

0.1 23.09.2019

$$F(u; x, y) = 0$$

\exists неявная ф-ия $u(x, y)$

$$\begin{array}{lcl} F(u_0; x_0, y_0) & = & 0 \\ F'_u(u_0; x_0, y_0) & \neq & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u(x_0, y_0) = u_0 \\ F(u(x, y), x, y) = 0 \\ u'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} \\ u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} \end{array}$$

Ф-ла Тейлора для функций от неск. перем.

$$u : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in E \rightarrow u(x)$$

$$T_R(x, x^0) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha u(x^0)}{\partial x^\alpha} \frac{(x - x^0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{j=0}^k \frac{d^j u(x^0)[x - x^0]}{j!}$$

$$\alpha - \text{мультииндекс}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad \alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (x - x^0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

Теорема

$$u \in C^k \overset{\text{в окр. } x^0}{\Rightarrow}$$

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) = & u(x_0, y_0) +'_x (x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + u''_{xx} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + u''_{xy} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{1!} + u''_{yy} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \\ & + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \frac{(x - x_0)^2 (y - y_0)}{2!1!} + \dots + \bar{o}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^3 \end{aligned}$$

0.1.1 Дифференциалы высших порядков

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \rightarrow u(x, y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} dy = du[dx, dy]$$

$du : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (dx, dy) \rightarrow du[dx, dy]$ - дифференциал первого порядка

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

$$d_d^k(d^{k-1}u) = \sum_{j=0}^k C_j^k \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j}} dx^j dy^{k-j} = d^k u[dx, dy], \quad u \in C^k$$

$$= dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}$$

Понятно, что можно дальше обобщать, но делать мы это, конечно, не будем

Пример

$$f = x^y = e^{y \ln x}, \quad d^2 f \text{ в точке } (2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \ln x$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \ln x} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - e^{y \ln x} \frac{y}{x^2} \stackrel{(2,1)}{=} 0$$

$$f''_{yy} = e^{y \ln x} \ln^2 \stackrel{(2,1)}{=} \ln^2 2$$

$$f''_{xy} = e^{y \ln x} \frac{y}{x} \ln x + e^{y \ln x} \frac{1}{x} \stackrel{(2,1)}{=} \ln 2 + 1$$

Тогда наш ответ:

$$d^2 u|_{(2,1)} = 2(\ln 2 + 1)dxdy + 2 \ln^2 2 dy^2$$

Пример

$$\text{Найти } d^3 f \text{ для } f = x^4 + xy^2 + yz^2 + zx^2$$

Как понять, что такое $d^3 f$ от трех переменных?

$$d^3 u = (dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z})^3 u$$

$$d^3 \stackrel{(0,1,2)}{=} 3 * 2dx^2 dz + 3 * 2dydz^2 + 3 * 2dx^2 dy$$