Практика по геометрии (преподаватель Амрани И. М.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Дифференциальная геометрия

1.1 (03.09.2019) Кривые и поверхности

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^2, \text{ т.ч.} \quad |\gamma(t)| = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Д-ть, что $\gamma'(t) \perp \gamma''(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$

Док-во

$$|\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{<\dot{\gamma}, \dot{\gamma}>} = 1 \Leftrightarrow <\dot{\gamma}, \dot{\gamma}> = 1$$

$$(<\dot{\gamma}, \dot{\gamma}>)' = (1)' \Rightarrow 2 <\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}> = 0$$

Вообще очевидно, но если нет, то:

$$(<\dot{\gamma}, \dot{\gamma}>)' = (\sum_{i=1}^{3} \dot{\gamma_i}^2)' = \sum_{i=1}^{3} 2\dot{\gamma_i}\ddot{\gamma_i} = 2 <\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}>$$

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^3, \quad |\gamma'| = 1, \quad \gamma'' \neq 0$$

$$T(t) = \gamma'(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t), \quad N(t) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$$

1. Д-ть, что $\{T(t), N(t), B(t)\}$ - ОНБ
2. Найти координаты $\frac{dT}{dt}, \frac{dN}{dt}, \frac{dB}{dt}$ в базисе $\{T, N, B\}$

Решение

1. Очевидно, $B(t) = \underset{=1}{T} \cdot \underset{=1}{N} \sin\angle(T, N)$

   $T \perp N$ (по пред. задаче), $\quad B \perp N, \quad B \perp T$ (по опр. вект. произв.)

2. По определению "взятием производной" получаем:

   $$\frac{dT}{dt} = 0T + |\ddot{\gamma}|N + 0B$$

   $$< N, T > = 0 \Rightarrow < \frac{dN}{dt}, T > + < N, \frac{dT}{dt} > = 0$$

Аналогично $0 =< \dfrac{dT}{dt}, B >= - < \dfrac{dB}{dt}, T >$

$|\ddot\gamma| =< \dfrac{dN}{dt}, T >= - < N, \dfrac{dT}{dt} >$

$\dfrac{dN}{dt} = -|\ddot\gamma|T + 0N + \tau(t)B$

$\dfrac{dB}{dt} = 0T - \tau(t)N + 0B$

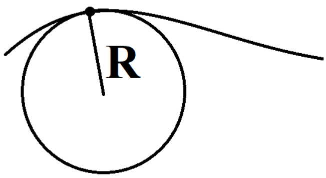
1.2 (10.09.2019) Задачи на кривые

Мы хотим найти τ через $\dot\gamma,\ \ddot\gamma,\ \dddot\gamma$

Замечание

На плоскоти в каждой точке гладкой кривой есть окружность, которая наилучшим образом приближает кривую

$$R = \frac{1}{|\ddot\gamma|}, \quad |\ddot\gamma| := æ \text{ - кривизна}$$



Решение (продолжение)

$$\tau =< \frac{dN}{dt},\ B >$$

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|}\right)' = \frac{\dddot\gamma|\ddot\gamma| - |\ddot\gamma|'\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|^2}$$

$$\Rightarrow < \frac{dN}{dt},\ B >=< \frac{\dddot\gamma|\ddot\gamma| - |\ddot\gamma|'\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|^2},\ \frac{\dot\gamma\times\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|} >=$$

$$= \frac{1}{|\ddot\gamma|^3} < \dddot\gamma|\ddot\gamma| - |\ddot\gamma|'\ddot\gamma,\ \dot\gamma\times\ddot\gamma > \underset{\text{см. на N}}{=}$$

$$= \frac{1}{|\ddot\gamma|^3} < \dddot\gamma|\ddot\gamma|,\ \dot\gamma\times\ddot\gamma >= \frac{1}{|\ddot\gamma|^2} < \dddot\gamma,\ \dot\gamma\times\ddot\gamma >= \frac{(\dot\gamma,\ \ddot\gamma,\ \dddot\gamma)}{|\ddot\gamma|^2}$$

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(t),\ 5 - 5\sin(t),\ -3\cos(t))$$

1. Найти æ и τ

2. Понять, что из себя представляет линия

Решение

1. Предыдущую задачу мы не можем просто так применить, потому что $|\dot{\gamma}| = 5 \neq 1$, но мы можем перепараметризовать:

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(\frac{t}{5}),\ 5 - 5\sin(\frac{t}{5}),\ -3\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ -\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{5}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{25}\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{25}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{4}{125}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ -\frac{3}{125}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2} = 25(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}) = 0$$

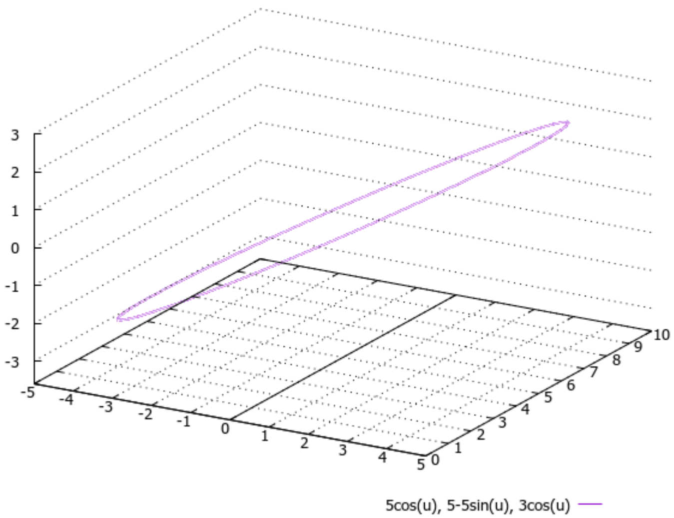
2. Наша линия находится на плоскости:

$$3x + 0y + 4z$$

И лежит на сфере:

$$x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 25$$

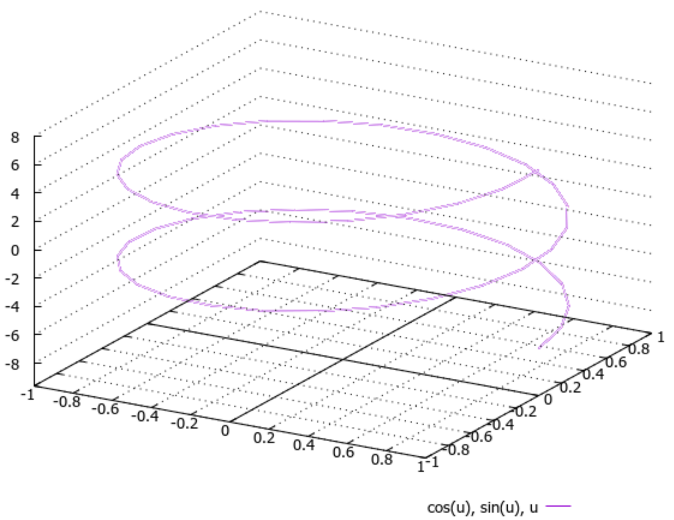
Значит она представляет из себя окружность, потому что есть разные точки



Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t),\ \sin(t),\ t)$$

1. Построить график



2. Найти æ и τ

Решение

Аналогично $t \to \dfrac{t}{\sqrt{2}}$

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{2}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}) = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}$$

1.3 (17.09.2019) Задачи на поверхности

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r(t),\ 0,\ z(t)),\ \text{где } r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Найти параметрищацию поверхности вращения вокруг OZ

Док-во

Из геометрических соображений: $(r(t)\cos\varphi,\ r(t)\sin\varphi,\ z(t)),\ \varphi \in [0,\ 2\pi]$
Более строго:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\alpha \\ r(t)\sin\alpha \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Опр

Гладкая двухмерная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

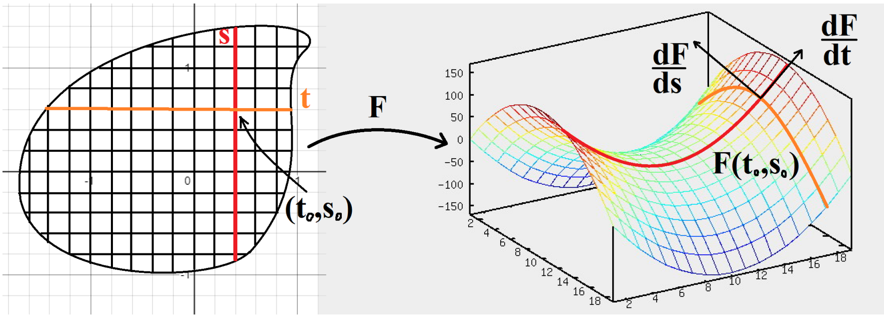
т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial S}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - непрерывные функции

Опр

Гладкая регулярная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial S}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - линейно независимы
"регулярная = скорость не обнуляется"



1.4 (01.10.2019) Первая и вторая фундаментальные формы

F