

1 Метрические пространства. Примеры.

Опр

X - мн-во ($X \neq \emptyset$)

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (метрика)

Пара (X, ρ) назыв. метр. пр-вом, если:

1. $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. нер-во \triangle

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Примеры

1. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ со станд. ρ

2. На \mathbb{R}^2

(a) $\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ - манхэттенская метрика

(b) $\rho_\infty = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

(c) $\rho_p = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$

(d) ρ_2 - евклидова метрика

3. X - город без односторонних дорог, $\rho(A, B)$ - min время, за которое можно добраться от A до B

4. X - мн-во

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases} \text{ - дискретная метрика}$$

Упр

Доказать, что это метрики

2 Открытые и замкнутые множества. Свойства

Опр

Открытый шар с центром в x_0 и радиусом \mathcal{E} (окр. x_0):

$$B(x_0, \mathcal{E}) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < \mathcal{E}\}$$

Опр

$U \subset X$, U - открыто, если:

$$\forall x \in U \quad \exists \mathcal{E}: B(x, \mathcal{E}) \subset U$$

Опр

$Z \subset X$ Z - замкнуто, если:

$$X \setminus Z \text{ - открытое мн-во}$$

Теорема (св-ва откр. мн-в)

1. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство откр. мн-в

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ - откр.}$$

2. U_1, \dots, U_n - откр. (конеч. число)

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \text{ - откр.}$$

3. \emptyset, X - откр.

Док-во

1. $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in U_{\alpha_0}$

$$U_{\alpha_0} \text{ - откр.} \Rightarrow \exists \mathcal{E}: B(x, \mathcal{E}) \subset U_{\alpha_0}$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ - откр.}$$

2. $\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \forall i \quad x \in U_i$

$$\exists \mathcal{E}_i: B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$\mathcal{E} = \min_{i=1, \dots, n} \{\mathcal{E}_i\} \quad B(x, \mathcal{E}) \subset B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \text{ - откр.}$$

Пример

$$U_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{0\}$ - объясняет, почему должно быть конечное число в пересечении

Лемма

$B(x_0, r)$ - открыто \forall метр. пр-ва $X \quad \forall x_0 \quad \forall r > 0$

Док-во

$$x \in B(x_0, r) \Rightarrow \rho(x_0, x) = d < r$$

$$\text{Возьмём } \mathcal{E} = \frac{r - d}{2}$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset B(x_0, r)?$$

*/ Здесь очень внимательно надо смотреть на предположение, x_1 лежит в предполагаемой области за пределами шарика $B(x_0, r)$ */

$$\supset \exists x_1 \in B(x, \mathcal{E}) \setminus B(x_0, r)$$

$$\rho(x_1, x) < \mathcal{E} = r - d$$

$$\rho(x_0, x) = d$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq r$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0)$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq r \quad \text{и} \quad \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0) < r$$

противореч. нер-ву Δ

Теорема (св-ва замкнутых мн-в)

1. $\{F_i\}_{i \in A}$ - замкн.

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in A} F_i - \text{замкн.}$$

2. F_1, \dots, F_n - замкн.

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i - \text{замкн.}$$

3. \emptyset и X замкн.

Докажем 1:

$$F_i = X \setminus U_i, \quad U_i - \text{откр.}$$

$$\bigcap F_i = \bigcap (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup U_i$$

3 Внутренность и внешность множества.

Опр

X - метр. про-во, $A \subset X$, $x_0 \in X$
 x_0 - назыв. внутренней относ. A (в X), если:

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \subset A$$

Опр

x_0 - назыв. внешней относ. A , если x_0 - внутр. для $\bar{A} = X \setminus A$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \cap A = \emptyset$$

Опр

Остальные точки - граничные

x_0 - граничная, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ B(x_0, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset \text{ и } B(x_0, \mathcal{E}) \not\subset A$$

$\text{Int } A$ - внутренность A - мн-во внутр. точек

$\text{Ex } A$ - внешность A - мн-во внешних точек

$\partial A = \text{Fr } A$ - граница A - мн-во гр. точек

Теорема

Следующие определения эквививалентны:

1. $\text{Int } A$ - мн-во внутр. т.
2. Наибольшее (по включению) откp. мн-во, содерж. в A
3. \max (по включению) откp. мн-во, содерж. в A
4. $\text{Int } A = \bigcup U_i$, U_i - откp. $U_i \subset A$
5. $\text{Int } A = (X \setminus \text{Ex } A) \setminus \partial A$

Док-во

(2) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (3) т.к объедин. откp. - откp.

(1) \Leftrightarrow (4) :

(\Rightarrow) :

$$x_0 \in \text{мн-во внутр. т.} \subset \bigcup U_i, \quad U_i \text{- откp.} \quad U_i \subset A$$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \text{- откp.} \subset A \text{ (по определению } \text{Int } A)$$

$(\Leftarrow) :$

$$\exists i : x_0 \in U_i \subset A \quad x_0 \in \bigcup U_i$$

$$\exists \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U_i \subset A \Rightarrow x_0 - \text{внутр. т. } A$$

Теорема

Следующие определения эквививалентны:

1. $\text{Ex } A$ - мн-во внеш. т.
2. $\text{Ex } A = \text{Int}(X \setminus A)$
3. $\text{Ex } A$ - max (по вкл.) откр. мн-во, не пересек. с A
4. $\text{Ex } A = \bigcup U_i, \quad U_i - \text{откр.} \quad U_i \cap A = \emptyset$

Относительно внутр.

$$A \subset X \Rightarrow (A, \rho) - \text{метр. пр-во}$$

$$B \subset A \quad \text{Int}_A B \neq \text{Int}_X B$$

Пример

$$X = \mathbb{R}, \quad \rho - \text{станд.}$$

$$A = [0, 1] \quad B = [0, \frac{1}{2})$$

$$\text{Int}_X B = (0, \frac{1}{2}) \quad \text{Int}_A B = [0, \frac{1}{2})$$

4 Замыкание множества.

Теорема

Следующие определения эквививалентны:

1. $\text{Cl } A = \{x \in X \mid \forall \mathcal{E} > 0 \quad B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset\}$
2. $\text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$
3. $\text{Cl } A = \bigcap F_i, \quad F_i - \text{замк} \quad F_i \supset A$
4. $\text{Cl } A = \min (\text{по вкл.}) \text{ замк. } \supset A$

Док-во

(3) \Leftrightarrow (4) - пересеч. замкн. - замкн.

(1) \Leftrightarrow (2) - очевидно

(1) \Rightarrow (3) :

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad x : B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\sqsubset x \notin F\text{- замк.} \quad F \supset A \quad x \in X \setminus F\text{- откр.}$$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x, \mathcal{E}) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$$

$$\Rightarrow x - \text{внеш.} \quad \text{противореч.}$$

(3) \Leftarrow (1) :

$$x \in \bigcap F_i$$

$$\sqsubset \exists \mathcal{E} > 0 : B(x, \mathcal{E}) \cap A = \emptyset$$

$$B(x, \mathcal{E}) - \text{откр. (по л.)} \quad \text{замк} - F = X \setminus B(x, \mathcal{E}) \quad F \supset A$$

$$x \notin F - \text{противореч.}$$

Замечание

1. $A - \text{откр.} \Leftrightarrow A = \text{Int } A$

2. $A - \text{замк.} \Leftrightarrow A = \text{Cl } A$

3. $\text{Int } A \subset A \subset \text{Cl } A$
 $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$

Пример

$$X = \mathbb{R}; \quad A = \emptyset$$

$$\text{Int } A = \emptyset \quad \text{Ex } A = \emptyset \quad \partial A = \mathbb{R}$$

Пример

Канторово мн-во - замк.

5 Топологические пространства. Примеры.

Опр

X - мн-во

$\Omega \subset 2^X = \{A \subset X\}$ - мн-во подмн-в X

(X, Ω) - назыв. топологическим пр-вом, если:

1. $\forall \{U_i\}_{i \in I} \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$
2. $U_1, U_2, \dots, U_n \Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \Omega$
3. $\emptyset; X \in \Omega$

Ω - топология на X

$U \in \Omega$ - называется открытым мн-вом

Опр

(X, Ω) - топ. пр-во; $F \subset X$

F - называется замкнутым, если $X \setminus F \in \Omega$

Теорема

1. $\bigcap_{i \in I} F_i$ - замкн., если F_i - замкн.
2. $F_1 \cup F_2$ - замкн., если F_1, F_2 - замкн.
3. \emptyset, X - замкн.

Примеры

1. (X, ρ) - топ. пр-во
2. Дискр. пр-во: $\Omega = 2^X$
Нетрудно заметить, что все его элементы открыты по определению (можно сравнить с мешком гороха, где каждая горошина сама по себе). Также они замкнуты
3. Антидискр. пр-во: $\Omega = \{\emptyset, X\}$
(можно сравнить с запутанным клубком ниток)
Замкнуты только x и \emptyset

Опр

(X, Ω) - метризуемо, если \exists метрика $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_X$

Ω - мн-во откр. подмн. в ρ

Антидискретное - не метризуемо, если $|X| > 1$

4. Стрелка

$$X = \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$$

$$\Omega = \{(a, +\infty)\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$$

5. Связное двоеточие

$$X = \{a, b\}$$

$$\Omega = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

6. Топология конечных дополнений (Зариского)

$$X - \text{беск. мн-во}$$

$$\text{Замкнутые конечные мн-ва и } X$$

$$\Omega = \{A \mid X \setminus A \text{ конечно}\}$$

УТВ*

Вариации топологии Зарицкого:

- (a) $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$
 $F \subset \mathbb{C}^n$ - замкн., если F является мн-вом решений системы:

$$\begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ f_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

f_1, \dots, f_k - мн-ны от n переменных

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}_f = 0 - \text{эллипс}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 - \text{в } \mathbb{C} \text{ непусто, поэтому используем их}$$

Любое пересечение замкнутых замкнуто?

$$F \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ f_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases} \quad G \longleftrightarrow \begin{cases} g_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ g_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ g_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

$$F \cup G \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ f_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ g_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ g_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ g_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

Теорема* (Гильберта о базисе)

Мн-во решений бесконечной системы равносильно мн-ву решений конечной системы

здесь когда-нибудь возможно будет алгебраическая формулировка с примером

Теорема* (Гильберта)

Любой идеал можно представить как конечную систему мн-ов

здесь когда-нибудь возможно будет дополнение

Теорема* (Гильберта о нулях)

K - алгебраически замкнутое поле \Rightarrow замкнутые мн-ва в K^n
- идеалы в $K[x_1, \dots, x_n]$ - биекция

6 База топологии. Критерий базы.

Опр

X - топ. пр-во; $A \subset X$
 $\text{Int } A = \cup U, \quad U \in \Omega \quad U \subset A$
 $\text{Cl } A = \cap F, \quad F - \text{ замк. } F \supset A$
 $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$

Опр

$x_0 \in X$
Окрестностью x_0 назыв. $\forall U \in \Omega : x_0 \in U$

Опр

x_0 назыв. внутренней т. A , если $\exists U_{x_0} \subset A$
 x_0 назыв. внешней т. A , если $\exists U_{x_0} \cap A = \emptyset$
 x_0 назыв. граничной, если $\forall U_{x_0} \quad (U_{x_0} \not\subset A)$ и $(U_{x_0} \cap A \neq \emptyset)$

Опр

(X, Ω) - топ. пр-во
 $\mathcal{B} \subset \Omega$ \mathcal{B} назыв. базой топологии, если:

$$\forall U \in \Omega \quad \exists \{V_i\} \in \mathcal{B} : \quad U = \bigcup_{i \in I} V_i$$

Пример

$X = \mathbb{R}^n$ или другое метр. пр-во
 $\mathcal{B} = \{B(x_0, \mathcal{E}) | x_0 \in X, \mathcal{E} > 0\}$ - база топологии
 $\forall U$ - откp. $\forall x_0 \in U \quad \exists \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U$

$$\bigcup_{x_0 \in U} B(x_0, \mathcal{E}) = U$$

Теорема (Критерий базы)

X - мн-во \mathcal{B} - нек. совокупность подмн-в X
 \mathcal{B} - база $\Omega \Leftrightarrow$

1. $\bigcup_{U_i \in \mathcal{B}} U_i = X$
2. $\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} : x \in W; W \subset U \cap V$

Док-во

$(\Rightarrow) :$

очевидно

$(\Leftarrow) :$

$$\Omega = \{\bigcup_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{B}\}$$

$$1. \bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I_j} U_i) = \bigcup_{i,j} U_i$$

$$2. (\bigcup_j U_j) \cap (\bigcup_i U_i) = \bigcup_{i,j} (U_i \cap U_j) = \bigcup_{i,j} (\bigcup_{x \in U_i \cap U_j} W_x)$$

$$x \in W_x \subset U_i \cap U_j$$

$$\bigcup_{x \in U_i \cap U_j} W_x = U_i \cap U_j \quad W_x \in \mathcal{B}$$

$$3. \emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i \quad X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{B}} U_i$$

Теорема (База окр. точки)

X - мн-во, $\forall x \in X \quad \exists \mathcal{B}_x \subset 2^X$

$$1. x \in U \quad \forall U \in \mathcal{B}_x$$

$$2. U, V \in \mathcal{B}_x \rightarrow \exists W \in \mathcal{B}_x : W \subset U \cap V$$

$$3. y \in U \quad (U \in \mathcal{B}_x) \rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_y : V \subset U \text{ T.e. } \mathcal{B}_x \neq \emptyset \rightarrow \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x - \text{база нек. топологии}$$

Док-во

здесь когда-нибудь будет док-во

7 Топология произведения пространств.

Пример (- конструкция)

Даны X, Y - топ. пр-ва
 $(X, \Omega_X); (Y, \Omega_Y)$

Введем базу топ. на $X \times Y$:

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \Omega_X; V \in \Omega_Y\}$$

Это топология:

$$\Omega_{X \times Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \mid U_i \in \Omega_X; V_i \in \Omega_Y \right\}$$

Для объединения - очевидно, для пересечения:

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} S_j \times T_j \right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} \underbrace{(U_i \cap S_j)}_{\in \Omega_X} \times \underbrace{(V_i \cap T_j)}_{\in \Omega_Y} \in \Omega_{X \times Y}$$

8 Равносильные определения непрерывности.

Опр

$(X, \rho); (Y, d)$ - метр. пр-ва $f : X \rightarrow Y$

f - назыв. непр. в т. x_0 , если

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 :$

Если $\rho(x, x_0) < \delta \rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \mathcal{E}$

f - непр, если она непр. в каждой точке

Теорема

f - непр в $x_0 \Leftrightarrow \forall U - \text{откр.} \subset Y : U \ni f(x_0)$

$\exists V - \text{откр.} \subset X \quad x_0 \in V \text{ и } f(V) \subset U$

Док-во

f - непр. в $x_0 \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$

$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E})$

$\rightarrow \forall U - \text{откр.} \subset Y : f(x_0) \in U \rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 :$

$f(x_0) \in B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \rightarrow \exists \delta > 0$

$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \quad B(x_0, \delta) = V$

$\leftarrow \forall$ обрывается

9 Прообраз топологии. Индуцированная топология.

Опр

$f : X \rightarrow Y$ - отображ. мн-в

(Y, Ω_Y) - топ. пр-во

Ω_X - самая слабая топ.

f - непр.

$\forall U \in \Omega_Y \quad f^{-1}(U)$ должен быть открытым в X

Теорема

$\{f^{-1}(U)\}$ - топология на X и она назыв. прообразом Ω_Y

Док-во

$$1. \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \quad (*)$$

$$2. \quad f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$$

$$3. \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad f^{-1}(Y) = X$$

$$(*) : \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \{x \mid f(x) \in \bigcup_{i \in I} U_i\} = \{x \mid \exists i \in I : f(x) \in U_i\}$$

Опр

(X, Ω_X) - топ. пр-во

$A \subset X$

$\Omega_A = \{U \cap A \mid U \in \Omega_X\}$ - индуцированная топология на A

10 Инициальная топология. Топология произведения как инициальная.

Опр

$\forall i \in I \quad f_i : X \rightarrow Y_i$
 (Y_i, Ω_i) - топ. пр-во

$\{f_{i1}^{-1}(U_1) \cap f_{i2}^{-1}(U_2) \cap \dots \cap f_{ik}^{-1}(U_k) \mid U_j \in \Omega_{ij}\}_{j=1, \dots, k \in \mathbb{N}}$ - база нек. топологии

Ω_X - соотв. топология (инициальная топология)

Опр

$\{f_i^{-1}(U)\}$ - предбаза топологии

Теорема

Топология произведения совпадает с инициальной

Опр

$$\prod_{i \in I} x_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \mid f(i) \in x_i\}$$

$$p_k : \prod_{i \in I} x_i \rightarrow x_k \quad k \in I$$

$$p_k(f) = f(k) \rightarrow \text{если } x_i - \text{ топ.} \rightarrow \prod_{i \in I} x_i - \text{ топ.}$$

11 Финальная топология. Фактортопология. Приклеивание.

Опр

$\forall i \in I \quad f_i : X_i \rightarrow Y$ - отображ.

(X_i, Ω_i)

Хотим завести на Y топологию:

$\forall f_i$ - непр. Топ на Y самая сильная

$U \subset Y \quad \forall i \in I \quad f_i^{-1}(U) \in \Omega_i$

$\Omega_Y = \{U \mid \forall i \quad f_i^{-1}(U) \in \Omega_i\}$

$\emptyset, Y \in \Omega_Y$

$f_i^{-1}(U_1 \cap U_2) = f_i^{-1}(U_1) \cap f_i^{-1}(U_2)$

$$f_i^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} U_k\right) = \bigcup_{k \in K} f_i^{-1}(U_k)$$

Пример

Приклеивание

X, Y - пр-ва

$A \subset X \quad f : A \rightarrow Y$ - отображ.

Хотим получить $X \cup_f Y$ - приклеивание

$X \cup_f Y = X \cup Y / \sim \quad \forall a \in A \quad a \sim f(a)$

U - откp. в $X \cup_f Y$, если $U \cap X$ - откp. в X и

$U \cap Y$ - откp. в Y (если f - инъект.)

12 Гомеоморфизм.

Опр

$f : X \rightarrow Y$ - гомеоморфизм, если

1. f - непр.
2. f - биекция
3. f^{-1} - непр.

Предположение

\simeq - отношение эквив.

Теорема

Если $(X, \Omega_X) \simeq (Y, \Omega_Y)$, то

$f_* : \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$ - биекция

$$f_*(U) = f(U)$$

13 Связность топологического пространства и множества.

14 Связность отрезка.

15 Связность замыкания. Связность объединения.

Теорема

(X, Ω) - топ. пр-во

$A \subseteq X$ - связно

$A \subseteq B \subseteq ClA$

$\rightarrow B$ - связно

Теорема

Если A - связ., то ClA - связ.

Теорема

(X, Ω) - топ. пр-во

$A, B \subseteq X$ - связны

$A \cap B \neq \emptyset$

$\rightarrow A \cup B$ - связно

16 Связность и непрерывные отображения.

Теорема

$(X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$ - топ. пр-ва

$f : X \rightarrow Y$ - непр.

X - СВЯЗНО $\rightarrow f(X)$ - СВЯЗНО

17 Связность произведения пространств

Теорема

X, Y - топ. пр-ва

$X \times Y$ - связн. $\Leftrightarrow X, Y$ - связн.

Замечание

Любое конечное произведение связных топ. пр-в связно

Теорема

$\prod_{i \in I} X_i$ - связно $\Leftrightarrow \forall i \in I \quad X_i$ - связно

18 Компоненты Связности.

Опр

X - топ. пр-во

Компонентой связности т. $x_0 \in X$ назыв. наиб. по включению связное множество, ее содерж.

$$K_{x_0} = \cup \{M \in 2^X \mid x_0 \in M - \text{связ.}\}$$

Теорема

1. $\forall x, y \in X \quad K_x = K_y$ или $K_x \cap K_y = \emptyset$
2. компоненты связности - замк.
3. Для любого связ. мн-ва \exists компонента связности, в которой оно целиком содержится
 $\forall M \subseteq X \quad (M - \text{связ.} \rightarrow \exists x \in X : M \subseteq K_x)$
4. $\forall x, y, z \in X \quad (x, y \in K_z \Leftrightarrow \exists M - \text{связ.} : x, y \in M \text{ и } z \in M)$

Опр

X - топ. пр-во назыв. вполне несвязным, если $\forall x \in X : K_x = \{x\}$

19 Линейная связность

Опр

Линейно связное пр-во - топ. пр-во, в котором любые две точки можно соединить непр. кривой

(X, Ω) - лин. св., если $\exists f :$

$f : [0, 1] \rightarrow X$ (пути в X) | $f(0) = x$ (нач. пути); $f(1) = y$ (кон. пути),

$\forall x, y \in X$

Теорема

X - топ. пр-во

X - лин.св. $\rightarrow X$ - св.

Теорема

A, B - лин. св. $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow A \cup B$ - лин.св.

Теорема

X, Y - топ. пр-во; $f : X \rightarrow Y$ - непр.

X - лин. св. $\rightarrow f(X)$ - лин. св.

20 Компактность. Примеры.

Опр

(X, Ω) - топ. пр-во

X - компакт, если из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие

$$\forall \{U_i\}_{i \in I}, \quad U_i \in \Omega$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i = X \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists \{i_1, \dots, i_n\}_{i_j \in I} : \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X \right)$$

Опр

(X, Ω) - топ. пр-во

$A \subseteq X$ - комп., если оно комп. в индуц. топ.

Теорема

1. конечное топ. пр-во всегда компактно
2. дискретное бесконечное множ. не комп.
3. антидискр. множ. комп.
4. $[0, 1]$ - компакт.

Теорема

X - комп. $A \subseteq X$ - замк. $\rightarrow A$ - комп.

Теорема

X - комп $f : X \rightarrow Y \rightarrow f(x)$ - комп.

Следствие

Комп. - топ. св-во

21 Простейшие свойства компактности.

22 Компактность произведения пространств.

Теорема

X, Y - комп $\Leftrightarrow X \times Y$ - комп.

Теорема

$\{X_i\}_{i \in I}$ - комп. $\Leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ - комп.

23 Компактность и хаусдорфовость

Опр

X назыв хаусдорфф., если

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \quad \exists U_{x_1}, U_{x_2} : \quad U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$$

Теорема (1)

X - хаусдорфф. A - комп $\in X \rightarrow A$ - замк.

Теорема

$f : X \rightarrow Y$ непр., биекция

X - комп.

Y - хаусдорфф.

$\rightarrow f$ - гомеоморф.

Док-во (1)

$X \setminus A$ - откp?

$x_0 \in X \setminus A$

$\forall x_1 \in A \rightarrow \exists U_{x_0} \ni x_0; \quad V_{x_1} \ni x_1$

$U_{x_0} \cap V_{x_1} = \emptyset$

$$\bigcup_{x_1 \in A} V_{x_1} \subset A \rightarrow x_1, x_2, \dots, x_k : \quad \bigcup_{i=1}^k V_{x_i} \supset A$$

$$U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^k U_{x_i} \text{ - искомая окр. } U_{x_0} \cap A = \emptyset$$

(Иначе $U_{x_0} \cap V_{x_i} \neq \emptyset, \quad U_{x_i} \cap V_{x_i} \neq \emptyset$)

24 Лемма Лебега. Компактность отрезка.

Теорема (Лемма Лебега)

$$X = [0, 1] \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad \{U_i\}_{i \in I} - \text{откр. покр. } X$$

$$\rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 : \forall x_0 \exists i \in I : B(x_0, \mathcal{E}) \subseteq U_i$$

(\mathcal{E} зависит от покр. \mathcal{E} - число Лебега)

Следствие

Отрезок - комп.

25 Критерий компактности подмножеств евклидова пространства.

Теорема

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

A - комп. $\Leftrightarrow A$ - замк и огр.

Опр

A - огр., если $\exists N : A \subset B(0, N)$

Док-во

$\rightarrow A$ - замк. т.к. \mathbb{R}^n - хаусдорф.

A - огр. $\{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\leftarrow A \subset [-N, N] \times [-N, N] \times \dots \times [-N, N] = K$ т.к. огр.

K - комп.

A - замк. в $K \rightarrow A$ - комп.

26 Теорема Вейерштрасса. Примеры.

Теорема (Вейерштрасса)

K - компакт.

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$ - непр. $\rightarrow \exists x_0 \in K :$

$\forall x \in K \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (x_0 - \max)$

Док-во

$f(K)$ - комп. $\subset \mathbb{R} \rightarrow f(K)$ - замк. и огр \rightarrow

$\sup f(K) \in f(K)$ (замк.)

$\sup f(K) \neq \infty$ (огр.)

$\sup f(K) = f(x_0)$

27 Вторая аксиома счётности и сепарабельность.

Опр

X - обл. II А.С., если в X \exists счетная база

Опр

X - назыв сепараб., если $\exists A \subset X$
 $|A| \leq \aleph_0$ и $ClA = X$

Опр

A - всюду плотно, если $ClA = X$

Теорема

X - II А.С. $\rightarrow X$ - сепараб.

28 Теорема Линделёфа.

Теорема

X - П А.С. \rightarrow из \forall откр. покр. X можно извлечь не более чем счетное подпокрытие

29 Первая аксиома счётности.

Опр

База окр-тей точки

$$\forall x \quad \exists \{U_{x_i}\}_{i \in I_x}$$

$$1. \quad U_{x_i} \in \Omega; \quad x \in U_{x_i}$$

$$2. \quad \forall U \in \Omega : x \in U \quad \exists U_{x_i} : x \in U_{x_i} \subset U$$

Опр

Если \exists база окр-тей:

$$\forall x \quad \{\{U_{x_i}\}_{i \in I_x} \text{ не более чем счетное} \rightarrow X \text{ удовл. I А.С.}$$

30 Из компактности следует секвенциальная компактность
(с первой АС).

31 Из секвенциальной компактности следует компактность
(со второй АС).

32 Полнота и вполне ограниченность метрических пространств.

Опр

Фунд. послед.

$\{X_n\}$ - фунд., если $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N : \rho(X_n, X_m) < \mathcal{E}$

Опр

X назыв. полным, если \forall фунд. послед. сходится

Опр

$\{X_i\}_{i \in I}$ - \mathcal{E} -сеть, если $\forall x \quad \exists x_i : \rho(x, x_i) < \mathcal{E}$

Опр

X назыв. вполне огранич., если $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists$ конечная \mathcal{E} -сеть

33 Из полноты и вполне ограниченности следует компактность

Теорема (равносильные)

1. X - компактно
2. X - секвенц. комп.
3. X - полн. и вполне огр.

34 Аксиомы отделимости.

Теорема (Колмогорова)

$$\forall x, y \in X : x \neq y \rightarrow \exists U \in \Omega$$

Теорема (Тихонова)

$$\forall x, y \in X : x \neq y \rightarrow \exists U \in \Omega$$

Теорема (Хаусдорфа)

$$\forall x, y \in X \quad \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$$

Теорема (3)

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \text{ и замкнуто } F \subseteq X, \quad x \notin F \\ &\exists U_x \text{ и } U_F : U_x \cap U_F = \emptyset \end{aligned}$$

Теорема (4)

$$\begin{aligned} &F_1, F_2 - \text{ замк. } : F_1 \cap F_2 = \emptyset \\ &\exists U_{F_1} \text{ и } U_{F_2} : U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset \\ &T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0 \end{aligned}$$

35 Нормальность матрического пространства.

Опр

(X, Ω) - хаусдорф.

X - нормально $\Leftrightarrow \forall F$ - замк., $\forall G \in \Omega \quad F \subseteq G \rightarrow \exists G' \in \Omega :$

$F \subseteq G' \subseteq ClG' \subseteq G$