Дифф. геометрия кривых (в $\mathbb{R}^3$) и поверхностей (в $\mathbb{R}^3$) 2019-09-09

1 Дифференциальная геометрия кривых

Опр

$f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$
2. Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

   (особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)
3. Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x,y) = 0$

Пример

$$\text{Окружность: } x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \text{ явное задание}$$

рис 3

Теорема (о неявной функции)

$$F(x,y) = 0$$

$$F \text{ - дифф } (\exists \frac{\partial F}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y} \text{ - непр в окр } (x_0, y_0)), \quad F(x_0, y_0) = 0$$

$$\text{Если } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \ \exists \mathcal{E} > 0 \ \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

Напоминание

$$\frac{dF}{dx}\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$y = f(x) \to \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда

$\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$

$\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 :$ если $\rho(t, t_0) < \delta,$ то $\rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$

$(\rho(t, t_0) = |t - t_0|, \quad f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2})$

Теорема (свойства пределов)

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) \pm g(t)) = \lim_{t \to t_0} f(t) \pm \lim_{t \to t_0} g(t)$$

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) \underset{\text{скал}}{\cdot} g(t)) = (\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t)) \text{ - скалярное умножение}$$

$$\lim_{t \to t_0} (f(x) \times g(t)) = \lim_{t \to t_0} f(x) \times \lim_{t \to t_0} g(t)$$

Док-во

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = (\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(0))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{Пусть } \mathcal{E} > 0, \quad \text{выберем } \delta : |x(t) - x_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

если $|t - t_0| < \delta$

$$\Rightarrow \begin{matrix} |y(t) - y_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \\ |z(t) - z_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$$

Опр

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Теорема (свойства)

1. $(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm y'(t)$

2. $(cf(t))' = cf'(t)$

3. $(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t); g'(t))$
4. $(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$
5. $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

$$\text{Доказывается через } f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$
$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{Докажем ВП: } (f(t) \times g(t))'|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0)} =$$
$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x) \times g(x) - f(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0}{t - t_0}$$
$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(f(t) - f(t_0)) \times g(t)}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0 \times (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} =$$
$$= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)$$

Пример

Контрпример
Т. Лагранжа - неверна рис 4

$$\int_b^a \overrightarrow{f}(t)dt = (\int_a^b x(t)d(t), \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt)$$
$$\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{f}(t)$$
$$\overrightarrow{F}(b) - \overrightarrow{F}(a) = \int_a^b \overrightarrow{f}(t)dt$$
$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$
$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b x(t)dt, ...) = (X(b) - X(a), ...$$

Опр

Гладкая кривая - образ вектороднозначнойя функция

Опр

Кривая называется регулярной, если существует производная и $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$

Опр

Кривая называется бирегулярной, если существует вторая производная и $f''(t) \not\parallel f'(t)$

Опр

Параметризации $\overrightarrow{f}(t)$ и $\overrightarrow{g}(t)$ эквивалентны

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$g : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

Если $\exists$ биекция $\tau : [a, b] \to [c, d]$

$$\tau(a) = c; \quad \tau(b) = d :$$

$$f(t) = g(\tau(t)) \qquad (\tau \text{ возрастает и гладкая})$$

Лемма

Эквив параметризаций - эквививалентность

Док-во

Докажем, что экв. параметризаций - отношение эквивалентности:

1. (рефл.) $\tau = id$
2. (симм.) $f(t) = g(\tau(t))$, $g(t) = f(\tau(t))$
3. (тран.) $f(t) = g(b(t))$, $g(t) = h(\tau(t))$, $f(t) = h(\tau(b(t)))$

Лемма

$$\overrightarrow{f}(t) \text{ - вектор-функция/ регуляр.}$$

$$|\overrightarrow{f}(t)| = 1 \to f'(t) \perp f(t)$$

Док-во

$$(f(t); f(t)) = 1$$

$$0 = (f(t), f(t))' = 2(f'(t), f(t))$$

$$f(t) \neq 0$$

$$f'(t) \neq 0 \to f'(t) \perp f(t)$$