Напоминание

$$(1) \quad \dot{x} = X(t,x), \qquad X(t,x) \in C(G) \quad \underbrace{G}_{Обл} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(2) \quad (t_0, x_0) \in G$$

Теорема

$$\exists \underbrace{V}_{окр}(t_0, x_0) \subset G : \quad \frac{\partial X}{\partial x} \in C(V(t_0, x_0))$$

$$\Rightarrow (t_0, x_0) \text{ - } \textit{точка ед-ти}$$

Следствие

$$X \in C(G), \quad \frac{\partial X}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow G \text{ - } \textit{обл ед-ти}$$

Док-во

1. $\exists a > 0, b > 0 :$

$$D = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a, \ |x - x_0| \leqslant b\} \subset V(t_0, x_0) \subset G$$

$$\Rightarrow \exists M : |X(t,x)| \leqslant M \quad \forall (t,x) \in D$$

$$\exists L : \left|\frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant L \quad \forall (t,x) \in D$$

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$\Rightarrow \exists Реш(1),(2) \quad x = \varphi(t), \quad x \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

$$\underline{\Delta = h}$$

$$\rceil x = \psi(t) \text{ - } реш(1)2(0$$

Докажем: оно определено на $[t_0 - h, t_0 + h]$ *т.е*

$$|\psi(t) - x_0| \leqslant b \quad \forall t : |t - t_0| \leqslant h$$

$$\textit{от прот.} \ \rceil \exists t^* : \begin{cases} |t^* - t_0| \leqslant h \\ |\psi(t^*) - x_0| > b \end{cases}$$

$$t^* \neq t_0 \quad (\psi(t_0) = x_0) \quad \textit{НУО } t^* > t_0$$

$$v(t) = |\psi(t) - x_0| - b \text{ - } \textit{непр}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t_0) = -b < 0 \\ v(t^*) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \exists t_1 : t_0 < t_1 < t^* : \quad v(t_1) = 0$$

$O = \{t \in [t_0, t^*] : v(t) = 0\} \quad O \neq \varnothing \quad O$ *- замк. огр*

$\Rightarrow \exists \min O = t_2 \quad$ (*мб* $t_1 = t_2$)

$\forall t \in [t_0, t_2) \quad v(t) < 0 \quad v(t_2) = 0 \quad t_0 < t_2 < t^*$

$\Rightarrow$ *на* $[t_0, t_2] \quad |\psi(t) - x_0| \leqslant b$

$\dot{\psi}(t) = X(t, \psi(t)), \quad \psi(t_0) = x_0$

инт на $[t_0, t_2]$

$$|\psi(t_2) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t_2} X(t, \psi(t))dt\right| \leqslant \int_{t_0}^{t_2} \left|\underbrace{X(t, \psi(t))}_{\leqslant M}\right| dt$$

$\leqslant M \cdot (t_2 - t_0) < M(t^* - t_0) \leqslant Mh \leqslant b$

Получим $|\psi(t_2) - x_0| < b$ *- противореч:* $t_2 \in O$

2. $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *рисунок 1*

$$f(s) = X(t, s\varphi(t) + (1 - S)\varphi(t)), \quad s \in [0, 1]$$

$$|s\varphi(t) + (1 - s)\psi(t) - x_0| \leqslant |s\varphi(t) - sx_0| + |(1 - s)\psi(t) - (1 - s)x_0| =$$

$$= s\left|\underbrace{\varphi(t) - x_0}_{\leqslant b}\right| + (1 - s)\left|\underbrace{\psi(t) - x_0}_{\leqslant b}\right| \leqslant b(s + (1 - s)) = b \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(s)$ *опред. при* $|t - t_0| \leqslant h$

$|X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))| = |f(1) - f(0)| = \qquad \exists \theta \in (0, 1)$

$$= |f'(\theta)| = \left|\left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{x = s\varphi(t) + (1 - s)\psi(t)} \cdot \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{s = \theta}\right| =$$

$$= \left|\underbrace{\left.\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{\ldots}}_{\leqslant L}\right| \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|$$

Итог: $|X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))| \leqslant L\,|\varphi(t) - \psi(t)| \quad (5)$

3. $\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$$\dot{\psi}(t, \psi(t))$$

$$\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi(t)} = X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))$$

Инт. $[t_0, t]$

$$\varphi(t) - x_0 - (\psi(t) - x_0) = \int_{t_0}^{t} (X(\tau, \varphi(\tau)) - X(\tau, \psi(\tau)))d\tau$$

$$\Rightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |X(t, \varphi(\tau) - X(\tau, \psi(\tau))| \, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi(t\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau \right| \overset{\text{Л.Г.}}{\Rightarrow} \varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t : |t - t_0| \leqslant h$$

$$(u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)| : u(t) \leqslant L \quad \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|)$$

1 Уравнения в симметричной форме

Опр

$$(1) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \text{ - ур. 1 порядка в симм. форме}$$

$$M, N \in C(G) \qquad \underbrace{G}_{обл} \subset \mathbb{R}^2$$

Опр

ф-я $y = \varphi(x) \quad x \in <a, b>$

(*или ф-я* $x = \psi(y) \quad y \in <c, d>$)

наз. реш. (1), *если подст в* (1) *получ. тождество*

Если $y = \varphi(x)$ *- реш* (1) $\quad x \in <a, b>$

$$M(x, \varphi(x))dx + N(x, \varphi(x))\varphi'(x)dx = 0$$

$y = \varphi(x) \quad x \in <a, b>$ *- реш.*(1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2) \quad M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ *на* $<a, b>$

$\Rightarrow y = \varphi(x)$ *удовл. ур-нию* *если* $N(x, \varphi(x)) \neq 0$ *на* $<a, b>$

$$(3) \qquad y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

аналог: $x = \psi(y) \quad y \in <c, d>$ *- реш* $(1) \Leftrightarrow$

$M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) \equiv 0$ *на* $<c, d> \qquad (2')$

и $x = \psi(y)$ *уд. ур-нию* $\qquad$ (*если* $M(\psi(y), y) \neq 0$ *на* $<c, d>$)

$$(3') \qquad x' = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$$

$(x_0, y_0) \in G$

если $N(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists <a, b>: x_0 \in (a, b) \quad \exists$*реш* $y = \varphi(x) \quad (3)$ *(и реш (1))*

если $M(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists <c, d>: y_0 \in (c, d) \quad \exists$*реш* $x = \psi(y) \quad (3')$ *(и реш (1))*

если $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ *- особая точка*

Замечание

Если $\varphi(x)$ *- реш,* $\varphi(x)^-1 =$

Опр

$u(x, y) \in C^1 \quad (u : G \in \mathbb{R})$ *интеграл (1), если*

1) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \quad \forall$ *обык. точки из* $G \quad (x, y)$

2) $(4) \rightarrow N(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - M(x, y)\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \equiv 0$ *в* G

$(N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0)$

Теорема (1)

$y = \varphi(x)$ *- реш.(1)* $\quad x \in <a, b>$

$(x, \varphi(x))$ *- обыкн. точка для* $\forall x \in <a, b>$

$u(x, y)$ *- интеграл (1) в* G

$\Rightarrow u(x, \varphi(x)) = const \quad x \in <a, b>$

Док-во

$y = \varphi(x)$ *- реш (1)* $\quad x \in <a, b> \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{M(x, \varphi(x))}{M(x, \varphi(x))} \qquad N(x, \varphi(x)) \neq 0$

(*если* $N(...) = 0$*, то* $\overset{(2)}{\Rightarrow} M(...) = 0$ *- против. усл*)

$\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x)) = \frac{\partial u(...)}{\partial x} + \frac{\partial u(...)}{\partial y} \cdot \varphi'(x) =$

$= \frac{\partial u(...)}{\partial x} + \frac{\partial u(...)}{\partial y}(-\frac{M(...)}{N(...)}) = \frac{1}{N(...)}(N(...)\frac{\partial u(...)}{\partial x} - M(...)\frac{\partial u(...)}{\partial y})$

Теорема **(1')**

$$x = \psi(y) \text{ - } \textit{реш } (1) \quad y \in < c, d > ...$$