Билеты по мат. анализу, 2 сем

(преподаватель Кононова А. А.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Интегральные суммы Римана. Интегрируемость по Риману.

Опр

τ-разбиение на $[a;b]$:

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

Опр

Мелкость разбиения τ:

$$\lambda(\tau) = \max_{k=0...n-1} \Delta_k = x_{k+1} - x_k$$

Опр

Оснащение разбиения τ:

$$\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

Опр

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, тогда сумма Римана:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k$$

Опр

Интегралом Римана функции f по отрезку $[a,b]$ называется $I \in \mathbb{R}$:

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi\ |S(f, \tau, \xi) - I| < \mathcal{E}$$

то есть неформально

$$\lim_{\lambda(\tau) \to 0} S(f, \tau, \xi) = I$$

Опр

Будем говорить, что f интегрируема по Риману на $[a;b]$, если $\exists I$ - интеграл функции f по Риману на $[a,b]$. И записывать это как

$$f \in R[a,b],\ I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f$$

Пример

$$f(x) = C$$

Решение

$$\forall\tau\ \forall\xi\ S(f,\tau,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta_k=C\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k=C(b-a)$$

$$I=C(b-a)=\int\limits_a^b C dx$$

Пример

Функция Дирихле $\mathcal{D}(x)=\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ на отрезке $[0,1]$

Опр

$$A\subset\mathbb{R},\ \mathcal{X}_{\mathbb{A}}=\begin{cases}1, & \text{если } x\in A\\ 0, & \text{если } x\notin A\end{cases}$$

Решение

Пусть τ - произвольное разбиение.

$\xi^*=\{\xi_k^*\}:\xi_k^*\in\mathbb{Q}\cap[x_k,x_{k+1}]$ - рациональное оснащение

$\widetilde{\xi}=\{\widetilde{\xi}_k\}:\widetilde{\xi}_k\in[x_k,x_{k+1}]\setminus\mathbb{Q}$ - иррациональное оснащение

$$S(f,\tau,\xi^*)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{D}(\xi_k^*)\Delta_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k=b-a$$

$$S(f,\tau,\widetilde{\xi})=0$$

$\mathcal{D}\notin R[0,1]$. Док-во от противного, пусть это не так, тогда

$$\exists I:\ \forall\mathcal{E}>0\ \exists\delta>0:\forall\tau:\ \lambda(\tau)<\delta,\ \forall\xi\ |S(f,\tau,\xi)-I|<\mathcal{E}$$

Возьмём ξ^* и $\widetilde{\xi}$:

$$1=|S(f,\tau,\xi^*)-S(f,\tau,\widetilde{\xi})|\leqslant|S(f,\tau,\xi^*)-I|+|S(f,\tau,\widetilde{\xi})-I|\leqslant 2\mathcal{E}$$

Пример

$f(x)=\mathcal{X}_0,\ f\in R[-1,1]$

Решение

Покажем, что $I=0$. ξ_i на интервалах δ_i может max два раза попадать в 0. Пусть это будет при $k,\ k+1$. Тогда:

$$S(f,\tau,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta_i=\sum_{i=0,i\neq k,k+1}^{n-1}f(\xi_i)\Delta_i+f(\xi_k)\Delta_k+f(\xi_{k+1})\Delta_{k+1}=$$

$$=f(\xi_k)\Delta_k+f(\xi_{k+1})\Delta_{k+1}\leqslant\Delta_k+\Delta_{k+1}<2\lambda(\tau)\to 0$$

2 Интегрируемость по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.

Определение интегрируемости см. в первом билете.

Утв

Если $f \in R[a,b]$, то f - ограничена на $[a,b]$.

Док-во (от противного)

Пусть $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = +\infty$.
Для $\mathcal{E} = 1\ \exists\delta > 0 : \forall\tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall\xi\ |S(f,\tau,\xi) - I| < \mathcal{E}$.
Зафиксируем $\tau^* : \lambda(\tau^*) < \delta$:

$$\text{Так как } \sup_{[a,b]} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists k : \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = +\infty.$$

"отпустим ξ_k^*". $S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta_i = \sum\limits_{i \neq k}^{n-1} f(\xi_i)\Delta_i + f(\xi_k)\Delta_k$ (неограничена, выберем ξ_k так чтобы) $> \mathcal{E} + I$, Противоречие.

3 Суммы Дарбу, их свойства (связь с суммами Римана, поведение при измельчении).

Опр

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, τ-разбиение.
$M_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, тогда:

$S^*(f, \tau) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k$ - верхняя сумма Дарбу

$S_*(f, \tau) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k$ - нижняя сумма Дарбу

Опр

τ' называется измельчением τ ($\tau' \prec \tau$), если $\tau \subset \tau'$

Свойства

1. $\forall \xi$, f, τ - зафикс $\Rightarrow S_*(f, \tau) \leqslant S(f, \tau, \xi) \leqslant S^*(f, \tau)$
2. (a) $S^*(f, \tau) = \sup\limits_{\xi} S(f, \tau, \xi)$, (б) $S_*(f, \tau) = \inf\limits_{\xi} S(f, \tau, \xi)$
3. $S^*(f, \tau') \leqslant S^*(f, \tau)$, $S_*(f, \tau') \geqslant S_*(f, \tau)$
4. $\forall \tau_1, \tau_2 :\ S_*(\tau_1) \leqslant S^*(\tau_2)$

Док-во

1. Очевидно из определения
2. Докажем пункт (а). Нужно доказать, что:
$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \xi^*\ S(f, \tau, \xi^*) > S^*(f, \tau) - \mathcal{E}$$
$$M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} \Rightarrow \exists \xi_k^* : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\mathcal{E}}{b-a}$$
$$S(f, \tau, \xi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi^*)\Delta_k > \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \frac{\mathcal{E}}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = S^*(f, \tau) - \mathcal{E}$$
3. Пусть $\tau : x_0 < x_1 < ... < x_n$, добавим x':
$$\tau' : x_0 < x_1 < ... < x_k < x' < x_{k+1} < ... < x_n,$$
$$S^*(f,\tau) - S^*(f,\tau') = \underset{[x_k,x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1} - x_k) - \underset{[x_k,x']}{sup} f(x)(x' - x_k) - \underset{[x',x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1} - x') \geqslant$$
$$\geqslant \underset{[x_k,x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1} - x_k - x' + x_k - x_{k+1} + x') = 0, \Rightarrow S^*(f, \tau') \leqslant S^*(f, \tau)$$
4. Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ (произведение разбиений в обозначениях Кононовой), тогда $\tau \prec \tau_1, \tau_2$, значит
$$S_*(f, \tau_1) \leqslant S_*(f, \tau) \leqslant S^*(f, \tau) \leqslant S^*(f, \tau_2)$$

4 Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Критерий Римана (б/д).

Теорема (критерий Дарбу)

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

Док-во

($\Rightarrow$) Необходимость. $f \in R[a,b] \Rightarrow I \in \mathbb{R}$:

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi\ |S(f,\tau,\xi) - I| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$I - \frac{\mathcal{E}}{3} \leqslant S_*(f,\tau) \leqslant S(f,\tau,\xi) \leqslant S^*(f,\tau) \leqslant I + \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$0 \leqslant S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leqslant \frac{2\mathcal{E}}{3} < \mathcal{E}$$

($\Leftarrow$) Достаточность.

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta\ S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

$$I^* := \inf_{\tau} S^*(f,\tau),\ I_* := \sup_{\tau} S_*(f,\tau)$$

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E} \Rightarrow I^* = I_* = I$$

$$\forall \xi\ S_*(f,\tau) \leqslant S(f,\tau,\xi) \leqslant S^*(f,\tau) \Rightarrow |S(f,\tau,\xi) - I| < \mathcal{E}$$

Теорема (критерий Римана)

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \tau : S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

5 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции.

Опр

Колебание $f : E \to \mathbb{R}$ на $E \subset \mathbb{R}$, $\quad \omega(f, E) = \sup\limits_{x \in E} f(x) - \inf\limits_{x \in E} f(x)$,

$$d_k = [x_k, x_{k+1}],\ S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k$$

Теорема (критерий Дарбу, другая форма)

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k < \mathcal{E}$$

(неформально $\lim\limits_{\lambda(\tau) \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k = 0$)

Следствие (1)

$$C[a,b] \subset R[a,b]$$

Док-во

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равн. непр. на $[a,b]$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E$ справедливо $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \mathcal{E}$

$\Rightarrow \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \omega(f, d_k) < \mathcal{E}$, рассмотрим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k < \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \mathcal{E}(b-a)\widetilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \text{ по критерию Дарбу } f \in R[a,b]$$

Следствие (2)

f-ограничена и монотонна на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

Док-во

$$(f \nearrow)\ \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{f(b) - f(a)},\ \text{пусть } \lambda(\tau) < \delta$$

$$\sum_{k=0}^{k-1} \omega(f, d_k)\Delta_k \leqslant \delta \sum_{k=0}^{k-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \delta(f(b) - f(a)) = \mathcal{E}$$

6 Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.

Опр

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - кусочно-непрерывная функция, если:

$$f \in C([a, b] \setminus \{t_1, ..., t_n\}) \text{ и } t_1, ..., t_n \text{ - точки разрыва I рода}$$

Следствие (3)

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ - кусочно-непрерывная } \Rightarrow f \in R[a, b]$$

Док-во

Пусть $A = \{k \in \mathbb{N} | \exists j : t_j \in d_k\}$, $C = \omega(f, [a, b]) < \infty$
Если $k \notin A \Rightarrow f$ - непр. на $d_k \Rightarrow$ р/н $\Rightarrow \exists \delta_k$ из р/н. Причем $|A| \leqslant 2n$, потому что t_j могут попасть в max два соседниих промежутка.
Возьмём $\delta = \min\limits_{k \notin A} \delta_k$, если $\tau : \lambda(\tau) < \delta$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k = \sum_{k \in A} \omega(f, d_k)\Delta_k + \sum_{k \notin A} \omega(f, d_k)\Delta_k \leqslant 2nC\lambda_k + \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k <$$

$$< 2nC\lambda(\tau) + \mathcal{E}(b - a) < (\text{пусть } \widetilde{\delta} = \min(\delta, \tfrac{\mathcal{E}}{2nC}), \text{ тогда } \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta)$$

$$< \mathcal{E} + \mathcal{E}(b - a) = \mathcal{E}(1 + b - a)$$

7 Интегрируемость суммы, произведения, модуля.

Свойство (1)

$$f, g \in R[a,b] \Rightarrow f+g \in R[a,b]$$

Док-во

$$\omega(f+g, E) = \sup_E(f+g) - \inf_E(f+g) \leqslant \sup_E f + \sup_E g - \inf_E f - \inf_E g$$

$$\leqslant \omega(f,E) + \omega(g,E) \to 0 \underset{\text{кр. Дарбу}}{\Rightarrow} f+g \in R[a,b]$$

Свойство (2)

$$f \in R[a,b] \Rightarrow f^2 \in R[a,b]$$

Док-во

f - ограничено $\Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$

$$\omega(f^2, E) = \sup_E(f^2) - \inf_E(f^2) = \sup_{x_1,x_2\in E}(f^2(x_2) - f^2(x_1)) =$$

$$= \sup_{x_1,x_2\in E}(f(x_2)-f(x_1))(f(x_2)+f(x_1)) \leqslant 2M\omega(f,E) \to 0$$

Свойство (3)

$$f, g \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a,b]$$

Док-во

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow -f \in R[a,b]$

$$\Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in R[a,b]$$

Свойство (4)

$$f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$$

Док-во

$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| \xrightarrow{sup} \omega(|f|, E) \leqslant \omega(f,E) \to 0 \Rightarrow \in R[a,b]$

8 Интегрируемость функции и ее сужений.

Свойство (5)

$$f \in R[a,b],\ [c,d] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[c,d]$$

Док-во

$f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0:$

для всех τ' на $[c,d]$ расширенных до τ на $[a,b]$:

$$\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau'} \omega(f, d_k)\Delta_k \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau} \omega(f, d_k)\Delta_k \Rightarrow < \mathcal{E}$$

Свойство (6)

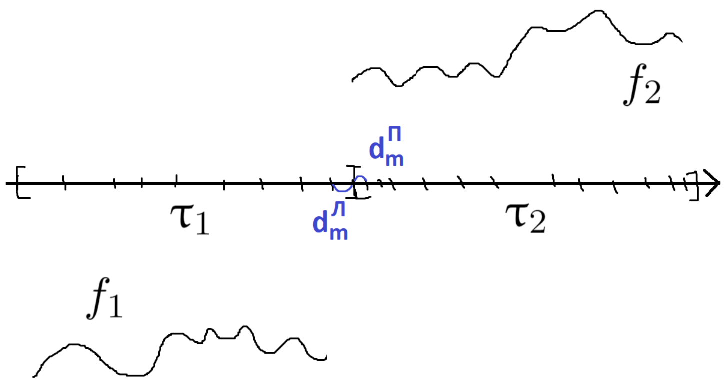
$$a < c < b \Rightarrow R[a,c] \cup R[c,b] \subset R[a,b]$$

Док-во

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta_1 > 0 \text{ на [a,c]} : \lambda(\tau_1) < \delta_1 \Rightarrow S^*(f_1, \tau_1) - S_*(f_1, \tau_1) < \mathcal{E}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ на [c,b]} : \lambda(\tau_2) < \delta_2 \Rightarrow S^*(f_2, \tau_2) - S_*(f_2, \tau_2) < \mathcal{E}$$

$$\text{Пусть } \delta = min(\delta_1, \delta_2),\ \tau = \tau_1 \cup \tau_2,\ \lambda(\tau_1) < \delta,\ \lambda(\tau_2) < \delta$$



Мог произойти разрыв, но $|f| \leqslant M \Rightarrow \omega(f, [a,b]) < W$

$$\sum \omega(f, d_k)\Delta_k = S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leqslant S^*(f,\tau_1) - S_*(f,\tau_1) + S^*(f,\tau_2) - S_*(f,\tau_2) +$$

$$+ d_m^Л \Delta_m^Л + d_m^П \Delta_m^П \leqslant (d_m = d_m^Л \cup d_m^П,\ \widetilde{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\mathcal{E}}{W}))2\mathcal{E} + W\widetilde{\delta} < 3\mathcal{E}$$

9 Свойства интеграла Римана (линейность; аддитивность; свойства, связанные с неравенствами).

Опр

Если $a < b$, то $\int\limits_b^a f = -\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^a = 0$

Свойство (1, линейность)

$$\forall f, g \in R[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_b^a (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_b^a f + \beta \int\limits_b^a g$$

Док-во

Знаем, что $\alpha f + \beta g \in R[a, b]$,

$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$ (очевидно из определения сумм Римана)

Свойство (2, аддитивность)

$$\forall f \in R[a, b],\ a < c < b \Rightarrow \int\limits_b^a f = \int\limits_c^a f + \int\limits_b^c f$$

Док-во

Очевидно (аналогично прошлому)

Свойство (3)

$$\forall f \in R[a, b],\ a < b,\ f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geqslant 0$$

Док-во

Очевидно из определения суммы Римана

Свойство (4)

$$\forall f, g \in R[a, b],\ g(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in [a, b], a < b \Rightarrow \int\limits_b^a g \leqslant \int\limits_b^a f$$

Док-во

Очевидно, если взять одно разбиение и оснащение

Свойство (5)

$$\forall f \in R[a,b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a,b], a < b \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int\limits_b^a f \leqslant M(b-a)$$

Док-во

С использованием предыдущего свойства взять интеграл

Свойство (6)

$$f \in R[a,b],\ m = \inf_{[a,b]} f,\ M = \sup_{[a,b]} f \Rightarrow \exists \mu \in [m,M] : \int\limits_b^a f = \mu(b-a)$$

Док-во

$$\mu = \frac{\int\limits_b^a f}{b-a} \in [m,M] \text{ (по предыдущему неравенству)}$$

Свойство (7)

$$f \in C[a,b], \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_b^a f = f(\xi)(b-a)$$

Док-во

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя предыдущее свойство

Свойство (8)

$$f \in R[a,b], \Rightarrow |\int\limits_b^a f| \leqslant \int\limits_b^a |f|$$

Док-во

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow -\int\limits_b^a |f| \leqslant \int\limits_b^a f \leqslant \int\limits_b^a |f| \Rightarrow |\int\limits_b^a f| \leqslant \int\limits_b^a |f|$$

10 Первая теорема о среднем. Следствие для непрерывных функций.

Теорема

$$f, g \in R[a,b],\ g \geqslant 0,\ m \leqslant f \leqslant M$$

$$\forall x \in [a,b] \Rightarrow \exists \mu \in [m,M] : \int\limits_b^a fg = \mu \int\limits_b^a g$$

Док-во

$$mg \leqslant fg \leqslant Mg \Rightarrow m \int\limits_b^a g \leqslant \int\limits_b^a fg \leqslant M \int\limits_b^a g$$

$$\frac{m \int_b^a g}{\int_b^a g} \leqslant \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leqslant \frac{M \int_b^a g}{\int_b^a g}$$

$$m \leqslant \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leqslant M$$

а) $\int\limits_b^a g = 0$, тогда μ - любое.

б) $\int\limits_b^a g \neq 0 \Rightarrow \mu := \frac{\int\limits_b^a fg}{\int\limits_b^a g} \in [m,M]$

Следствие

Если $f \in C[a,b],\ g \in R[a,b],\ g \geqslant 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_b^a fg = f(\xi) \int\limits_b^a g$

Док-во

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя неравенство из последнего доказательства для $m = \inf\limits_{[a,b]} f,\ M = \sup\limits_{[a,b]} f$

11 Формула Ньютона-Лейбница. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.

Опр

$$E \subset \mathbb{R}, \quad F : E \to \mathbb{R} \quad f : E \to \mathbb{R}$$

Тогда F называется первообразной f, если $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in E$

Утв

F_1, F_2 - первообразные f на E, тогда:

$$F(x_1) - F(x_2) = \text{const} \ \text{(т. Лагранжа)}$$

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)

$f \in R[a,b]$, F -первообразная f, тогда:

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

Док-во

$\forall \tau$ на $[a,b]$ по теореме Лагранжа:

$$\exists \xi_k \in [x_k, x_{x+1}] : \ F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta_k$$

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \xi \ |S(f,\tau,\xi) - I| < \mathcal{E}$
Возьмём оснащение ξ из теоремы Лагранжа:

$$S(f,\tau,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

Опр

$E \subset \mathbb{R}$, E - невырожденный промежуток,

$f : E \to \mathbb{R} \quad \forall \alpha, \beta \in E : \quad \alpha < \beta \quad f \in R[\alpha, \beta]$ для $a \in E$ (фиксированного)

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$$ - интеграл с переменным верхним пределом

$F : E \to \mathbb{R}$

Теорема

$f \in R[a,b],\ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, тогда:

1. $F \in C[a,b]$
2. (теорема Барроу) Если f - непр. в т. $x_0 \in [a,b]$, то $F'(x_0) = f(x_0)$

Док-во

$x \in [a,b],\ h : x+h \in [a,b]$

1) $F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f - \int\limits_a^{x} f = \int\limits_a^{x+h} f + \int\limits_x^{a} f = \int\limits_x^{x+h} f$

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |f| < M$, значит:

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \left| \int_x^{x+h} f \right| \leqslant \int_x^{x+h} |f| \leqslant M\,|h|$$

Кроме того, $\forall \mathcal{E} > 0,\ \delta = \frac{\mathcal{E}}{M}$ если $|h| < \delta \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| < \mathcal{E}$

2) Рассмотрим $\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = |\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} dt| =$

$= \frac{1}{|h|} | \int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt| \leqslant \frac{1}{|h|} | \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \mathcal{E} dt| = \mathcal{E}$

(при $|h| < \delta\ \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \mathcal{E}$)

Следствие

$$F \in C[a,b] \Rightarrow \exists F : F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$$

Пример

$f(x) = |x|,\ F(x) = \int\limits_0^x |t|dt = \begin{cases} \left.\dfrac{t^2}{2}\right|_0^x, & x \geqslant 0 \\ \\ -\left.\dfrac{t^2}{2}\right|_0^x, & x < 0 \end{cases}$

Пример

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$F(x) = |x|\ \forall x \neq 0$, видно что неверно для первообразной, но:

Опр

F - "почти первообразная", если:

1. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \setminus \{t_1, ... t_n\}$
2. $F \in C[a,b]$

Пример

Пример для "почти первообразной". Найти $\int\limits_0^2 f(x)$, для $f(x) = \max(1, x)$

$$F(t) \overset{?}{=} \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ \frac{t^2}{2}, & t \in [1,2] \end{cases}$$

Попробуем использовать Н-Л: $F(t)\big|_0^2 = F(2) - F(0) = 2$

Неверно, потому что это не первообразная и даже не "почти первообразная".

Поправим F(x):

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, & t \in [1,2] \end{cases}$$

Это уже "почти первообразная" можно применять Н-Л.

12 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Применение: формула Валлиса.

Теорема

$$F, G \text{ - первообразные } f, g \in R[a,b] \text{ на } [a,b], \text{ тогда } \int\limits_a^b Fg = FG|_a^b - \int\limits_a^b fG$$

$$\left(\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v\right)$$

Док-во

$$(FG)' = fG + Fg, \text{ по ф-ле Н-Л: } \int\limits_a^b (FG)' = FG|_a^b = \int\limits_a^b fG + |_a^b Fg$$

Пример

Если $I_m := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$, то:

$$I_m = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ - четное} \\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ - нечетное} \end{cases}$$

Док-во

$$I_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{m-1} x dx =$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(m-1)\sin^{m-2} x dx =$$

$$= (m-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{m-2} x - \sin^m x)dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m)$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2},\ I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1,\ I_2 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2},\ I_{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

Теорема **(Формула Валлиса)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2*2*4*4*...*(2n)(2n)}{1*3*3*5*5...(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}\ (\text{или } \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}(\tfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2=\pi)$$

Док-во

$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ верно $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\leqslant\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\leqslant\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\leqslant\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$A_n=\frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}\leqslant\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2}=B_n$$

$$B_n-A_n=\tfrac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2}-\tfrac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}=$$

$$=(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1})=(\frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n-1)!!})\frac{1}{(2n+1)(2n)}=$$

$$=A_n\frac{1}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}\to_{n\to\infty}0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n=\frac{\pi}{2}$$

13 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Теорема

$$f \in C^{n+1}([a,b]) \Rightarrow f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n(b,a),$$

$$\text{где } R_n(b,a) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

Замечание

$$f \in C^{n+1}([a,b]) \Rightarrow f^{(n+1)} \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]:$$

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int\limits_a^b (b-t)^n dt = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Док-во (по индукции)

1) $n = 0$

$f(b) = f(a) + \int\limits_a^b f'(t)dt$ - формула Н-Л

2) Инд. переход. Пусть для $n-1$ - доказано, $f \in C^{n-1}[a,b] \subset C^n[a,b]$, по инд. предположению:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_{n-1} (*)$$

$$R_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt = \begin{bmatrix} u = f^{(n)}(t) \\ dv = (b-t)^{n-1}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(-f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n}\Big|_a^b + \int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n}dt) =$$

$$= \frac{1}{(n)!}(f^{(n)}(a)(b-a)^n + \int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt) \text{ - подставить в } (*)$$

14 Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Вторая теорема о среднем.

Формулу интегрирования по частям см. в 12 билете.

Теорема (Бонне или вторая теорема о среднем)

$$f \in C[a,b],\ g \in C^1[a,b], g - \text{монотонна}$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b fg = g(a)\int\limits_a^\xi f + g(b)\int\limits_\xi^b f$$

Док-во

(для $g \nearrow$) $F(x) := \int\limits_a^x f \Rightarrow F' = f$

$$\int\limits_a^b fg = \int\limits_a^b F'g = Fg|_a^b - \int\limits_a^b Fg' = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int\limits_a^b Fg' =$$

$$(\text{т.к. } g \nearrow g \geqslant 0 \Rightarrow \text{по т. о среднем } \exists \xi \in [a,b] :)$$

$$= F(b)g(b) - g(a)F(a) - F(\xi)\int\limits_a^b g' = g(b)(F(b) - F(\xi)) + g(a)(F(\xi) - F(a))$$

15 Замена переменной в определенном интеграле (две формулировки, доказательство одной).

Теорема

$$\varphi \subset C^1[\alpha, \beta],\ f \in C(\varphi([\alpha, \beta])),\ \text{тогда} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

Док-во

$f \in C(\varphi([\alpha, \beta])) \Rightarrow \exists F : F' = f$

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi' \Rightarrow \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha)$$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

Теорема

$$f \in R[a, b],\ \varphi \in C^1[\alpha, \beta],\ \varphi \text{ - строго возрастает},$$

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,\ \text{тогда} \int\limits_{a}^{b} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

Пример

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx, \quad \varphi(t) = \cos t, \quad \varphi(\alpha) = 0,\ \varphi(\beta) = 1$$

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = (-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{4}$$

Напоминание (про ряды)

Опр

Числовой ряд из элементов $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ - это $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$

Опр

Частичная сумма ряда $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$

Опр

Говорят, что сумма ряда $S = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Замечание

$$\text{Ряд } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ сходится или расходится одновременно с рядом } \sum_{j=N}^{\infty} a_j$$

Теорема (необходимое условие сходимости)

$$\text{Если } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ - сходится, то } \lim_{j\to\infty} a_j = 0$$

Опр

Ряд Лейбница $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$, $a_j > 0$, где $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$, $a_j \searrow$

Теорема

Пусть $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ - ряд Лейбница, тогда:

1. Ряд Лейбница сходится
2. $S_{2n} \searrow$, $S_{2n-1} \nearrow$
3. $|S - S_n| < a_{n+1}$

Теорема

Критерий Коши для числовых последовательностей.
$\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - сх $\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists N : \forall m > n > N \ |S_m - S_n| < \mathcal{E}$

16 Признаки сравнения для положительных рядов.

Опр

Если $a_j \geqslant 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - положительный ряд

Теорема

Положительный ряд сходится $\Leftrightarrow S_n$ - ограничены

Следствие

Пусть $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, тогда:

1. $\sum b_j$ - сх $\Rightarrow \sum a_j$ - сх (первый признак сходимости)
2. $\sum a_j$ - расх $\Rightarrow \sum b_j$ - расх (первый признак сравнения)

Следствие

$$a_k \geqslant 0,\ b_k \geqslant 0,\ \exists c, d > 0\ \exists N : \forall n > N\ 0 < c \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant d \leqslant \infty$$

Тогда $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сх. или расх. одновременно

Док-во

(т.е. $\sum a_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum b_k$ - сх)

($\Leftarrow$) $0 \leqslant a_n \leqslant db_n$ т.к. db_n - сх $\Rightarrow a_n$ - сх

($\Rightarrow$) $0 \leqslant cb_n \leqslant a_n$ т.к. a_n - сх $\Rightarrow cb_n$ - сх $\Rightarrow b_n$ - сх

Следствие (второй признак сравнения)

Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$, тогда если

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, то $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сх или расх одновременно

Док-во

Возьмём $\mathcal{E} := \frac{L}{2} \Rightarrow \exists N : \forall n > N\ \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2} \Rightarrow$

$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} < +\infty \Rightarrow$ по предыдущему следствию верно

17 Признаки Даламбера и Коши для положительных рядов.

<u>Теорема</u> (радикальный признак Коши для положительных рядов)

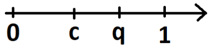
$a_k \geqslant 0$, $c := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k}$

Если $c < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $c > 1$, то $\sum a_k$ - расх

<u>Док-во</u>

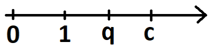
а) $0 \leqslant c < 1$



$q := \frac{c+1}{2}$, $c < q < 1$, по характеристике $\overline{\lim}$: $\exists N : \forall n > N \;\; \sqrt[n]{a_n} < q$

т.к. $0 \leqslant a_n < q^n$ и $\sum q^n$ - сх $\Rightarrow \sum a_n$ - сх

б) $c > 1$



$q := \frac{c+1}{2}$, $1 < q < c$, по характеристике $\overline{\lim}$: $\forall N : \exists n > N \;\; \sqrt[n]{a_n} > q$

т.е. $\exists$ бесконечное мн-во $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q$, $a_{n_k} > q^{n_k} > 1$

$\Rightarrow \lim a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расх

<u>Теорема</u> (признак Даламбера сходимости положительных рядов)

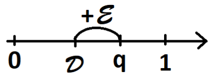
$a_k \geqslant 0$, $\mathcal{D} := \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

Если $\mathcal{D} < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $\mathcal{D} > 1$, то $\sum a_k$ - расх

<u>Док-во</u>

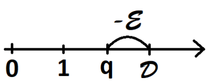
а) $\mathcal{D} < 1$, $q := \frac{\mathcal{D}+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{1-\mathcal{D}}{2}$



$\exists N : \forall k > N \;\; \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E} = q$ - геом пр. $q < 1$

$a_{k+1} < q a_k < q^2 a_{k-1} < \ldots < q^{k-N+1} a_N$, $\sum q^{k-N+1} a_k$ - сх $\Rightarrow \sum a_{k+1}$ - сх по первому пр. сходимости

б) $\mathcal{D} < 1$, $q := \frac{\mathcal{D}+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{\mathcal{D}-1}{2}$



$\exists N : \forall k > N \ q = \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E}, \ q > 1$

$a_{k+1} > qa_k > q^2 a_{k-1} > ... > q^{k-N+1} a_N$, $\sum q^{k-N+1} a_N$ - расх $\Rightarrow \sum a_{k+1}$ - расх по первому пр. сравнения

18 Абсолютная и условная сходимость рядов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

Опр

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - сх абсолютно, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх

Опр

Ряд сходится условно если сходится, но не абсолютно

Теорема

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится

Док-во

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх, по критерию Коши $\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists N : \forall m > n > N :$

$$||a_{n+1}| + ... + |a_m|| < \mathcal{E}, \text{ по неравенству треугольника:}$$

$$|a_{n+1} + ... + a_m| < \mathcal{E} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ - сх.}$$

19 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Определения см. в предыдущем билете.

Ряд не сходится абсолютно, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расх. ряд, т.к.:

Теорема **(критерий Коши сходимости последовательности)**

x_n - сх $\Leftrightarrow$ x_n - сх в себе.

Покажем, что для $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ $\exists \mathcal{E} > 0 : \forall N\ \exists m, n \geqslant N : |x_m - x_n| > \mathcal{E}$:

$$\text{Возьмём } \mathcal{E} = \frac{1}{4}\ \text{n}\ = N,\ m = 2N :$$

$$|S_{2N} - S_N| = \left|\frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{2N}\right| > N\frac{1}{2N} = \frac{1}{2} > \mathcal{E}$$

Но ряд сходится (значит условно сходится) по признаку Лейбница (или это можно показать прямо, доказав что $S_{2n} \nearrow$ и ограничена сверху единицей, а $S_{2n+1} = S_{2n}$ в пределе)

20 Перестановка абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана (б/д).

Опр

Пусть есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и биективная функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ называется перестановкой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Теорема (Римана v1)

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится, тогда:

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum a_{\varphi(k)} = S$$

Опр

$a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$, $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$

Теорема (Дирихле, о перестановке абсолютно сходящегося ряда)

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сх абсолютно, то

$\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где φ - биекция $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$

Док-во

а) Пусть $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх $\Leftrightarrow$ все частичные суммы ограничены, $S_n \leqslant S\ \forall n \in \mathbb{N}$

Частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$ обозначим перестановками ряда $T_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$

Пусть $m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n)\}$

$T_n \leqslant S_m := \sum\limits_{n=1}^{m} a_{\varphi(a_n)} \leqslant S \Rightarrow T_n \nearrow$ - огр $\Leftrightarrow$ ряд $T := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$ сходится.

Предельный переход даёт $T \leqslant S$, но так как S - тоже перестаовка $T \Rightarrow S \leqslant T$

Значит $S = T$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$

б) Общий случай, $a_k \in \mathbb{R}$

$a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^- \Rightarrow a_k^+ = \frac{a_k + |a_k|}{2}$, $a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}$

т.к. $\sum a_k$ - сх абсолютно $\Rightarrow \sum |a_k|$ - сх

$\Rightarrow \sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ - сх (причем абсолютно)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{\varphi(k)}^+ - a_{\varphi(k)}^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^- = \text{ (п. а) } \sum_{k=0}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Теорема **(Римана v2)**

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится. Тогда $\sum a_n^+ - \sum a_n^- = +\infty$

Док-во

Можно доказать одну из теорем

21 Асимптотика частичных сумм расходящегося ряда (случай гармонического ряда). Постоянная Эйлера.

$$\frac{1}{1+k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} < \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 < \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Значит,

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\big) < \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\big) =$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - ... + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n-1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow S_n := \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\big) \nearrow \text{ и ограничено сверху} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = -\ln 1 + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 3} - ... - \cancel{\ln(n)} + \ln(n+1) =$$

$$= \ln(n+1) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$$

Опр

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n) = 0,5722... \text{ - постоянная Эйлера}$$

22 Несобственные интегралы. Примеры. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов.

Опр (1)

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R},\ f \in R[a, b]\ \forall b \in (a, +\infty).$

Если $\exists \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f$, то говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f \text{ - сходится и равен } \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f$$

Опр (2)

$f : [a, \omega) \to \mathbb{R},\ -\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $f \in R[a, b]\ \forall b \in (a, +\infty).$

Если $\exists \lim\limits_{b\to\omega_-} \int\limits_a^b f$, то говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f \text{ - сх и равен } \lim_{b\to\omega_-} \int\limits_a^b f$$

Опр (3)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\forall a < b \in \mathbb{R} : f \in R[a, b]$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f := \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f + \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b f,$

Если оба предела $\exists$ и конечны, то говорят что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f$ - сходится

Опр (4)

Аналогично $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}$, если $f \in R[a, b]\ \forall [a, b] \subset (\omega_1, \omega_2)$. $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f = \int\limits_{\omega_1}^{c} f + \int\limits_{c}^{\omega_2}$

Пример

1. $\alpha = 1,\ \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = +\infty$ - расх

2. $\alpha > 1,\ \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = 0 - \dfrac{1}{1-\alpha}$ - сх

3. $\alpha < 1,\ \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ - расх

Пример

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0_-} \int\limits_{-1}^{a} \frac{dx}{x} + \lim_{b\to 0_+} \int\limits_{b}^{1} \frac{dx}{x} \text{ - расх по опр, т.к. оба предела расх}$$

Опр

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ и } \forall a<b\in\mathbb{R}: f\in R[a,b], \text{ тогда (V.P.) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f$$

Пример

$$(V.P.) \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x = \lim_{A\to+\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-A}^{A} = 0$$

$$(\text{Но } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x \text{ - расх})$$

Теорема (критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов)

$$f:[a,\omega)\to\mathbb{R},\quad -\infty<a<\omega\leqslant+\infty,\quad f\in R[a,b]\quad \forall b\in(a,+\infty), \text{ тогда:}$$

$$\int\limits_{a}^{\omega} f \text{ - сх } \Leftrightarrow \quad \forall\mathcal{E}>0\ \exists B\in(a,\omega): \forall b_1,b_2\in(B,\omega)\ |\int\limits_{b_1}^{b_2}| < \mathcal{E}$$

Док-во

$$\int\limits_{a}^{\omega} f \text{ - сх} \Leftrightarrow \exists \lim_{b\to\omega}\int\limits_{a}^{b} f \Leftrightarrow \text{(кр Коши для пределов ф.)}$$

$$\forall\mathcal{E}>0\ \exists\delta>0: \forall b_1,b_2\in(\omega-\delta,\omega)\ |\int\limits_{a}^{b_1} f - \int\limits_{a}^{b_2} f| < \mathcal{E} \Rightarrow |\int\limits_{b_1}^{b_2} f| < \mathcal{E}$$

23 Свойства несобственных интегралов (линейность, аддитивность, монотонность, формула Ньютона-Лейбница).

Свойство (1, линейность)

$$\int\limits_a^{\omega} f_1, \int\limits_a^{\omega} f_2 \text{ - сх } \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \int\limits_a^{\omega}(k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 \int\limits_a^{\omega} f_1 + k_2 \int\limits_a^{\omega} f_2$$

Свойство (2, монотонность)

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f, g \in R[a, b], \quad \forall b \subset [a, \omega), \quad f(x) \leqslant g(x),$$

$$\forall x \in [a, \omega) \Rightarrow \int\limits_a^{\omega} f \leqslant \int\limits_a^{\omega} g$$

Лемма

$$f : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b], \ \forall b \in (a, \omega).$$

Пусть $c \in (a, \omega)$, тогда $\int\limits_a^{\omega} f$ и $\int\limits_c^{\omega} f$ - сх или расх одновременно

Док-во

$$\int\limits_a^{\omega} f \text{ - сх} \Leftrightarrow \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b f = A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \int\limits_c^{\omega} f = \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_c^b f = \lim_{b \to \omega_-} (\int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f) = A - \int\limits_a^c f \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_c^{\omega} f \text{ - сх}$$

Свойство (3, аддитивность)

$$f : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b] \ \forall b \subset [a, \omega)$$

$$\forall c \in [a, \omega) \Rightarrow \int\limits_a^{\omega} f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^{\omega} f, \text{ причем } \int\limits_a^{\omega} f \text{ и } \int\limits_c^{\omega} f \text{ - сх или расх одновременно}$$

Свойство (4, формула Н-Л)

Если F - первообразная f, то:

$$\int\limits_a^{\omega} f = \lim_{b \to \omega_-} (F(b) - F(a)) =: F\Big|_a^{\omega_-} = F(\omega_-) - F(a)$$

<u>Свойство</u> (5)

$$\text{Если } f \in R[a, \omega] \ (\omega \in \mathbb{R}), \text{ то (несоб. инт)} \int\limits_a^\omega f = \int\limits_a^\omega f \text{(инт Римана)}$$

<u>Док-во</u>

$f \in R[a, \omega] \Rightarrow F(x) := \int\limits_a^x f \in C[a, \omega]$,

(несоб. инт) $\int\limits_a^\omega f = \lim\limits_{b \to \omega} \int\limits_a^b f (= F(b)$ (непр. в т ω)) $= F(\omega) = \int\limits_a^\omega f$ (инт Римана)

24 Свойства несобственных интегралов (интегрирование по частям, замена переменной).

<u>Свойство</u> (интегрирование по частям)

Пусть $f, g \in C^1[a, \omega), \quad \exists \lim\limits_{x \to \omega_-} f(x)g(x) \in \mathbb{R},$ тогда:

$\int\limits_a^\omega f'g$ и $\int\limits_a^\omega fg'$ - сх или расх одновременно, причем

$$\int\limits_a^\omega fg' = fg|_a^\omega - \int\limits_a^\omega f'g (fg|_a^\omega = \lim_{x \to \omega_-}(f(x)g(x) - f(a)g(a))$$

<u>Свойство</u> (замена переменной)

Если $\int\limits_a^\omega f$ - сх, $\quad \varphi : [\alpha, \upsilon) \to [a, \omega), \quad \varphi \in C^1[\alpha, \upsilon), \quad \varphi$ - монот.,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \to \upsilon} \varphi(t) = \omega, \text{ тогда } \int\limits_a^\omega f = \int\limits_\alpha^\upsilon (f \circ \varphi)\varphi'$$

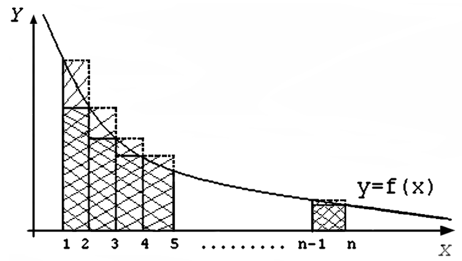
25 Интегральный признак Коши сходимости несобственных интегралов и рядов.

Теорема

Пусть $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f \in R[1, A]$ $\forall A > 1$, f - строго убывает (можно строго возрастает)

Тогда $\int\limits_1^\infty f$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n)$ - сх или расх одновременно, причем

$$\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \leqslant \int_1^\infty f \leqslant \sum_{n=1}^\infty f(n)$$



Лемма

Если $f > 0$, $f \in [a, \omega] \to [0, +\infty)$, $f \in R[a, b]$ $\forall b \in (a, \omega)$

Тогда $\int\limits_a^\omega f$ - сх $\Leftrightarrow F(x) = \int\limits_a^x f$, $\exists M < \infty : F(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, \omega)$

Док-во

($\Rightarrow$) очевидно

($\Leftarrow$) почти очевидно, $f \geqslant 0 \Rightarrow F \nearrow$ и огр $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to\omega} F(x) = \int\limits_a^\omega f < +\infty$

Док-во

$f(n+1) \leqslant \int\limits_n^{n+1} f \leqslant f(n)$ (видно через суммы Дарбу) $\mid \sum\limits_{n=1}^N$

$\sum\limits_{n=1}^N f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{N+1} f \leqslant \sum\limits_{n=1}^N f(n)$, при $N \to +\infty$ получим наше уравнение

1) Если $\sum\limits_1^\infty f(n)$ - сх $\Leftrightarrow \sum\limits_1^N f(n) \leqslant A \in \mathbb{R} \Rightarrow F(N+1) = \int\limits_1^{N+1} f \leqslant A \in \mathbb{R}$ сх

2) Если $\int\limits_1^\infty f$ - сх $\Rightarrow \sum\limits_1^N f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{N+1} f \leqslant \int\limits_1^\infty f \in \mathbb{R}$ - огр $\Rightarrow \sum\limits_1^N f(n+1)$ сх

Примеры

1. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 0 - (-1)$ - сх

2. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$. Сх. при $\alpha > 1$, расх. при $\alpha \leqslant 1$ (аналогично интегралу $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$)

26 Признаки сравнения для несобственных интегралов.

Теорема (I признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f, g \geqslant 0, \quad f, g \in R[a, b], \quad b \in (a, \omega),$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, \omega)$$

Тогда $\int\limits_a^\infty g$ - сх $\Rightarrow \int\limits_a^\omega f$ - сх ($\int\limits_a^\omega f$ - расх $\Rightarrow \int\limits_a^\infty g$ - расх)

Док-во

$$F(b) := \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g \leqslant \int\limits_a^\omega g \in \mathbb{R}$$

То есть $\int\limits_a^\omega f$ - сх, т.к. $F \nearrow$ и огр сверху на $[a, \omega)$

Теорема (II признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \to (0, +\infty),\ f, g \in R[a, b]\ \forall b \in (a, \omega)$$

Тогда если $\exists \lim\limits_{x \to \omega_-} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, то $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ - сх или расх одновременно

Док-во

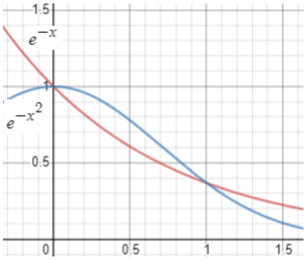
$$k := \lim_{x \to \omega_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty),\ \mathcal{E} := \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \exists b \in (a, \omega) : \forall x \in (b, \omega)\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} < \frac{f(x)}{g(x)} < 3\mathcal{E}$$

То есть с некоторого места $f(x) \leqslant g(x)$, а так как $\int\limits_a^\omega = \int\limits_a^b + \int\limits_b^\omega$ и $\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ - конечные числа, то $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ - сх или расх одновременно по первому признаку

Пример

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$$



$$e^{-x^2} \geqslant e^{-x} \Rightarrow x \in [0,1], \quad \int\limits_0^1 e^{-x} = \frac{1}{e} \underset{\text{по I пр. ср.}}{\Rightarrow} \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} \text{ - сх}$$

Пример

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0,+\infty) \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx \text{ и } \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ - сх или расх одновр} \Rightarrow \text{сх}$$

27 Абсолютная и условная сходимость интегралов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

Опр

$f : [a, \omega) \to \mathbb{R},\ f \in R[a,b]\ \forall b \in (a,\omega)$

$\int\limits_a^\omega f$ - сх абсолютно $\Leftrightarrow \int\limits_a^\omega |f|$ - сх

$\int\limits_a^\omega f$ - сх условно $\Leftrightarrow \int\limits_a^\omega f$ - сх, $\int\limits_a^\omega |f|$ - расх

Утв

$\int\limits_a^\omega f$ - сх абсолютно $\Rightarrow$ сходится

Док-во

Пусть $\int\limits_a^\omega |f|$ - сх $\Leftrightarrow$ (кр. Больцано-Коши) $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists A \in (a,\omega) : \forall b_1, b_2 \in (A,\omega)$

$|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f|| < \mathcal{E} \Rightarrow$ т.к. $|\int\limits_{b_1}^{b_2} f| \leqslant |\int\limits_{b_1}^{b_2} |f|| < \mathcal{E}$, то по кр. Б-К $\int\limits_{b_1}^{b_2} f$ - сх

Пример

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3)dx = \begin{vmatrix} x^3 = t \\ x = \sqrt[3]{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty} \cos t \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{\sin t}{t^{\frac{2}{3}}}\Big|_0^\infty + \frac{2}{9}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{9}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}}$$

Исследуем $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} + \int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}$:

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}$, $|sint| \leqslant t$ на $[0,1]$

$$\int\limits_0^1 \frac{t}{t^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}} = 3t^{\frac{1}{3}}|_0^1 = 3 \text{ - сх } \underset{\text{по I пр ср}}{\Rightarrow} \int\limits_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \text{ - сх}$$

б) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}, \quad \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}}$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} = -\frac{3}{2}t^{-\frac{2}{3}}|_1^\infty = \frac{3}{2} \text{ - сх } \underset{\text{по I пр ср}}{\Rightarrow} \int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \text{ - сх}$$

Значит $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}}$ - абс сх $\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3)$ - сх

28 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$

Определения и теорему см. в билете 27

Пример

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}$$

1) $$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\infty - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}$$

Исследуем $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}$ на абс сходимость. $\frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{1}{x^2}$ - сходится

$\Rightarrow$ по 1 признаку сравнения $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}$ - сх $\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}$ - сх абс $\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}$ - сх

2) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}$$

Знаем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$. Кроме того, $\frac{|\sin x|}{x} < 1$, значит на конечном промежутке $(0, \frac{\pi}{2}]$ интеграл конечный $\Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ - сх

3) Покажем, что $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\sin x|}{x}$ - расх. $\Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}$ - расх

$$|\sin x| \geqslant |\sin^2 x|, \quad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin^2 x}{x} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dx}{x}(\text{расх}) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos 2x}{x}(\text{сх})$$

29 Признаки Дирихле и Абеля для несобственных интегралов (док-во одного из них).

Теорема **(признак Абеля-Дирихле)**

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in C[a, \omega), \quad g \in C^1[a, \omega), \text{ g - монотонна.}$$

Тогда если выполнено одно из условий:

(А) $\displaystyle\int_a^\omega$ f - сх, g - огр

(Д) $F(x) := \displaystyle\int\limits_a^x$ f - огр, $g(x) \underset{x \to \omega_-}{\to} 0$

Тогда $\int\limits_a^\omega fg$ - сх

Док-во

(Д) без теоремы Бонне

$$|F(x)| \leqslant C : g(x) \underset{x \to \omega_-}{\to} 0$$

$$\lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b fg = \lim_{b \to \omega_-} (Fg|_a^b - \int\limits_a^b Fg') = F(a)g(a) - \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b Fg'$$

Исследуем интеграл на абс сходимость.

$$\int\limits_a^b |Fg'| \leqslant C \int\limits_a^b |g'| = (\text{т.к. g - монотонна}) C| \int\limits_a^b g'| = C|g(b) - g(a)| \underset{b \to \omega_-}{\to} C|g(a)|$$

Таким образом инт. ограничен $\Rightarrow$ изначальный сходится

30 Признаки Дирихле и Абеля для рядов (док-во одного из них).

Опр

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ A_0 = 0$

Теорема **(преобразование Абеля)**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Док-во

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Теорема **(признак Дирихле для рядов)**

Пусть A_n - огр., $b_k \to 0$, b_k - монотонно. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх

Док-во

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ - сх $\Leftrightarrow$ все частичные суммы огр

$\sum\limits_{k=1}^{N} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leqslant M \sum\limits_{k=1}^{N} |b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - b_{N+1}| \leqslant 2M|b_1| \Rightarrow$ исх ряд сх

Теорема **(признак Абеля для рядов)**

Пусть A_n - сх. b_k - монотонно, b_k - огр. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх

31 Применение интеграла Римана для вычисления площадей и объемов. Примеры.

Опр (школьное)

Пусть $P \in \mathbb{R}^2$("фигрура"), $\mathcal{P}$ - некоторый набор плоских "фигур", $P_i \in \mathcal{P}$
$g : \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ - называется площадью, если:

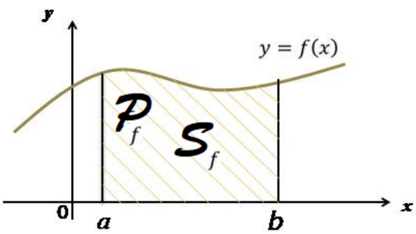
1. $\forall P \in \mathcal{P},\ S(P) \geqslant 0$
2. $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

Опр

$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняет расстояние

3. $\forall P \in \mathcal{P}$ τ-движения $S(\tau(P)) = S(P)$

Площадь криволинейной трапеции.



Опр

Подграфиком $f \in R[a, b]$ называется $P_f := \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Возьмём разбиение и верх. и нижн. суммы Дарбу. S - монотонна, т.е.

$$P_1 \subset P_2 \Rightarrow S(P_1) \leqslant S(P_2),\ S_*(\tau) = S(P_*(\tau)),\ S^*(\tau) = S(P^*(\tau))$$

$$P_*(f, \tau) \subset P(f) \subset R^*(f, \tau)$$

$$S(P_*(f, \tau)) = S_*(f, \tau) \to \int_a^b f,\ S(P^*(f, \tau)) = S^*(f, \tau) \to \int_a^b f,\ S(P_f) := \int_a^b f$$

Пример

Первая четверть эллипса с радиусами (a, b).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad S=\int\limits_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$ - сложно, перейдём в поляры

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

$$\int\limits_0^a f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t d(a\cos t)=ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt=-ab(t-\frac{\sin 2t}{2})|_{\frac{\pi}{2}}^0=0-(-\frac{\pi ab}{4})=\frac{\pi ab}{4}$$

Вычисление объемов

Утв

Принцип Кавальери. Если у двух тел одни сечения на одном уровне, то их объемы равны.

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} S(\xi_k)\Delta_k$ - сумма Римана

$V = \int\limits_a^b S(x)dx$ - измельчаем плоскости

Пример

(на самом деле тела вращения можно считать как $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$)

32 Путь. Длина пути. Спрямляемый путь. Аддитивность длины пути.

Опр

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \quad \gamma_k : [a,b] \to \mathbb{R}$. Расстояние считается как $d(x,y) = ||x-y||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$, γ - путь, если $\forall i \in \{1, ...k\}\ \gamma_i \in C[a,b]$

Опр

Путь называется r-гладким, если $\forall i \in \{1, ...k\}\ \gamma_i \in C^r[a,b]$

Опр

Два пути считаются эквивалентными если можно сделать замену переменной.
Т.е. пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, тогда:
$\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow \exists \varphi : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ - строго возрастающая, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi$

Опр

Кривая - класс эквивалентности путей. $\forall$путь - представитель класса эквивалентности называется "параметризацией"

Пример

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = \sin t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t^2 & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = \sin t^2 & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, определяют одну и ту же кривую (окружность)

Опр

Кривая называется r-гладкой, если у неё есть r-гладкая параметризация

Опр

γ - простой путь $\Leftrightarrow \gamma$ - биекция на (a,b), т.е. $\forall t_1, t_2 \in (a,b) : \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (без самопересечений).
Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ - замкнутый путь.

Опр (длины пути)

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\tau - [a,b] : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Соединим $[\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})]$ отрезками - получим вписанную ломанную.

$$\text{Длина } k\text{-ого звена: } \sqrt{\sum_{j=0}^{m} (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$$

Тогда длина вписанной ломанной: $l = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$

Длиной пути назовём $S_\gamma := \sup\limits_\tau l_\tau$ - всевозможных ломанных

Опр

Путь называется спрямляемым, если $S_\gamma < +\infty$

Утв

Аддитивность длины пути. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, пусть γ_1 - сужение γ на $[a, c]$, γ_2 - сужение γ на $[c, b]$. Тогда $S_\gamma = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Док-во

а) $S_\gamma \geqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?
Пусть τ_1 - разбиение $[a, c]$, τ_2 - разбиение $[c, b]$,
$\tau = \tau_1 + \tau_2$, $l_{\tau_1} + l_{\tau_2} = l_\tau \leqslant S_\gamma$
(т.к. $S_\gamma - \sup$)
Возьмём sup по всем разбиениям отрезка $[a, c]$
$\Rightarrow \sup\limits_{\tau_1}(l_{\tau_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + l_{\tau_2} \leqslant S_\gamma$
Теперь sup по всем разбиениям отрезка $[c, b]$
$\Rightarrow \sup\limits_{\tau_1}(S_{\gamma_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2} \leqslant S_\gamma$

б) $S_\gamma \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?
Пусть τ - разбиение $[a, b]$.
Пусть $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. $l_\tau \leqslant l_{\tau^*}$, $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$,
где τ_1 - разбиение $[a, c]$, τ_2 - разбиение $[c, b]$.
$l_\tau \leqslant l_{\tau^*} = l_{\tau^1} + l_{\tau^2} \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$
Возьмём sup по всем разбиениям τ: $\sup\limits_\tau(l_\tau) = S_\gamma \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

Примеры

Неспрямляемые пути:
1) Кривая Пеано

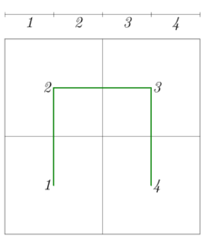


Fig. 1.

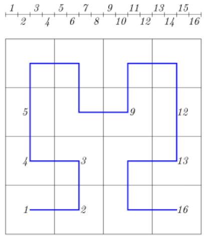


Fig. 2.

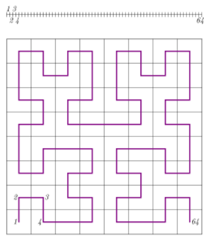
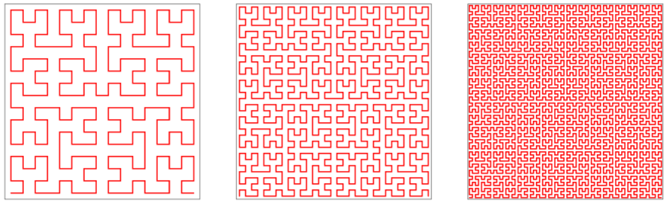
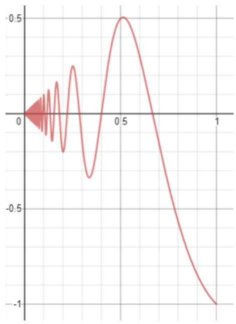


Fig. 3.



В пределе $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ - сюръективное отображение. В итоге получается прямая заполняющая весь квадрат с пересеченями (в смысле дополнение до подкривых пределе пусто)

2) $y = \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Докажем, что прямая не является спямляемой.
Пусть $\tau : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1} < \ldots < 1$, $t_N = \frac{1}{N}$, тогда

$$y(t_k) = \frac{1}{k}\cos\pi k = \frac{1}{k}(-\pi)^k$$

Длина k-ого звена:

$$\frac{1}{k} - (-\frac{1}{k+1}) \geqslant \frac{2}{k} \Rightarrow l_\tau \geqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \Rightarrow \sup l_\tau = +\infty$$

33 Кривая. Длина кривой.

Опр. см. в билете 32

Теорема (о длинах эквивалентных путей)

Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^m$. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$

Док-во

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \exists \varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ - строго возрастающая, $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$, $\varphi(\tau_1) = \tau_2$ - разбиение $[a_2, b_2]$,

$$l_{\tau_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^{m} (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} = l_{\tau_2} \leqslant S_{\tau_2}$$

Перейдём к sup по всем τ_1: $\sup\limits_{\tau_1}(l_{\tau_1}) = S_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$

Аналогично получим неравенство $S_{\tau_2} \leqslant S_{\tau_1}$

Замечание

Корректность определения (с классами эквивалентности) длины пути следует из доказанной выше теоремы

34 Теорема о вычислении длины гладкого пути.

Теорема

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - C^1-гладкая кривая, тогда γ - спрямляется, $S_\gamma = \int\limits_a^b |\gamma'|$

Док-во

1) γ - спрямляемая?

$\gamma_j \in C^1[a,b]$ $\forall j \in \{1,2,...,m\}$ $\Rightarrow$(ф-ия достигает min и max на $[a,b]$ по т.Вейерштрасса)

$$m_j \leqslant \gamma_j \leqslant M_j,\ M := \sqrt{\sum_{j=1}^{m} M_j},\ m := \sqrt{\sum_{j=1}^{m} m_j},\ \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ ... \\ \gamma_n' \end{pmatrix}$$

$\forall\tau$-разбиения $[a,b] : l_\tau = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} =$

(по т. Лагранжа $\forall k = 0, 1, ...n-1\ \exists \xi_k \in [t_k, t_{k+1}] : \gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k) = \gamma_j'(\xi_k)\Delta_{t_k}$)

$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j'(\xi_k))^2 \Delta_{t_k}^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j'(\xi_k))^2}\Delta_{t_k} \Rightarrow m \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta_{t_k} \leqslant l_\tau \leqslant M \sum\limits_{k=0}^{n-1}$

$\Rightarrow m(b-a) \leqslant l_\tau \leqslant M(b-a) \underset{sup}{\to} m(b-a) \leqslant S_\gamma \leqslant M(b-a) \Rightarrow -\infty < S_\gamma < +\infty$

2) $S_\gamma = \int\limits_a^b |\gamma'|$?

Пусть $\gamma^{(k)}$ - сужение γ на $[t_k, t_{k+1}]$. Для него выполняется пункт (1):

переобозначим γ' как $\dot{\gamma}$ из-за сложности обозначений

$$m_j^{(k)} = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot{\gamma}_j(t)|,\ M_j^{(k)} = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot{\gamma}_j(t)|$$

$$m^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (m_j^{(k)})^2},\ M^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (M_j^{(k)})^2}$$

$$m^{(k)}\Delta t_k \leqslant S_{\gamma^{(k)}} \leqslant M^{(k)}\Delta t_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leqslant S_\gamma \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)}\Delta t_k$$

$$m_j^{(k)} \leqslant |\dot{\gamma}_j^{(k)}(t) \leqslant M_j^{(k)}|\ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1},\ \forall j = 1, ..., m$$

Суммируем, возводим в квадрат, иззвлекаем корень:

$$m^{(k)} \leqslant |\dot{\gamma}^{(k)}(t)| \leqslant M^{(k)}|\ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$$

Проинтегрируем по $\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} dt :\ m^{(k)}\Delta t_k \leqslant \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot{\gamma}^{(k)}(t)|dt \leqslant M^{(k)}\Delta t_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\overset{\bullet}{\gamma}^{(k)}(t)|dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)}\Delta t_k, \text{ оценим } \sum_{k=1}^{n-1}(M^{(k)} - m^{(k)}\Delta t_k):$$

$$M^{(k)}-m^{(k)} = \frac{(M^{(k)})^2 - (m^{(k)})^2}{M^{(k)} + m^{(k)}} = \sum_{j=1}^{m}(M_j^{(k)}-m_j^{(k)})\frac{M_j^{(k)} + m_j^{(k)}}{M^{(k)} + m^{(k)}} \leqslant \sum_{j=1}^{m}(M_j^{(k)}-m_j^{(k)})$$

$$\gamma_j \in C^1[a,b] \Rightarrow \gamma_j' \in C[a,b] \Rightarrow \text{р/н} \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta_j > 0:$$

$$\lambda(\tau) < \delta_j \Rightarrow 0 \leqslant M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \leqslant \frac{\mathcal{E}}{m(b-a)} \underset{\substack{\delta=\min \delta_j \\ 1\leqslant j\leqslant m}}{\overset{\sum\limits^{m}}{\Rightarrow}} 0 \leqslant M^{(k)} - m^{(k)} \leqslant \frac{\mathcal{E}}{b-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(M^{(k)-m^{(k)}}\Delta t_k < \frac{\mathcal{E}}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k = \mathcal{E} \Rightarrow S_\gamma = \int_a^b |\overset{\bullet}{\gamma}|$$

35 Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Примеры.

Опр

$$f_n : E \to \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}$$

говорят, что функ. последовательность сходится поточечно

к ф. $f : E \to \mathbb{R}$, если $\forall x \in E \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(x,\mathcal{E})} : \quad \forall n > N$

$|f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

Опр

Говорят, что функ. послед. сходится к f равномерно на E

$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Если $\sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(\mathcal{E})} \quad \forall n > N \quad \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(\mathcal{E})} \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

Примеры

1. $f_n(x) = \dfrac{sin^2(e^x) - \arctan(n^2\sqrt{x})}{\sqrt{n}} \qquad x \in [0; +\infty)$

   $$0 \leqslant \sup_{[0,+\infty)} |f_n(x)| \leqslant \frac{10}{\sqrt{n}} \to 0$$

   $$\Rightarrow f_n \underset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows} 0$$

2. $f_n(x) = x^n - x^{2n} \qquad x \in [0,1]$

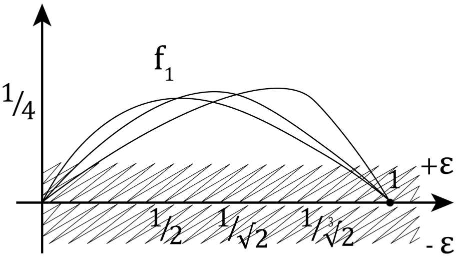
   $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall x \in [0,1]$ - поточечно. Равномерно ли?

   $$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = x^{n-1}(n - 2nx^n)$$

   $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ - крит. точка

   $$f_n(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

   $\Rightarrow \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ равномерной сх-ти нет



Горбик убегает

Замечание

Из равномерной сх-ти $\Rightarrow$ поточечная

36 Критерий Коши для равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема **(Критерий Коши для равномерной сходимости функ. послед.)**

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \qquad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \mathcal{E}$$

Док-во

($\Rightarrow$):

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} > 0 : \quad \forall m, n > N_{\mathcal{E}} :$$

$$\sup |f_n - f_m| \leqslant \sup(|f_n - f| + |f - f_m|) < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$$

($\Leftarrow$):

$$\forall x \in E \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \mathcal{E}$$

т.е. $\{f_n(x)\}$ - сх. в себе $\Leftrightarrow \{f_n(x)\}$ имеет конеч. предел

$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ т.о. $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in E$

(т.е. f - поточеч. предел послед.)

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \quad \forall x \in E$

$f_m(x) - \mathcal{E} < f_n(x) < f_m(x) + \mathcal{E} \underset{n \to \infty}{\to} f_m(x) - \mathcal{E} \leqslant f(x) \leqslant f_m(x) + \mathcal{E}$

$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leqslant \mathcal{E} < 2\mathcal{E}$

$\Rightarrow \sup |f_m(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

37 Сохранение непрерывности при равномерном предельном переходе. Теорема Дини (б/д). Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема (о равномерном пределе непр. функции)

f_n - непр в т. $x_0 \in E$

$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Тогда f - непр. в т. x_0

Док-во

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad$ (зафиксир.)

$$\text{Т.к. } f_n \rightrightarrows f, \text{ то } \exists N_{\mathcal{E}} : \forall n > N_{\mathcal{E}} \quad (\text{зафикс } n^* > N_{\mathcal{E}}) \quad \sup_E |f_n - f| < \frac{\mathcal{E}}{3} \quad (*)$$

В частности, для $n^* > N_{\mathcal{E}} \quad \sup\limits_E |f_n - f| < \dfrac{\mathcal{E}}{3}$

$$f_{n^*} \text{ - непр. в т } x_0 : \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in E : \quad |t - x_0| < \delta \quad |f_{n^*}(t) - f_{n^*}(x_0)| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

Тогда $\forall x \in E : \quad |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| + |f_{n^*}(x_0) - f(x_0)| < \mathcal{E}$$

Следствие

Если $f_n \in C(E), \quad f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то $f \in C(E)$

Теорема (Дини)

$f_n \in C[a,b] \qquad f_n(x) \to f(x) \quad$ (поточ. на $[a,b]$)

причем $\quad \forall x \in [a,b] \quad f_n(x) \searrow$ (по n). $\quad$ т.е $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

Если $f \in C[a,b]$, то $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$

Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла)

$f_n \in R[a,b] \quad f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \in R[a,b]$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f$

Док-во

$$a < b$$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| < \sup_{[a,b]} \left| \underset{\to 0}{f_n - f} \right| \cdot (b-a) \to 0$$

Утв

Функ. ряд сход равномерно $\Leftrightarrow$ посл-ть частичных сумм сход равномерно

Следствие (1)

$$f_n \in C[a,b] \quad \sum_{n=1}^{N} f_n \rightrightarrows f, \text{ тогда:}$$

$$1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C[a,b]$$

$$2) \quad \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

Следствие (2)

Если $f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b] \qquad f_n \in C[a,b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in C[a,b]$$

То $\sum f_n$ - сход. равномерно на $[a,b]$

38 Дифференцируемость и равномерная сходимость.

Теорема (диф-сть и равном. сх-ть)

$$f_n \in C^1[a,b] \quad f'_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$$

$$\text{и } \exists c \in [a,b]: \quad \{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty} \text{ - сх}$$

Тогда:

1. $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$
2. $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$

Док-во

$$(b) \quad f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f'_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_c^x g = f(x) - f(c) \qquad f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$$

(по т. о предельном переходе под знаком интеграла)

$$f(x) = \int_c^x g + f(c)$$

т.о $f_n(x) \to f(x)$ поточ. на $[a,b]$ $\qquad f'(x) = g(x)$ непр (равн. предел непр ф.)

$\Rightarrow f \in C^1[a,b]$

(a) покажем, что $f_n \rightrightarrows f$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\left|f_n(x) - f_n(c) + \underbrace{f_n(c) - f(c)} + f(c) - f(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left|\int_c^x f'_n - \int_c^x g + f_n(c) - f(c)\right| \leqslant \sup\left|\int_c^x (f'_n - g)\right| + |f_n(c) - f(c)| \quad (*)$$

$$f'_n \rightrightarrows g \Rightarrow \left|\int_c^x (f'_n - g)\right| \leqslant \underbrace{\sup|f'_n - g|}_{\to 0}\,\underbrace{(x-c)}_{\leqslant(a-b)}$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \left|\int_c^x (f'_n - g)\right| < \mathcal{E}$$

$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |f_n(c) - f(c)| < \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow (*) < 2\mathcal{E}$$

Пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(x^n)$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n} \to 0 \quad \text{т.е. } f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 = f$$

$$f'_n(1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+x^{2n}} \cdot n \cdot x^{n-1}\Big|_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Но } (\lim_{n\to\infty} f_n)'_{x=1} = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1)$$

39 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

<u>Теорема</u> (признак Вейерштрасса равн сх-ти)

$f_n : E \to \mathbb{R}$

$\forall n\ \exists M_n \quad |f_n(x)| \leqslant M_n \quad \forall x \in E$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ (сход. мажоранта)

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх. равн. (и абс) на E

<u>Док-во</u>

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N \quad \left|\sum_{k=m}^{n} M_k\right| < \mathcal{E} \Leftrightarrow \sum M_k < \infty$$

Тогда $|S_n - S_{m-1}| = \left|\sum\limits_{k=m}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \left|\sum\limits_{k=m}^{n} M_k\right| < \mathcal{E}$

Т.е. $|S_n - S_{m-1}| < \mathcal{E}$ т.е. вып. кр. Коши для $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$

част. суммы сх равн. $\Rightarrow$ функ. ряд сх. равн.

40 Степенной ряд (в $\mathbb{C}$). Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.

Опр

Будем рассматривать

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad c_k, z \in \mathbb{C}$$

Опр

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = |z| \cos\varphi$$

$$y = |z| \sin\varphi$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$C_n = a_n + ib_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, если $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |c_n - c| < \mathcal{E}$

Утв

$$c_n \underset{n\to\infty}{\to} c \Leftrightarrow \begin{matrix} a_n \to a \\ b_n \to b \end{matrix} \quad (n \to \infty)$$

$$c_n = a_n + ib_n$$

$$c = a + ib$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

Опр

Радиусом сх-ти степ. ряда $\sum c_n z^n$ назыв $R \in [0, +\infty]$ такое, что $(z \neq 0)$

$\forall z : |z| < R$ - ряд. сх

$\forall z : |z| > R$ - ряд расх.

Примеры

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!z^k$ по пр. Даламб $\quad$ расх $\forall z \neq 0 \quad R = 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|(k+1)!z^{k+1}\right|}{|k!z^k|} = \infty, \quad z \neq 0$$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ - сх. $\forall z \in \mathbb{C}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$z^* = -1 \quad : \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ - сх } \Rightarrow \text{ сх. равн. } \forall\, |z| \leqslant d < 1$$

$$z_0 = 1 \quad : \quad \sum \frac{1}{n} \text{ - расх } \Rightarrow \forall\, |z| > 1$$

Теорема **(ф-ма Коши-Адамара)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad R \text{ - рад. сх-ти}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

41 Теорема о комплексной дифференцируемости степенного ряда. Следствие: единственность разложения в степенной ряд.

42 Ряд Тейлора. Примеры ($e^x, \sin x, \ln(1+x), e^{-\frac{1}{x^2}}$).

Опр

$f \in C^\infty(U_{x_0}) \qquad U_{x_0}$ - окр x_0

Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ назыв. Рядом Тейлора ф-и в т x_0

Примеры

1. $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k!}$
2. $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
3. $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
4. $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$

43 Биномиальный ряд $(1+x)^\alpha$

<u>Опр</u>

$$(1+x)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Запишем (формально) ряд Тейлора для $(1+x)^\alpha$ в т. $x_0 = 0$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} = C_\alpha^k$$

Найдем интервал сходимость $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_\alpha^k z^k \quad z \in \mathbb{C}$ (по Даламберу)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_\alpha^{k+1} z^{k+1}}{c_\alpha^k z^k}\right| = \lim_{k\to\infty}$$

44 Признак Абеля-Дирихле для равномерной сходимости функциональных рядов (доказательство одного).

45 Теорема Абеля. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

46 Интеграл комплекснозначной функции. Скалярное произведение и норма в пространстве $C(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, в пространстве $R([a;b])$. Ортогональность. Пример: $e_k(x) = e^{2\pi ikx}$.

47 Свойства скалярного произведения и нормы (теорема Пифагора, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника).

48 Коэффициенты Фурье функции по ортогональной системе e_k. Ряд Фурье. Пример: тригонометрический полином.

49 Свойства коэффициентов Фурье (коэффициенты Фурье сдвига, производной).

50 Неравенство Бесселя. Лемма Римана-Лебега (light).

51 Вычисление интеграла Дирихле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$.

52 Ядра Дирихле, их свойства. Выражение частичных сумм ряда Фурье через ядра Дирихле.

53 Свертка. Простейшие свойства. Свертка с тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

54 Принцип локализации Римана.

55 Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье для локально-Гельдеровой функции.

56 Ядра Фейера, их свойства. Связь с $\sigma_N(f)$.

57 Аппроксимативная единица. Определение, примеры. Теорема о равномерной сходимости свертки с аппроксимативной единицей.

58 Теорема Фейера. Теорема Вейерштрасса.

59 Среднеквадратичное приближение функций, интегрируемых по Риману, тригонометрическими полиномами.

60 Равенство Парсеваля.

61 Замечания из конспектов, которые не вошли в билеты

61.1 Множества меры ноль

Опр

$E \subset \mathbb{R}$, говорят, что E - мн-во меры ноль, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ \underset{\substack{\text{не более чем сч.} \\ \text{набор откр. инт.}}}{\exists I_j = (\alpha_j, \beta_j)} : E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \mathcal{E} \ (|I_j| = \beta_j - \alpha_j)$$

Примеры

1) $\forall$ Конечное множество - мн-во меры ноль

$$E = \{x_1, ..., x_n\},\ I_j := (x_j - \frac{\mathcal{E}}{4n}, x_j + \frac{\mathcal{E}}{4n}),\ \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

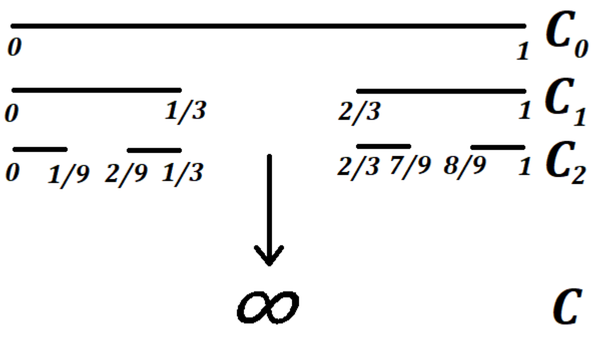
2) $A = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ - счётное $\Rightarrow$ имеет меру 0.

Как покрыть $\mathbb{N}$? $|I_j| = \dfrac{\mathcal{E}}{2^{j+1}}$ - геом. прогрессия

3) Несчетное множество меры ноль:

Канторовское мн-во (Канторовский компакт), построение:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$



Определим $C_{\frac{1}{3^p}}$ как множество отрезков, получинных для $\mathcal{E} = \dfrac{1}{3^p}$ для крайних точек каждого отрезка из C_p (они их покроют "вплотную"и по краям будет немного лишнего). На каждом шаге p у нас 2^p отрезков

$$\Rightarrow |C_{\frac{1}{3^p}}| = 5\frac{2^{p-1}}{3^p} \underset{p \to \infty}{\to} 0$$

61.2 Критерий Лебега интегрируемости функции

Теорема

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, тогда:

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ имеет ограниченное мн-во точек разрыва и меру 0

Примеры

1) Функция Дирихле $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\mathcal{D} \notin R[0,1]$. Проверим по критерию Лебега. Множество точек разрыва - $\mathbb{R}$, но оно не множество меры 0 (слишком много точек).

2) Функция Римана $\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ - несократимая дробь} \end{cases}$

Оказывается, она интегрируема по Риману на любом отрезке. Рассмотрим [0,1]:

а) $\forall a \in \mathbb{Q}$ - точка разрыва Φ:

$\Phi(a) > 0$ по определению. С другой стороны как угодно близко найдётся иррациональная точка, в которой функция принимает значение 0.

б) $\forall a \notin \mathbb{Q}$ - непрерывна:

Для произвольного $\mathcal{E} > 0$ рассмотрим множество $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \mathcal{E}\}$.

Никакая иррациональная точка не лежит в M, поскольку в иррациональных точках функция f обращается в ноль.

Если $x \in M$, тогда x есть рациональное число вида $x = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, дробь $\frac{m}{n}$ несократима, и тогда $f(x) = \frac{1}{n} \geq \mathcal{E}$ и, следовательно, $n \leq \frac{1}{\mathcal{E}}$. Из ограничения на n следует, что пересечение множества M и любого ограниченного интервала состоит из конечного числа точек.

Пусть α - произвольное иррациональное число. По определению $f(\alpha) = 0$. Мы можем выбрать окрестность точки α так, чтобы в ней не содержалась ни одна точка множества M. Если же $x \notin M$, то $f(x) < \mathcal{E}$. Таким образом, мы нашли интервал, который требуется в определении непрерывности.