 Несобственные интегралы. Примеры. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов.

Опр (1)

$f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \in R[a, b] \forall b \in (a, +\infty).$

Если $\exists \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$, то говорят, что несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f - \text{сходится и равен } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$$

Опр (2)

$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty < a < \omega \leq +\infty, f \in R[a, b] \forall b \in (a, +\infty).$

Если $\exists \lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f$, то говорят, что несобственный интеграл

$$\int_a^{\omega} f - \text{сх и равен } \lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f$$

Опр (3)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\forall a < b \in \mathbb{R} : f \in R[a, b]$, тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f$,

Если оба предела \exists и конечны, то говорят что $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ - сходится

Опр (4)

Аналогично $\int_{\omega_1}^{\omega_2}$, если $f \in R[a, b] \forall [a, b] \subset (\omega_1, \omega_2)$. $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f = \int_{\omega_1}^c f + \int_c^{\omega_2} f$

Пример

$$1. \alpha = 1, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |x| \Big|_1^b = +\infty - \text{расх}$$

$$2. \alpha > 1, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = 0 - \frac{1}{1-\alpha} - \text{сх}$$

$$3. \alpha < 1, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty - \text{расх}$$

Пример

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \rightarrow 0-} \int_{-1}^a \frac{dx}{x} + \lim_{b \rightarrow 0+} \int_b^1 \frac{dx}{x} - \text{расх по опр, т.к. оба предела расх}$$

Опр

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\forall a < b \in \mathbb{R} : f \in R[a, b]$, тогда (V.P.) $\int_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f$

Пример

$$(V.P.) \int_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-A}^A = 0$$

$$(\text{Ho}) \int_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x - \text{расх}$$

Теорема (критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов)

$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < a < \omega \leq +\infty, \quad f \in R[a, b] \quad \forall b \in (a, +\infty),$ тогда:

$$\int_a^\omega f - \text{сх} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists B \in (a, \omega) : \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) \left| \int_{b_1}^{b_2} \right| < \varepsilon$$

Док-во

$$\int_a^\omega f - \text{сх} \Leftrightarrow \exists \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f \Leftrightarrow (\text{кр Коши для пределов ф.})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall b_1, b_2 \in (\omega - \delta, \omega) \left| \int_a^{b_1} f - \int_a^{b_2} f \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \varepsilon$$

23 Свойства несобственных интегралов (линейность, аддитивность, монотонность, формула Ньютона-Лейбница).

Свойство (1, линейность)

$$\int_a^\omega f_1, \int_a^\omega f_2 - \text{сх} \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \int_a^\omega (k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 \int_a^\omega f_1 + k_2 \int_a^\omega f_2$$

Свойство (2, монотонность)

$$f, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \in R[a, b], \quad \forall b \subset [a, \omega), \quad f(x) \leq g(x),$$

$$\forall x \in [a, \omega) \Rightarrow \int_a^\omega f \leq \int_a^\omega g$$

Лемма

$$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b], \quad \forall b \in (a, \omega).$$

Пусть $c \in (a, \omega)$, тогда $\int_a^\omega f$ и $\int_c^\omega f$ - сх или расх одновременно

Док-во

$$\int_a^\omega f - \text{сх} \Leftrightarrow \lim_{b \rightarrow \omega_-} \int_a^b f = A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \int_c^\omega f = \lim_{b \rightarrow \omega_-} \int_c^b f = \lim_{b \rightarrow \omega_-} \left(\int_a^b f - \int_a^c f \right) = A - \int_a^c f \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_c^\omega f - \text{сх}$$

Свойство (3, аддитивность)

$$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b] \quad \forall b \subset [a, \omega)$$

$$\forall c \in [a, \omega) \Rightarrow \int_a^\omega f = \int_a^c f + \int_c^\omega f, \text{ причем } \int_a^\omega f \text{ и } \int_c^\omega f - \text{сх или расх одновременно}$$

Свойство (4, формула Н-Л)

Если F - первообразная f , то:

$$\int_a^\omega f = \lim_{b \rightarrow \omega_-} (F(b) - F(a)) =: F|_a^{\omega_-} = F(\omega_-) - F(a)$$

Свойство (5)

Если $f \in R[a, \omega]$ ($\omega \in \mathbb{R}$), то (несоб. инт) $\int_a^\omega f = \int_a^\omega f$ (инт Римана)

Док-во

$$f \in R[a, \omega] \Rightarrow F(x) := \int_a^x f \in C[a, \omega],$$

$$(\text{несоб. инт}) \int_a^\omega f = \lim_{b \rightarrow \omega} \int_a^b f (= F(b) \text{ (непр. в т } \omega)) = F(\omega) = \int_a^\omega f \text{ (инт Римана)}$$

24 Свойства несобственных интегралов (интегрирование по частям, замена переменной).

Свойство (интегрирование по частям)

Пусть $f, g \in C^1[a, \omega)$, $\exists \lim_{x \rightarrow \omega_-} f(x)g(x) \in \mathbb{R}$, тогда:

$$\int_a^\omega f'g \text{ и } \int_a^\omega fg' - \text{сх или расх одновременно, причем}$$

$$\int_a^\omega fg' = fg|_a^\omega - \int_a^\omega f'g(fg|_a^\omega = \lim_{x \rightarrow \omega_-} (f(x)g(x) - f(a)g(a))$$

Свойство (замена переменной)

Если $\int_a^\omega f$ - сх, $\varphi : [\alpha, \upsilon) \rightarrow [a, \omega)$, $\varphi \in C^1[\alpha, \upsilon)$, φ - монот.,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \upsilon} \varphi(t) = \omega, \quad \text{тогда} \quad \int_a^\omega f = \int_\alpha^\upsilon (f \circ \varphi) \varphi'$$

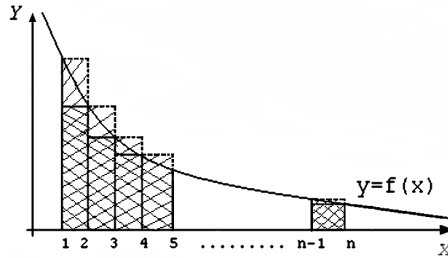
25 Интегральный признак Коши сходимости несобственных интегралов и рядов.

Теорема

Пусть $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f \in R[1, A] \forall A > 1$, f - строго убывает (можно строго возрастает)

Тогда $\int_1^\infty f$ и $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ - сх или расх одновременно, причем

$$\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \leq \int_1^\infty f \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$



Лемма

Если $f > 0$, $f \in [a, \omega] \rightarrow [0, +\infty)$, $f \in R[a, b] \forall b \in (a, \omega)$

Тогда $\int_a^\omega f$ - сх $\Leftrightarrow F(x) = \int_a^x f$, $\exists M < \infty : F(x) \leq M \forall x \in [a, \omega)$

Док-во

(\Rightarrow) очевидно

(\Leftarrow) почти очевидно, $f \geq 0 \Rightarrow F \nearrow$ и огр $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \omega} F(x) = \int_a^\omega f < +\infty$

Док-во

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f \leq f(n) \text{ (видно через суммы Дарбу) } \mid \sum_{n=1}^N$$

$$\sum_{n=1}^N f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f \leq \sum_{n=1}^N f(n), \text{ при } N \rightarrow +\infty \text{ получим наше уравнение}$$

$$1) \text{ Если } \sum_1^\infty f(n) - \text{сх} \Leftrightarrow \sum_1^N f(n) \leq A \in \mathbb{R} \Rightarrow F(N+1) = \int_1^{N+1} f \leq A \in \mathbb{R} \text{ сх}$$

$$2) \text{ Если } \int_1^\infty f - \text{сх} \Rightarrow \sum_1^N f(n+1) \leq \int_1^{N+1} f \leq \int_1^\infty f \in \mathbb{R} - \text{огр} \Rightarrow \sum_1^N f(n+1) \text{ сх}$$

Примеры

$$1. \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}. \text{ Рассмотрим } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^\infty = 0 - (-1) - \text{сх}$$

$$2. \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}. \text{ Сх. при } \alpha > 1, \text{ расх. при } \alpha \leq 1 \text{ (аналогично интегралу } \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha})$$

26 Признаки сравнения для несобственных интегралов.

Теорема (I признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f, g \geq 0, \quad f, g \in R[a, b], \quad b \in (a, \omega),$$

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, \omega)$$

$$\text{Тогда } \int_a^\infty g - \text{сх} \Rightarrow \int_a^\omega f - \text{сх} \quad \left(\int_a^\omega f - \text{расх} \Rightarrow \int_a^\infty g - \text{расх} \right)$$

Док-во

$$F(b) := \int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^\omega g \in \mathbb{R}$$

То есть $\int_a^\omega f - \text{сх}$, т.к. $F \nearrow$ и огр сверху на $[a, \omega)$

Теорема (II признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty), \quad f, g \in R[a, b] \quad \forall b \in (a, \omega)$$

Тогда если $\exists \lim_{x \rightarrow \omega-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, то $\int_a^\omega f$ и $\int_a^\omega g - \text{сх}$ или расх одновременно

Док-во

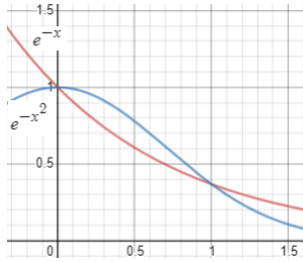
$$k := \lim_{x \rightarrow \omega-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty), \quad \mathcal{E} := \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \exists b \in (a, \omega) : \forall x \in (b, \omega) \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} < \frac{f(x)}{g(x)} < 3\mathcal{E}$$

То есть с некоторого места $f(x) \leq g(x)$, а так как $\int_a^\omega = \int_a^b + \int_b^\omega$ и $\int_a^b f, \int_a^b g -$ конечные числа, то $\int_a^\omega f$ и $\int_a^\omega g - \text{сх}$ или расх одновременно по первому признаку

Пример

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$



$$e^{-x^2} \geq e^{-x} \Rightarrow x \in [0, 1], \quad \int_0^1 e^{-x} = \frac{1}{e} \text{ по I пр. ср. } \int_1^{+\infty} e^{-x^2} - \text{сх}$$

Пример

$$\int_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx \text{ и } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - \text{сх или расх одновр} \Rightarrow \text{сх}$$

27 Абсолютная и условная сходимость интегралов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

Опр

$$f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, f \in R[a, b] \quad \forall b \in (a, \omega)$$

$$\int_a^\omega f - \text{сх абсолютно} \Leftrightarrow \int_a^\omega |f| - \text{сх}$$

$$\int_a^\omega f - \text{сх условно} \Leftrightarrow \int_a^\omega f - \text{сх}, \int_a^\omega |f| - \text{расх}$$

Утв

$$\int_a^\omega f - \text{сх абсолютно} \Rightarrow \text{сходится}$$

Док-во

Пусть $\int_a^\omega |f| - \text{сх} \Leftrightarrow$ (кр. Больцано-Коши) $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in (a, \omega) : \forall b_1, b_2 \in (A, \omega)$

$$|\int_{b_1}^{b_2} |f|| < \varepsilon \Rightarrow \text{т.к. } |\int_{b_1}^{b_2} f| \leq |\int_{b_1}^{b_2} |f|| < \varepsilon, \text{ то по кр. Б-К } \int_{b_1}^{b_2} f - \text{сх}$$

Пример

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^3) dx = \left| \begin{matrix} x^3 = t \\ x = \sqrt[3]{t} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3} \int_0^\infty \cos t \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \frac{\sin t}{t^{\frac{2}{3}}} \Big|_0^\infty + \frac{2}{9} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{9} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}}$$

Исследуем $\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} = \int_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} + \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} :$

а) $\int_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}, |\sin t| \leq t \text{ на } [0, 1]$

$$\int_0^1 \frac{t}{t^{\frac{5}{3}}} = \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} = 3t^{\frac{1}{3}} \Big|_0^1 = 3 - \text{сх} \quad \text{по I пр ср} \Rightarrow \int_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} - \text{сх}$$

б) $\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}, \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} = -\frac{3}{2} t^{-\frac{2}{3}} \Big|_1^\infty = \frac{3}{2} - \text{сх} \quad \text{по I пр ср} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} - \text{сх}$$

Значит $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} - \text{абс сх} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \cos(x^3) - \text{сх}$

28 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$

Определения и теорему см. в билете [27](#)

Пример

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \left. \frac{-\cos x}{x} \right|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$$

Исследуем $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ на абс сходимость. $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, а $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}$ - сходится

\Rightarrow по 1 признаку сравнения $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| - cx \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} - cx \text{ абс} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} - cx$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}$$

Знаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$. Кроме того, $\frac{|\sin x|}{x} < 1$, значит на конечном

промежутке $(0, \frac{\pi}{2}]$ интеграл конечный $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} - cx$

3) Покажем, что $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} - \text{расх.} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} - \text{расх}$

$$|\sin x| \geq |\sin^2 x|, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x} (\text{расх}) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} (cx)$$

29 Признаки Дирихле и Абеля для несобственных интегралов (док-во одного из них).

Теорема (признак Абеля-Дирихле)

$f, g : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C[a, \omega), \quad g \in C^1[a, \omega), \quad g - \text{монотонна.}$

Тогда если выполнено одно из условий:

$$(A) \int_a^\omega f - \text{сх}, \quad g - \text{огр}$$

$$(D) F(x) := \int_a^x f - \text{огр}, \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \omega_-} 0$$

Тогда $\int_a^\omega fg - \text{сх}$

Док-во

(Д) без теоремы Бонне

$$|F(x)| \leq C : g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \omega_-} 0$$

$$\lim_{b \rightarrow \omega_-} \int_a^b fg = \lim_{b \rightarrow \omega_-} (Fg|_a^b - \int_a^b Fg') = F(a)g(a) - \lim_{b \rightarrow \omega_-} \int_a^b Fg'$$

Исследуем интеграл на абс сходимость.

$$\int_a^b |Fg'| \leq C \int_a^b |g'| = (\text{т.к. } g - \text{монотонна}) C \left| \int_a^b g' \right| = C |g(b) - g(a)| \xrightarrow{b \rightarrow \omega_-} C |g(a)|$$

Таким образом инт. ограничен \Rightarrow изначальный сходится

30 Признаки Дирихле и Абеля для рядов (док-во одного из них).

Опр

$$A_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad A_0 = 0$$

Теорема (преобразование Абеля)

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Док-во

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

Теорема (признак Дирихле для рядов)

Пусть A_n - огр., $b_k \rightarrow 0$, b_k - монотонно. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх

Док-во

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ - сх \Leftrightarrow все частичные суммы огр

$$\sum_{k=1}^N |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^N |b_k - b_{k+1}| = M |b_1 - b_{N+1}| \leq 2M |b_1| \Rightarrow \text{исх ряд сх}$$

Теорема (признак Абеля для рядов)

Пусть A_n - сх. b_k - монотонно, b_k - огр. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх

31 Применение интеграла Римана для вычисления площадей и объемов. Примеры.

Опр (школьное)

Пусть $P \in \mathbb{R}^2$ ("фигура"), \mathcal{P} - некоторый набор плоских "фигур", $P_i \in \mathcal{P}$
 $g : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty)$ - называется площадью, если:

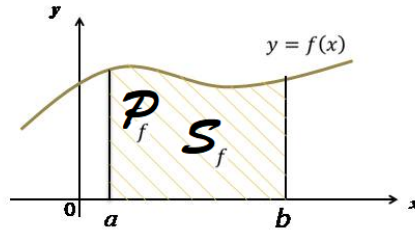
1. $\forall P \in \mathcal{P}, S(P) \geq 0$
2. $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \cap P_2 = \emptyset \Rightarrow S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

Опр

$\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, сохраняет расстояние

3. $\forall P \in \mathcal{P}$ τ -движения $S(\tau(P)) = S(P)$

Площадь криволинейной трапеции.



Опр

Подграфиком $f \in R[a, b]$ называется $P_f := \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Возьмём разбиение и верх. и нижн. суммы Дарбу. S - монотонна, т.е.

$$P_1 \subset P_2 \Rightarrow S(P_1) \leq S(P_2), S_*(\tau) = S(P_*(\tau)), S^*(\tau) = S(P^*(\tau))$$

$$P_*(f, \tau) \subset P(f) \subset P^*(f, \tau)$$

$$S(P_*(f, \tau)) = S_*(f, \tau) \rightarrow \int_a^b f, S(P^*(f, \tau)) = S^*(f, \tau) \rightarrow \int_a^b f, S(P_f) := \int_a^b f$$

Пример

Первая четверть эллипса с радиусами (a, b) .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad S = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx - \text{сложно, перейдём в полярны}$$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t d(a \cos t) = ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = -ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 0 - \left(-\frac{\pi ab}{4} \right) = \frac{\pi ab}{4}$$

Вычисление объемов

УТВ

Принцип Кавальери. Если у двух тел одни сечения на одном уровне, то их объемы равны.

$$\sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) \Delta_k \text{ - сумма Римана}$$

$$V = \int_a^b S(x) dx \text{ - измельчаем плоскости}$$

Пример

(на самом деле тела вращения можно считать как $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$)

32 Путь. Длина пути. Спрямоляемый путь. Аддитивность длины пути.

Опр

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, $\gamma_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Расстояние считается как

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \gamma - \text{путь, если } \forall i \in \{1, \dots, n\} \gamma_i \in C[a, b]$$

Опр

Путь называется r -гладким, если $\forall i \in \{1, \dots, n\} \gamma_i \in C^r[a, b]$

Опр

Два пути считаются эквивалентными если можно сделать замену переменной. Т.е. пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, тогда:
 $\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow \exists \varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ - строго возрастающая, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$,
 $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$

Опр

Кривая - класс эквивалентности путей. \forall путь - представитель класса эквивалентности называется "параметризацией"

Пример

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \sin t & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t^2 & 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \sin t^2 & 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, определяют одну и ту же кривую (окружность)

Опр

Кривая называется r -гладкой, если у неё есть r -гладкая параметризация

Опр

γ - простой путь $\Leftrightarrow \gamma$ - биекция на (a, b) , т.е. $\forall t_1, t_2 \in (a, b) : \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (без самопересечений).

Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ - замкнутый путь.

Опр (длины пути)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau \subset [a, b] : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Соединим $[\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})]$ отрезками - получим вписанную ломанную.

$$\text{Длина } k\text{-ого звена: } \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$$

$$\text{Тогда длина вписанной ломанной: } l = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$$

Длиной пути назовём $S_\gamma := \sup_{\tau} l_\tau$ - всевозможных ломанных

Опр

Путь называется спрямляемым, если $S_\gamma < +\infty$

Утв

Аддитивность длины пути. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, пусть γ_1 - сужение γ на $[a, c]$, γ_2 - сужение γ на $[c, b]$. Тогда $S_\gamma = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Док-во

а) $S_\gamma \geq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?

Пусть τ_1 - разбиение $[a, c]$, τ_2 - разбиение $[c, b]$,

$\tau = \tau_1 + \tau_2$, $l_{\tau_1} + l_{\tau_2} = l_\tau \leq S_\gamma$

(т.к. $S_\gamma - \sup$)

Возьмём \sup по всем разбиениям отрезка $[a, c]$

$\Rightarrow \sup_{\tau_1} (l_{\tau_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + l_{\tau_2} \leq S_\gamma$

Теперь \sup по всем разбиениям отрезка $[c, b]$

$\Rightarrow \sup_{\tau_1} (S_{\gamma_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2} \leq S_\gamma$

б) $S_\gamma \leq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?

Пусть τ - разбиение $[a, b]$.

Пусть $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. $l_\tau \leq l_{\tau^*}$, $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$,

где τ_1 - разбиение $[a, c]$, τ_2 - разбиение $[c, b]$.

$l_\tau \leq l_{\tau^*} = l_{\tau_1} + l_{\tau_2} \leq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Возьмём \sup по всем разбиениям τ : $\sup_{\tau} (l_\tau) = S_\gamma \leq S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Примеры

Неспрямляемые пути:

1) Кривая Пеано

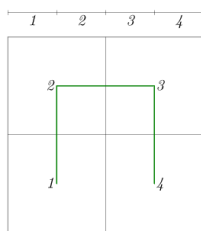


Fig. 1.

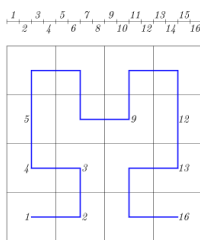


Fig. 2.

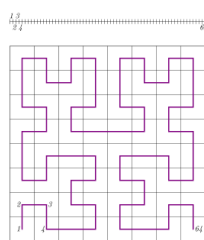
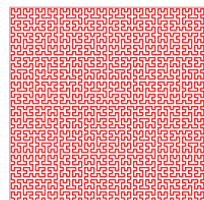
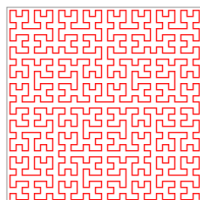
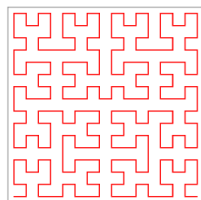
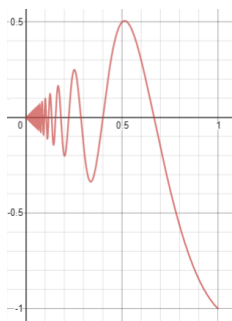


Fig. 3.



В пределе $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ - сюръективное отображение. В итоге получается прямая заполняющая весь квадрат с пересечениями (в смысле дополнение до подкривых пределе пусто)

$$2) y = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Докажем, что прямая не является сжимляемой.

Пусть $\tau : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1} < \dots < 1$, $t_N = \frac{1}{N}$, тогда

$$y(t_k) = \frac{1}{k} \cos \pi k = \frac{1}{k} (-\pi)^k$$

Длина k -ого звена:

$$\frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{2}{k} \Rightarrow l_\tau \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \Rightarrow \sup l_\tau = +\infty$$

33 Кривая. Длина кривой.

Опр. см. в билете [32](#)

Теорема (о длинах эквивалентных путей)

Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$

Док-во

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \exists \varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ - строго возрастающая, $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$,
 $\varphi(\tau_1) = \tau_2$ - разбиение $[a_2, b_2]$,

$$l_{\tau_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} = l_{\tau_2} \leq S_{\tau_2}$$

Перейдём к \sup по всем τ_1 : $\sup_{\tau_1} (l_{\tau_1}) = S_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$

Аналогично получим неравенство $S_{\tau_2} \leq S_{\tau_1}$

Замечание

Корректность определения (с классами эквивалентности) длины пути следует из доказанной выше теоремы

34 Теорема о вычислении длины гладкого пути.

Теорема

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ - C^1 -гладкая кривая, тогда γ - спрямляется, $S_\gamma = \int_a^b |\gamma'|$

Док-во

1) γ - спрямляемая?

$\gamma_j \in C^1[a, b] \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \Rightarrow$ (Ф-ия достигает \min и \max на $[a, b]$ по т. Вейерштрасса)

$$m_j \leq \gamma_j \leq M_j, \quad M := \sqrt{\sum_{j=1}^m M_j^2}, \quad m := \sqrt{\sum_{j=1}^m m_j^2}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \dots \\ \gamma'_n \end{pmatrix}$$

$$\forall \tau\text{-разбиения } [a, b] : l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2} =$$

(по т. Лагранжа $\forall k = 0, 1, \dots, n-1 \exists \xi_k \in [t_k, t_{k+1}] : \gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k) = \gamma'_j(\xi_k) \Delta t_k$)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma'_j(\xi_k))^2 \Delta t_k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^m (\gamma'_j(\xi_k))^2 \Delta t_k} \Rightarrow m \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k \leq l_\tau \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq l_\tau \leq M(b-a) \xrightarrow{\sup} m(b-a) \leq S_\gamma \leq M(b-a) \Rightarrow -\infty < S_\gamma < +\infty$$

$$2) S_\gamma = \int_a^b |\gamma'|$$

Пусть $\gamma^{(k)}$ - сужение γ на $[t_k, t_{k+1}]$. Для него выполняется пункт (1):

переобозначим γ' как $\dot{\gamma}$ из-за сложности обозначений

$$m_j^{(k)} = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot{\gamma}_j^{(k)}(t)|, \quad M_j^{(k)} = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot{\gamma}_j^{(k)}(t)|$$

$$m^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (m_j^{(k)})^2}, \quad M^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (M_j^{(k)})^2}$$

$$m^{(k)} \Delta t_k \leq S_{\gamma^{(k)}} \leq M^{(k)} \Delta t_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leq S_\gamma \leq \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)} \Delta t_k$$

$$m_j^{(k)} \leq |\dot{\gamma}_j^{(k)}(t)| \leq M_j^{(k)} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Суммируем, возводим в квадрат, извлекаем корень:

$$m^{(k)} \leq |\dot{\gamma}^{(k)}(t)| \leq M^{(k)} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\text{Проинтегрируем по } \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt : m^{(k)} \Delta t_k \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{\gamma}^{(k)}(t)| dt \leq M^{(k)} \Delta t_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{\gamma}^{(k)}(t)| dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)} \Delta t_k, \text{ оценим } \sum_{k=1}^{n-1} (M^{(k)} - m^{(k)} \Delta t_k) :$$

$$M^{(k)} - m^{(k)} = \frac{(M^{(k)})^2 - (m^{(k)})^2}{M^{(k)} + m^{(k)}} = \sum_{j=1}^m (M_j^{(k)} - m_j^{(k)}) \frac{M_j^{(k)} + m_j^{(k)}}{M^{(k)} + m^{(k)}} \leq \sum_{j=1}^m (M_j^{(k)} - m_j^{(k)})$$

$$\gamma_j \in C^1[a, b] \Rightarrow \gamma'_j \in C[a, b] \Rightarrow p/n \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_j > 0 :$$

$$\lambda(\tau) < \delta_j \Rightarrow 0 \leq M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \leq \frac{\mathcal{E}}{m(b-a)} \stackrel{\sum_{1 \leq j \leq m}^m}{\cong} 0 \leq M^{(k)} - m^{(k)} \leq \frac{\mathcal{E}}{b-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (M^{(k)} - m^{(k)}) \Delta t_k < \frac{\mathcal{E}}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \mathcal{E} \Rightarrow S_\gamma = \int_a^b |\dot{\gamma}|$$

35 Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Примеры.

Опр

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}$$

говорят, что функ. последовательность сходится поточечно

к ф. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, если $\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{(x, \varepsilon)} : \forall n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Опр

Говорят, что функ. послед. сходится к f равномерно на E

$$f_n \xrightarrow{E} f$$

Если $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{(\varepsilon)} \quad \forall n > N \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{(\varepsilon)} \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Примеры

$$1. f_n(x) = \frac{\sin^2(e^x) - \arctan(n^2 \sqrt{x})}{\sqrt{n}} \quad x \in [0; +\infty)$$

$$0 \leq \sup_{[0, +\infty)} |f_n(x)| \leq \frac{10}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{[0, +\infty)} 0$$

$$2. f_n(x) = x^n - x^{2n} \quad x \in [0, 1]$$

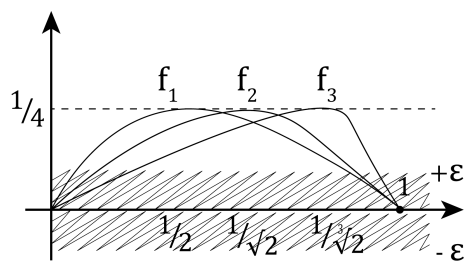
$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ - поточечно. Равномерно ли?

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = x^{n-1}(n - 2nx^n)$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} - \text{крит. точка}$$

$$f_n(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{равномерной сх-ти нет}$$



Горбик убегает

Замечание

Из равномерной сх-ти \Rightarrow поточечная

36 Критерий Коши для равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема (Критерий Коши для равномерной сходимости функ. послед.)

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon \quad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Док-во

(\Rightarrow):

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon > 0 : \quad \forall m, n > N_\varepsilon :$$

$$\sup |f_n - f_m| \leq \sup (|f_n - f| + |f - f_m|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(\Leftarrow):

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

т.е. $\{f_n(x)\}$ - сх. в себе $\Leftrightarrow \{f_n(x)\}$ имеет конеч. предел

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ т.о. } f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in E$$

(т.е. f - поточеч. предел послед.)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \forall m, n > N_\varepsilon \quad \forall x \in E$$

$$f_m(x) - \varepsilon < f_n(x) < f_m(x) + \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_m(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_m(x) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

37 Сохранение непрерывности при равномерном предельном переходе. Теорема Дини (б/д). Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема (о равномерном пределе непр. функции)

f_n - непр в т. $x_0 \in E$

$$f_n \xrightarrow{E} f$$

Тогда f - непр. в т. x_0

Док-во

$\forall \varepsilon > 0$ (зафиксир.)

Т.к. $f_n \xrightarrow{E} f$, то $\exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$ (зафикс $n^* > N_\varepsilon$) $\sup_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$ (*)

В частности, для $n^* > N_\varepsilon$ $\sup_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{3}$

f_{n^*} - непр. в т. x_0 : $\exists \delta > 0 \quad \forall t \in E : |t - x_0| < \delta \quad |f_{n^*}(t) - f_{n^*}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда $\forall x \in E : |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| + |f_{n^*}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Следствие

Если $f_n \in C(E)$, $f_n \xrightarrow{E} f$, то $f \in C(E)$

Теорема (Дини)

$f_n \in C[a, b] \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$ (поточ. на $[a, b]$)

причем $\forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \searrow$ (по n). т.е $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

Если $f \in C[a, b]$, то $f_n \xrightarrow{[a, b]} f$

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла)

$f_n \in R[a, b] \quad f_n \xrightarrow{[a, b]} f \in R[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$

Док-во

$$a < b$$

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \sup_{[a,b]} \left| f_n - f \right| \cdot (b - a) \rightarrow 0$$

Утв

Функ. ряд сход равномерно \Leftrightarrow посл-ть частичных сумм сход равномерно

Следствие (1)

$$f_n \in C[a, b] \quad \sum_{n=1}^N f_n \Rightarrow f, \text{ тогда:}$$

$$1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C[a, b]$$

$$2) \quad \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Следствие (2)

$$\text{Если } f_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad f_n \in C[a, b]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in C[a, b]$$

$$\text{То } \sum f_n - \text{сход. равномерно на } [a, b]$$

38 Дифференцируемость и равномерная сходимость.

Теорема (диф-сть и равном. сх-ть)

$$f_n \in C^1[a, b] \quad f'_n \rightrightarrows_{[a, b]} g$$

$$\text{и } \exists c \in [a, b] : \quad \{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty} - \text{сх}$$

Тогда:

1. $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$
2. $f \in C^1[a, b]$ и $f' = g$

Док-во

$$(b) \quad f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^x g = f(x) - f(c) \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c)$$

(по т. о предельном переходе под знаком интеграла)

$$f(x) = \int_c^x g + f(c)$$

$$\text{т.о. } f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ поточ. на } [a, b] \quad f'(x) = g(x) \text{ непр (равн. предел непр ф.)}$$

$$\Rightarrow f \in C^1[a, b]$$

$$(a) \quad \text{покажем, что } f_n \rightrightarrows f$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup \left| f_n(x) - f_n(c) + \underbrace{f_n(c) - f(c)} + f(c) - f(x) \right| \leq \\ &\leq \sup \left| \int_c^x f'_n - \int_c^x g + f_n(c) - f(c) \right| \leq \sup \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| + |f_n(c) - f(c)| \quad (*) \\ f'_n \rightrightarrows g &\Rightarrow \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} |f'_n - g|}_{\rightarrow 0} \underbrace{(x - c)}_{\leq (a-b)} \end{aligned}$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \left| \int_c^x (f'_n - g) \right| < \mathcal{E}$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |f_n(c) - f(c)| < \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow (*) < 2\mathcal{E}$$

Пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(x^n)$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{т.е. } f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 = f$$

$$f'_n(1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + x^{2n}} \cdot n \cdot x^{n-1} \Big|_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Но } (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'_{x=1} = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1)$$

39 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

$$f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall n \exists M_n \quad |f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in E$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad (\text{сход. мажоранта})$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх. равн. (и абс) на E

Док-во

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N \quad \left| \sum_{k=m}^n M_k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sum M_k < \infty$$

$$\text{Тогда } |S_n - S_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(x)| \leq \left| \sum_{k=m}^n M_k \right| < \varepsilon$$

$$\text{Т.е. } |S_n - S_{m-1}| < \varepsilon \text{ т.е. вып. кр. Коши для } S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

част. суммы сх равн. \Rightarrow функ. ряд сх. равн.

40 Степенной ряд (в \mathbb{C}). Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.

Опр

Будем рассматривать

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad c_k, z \in \mathbb{C}$$

Опр

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = |z| \cos \varphi$$

$$y = |z| \sin \varphi$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$C_n = a_n + ib_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |c_n - c| < \varepsilon$$

УТВ

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \Leftrightarrow \begin{matrix} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \end{matrix} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$c_n = a_n + ib_n$$

$$c = a + ib$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

Опр

Радиусом сх-ти степ. ряда $\sum c_n z^n$ назыв $R \in [0, +\infty]$ такое, что ($z \neq 0$)

$$\forall z : |z| < R \text{ - ряд сх}$$

$$\forall z : |z| > R \text{ - ряд расх.}$$

Примеры

1. $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$ по пр. Даламб расх $\forall z \neq 0$ $R = 0$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(k+1)! z^{k+1}|}{|k! z^k|} = \infty, \quad z \neq 0$$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ - сх. $\forall z \in \mathbb{C}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$z^* = -1 \quad : \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} - \text{сх} \Rightarrow \text{сх. равн. } \forall |z| \leq d < 1$$

$$z_0 = 1 \quad : \quad \sum \frac{1}{n} - \text{расх} \Rightarrow \forall |z| > 1$$

Теорема (ф-ма Коши-Адамара)

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad R - \text{рад. сх-ти}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

Док-во

$$|z| < R \quad \exists \delta : |z| < \delta \cdot R$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : \forall k > N \quad \sqrt[k]{|c_k|} < \frac{1 + \varepsilon}{R}$$

41 Теорема о комплексной дифференцируемости степенного ряда. Следствие: единственность разложения в степенной ряд.

42 Ряд Тейлора. Примеры $(e^x, \sin x, \ln(1+x), e^{-\frac{1}{x^2}})$.

Опр

$$f \in C^\infty(U_{x_0}) \quad U_{x_0} - \text{окр } x_0$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ назыв. Рядом Тейлора ф-и в т x_0

Примеры

$$1. e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$2. \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$3. \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

43 Биномиальный ряд $(1+x)^\alpha$

Опр

$$(1+x)^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Запишем (формально) ряд Тейлора для $(1+x)^\alpha$ в т. $x_0 = 0$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} = C_\alpha^k$$

Найдем интервал сходимости $\sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k z^k \quad z \in \mathbb{C}$ (по Даламберу)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{C_\alpha^{k+1} z^{k+1}}{C_\alpha^k z^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty}$$

44 Признак Абеля-Дирихле для равномерной сходимости функциональных рядов (доказательство одного).

Опр

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) b_k(t) \quad \begin{array}{l} a_k : E \rightarrow \mathbb{C} \\ b_k : E \rightarrow \mathbb{R} \\ E \subset \mathbb{C} \end{array}$$

$$b_k(t) - \text{монот по } k \quad \forall t$$

$$\text{т.е. } b_{k+1}(t) \leq b_k(t) \quad \forall t \text{ (или наоборот)}$$

Абель

$$1. \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \text{сход р/м на } E$$

$$2. |b_k(t)| \leq M \quad \forall k, \quad \forall t \in E$$

Дирихле

$$1. \left| \sum_{k=0}^N a_k(t) \right| \leq M \quad \forall N, \forall t \in E$$

$$2. b_k(t) \Rightarrow 0$$

$$\text{Тогда } \sum_0^{\infty} a_k(t) b_k(t) - \text{сход равномерно на } E$$

Док-во Дописать

45 Теорема Абеля. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Опр

$$\text{hint : } z \in [0, w] \Leftrightarrow z = t \cdot w \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Пусть $\sum c_k z^k$ сход при $z = w \in \mathbb{C}$

Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ - сход р-но на $[0, w]$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in C[0, w]$$

Док-во

$$f(t, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k w^k \quad t \in [0, 1]$$

$\sum c_k w^k$ - сход (равн по t, т.к. не зависит от t)

t^k - убывает

$$|t^k| \leq 1 \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

\Rightarrow по пр. Абеля-Дирихле ряд сход. равномерно

Пример

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \quad \forall x : -1 < x < 1$$

при $x = 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ - гармонич. знакочеред, он сход, т.о.

$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ - сх. при $x = 1 \Rightarrow$ по т. Абеля

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \in C[0, 1]$$

В частности $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$

$$\text{если } x \in (0, 1), \text{ то } f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1+x) = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$

46 Интеграл комплекснозначной функции. Скалярное произведение и норма в пространстве $C(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, в пространстве $R([a; b])$. Ортогональность. Пример: $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$.

Опр

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

$$u(x) = \operatorname{Re} f(x)$$

$$v(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

$$f - \text{инт. по Риману} \quad f \in R_{\mathbb{C}}[a, b], \text{ если}$$

$$u, v \in R[a, b]$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

Свойства

$$1. \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$2. \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$3. \int_a^b kf = k \int_a^b f \quad (k \in \mathbb{C})$$

$$4. \int_a^b \overline{f} = \int_a^b u - iv = \overline{\int_a^b f} \quad (\text{комплексное сопряжение})$$

$$5. F' = f$$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

$$6. \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Опр (Периодич. функции)

$$f(x + t) = f(x) \quad \forall x$$

Будем считать, что $T = 1$

Периодич. функции с пер. 1 образуют линейное пр-во

$$f, g - \text{период. } T = 1$$

$\Rightarrow f + k \cdot g$ - тоже период. $T = 1$

Если f - периодич. $T = 1$, то

$$\int_0^1 f = \int_c^{c+1} f \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$0 < c < 1$$

$$\int_0^1 f = \int_0^c f + \int_c^1 f = \int_0^c f(t+1)dt + \int_c^1 f = \int_1^{c+1} f(s)ds + \int_c^1 f$$

Опр

Рассмотрим пр-во функций с пер $T = 1$ и $\in R_C[0, 1] \Leftrightarrow R_C[0, 1]$ Введем на этом пр-ве структуру евклидова пр-ва

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot \bar{g} \text{ - скал. произведение}$$

Опр (Норма в лин. пр-ве X со скал. произв.)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$$

$$1. \|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2. \forall k \quad \|kx\| = \|k\| \cdot \|x\|$$

Опр

$$f \perp g \quad (f \text{ ортогонально } g) \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0$$

Пример

$$a) e_n = e^{2\pi i n x} \quad x \in [0, 1] \quad \|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\|e_n\|^2 = \int_0^1 e_n \bar{e_n} = \int_0^1 e^{2\pi i n x} \cdot e^{-2\pi i n x} = 1$$

$$\overline{e^{i\varphi}} = \cos \varphi + i \sin \varphi = \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}$$

$$b) \langle e_n, e_m \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n x} \cdot e^{-2\pi i m x} = \int_0^1 e^{2\pi i x(n-m)} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} = \delta_{nm} \text{ - с. Крон.}$$

$$\text{т.о.} \quad e_n \perp e_m \quad \forall n \neq m$$

47 Свойства скалярного произведения и нормы (теорема Пифагора, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника).

Свойства

$$\langle \dots \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$1. \forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$2. \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall y \in X$$

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$3. \forall k \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in X$$

$$\langle kx, y \rangle = k \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, ky \rangle = \bar{k} \langle x, y \rangle$$

$$4. \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ причем } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Но для $f \in R_{\mathbb{C}}[0, 1]$ необязательно из $\langle f, f \rangle = 0$ следует, что $f = 0$

Свойства

$$1. \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \underbrace{\langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle}_{2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle} + \|g\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle + \|g\|^2$$

$$2. \text{ По т. Пифагора, если } f \perp g \Rightarrow$$

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

$$3. \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

$$4. \text{ нер-во КБШ}$$

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$$5. \text{ Н-во треугольника}$$

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Док-во (КБШ)

$$(*) \quad |\langle f, g \rangle| = \left| \int f \bar{g} \right| \leq \int |f| |g|$$

$$0 \leq \int (|f| + \lambda |g|)^2 = \underbrace{\|f\|^2 + 2\lambda \int |f| |g| + \lambda^2 \|g\|^2}_{\text{кв. трехчлен отн } \lambda} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$D \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\int |f| |g| \right)^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0 \Rightarrow \int |f| |g| \leq \|f\| \|g\| \quad (**)$$

$$(*) \text{ и } (**) \Rightarrow |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Док-во (Нер-во треуг-ка)

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2 |\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \\ &\leq \|f\|^2 + 2 \|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 \Rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

Теорема (Аксиомы нормы)

$$X - \text{лин. пр-во} \quad \|\dots\| : X \rightarrow [0, +\infty)$$

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|kx\| = \|k\| \cdot \|x\| \quad \forall k \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in X$
3. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**48 Коэффициенты Фурье функции по ортогональной системе e_k .
Ряд Фурье. Пример: тригонометрический полином.**

Опр Тригонометрическим многочленом степени N назовем:

$$T_n = \sum_{k=-N}^N c_k e_k(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-N}^N c_k (\cos(2\pi k x) + i \sin(2\pi k x))$$

Как найти c_k , если известен $T_n(x)$?

$$T_n = \sum_{k=-N}^N c_k e_k \quad \left| \cdot \langle \dots, e_m \rangle \right.$$

$$\langle T_n, e_m \rangle = c_m \cdot \underbrace{\langle e_m, e_m \rangle}_1 \quad (\text{т.к. } \langle e_k, e_m \rangle = \delta_{km})$$

$$c_m = \langle T_n, e_m \rangle = \int_0^1 T_n \bar{e}_m$$

$\exists f, g$ - тригоном. полиномы, коэфф. в разложении по e_k будем обозначать $\hat{f}(k) \in \mathbb{C}$

$$\text{т.е. } f = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e_k, \quad \hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle$$

$$g = \sum_{k=-N}^N \hat{g}(k) e_k, \quad \hat{g}(k) = \langle g, e_k \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \langle \left(\sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e_k \right), \left(\sum_{j=-N}^N \hat{g}(j) e_j \right) \rangle =$$

$$= \sum_{k,j=-N}^N \hat{f}(k) \hat{g}(j) \underbrace{\langle e_k, e_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) \hat{g}(k)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-N}^N \left| \hat{f}(k) \right|^2 \quad \hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle$$

Опр

$$\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle = \int_0^1 f \cdot \bar{e}_k - \text{коэфф. Фурье функции } f$$

по ортог. системе функций $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

Опр

$$\text{Ряд Фурье функции } f : \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e_k(x)$$

49 Свойства коэффициентов Фурье (коэффициенты Фурье сдвига, производной).

Свойства

$$\begin{aligned}
 1. \quad f_a(t) = f(t+a) &\Rightarrow \hat{f}_a(k) = \int_0^1 f(t+a)e^{-2\pi ikt} dt = \\
 &= \int_a^{1+a} f(x) \cdot e^{-2\pi ik(x-a)} dx = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i kx} \cdot e^{\epsilon \pi i k a} = \\
 &= e^{2\pi i k a} \hat{f}(k)
 \end{aligned}$$

2. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$\hat{f}'(k) = \int_0^1 f'(t) \cdot e^{-2\pi ikt} dt =$$

Интегрируем по частям

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{f(t)e^{-2\pi ikt}}_{=0 \text{ т.к. } T=1} \Big|_0^1 + 2\pi i k \underbrace{\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt} dt}_{\hat{f}(k)} \\
 \hat{f}'(k) &= 2\pi i k \hat{f}(k)
 \end{aligned}$$

3. Коэф. Фурье вещ. функции

$$\begin{aligned}
 f &\in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\
 \hat{f}(k) &= \int_0^1 f(t) \cdot e^{-2\pi ikt} dt \\
 \hat{f}(-k) &= \int_0^1 f(t) \cdot e^{2\pi ikt} dt \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \overline{\hat{f}(-k)}
 \end{aligned}$$

4. Коэфф. Фурье четной функции

$$\begin{aligned}
 f &\text{ - четная} \\
 \hat{f}(k) &= \int_{-k}^k f(t)e^{-2\pi ikt} dt = \int_{-k}^k \underbrace{f \cdot \cos 2\pi kt}_{\text{четная}} - i \int_{-k}^k \underbrace{f \cdot \sin 2\pi kt}_{\text{нечетная } =0} = \\
 &= \int_{-k}^k f \cos 2\pi kt = \hat{f}(-k) \text{ поскольку четная}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Если } f &\text{ - вещ и четная } \Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)} \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

50 Неравенство Бесселя. Лемма Римана-Лебега (light).

Опр (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \int_0^1 |f|^2 = \|f\|^2$$

Лемма

$$f \in R[0, 1], \quad S_N(f) = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e_k$$

$$f - S_N(f) \perp S_N(f)$$

Док-во

$$\begin{aligned} \langle f, S_N(f) \rangle &= \int_0^1 f(t) \cdot \overline{\sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) \cdot e_k(t)} dt = \sum_{k=-N}^N \overline{\hat{f}(k)} \int_0^1 f(t) \cdot \overline{e_k} dt = \sum_{k=-N}^N |\hat{f}(k)|^2 = \\ &= \langle S_N(f), S_N(f) \rangle = \|S_N(f)\|^2 \end{aligned}$$

$$\langle f, S_N(f) \rangle = \langle S_N(f), S_N(f) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle f - S_N(f), S_N(f) \rangle = 0$$

Следствие

$$\text{т.к. } f - S_N(f) \perp S_N(f), \text{ то } \|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2$$

Док-во (нер-ва Бесселя)

$$\sum_{k=-N}^N |\hat{f}(k)|^2 = \|S_N(f)\|^2 \leq \|f\|^2 = \int_0^1 |f|^2$$

предельный переход в нер-ве ($N \rightarrow \infty$)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \int_0^1 |f|^2$$

Следствие (Лемма Римана-Лебега)

$$f \in R_{\mathbb{C}}[0, 1] \Rightarrow \hat{f}(k) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow +\infty \quad k \rightarrow -\infty$$

Док-во

Необходимо усл. сх-ти ряда и нер-во Бесселя.

В нер-ве Бесселя ряд возрастает и ограничен сверху, значит он сходится.

$$\Rightarrow \hat{f}(k) \rightarrow 0$$

51 Вычисление интеграла Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}.$

52 Ядра Дирихле, их свойства. Выражение частичных сумм ряда Фурье через ядра Дирихле.

$$\begin{aligned}
 S_N(f) &= \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e_k(x) = \sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \cdot e^{2\pi i k t} = \sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(t) e^{2\pi i k(x-t)} dt = \\
 &= \int_0^1 f(t) \underbrace{\sum_{k=-N}^N e^{2\pi i k(x-t)}}_{\text{Ядро Дирихле}}
 \end{aligned}$$

Опр (ядро Дирихле)

$$\begin{aligned}
 D_N(y) &= \sum_{k=-N}^N e^{2\pi i k y} \stackrel{\text{геом. прогр.}}{=} e^{-2\pi i N y} \frac{1 - e^{2\pi i(2N+1)y}}{1 - e^{2\pi i y}} = \\
 &= e^{-2\pi i N y} \frac{1 - e^{2\pi i(2N+1)y}}{1 - e^{2\pi i y}} \cdot \frac{1 - e^{-2\pi i y}}{1 - e^{-2\pi i y}} = \frac{e^{-2\pi i N y} + e^{2\pi i N y} - e^{-2\pi i(N+1)y} - e^{2\pi i(N+1)y}}{1 + 1 - e^{2\pi i y} - e^{-2\pi i y}} = \\
 &= \frac{2 \cos 2\pi N y - 2 \cos 2\pi(N+1)y}{2 - 2 \cos 2\pi y} =
 \end{aligned}$$

Через разность косинусов

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin \pi(2N+1)y \sin \pi y}{2 \sin^2 \pi y} = \frac{\sin \pi(2N+1)y}{\sin \pi y} \\
 D_n(y) &= \begin{cases} \frac{\sin \pi(2N+1)y}{\sin \pi y}, & y \neq 0 \\ 2N+1, & y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Свойства

$$1. D_N(-y) = D_N(y) \text{ четная}$$

$$2. D_N \in C[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$$

$$3. D_n = \sum_{j=-N}^N e_j(y)$$

$$\hat{D}_N(k) = \langle D_n, e_k \rangle$$

$$\hat{D}_n(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leq N \\ 0, & |k| > N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_N(0) = \langle D_N, e_0 \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t) dt = 1$$

Таким образом, част. суммы р. Фурье выражаются через ядро Дирихле.

$$S_N f(x) = \int_0^1 f(t) \cdot D_N(x-t) dt$$

53 Свертка. Простейшие свойства. Свертка с тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

Опр (Свертка функций)

$$f, g \in R\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)g(x-t)dt \quad - \text{свертка } f \text{ и } g$$

$$\text{т.о } S_n = f * D_N$$

Свойства

1. $f * g = g * f$ коммутативность

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)g(x-t)dt &= [x-t=s] = - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} f(x-s)g(s)ds = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)f(x-s)ds = g * f \end{aligned}$$

$$2. f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$$

$$3. f * (kg) = k(f * g)$$

$$4. f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad T_N - \text{тригонометр. полином степ } \leq N$$

Тогда $f * T_n$ - тригоном. полином степ $\leq N$

$$\begin{aligned} f * T_N &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)T_N(x-t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k(x-t)} dt = \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-e\pi i k t} dt \cdot e^{2\pi i k x} - \text{триг. полином степ. } N \end{aligned}$$

$$5. f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$P_N - \text{алг. полином степ } \leq N$$

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x^k$$

$$f * P_N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sum_{k=0}^N a_k (x-t)^k$$

54 Принцип локализации Римана.

$$S_N f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) D_N(t) dt$$

Лемма

$$f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int f(x-t) D_N(t) dt = 0$$

$$\delta \leq |t| \leq \frac{1}{2}$$

55 Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье для
локально-Гельдеровской функции.

56 Ядра Фейера, их свойства. Связь с $\sigma_N(f)$.

$$S_N f = \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e_k(x)$$

$$\begin{aligned} \sigma_N f(x) &= \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_N f}{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N f * D_k(x) = \\ &= f * \left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k \right) \end{aligned}$$

Опр (Ядро Фейера)

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \frac{\sin \pi(2k+1)x}{\sin \pi x}$$

$$\left(\sum_{k=0}^N \sin \pi(2k+1)x \right) \cdot \sin \pi x = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\cos 2\pi kx - \cos 2\pi(k+1)x) =$$

$$\frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi x + \cos 2\pi x - \cos 4\pi x + \cos 4\pi x + \dots - \cos 2\pi(N+1)x)$$

$$F_N(x) = \frac{1 - \cos 2\pi(N+1)x}{2(N+1) \sin^2 \pi x} = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \pi(x+1)x}{\sin^2 \pi x}$$

$\sigma_N(f)$ - сумма Фейера

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k = \int_0^1 f(t) F_N(x-t) dt$$

57 **Аппроксимативная единица. Определение, примеры. Теорема о равномерной сходимости свертки с аппроксимативной единицей.**

Теорема (Фейера)

$$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow \sigma_N(f) = f * F_n \xrightarrow[R]{\Rightarrow} f$$

Теорема (Вейерштрасса)

$$f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = R_{per}[0, 1]$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists T - \text{триг. полином}$$

$$\max_{x \in [0, 1]} |f(x) - T(x)| < \mathcal{E}$$

59 Среднеквадратичное приближение функций, интегрируемых по Риману, тригонометрическими полиномами.

60 Равенство Парсеваля.

61.1 Множества меры ноль

Опр

$E \subset \mathbb{R}$, говорят, что E - мн-во меры ноль, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_j = (\alpha_j, \beta_j) : E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon \quad (|I_j| = \beta_j - \alpha_j)$$

не более чем сч.
набор откр. инт.

Примеры

1) \forall Конечное множество - мн-во меры ноль

$$E = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad I_j := (x_j - \frac{\varepsilon}{4n}, x_j + \frac{\varepsilon}{4n}), \quad \sum_{j=1}^n |I_j| = \frac{\varepsilon}{2}$$

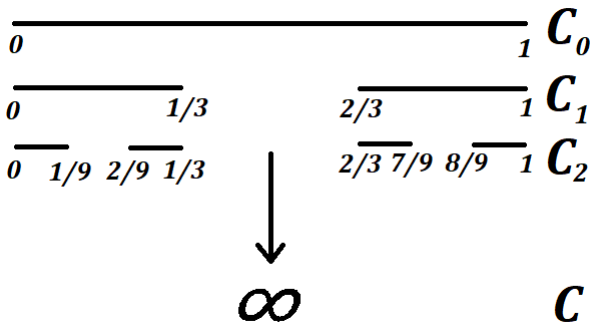
2) $A = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ - счётное \Rightarrow имеет меру 0.

Как покрыть \mathbb{N} ? $|I_j| = \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ - геом. прогрессия

3) Несчетное множество меры ноль:

Канторовское мн-во (Канторовский компакт), построение:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$



Определим $C_{\frac{1}{3^p}}$ как множество отрезков, полученных для $\varepsilon = \frac{1}{3^p}$ для крайних точек каждого отрезка из C_p (они их покроют "вплотную" и по краям будет немного лишнего). На каждом шаге p у нас 2^p отрезков

$$\Rightarrow |C_{\frac{1}{3^p}}| = 5 \frac{2^{p-1}}{3^p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

61.2 Критерий Лебега интегрируемости функции

Теорема

Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, тогда:

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ имеет ограниченное мн-во точек разрыва и меру 0

Примеры

1) Функция Дирихле $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\mathcal{D} \notin R[0, 1]$. Проверим по критерию Лебега. Множество точек разрыва - \mathbb{R} , но оно не множество меры 0 (слишком много точек).

2) Функция Римана $\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} - \text{несократимая дробь} \end{cases}$

Оказывается, она интегрируема по Риману на любом отрезке. Рассмотрим $[0, 1]$:

а) $\forall a \in \mathbb{Q}$ - точка разрыва Φ :

$\Phi(a) > 0$ по определению. С другой стороны как угодно близко найдётся иррациональная точка, в которой функция принимает значение 0.

б) $\forall a \notin \mathbb{Q}$ - непрерывна:

Для произвольного $\mathcal{E} > 0$ рассмотрим множество $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \mathcal{E}\}$.

Никакая иррациональная точка не лежит в M , поскольку в иррациональных точках функция f обращается в ноль.

Если $x \in M$, тогда x есть рациональное число вида $x = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, дробь $\frac{m}{n}$ несократима, и тогда $f(x) = \frac{1}{n} \geq \mathcal{E}$ и, следовательно, $n \leq \frac{1}{\mathcal{E}}$. Из ограничения на n следует, что пересечение множества M и любого ограниченного интервала состоит из конечного числа точек.

Пусть α - произвольное иррациональное число. По определению $f(\alpha) = 0$. Мы можем выбрать окрестность точки α так, чтобы в ней не содержалась ни одна точка множества M . Если же $x \notin M$, то $f(x) < \mathcal{E}$. Таким образом, мы нашли интервал, который требуется в определении непрерывности.