Содержание

1 Введение **2**
1.1 Литература 2
1.2 Введение 2
1.3 Применение 2

2 Дифферинциальные уравнения первого порядка **3**
2.1 Введение 3
2.2 Метод изоклин 3
2.3 Теорема Пеано 4

1 Введение

1.1 Литература

Учебник Бибиков "Обыкновенные дифферинциальные уравнения"
Филиппов - задачи
"Методы интегрирования"
Каддинктон Ливенгсон "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
Яругии

1.2 Введение

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
x - неизвестная переменная
$y = y(x)$ - неизвестная функция лалалалалалала

Опр

Порядок уравнения - порядок старшей производной

Кроме того, $x = \frac{dx}{dt}$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$

1.3 Применение

1) механика
2) электротехника
3) физика: $\dot{Q} = kQ$, $Q = Q_0 e^{kt}$
4) упр. движением
5) биология, экология

Пример из биологии:
x - хищник
y - жертва

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + cxy \\ \dot{y} = by - dxy \end{cases}$$

$$a, b, c, d > 0,\ x, y > 0$$

2 Дифферинциальные уравнения первого порядка

2.1 Введение

(1) $\dot{x} = X(t, x)$
$X(t,x) \in C(G)$, G - обл, $G \subset \mathbb{R}^2$
Но чаще будем $\in C(D)$ $D \subset \mathbb{R}^2$

Опр

Решение (1) - функция $x = \varphi(t)$, $t \in < a, b >$: $\dot{\varphi}(t) \equiv X(t, \varphi(t))$ *на <a,b>*

1) $\forall t \in < a, b >$ $(t, \varphi(t)) \in D$
2) $\varphi(t)$ - дифф на $< a, b >$
3) $\varphi(t)$ - непр. дифф. (X- непр на D)

Опр

(2) Задача Коши - задача нахождения решения (1) $x = \varphi(t):$ $\varphi(t_0) = x_0$ $((t_0, x_0) \in D)$

Геометрический смысл уравнения первого порядка - уравнение 1 задаёт поле направлений на множестве G

Опр

График решения называется интегральной кривой

В каждой точке задано направление, которое совпадает с касательной в этой точке к интегральной кривой

$\dot{\varphi}(t)|_{t=t_0} = X(t_0, x_0)$

2.2 Метод изоклин

Опр

Изоклина - это кривая, на которой поле направлений постоянно

Уравнение изоклин $X(t, x) = c$, где $c = const$

$\dot{x} = -\frac{t}{x}$ $(x = \varphi(t))$
$-\frac{t}{x} = tg\alpha$
$x = -\frac{1}{c}t$, $c \neq 0$

$c = 1$ ($\alpha = \frac{\pi}{4}$) $x = -t$ - уравнение изоклин
$c = -1$ ($\alpha = -\frac{\pi}{4}$) $x = t$
Решение задачи Коши (1, 1) - это $x = \sqrt{2 - t^2}$
Решение задачи Коши (1,-1) - это $x = -\sqrt{2 - t^2}$

2.3 Теорема Пеано

(1) $\dot{x} = X(t, x)$, $X \in C(D)$
$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant ... \leqslant |x - x_0| \leqslant b\}$
(2) (t_0, x_0)
По теореме Вейерштрасса $\exists M : \ |X(t, x)| \leqslant M \ \forall (t, x) \in D$
$h = min(a, \frac{b}{M})$

(Пеано) $\exists$ реш. задачи К. (1), (2) $x = \varphi(t)$ опр-е на $[t_0 - h, \ t_0 + h]$ - отрезок Пеано

Опр

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in [c, d]$

1) $\varphi_k(t)$ - равномерно ограничена на $[c, d]$, если $\exists N : \ |\varphi_k(t)| \leqslant N \ \forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [c, d]$

2) $\varphi_k(t)$ - равностепенно непр на [c,d], если $\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [c, d] \ |t_1 - t_2| < \delta \to |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \mathcal{E} \ \forall k \in \mathbb{N}$

(Арцелло - Асколи) $\varphi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, равномерно огр. и равностепенно непр на $[c, d] \to \exists$ подпосл $\varphi_{kj}(t) : \varphi_{kj}(t) \underset{j \to +\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$

2019-09-12

Док-во

$$P = [t_0, t + h]$$

$$d_k : t_0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_j^k < ... < t_{nk}^k = t_0 + h$$

$$rank \ d_k = \lambda_k = \max_{0 \leq j \leq n_k - 1} (t_{j+1}^k - t_j^k)$$

$$(3) \quad \lambda \underset{k \to +\infty}{\to} 0$$

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_k(t_0) = x_0 \\ \varphi_k(t) = \varphi_k(t_j^k) + X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))(t - t_j^k) \end{cases} \text{ - ломанные Эйлера}$$

$$t_j^k \leq t \leq t_{j+1}^k$$

$\boxed{d1}.png$

Лемма **(1)**

Определим $\varphi_k(t)$ *и*

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leq M(t - t_0) \quad \forall t \in P \quad (5)$$

Замеч

$$(5) \Rightarrow t \in P \Rightarrow 0 \leq t - t_0 \leq h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| \leq M \cdot h \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \quad (6)$$

Док-во **(лемма 1)**

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0) \cdot (t - t_0)$$

$$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| = |\underbrace{X(t_0, x_0)}_{\leq M}|(t - t_0) \leq M(t - t_0)$$

И.П.: Пусть (5) *- выполняется* $\forall t \in [t_0^k, t_j^k]$

$$\Rightarrow |\varphi_k(t_j^k) - x_0| \leq M(t_j^k - t_0) \leq b \Rightarrow (t_j^k, \varphi_k(t_j^k)) \in D$$

$$t_j^k \leq t < t_{j+1}^k$$

По (4) имеем: $|\varphi_k(t)| \leq |\varphi_k(t) - x_0| = \underbrace{|\varphi_k(t_j^k) - x_0|}_{\text{инд. предп}} + |X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))|(t - t_j^k) \leq$

$$\leq M(t_j^k - t_0) + M(t - t_j^k) = M(t - t_0)$$

Опр

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_k(t) = X(t_j^K, \varphi_k(t^k)), \quad t_j^k \leq t \leq t_{j+1}^k \qquad j = 0, ..., n_k - 1 \\ \varphi_k(t_{nk}^k) = X(t_{nk}^k, \varphi_k(t_{nk}^k)) \end{cases}$$

Лемма **(2)**

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau) d\tau \qquad (8)$$

Док-во

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0)(t - t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{X(t_0, x_0)}_{=\psi_k(t)} d\tau$$

Пусть $[t \in [t_0^k, t_j^k] \Rightarrow \varphi_k(t_j^k) = x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau)d\tau$

И.П.: $t \in [t_j^k, t_{j+1}^k]$

$\Rightarrow \varphi_k(t) = \varphi(t_j^k) + X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))(t - t_j^k) =$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau)d\tau + \int_{t_j^k}^{t} X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau)d\tau$$

Лемма (3)

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *- равномерно огр., равностепенно непр. для* $t \in P$

Док-во

По пункту (6) $|\varphi_k(t)| \leq |\varphi_k(t) - x_0| + |x_0| \leq b + |x_0| \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{E} > 0 \quad \delta$

$|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta \quad (\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in P)$

$|\varphi_k(\bar{t}) - \varphi_k(\bar{\bar{t}})| = |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} \psi_k(\tau)d\tau| \leq |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} |\psi_k(t)|d\tau| \leq$

$\leq M\delta = \mathcal{E}$

$\exists$ подпослед. $\{\varphi_k(t)\}_1^{\infty} \quad t \in P$

(9) $\quad \varphi_k(t) \underset{k\to+\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$ (тут должны быть k_m, но мы их не будем писать)

$\varphi(t)$ - непр и $|\varphi(t) - x_0| \leq b$

Лемма (4)

(10) $\quad \psi_k(t) \underset{k\to+\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} X(t, \varphi(t))$

<u>**Док-во**</u> **(лемма 4)**

$X(t,x) \in C(D) \Rightarrow X(t,x)$ *- равном непр. на* D

$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\bar{t}, \bar{x}), (\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}) \in D$

$|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta, \quad |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |X(\bar{t}, \bar{x}) - X(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}})| < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

фикс $\mathcal{E} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$

$$(12) \quad |X(t,\varphi(t)) - \psi_k(t)| \leq |X(t,\varphi(t)) \underset{(1)}{-} X(t,\varphi_k(t))| + |X(t,\varphi_k \underset{(2)}{(t)} - \varphi_k(t)|$$

из (9) $\quad \Rightarrow \exists k_1 : \forall k > k_1 \quad |\varphi_k(t) - \varphi(t)| < \delta \quad \forall t \in P$

$\Rightarrow \underbrace{|...|}_{(1)} < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

$t = t^k_{nk} \Rightarrow \underbrace{|...|}_{(2)} = 0$ *по (7)*

textЕсли $[t \neq t^k_{nk} \to \exists j \in \{0, 1, ..., n_k - 1\} : t \in [t^k_j, t^k_{j+1})$

И тогда $\underbrace{|...|}_{2} = |X(t, \varphi_k(t)) - X(t^k_j, \varphi_k(t^k_j))|$

$\exists k_2 : \forall k > k_2 \quad \lambda_k < \min(\delta, \dfrac{\delta}{M}) \quad$ (из (3))

$\Rightarrow (t - t^k_j) < (t^k_{j+1} - t^k_j) \leq \lambda_k < \delta$

$|\varphi_k(t) - \varphi_k(t^k_j)| \leq |\displaystyle\int_{t^k_j}^t \underset{\leq M}{|\psi_k(t)|} \leq M \underset{\leq \lambda_k}{(t - t^k_j)} < M \dfrac{\delta}{M} = \delta$

$\Rightarrow |\underbrace{...}_{(2)}| < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$ по (11)

$\Rightarrow \forall k > \max(K_1, k_2) \qquad |X(t, \varphi(t)) - \psi_k(t)| < \dfrac{\mathcal{E}}{2} + \dfrac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$ по (12)

$\varphi(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \qquad (13)$

Т.к. дифференцируема справа, то дифференцируема слева

$t = t_0 : \varphi(t_0) = x_0$

Дифф. (13): $\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$\Rightarrow \varphi(t)$ - реш. задачи Коши $(1), (2) \quad t \in P$