

---

ДЗ по алгебре №1, 3 сем  
(преподаватель Демченко О. В.)  
Записал Костин П.А.

Задача

На пространстве  $V = \{X \in M_{3,2}(\mathbb{R}) : cXd^T = 0\}$ , где  $c \in \mathbb{R}^3$  задан оператор:

$$LX = AXB + mX, \quad X \in V$$

где  $A \in M_3(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{R}$

1. Найти жорданов базис и жорданову матрицу  $L$
2. Для собственного вектора из жорданового базиса проверить непосредственно, что он является таковым
3. Найти  $L^{(n)}X_0$  для данных  $X_0 \in V$  и  $n \in \mathbb{N}$

Полезно воспользоваться тем, что  $L$  имеет только одно собственное число

Замечание (мои данные)

$$c = (-1, 1, 4) \quad d = (-2, 1) \quad m = -2 \quad n = 31$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Док-во

1. Найдем базис  $V$ :

$$\begin{aligned} Xd^T &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -x_{11} + x_{21} + 4 \cdot x_{31} & -x_{12} + x_{22} + 4 \cdot x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot x_{11} - 2 \cdot x_{21} - 8 \cdot x_{31} - x_{12} + x_{22} + 4 \cdot x_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Подставляем стандартный базис для уравнения  $Xd^T = 0$  для всех векторов кроме  $x_{12}$  (потому что так проще считать), чтобы выбрать свой базис в пространстве  $V$ :

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} = 1 \Rightarrow x_{12} = 2 \\ x_{21} = 1 \Rightarrow x_{12} = -2 \\ x_{31} = 1 \Rightarrow x_{12} = -8 \\ x_{22} = 1 \Rightarrow x_{12} = 1 \\ x_{32} = 1 \Rightarrow x_{12} = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Найдем координаты  $L(e_i)$  в  $\{e_i\}_{i \in 1:5}$ :

$$L(X) = AXB + mX = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2X$$

$$\begin{aligned} L(e_1) &= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(e_2) &= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -30 \\ -1 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -26 \\ -3 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(e_3) &= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 0 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(e_4) &= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(e_5) &= \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Составим матрицу  $[L]_{\{e\}}$

$$\Rightarrow [L]_{\{e\}} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Докажем, что  $\forall A, B \in M_n(R)$ , где  $R$  - комм. кольцо  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Док-во

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \quad \text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} a_{ji}$$

$$\text{Так как } a_{lm} b_{ml} = b_{ml} a_{lm} \Rightarrow \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(AB) \stackrel{\text{т.о. Ж.Ф.}}{=} \text{Tr}(C^{-1}JC) = \text{Tr}((C^{-1}J)C) = \text{Tr}(C(C^{-1}J)) = \text{Tr}(EJ) = \text{Tr}(J)$$

Т.к. по условию  $J$  имеет одно собственное число:

$$\text{Tr}([L]_{\{e\}}) = 5\lambda \Rightarrow 5\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -1$$

5. Найдем с.в., отвечающий с.ч.  $\lambda = -1$ :

$$[L]_{\{e\}} v = \lambda v \Rightarrow ([L]_{\{e\}} - \lambda E)v = 0 \quad \deg V = 5 \Rightarrow v^T = (a \quad b \quad c \quad d \quad e)$$

$$[L]_{\{e\}} - \lambda E = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -6 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 6b + 8c + 9d + 4e = 0 \\ -2b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3b + 2c + e \\ d = 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e = \begin{pmatrix} 3b + 2c + e \\ b \\ c \\ 2b \\ e \end{pmatrix}$$

- 
6. Найдем присоединенные вектора
  7. Ищем следующий
  8. Найдем следующий
  9. Построим жорданов базис
  10. Нужно ещё два...
  11. !!!