2019-09-30 Вычисление кручения

Напоминание

$$(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c} + \alpha \overrightarrow{a})$$

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

Теорема

$$g(s) \text{ - нат. парам., тогда:}$$

$$æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

Док-во

$$g'(s) = \overrightarrow{v} \qquad |\overrightarrow{v}| = 1$$

$$g''(s) = v' = k\overrightarrow{n}$$

$$g'''(s) = kn' = k(-k\overrightarrow{v} + æ\overrightarrow{b}) = -k^2\overrightarrow{v} + æk\overrightarrow{b}$$

$$(g', g'', g''') = (\overrightarrow{v}; k\overrightarrow{n}; -k^2\overrightarrow{v} + æk\overrightarrow{b}) = (v; kn; ækb) = æk^2$$

$$\Rightarrow æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

Теорема

$$f(t) \text{ - парам } (\forall) \text{, тогда:}$$

$$æ = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

Док-во

$$f(t) \text{ - парам } (\forall)$$

$$S = \psi(t) = \int_a^t |f'(\tau)|\, d\tau \qquad g(s) \text{ - нат. парам}$$

$$\psi'(t) = |f'(t)|$$

$$g(S) = g(\psi(t)) = f(t)$$

$$f'(t) = g'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = g'(s) \cdot |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(\psi(t))(\psi(t))^2 + g'(\psi(t))\psi''(t) = g''(s) \cdot |f'(t)|^2 + g'(s) \cdot \psi''(t)$$

$$f'''(t) = g'''(\psi(t))(\psi'(t))^3 + g''(\psi(t)) \cdot 3\psi'(t)\psi''(t) + g'(\psi(t)) \cdot \psi'''(t)$$

$$(f', f'', f''') = (\overrightarrow{f'}(s) \cdot |f'(t)|;\ \overrightarrow{g}''(s)\,|f'(t)|^2, g'''(s) \cdot |f'(t)|^3) =$$

$$= (g', g'', g''') \cdot |f'(t)|^6$$

$$æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f'(t)|^6} \cdot \frac{|f'(t)|^6}{|f' \times f''|^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

Пример

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$y = f(x) \qquad \overrightarrow{f} = (x; f(x); 0) \qquad \overrightarrow{f}'(1; f'(x); 0) \qquad f''(0; f''(x); 0)$$

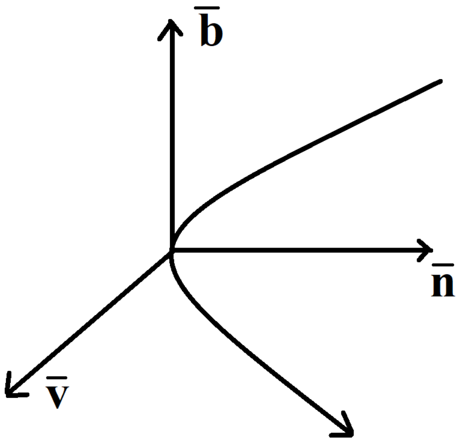
$$f''' = (0; f'''(x); 0)$$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$f' \times f'' = (0; 0; f''(x))$$

$$æ = 0$$

0.1 Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми



Опр

Соприкас плоскость : $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$
Нормальная плоскость кривой : $< n, b >$
Спрямляющая плоскость : $< v, b >$

Теорема

$$\overrightarrow{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \text{ ур-е нормали плоск.}$$

$$\overrightarrow{v} \parallel f'(t) = (f_1', f_2', f_3') \quad f_1'(t_0)\cdot(x - f_1(t_0)) + f_2'(t_0)\cdot(y - f_2(t_0)) + f_3'(t_0)\cdot(z - f_3(t_0)) = 0$$

$$f' \times f'' \parallel b$$

так как л.н.

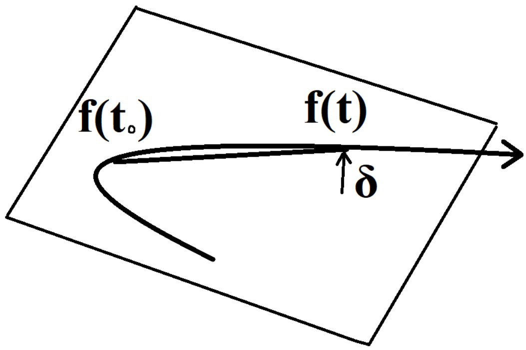
$$(f_1', f_2', f_3') \times (f_1'', f_2'', f_3'') = (f_2'f_3'' - f_3'f_2''; f_3'f_1'' - f_1'f_3''; f_1'f_2'' - f_2'f_1'')$$

Соприкас плоск.

$$\begin{vmatrix} f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & f_3'(t_0) \\ f_1''(t_0 & f_2''(t_0) & f_3''(t_0) \\ x - f_1(t_0) & y - f_2(t_0) & z - f_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$(f'(t_0) \times f''(t_0)) \times f'(t_0) \parallel \overrightarrow{n}$$

Ур-е спрям. плоск - УПР



Теорема

δ - расст. от $f(t)$ до соприкас. плоскости

Если плоскость явл. соприкас., то

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|^2} = 0$$

Плоскость с таким соотношением ед.

Док-во Условия достигаются за счет подходящей системы координат

$$a) \quad f(t_0) = (0, 0, 0)$$

$$b) \quad OX \parallel \overrightarrow{v}(t_0)$$

$$c) \quad OY \parallel \overrightarrow{n}(t_0)$$

$$d) \quad t_0 = 0$$

$$e) \quad t \text{ - нат. параметр}$$

$$\text{б, в } \Rightarrow OZ \parallel \overrightarrow{b}(t_0)$$

$$f(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \Rightarrow \delta = |f_3(t)s|$$

Соприкас $z = 0$

$$\overrightarrow{v} \parallel f' = (f_1', f_2', f_3') \parallel OX \Rightarrow f_2'(0) = 0, \quad f_3'(0) = 0 \quad f_1'(0) \neq 0$$

$$\overrightarrow{n} \parallel f'' = (f_1'', f_2'', f_3'') \parallel OY \Rightarrow f_1''(0) = 0; \quad f_3''(0) = 0$$

Следует из пунтка e)

$$\text{Хотим } \lim_{t \to 0} \frac{|f_3(t)|}{|f(t)|^2} = 0$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f_3(t)}{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2} =, \lim_{t \to 0} \frac{f_3'(t)}{2f_1(t)f_1'(t) + 2f_2(t)f_2'(t) + 2f_3(t)f_3'(t)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{f_3''(t)}{f_1'^2(t) + f_1(t)f_1''(t) + f_2(t)f_2''(t) + f_3'^2(t) + f_3(t)f_3''(t)}$$

Все кроме первого слагаемого в знаменателе стремятся к 0, числитель тоже стремится к 0. Замечание. Можно было разложить f_1, f_2, f_3 по Тейлору. Можно зачеркнуть пункт д(е)) и $f_1''(0) = 0$

0.2 Дополнение 2: натур. ур-я кривой

Теорема

$$g_1(s) \text{ и } g_2(s) \text{ - нат. парам. двух кривых}$$

$$\begin{matrix} k_1(s) & k_2(s) \\ æ_1(s) & æ_2(s) \end{matrix} \text{ - кривизны и кручения}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } k_1(s) &= k_2(s) \\ æ_1(s) &= æ_2(s) \end{aligned} \Rightarrow \text{ кривые наклад. при движении пр-ва}$$

Док-во

$$v_1(s), n_1(s), b_1(s) \text{ - базис Френе I кривой}$$

$$v_2(s), n_2(s), b_2(s) \text{ - базис Френе II кривой}$$

$$\begin{aligned} \text{Считаем } v_1(s_0) &= v_2(s_0) \\ n_1(s_0) &= n_2(s_0) \\ b_1(s_0) &= b_2(s_0) \end{aligned}$$

В данной точке базисы кривой одинаковы, а дальше возможно не совпадают. Почему не может?

$$h(s) = \overrightarrow{v}_1(s)\overrightarrow{v}_2(s) + \overrightarrow{n}_1(s)\overrightarrow{n}_2(s) + \overrightarrow{b}_1(s)\overrightarrow{b}_2(s) \quad h(s_0) = 3$$

$$h'(s) = v_1'v_2 + v_1v_2' + n_1'n_2 + n_1n_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' =$$

По формуле Френе

$$= \underline{\underline{k_1n_1v_2}} + \underline{k_2v_1n_2} + (\underline{-k_1v_1} + \text{æ}_1b_1)n_2 + n_1(\underline{\underline{-k_2v_2}} + \text{æ}_2b_2) - \text{æ}_1n_1b_2 - \text{æ}_2b_1n_2 = 0$$

$$\Rightarrow h(s_0) \equiv 3$$

$$\Rightarrow v_1 \equiv v_2 \quad n_1 \equiv n_2 \quad b_1 \equiv b_2$$