

Практика по геометрии

(преподаватель Амрани И. М.)
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [ВКонтакте](#)

Содержание

| | | |
|---|---|----|
| 1 | (03.09.2019) Кривые и поверхности | 2 |
| 2 | (10.09.2019) Задачи на кривые | 3 |
| 3 | (17.09.2019) Поверхности | 7 |
| 4 | (24.10.2019) Первая фундаментальная форма | 8 |
| 5 | (01.10.2019) Ещё задача на $I(F)$ | 10 |
| 6 | (01.10.2019) Вторая фундаментальная форма | 11 |

1 (03.09.2019) Кривые и поверхности

Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^2, \text{ т.ч. } |\gamma(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Д-ть, что } \gamma'(t) \perp \gamma''(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Док-во

$$|\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} = 1 \Leftrightarrow \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1$$

$$(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle)' = (1)' \Rightarrow 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$$

Вообще очевидно, но если нет, то:

$$(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle)' = \left(\sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i^2 \right)' = \sum_{i=1}^3 2\dot{\gamma}_i \ddot{\gamma}_i = 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle$$

Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^3, \quad |\gamma'| = 1, \quad \gamma'' \neq 0$$

$$T(t) = \gamma'(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t), \quad N(t) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$$

1. Д-ть, что $\{T(t), N(t), B(t)\}$ - ОНБ
2. Найти координаты $\frac{dT}{dt}, \frac{dN}{dt}, \frac{dB}{dt}$ в базисе $\{T, N, B\}$

Решение

1. Очевидно, $B(t) = \underset{=1}{T} \cdot \underset{=1}{N} \sin \angle(T, N)$

$$T \perp N \text{ (по пред. задаче), } B \perp N, \quad B \perp T \text{ (по опр. вект. произв.)}$$

2. По определению "взятием производной" получаем:

$$\frac{dT}{dt} = 0T + |\ddot{\gamma}|N + 0B$$

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \frac{dN}{dt}, T \rangle + \langle N, \frac{dT}{dt} \rangle = 0$$

$$\text{Аналогично } 0 = \langle \frac{dT}{dt}, B \rangle = - \langle \frac{dB}{dt}, T \rangle$$

$$|\ddot{\gamma}| = \langle \frac{dN}{dt}, T \rangle = - \langle N, \frac{dT}{dt} \rangle$$

$$\frac{dN}{dt} = -|\ddot{\gamma}|T + 0N + \tau(t)B$$

$$\frac{dB}{dt} = 0T - \tau(t)N + 0B$$

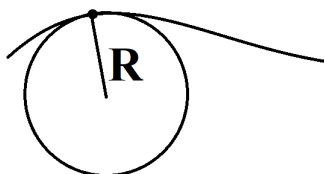
2 (10.09.2019) Задачи на кривые

Мы хотим найти τ через $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$, $\ddot{\ddot{\gamma}}$

Замечание

На плоскости в каждой точке гладкой кривой есть окружность, которая наилучшим образом приближает кривую

$$R = \frac{1}{|\ddot{\gamma}|}, \quad |\ddot{\gamma}| := \kappa - \text{кривизна}$$



Решение (продолжение)

$$\tau = \langle \frac{dN}{dt}, B \rangle$$

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|} \right)' = \frac{\ddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$\Rightarrow \langle \frac{dN}{dt}, B \rangle = \langle \frac{\ddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2}, \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \rangle =$$

$$= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} \langle \ddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \rangle \quad \text{см. на N}$$

$$= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} \langle \ddot{\gamma}|\ddot{\gamma}|, \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \rangle = \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^2} \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \rangle = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\ddot{\gamma}})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4 \cos(t), 5 - 5 \sin(t), -3 \cos(t))$$

1. Найти κ и τ
2. Понять, что из себя представляет линия

Решение

1. Предыдущую задачу мы не можем просто так применить, потому что $|\dot{\gamma}| = 5 \neq 1$, но мы можем перепараметризовать:

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4 \cos(\frac{t}{5}), 5 - 5 \sin(\frac{t}{5}), -3 \cos(\frac{t}{5}))$$

$$\tilde{\gamma} = (-\frac{4}{5} \sin(\frac{t}{5}), -\cos(\frac{t}{5}), \frac{3}{5} \sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow |\tilde{\gamma}| = 1$$

$$\tilde{\ddot{\gamma}} = (-\frac{4}{25} \cos(\frac{t}{5}), \frac{1}{5} \sin(\frac{t}{5}), \frac{3}{25} \cos(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \kappa = |\tilde{\ddot{\gamma}}| = \frac{1}{25}$$

$$\tilde{\ddot{\gamma}} = (\frac{4}{125} \sin(\frac{t}{5}), \frac{1}{25} \cos(\frac{t}{5}), -\frac{3}{125} \sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2} = 25(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0$$

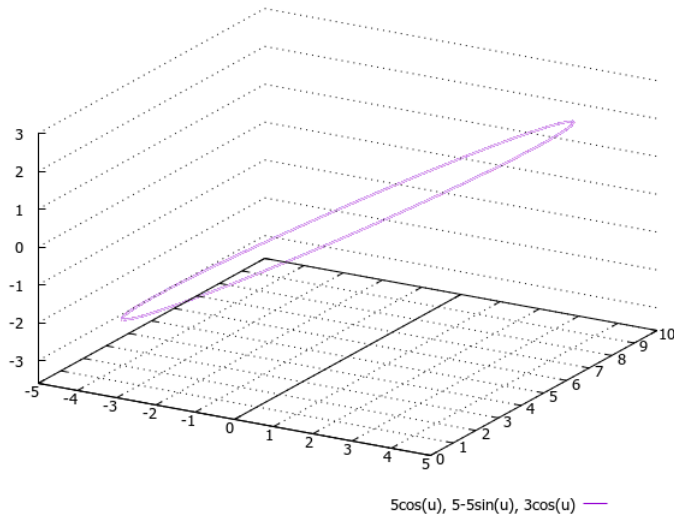
2. Наша линия находится на плоскости:

$$3x + 0y + 4z$$

И лежит на сфере:

$$x^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 25$$

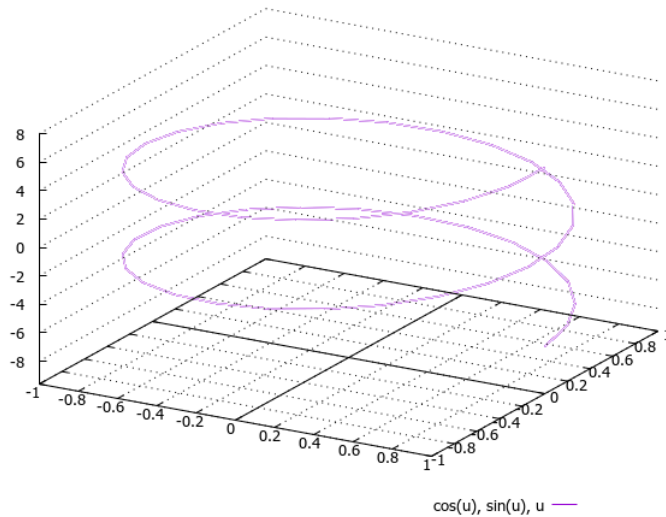
Значит она представляет из себя окружность, потому что есть разные точки



Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$$

1. Построить график



2. Найти κ и τ

Решение

Аналогично $t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{2}}$

$$\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\tilde{\dot{\gamma}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow |\tilde{\dot{\gamma}}| = 1$$

$$\tilde{\ddot{\gamma}} = \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

$$\Rightarrow \kappa = |\tilde{\ddot{\gamma}}| = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\ddot{\gamma}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}$$

3 (17.09.2019) Поверхности

Пример

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r(t), 0, z(t)),$ где $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Найти параметризацию поверхности вращения вокруг OZ

Док-во

Из геометрических соображений: $(r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, z(t)), \varphi \in [0, 2\pi]$

Более строго:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \alpha \\ r(t) \sin \alpha \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Опр

Гладкая двумерная поверхность:

$$F : \overset{\text{откр}}{U}_{t,s} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

т.ч. $\frac{\partial F}{\partial S}, \frac{\partial F}{\partial t}$ - непрерывные функции

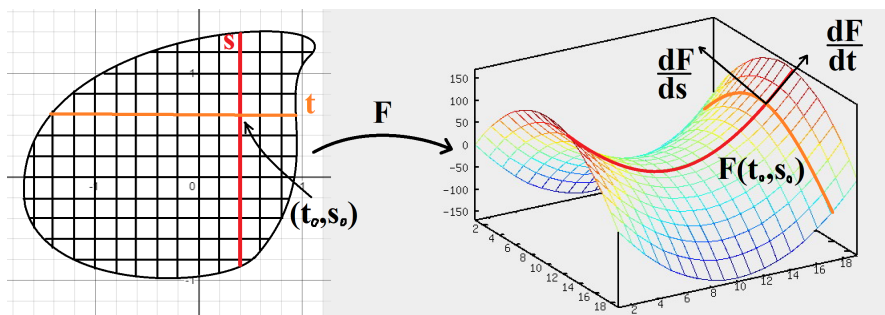
Опр

Гладкая регулярная поверхность:

$$F : \overset{\text{откр}}{U}_{t,s} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

т.ч. $\frac{\partial F}{\partial S}, \frac{\partial F}{\partial t}$ - линейно независимы

"регулярная = скорость не обнуляется"



4 (24.10.2019) Первая фундаментальная форма

Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle \end{pmatrix} = \\ = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle = \\ = \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|^2 \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 - \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|^2 \cos^2 t = \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|^2 \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 = \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 \end{aligned}$$

Замечание

$$A(S) = \sum A(\square)$$

$$A(\square) \approx \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right| \Delta t \Delta s$$

$$I(F) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$A(S) = \iint \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right| dt ds = \iint \sqrt{\det I(F)} dt ds$$

Пример

$$F : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \rightarrow (\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, \sin \theta)$$

1. Доказать, что образ F находится на сфере радиуса 1
2. Найти S сферы через I(F)

Док-во

1. Видно из параметрического уравнения сферы что это сфера, а также понятен радиус и её центр

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos \theta, \end{cases}$$

где $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi)$ (у нас будет сдвиг на угол)

2. Найдем переменные для $I(F)$:

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = \cos^2 \theta$$

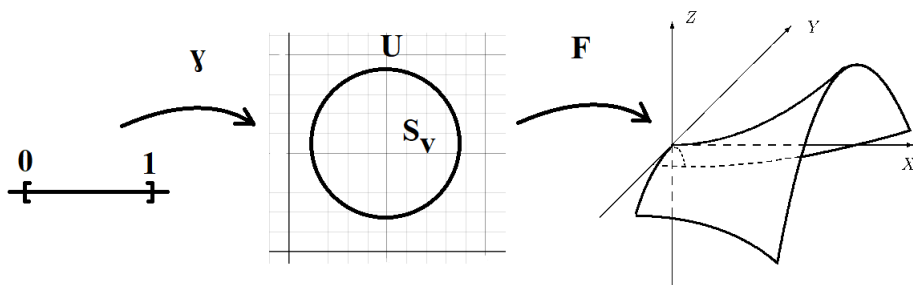
$$\Rightarrow I(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint \sqrt{\det I(F)} d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta d\varphi = \int_0^\pi 4 d\varphi = 4\pi$$

5 (01.10.2019) Ещё задача на $I(F)$

Пример

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, C^1 регулярная



Найти длину $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ через γ и $I(F)$

Решение

$$l(F \circ \gamma) := \int_0^1 |F \circ \gamma(t)'| dt$$

$$\frac{d(F \circ \gamma(t))}{dt} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{\text{вектор}} \overbrace{\dot{\gamma}_1(t)}^{\text{скаляр}} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t) =$$

$$= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t), \frac{\partial F}{\partial x} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle \dot{\gamma}_1^2(t) + 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle \dot{\gamma}_1(t) \dot{\gamma}_2(t) + \left\langle \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle \dot{\gamma}_2^2(t) =$$

$$= (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) I(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow l(F \circ \gamma) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) I(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}} dt$$

6 (01.10.2019) Вторая фундаментальная форма

Опр

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 регулярная

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} \right| \neq 0$$

$$n := \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y}}{\left| \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} \right|} - \text{перп. обоим и по модулю 1}$$

$$L = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, n \right\rangle, \quad M = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, n \right\rangle, \quad N = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, n \right\rangle$$

$$\Pi(F) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Замечание

$\Pi(F)$ говорит, какая ПВП лучше всего приближает в данной точке

Пример

Пусть есть сфера радиуса r :

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos \theta, \end{cases}$$

где $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\phi \in [0, 2\pi)$

Найти $\Pi(F)$, $I(F)$ и $\frac{\det(\Pi)}{\det(I)}$

Решение

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle = r^2, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle &= 0, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = r^2 \cos^2 \theta \\ \Rightarrow I(F) &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пример

Пусть $\gamma : t \rightarrow (t - \operatorname{th}(t), 0, \frac{1}{\operatorname{ch}(t)})$, $t > 0$

1. Найти S поверхности, полученной вращением γ вокруг OZ
2. Найти $\Pi(F)$, $I(F)$ и $K = \frac{\det(\Pi)}{\det(I)}$
3. Площадь S_F

Решение