ДЗ по алгебре №1, 3 сем

(преподаватель Демченко О. В.)

Записал Костин П.А.

Задача

На пространстве $V = \{X \in M_{3,2}(\mathbb{R}) : cXd^T = 0\}$, где $c \in \mathbb{R}^3$ задан оператор:

$$LX = AXB + mX, \quad X \in V$$

где $A \in M_3(\mathbb{R}), \quad B \in M_2(\mathbb{R}), \quad m \in \mathbb{R}$

1. Найти жорданов базис и жорданову матрицу L
2. Для собственного вектора из жорданового базиса проверить непосредственно, что он является таковым
3. Найти $L^{(n)}X_0$ для данных $X_0 \in V$ и $n \in \mathbb{N}$

Полезно воспользоваться тем, что L имеет только одно собственное число

Замечание (мои данные)

$$c = (-1, 1, 4) \qquad d = (-2, 1) \qquad m = -2 \qquad n = 31$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Док-во

1. Найдем базис V:

$$cXd^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_{11} + x_{21} + 4 \cdot x_{31} & -x_{12} + x_{22} + 4 \cdot x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot x_{11} - 2 \cdot x_{21} - 8 \cdot x_{31} - x_{12} + x_{22} + 4 \cdot x_{32} \end{pmatrix}$$

Подставляем стандартный базис для уравнения $cXd^T = 0$ для всех векторов кроме x_{12} (потому что так проще считать), чтобы выбрать свой базис в пространстве V:

$$\begin{array}{c|c} \begin{matrix} x_{11} = 1 \Rightarrow x_{12} = 2 \\ x_{21} = 1 \Rightarrow x_{12} = -2 \\ x_{31} = 1 \Rightarrow x_{12} = -8 \\ x_{22} = 1 \Rightarrow x_{12} = 1 \\ x_{32} = 1 \Rightarrow x_{12} = 4 \end{matrix} & \begin{matrix} e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

2. Найдем координаты $L(e_i)$ в $\{e_i\}_{i\in 1:5}$:

$$L(X) = AXB + mX = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2X$$

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L(e_2) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -30 \\ -1 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -26 \\ -3 & -4 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$L(e_3) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 24 \\ 0 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L(e_4) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L(e_5) = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Составим матрицу $[L]_{\{e\}}$

$$\Rightarrow [L]_{\{e\}} = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Докажем, что $\forall A, B \in M_n(R)$, где R - комм. кольцо $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Док-во

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \qquad \mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji}$$

Так как $a_{lm}b_{ml} = b_{ml}a_{lm} \Rightarrow \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}(AB) \overset{\text{т. о Ж.ф.}}{=} \mathrm{Tr}(C^{-1}JC) = \mathrm{Tr}((C^{-1}J)C) = \mathrm{Tr}(C(C^{-1}J)) = \mathrm{Tr}(EJ) = \mathrm{Tr}(J)$$

Т.к. по условию J имеет одно собственное число:

$$\mathrm{Tr}([L]_{\{e\}}) = 5\lambda \Rightarrow 5\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -1$$

5. Найдем с.в., отвечающий с.ч. $\lambda = -1$:

$$[L]_{\{e\}}v = \lambda v \Rightarrow\Rightarrow ([L]_{\{e\}} - \lambda E)v = 0 \qquad \deg V = 5 \Rightarrow v^T = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

$$[L]_{\{e\}} - \lambda E = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -6 & 8 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Порядок действий:

$(1) \xrightarrow{-\frac{1}{4}} (3) \qquad (1) \xrightarrow{-\frac{1}{2}} (5) \qquad (2) \xrightarrow{\frac{1}{4}} (3) \qquad (2) \xrightarrow{-2} (4) \qquad (2) \xrightarrow{-\frac{3}{2}} (5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a - 6b + 8c + 9d + 4e = 0 \\ -2b + d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 3b + 2c + e \\ d = 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix} b + \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} c + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} e = \begin{pmatrix}3b+2c+e\\b\\c\\2b\\e\end{pmatrix}$$

$$(1) \xrightarrow{-\frac{1}{4}} (3) : \begin{pmatrix}3b+2c+e\\b\\-\frac{3}{4}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}e\\2b\\e\end{pmatrix}$$

$$(1) \xrightarrow{-\frac{1}{2}} (5) : \begin{pmatrix}3b+2c+e\\b\\-\frac{3}{4}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}e\\2b\\-\frac{3}{2}b-c+\frac{1}{2}e\end{pmatrix}$$

$$(2) \xrightarrow{\frac{1}{4}} (3) : \begin{pmatrix}3b+2c+e\\b\\-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}e\\2b\\-\frac{3}{2}b-c+\frac{1}{2}e\end{pmatrix}$$

$$(2) \xrightarrow{-2} (4) : \begin{pmatrix}3b+2c+e\\b\\-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}e\\0\\-\frac{3}{2}b-c+\frac{1}{2}e\end{pmatrix}$$

$$(2) \xrightarrow{-\frac{3}{2}} (5) : \begin{pmatrix}3b+2c+e\\b\\-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}e\\0\\-3b-c+\frac{1}{2}e\end{pmatrix}$$

Запишем условие для нахождения просоedененного вектора:

$$\begin{pmatrix}-4&-6&8&9&4\\0&-2&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\\e_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3b+2c+e\\b\\-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}e\\0\\-3b-c+\frac{1}{2}e\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4a_1 - 6b_1 + 8c_1 + 9d_1 + 4e_1 = 3b + 2c + e \\ -2b_1 + d_1 = b \\ 0 = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}e \\ 0 = 0 \\ 0 = -3b - c + \frac{1}{2}e \end{cases}$$

6. Найдем присоединенные вектора
7. Ищем следующий
8. Найдем следующий
9. Построим жорданов базис
10. Нужно ещё два...
11. !!!