

1 Некоторые определения из теории множеств. Прямое произведение, разбиение множеств. Мощность объединения

Опр

Пустое множество (\emptyset) - мно-во, которому \notin ни один элемент

Опр

Число элементов мн-ва A - мощность $|A|$

Опр

Множество чисел от k до l обозначается $k : l$

Опр

Мн-во A - подмн-во мн-ва B ($A \subset B$), если каждый элемент из A принадлежит B

Опр

C - объединение A и B ($A \cup B$), если оно состоит из всех элементов A и B ($C = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$)

Опр

$\bigcap_{i=1}^n A_i, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i$ - объединение и пересечение конечного числа мн-в

$(\bigcap_{i \in I} A_i, \quad \bigcup_{i \in I} A_i)$ - аналогично

Опр

Если пересечение мн-в пусто, то они называются дизъюнктивными

Опр

Мн-во C называется разностью мн-в A и B ($C = A \setminus B$), если оно состоит из всех эл-в, принадлежащих A и не принадлежащих B

Опр

$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$ - симметрическая разность

Опр

Мн-во упорядоченных пар (i, j) , где $i \in A, j \in B$ называется прямым произведением мн-в A и B

$$A \times B = \{(i, j) | i \in A, \quad j \in B\}$$

Замечание

Мощность прямого произведения $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Аналогично произведение \forall конечного числа множеств

Опр

Пусть A_1, \dots, A_k - ненулевые и попарно дизъюнктивные, $M = A_1 \cap \dots \cap A_k$ и мн-во $\{A_1, \dots, A_k\}$ называется разбиением М (если они попарно не дизъюнктивные, то это покрытие)

Опр

Разбиение А мн-ва М называется измельчением В, если $\forall A_i \in A$ содержится в некотором $B_i \in B$

Опр

Пусть А, В - размельчения мн-ва М, разбиение С называется произведением А и В, если оно является из измельчением, причем самым крупным $C = A \cdot B$

Теорема

Произведение двух разбиений существует

Док-во

Предъявим разбиение, которое будет пересечением $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ и $B = \{B_1, \dots, B_l\}$, точнее $D_{ij} = A_i \cup B_j$, $i \leq k$, $j \leq l$ и $\mathcal{P} = \cup D_{ij}$ (т.е. без пустых строк). Покажем, что тогда оно самое крупное.

Пусть $\exists F = \{F_1, \dots, F_t\}$ - измельчение А и В, тогда $\forall F_k \quad \exists A_{i_k}, B_{j_k} : F_k A_{i_k}, B_{j_k} \Rightarrow F_k \subset (A_{i_k} \cup B_{j_k}) = D_{i_k j_k} \Rightarrow$ мельче F

2 Вектора из нулей и единиц

Пусть мн-во B состоит из двух элементов которые отождествляются с 0 и 1, т.е. $B = 0 : 1$

Произведение m экземпляров такого мн-ва обозначим за $B^m = (0 : 1)^m$, состоит из 2^m эл-ов

Опр

Вектор из нулей и единиц - упорядоченный набор из фиксированного числа нулей и единиц, т.е. эл-т мн-ва B^m

Упорядоченный набор из чисел обычно называется вектором, m - размерностью вектора, каждый отдельный элемент набора - компонента вектора

Замечание

Модели, в которых используются наборы из 0 и 1:

1. Геометрическая интерпретация

Точкой в m -мерном пространстве является m -мерный вектор, каждая его компонента - одна из декартовых координат точки. Набор из 0 и 1, рассматриваемый как точка в пространстве, определяет вершину куба, построенного на ортах (единичных отрезках) координатных вероятностей

2. Логическая интерпретация

Операции над векторами выполняются покомпонентно, т.е. независимо над соотв. компонентами векторов-операндов

Пример

x	0	0	0	1	1
y	1	1	1	0	1
$x \wedge y$	0	0	0	0	1
$x \vee y$	1	1	1	1	1
$x \equiv y$	0	0	0	0	1
$x \neq y$	1	1	1	1	0

3. Двоичное представление (натуральные числа)

Число представляется в виде суммы степеней 2

4. Состояние памяти компьютера

5. Сообщение, передаваемое по каналу связи

6. Можно задавать подмножества мн-ва $1 : n$

3 Алгоритм перебора 0-1 векторов. Коды Грея

Опр

Код Грея — такое упорядочение k -ичных (обычно двоичных) векторов, что соседние вектора отличаются только в одном разряде

Алгоритм

it - номер итерации, k_{it} - номер обновляемой компоненты

x_4	x_3	x_2	x_1	it	k_{it}
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	2
0	0	1	1	2	1
0	0	1	0	3	3
0	1	1	0	4	1
0	1	1	1	5	2
0	1	0	1	6	1
0	1	0	0	7	4
...				...	

Суть алгоритма: зафиксируем нулевое значение у m -й компоненты и переберем все наборы длины $m - 1$ для ост. компонент. Перебрав их меняем значение m -й компоненты на 1 и перебираем набор длины $m - 1$ в обратном порядке

Замечание

Явная формула для проверки $G_i = i \oplus (\lfloor i/2 \rfloor)$

4 Перебор элементов прямого произведения множеств

ВНИМАНИЕ! ВЫ ВСТУПАЕТЕ НА ЗЕМЛЮ ТУПОГО ПЕРЕПИСЫВАНИЯ ИЗ ТУПОГО ПЕРЕПИСЫВАНИЯ!!!

$$M(1:k) = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$$

$$|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k| = \prod_{i \in 1:k} m_i, \text{ где } m_i = |M_i|$$

Пусть каждое M_i состоит из целых чисел от 0 до $m_i - 1$, тогда каждый элемент $M(1:k)$ - последовательность неотрицательных чисел r_1, \dots, r_k , причем $r_i < m_i$

$$\text{num}(r_1, \dots, r_k) = \sum_{i=0}^k r_i \cdot \left(\prod_{j=1}^{i-1} m_j \right) = r_1 + r_2 m_1 + \dots + r_k m_1 \cdot \dots \cdot m_{k-1}$$

5 Размещения, сочетания, перестановки без повторений

Опр

Перестановка из n без повторений - упорядоченный набор из n неповторяющихся элементов, каждый из которых берется из диапазона $1 : n$

$$|P_n| = n!$$

Опр

Размещение - упорядоченный набор из k неповторяющихся элементов из диапазона $1 : n$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-k+1)$$

Опр

Сочетание - набор из k неповторяющихся элементов из диапазона $1 : n$ (порядок не важен)

$$|C_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

6 Размещения, сочетания, перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями:

Последовательность длины n , составленных из k разных символов, i -ый из которых повторяется n_i раз ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$)

Пример (aabc)

Перестановки: $abac, baac, aabc, aacb, abca, baca, acba, acab, bcaa, cbaa, caba, caab$

Число перестановок с повторениями длины из k разных элементов взятых соответственно по n_1, \dots, n_k раз каждый обозначается

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

7 Два алгоритма перебора перестановок. Нумерация перестановок

$$|P_k| = k! = |T_k|$$

P_k - мн-во всех перестановок

T_k - произведение k любых таких множеств M_i , каждый из которых представляет собой мн-во чисел от 0 до $i - 1$

$$T_k = \{0\} \times \{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, k - 1\}$$

Построим взаимно однозначное соответствие между P_k и T_k . Возьмем перестановку (t_1, \dots, t_k) следующим образом: для любого $i \in 1 : k$ найдем число значений, меньше r_i среди r_{i+1}, \dots, r_k - это число мы и примем в качестве t_i

В соответствии с таким определением чисел t_i в мн-ве T_k будет соответственно ??? значения m_i не возраст., а убывающая до единицы

Пример (4, 8, 1, 5, 7, 2, 3, 6)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
r_i	4	8	1	5	7	2	3	6
t_i	3	6	0	2	3	0	0	0
m_i	8	7	6	5	4	3	2	1

По (t_1, \dots, t_k) легко восстановить исходную перестановку. Для этого меняя i от 1 до k нужно проверить мн-во значений S_i , которые могут быть в перестановке на i месте. Для $i = 1$ $S_1 = 1 : 8$, $t_1 = 3 \Rightarrow r_1 = 4$, далее $S_2 = 1 : 3 \cap 5 : 8$, $t_2 = 6 \Rightarrow r_2 = 8$. Если использовать это отображение при переборе, то перестановки будут перебираться в лексикографическом порядке

Опр

(r_1, \dots, r_k) предшествует (R_1, \dots, R_k) , если начала перестановок совпадают до индекса d , а дальше $r_d < R_d$

Утв

Из этого перестановки перебираются в лексикографическом порядке, можно вывести правило получения следующего:

1. В (r_1, \dots, r_k) найти наибольший суффикс (r_t, \dots, r_k) , в котором $r_t > \dots > r_k$ ($r_{i-1} < r_t$)

2. Выбрать (r_t, \dots, r_k) элемент следующий по величине после r_{t-1} , поставить после в возр. порядке

num	t_k				p_k			
0	0	0	0	0	1	2	3	4
1	0	0	1	0	1	2	4	3
2	0	1	0	0	1	3	2	4
3	0	1	1	0	1	3	4	2
4	0	2	0	0	1	4	2	3
5	0	2	1	0	1	4	3	2

Ещё один алгоритм

8 Задача о минимуме скалярного произведения

Пусть заданы числа x_1, \dots, x_m и y_1, \dots, y_m . Составим пары (x, y) , включив каждое x_i и y_i ровно в одну пару. Затем перемножим числа каждой пары и сложим полученное произведение. Требуется найти \min такое разбиение чисел на пары S

Теорема

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$$

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_n) \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$$

$$S = \sum_{i=1}^n x_i y_i \rightarrow \min$$

Док-во

Покажем, что если найдутся пары чисел (x_i, y_i) и (x_j, y_j) : $x_i < x_j$, $y_i < y_j$, то S можно уменьшить, заменив парами (x_i, y_j) и (x_j, y_i) . Действительно,

9 Числа Фибоначчи. Теорема о представлении

Опр

Последовательность чисел Фибоначчи F :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 1$$

Утв

$$\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} - \text{сходится}$$

Следствие

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = 1 + \frac{1}{\varphi} \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \end{aligned}$$

Лемма

При $n > 1$ выполнено $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$

Док-во

Лемма

При $k > 2$ выполнено:

$$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + \dots + F_1$$

$$F_{2k+1} = 1 + F_{2k} + F_{2k-2} + \dots + F_0$$

Док-во (по индукции)

$(k = 3)$:

$$F_6 = 8 = 5 + 2 + 1$$

$$F_7 = 13 = 1 + 8 + 3 + 1 + 0$$

$(k \rightarrow k + 1)$:

$$F_{2(k+1)} = F_{2k+2} = F_{2k} + 1 + F_{2k} = F_{2k+1} + F_{2k-1} + \dots + F_1 = ???$$

Теорема

Любое натуральное число можно однозначно представить в виде суммы чисел Фибоначчи

$$s = F_{i_0} + F_{i_1} + \dots + F_{i_r}, \text{ где } i_{k-1} + 1 < i_k, \quad k \in 1 : r \quad i_0 = 0$$

Док-во

Существование:

Пусть $j(s)$ - номер максимального числа Фибоначчи, не превосходящего s . Положим $s' = s - F_{j(s)}$. Из определения $j(s)$ следует, что $s' < F_{j(s)-1}$, иначе число Фибоначчи не было бы максимальным. Теперь мы получим искобое представление для s как представление s' , дополненное слагаемым $F_{j(s)}$

Единственность:

Пусть есть ещё одно представление $s = F_{j_0} + \dots + F_{j_q}$. Н.У.О. считаем, что $j_q < j(s)$. Если мы заменим F_{j_q} на $F_{j(q)-1}$, то правая часть разве что лишь увеличится. Аналогично заменим с возможным увеличением предпоследнее слагаемое на $F_{j(s)-3}$. ???

10 Перебор сочетаний. Нумерация сочетаний

Состояние вычислительного процесса. Массив (x_1, \dots, x_m) номеров, включенных в сочетание. Начальное состояние: принять $x_i = i \quad \forall i \in 1 : m$. Стандартный шаг: просматривать компоненты вектора x , начиная с x_m и искать первую компоненту, которую можно увеличить (нельзя $x_m = n$, $x_{m-1} = n - 1$ и т.д.). Если такой нет, то закончить процесс. В противном случае пусть k - наибольшее число, для которого $x_k < n - m + k$, тогда увеличить x на единицу, а для всех следующих за k -ый продолжаем, но ряд от значения x_k , т.е. $x_i = x_k + (i - k)$

num	Сочетание					k
1	1	2	3	4	5	5
2	1	2	3	4	6	5
3	1	2	3	4	7	5
4	1	2	3	5	6	4
5	1	2	3	5	7	5

Удобно использовать вектора из 0 и 1, чтобы перенумеровать. С каждым сочетанием из n по m можно связать вектор из n нулей и единиц. В крипрм единиц ровно m - числа, входящие в данное сочетание просто задают номера этих единиц

$$\text{num}(b[1 : n], m) = \begin{cases} \text{num}(b[1 : n], n) & b[n] = 0 \\ l_{n-1}^m + \text{num}(b[1 : n], m - 1) & b[n] = 1 \end{cases}$$

Пример

$$\begin{aligned} \text{num}((0, 1, 0, 1, 0, 0, 1), 3) &= \\ &= C_6^3 + \text{num}((0, 1, 0, 1, 0, 0), 2) = C_6^3 + C_3^2 + \text{num}((0, 1, 0), 1) = \\ &= C_6^3 + C_3^2 + \text{num}((0, 1), 1) = C_6^3 + C_3^2 + C_1^1 + \text{num}((0), 0) = 24 \end{aligned}$$

11 Бином Ньютона и его комбинаторное использование

Треугольник Паскаля (в узлах C_n^k):

					1						
$n = 0$					1	1					
$n = 1$					1	2	1				
$n = 2$					1	3	3	1			
$n = 3$					1	4	6	4	1		
$n = 4$					1	5	10	10	5	1	
$n = 5$					1	6	15	20	15	6	1
$n = 6$					0	1	2	3	4	5	6

Опр

Бином Ньютона: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

Лемма

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$

Док-во (по индукции)

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= a(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1} = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{1+(n-1)-k} = \\
 &= \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) a^k b^{n-k}
 \end{aligned}$$

Следствие

$$a = 1, \quad b = 1:$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

$$a = 1, \quad b = -1:$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k = 0$$

(благодаря $C_n^k = C_n^{n-k}$)

$$a = 1, \quad b = i:$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k i^k = (1+i)^n = (\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot e^{in \frac{\pi}{4}}$$

12 Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$
3. $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$

13 Основные определения теории вероятностей

14 Условные вероятности и формула Байеса

15 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Опр

Случайная величина - числовая функция $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ на вероятностном пр-ве.

hint: U - мн-во событий

Опр

$E(\alpha) = \sum_{u \in U} \alpha(u) \Pr(u)$ - мат. ожидание случайной величины α

$\Pr(u)$ - условная вероятность события u

Свойства

1. Если $\Pr(u) = 1 \Rightarrow E(\alpha) = \alpha(u)$
2. α, β - случ. вел. $E(\alpha + \beta) = E(\alpha) + E(\beta)$ (Линейность)
3. Если $\alpha = c\beta$, где $c = const$ $E(\alpha) = cE(\beta)$
4. $E(\alpha \cdot \beta) = E(\alpha) \cdot E(\beta)$ если α и β нез.

Док-во

$$\begin{aligned} \text{Линейность} \quad E(\alpha + \beta) &= \sum_{u \in U} (\alpha(u) + \beta(u)) \Pr(u) = \sum_{u \in U} \alpha(u) \Pr(u) + \\ &+ \sum_{u \in U} \beta(u) \Pr(u) = E(\alpha) + E(\beta) \end{aligned}$$

Опр

Мат. ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее мат. ожидания называется дисперсией этой случайно величины

$$D(\alpha) = E(\alpha - E(\alpha))^2$$

Дисперсия характеризует разброс случайной величины вокруг ее мат. ожидания

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= E(\alpha - E(\alpha))^2 = E(\alpha^2) - E(2\alpha E(\alpha)) + E(E^2(\alpha)) = \\ &= E(\alpha^2) - 2E(\alpha)E(E(\alpha)) + E^2(\alpha) = E(\alpha^2) - E^2(\alpha) \end{aligned}$$

Свойства (Дисперсии)

1. Дисперсия неотрицательна. Если $\Pr(u) = 1$, то $D(\alpha) = 0$
2. $\alpha = \beta + c, \quad c = const, \quad \Rightarrow D(\alpha) = D(\beta)$
3. $\alpha = c\beta, \quad c = const, \quad \Rightarrow D(\alpha) = c^2 D(\beta)$
4. α и β нез. с.в. $\Rightarrow D(\alpha + \beta) = D(\alpha) + D(\beta)$

Док-во

$$2) \quad \alpha = \beta + c$$

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \sum_{u \in U} \alpha(u) \Pr(u) = \sum_{u \in U} (\beta(u) + c) \Pr(u) = \sum_{u \in U} \beta(u) \Pr(u) + \sum_{u \in U} c \Pr(u) = \\ &= E(\beta) + c \end{aligned}$$

$$D(\alpha) = E(\alpha - E(\alpha))^2 = E(\beta + c - E(\beta) - c)^2 = D(\beta)$$

$$3) \quad D(\alpha) = E(c\beta - E(c\beta))^2 = E(c\beta - cE(\beta))^2 = c^2 E(\beta - E(\beta))^2 = c^2 D(\beta)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad D(\alpha + \beta) &= E(\alpha + \beta - E(\alpha + \beta))^2 = \\ &= E(\alpha - E(\alpha) + \beta - E(\beta))^2 = E(\alpha - E(\alpha))^2 + 2E((\alpha - E(\alpha))(\beta - E(\beta))) + \\ &+ E(\beta - E(\beta))^2 = D(\alpha) + D(\beta) + 2(E(\alpha\beta - \alpha E(\beta) - \beta E(\alpha) + E(\alpha)E(\beta))) = \\ &= D(\alpha) + D(\beta) + 2(E(\alpha\beta) - E(\alpha)E(\beta)) - E(\beta)E(\alpha) + E(\alpha)E(\beta) = D(\alpha) + D(\beta) \end{aligned}$$

16 Схема Бернулли

Задача

Стрелок делает 5 выстрелов, какова вероятность того, что он попадет не меньше 4 раз?

p - вероятность попасть в мишень

$$P_5(A) = P_5(4) + P_5(5) = P_5(4) + p^5$$

$$P_5(A) = C_5^4 \cdot p^4(1 - p) + p^5$$

hint: мы выбираем, когда стрелок промахнется из всех выстрелов

Опр

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} \quad \text{формула Бернулли}$$

n - число попыток m - удачных событий

17 Случайные числа. Схема Уолкера

18 Двоичный поиск и неравенство Крафта

19 Энтропия. 2 леммы

20 Теорема об энтропии

21 Операции над строками переменной длины

22 Поиск образца в строке (Карпа-Рабина, Бойера-Мура)

23 Суффиксное дерево

24 Задача о максимальном совпадении двух строк

25 Код Шеннона-Фано. Алгоритм Хаффмена. 3 леммы

26 Сжатие информации по методу Зива-Лемпеля

Опр (Алгоритм)

X - Входная фраза (некая строка, которую мы строим)

Точкой обозначена конкатенация

1. Занести все возможные символы в словарь. (им всем будет присвоен код)
2. Считаем один символ из сообщения и добавим его в X
3. Считаем символ Y, если это символ конца сообщения, то вернем код X (он уже лежит в словаре), иначе:
 - (a) Если X.Y уже есть в словаре, то присвоим $X = X.Y$, перейдем к шагу 2
 - (b) Иначе вернем код для X, добавим X.Y в словарь и присвоим входной фразе значение Y $X = Y$, перейдем к шагу 2

Пример

abrakadabra

$a - 1 \quad b - 2 \quad r - 3 \quad k - 4 \quad d - 5$

$ab - 6 \quad br - 7 \quad ra - 8 \quad ak - 9 \quad ka - 10$

$ad - 11 \quad ab - 12 \quad bra - 13$

Output: 1 2 3 1 4 1 5 1 7 1
 $\quad \quad \quad \underset{a}{1} \underset{b}{2} \underset{r}{3}$

27 Метод Барроуза-Уилера

28 Избыточное кодирование. Коды Хэмминга

29 Шифрование с открытым ключом

30 Сортировки (5 методов)

31 Информационный поиск и организация информации

32 Хеширование

33 AVL-деревья

Опр

AVL-дерево - сбалансированное по высоте двоичное дерево поиска, для каждой его вершины высота ее двух поддеревьев различается не более чем на 1

Теорема

AVL-дерево с n ключами имеет высоту

$$h = O(\log N)$$

Опр

Баланс вершины - разница между высотами ее поддеревьев

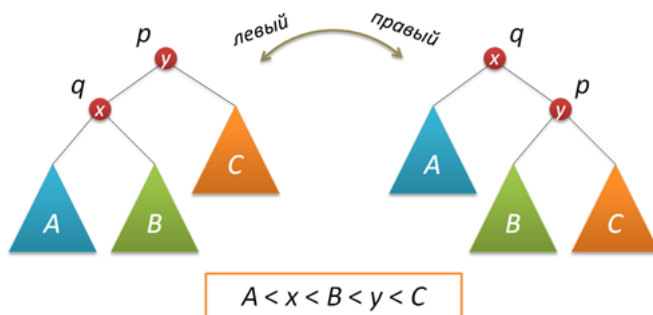
Опр (Балансировка)

Балансировка - операция, которая в случае разницы высот левого и правого поддеревьев $|h(L) - h(R)| = 2$, изменяет связи предок-потомок в поддереве данной вершины так, что разница становится ≤ 1 , иначе ничего не меняет.

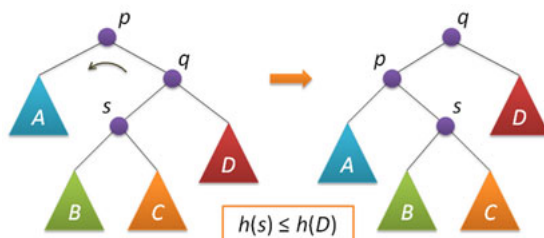
Восстановить баланс можно с помощью поворотов (всего их 4: левый простой, правый простой, левый большой, правый большой)

Простой поворот выполняется при условии $h(s) \leq h(D)$

Простой поворот вправо

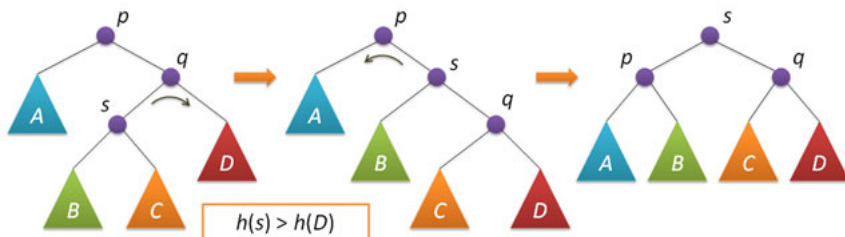


Применение простого поворота



Большой поворот выполняется при условии $h(s) > h(D)$ и сводится к двум простым поворотам

Большой поворот



hint: первым простым поворотом мы отменяем это условие

Опр (Добавление вершины)

Добавляем вершину как в бинарном дереве. Спускаемся вниз, как при поиске ключа t . Если мы стоим в вершине a и нам надо идти в поддерево, которого нет, то делаем ключ t листом, а вершину a его корнем. Далее поднимаемся вверх и пересчитываем баланс у вершин. Если мы поднялись в вершину i из левого поддерева, то баланс i -ой вершины увеличивается на 1, иначе уменьшается.

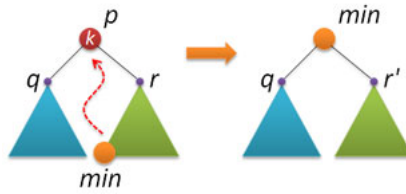
Если мы пришли в вершину и ее баланс = 0 после пересчета, то это значит, что высота поддерева с корнем в этой вершине не изменилась, можно остановить подъем.

Если баланс вершины после пересчета = -2 или 2 , то нам необходимо сбалансировать это поддерево.

Добавление работает за $O(\log n)$, т.к. мы рассмотрим не больше, чем $O(h)$ вершин

Опр (Удаление ключа)

1. найдем удаляемый ключ p в дереве (если не нашли, то ничего не делаем)
2. в правом его поддереве найдем наименьший элемент \min
3. поменяем местами p и \min
4. удалим p
5. сбалансируем все, что выше p



При удалении возможна ситуация, когда вершина r не имеет правого поддерева, тогда по св-ву АЛВ-дерева либо эта вершина имеет слева единственный дочерний узел, либо она является листом. В обоих случаях мы просто удаляем r и возвращаем указатель на левое поддерево.

35 Биномиальные кучи

36 Основные определения теории графов

37 Построение транзитивного замыкания

38 Обходы графа в ширину и глубину. Топологическая сортировка

40 Алгоритм поиска контура и построение диаграммы порядка

41 Теорема о связном подграфе

42 Деревья. Теорема о шести эквивалентных определениях дерева

43 Задача о кратчайшем остовном дереве. Алгоритм Прима

44 Алгоритм Краскала

45 Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры

47 Задача о кратчайшем дереве путей

48 Сетевой график и критические пути. Нахождение резервов работ

49 Задача о максимальном паросочетании в графе.
 Алгоритм построения

51 Алгоритм построения контролирующего множества

52 Задача о назначениях. Венгерский метод

53 Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ

54 Метод динамического программирования. Задача линейного раскроя

55 Приближенные методы решения дискретных задач.
 Жадные алгоритмы

**56 Алгоритмы с гарантированной оценкой точности.
 Алгоритм Эйлера**

**57 Жадные алгоритмы. Задача о системе различных
представителей**

62 ?Алгоритм Кристофидеса (возможно будет)