Содержание

2019-09-04

1 Метрические пространства

$$M \quad d: M \times M \to [0; +\infty)$$

d - метрика

Теор

Аксиомы метрики:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Примеры

1. $M = \mathbb{R}^n \quad x \in M \quad x = (x_1, ..., x_n)$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$$

2. $M = \mathbb{R}^n,$

$$d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum |x_j - y_j|_{j=1}^n}$$

$$\text{В частн. } d_2(x,y) = \sqrt{\sum^n |x_j - y_j|^2}$$

3. $M = C[0,1]$

$$f, g \in M$$

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

4. $M = C[-1,1] \quad d(f,g) = \int_{-1}^1 |f - g|$

Утв

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} \leq n \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$$

$$d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)$$

Опр

$$x^{(m)} \in M$$

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x \Leftrightarrow d(x^{(m)}, x) \underset{m\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Пример

1. $M = C[0,1] \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

$$f^{(m)} \underset{d}{\rightarrow} f \Leftrightarrow f^{(m} \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$$

2. $M = \mathbb{R}^n, d_2(x,y) \quad x^{(m)} = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$

сх-сть $(\mathbb{R}^n, d_2) \Leftrightarrow$ *покоорд сх-ти*

$$x^{(m)} \underset{d_2}{\rightarrow} x \Leftrightarrow x_j^{(m)} \rightarrow x_j \quad \forall j = 1, ...n$$

Т.о сх-ть по метрике d_2 в $\mathbb{R}^n$ равносильна покоорд сх-ти

Теор (Критерий Коши)

$$(\mathbb{R}^n, d_2)$$

$$x^{(m)} \underset{m\to\infty}{\rightarrow} x \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n, k \geq N$$

$d_2(x^{(n)}, x^{(k)}) < \mathcal{E}$ *(УПР)*

Аналогичн. Т. Верна не для всех метрич. пр-в:

Напр: $M = C[-1,1] \quad d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f-g|$

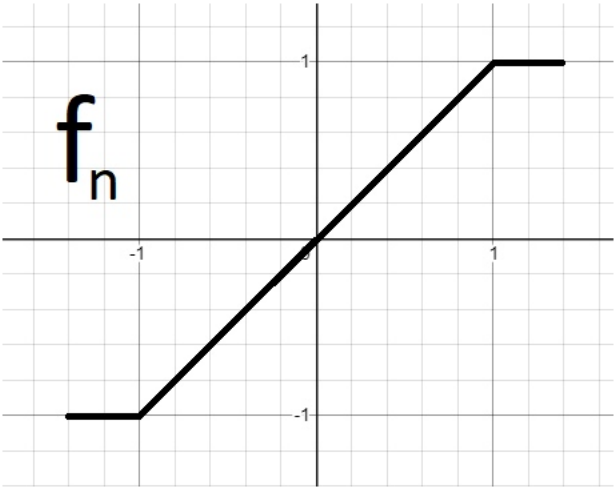
$f_n :$

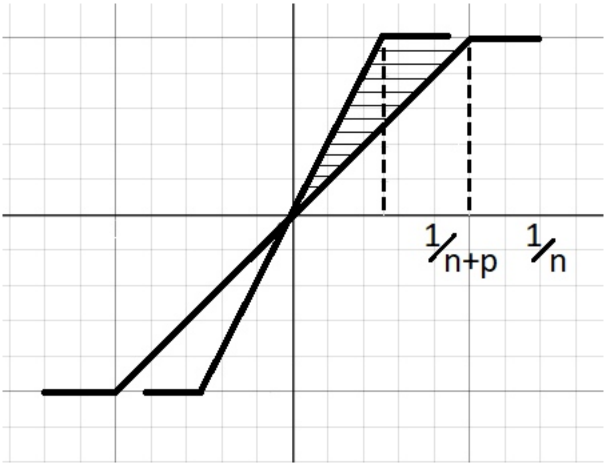
$\{f_n\}$ - *сх. в себе:*

$$\forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n > N \ \forall p > 0?$$

$$d(f_n, f_{n+p}) < \mathcal{E}$$

$$d(f_n, f_{n+p}) = \int_{-1}^{1} |f_n - f_{n+p}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$





$$\forall \mathcal{E} \exists N : \forall n > N, p > 0 \ d(f_n, f_{n+p}) < \mathcal{E}$$

Усл. Коши удовл. (сх в себе)

Есть ли $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$?

$g(x) = sign\ x$ *поточечн предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_b - g| = 0, \text{ но } g \notin C[-1,1]$$

предпол $f \in C[-1,1] \quad \lim f_n = f$ *т.е* $\int |f_n - f| \to 0$

$$0 \le \int_{-1}^{1} |f - g| \le \int_{-1}^{1} |f_n - f| + \int_{-1}^{1} |f_n - g| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{|f-g|}_{\in C[-1;1]} = 0$$

$$\int_{-1}^{0} |f-\underbrace{g}_{=0}| + \int_{0}^{1} |f-\underbrace{g}_{=0}| \to \begin{matrix} f(x)=1 & \forall x>0 \\ f(x)=-1 & \forall x<0 \end{matrix}$$

- неустранимый разрыв в т. $x=0 \quad \to \lim f_n$ *не существует*

УПР $C[0,1] \quad d(f,g) = \sup\limits_{1 \le x \le y} |f(x)-g(x)|$

Выполняется ли Т. Коши?

Топология

$$\mathbb{R}^n \quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}$$

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < r\}$

$X \subset \mathbb{R}^n \quad X$ - откр, если

$\forall a \in X \exists B_a : B_a \subset X$

X - замкн $\Leftrightarrow X^c$ - откр

<u>Теор</u> (св-ва)

1. U_α *- откр* $\forall \alpha \in A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ *- откр.*
2. $\{U_k\}_{k=1}^N$ *- откр* $\to \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ *- откр*
3. F_α *- замк* $\forall \alpha \in A \to \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$
4. F_k *- замкн* $\to \bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$ *- замк*

<u>Опр</u>

Окр. т a - U - откр: $a \in U$
δ *окр-ть т. а* $U_a(\delta) = B(a,\delta)$
прокол. δ *окр-ть*

$$\overset{\circ}{U}_a(\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\}$$

Внутренность $X \subset \mathbb{R}^n$

$$int(X) = \{a \in X : \exists B_a \subset X\}$$

Внешность $X \subset \mathbb{R}^n$

$$ext(X) = int(X^c) = \{b \in X^c : \exists B_b \subset X^c\}$$

Замыкание

$$Cl(X) = (ext(X))^c$$

Граница

$$\partial X = Cl(x) \setminus int(X) = \mathbb{R}^n \setminus (intX \cup extX)$$

Примеры

$$X = B(0,1)$$

$$intX = B(0,1)$$
$$exX = \{x : d(0,x) > 1\}$$
$$ClX = \overline{B}(0,1) = \{x : d(0,x) \leq 1\}$$

Рисунок шарика

$$\partial X = S(0,1) = \{x : d(0,x) = 1\}$$

УПР. Доказать или опровергнуть

1. $int(intX) = intX$
2. $\partial(\partial X) = \partial X$
3. $Cl(ClX) = ClX$

Утв

$$X \text{ - замкн } \Leftrightarrow ClX = X$$

Док-во

$$U \text{ - откр} \quad intU = U$$

$$\to X \text{ - замкн } \Leftrightarrow X^c \text{ - откр.} \Leftrightarrow extX = int(X^c) = X^c \Leftrightarrow$$
$$ClX = (extX)^c = X^{cc} = X$$

Опр

Ограниченность

$$X \subset \mathbb{R}^n$$

$$diamX = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$$

X *- огр. если* $diamX < \infty \Leftrightarrow \exists R > 0 : X \subset B(0,R)$ *(УПР)*

Теор (Принцип выбора Больцано-Вейерштр.)

$\forall$ *огр. послед.* $\{X^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ *можно выделить сх. подпослед.*

2 Компатные множества в $\mathbb{R}^n$

Опр

$K \subset \mathbb{R}^n$ *- компактное мн-во* $\Leftrightarrow \forall$ *откр. покр. можно выделить конеч. подпокр.*

$$\text{Если } U_\alpha - \text{ откр } .\forall \alpha \in A : K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \to \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in A :$$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_\alpha$$

Примеры

1. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *- компакт.*

2. $I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$

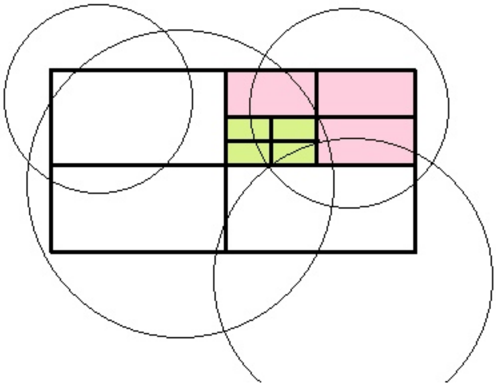
$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n$$

$$diamI_n = \frac{diamI}{2^n} \to 0$$

I_n *- замк*

$$I_k = \prod_{j=1}^{n} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \qquad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] = \{c_j\} \forall j$$

$$[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \supset [a_j^{(k+1)}], b_j^{(k+1)}$$



$$x^* \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

$$Если\ y^* \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \to d(x^*, y^*) \le diam I_k \to 0$$

$$\to d(x^*, y^*) = 0 \to x^* = y^*$$

$$x^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$$

$$x^* \in I \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \to$$

$\exists \alpha^* : x^* \in U_{\alpha^*}$ - *откр*

$$\exists B(x^*, \delta) \subset U_{\alpha^*}$$

$$\to \exists N \in \mathbb{N} : I_N \subset U_{\alpha^*}$$

2019-09-11

Лемма

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ - компакт}$$

Тогда

1. *K - замкн*
2. *K - огр*
3. *$\forall D \subset K \quad D$ - замк $\to D$ - комп*

Док-во

1.

$$K^c \ni a \textit{Рисунок области с k x a}$$

$$\forall x \in K \quad d(a, x) > 0$$

$$r_x = \frac{1}{3} d(x, a)$$

$$\forall x \in K$$

$$B(x, r_x) \text{ - откр}$$

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x) \text{ - откр. покр. компакта } K$$

$$\exists x_1, ..., x_N \in K : K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, r_{x_j})$$

$$a \in \bigcap_{k=1}^{N} B(a, r_{x_k}) = B(a, r_{\min}$$

$$r = \min(r_x, r_{x_N}) > 0$$

$$\textit{причем } \bigcap_{1}^{N} B(a, r_{x_k}) \textit{ не имеет общих точек}$$

$$\bigcup_{1}^{N} B(x_k, r_{x_k}) \supset K$$

$$\exists B(a, e_{mn}) \subset K^c \to K^c \text{ - откр } \to K \text{ - замкн}$$

2.

$$\text{комп - } K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(0,k) \text{ - откр. покр}$$

$$\to \exists k_1, ..., k_n$$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(0,k_j) = B(0, \max_{1 \le j \le N}(k_j)) \to K \text{ - огр}$$

3.

$$\text{замкн - } D \subset K \text{ - комп}$$

Пусть откр. покр

$$D \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$$U^* = D^c \text{ - откр - добавим к покр. } K\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

$$\to \text{ выд. конечн. подпокрытие } K \quad \{U_{\alpha_j}\}_{j=1}^{N} \cup \{U^*\}$$

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_\alpha$$

Теор (След. усл. равносильны)

1. K - *компакт.*
2. K - *замк. и огр.*
3. $$\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \; x_m \in K$$

   $$\exists \text{ подпосл } x_{m_k} \to x \in K$$

Док-во

$1 \to 2$

$2 \to 1$

$$\text{т.к. } K \text{ - огр} \to \exists I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$$

$$\text{замкн - } K \subset I \text{ - комп}$$

$\rightarrow$ *(лемма)* K *- комп*
$2 \rightarrow 3$

$x_m \in K$ *- замк и огр*

$\rightarrow \exists x_{m_k}$ *- сх (пр. выб. Б-В)*

$x_{m_k} \rightarrow x$ *предпол* $x \notin K$

$x \in K^c$ *- откр* $\rightarrow \exists B_x \subset K^c$

Но $K \ni d(x_{m_k}, x) \rightarrow 0$ *противореч* $x \in K$

$3 \rightarrow 2$

а) предп.K *не явл. огр.*

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K : d(0, x_n) > n$

$\{x_n\}$ *не огр* $\rightarrow$ *не сх.*

$\rightarrow K$ *- огр*

б) предп., что K *- не явл. замкн*

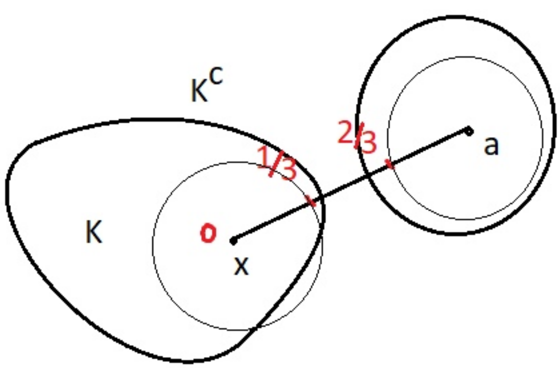
K^c *- не откр*

$\exists a \in K^c : \forall \delta > 0 \;\; B(a, \delta) \cap K \neq \varnothing$

$\exists x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap K$

$x_n \in K$

$0 \leq d(x_n, a) < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad x_n \rightarrow a; \;\; x_{n_k} \rightarrow x \in K$



УПР:

$$K_1 \supset K_2 \supset ...$$

д-ть $\bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} K_j \neq \varnothing$

Опр

Отображения в $\mathbb{R}^n$

$$E \subset \mathbb{R}^n$$

$f : E \to \mathbb{R}^m$ - *отобр-е (вект. ф-я)*

$m = 1$ - *ф-я*

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$$

$= (x_1, ..., x_n) \quad f_j : E \to \mathbb{R}$ *коорд. функ-ии*

$$a \in \mathbb{R}^n$$

a - *пред. т. E, если*

$$\forall \delta > 0 \quad U()(a, \delta) \cap E \neq \varnothing$$

Опр

$f : E \to \mathbb{R}^m, a$ - *пред. т E*

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, *если*

(Коши $)\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E$

$$0 < d(x, a) < \delta \to d(f(x), L) < \mathcal{E}$$

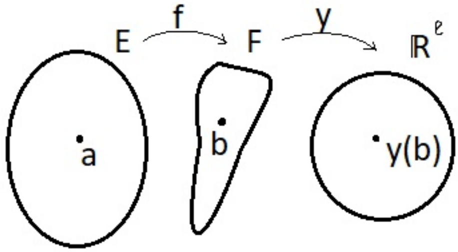
(Гейне) $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad x_k \in E \setminus \{a\} x_k \to_{k \to \infty} a \to F(x_k) \to_{k \to \infty} L$

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Повторные пределы

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$$



$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

$$f(\delta,\delta) = \frac{1}{2} \underset{\delta\to 0}{\to} \frac{1}{2}$$

$$f(\delta,-\delta) = -\frac{1}{2}$$

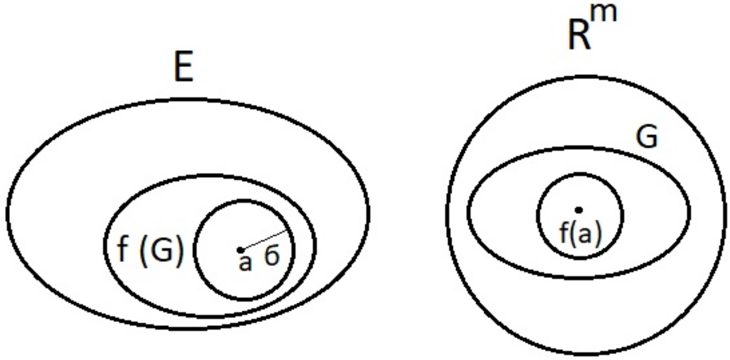
т.е $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *не сущ.*

Теор (предел композиции)

$E \subset \mathbb{R}^n, \quad F \subset \mathbb{R}^m \qquad \mathbb{R}^n \ni a$ - *пред т.* E $F \ni b$ - *пред. т.* F

$f : E \to F; \quad g : F \to \mathbb{R}^l$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b; \quad \lim\limits_{x\to b} g(x) = g(b)$



Тогда $\lim\limits_{x\to a} g\circ f = g(b)$

Теор (Крит. Коши)

a - пред т. E

$f(x)$ имеет предел в т.a

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overset{\circ}{U} (a, \delta) \cap E \to d(f(x), f(y)) < \mathcal{E}$

Опр (непрерывные отображения)

$a \in E \qquad f : E \to \mathbb{R}^m$

Если a *- изол* $\to f$ *- непр в* a*,*
если a *- пред, то* f *- непр в т.* $a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

f - непр в т.$a \Leftrightarrow f_j$ - непр. в т a $\forall 1 \leq j \leq m$

f - непр в т. $a; g$ - непр в $f(a) \Leftrightarrow g \circ f$ - непр в т a

непр сохр. при $+$, умн. на число

f - непр на $E \Leftrightarrow$ непр $\forall a \in E$

Теор

$f : E \to \mathbb{R}^m$

f - непр на $E \Leftrightarrow \forall G \subset \mathbb{R}^m \quad G$ - откр $\to f^{-1}(G)$ - откр в E

Док-во

G - откр.

$f^{-1}(G)$ - откр ?

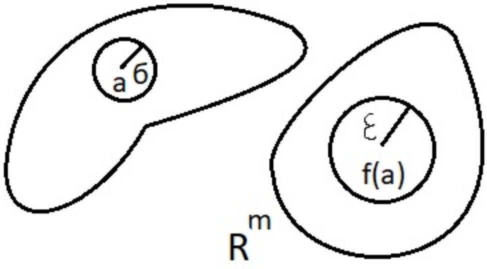
$a \in f^{-1}(G)$

$f(a) \in G$ - откр $\to \exists U(f(a), \mathcal{E}) \subset G$

рисунок

т.к f непр в т. a

$\exists \delta : d(a, x) < \delta \to d(f(a), f(x)) < \mathcal{E}$



$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\mathcal{E}) \subset G$

$\to B(a,\delta) \subset f^{-1}(G)$

$\leftarrow a \in E \to ? f$ - *непр в т. а (рисунок)*

$\forall \mathcal{E} > 0 B(f(a),\mathcal{E})$ - *откр в* $\mathbb{R}^m$

$\to f^{-1}(B(f(a),\mathcal{E})$ - *откр.* $\to \exists \delta : B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\mathcal{E})) \to f$ - *непр. в т а*

Теор (локальные свойства непр. функций)

(дописать)

непрерывна в т. а $\to$ *найдетс*

2. f *непр в а.;* g *непр в а,* $f \circ g$ *непр в а.*

$f : E \to \mathbb{R}^1$ - непр. в x_0

если $f(x^0) > 0 \to$

3 Глобальные св-ва функций

<u>Теор</u> (непрерывный образ компатка)

$$f \in C(E, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f : E \to \mathbb{R}^m \text{ - непр. в } E$$

K *- компакт* $\qquad K \subset \mathbb{R}^n$

$f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда $f(K)$ *- компакт*

рисунок 1

Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *- откр. покр* $f(K)$

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$\to f^{-1}(U_\alpha)$ *- откр, причем*

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) \text{ - откр. покр. комп } \to \exists f^{-1}(U_{\alpha 1}) ... f^{-1}(U_{\alpha_N})$$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(U_{\alpha_k}) \to$$

$$f(K) \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{\alpha_k} \text{ - выделили конечное подпокрытие}$$

$f(K)$ *- компакт*

<u>Теор</u> (Вейерштрасс)

K *- компакт;* $f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда

1. *f - огр.*
2. *Если $m = 1$, то f достигает $\sup$ и $\inf$ на K*

Док-во

$$f : K \to \mathbb{R}^m \text{ - огр} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in K \quad d(f(x), 0) < M$$

1. *$f(k)$ - комп $\to$ огр*
2. $f : K \to \mathbb{R} \to M = \sup\limits_{x \in K} f(x) < +\infty$ *рисунок 2*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x^k \in K :$$
$$M - \frac{1}{k} < f(x^k) \le M \to f(x^k) \underset{k\to\infty}{\to} M$$
$$f(x^k) \in f(K) \text{ - компакт } \to \text{ замнг}$$
$$M \in f(K)$$

Теор (Кантор)

$$f \in C(K, \mathbb{R}^m) \quad K \subset \mathbb{R}^n \text{ - компакт } \to f \text{ - равном. непр на } K$$

Док-во

$$f \text{ - непр } \to \text{ непр. } \forall x \in K \quad \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_x :$$
$$\forall x' \in K \quad d(x', x) < 2\delta_x \to d(f(x'), f(x)) < \frac{\mathcal{E}}{2}$$

рисунок 3

$$\{B_x(\delta_x)\}_{x\in K} \text{ - откр. покрытие } K \text{ - комп.}$$
выделим конечное поддпокр.
$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{x_j}(\delta_{x_j})$$
$$\delta = \min_{1 \le j \le N} \delta_{x_j} \text{ - то, что надо}$$
$$\text{Пусть } d(\widetilde{x}, \widetilde{\widetilde{x}}) < \delta$$
$$\widetilde{x} \in K \to \exists x_l : \widetilde{x} \in B(x_l, \delta_{x_l})$$
$$d(\widetilde{\widetilde{x}}, x_l) \le d(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{x}) + d(\widetilde{x}, x_l) < \delta + \delta_{x_l} < 2\delta_{x_l}$$
$$\to d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \frac{\mathcal{E}}{2} \text{ и } d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) < \frac{\mathcal{E}}{2}$$
$$d(f(\widetilde{x}), f(\widetilde{\widetilde{x}})) \le d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) + d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \mathcal{E}$$

$\mathbb{R}^n$ **как лин. пр-во**

Опр

$$\textit{Норма в } \mathbb{R}^n: \quad ||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

Аксиомы нормы

1. $||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $||k \cdot x|| = |k| \cdot ||x||$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Стандартная норма в $\mathbb{R}^n$

$$||x|| = d(x, 0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$||x + y|| = d(x + y, 0) = d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(0, -y) = ||x|| + ||y||$$

Бывают другие нормы
УПР.1 пусть $|||\cdot|||$ *- другая норма в* $\mathbb{R}^n$
Тогда $\quad \exists c, C > 0:$

$$c \cdot ||x|| \leq |||x||| \leq C \cdot ||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

УПР.2 $\forall$ *норма непр в* $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ **- пр-во со скал. пр-нием**

Опр

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x \cdot y = (x; y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$||x||^2 = (x; x)$$

н-во К-Б

$$(x, y)^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

Линейные операторы в $\mathbb{R}^n$

Опр

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - *лин. операторы*

$L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m):$

$\forall x, t \in \mathbb{R}^n; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}:$

$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$

пишут Lx *вместо* $L(x)$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - *лин. пр-во:*

если $A, B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

то $(A + B)(x) = Ax + Bx$

$A + B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$\forall k \in \mathbb{R}$

$(kA)(x) : k \cdot Ax$

kA - *тоже лин. оператор*

Кроме того $A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

$AB = A \circ B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - *базис (ортонорм) в* $\mathbb{R}^n$; $\quad \{e_j^*\}_{j=1}^m$ - *базис в* $\mathbb{R}^m$

Тогда $\forall$ *лин. оператору соотв.* $Mat(A)$

$$Ae_j = \sum_{k=1}^m a e_k^* \qquad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq Mat_{\mathbb{R}}(m \times n) \simeq \mathbb{R}^{mn}$

$Mat(A \cdot B) = Mat(A) \cdot Mat(B)$ - *матричное произв.*

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

Теор

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Док-во

$$d(x, y) = ||x - y||$$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - *лин. оператор*

$$||Ax - Ay|| = ||\underbrace{A(x - y)}_{A(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)e_j)}|| = ||\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j) \cdot Ae_j|| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \cdot ||Ae_j|| \leq M\sqrt{n}||x - y||$$

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} ||Ae_j|| \qquad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{M\sqrt{n}}$$

$B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ - компакт

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - непр на $B_0(1)$

$\to$ огр.

$||Ax||$ - нерп $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\to$ достигает наиб. знач. на комп. $B_0(1)$

След

$$\sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| = \max_{||x|| \leq 1} ||A_x|| < \infty$$

Опр

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Норма лин. оператора A

$$||A|| = \max_{|x| \leq 1} ||A_x||$$

Теор

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||A_x||}{||x||}$$

т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad ||A_x|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

Док-во

Если $A \equiv 0$ *- очев.* $\quad (||A|| = 0)$

Пусть $A \not\equiv 0 \to$

$\exists x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : ||Ax^*|| \neq 0$

$$0 \neq \frac{||Ax^*||}{||x^*||} = ||A \underbrace{\frac{x^*}{||x^*||}}_{=y^* \in \phi_1 \subset B_0}||$$

$\to ||A|| > 0$

Пусть max достигается внутри ед. шара:

$||A|| = ||A\widetilde{x}||$

где $||\widetilde{x}|| < 1$

Рассм. $\widetilde{y} = \dfrac{\widetilde{x}}{||x||}$

рисунок5?

$$||A\widetilde{y}|| = \frac{||A\widetilde{x}||}{||\widetilde{x}||} > ||A\widetilde{x}||$$

т.е. $||A\widetilde{x}||$ *не max!*

$\to \max ||Ax||$ *в* $||x|| \leq 1$ $\quad$ *достиг. на сфере* $||x|| = 1$

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||A_x||$$

$$||A|| = max_{||x||=1}||Ax|| = \sup_{||x||=1} \frac{||Ax||}{||x||} \leq \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

$$\sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x|| \neq 0} ||A \frac{x}{||x||}|| \leq \max_{||y||=1} ||Ay|| = ||A||$$

Теор

1. *Норма оператора действительно норма*
2. $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

<u>Док-во</u>

1. *проверим аксиомы нормы*

$$(1) \quad ||A|| \geq 0 \text{ - } \textit{очев}$$

$$(2) \quad ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ } \textit{(начало предыдущей теоремы)}$$

$$(3) \quad ||k \cdot A|| = \max_{||x||=1} ||(k \cdot A)x|| = \max_{||x||=1} |k| \cdot ||Ax|| = |k| \cdot ||A||$$

$$(4) \quad ||A + B|| = \max_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leq \max_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leq$$

$$\leq ||A|| + ||B||$$

2. $||(AB)x|| = ||A(Bx)|| \leq ||A|| \cdot ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x||$

$$\sup_{||x|| \neq 0} \frac{||ABx||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||B||$$

$$\sup = ||AB||$$

<u>Теор</u> (оценка нормы лин. оператора)

$$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$||A||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 = ||A||^2_{HS} \text{ - } \textit{норма Гильберта Шмидта}$$

$$y = Ax = A(\sum_{j=1}^{n} \cdot x_j \cdot e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot Ae_j$$

$$\underset{\textit{к-я координата}}{y_k} = \sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k \text{ - } \textit{к-я координата}$$

$$1 \leq k \leq m$$

$$|y_k|^2 = |\sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(Ae_j)^2_k}_{=a_{jk}} =$$

$$= ||x||^2 \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$||y||^2 = ||Ax||^2 = \sum_{k=1}^{m} |y_k|^2 \leq ||x||^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2$$

$$||A|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|}$$

УПР $||A||_{HS} \leq \sqrt{n} \cdot ||A||$

Дифференцирование

Опр

$$E \subset \mathbb{R}^n, \quad E \text{ - откр.} \quad a \in E$$

$$f : E \to \mathbb{R}^m$$

$$f \text{ - дифф-мо в т. } a, \text{ если } \exists L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$f(a+h) = f(a) + Lh + \underset{\alpha(h)}{o(||h||)} \qquad ||h|| \to 0$$

рисунок 6

$$(h : a + h \in E)$$

$$\alpha(h) = o(||h||) = o(h) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\alpha(h)||}{||h||} = 0$$

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(||h||) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

Если такой L $\exists$ *то он ед.*

$$\text{Пусть } h \in \mathbb{R}^n : ||h|| = 1$$

$$a + t \cdot h$$

рисунок 7

$$f(a+th) = f(a) + \underbrace{L(th)}_{=t \cdot Lh} + o(th)$$

$||th|| \to 0$

$\dfrac{f(a+th)f(a)}{t} = Lh + \dfrac{o(th)}{t} \underset{t \to 0}{\to} 0$

$Lh = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t}$

$\forall h : ||h|| = 1 \quad L$ *опеределен однозначно* $\to \forall x \neq 0$

$Lx = ||x|| \cdot L\dfrac{x}{||x||}$

L *- дифференциал.* f *в т.* a

$d_a f = L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$h \in \mathbb{R}^n \qquad d_a f(h) \in \mathbb{R}^m$

Примеры

$$lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

1. $f = const \to d_a f = 0$

2. $f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = f(a+h) - f(a) = f(h) \to Lh = f(h)$

   $d_a f = f$ *(если f линеен)*

3. *если* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *- диф. в т.* a*, то*

   $d_a(f+g) = d_a f + d_a g$

   $$lim_{||h|| \to 0} \frac{||(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - d_a f(h) - d_a g(h)||}{||h||} =$$

   $$\leq \lim \frac{||f(a+h) = f(a) - d_a f(h)|| + ||g(a+h) - g(a) - d_a g(h)||}{||h||} = 0$$

4. $d_a(kf) = k d_a f$

Производная по направлению

Опр

$$\text{Пусть } ||e|| = 1, \quad e \in \mathbb{R}^n \qquad f : E \to \mathbb{R}^m \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

Теор (о производной по напр.)

$$f : E \to \mathbb{R}^m \text{ - дифф. в т. } a$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e)$$

рисунок 7

$$z = f(x, y)$$

$$f : E \to \mathbb{R}^1 \qquad E \subset \mathbb{R}^2$$

Док-во

$$f(a + te) - f(a) = d_a f(te) + o(te) \quad ||te|| \to 0 \qquad ||te|| = |t|$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t} = d_a f(e)$$

Опр

Частные производные $\{e_k\}_{k=1}^n$ *- базис* $\mathbb{R}^n$

$$f : E \to \mathbb{R}^m \qquad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{x_k}(a) = \frac{\partial t}{\partial e_k}(a)$$

Матрица Якоби

<u>Опр</u>

Пусть f *- диф. в т.* $a \in E$

Временно вернмеся к обозначению$L = d_a f$

$Mat(L)$ *- матрица Якоби*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad j \text{ - й столбец - координаты вектора}$$

$$d_a f(e_j) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \qquad 1 \le j \le n$$

$$a_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

$$Mat(d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & & \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & & & \end{pmatrix}$$

2019-09-18

Напоминание

$$f : U \to \mathbb{R}^m, \quad a \in U, \quad f \text{ - диф в т}a \Rightarrow$$

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

$$Mat\ (d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ & ... & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Якобиан - определитель матр. Якоби

Пример

$$f_1(\rho, \phi)$$

$$f(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi; \rho \sin \phi)$$

$$f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$J = d_{(\rho,\phi)} f = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \rho$$

Замеч

Но! из существования частной произв. (в общем случае) не следует диф-сть!

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

Частн. пр-ые в т. $(0, 0)$

$$f'_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x, 0) - f(0, 0)}{\triangle x} = 0$$

$$f'_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0, \triangle y) - f(0, 0)}{\triangle y} = 0$$

Если бы f - диф. в т. $(0, 0)$*, то*

$$f(x, y) = f(0, 0) + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||f(x,y) - f(0,0) - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}||}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

При $(x,y) = (t,t)$

$$\frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

частн. произв. $\exists$ *во всех т., но* f *разрывна в* $(0,0)$

3)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$a = (1, -1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$$

$$Mat(d_a f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$h = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ - *приращение*

$$d_n f(h) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$$

<u>Опр</u>

Пусть $m = 1$

$f : U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad f$ - *диф. в* a

$d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ - *лин. ф*

$$Mat(d_a f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} ... \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

∇ - *"набла"*

Градиент f *в т.* a *(*f *диф в т.* a*)*

$$grad_a f = \nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot h_k$$

Теор (Диф-ние композиции)

$$f : U \to \mathbb{R}^m; \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

$$g : V \to \mathbb{R}^k \qquad\qquad U, V \text{ - откр.}$$

f *- диф. в т.* $a \in U$

g *- диф. в т.* $f(a) = b$

Тогда $h = g \circ f$ *- диф. в т.* a*, причем*

$$d_a h = d_{f(a)} g \circ d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

Док-во

$$A = d_a f; \quad B = d_b g \qquad f(x) = f(a) + A(x-a) + o||x-a|| \quad x \to a$$

$$r_f(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) = o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$r_g(y) = g(y) - g(b) - B(y-b) = o||y-b|| \quad (y \to b)$$

...

$$r_h(x) = h(x) - h(a) - BA(x-a)? =?o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$g(f(a)) = h(a)$$

Хотим показать, что

$$r_h(x) = o(||x-a||) \quad x \to a$$

$$r_h(x) = \underbrace{g(f(x)) - g(b) - B(f(x)-b)}_{=r_g(f(x))} + B(f(x)-b) - BA(x-a) =$$

$$= r_g(f(x)) + B(\underbrace{f(x) - f(a) - A(x-a)}_{=r_f(x)})$$

$$r_h(x) = r_g(f(x)) + B(r_f(x)) \qquad ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

$$||r_h(x)|| \leq ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)||$$

Пусть $\mathcal{E} > 0$

1. *(Из дф-сти g)* $\exists \delta > 0:$

   $\forall y : ||y - b|| < \delta \Rightarrow$

   $r_g(y) < \mathcal{E} \cdot ||y - b||$

2. $\exists \alpha :$

   (a) *(Из диф-сти f в т. a)*

   $||r_f(x)|| < \mathcal{E}||x - a|| \forall x : ||x - a|| < \alpha$

   (b) $\forall x : ||x - a|| < \alpha$

   $||f(x) - f(a)|| < \delta$ *(т.к. f непр в т. a)* $\qquad f(a) = b$

Возьмем $x : ||x-a|| < \alpha \overset{2б}{\Rightarrow} ||f(x)-b|| < \delta \overset{(1)}{\Rightarrow} ||r_g(f(x))|| < \mathcal{E} \cdot ||f(x)-b||$

$||f(x) - b|| = ||r_j(x) + A(x - a)|| \leq ||r_f(x)|| + ||A|| \cdot ||x - a|| \underset{2a}{<}$

$< \mathcal{E} \cdot ||x - a|| + ||A|| \cdot ||x - a||$

$||r_h(x)|| \leq ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)|| < \mathcal{E}(\mathcal{E}||x-a|| + ||A|| \cdot ||x-a||) + ||B|| \cdot \mathcal{E}||x-a|| =$

$= (\mathcal{E}^2 + ||A||\mathcal{E} + ||B||\mathcal{E}) \cdot ||x - a||$

4 Частные производные композиции (в усл. теоремы)

Теор

$$\frac{\partial(g \circ g)_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

$d_a g \circ f = d_{f(a)} g \circ d_a f \qquad$ *комп.* $\leftrightarrow$ *пр-ие матриц*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & & \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial g_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

След (2)

$U \subset \mathbb{R}^n$

$f, g : U \to \mathbb{R}$ - *диф в т. a*

Тогда $d_a(fmulg) = f(a) \cdot d_a g + g(a) d_a f$

Док-во

1. *Пусть* $f = g \quad d_a f^2$

$$\phi(t) = t^2 \qquad d_t\phi(h) = 2t \cdot h$$

$$d_a f^2 = d_a \phi \circ f = d_{f(a)}\phi \circ d_a f$$
$$= 2f(a) \cdot d_a f$$

2. $d_a(f \cdot g) = d_a(\frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]) =$

$$= \frac{1}{4}[2(f(a)+g(a))d_a(f+g) - 2(f(a)-g(a))d_a(f-g)]$$

$$f(a)d_a g + g(a)d_a f$$

След (3)

$$f, g : U \to \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^m$$

f, g *- диф. в т.* $a \in U$

$(f; g)$ *- ск. пр-ие:*

Тогда $d_a(f, g) = (f(a); d_a g) + (d_a f; g(a))$

Опр

Вернемся к градиенту

$f : U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f$ *- диф. в т* $a \in U$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h)$$
$$\nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

Свойства (геометрич. св-ва градиента)

1. f *возрастает в напр.* h *в т.* a*, если* $(\nabla_a f; h) > 0$
   и убывает, если $(\nabla_a f; h) < 0$ *рисунок 1*

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + (\nabla_a f; th) + o(||th||) \qquad o(||t - h||) = o(t)$$

Пусть $t > 0$

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \frac{t \cdot (\nabla_a f, h)}{t} + \frac{o(t)}{t} > 0$$

начиная с нек. числа $(\forall 0 < t < \delta)$

$$\overset{0<t<\delta}{\Rightarrow} f(a+th) > f(a)$$

2. *(Экстремальное св-во градиента)*
   Если $\nabla_a f \neq 0$, *то направление наибольшего возрастания* f *совпадает с направлением градиента*

$$||e|| = 1$$

$$|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = |d_a f(e)| = |(\overrightarrow{\nabla}_a f; \overrightarrow{e})| \leq$$
$$\leq ||\nabla_a f|| \cdot \underbrace{||e||}_{=1} = ||\nabla_a f||$$

   Если $e = \frac{\nabla_a f}{||\nabla_a f||}$ *то* $|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = ||\nabla_a f||$

3. $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad f$ *- диф в т.* $a \in U$ $\qquad U \subset \mathbb{R}^n$
   Если a *- т. локального экстремума* $f \Rightarrow$

$$\overrightarrow{\nabla}_a f = \overrightarrow{0}$$

4. *Пусть* $\Gamma_a = \{x \in U : f(x) - f(a)\}$

   Тогда $\nabla_a f \perp \Gamma_a$

   Т.е. $\forall$ *Гладкой кривой* $\quad \gamma : [-1, 1] \to \Gamma_a$,

   проход. через т. a $\qquad (\gamma(0) = a)$

$$\gamma(t)' = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$ *- касат. вектор к* Γ_a *в т.* a

   Говорят, что $\overrightarrow{v}$ *- ортог.* Γ_a *в т.* a

   Если $\overrightarrow{v} \perp \gamma'(0)$ $\quad \forall$ *гладкой кривой* $\gamma : \gamma(0) = a$

Пример

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla_{(x,y,z)} f = (2x; 2y; 2z) = 2(x, y, z)$$

Опр

$f : U \to \mathbb{R};$ $\quad a \in U$ *- т. лок. макс. (минимума)*

Если $\exists V_a : \forall x \in V_a$

$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a))$

Пример (К свойствам)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$a(1, 1, 1)$$

$$\Gamma_a = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$

$$\nabla_a f = 2(a1, a2, a3) = (2, 2, 2)$$

Док-во

$$\Gamma_a = \{x \in U \quad f(x) = f(a)\}$$

$$\gamma : [-1, 1] \to \Gamma_a \quad \gamma(0) = a$$

$$\underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{обычная ф-я 1 перем}} = f(a) \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$$0 = d_0(\gamma(t)) = d_{\gamma(0)} f \circ d_0 \gamma = d_a f \circ \gamma'(0) =$$

$$= \nabla_a f \cdot \gamma'(0) \Rightarrow \nabla_a f \perp \gamma'(0)$$

4.1 Непрерывно дифференцируемые отображения

Опр

$$f : U \to \mathbb{R}^m \quad U \subset \mathbb{R}^n \quad a \in U$$

f - непр. диф в т. a, если

1. *Все частные производные определены в некоторой окрестности т. a*
2. *Непр. в т. a*

Говорят, что f - непр. диф. на U, если она непр. диф. в каждой точке

$$f \in C^1(U)$$

Лемма (т. о среднем)

$f : U \to \mathbb{R} \quad a \in U \subset \mathbb{R}^n,$ *Все частные пр-е определены в $V_a \subset U$*

$$\sqsupset h : a + h \in V_a$$

Тогда $\exists c^1, c^2, ..., c^k$:

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) \cdot h_k$$

<u>Док-во</u> *Рисунок 2 (куб и система коорд.)*

$$F_k(t) = f(a^{k-1} + t \cdot h_k e_k)$$

$$a^{k-1} \text{ - т. ребра } (a^{k-1}; a^k) \qquad o \le t \le 1$$

$$F'_k(t) = f'_{x_k}(\underbrace{a^{k-1} + t \cdot h_k \cdot e_k}_{=a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_{k-1}+h_{k-1}, a_k+th_k})$$

По т. Лагранжа $\exists \xi^k \in (0,1)$

$$F_k(1) - F_k(0) = F'_k(\xi^k)(1-0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a^{k-1} + \xi^k h_k e_k)$$

$$c^k \in V_a$$

$$f(\underbrace{a+h}_{=a^n}) - f(\underbrace{a}_{=a^0}) = \sum_{l=1}^{n} f(a^k) - f(a^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(1) - F_k(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$$

<u>Теор</u> (О непр. диф. отобр. в точке)

$$f : U \to \mathbb{R}^n \qquad U \in \mathbb{R}^n \quad a \in U$$

f *- непр. диф в т.* a

Тогда

1. f *- непр в* V_a
2. f *- диф в т.* a

<u>Док-во</u> (для m = 1)

f *- непр. диф. в т.* $a \Rightarrow$ *все частные произв. непр в* V_a

рисунок 3 (шарик)

$$\overline{B(x,\delta)} \subset V_a \qquad \forall x \in V_a$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ - огр на } B(a,\delta)$$

$$\Rightarrow \exists\, M > 0 : |\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)| < M \qquad \forall x \in B(a,\delta)$$

$$|f(x+h)-f(x)| \overset{\text{Лемма}}{\Rightarrow} |\sum_{k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k)h_k| \leq$$

$$\leq \sum |\frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k)||h_k| < M \cdot \sum_{k=1}^{n} |h_k| \leq M \cdot n||h_k||$$

$x + h \in B(x, \delta)$

$||h|| \to 0 \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \to 0$

т.е. f *- непр*