

Практика по матану, 3 сем

(преподаватель Демченко О. В.)
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [вконтакте](#)

Содержание

1	Теория групп	2
1.1	Жордановы формы, 03.09.2019	2
1.2	Собственные вектора, 10.09.2019	2
1.3	Жордановы матрицы, 17.09.2019	2
1.4	В ожидании кр..., 24.09.2019	4
1.5	Комутаторы и комутанты, 01.10.2019	5

1 Теория групп

1.1 Жордановы формы, 03.09.2019

УТВ

Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $U \in GL_n(\mathbb{C}) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) : |U| \neq 0\}$
 Сопряжение матрицы A с помощью U : $A \mapsto U^{-1}AU$

Теорема (Жордана, матрич. форма)

$$\forall A \exists U : U^{-1}AU = J$$

Пусть $U^{-1}AU = J$, $V^{-1}AV = I$ - совпадают с точностью до перестановки жордановых блоков

Пример

$$A_1 \in M_n(K), A_2 \in M_m(K)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

С помощью какой матрицы можно получить сопряжением другую

Теорема (Жордана, операт. форма)

Пусть $L \in L(V)$ (оператор на V), V - конечномерное пр-во над \mathbb{C} . Тогда $\exists \{e_1, \dots, e_n\}$ (жорданов базис) - базис V . $[L]_e = J$

Единственность: если есть два базиса, то матрицы можно получить перестановкой

———— тут не хватает чего-то

1.2 Собственные вектора, 10.09.2019

———— что-то пропущено

1.3 Жордановы матрицы, 17.09.2019

Пример

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$X^2 = A = C^{-1}JC$$

Пример $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $Y^2 = J$, $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & ? \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$, ? - из уравнения

Как найти J и C?

1) Находим все собственные числа матрицы A

Если все с.ч. равны, то J без единичек

Если одно собственное число λ диагонализируема $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

б) блоки 2 и 1 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Пример

Найдём, сколько собственных вектор-столбцов

$$\text{Первая матрица: } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = \lambda x_1 \\ \lambda x_2 = \lambda x_2 \\ \lambda x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$x_1, x_2, x_3 \in R$ - три л.н. переменные

Для второго решение: $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ - 2 собственных вектор-столбца

Пример

Пусть у нас матрица 4×4 , 2 собственных л.н. столбца (два блока)

Утв

G, H - изоморфны, G - комм. $\Rightarrow H$ - комм.

Док-во

$\exists \varphi : G \rightarrow H : \varphi$ - биекция и $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$, кроме того, $g_1 g_2 = g_2 g_1$

$\forall g_1, g_2 \in G$, применим φ к последнему выражению

$$h_1 h_2 = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2) \varphi(g_1) = h_2 h_1$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Дз: G, H - изоморфны, G - цикл. $\Rightarrow H$ - цикл.

Решение

Группа G - цикл $\Leftrightarrow \exists g \in G : \forall g' \in G \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

$$G \text{ - цикл.}, G \cong H \Rightarrow \exists \varphi : G \rightarrow H$$

$$\forall h' \in H \quad \exists g' \in G : h' = \varphi(g') = \varphi(g^k) = \underbrace{\varphi(g \dots g)}_k = \underbrace{\varphi(g) \dots \varphi(g)}_k = \underbrace{h \dots h}_k = h^k$$

Чтобы доказать, что две группы не изоморфны, можно доказать что у одной из них свойство выполняется, а у другой нет

Пример

1. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, D_3 - коммутативность
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - цикличность
3. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - дз
4. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - порядки элементов
5. \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - цикличность?

1.4 В ожидании кр..., 24.09.2019

Пример

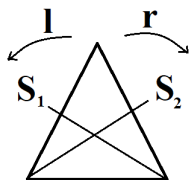
$$A \in M_n(\mathbb{C}), \quad A = C^{-1}JC, \quad C \in_n(\mathbb{C})$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

- 1) находим все с.ч.
 - 2) для каждого с.ч. находим л.н. уравнение
 - 3) решаем систему линейных уравнений
- ...ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, СМ. ТЕТРАДЬ

Пример

$$D_3 = \{e, l, r, s_1, s_2, s_3\}$$



$$H_1 = \{e, r, l\}$$

$$H_2 = \{e, s_1\}$$

- 1) Разбить по подгруппам, по левым и правым классам. Какая нормальная, какая нет?
- 2) Найти g, G . Чтобы произведение не лежало в H_2

$$\text{Дз: } D_4 = \{\dots\}, H_1 = \{e, s_2\}, H_2 = \{e, r^2\}$$

$$\text{Дз: } K(D_3) - \text{найти коммутант для } D_3$$

1.5 Коммутаторы и комутанты, 01.10.2019

Пример

$$\text{Дз (прошрое): } G = D_4$$

$$H = \{e, r^2\}$$

$$H \triangleleft G$$

$$G/H$$

$$\text{Дз (новое):}$$

$$1. \text{ Чему изоморфно } G/H? \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$2. |G| = 4 \Rightarrow \begin{cases} G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Пример (я не знаю, что это было)

$$\text{Пример} \quad 1. \star \rightarrow \mathbb{R} \star \quad (z \mapsto |z|)$$

$$2. \star \rightarrow \star \quad (z \mapsto z^4)$$

Что получается при применении основной теоремы о гомоморфизме?
(найти ядро образ, факторизовать, д-ть, что изморфна образу)

Решение

$$1. \star / \cong$$

2.