Задача (3.5)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{x}{n}}\cdot\frac{\sin(nx)}{1+nx} \qquad E_1=(0,1) \quad E_2=(1,+\infty)$$

Решение

Прежде всего, ряд на указанном промежутке сходится. Действительно,

$$\left|\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{\sin(nx)}{1+nx}\right| \leqslant \left|\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{1}{nx}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}n^{\frac{3}{2}}}\right| \text{ - сходится } \forall x\in(0,+\infty)$$

Теперь видно, что ряд равномерно сходится на E_2 (т.к. функция принимает максимум при $x=1$)

Рассмотрим промежуток E_1:

$$\sup_{E_1}\left|\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{\sin(nx)}{1+nx}\right| \leqslant \sup_{E_1}\left|\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{1}{1+nx}\right| \leqslant \sup_{E_1}\left|\sqrt{\frac{x}{n}}\right| \leqslant \left|\sqrt{\frac{1}{n}}\right|$$

Значит сходится равномерно

Задача

$$\int_0^{+\infty} x^2\sin(e^x)dx$$