1 Интегральные суммы Римана. Интегрируемость по Риману.

Опр

τ-разбиение на $[a;b]$:

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Опр

Мелкость разбиения τ:

$$\lambda(\tau) = \underset{k=0...n-1}{max}\ \Delta_k = x_{k+1} - x_k$$

Опр

Оснащение разбиения τ:

$$\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

Опр

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, тогда сумма Римана:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k$$

Опр

Интегралом Римана функции f по отрезку $[a,b]$ называется $I \in \mathbb{R}$:

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi\ |S(f, \tau, \xi) - I| < \mathcal{E}$$

то есть неформально

$$\lim_{\lambda(\tau) \to 0} S(f, \tau, \xi) = I$$

Опр

Будем говорить, что f интегрируема по Риману на $[a;b]$, если $\exists I$ - интеграл функции f по Риману на $[a,b]$. И записывать это как

$$f \in R[a,b],\ I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f$$

Пример

$$f(x) = C$$

Решение

$$\forall\tau\ \forall\xi\ S(f,\tau,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta_k=C\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k=C(b-a)$$

$$I=C(b-a)=\int\limits_a^b C dx$$

Пример

Функция Дирихле $\mathcal{D}(x)=\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ на отрезке $[0,1]$

Опр

$A\subset\mathbb{R},\ \mathcal{X}_{\mathbb{A}}=\begin{cases}1, & \text{если } x\in A\\ 0, & \text{если } x\notin A\end{cases}$

Решение

Пусть τ - произвольное разбиение.

$$\xi^*=\{\xi_k^*\}:$$

$\xi_k^*\in\mathbb{Q}\cap[x_k,x_{k+1}]$ - рациональное оснащение

$$\widetilde{\xi}=\{\widetilde{\xi}_k\}:$$

$\widetilde{\xi}_k\in[x_k,x_{k+1}]\setminus\mathbb{Q}$ - иррациональное оснащение

$$S(f,\tau,\xi^*)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{D}(\xi_k^*)\Delta_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k=b-a$$

$$S(f,\tau,\widetilde{\xi})=0$$

$\mathcal{D}\notin R[0,1]$. Док-во от противного, пусть это не так, тогда

$$\exists I:\ \forall\mathcal{E}>0\ \exists\delta>0:\forall\tau:\ \lambda(\tau)<\delta,\ \forall\xi\ |S(f,\tau,\xi)-I|<\mathcal{E}$$

Возьмём ξ^* и $\widetilde{\xi}$:

$$1=|S(f,\tau,\xi^*)-S(f,\tau,\widetilde{\xi})|\leqslant|S(f,\tau,\xi^*)-I|+|S(f,\tau,\widetilde{\xi})-I|\leqslant 2\mathcal{E}$$

Пример

$f(x)=\mathcal{X}_0,\ f\in R[-1,1]$

Решение

Покажем, что $I=0$. ξ_i на интервалах δ_i может max два раза попадать в 0. Пусть это будет при k, $k+1$. Тогда:

$$S(f,\tau,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta_i=\sum_{i=0,i\neq k,k+1}^{n-1}f(\xi_i)\Delta_i+f(\xi_k)\Delta_k+f(\xi_{k+1})\Delta_{k+1}=$$

$$=f(\xi_k)\Delta_k+f(\xi_{k+1})\Delta_{k+1}\leqslant\Delta_k+\Delta_{k+1}<2\lambda(\tau)\to 0$$

2 Интегрируемость по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.

Определение интегрируемости см. в первом билете.

Утв

Если $f \in R[a,b]$, то f - ограничена на $[a,b]$.

Док-во (от противного)

Пусть $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = +\infty$.
Для $\mathcal{E} = 1$ $\exists \delta > 0 : \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \xi \ |S(f,\tau,\xi) - I| < \mathcal{E}$.
Зафиксируем $\tau^* : \lambda(\tau^*) < \delta$:

$$\text{Так как } \sup_{[a,b]} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists k : \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = +\infty.$$

"отпустим ξ_k^*". $S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta_i = \sum\limits_{i \neq k}^{n-1} f(\xi_i)\Delta_i + f(\xi_k)\Delta_k$ (неограничена, выберем ξ_k так чтобы) $> \mathcal{E} + I$, Противоречие.

3 Суммы Дарбу, их свойства (связь с суммами Римана, поведение при измельчении).

Опр

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ-разбиение.
$M_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, тогда:

$S^*(f, \tau) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k$ - верхняя сумма Дарбу

$S_*(f, \tau) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k$ - нижняя сумма Дарбу

Опр

τ' называется измельчением τ ($\tau' \prec \tau$), если $\tau \subset \tau'$

Свойства

1. $\forall \xi$, f, τ - зафикс $\Rightarrow S_*(f, \tau) \leqslant S(f, \tau, \xi) \leqslant S^*(f, \tau)$
2. (а) $S^*(f, \tau) = \sup\limits_{\xi} S(f, \tau, \xi)$, (б) $S_*(f, \tau) = \inf\limits_{\xi} S(f, \tau, \xi)$
3. $S^*(f, \tau') \leqslant S^*(f, \tau)$, $S_*(f, \tau') \geqslant S_*(f, \tau)$
4. $\forall \tau_1, \tau_2 :\ S_*(\tau_1) \leqslant S^*(\tau_2)$

Док-во

1. Очевидно из определения
2. Докажем пункт (а). Нужно доказать, что:
$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \xi^*\ S(f, \tau, \xi^*) > S^*(f, \tau) - \mathcal{E}$$
$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} \Rightarrow \exists \xi_k^* : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\mathcal{E}}{b - a}$$
$$S(f, \tau, \xi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi^*) \Delta_k > \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \frac{\mathcal{E}}{b - a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = S^*(f, \tau) - \mathcal{E}$$
3. Пусть $\tau : x_0 < x_1 < ... < x_n$, добавим x':
$$\tau' : x_0 < x_1 < ... < x_k < x' < x_{k+1} < ... < x_n,$$
$$S^*(f, \tau) - S^*(f, \tau') = \underset{[x_k, x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1} - x_k) - \underset{[x_k, x']}{sup} f(x)(x' - x_k) - \underset{[x', x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1} - x') \geqslant$$
$$\geqslant \underset{[x_k, x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1} - x_k - x' + x_k - x_{k+1} + x') = 0, \Rightarrow S^*(f, \tau') \leqslant S^*(f, \tau)$$
4. Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ (произведение разбиений в обозначениях Кононовой), тогда $\tau \prec \tau_1, \tau_2$, значит
$$S_*(f, \tau_1) \leqslant S_*(f, \tau) \leqslant S^*(f, \tau) \leqslant S^*(f, \tau_2)$$

4 Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Критерий Римана (б/д).

Теорема (критерий Дарбу)

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

Док-во

($\Rightarrow$) Необходимость. $f \in R[a,b] \Rightarrow I \in \mathbb{R}$:

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi\ |S(f,\tau,\xi) - I| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$I - \frac{\mathcal{E}}{3} \leqslant S_*(f,\tau) \leqslant S(f,\tau,\xi) \leqslant S^*(f,\tau) \leqslant I + \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$0 \leqslant S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leqslant \frac{2\mathcal{E}}{3} < \mathcal{E}$$

($\Leftarrow$) Достаточность.

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta\ S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

$$I^* := \inf_{\tau} S^*(f,\tau),\ I_* := \sup_{\tau} S_*(f,\tau)$$

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E} \Rightarrow I^* = I_* = I$$

$$\forall \xi\ S_*(f,\tau) \leqslant S(f,\tau,\xi) \leqslant S^*(f,\tau) \Rightarrow |S(f,\tau,\xi) - I| < \mathcal{E}$$

Теорема (критерий Римана)

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \tau : S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

5 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции.

Опр

Колебание $f : E \to \mathbb{R}$ на $E \subset \mathbb{R}$, $\quad \omega(f, E) = \sup\limits_{x \in E} f(x) - \inf\limits_{x \in E} f(x)$,

$$d_k = [x_k, x_{k+1}],\ S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k$$

Теорема (критерий Дарбу, другая форма)

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k < \mathcal{E}$$

(неформально $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k = 0$)

Следствие (1)

$$C[a,b] \subset R[a,b]$$

Док-во

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равн. непр. на $[a,b]$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E$ справедливо $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \mathcal{E}$

$$\Rightarrow \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \omega(f, d_k) < \mathcal{E}, \text{ рассмотрим}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k < \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \mathcal{E}(b-a) = \widetilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \text{ по критерию Дарбу } f \in R[a,b]$$

Следствие (2)

f-ограничена и монотонна на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

Док-во

$$(f \nearrow)\ \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{f(b) - f(a)},\ \text{ пусть } \lambda(\tau) < \delta$$

$$\sum_{k=0}^{k-1} \omega(f, d_k)\Delta_k \leqslant \delta \sum_{k=0}^{k-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \delta(f(b) - f(a)) = \mathcal{E}$$

6 Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.

Опр

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - кусочно-непрерывная функция, если:

$$f \in C([a, b] \setminus \{t_1, ..., t_n\}) \text{ и } t_1, ..., t_n \text{ - точки разрыва I рода}$$

Следствие (3)

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ - кусочно-непрерывная } \Rightarrow f \in R[a, b]$$

Док-во

Пусть $A = \{k \in \mathbb{N} | \exists j : t_j \in d_k\}$, $C = \omega(f, [a, b]) < \infty$
Если $k \notin A \Rightarrow f$ - непр. на $d_k \Rightarrow$ р/н $\Rightarrow \exists \delta_k$ из р/н. Причем $|A| \leqslant 2n$, потому что t_j могут попасть в max два соседниих промежутка.
Возьмём $\delta = \min\limits_{k \notin A} \delta_k$, если $\tau : \lambda(\tau) < \delta$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k = \sum_{k \in A} \omega(f, d_k)\Delta_k + \sum_{k \notin A} \omega(f, d_k)\Delta_k \leqslant 2nC\lambda_k + \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k <$$

$$< 2nC\lambda(\tau) + \mathcal{E}(b - a) < (\text{пусть } \widetilde{\delta} = \min(\delta, \tfrac{\mathcal{E}}{2nC}), \text{ тогда } \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta)$$

$$< \mathcal{E} + \mathcal{E}(b - a) = \mathcal{E}(1 + b - a)$$

7 Интегрируемость суммы, произведения, модуля.

Свойство (1)

$$f, g \in R[a,b] \Rightarrow f+g \in R[a,b]$$

Док-во

$$\omega(f+g,E) = \sup_E(f+g) - \inf_E(f+g) \leqslant \sup_E f + \sup_E g - \inf_E f - \inf_E g$$

$$\leqslant \omega(f,E) + \omega(g,E) \to 0 \underset{\text{кр. Дарбу}}{\Rightarrow} f+g \in R[a,b]$$

Свойство (2)

$$f \in R[a,b] \Rightarrow f^2 \in R[a,b]$$

Док-во

f - ограничено $\Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$

$$\omega(f^2,E) = \sup_E(f^2) - \inf_E(f^2) = \sup_{x_1,x_2\in E}(f^2(x_2) - f^2(x_1)) =$$

$$= \sup_{x_1,x_2\in E}(f(x_2)-f(x_1))(f(x_2)+f(x_1)) \leqslant 2M\omega(f,E) \to 0$$

Свойство (3)

$$f, g \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a,b]$$

Док-во

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow -f \in R[a,b]$

$$\Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in R[a,b]$$

Свойство (4)

$$f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$$

Док-во

$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| \xrightarrow{sup} \omega(|f|,E) \leqslant \omega(f,E) \to 0 \Rightarrow \in R[a,b]$

8 Интегрируемость функции и ее сужений.

Свойство (5)

$$f \in R[a,b],\ [c,d] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[c,d]$$

Док-во

$$f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0:$$

$$\text{для всех } \tau' \text{ на } [c,d] \text{ расширенных до } \tau \text{ на } [a,b]:$$

$$\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau'} \omega(f, d_k)\Delta_k \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau} \omega(f, d_k)\Delta_k \Rightarrow < \mathcal{E}$$

Свойство (6)

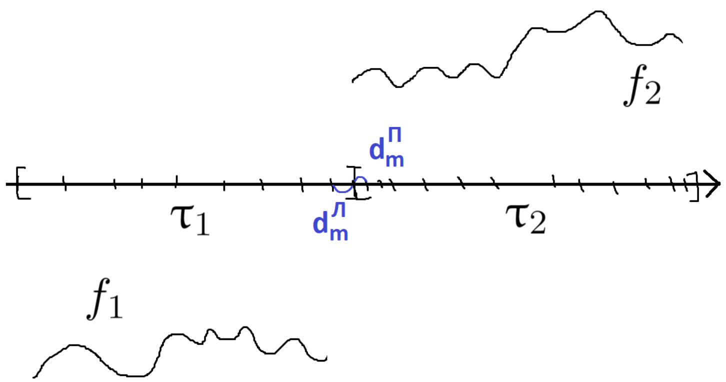
$$a < c < b \Rightarrow R[a,c] \cup R[c,b] \subset R[a,b]$$

Док-во

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta_1 > 0 \text{ на [a,c]}: \lambda(\tau_1) < \delta_1 \Rightarrow S^*(f_1, \tau_1) - S_*(f_1, \tau_1) < \mathcal{E}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ на [c,b]}: \lambda(\tau_2) < \delta_2 \Rightarrow S^*(f_2, \tau_2) - S_*(f_2, \tau_2) < \mathcal{E}$$

$$\text{Пусть } \delta = min(\delta_1, \delta_2),\ \tau = \tau_1 \cup \tau_2,\ \lambda(\tau_1) < \delta,\ \lambda(\tau_2) < \delta$$



Мог произойти разрыв, но $|f| \leqslant M \Rightarrow \omega(f, [a,b]) < W$

$$\sum \omega(f, d_k)\Delta_k = S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leqslant S^*(f,\tau_1) - S_*(f,\tau_1) + S^*(f,\tau_2) - S_*(f,\tau_2) +$$

$$+ d_m^Л \Delta_m^Л + d_m^П \Delta_m^П \leqslant (d_m = d_m^Л \cup d_m^П,\ \widetilde{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\mathcal{E}}{W}))2\mathcal{E} + W\widetilde{\delta} < 3\mathcal{E}$$

9 Свойства интеграла Римана (линейность; аддитивность; свойства, связанные с неравенствами).

Опр

Если $a < b$, то $\int\limits_b^a f = -\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^a = 0$

Свойство (1, линейность)

$$\forall f, g \in R[a,b], \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_b^a (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_b^a f + \beta \int\limits_b^a g$$

Док-во

Знаем, что $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$,

$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$ (очевидно из определения сумм Римана)

Свойство (2, аддитивность)

$$\forall f \in R[a,b],\ a < c < b \Rightarrow \int\limits_b^a f = \int\limits_c^a f + \int\limits_b^c f$$

Док-во

Очевидно (аналогично прошлому)

Свойство (3)

$$\forall f \in R[a,b],\ a < b,\ f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geqslant 0$$

Док-во

Очевидно из определения суммы Римана

Свойство (4)

$$\forall f, g \in R[a,b],\ g(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in [a,b], a < b \Rightarrow \int\limits_b^a g \leqslant \int\limits_b^a f$$

Док-во

Очевидно, если взять одно разбиение и оснащение

Свойство (5)

$$\forall f \in R[a,b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a,b], a < b \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int\limits_b^a f \leqslant M(b-a)$$

Док-во

С использованием предыдущего свойства взять интеграл

Свойство (6)

$$f \in R[a,b],\ m = \inf_{[a,b]} f,\ M = \sup_{[a,b]} f \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int\limits_b^a f = \mu(b-a)$$

Док-во

$$\mu = \frac{\int\limits_b^a f}{b-a} \in [m, M] \text{ (по предыдущему неравенству)}$$

Свойство (7)

$$f \in C[a,b], \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_b^a f = f(\xi)(b-a)$$

Док-во

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя предыдущее свойство

Свойство (8)

$$f \in R[a,b], \Rightarrow |\int\limits_b^a f| \leqslant \int\limits_b^a |f|$$

Док-во

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow -\int\limits_b^a |f| \leqslant \int\limits_b^a f \leqslant \int\limits_b^a |f| \Rightarrow |\int\limits_b^a f| \leqslant \int\limits_b^a |f|$$

10 Первая теорема о среднем. Следствие для непрерывных функций.

Теорема

$$f, g \in R[a,b],\ \ g \geqslant 0,\ \ m \leqslant f \leqslant M$$

$$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int\limits_b^a fg = \mu \int\limits_b^a g$$

Док-во

$mg \leqslant fg \leqslant Mg \Rightarrow m \int\limits_b^a g \leqslant \int\limits_b^a fg \leqslant M \int\limits_b^a g$

$$\frac{m \int_b^a g}{\int_b^a g} \leqslant \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leqslant \frac{M \int_b^a g}{\int_b^a g}$$

$$m \leqslant \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leqslant M$$

а) $\int\limits_b^a g = 0$, тогда μ - любое.

б) $\int\limits_b^a g \neq 0 \Rightarrow \mu := \frac{\int\limits_b^a fg}{\int\limits_b^a g} \in [m, M]$

Следствие

Если $f \in C[a,b],\ g \in R[a,b],\ g \geqslant 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_b^a fg = f(\xi) \int\limits_b^a g$

Док-во

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя неравенство из последнего доказательства для $m = \inf\limits_{[a,b]} f,\ M = \sup\limits_{[a,b]} f$