Напоминание

D - мн-во

1. $\dot{x} = X(t, x)$
2. $(t_0, x_0) \in D$

Опр

$x = \varphi(t)$ *- реш. задачи Коши* $(1), (2), \quad t \in <a, b>$

единств. на $<a, b>$ *, если*

$\forall$ *другое реш.* $x = \psi(t)$ *З.К.* $(1), (2) \quad t \in <a, b>$

$\varphi(t) \equiv \varphi(t)$ *на* $<a, b>$

Теорема

В усл. теоремы Пеано, если решение $x = \varphi(t)$ *- единств. на* P

$(P = [t_0, t_0 + h])$, *то посл. ломанная Эйлера*

$$\varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$$

Док-во (От противного)

$$\exists \mathcal{E} > 0 : \forall k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists k > k_0, \exists t \in P : |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \geqslant \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \exists \{k_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \{t_j\}_{j=1}^{\infty} : k_{j+1} > k_j \text{ и } |\varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_j)| \geqslant \mathcal{E} \quad (14)$$

$\{\varphi_{k_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$ *- посл. Л.Э.* $\Rightarrow$ *п/послед* $\{\varphi_{k_{jm}}(t)\}_{m=1}^{\infty}$:

$$\varphi_{k_{jm}}(t) \underset{m \to +\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \psi(t)$$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists k_{j_0} : \forall k_{jm} > k_{j0} \quad |\varphi_{k_{jm}} - \psi(t)| < \mathcal{E} \quad (15)$$

$k_{jm} > k_{j_0}$

$$|\varphi(t_{jm}) - \psi(t_{jm})| \geqslant |\underbrace{\varphi(t_{jm}) - \varphi_{kjm}(t_{jm})}_{\geqslant \mathcal{E}}| - |\underbrace{\varphi_{kjm}(t_{jm}) - \psi(t_{jm})}_{< \mathcal{E}}| > 0$$

$\Rightarrow \varphi(t_{jm}) \neq \psi(t_{jm})$ *- против. с единственностью* $\varphi(t)$ *на* P

Теорема (Пеано)

$$X \in C(G), \quad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^2$$

1. $\dot{x} = X(t,x)$

2. $(t_0, x_0) \in G$

   $\Rightarrow \exists h > 0:$ *на* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *опред. решение з. К* $(1), (2)$

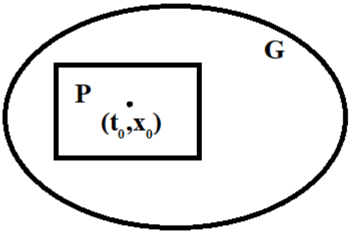
   $x = \varphi(t)$

Док-во

$\forall (t_0, x_0) \in G \quad \exists a > 0, b > 0:$

$D = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\} \subset G$

$\Rightarrow h = \min(a, \frac{b}{M})$, *где* $M: \quad |X(t,x)| \leqslant M$ *на* D



Теорема (единственности)

$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2} \qquad x \equiv 0$ - *реш*

$x = \left(\frac{t+c}{3}\right)^3$

$\exists \Delta > 0:$ *реш* $x = \varphi(t) : x_{01} = \varphi(t_{01})$ - *единств. на* $[t_{01} - \Delta, t_{01} + \Delta]$

$\forall \Delta > 0 \quad$ *через т.* (t_{02}, x_{02}) *проходит беск. много решений*

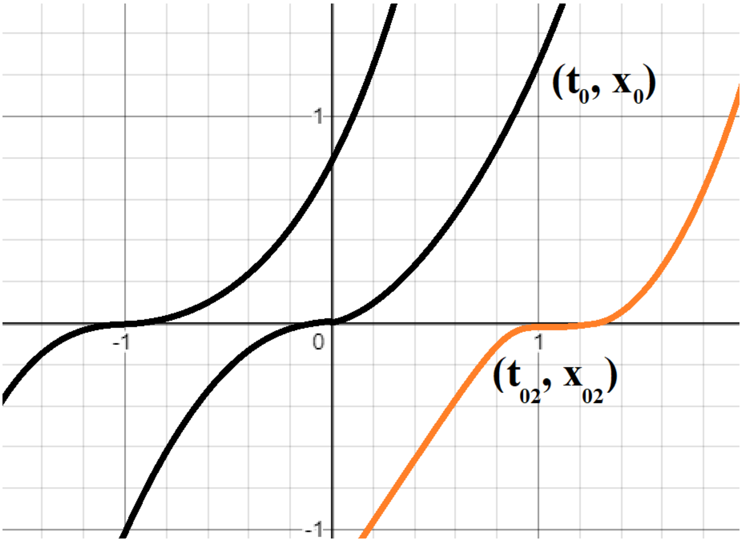
Опр (1)

(1) $\quad \dot{x} = X(t,x) \quad X \in C(G) \quad \underbrace{G}_{обл} \subset \mathbb{R}^2$

$(t_0, x_0) \in G$ - *точка единств. для* (1), *если*

$\exists \Delta > 0:$ *реш* $(1) x = \varphi(t) \quad (x_0 = \varphi(t_0))$

опред и единственно на $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ *вместо отрезка можно взять интервал*



Опр **(1')**

$(t_0, x_0) \in G$ - *точка единств* (1), *если*

$\exists \Delta > 0 : \forall \delta : 0 < \delta \leqslant \Delta$ *реш*

$x = \varphi(t)$ - *опред и ед-гл на* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$(x_0 = \varphi(t_0))$

Теорема

$\rceil$ $x = \varphi(t)$ - *реш. з. К* (1)(2), *опред. при* $t \in < a, b >$

$\forall t \in (a, b) \quad (t, \varphi(t))$ - *точка ед-ти*

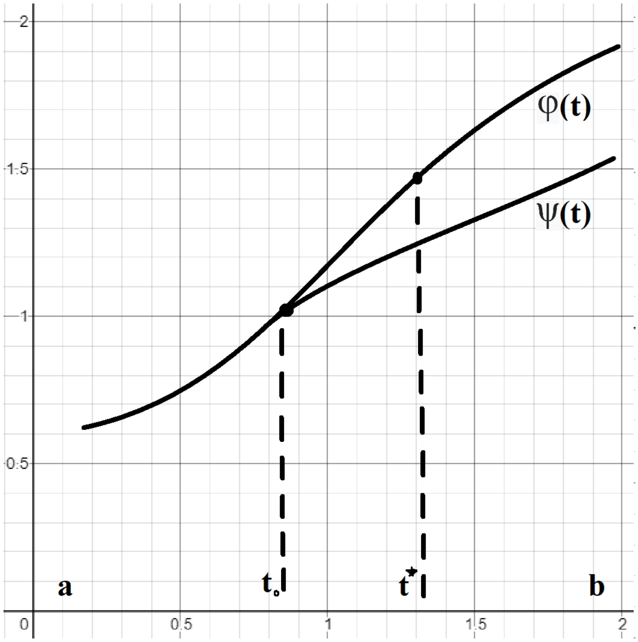
$\Rightarrow$ *реш* $x = \varphi(t)$ - *ед-но на* $< a, b >$

Док-во

$\rceil$ $\exists x = \psi(t)$ - *другое. реш. З.К.* $(1), (2) \quad t \in < a, b >$

$\exists t^* \in (a, b) : \varphi(t^*) \neq \psi(t^*) \quad t^* \neq t_0 \quad$ (*т.к* $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$)

НУО $t^* > t_0$



$u(t) = \varphi(t) - \psi(t)$

$O = \{t \in [t_0, t^*] : u(t) = 0\}$

$O \neq \varnothing \quad (t_0 \in O)$

O - *замкн и огр*

$\exists t_1 \in [t_0, t^*) : \quad t_1 = \max O \quad (t_1 \in O)$

$\Rightarrow \varphi(t_1) = \psi(t_1) \quad \varphi(t) \neq \psi(t) \quad \forall t \in (t_1, t^*]$

Ставим З.К $(t_1, \varphi(t_1) \quad \exists h > 0 :$

На $[t_1 - h, t_1 + h]$ *опред. реш.* $x = \widetilde{\varphi}(t) : \quad x_1 = \widetilde{\varphi}(t_1)$

$\exists \Delta > 0 : \quad \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

(t_1, x_1) - *точка ед-ти* $\Rightarrow \exists \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

$\Rightarrow$ *на* $[t_1 - \Delta, t_1 + \Delta] \quad \widetilde{\varphi} \equiv \varphi(t) \equiv \psi(t)$

противореч с опред t_1

<u>Лемма</u> (Гронуолла)

$$u(t) \geqslant 0,\ \textit{опред}\ t \in <a,b>, \quad u(t)\ \text{-}\ \textit{непр на}\ <a,b>$$

$$\exists t_0 \in (a,b), \quad c \geqslant 0, \quad L > 0:$$

$$u(t) \leqslant c + L\left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau\right| \quad \forall t \in <a,b> \quad (3)$$

$$\Rightarrow u(t) \leqslant c \cdot e^{L|t-t_0|}$$

<u>Док-во</u>

$$\textit{НУО}\ t \geqslant t_0$$

$$(3') \quad u(t) \leqslant \underbrace{c + L\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau}_{v(t)} \overset{?}{\Rightarrow} (4') \quad u(t) \leqslant c \cdot e^{L(t-t_0)}$$

$$u(t) \leqslant v(t)$$

$$\frac{d}{dt}(v(t)\cdot e^{-Lt}) = \underbrace{\dot{v}(t)}_{L\cdot u(t)} e^{-Lt} + v(t)(-L)e^{-Lt} =$$

$$L\cdot e^{-Lt}(u(t)-v(t)) \leqslant 0$$

$$v(t)e^{-Lt}\ \text{-}\ \textit{убыв.} \Rightarrow$$

$$v(t)e^{-Lt} \leqslant v(t_0)e^{-Lt_0} \Rightarrow$$

$$U(t) \leqslant v(t) \leqslant \underbrace{v(t_0)}_{=c} \cdot e^{L(t-t_0)} = c\cdot e^{L(t-t_0)}$$

<u>Следствие</u>

$$\textit{Если}\ c = 0,\ \textit{то}\ u(t) \equiv 0\ \textit{на}\ <a,b>$$