## 0.1 09.09.2019

### 0.1.1 Ещё больше определений

**Опр**

1. $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : x > M\ y > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

2. $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : |x| > M\ |y| > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

3. $A = \lim\limits_{P\to\infty} f(P)\ P \in \mathbb{R}^2$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : \rho(0,P) > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

**Замечание**

Демидович по первым двум определениям

**Опр**

Для конечного предела: $A = \lim\limits_{x\to a\ y\to+\infty} f(x,y)$, если

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists M > 0 \quad \delta > 0 : y > M \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

### 0.1.2 Ещё больше примеров

**Пример**

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

**Решение**

Заметим, что $\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leqslant x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leqslant (x-y)^2$ для x $\neq y$

Значит дробь стремится к 0

**Пример**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

**Решение**

При $x = y$ предел $\frac{1}{2}$

При $x = y^2$ предел 0

**Пример**

$f = \sin(\dfrac{\pi y^2}{x^2+3y^2})$

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f$

**Решение**

Первый не имеет предела ($x = y$, $x = \sqrt{y}$). Второй $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Третий 0

**Пример**

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{sin(y-x^2)}{y-x^2}$$

**Решение**

$z = y - x^2$, $z \to 0 \Rightarrow x, y \to 0$

$|z| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$

**Пример**

$f = \dfrac{1-\sqrt[3]{sin^4x+cos^4y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, найти $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f$

**Решение**

$1-\sqrt[3]{t} \underset{t\to1}{} \dfrac{1-t}{3}$ (т.к. $1-\sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1+\sqrt[5]{t}+\sqrt[3]{t^2}}$)

Значит $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{1}{3}\dfrac{1-(sin^4x+cos^4y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{2sin^2y - sin^4y - sin^4x}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Заменим по Тейлору: $= \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{2y^2+\overline{o}(y^3)-x^4+\overline{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Попробуем оценить по модулю $|\dfrac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}|$, заметим что $y^2 \leqslant x^2+y^2$,

$x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$ (для $x^2+y^2<1$),

чтобы избавиться от $\overline{o}$ оценим так:

$\overline{o} + y^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, $\overline{o} + x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$

Тогда $|\dfrac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leqslant 2\dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} \to 0$