1 Формула Ньютона-Лейбница. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.

Опр

$$E \subset \mathbb{R}, \quad F: E \to \mathbb{R} \quad f: E \to \mathbb{R}$$

Тогда F называется первообразной f, если $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in E$

Утв

F_1, F_2 - первообразные f на E, тогда:

$$F(x_1) - F(x_2) = \text{const} \ \text{(т. Лагранжа)}$$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$$f \in R[a,b], \ \text{F -первообразная f, тогда:}$$

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

Док-во

$\forall \tau$ на $[a,b]$ по теореме Лагранжа:

$$\exists \xi_k \in [x_k, x_{x+1}]: \ F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta_k$$

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \xi \ |S(f, \tau, \xi) - I| < \mathcal{E}$
Возьмём оснащение ξ из теоремы Лагранжа:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

Опр

$E \subset \mathbb{R}, \quad$ E - невырожденный промежуток,

$$f: E \to \mathbb{R} \quad \forall \alpha, \beta \in E: \quad \alpha < \beta \quad f \in R[\alpha, \beta] \quad \text{для } a \in E \text{ (фиксированного)}$$

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt \text{ - интеграл с переменным верхним пределом}$$

$$F: E \to \mathbb{R}$$

Теорема

$f \in R[a,b], \ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, тогда:

1. $F \in C[a,b]$

2. (теорема Барроу) Если f - непр. в т. $x_0 \in [a,b]$, то $F'(x_0) = f(x_0)$

Док-во

$x \in [a,b],\ h : x+h \in [a,b]$

1) $F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f - \int\limits_a^{x} f = \int\limits_a^{x+h} f + \int\limits_x^{a} f = \int\limits_x^{x+h} f$

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |f| < M$, значит:

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \left| \int_x^{x+h} f \right| \leqslant \int_x^{x+h} |f| \leqslant M\,|h|$$

Кроме того, $\forall \mathcal{E} > 0,\ \delta = \frac{\mathcal{E}}{M}$ если $|h| < \delta \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| < \mathcal{E}$

2) Рассмотрим $\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = |\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} dt| =$

$= \frac{1}{|h|} | \int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt| \leqslant \frac{1}{|h|} | \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \mathcal{E} dt| = \mathcal{E}$

(при $|h| < \delta\ \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \mathcal{E}$)

Следствие

$$F \in C[a,b] \Rightarrow \exists F : F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$$

Пример

$$f(x) = |x|,\ F(x) = \int\limits_0^x |t|dt = \begin{cases} \left.\dfrac{t^2}{2}\right|_0^x, & x \geqslant 0 \\ \\ \left.-\dfrac{t^2}{2}\right|_0^x, & x < 0 \end{cases}$$

Пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$F(x) = |x|\ \forall x \neq 0$, видно что неверно для первообразной, но:

Опр

F - "почти первообразная", если:

1. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \setminus \{t_1, ... t_n\}$

2. $F \in C[a,b]$

Пример

Пример для "почти первообразной". Найти $\int\limits_0^2 f(x)$, для $f(x) = \max(1, x)$

$$F(t) \overset{?}{=} \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ \frac{t^2}{2}, & t \in [1,2] \end{cases}$$

Попробуем использовать Н-Л: $F(t)\big|_0^2 = F(2) - F(0) = 2$
Неверно, потому что это не первообразная и даже не "почти первообразная".
Поправим F(x):

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

Это уже "почти первообразная" можно применять Н-Л.

2 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Применение: формула Валлиса.

Теорема

$$F, G \text{ - первообразные } f, g \in R[a,b] \text{ на } [a,b] \text{, тогда } \int\limits_a^b Fg = FG|_a^b - \int\limits_a^b fG$$

$$(\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v)$$

Док-во

$$(FG)' = fG + Fg, \text{ по ф-ле Н-Л: } \int\limits_a^b (FG)' = FG|_a^b = \int\limits_a^b fG + |_a^b Fg$$

Пример

Если $I_m := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$, то:

$$I_m = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ - четное} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ - нечетное} \end{cases}$$

Док-во

$$I_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{m-1} x dx =$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (m-1) \sin^{m-2} x dx =$$

$$= (m-1) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{m-2} x - \sin^m x) dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m)$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2},\ I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1,\ I_2 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2},\ I_{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

Теорема **(Формула Валлиса)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2*2*4*4*...*(2n)(2n)}{1*3*3*5*5...(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

(или $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 = \pi$)

Док-во

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ верно $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$A_n = \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} = B_n$$

$$B_n - A_n = \tfrac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} - \tfrac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} =$$
$$= (\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}) = (\frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n-1)!!})\frac{1}{(2n+1)(2n)} =$$
$$= A_n\frac{1}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{2n} \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{\pi}{2}$$

3 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема

$$f \in C^{n+1}([a,b]) \Rightarrow f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n(b,a),$$

$$\text{где } R_n(b,a) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

Замечание

$$f \in C^{n+1}([a,b]) \Rightarrow f^{(n+1)} \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]:$$

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int\limits_a^b (b-t)^n dt = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Док-во (по индукции)

1) $n = 0$

$f(b) = f(a) + \int\limits_a^b f'(t)dt$ - формула Н-Л

2) Инд. переход. Пусть для $n-1$ - доказано, $f \in C^{n-1}[a,b] \subset C^n[a,b]$, по инд. предположению:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_{n-1} (*)$$

$$R_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt = \begin{bmatrix} u = f^{(n)}(t) \\ dv = (b-t)^{n-1}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(-f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n}\Big|_a^b + \int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n}dt) =$$

$$= \frac{1}{(n)!}(f^{(n)}(a)(b-a)^n + \int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt) \text{ - подставить в } (*)$$

4 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Вторая теорема о среднем.

Формулу интегрирования по частям см. в 12 билете.

Теорема (Бонне или вторая теорема о среднем)

$$f \in C[a,b],\ g \in C^1[a,b], g - \text{монотонна}$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b fg = g(a)\int\limits_a^{\xi} f + g(b)\int\limits_{\xi}^b f$$

Док-во

(для $g \nearrow$) $F(x) := \int\limits_a^x f \Rightarrow F' = f$

$$\int\limits_a^b fg = \int\limits_a^b F'g = Fg|_a^b - \int\limits_a^b Fg' = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int\limits_a^b Fg' =$$

(т.к. $g \nearrow g \geqslant 0 \Rightarrow$ по т. о среднем $\exists \xi \in [a,b]$:)

$$= F(b)g(b) - g(a)F(a) - F(\xi)\int\limits_a^b g' = g(b)(F(b) - F(\xi)) + g(a)(F(\xi) - F(a))$$

5 Замена переменной в определенном интеграле (две формулировки, доказательство одной).

Теорема

$$\varphi \subset C^1[\alpha, \beta],\ f \in C(\varphi([\alpha, \beta])),\ \text{тогда} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

Док-во

$f \in C(\varphi([\alpha, \beta])) \Rightarrow \exists F : F' = f$

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi' \Rightarrow \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha)$$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

Теорема

$$f \in R[a, b],\ \varphi \in C^1[\alpha, \beta],\ \varphi \text{ - строго возрастает,}$$
$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,\ \text{тогда} \int\limits_{a}^{b} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

Пример

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx, \quad \varphi(t) = \cos t, \quad \varphi(\alpha) = 0$$

, $\varphi(\beta) = 1$

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 t}\sin t dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2}dt = (-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{4}$$

Напоминание (про ряды)

Опр

Числовой ряд из элементов $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ - это $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$

Опр

Частичная сумма ряда $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$

Опр

Говорят, что сумма ряда $S = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Замечание

$$\text{Ряд } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ сходится или расходится одновременно с рядом } \sum_{j=N}^{\infty} a_j$$

Теорема (необходимое условие сходимости)

$$\text{Если } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ - сходится, то } \lim_{j\to\infty} a_j = 0$$

Опр

Ряд Лейбница $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$, $a_j > 0$, где $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$, $a_j \searrow$

Теорема

Пусть $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ - ряд Лейбница, тогда:

1. Ряд Лейбница сходится
2. $S_{2n} \searrow$, $S_{2n-1} \nearrow$
3. $|S - S_n| < a_{n+1}$

Теорема

Критерий Коши для числовых последовательностей.

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - сх $\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists N : \forall m > n > N\ |S_m - S_n| < \mathcal{E}$

6 Признаки сравнения для положительных рядов.

Опр

Если $a_j \geqslant 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - положительный ряд

Теорема

Положительный ряд сходится $\Leftrightarrow S_n$ - ограничены

Следствие

Пусть $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, тогда:

1. $\sum b_j$ - сх $\Rightarrow \sum a_j$ - сх (первый признак сходимости)
2. $\sum a_j$ - расх $\Rightarrow \sum b_j$ - расх (первый признак сравнения)

Следствие

$$a_k \geqslant 0,\ b_k \geqslant 0,\ \exists c, d > 0\ \exists N : \forall n > N\ 0 < c \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant d \leqslant \infty$$

Тогда $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сх. или расх. одновременно

Док-во

(т.е. $\sum a_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum b_k$ - сх)
($\Leftarrow$) $0 \leqslant a_n \leqslant db_n$ т.к. db_n - сх $\Rightarrow a_n$ - сх
($\Rightarrow$) $0 \leqslant cb_n \leqslant a_n$ т.к. a_n - сх $\Rightarrow cb_n$ - сх $\Rightarrow b_n$ - сх

Следствие (второй признак сравнения)

Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$, тогда если
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, то $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сх или расх одновременно

Док-во

Возьмём $\mathcal{E} := \frac{L}{2} \Rightarrow \exists N : \forall n > N\ \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2} \Rightarrow$
$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} < +\infty \Rightarrow$ по предыдущему следствию верно

7 Признаки Даламбера и Коши для положительных рядов.

Теорема (радикальный признак Коши для положительных рядов)

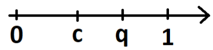
$a_k \geqslant 0$, $c := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k}$

Если $c < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $c > 1$, то $\sum a_k$ - расх

Док-во

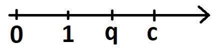
а) $0 \leqslant c < 1$



$q := \frac{c+1}{2}$, $c < q < 1$, по характеристике $\overline{\lim}$: $\exists N : \forall n > N \ \sqrt[n]{a_n} < q$

т.к. $0 \leqslant a_n < q^n$ и $\sum q^n$ - сх $\Rightarrow \sum a_n$ - сх

б) $c > 1$



$q := \frac{c+1}{2}$, $1 < q < c$, по характеристике $\overline{\lim}$: $\forall N : \exists n > N \ \sqrt[n]{a_n} > q$

т.е. $\exists$ бесконечное мн-во $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q$, $a_{n_k} > q^{n_k} > 1$

$\Rightarrow \lim a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расх

Теорема (признак Даламбера сходимости положительных рядов)

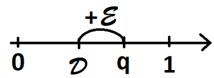
$a_k \geqslant 0$, $\mathcal{D} := \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

Если $\mathcal{D} < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $\mathcal{D} > 1$, то $\sum a_k$ - расх

Док-во

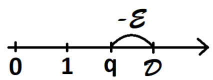
а) $\mathcal{D} < 1$, $q := \frac{\mathcal{D}+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{1-\mathcal{D}}{2}$



$\exists N : \forall k > N \ \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E} = q$ - геом пр. $q < 1$

$a_{k+1} < qa_k < q^2 a_{k-1} < ... < q^{k-N+1} a_N$, $\sum q^{k-N+1} a_k$ - сх $\Rightarrow \sum a_{k+1}$ - сх по первому пр. сходимости

б) $\mathcal{D} < 1$, $q := \frac{\mathcal{D}+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{\mathcal{D}-1}{2}$



$\exists N : \forall k > N \; q = \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E}, \; q > 1$

$a_{k+1} > qa_k > q^2 a_{k-1} > ... > q^{k-N+1} a_N$, $\sum q^{k-N+1} a_N$ - расх $\Rightarrow \sum a_{k+1}$ - расх по первому пр. сравнения

8 Абсолютная и условная сходимость рядов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

Опр

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - сх абсолютно, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх

Опр

Ряд сходится условно если сходится, но не абсолютно

Теорема

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится

Док-во

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх, по критерию Коши $\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists N : \forall m > n > N :$

$$||a_{n+1}| + ... + |a_m|| < \mathcal{E}, \text{ по неравенству треугольника:}$$

$$|a_{n+1} + ... + a_m| < \mathcal{E} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ - сх.}$$

9 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Определения см. в предыдущем билете.
Ряд не сходится абсолютно, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расх. ряд, т.к.:

Теорема (критерий Коши сходимости последовательности)

x_n - сх $\Leftrightarrow$ x_n - сх в себе.

Покажем, что для $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ $\exists \mathcal{E} > 0 : \forall N\ \exists m, n \geqslant N : |x_m - x_n| > \mathcal{E}$:

$$\text{Возьмём } \mathcal{E} = \frac{1}{4} \text{ n } = N,\ m = 2N :$$

$$|S_{2N} - S_N| = \left|\frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{2N}\right| > N\frac{1}{2N} = \frac{1}{2} > \mathcal{E}$$

Но ряд сходится (значит условно сходится) по признаку Лейбница (или это можно показать прямо, доказав что $S_{2n} \nearrow$ и ограничена сверху единицей, а $S_{2n+1} = S_{2n}$ в пределе)

10 Перестановка абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана (б/д).

Опр

Пусть есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и биективная функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ называется перестановкой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Теорема **(Римана v1)**

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится, тогда:

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum a_{\varphi(k)} = S$$

Опр

$a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$, $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$

Теорема **(Дирихле, о перестановке абсолютно сходящегося ряда)**

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сх абсолютно, то

$\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где φ - биекция $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$

Док-во

а) Пусть $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх $\Leftrightarrow$ все частичные суммы ограничены, $S_n \leqslant S\ \forall n \in \mathbb{N}$

Частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$ обозначим перестановками ряда $T_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$

Пусть $m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n)\}$

$T_n \leqslant S_m := \sum\limits_{n=1}^{m} a_{\varphi(a_n)} \leqslant S \Rightarrow T_n \nearrow$ - огр $\Leftrightarrow$ ряд $T := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$ сходится.

Предельный переход даёт $T \leqslant S$, но так как S - тоже перестаовка $T \Rightarrow S \leqslant T$

Значит $S = T$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$

б) Общий случай, $a_k \in \mathbb{R}$

$a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^- \Rightarrow a_k^+ = \frac{a_k + |a_k|}{2}$, $a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}$

т.к. $\sum a_k$ - сх абсолютно $\Rightarrow \sum |a_k|$ - сх

$\Rightarrow \sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ - сх (причем абсолютно)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}(a^+_{\varphi(k)} - a^-_{\varphi(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} a^+_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a^-_{\varphi(k)} = \text{ (п. а) } \sum_{k=0}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Теорема **(Римана v2)**

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится. Тогда $\sum a_n^+ - \sum a_n^- = +\infty$

Док-во

Можно доказать одну из теорем