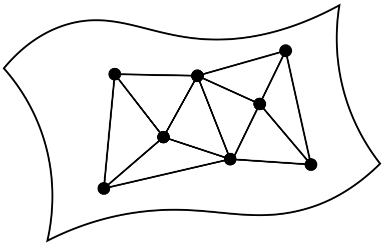
2019-10-21

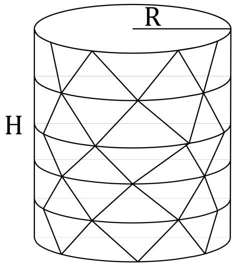
Как не нужно вводить площадь?

Конструкция: Ф - пов-ть, впишем в Ф кус.-лин. пов-ть

$$\lim_{|\Delta_i|\to 0} \sum_{\Delta} S_{\Delta} \overset{?}{=} S_{\text{пов-ти}}$$



Контрпример: сапог Шварца



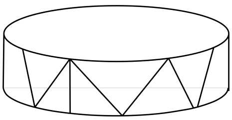
h - высота каждого

k слоев

$$H - kh$$

$$k \to \infty$$

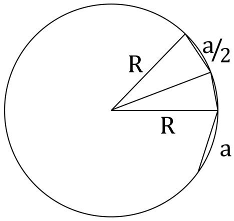
$$n \to \infty$$

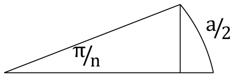


В слое 2n Δ

$$h' = \sqrt{h^2 + b^2}$$

Всего 2nk Δ





$$\frac{a}{2} = R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$b = R - R\cos\frac{\pi}{n} \quad h = \frac{H}{K}$$

$$h' = \sqrt{h^2 + R^2(1 -]cos\frac{\pi}{n})^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah' = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{h^2 + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})}$$

$$\sum_{\Delta} S_{\Delta} = 2nkR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{K^2} + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2}$$

$$\lim_{n,k\to\infty} 2nkR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{K^2} + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2} =$$

$$= 2\pi R\lim_{n,k\to\infty}\sqrt{H^2 + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2K^2} =$$

$$= 2\pi R\sqrt{H^2 + R^2\lim_{n,k\to\infty}K^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2} =$$

$$= 2\pi K\sqrt{H^2 + R^2\frac{\pi^4}{4}\lim_{k,n\to\infty}\frac{k^2}{n^4}}$$

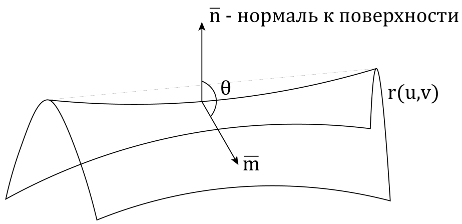
Если $k = \underset{n\to\infty}{o}(n^2) \Rightarrow \pi RH$

Если $k = n^2 \Rightarrow 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{\pi^4}{n}R^2} \neq 2\pi RH$

Если $k = n^3 \Rightarrow ... = \infty$

Почему так?
Посмотрим, что происходит, когда k растет быстрее, чем n^2
При маленьком a выходит тонкий слой и получается "помятый"сапог Шварца

0.1 II квадратичная форма



$$\psi(s) \qquad k = \overset{=\overline{m}}{\psi''(s)}$$

$$\theta \text{ - угол между } \overline{m} \text{ и } \overline{n}$$

$$k = |\psi''(s)| = \frac{\overline{\psi}''(s) \cdot \overline{n}}{\cos\theta}$$

$$u(s),\ v(s) \text{ - внутр. ур-я кривой}$$

$$\psi' = r_u u' + r_v v'$$

$$\psi'' = \overline{r}_{uu} u'^2 + \overline{r_{uv}} u'v' + \overline{r}_u u'' + \overline{r}_{uu} u'v' + \overline{r}_{vv} v'^2 + \overline{r}_v v''$$

$$\psi'' n = \overline{r}_{uu}\overline{n} u'^2 + 2\overline{r}_{uv} n u'v' + \overline{r}_{vv} n v'^2 = Lu'^2 + 2Mu'v' - Nv'^2 = \mathrm{II}(u',\ v')$$

$$\overline{r}_u \overline{n} = 0$$

$$\overline{r}_v \overline{n} = 0$$

$$\begin{cases} \overline{r}_{uu}\overline{n} = L \\ \overline{r}_{uv}\overline{n} = M \qquad \text{- коэф. II кв. формы пов-ти} \\ \overline{r}_{vv}\overline{n} = N \end{cases}$$

$$\mathrm{I}(u', v') = Ru'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$$

Теорема

Если s - нат. параметризация, $k = \cos\theta = \mathrm{II}(u'(s),\ v'(s))$

Теорема

$\forall$ параметризации $\Rightarrow k\cos\theta = \dfrac{\mathrm{II}(u'(t); v'(t))}{\mathrm{I}(u'(t); v'(t))}$

Док-во

Пусть теперь $\psi(t)$ - произвольная параметризация

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$$

$$(u'(s), v'(s)) = \frac{(u'(t), v'(t))}{|\varphi'(t)|}$$

$$|\varphi'(t)| = Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t)$$

$$k\cos\theta = \frac{\mathrm{II}(u'(t),\ v'(t))}{|\varphi'(t)|} = \frac{\mathrm{II}(u'(t); v'(t))}{\mathrm{I}(u'(t); v'(t))}$$

Пример

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\psi \\ y = R\sin\varphi\cos\psi \qquad \text{- сфера} \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}}{R} = (\cos\varphi\cos\psi,\ \sin\varphi\cos\psi,\ \sin\psi)$$

$$\overline{r}_{\varphi\varphi} = (-R\cos\varphi\cos\psi,\ -R\sin\varphi\cos\psi,\ 0)$$

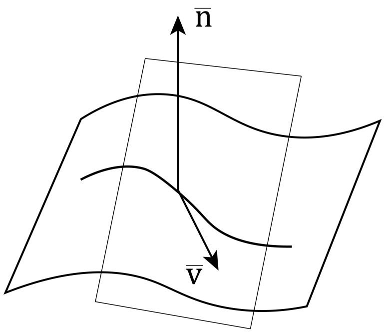
$$L = -R\cos^2\psi$$

$$\overline{r}_{\varphi\psi} = (R\sin\varphi\sin\psi,\ -R\cos\varphi\sin\psi,\ 0)$$

$$M = 0$$

$$\overline{r}_{\psi\psi} = (-R\cos\varphi\cos\psi,\ -R\sin\varphi\cos\psi,\ -R\sin\psi)$$

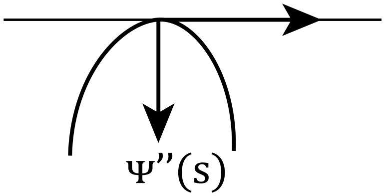
$$N = -R$$



Теорема

Проекция векторов кривизны кривых на поверхности с данным касательным вектором на вектор нормали к поверхности одинаковы (все это $k\cos\theta$)

$(u'(s_0),\ v'(s_0))$ - у всех таких кривых одинак.



Теорема

$$k\cos\theta = \mathrm{II}(u'(s),\ v'(s)),\ \text{если s - натур. параметризация}$$

Док-во

Пусть параметризации натуральные

Возьмем кривую: $\cos\theta = \pm 1$ (знак зависит от $\overline{n}$)
Рассмотрим кривые с данным единичным кас. векором и $\cos\theta = \pm 1 \Rightarrow$ у них одинаковые кривизны

$$k_{\triangledown} = \mathrm{II}(u'(s),\ v'(s))$$

Нормальная кривизна поверхности в направлении $\triangledown$