2019-10-22

Опр (унитарного пространства)

U - в.п. над $\mathbb{C}$

$$U \times U \to ()$$

1. $(u+v,\ w) = (u,\ w) + (v,\ w) \quad \forall u, v, w \in U$

$$(\lambda v,\ w) = \lambda(v, w) \quad \forall \lambda \in C, \quad v, w \in U$$

2. $(u,\ v) = \overline{(v,\ u)}$

3. $(u,\ u) \geqslant 0$

4. $(u,\ u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Пример

R^n	C^n
(x,y) $= \sum x_i y_i$	(x,y) $= \sum x_i \overline{y_i}$

$$e_1, ..., e_n \text{ - базис}$$

$$\Gamma_e = \{(e_i,\ e_j)\}_{i,j} \text{ - матрица грамма}$$

$$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e \overline{[v]}_e$$

$$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e \overline{M}_{e\to f}$$

$$|(u, v)| < \|u\| \cdot \|v\|, \quad \|u\| = \sqrt{(u,\ u)}$$

$$\|tu+v\|^2 = t^2\|u\| + t\underbrace{((u,\ v) + (v,\ u))}_{=2\operatorname{Re}(u,v)} + \|v\|^2$$

$$\operatorname{Re}(u, v) \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$$

$$(u,\ v) = |(u,\ v)| \cdot z| \Rightarrow |z| = 0$$

$$\operatorname{Re}(\frac{1}{z}u,\ v) \leqslant \|\frac{1}{z}u\|^2\|v\|^2 = \|u\|\|v\|$$

Напоминание: $\|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u,\ \lambda u)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(u, u)} = |\lambda|\,\|u\|$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}(u,\ v) = \operatorname{Re}|(u, v)| = |(u,\ v)|$$

Доказали КБШ

Опр

V - в.п. над K

$$V^* = \mathscr{L}(V,\ K)$$

Пример

$$v \in V \text{ - евклидово пр-во (унитарное)}$$

$$\varphi_v(w) = (w,\ v) \quad \varphi_v : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Хотим доказать: $\varphi \in V^* \Rightarrow \exists! v \in V : \varphi = \varphi_v$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - ОНБ V

$$v = \sum \lambda_i e_i$$

Нужно $\quad \forall w \in V \quad (w,\ v) = \varphi(w)$, т.к. φ - линейный функционал

$$\Leftrightarrow \forall j \quad (e_j,\ v) = \varphi(e_j)$$

$$(e_j,\ \sum \lambda_i e_i) = \sum_i \overline{\lambda}_i (e_j,\ e_i)$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$$A^* = \overline{A}^T \text{ - сопряженная матрица}$$

Свойства

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A*$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Утв

V - унитарное пр-во, $L \in \mathscr{L}(V)$, $u \in V$

$$\varphi_n(v) = (Lv,\ u) \in V^*$$

$$\Rightarrow (Lv,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$\exists! w_u \in V : \quad (v,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$u \to w_u$$

Утверждается, что отображение линейно

Док-во

$$\begin{array}{c|c} \text{(Lv, u) = (v, w}_u) & \text{(Lv, u+u') = (Lv, u) + (Lv, u') =} \\ \text{(Lv, u') = (v, w}_{u'}) & = (\text{u w}_u) + (v,\ w_{u'}) = (v,\ w_u + w_{u'}) = (v,\ w_{u+u'}) \end{array}$$

$$(Lv,\ \lambda u) = \overline{\lambda}(Lv,\ u) = \overline{\lambda}(v,\ w_u) = (v,\ \underbrace{\lambda w_u}_{=w_{\lambda u}})$$

$$L^* u = w_u \quad (Lv,\ u) = (v,\ L^* u)$$

Опр

L^* - эрмитов сопряженный оператор

Свойства

1. $L^{**} = L$

$$(L^* v,\ u) = (v,\ L^{**} u)$$

$$(L^* v,\ u) = \overline{(u,\ L * v)} = \overline{(Lu,\ )} = (v,\ Lu)$$

$$\Rightarrow L^{**} u = Lu \quad \forall u \in V$$

Почему так? $(v,\ w) = (v,\ w') \quad \forall v \Rightarrow w = w'$

$$(v,\ w - w') = 0$$

$$v = w - w'$$

$$\|w - w'\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow w - w' = 0$$

2. $(\lambda L)^* = \overline{\lambda} L^*$

$$(\lambda L) v,\ u) = (v,\ (\lambda L)^* u)$$

$$(\lambda L) v,\ u) = (\lambda \cdot Lv,\ u) = \lambda (Lv,\ u) = \lambda (v,\ L^* u) = (v,\ \overline{\lambda} L^* u)$$

3. $(L + L')^* = L^* + L'^*$ аналогично

4. $(LNv,\ u) = (v,\ (LN)^* u)$

$$(LNv,\ u) = (v,\ N^* L^* u) \text{ и то же, что делали раньше}$$

5. $[L]_e^* = [L^*]_e$, если e - ОНБ

$$Le_i = \sum a_{li} e_l \quad [L]_e = \{a_{ij}\}$$

$$Le_j = \sum b_{kj} e_k \quad [L]_e = \{b_{kj}\}$$

$$(\underbrace{Le_i, e_j}_{=a_{ij}}) = (\underbrace{e_i,\ L^* e_j}_{=\bar{b}_{ij}})$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$$A \text{ - унитаная, если } A^*A = E$$

$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : (\text{то что сверху})\}$$

Док-во (что это группа по умножению)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}^*A = R \\ \mathrm{B}^*B = E \end{array}\right| \Rightarrow (AB)^*AB = B^* \underbrace{A^*A}_{=E} B = E$$

$$(A^{-1})^*A^{-1} \stackrel{?}{=} E$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1})^* = A$$

$$\Leftrightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

Докажем, что любая унитарная матрица обратима и модуль определителя равен единице

$$A^*A = E$$

$$\overline{\det A} \cdot \det A = 1$$

$$|\det A|^2 = 1$$

Утв

$$L \in \mathscr{L}(V)$$

Следующие условия равносильны:

1. $\|Lv\| = \|v\| \quad \forall v$
2. $(Lv,\ Lu) = (v, u) \quad \forall v, u$
3. $[L]_e \in U_n, \quad e$ - ортонорм.
4. $L^*L = \mathrm{id}_V$

И оператор, удовлетворяющий этим условиям называется "унитарным"(в евклидовом случае называется "ортогональным")

Док-во

$(4 \Rightarrow 2)$:

$$\underbrace{(v,\ L^*Lu)}_{=(v,u)} = (Lv,\ Lu)$$

$(2 \Rightarrow 4)$:

$$(v,\ L^*Lu) = (Lv,\ Lu) = (v,\ u)$$

По заклинанию $L^*L = \mathrm{id}_V$

<u>Утв</u>

1. $|\det L| = 1$
2. Если L - унитарный, $Lv = \lambda v \underset{v\neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1$
3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \quad \lambda \neq \mu| \Rightarrow (u,\ v) = 0$

<u>Док-во</u>

1 и 2:

$$\|v\| = \|Lv\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$

3:

$$(u,\ L^*v) = (u,\ \overline{\lambda}v) = \lambda(u,\ v)$$

$$(u,\ L^*v) = (Lu,\ v) = (\mu u,\ v) = \mu(u,\ v)$$

Хотим доказать: $Lv = \lambda v \Rightarrow L^*v = \overline{\lambda}v$

$$v = L^*Lv = L^*(\lambda v) = \lambda L^*v$$

Делим на λ и туда переносится $\overline{\lambda}$