Лекции по геометрии
(читает Солынин А. А.)

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вк

Содержание

1. Дифференциальная геометрия кривых (в $\mathbb{R}^3$) и поверхностей (в $\mathbb{R}^3$) **2**

1.1. Дифференциальная геометрия кривых 2

1.1.1 Понятие кривой 2

1. Дифференциальная геометрия кривых (в $\mathbb{R}^3$) и поверхностей (в $\mathbb{R}^3$)

1.1. Дифференциальная геометрия кривых.

1.1.1. Понятие кривой

Опр. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1) Параметрический $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
2) Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ (особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)
3) Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x, y) = 0$

Пример. Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Теорема (о неявной функции).
$F(x, y) = 0$, F - дифференцируема ($\exists \frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ - в окр. (x_0, y_0)). $F(x_0, y_0) = 0$
Если $\frac{dF}{dy}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \mathcal{E} > 0\ \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + E) \subset \mathbb{R}\ F(x, f(x)) = 0$

Напоминание :
$\frac{dF}{dx}|_{(x_0,y_0)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x,y_0) - F(x_0,y_0)}{x - x_0}$

$$y = f(x) \to \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$
$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0$: если $\rho(t, t_0) < \delta$, то $\rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$ ($\rho(t, t_0) = |t - t_0|$, $f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}$)
Св-ва пределов:

1) $\lim\limits_{t \to t_0} (f(t) + -g(t)) = \lim f(t) + \lim g(t)$
2) $\lim\limits_{t \to t_0} (f(t); g(t)) = (\lim f(t); \lim g(t))$ - скалярное умножение

3) $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)xg(t)) = \lim f(t)x\lim g(t)$

Доказательство. $\lim f(t) = (\lim x(t), \lim y(t), \lim z(t))$, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Пусть $\mathcal{E} > 0$, выберем $\delta : |x(t)-x_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$, аналогично $|y(t)-y_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$ и $|z(t)-z_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$

Значит $\sqrt{(x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2+(z(t)-z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$

Опр. $f'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0}\frac{\overrightarrow{f}(t)-\overrightarrow{f}(t_0)}{t-t_0}$

Свойства .

1) $(f(t)+-g(t))' = f'(t)+-y'(t)$

2) $(cf(t))' = cf'(t)$

3) $(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t), g'(t))$

4) $(f(t)xg(t))' = f'(t)xg(t) + f(t)xg'(t)$

5) $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g'h) + (f, g, h')$

Доказывается через $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Докажем векторное произведение $(f(t)xg(t))'|_{t=t_0} = \lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)xg(t)-f(t_0)xg(t_0)}{t-t_0} = \lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)xg(t)-f(t_0)xg(t)+f(t_0)xg(t)-f(t_0)xg(t_0)}{t-t_0} = \lim\limits_{t\to t_0}\frac{(f(t)-f(t_0))xg(t)}{t-t_0}+\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t_0)x(g(t)-g(t_0))}{t-t_0} = f'(t_0)xg(t_0) + f(t_0)xg'(t_0)$

Пример. Контрпример (т. Лагаранжа) - не всегда верна

Можно ли $\int\limits_a^b \overrightarrow{f}(t)dt = (\int\limits_a^b x(t)dt, \int\limits_a^b y(t)dt, \int\limits_a^b z(t)dt)$

$\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{f}(t)$

$\overrightarrow{F}(b) - \overrightarrow{F}(a) = \int\limits_a^b \overrightarrow{f}(t)dt$

$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$

$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$

$\int\limits_a^b f(t)dt = (\int\limits_a^b x(t)dt, ...) = (X(b) - X(a) + ...$ (по ф-ле Н-Л)

Опр. Гладкая кривая - образ вектороднозначнойя функция

Опр. Кривая называется регулярной, если существует производная и $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$

Опр. Кривая называется бирегулярной, если существует вторая производная и $f''(t) \not\parallel f'(t)$

Опр. Параметризации $\overrightarrow{f}(t)\overrightarrow{g}(t)$ $(f : [a, b] \to \mathbb{R}^3,\ g : [c, d] \to \mathbb{R}^3)$ эквивалентны, если $\exists$ биекция $\tau : [a, b] \to [c, d] : \tau(a) = c,\ \tau(b) = d,\ f(t) = g(\tau(t))$

Опр. Гладкая кривая - класс эквивалентности параметризации

Докажем, что экв. параметризации - отношение эквивалентность:

1) (рефл.) $\tau = id$
2) (симм.) $f(t) = g(\tau(t))$, $g(t) = f(\tau(t))$
3) (тран.) $f(t) = g(b(t))$, $g(t) = h(\tau(t))$, $f(t) = h(\tau(b(t)))$

Лемма. $\overrightarrow{f}(t)$ - вектор-функция (регулярная), $|\overrightarrow{f}(t)| = 1 \Rightarrow f'(t) \perp f(t)$

Доказательство. $(f(t); f(t)) = 1 \Rightarrow 0 = (f(t); f(t))' = 2(f'(t); f(t))$. $f(t) \neq 0$ и $f'(t) \neq 0 \Rightarrow f'(t) \perp f(t)$