Практика по геометрии
(преподаватель Амрани И. М.)
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 (03.09.2019) Кривые и поверхности

Пример

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^2,$ т.ч. $\quad |\gamma(t)| = 1\ \forall t \in \mathbb{R}$

Д-ть, что $\gamma'(t) \perp \gamma''(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

Док-во

$|\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{<\dot\gamma, \dot\gamma>} = 1 \Leftrightarrow <\dot\gamma, \dot\gamma> = 1$

$(<\dot\gamma, \dot\gamma>)' = (1)' \Rightarrow 2 <\dot\gamma, \ddot\gamma> = 0$

Вообще очевидно, но если нет, то:

$$(<\dot\gamma, \dot\gamma>)' = (\sum_{i=1}^{3} \dot\gamma_i^2)' = \sum_{i=1}^{3} 2\dot\gamma_i\ddot\gamma_i = 2 <\dot\gamma, \ddot\gamma>$$

Пример

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^3, \quad |\gamma'| = 1, \quad \gamma'' \neq 0$

$T(t) = \gamma'(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t), \quad N(t) = \dfrac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$

1. Д-ть, что $\{T(t), N(t), B(t)\}$ - ОНБ
2. Найти координаты $\dfrac{dT}{dt}, \dfrac{dN}{dt}, \dfrac{dB}{dt}$ в базисе $\{T, N, B\}$

Решение

1. Очевидно, $B(t) = \underset{=1}{T} \cdot \underset{=1}{N} \sin\angle(T, N)$

   $T \perp N$ (по пред. задаче), $\quad B \perp N, \quad B \perp T$ (по опр. вект. произв.)

2. По определению "взятием производной" получаем:

   $\dfrac{dT}{dt} = 0T + |\ddot\gamma|N + 0B$

   $<N, T> = 0 \Rightarrow <\dfrac{dN}{dt}, T> + <N, \dfrac{dT}{dt}> = 0$

   Аналогично $0 = <\dfrac{dT}{dt}, B> = - <\dfrac{dB}{dt}, T>$

   $|\ddot\gamma| = <\dfrac{dN}{dt}, T> = - <N, \dfrac{dT}{dt}>$

   $\dfrac{dN}{dt} = -|\ddot\gamma|T + 0N + \tau(t)B$

   $\dfrac{dB}{dt} = 0T - \tau(t)N + 0B$

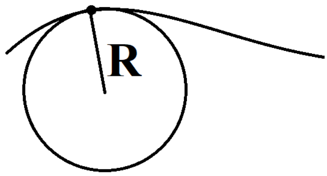
2 (10.09.2019) Задачи на кривые

Мы хотим найти τ через $\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}$

Замечание

На плоскоти в каждой точке гладкой кривой есть окружность, которая наилучшим образом приближает кривую

$$R = \frac{1}{|\ddot{\gamma}|}, \quad |\ddot{\gamma}| := \text{æ - кривизна}$$



Решение (продолжение)

$$\tau =< \frac{dN}{dt},\ B >$$

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|}\right)' = \frac{\dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$\Rightarrow < \frac{dN}{dt},\ B >=< \frac{\dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2},\ \frac{\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|} >=$$

$$= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} < \dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma},\ \dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} > \underset{\text{см. на N}}{=}$$

$$= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} < \dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}|,\ \dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} >= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^2} < \dddot{\gamma},\ \dot{\gamma}\times\ddot{\gamma} >= \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(t),\ 5 - 5\sin(t),\ -3\cos(t))$$

1. Найти æ и τ
2. Понять, что из себя представляет линия

Решение

1. Предыдущую задачу мы не можем просто так применить, потому что $|\dot{\gamma}| = 5 \neq 1$, но мы можем перепараметризовать:

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(\frac{t}{5}),\ 5 - 5\sin(\frac{t}{5}),\ -3\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ -\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{5}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{25}\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{25}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{4}{125}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ -\frac{3}{125}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2} = 25(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}) = 0$$

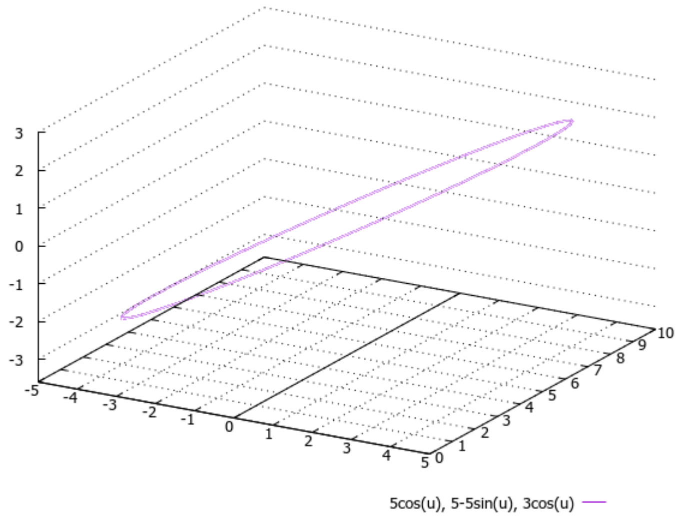
2. Наша линия находится на плоскости:

$$3x + 0y + 4z$$

И лежит на сфере:

$$x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 25$$

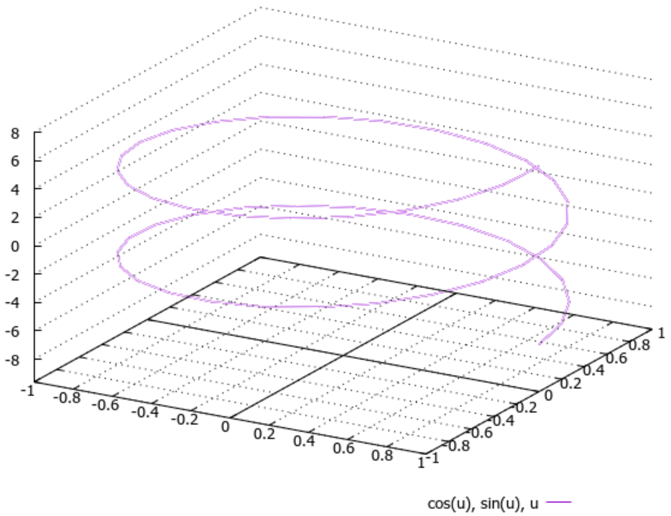
Значит она представляет из себя окружность, потому что есть разные точки



Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t),\ \sin(t),\ t)$$

1. Построить график



2. Найти æ и τ

Решение

Аналогично $t \to \dfrac{t}{\sqrt{2}}$

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{2}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}$$

3 (10.09.2019) Поверхности

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r(t),\ 0,\ z(t)), \text{ где } r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Найти параметрищацию поверхности вращения вокруг OZ

Док-во

Из геометрических соображений: $(r(t)\cos\varphi,\ r(t)\sin\varphi,\ z(t)),\ \varphi \in [0,\ 2\pi]$
Более строго:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\alpha \\ r(t)\sin\alpha \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Опр

Гладкая двухмерная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

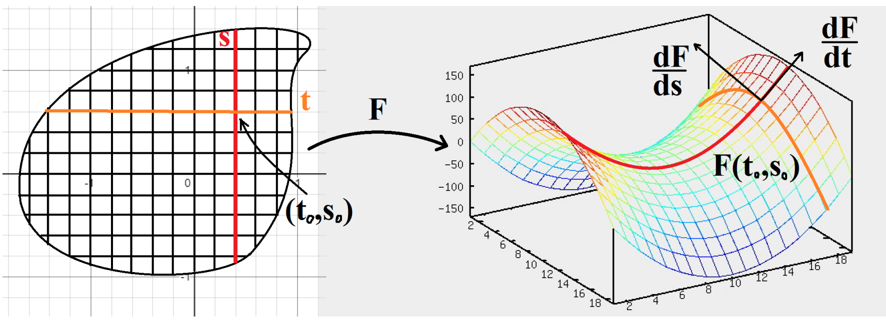
т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial S}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - непрерывные функции

Опр

Гладкая регулярная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial S}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - линейно независимы
"регулярная $=$ скорость не обнуляется"



Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\det \begin{pmatrix} < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} > \\ < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} > \end{pmatrix} =$$

$$=< \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} >< \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} > - < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} >< \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} >=$$

$$= \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 - \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \cos^2 t = \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right|^2$$

4 (17.10.2019) Первая фундаментальная форма

Замечание

$$A(S) = \sum A(\square)$$

$$A(\square) \approx \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right| \Delta t \Delta s$$

$$\mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} > \\ < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} > \end{pmatrix}$$

$$A(S) = \iint \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right| dtds = \iint \sqrt{\det \mathrm{I}(F)} dtds$$

Пример

$$F : (0,\ 2\pi) \times (0,\ 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$(\theta,\ \varphi) \to (\cos\theta \sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta)$$

1. Доказать, что образ F находится на сфере радиуса 1
2. Найти S сферы через $\mathrm{I}(F)$

Док-во 1. Видно из параметрического уравнения сферы что это сфера, а также понятен радиус и её центр

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos\theta, \end{cases}$$

где $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi)$ (у нас будет сдвиг на угол)

2. Найдем переменные для $\mathrm{I}(F)$:

$$< \frac{\partial F}{\partial \theta},\ \frac{\partial F}{\partial \theta} >= \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta = 1$$

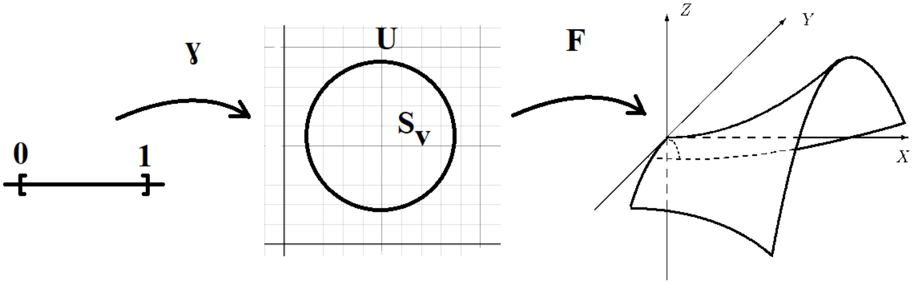
$$< \frac{\partial F}{\partial \theta},\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi},\ \frac{\partial F}{\partial \theta} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi},\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint \sqrt{\det \mathrm{I}(F)} d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos\theta| d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} 4 d\varphi = 4\pi$$

Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad C^1 \text{ регулярная}$$



Найти длину $\widetilde{\gamma} = F \circ \gamma$ через γ и $\mathrm{I}(F)$

5 (24.10.2019) Вторая фундаментальная форма

6 (01.10.2019) Первая и вторая фундаментальные формы

F