Санкт-Петербургский государственный университет
www.spbu.ru

Лекции по дифференциальным уравнениям

3 семестр, преподаватель Звягинцева Т. Е.

Записали Костин П.А. и Щукин И.В.[1]

[1]Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах вконтакте (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

1 Введение

1.1 Литература

Учебник Бибиков "Обыкновенные дифферинциальные уравнения"
Филиппов - задачи
"Методы интегрирования"
Каддинктон Ливенгсон "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
Яругии

1.2 Введение

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
x - неизвестная переменная
$y = y(x)$ - неизвестная функция лалалалалалала

Опр

Порядок уравнения - порядок старшей производной

Кроме того, $x = \frac{dx}{dt}$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$

1.3 Применение

1) механика
2) электротехника
3) физика: $\dot{Q} = kQ$, $Q = Q_0 e^{kt}$
4) упр. движением
5) биология, экология

Пример из биологии:
x - хищник
y - жертва

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + cxy \\ \dot{y} = by - dxy \end{cases}$$

$$a, b, c, d > 0, \ x, y > 0$$

2 Дифферинциальные уравнения первого порядка

2.1 Введение

(1) $\dot{x} = X(t, x)$
$X(t, x) \in C(G)$, G - обл, $G \subset \mathbb{R}^2$
Но чаще будем $\in C(D)$ $D \subset \mathbb{R}^2$

Опр

Решение (1) - функция $x = \varphi(t)$, $t \in < a, b >$: $\dot{\varphi}(t) \equiv X(t, \varphi(t))$ на <a,b>

1) $\forall t \in < a, b > (t, \varphi(t)) \in D$
2) $\varphi(t)$ - дифф на $< a, b >$
3) $\varphi(t)$ - непр. дифф. (X- непр на D)

Опр

(2) Задача Коши - задача нахождения решения (1) $x = \varphi(t) :\ \varphi(t_0) = x_0$ $((t_0, x_0) \in D)$

Геометрический смысл уравнения первого порядка - уравнение 1 задаёт поле направлений на множестве G

Опр

График решения называется интегральной кривой

В каждой точке задано направление, которое совпадает с касательной в этой точке к интегральной кривой
$\dot{\varphi}(t)|_{t=t_0} = X(t_0, x_0)$

2.2 Метод изоклин

Опр

Изоклина - это кривая, на которой поле направлений постоянно

Уравнение изоклин $X(t, x) = c$, где $c = const$

$\dot{x} = -\frac{t}{x}$ $(x = \varphi(t))$

$-\frac{t}{x} = tg\alpha$
$x = -\frac{1}{c}t$, $c \neq 0$
$c = 1$ $(\alpha = \frac{\pi}{4})$ $x = -t$ - уравнение изоклин
$c = -1$ $(\alpha = -\frac{\pi}{4})$ $x = t$
Решение задачи Коши (1, 1) - это $x = \sqrt{2 - t^2}$
Решение задачи Коши (1,-1) - это $x = -\sqrt{2 - t^2}$

2.3 Теорема Пеано

(1) $\dot{x} = X(t, x)$, $X \in C(D)$
$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant ... \leqslant |x - x_0| \leqslant b\}$
(2) (t_0, x_0)
По теореме Вейерштрасса $\exists M : \ |X(t, x)| \leqslant M \ \forall (t, x) \in D$
$h = min(a, \frac{b}{M})$

(Пеано) $\exists$ реш. задачи К. (1), (2) $x = \varphi(t)$ опр-е на $[t_0 - h, \ t_0 + h]$ - отрезок Пеано

Опр

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in [c, d]$

1) $\varphi_k(t)$ - равномерно ограничена на $[c, d]$, если $\exists N : \ |\varphi_k(t)| \leqslant N$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [c, d]$

2) $\varphi_k(t)$ - равностепенно непр на [c,d], если $\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [c, d]$ $|t_1 - t_2| < \delta \rightarrow |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \mathcal{E} \ \forall k \in \mathbb{N}$

(Арцелло - Асколи) $\varphi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, равномерно огр. и равностепенно непр на $[c, d] \rightarrow \exists$ подпосл $\varphi_{kj}(t) : \varphi_{kj}(t) \underset{j \rightarrow +\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$

2019-09-12

Док-во

$$P = [t_0, t + h]$$

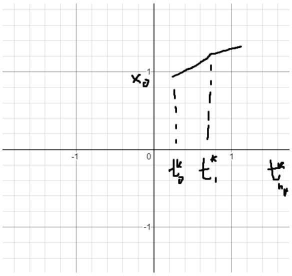
$$d_k : t_0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_j^k < ... < t_{nk}^k = t_0 + h$$

$$\text{rank } d_k = \lambda_k = \max_{0 \leqslant j \leqslant n_k - 1} (t_{j+1}^k - t_j^k)$$

$$(3) \quad \lambda \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_k(t_0) = x_0 \\ \varphi_k(t) = \varphi_k(t_j^k) + X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))(t - t_j^k) \end{cases} \text{ - ломанные Эйлера}$$

$t_j^k \leqslant t \leqslant t_{j+1}^k$



Лемма (1)

Определим $\varphi_k(t)$ и

$|\varphi_k(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0) \quad \forall t \in P \quad (5)$

Замечание

$(5) \Rightarrow t \in P \Rightarrow 0 \leqslant t - t_0 \leqslant h \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| \leqslant M \cdot h \leqslant M \cdot \dfrac{b}{M} = b \quad (6)$

Док-во (лемма 1)

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0) \cdot (t - t_0)$

$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| = |\underbrace{X(t_0, x_0)}_{\leqslant M}|(t - t_0) \leqslant M(t - t_0)$

И.П.: Пусть (5) - выполняется $\forall t \in [t_0^k, t_j^k]$

$\Rightarrow |\varphi_k(t_j^k) - x_0| \leqslant M(t_j^k - t_0) \leqslant b \Rightarrow (t_j^k, \varphi_k(t_j^k)) \in D$

$t_j^k \leqslant t < t_{j+1}^k$

По (4) имеем: $|\varphi_k(t)| \leqslant |\varphi_k(t) - x_0| = \underbrace{|\varphi_k(t_j^k) - x_0|}_{\text{инд. предп}} + |X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))|(t - t_j^k) \leqslant$

$\leqslant M(t_j^k - t_0) + M(t - t_j^k) = M(t - t_0)$

Опр

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_k(t) = X(t_j^K, \varphi_k(t^k)), \quad t_j^k \leqslant t \leqslant t_{j+1}^k \qquad j = 0, ..., n_k - 1 \\ \varphi_k(t_{nk}^k) = X(t_{nk}^k, \varphi_k(t_{nk}^k)) \end{cases}$$

Лемма (2)

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau) d\tau \qquad (8)$$

Док-во

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0)(t - t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{X(t_0, x_0)}_{=\psi_k(t)} d\tau$$

Пусть $[t \in [t_0^k, t_j^k] \Rightarrow \varphi_k(t_j^k) = x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau) d\tau$

И.П.: $t \in [t_j^k, t_{j+1}^k]$

$\Rightarrow \varphi_k(t) = \varphi(t_j^k) + X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))(t - t_j^k) =$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau) d\tau + \int_{t_j^k}^{t} X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k)) d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau) d\tau$$

Лемма (3)

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ - равномерно огр., равностепенно непр. для $t \in P$

Док-во

По пункту (6) $|\varphi_k(t)| \leqslant |\varphi_k(t) - x_0| + |x_0| \leqslant b + |x_0| \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{E} > 0 \quad \delta$

$|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta \quad (\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in P)$

$|\varphi_k(\bar{t}) - \varphi_k(\bar{\bar{t}})| = |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} \psi_k(\tau) d\tau| \leqslant |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} |\psi_k(t)| d\tau| \leqslant$

$\leqslant M\delta = \mathcal{E}$

$\exists$ подпослед. $\{\varphi_k(t)\}_1^{\infty} \quad t \in P$

(9) $\varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$ (тут должны быть k_m, но мы их не будем писать)

$\varphi(t)$ - непр и $|\varphi(t) - x_0| \leqslant b$

Лемма (4)

$$(10) \quad \psi_k(t) \underset{k\to+\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} X(t,\varphi(t))$$

Док-во (лемма 4)

$X(t,x) \in C(D) \Rightarrow X(t,x)$ - равном непр. на D

$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\bar{t},\bar{x}), (\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}}) \in D$

$|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta, \quad |\bar{x} - \bar{\bar{x}}| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |X(\bar{t},\bar{x}) - X(\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}})| < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

фикс $\mathcal{E} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$

$$(12) \quad |X(t,\varphi(t)) - \psi_k(t)| \leqslant |X(t,\varphi(t)) \underset{(1)}{-} X(t,\varphi_k(t))| + |X(t,\varphi_k(t) \underset{(2)}{)} - \varphi_k(t)|$$

из (9) $\quad \Rightarrow \exists k_1 : \forall k > k_1 \quad |\varphi_k(t) - \varphi(t)| < \delta \quad \forall t \in P$

$\Rightarrow \underbrace{|...|}_{(1)} < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

$t = t^k_{nk} \Rightarrow \underbrace{|...|}_{(2)} = 0$ по (7)

Если $[t \neq t^k_{nk} \to \exists j \in \{0,1,...,n_k - 1\} : t \in [t^k_j, t^k_{j+1})$

И тогда $\underbrace{|...|}_{2} = |X(t,\varphi_k(t)) - X(t^k_j, \varphi_k(t^k_j))|$

$\exists k_2 : \forall k > k_2 \quad \lambda_k < \min(\delta, \dfrac{\delta}{M}) \quad$ (из (3))

$\Rightarrow (t - t^k_j) < (t^k_{j+1} - t^k_j) \leqslant \lambda_k < \delta$

$|\varphi_k(t) - \varphi_k(t^k_j)| \leqslant |\displaystyle\int_{t^k_j}^t \underbrace{|\psi_k(t)|}_{\leqslant M} \leqslant M(t - \underbrace{t^k_j)}_{\leqslant \lambda_k} < M\dfrac{\delta}{M} = \delta$

$\Rightarrow |\underbrace{...}_{(2)}| < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$ по (11)

$\Rightarrow \forall k > \max(K_1, k_2) \qquad |X(t,\varphi(t)) - \psi_k(t)| < \dfrac{\mathcal{E}}{2} + \dfrac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$ по (12)

$\varphi(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t X(\tau,\varphi(\tau))d\tau \qquad (13)$

Т.к. дифференцируема справа, то дифференцируема слева

$t = t_0 : \varphi(t_0) = x_0$

Дифф. (13): $\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$\Rightarrow \varphi(t)$ - реш. задачи Коши $(1), (2) \quad t \in P$

2019-09-19

Напоминание

D - мн-во

1. $\dot{x} = X(t, x)$
2. $(t_0, x_0) \in D$

Опр

$x = \varphi(t)$ - реш. задачи Коши $(1), (2), \quad t \in < a, b >$

единств. на $< a, b >$, если

$\forall$ другое реш. $x = \psi(t)$ З.К. $(1), (2) \quad t \in < a, b >$

$\varphi(t) \equiv \varphi(t)$ на $< a, b >$

Теорема

В усл. теоремы Пеано, если решение $x = \varphi(t)$ - единств. на P

$(P = [t_0, t_0 + h]),$ то посл. ломанная Эйлера

$\varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$

Док-во **(От противного)**

$\exists \mathcal{E} > 0 : \forall k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists k > k_0, \exists t \in P : |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \geqslant \mathcal{E}$

$\Rightarrow \exists \{k_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \{t_j\}_{j=1}^{\infty} : k_{j+1} > k_j$ и $|\varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_j)| \geqslant \mathcal{E} \quad (14)$

$\{\varphi_{k_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$ - посл. Л.Э. $\Rightarrow$ п/послед $\{\varphi_{k_{jm}}(t)\}_{m=1}^{\infty}$:

$\varphi_{k_{jm}}(t) \underset{m \to +\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \psi(t)$

$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists k_{j_0} : \forall k_{jm} > k_{j0} \quad |\varphi_{k_{jm}} - \psi(t)| < \mathcal{E} \quad (15)$

$k_{jm} > k_{j_0}$

$|\varphi(t_{jm}) - \psi(t_{jm})| \geqslant |\underbrace{\varphi(t_{jm}) - \varphi_{kjm}(t_{jm})}_{\geqslant \mathcal{E}}| - |\underbrace{\varphi_{kjm}(t_{jm}) - \psi(t_{jm})}_{< \mathcal{E}}| > 0$

$\Rightarrow \varphi(t_{jm}) \neq \psi(t_{jm})$ - против. с единственностью $\varphi(t)$ на P

Теорема (Пеано)

$X \in C(G), \quad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^2$

1. $\dot{x} = X(t, x)$
2. $(t_0, x_0) \in G$

$\Rightarrow \exists h > 0:$ на $[t_0 - h, t_0 + h]$ опред. решение з. К $(1), (2)$

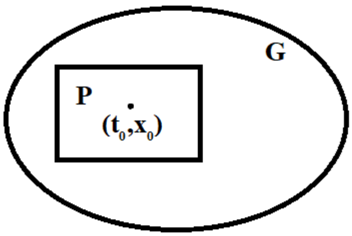
$x = \varphi(t)$

Док-во

$\forall (t_0, x_0) \in G \quad \exists a > 0, b > 0:$

$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\} \subset G$

$\Rightarrow h = \min(a, \dfrac{b}{M})$, где $M: \quad |X(t, x)| \leqslant M$ на D



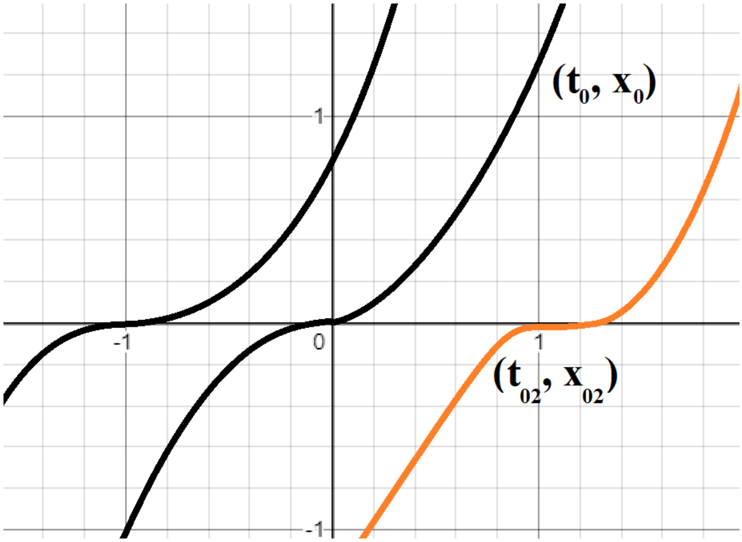
Теорема (единственности)

$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2} \qquad x \equiv 0$ - реш

$$x = \left(\frac{t + c}{3}\right)^3$$

$\exists \Delta > 0:$ реш $x = \varphi(t) : x_{01} = \varphi(t_{01})$ - единств. на $[t_{01} - \Delta, t_{01} + \Delta]$

$\forall \Delta > 0 \quad$ через т. (t_{02}, x_{02}) проходит беск. много решений



Опр (1)

$$(1) \quad \dot{x} = X(t,x) \quad X \in C(G) \quad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^2$$

$(t_0, x_0) \in G$ - точка единств. для (1), если

$\exists \Delta > 0:$ реш $(1) x = \varphi(t) \quad (x_0 = \varphi(t_0))$

опред и единственно на $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ вместо отрезка можно взять интервал

Опр (1')

$(t_0, x_0) \in G$ - точка единств (1), если

$\exists \Delta > 0 : \forall \delta : 0 < \delta \leqslant \Delta$ реш

$x = \varphi(t)$ - опред и ед-гл на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$(x_0 = \varphi(t_0))$

Теорема

$\urcorner\ x = \varphi(t)$ - реш. з. К (1)(2), опред. при $t \in < a, b >$

$\forall t \in (a, b) \quad (t, \varphi(t))$ - точка ед-ти

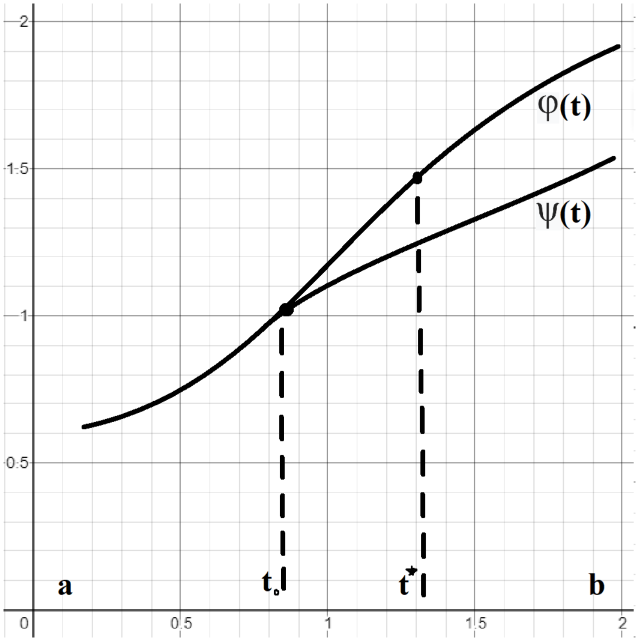
$\Rightarrow$ реш $x = \varphi(t)$ - ед-но на $< a, b >$

Док-во

$\rceil\ \exists x = \psi(t)$ - другое. реш. З.К. $(1),(2) \quad t \in < a, b >$

$\exists t^* \in (a,b) : \varphi(t^*) \neq \psi(t^*) \quad t^* \neq t_0 \quad$ (т.к $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$)

НУО $t^* > t_0$



$u(t) = \varphi(t) - \psi(t)$

$O = \{t \in [t_0, t^*] : u(t) = 0\}$

$O \neq \varnothing \quad (t_0 \in O)$

O - замкн и огр

$\exists t_1 \in [t_0, t^*) : \quad t_1 = \max O \quad (t_1 \in O)$

$\Rightarrow \varphi(t_1) = \psi(t_1) \quad \varphi(t) \neq \psi(t) \quad \forall t \in (t_1, t^*]$

Ставим З.К $(t_1, \varphi(t_1) \quad \exists h > 0 :$

На $[t_1 - h, t_1 + h]$ опред. реш. $x = \widetilde{\varphi}(t) : \quad x_1 = \widetilde{\varphi}(t_1)$

$\exists \Delta > 0 : \quad \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

(t_1, x_1) - точка ед-ти $\Rightarrow \exists \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

$\Rightarrow$ на $[t_1 - \Delta, t_1 + \Delta] \quad \widetilde{\varphi} \equiv \varphi(t) \equiv \psi(t)$

противореч с опред t_1

Лемма (Гронуолла)

$u(t) \geqslant 0$, опред $t \in < a, b >$, $\quad u(t)$ - непр на $< a, b >$

$\exists t_0 \in (a, b), \quad c \geqslant 0, \quad L > 0:$

$$u(t) \leqslant c + L \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right| \quad \forall t \in < a, b > \quad (3)$$

$$\Rightarrow u(t) \leqslant c \cdot e^{L|t - t_0|}$$

Док-во

НУО $t \geqslant t_0$

$$(3') \quad u(t) \leqslant \underbrace{c + L \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau}_{v(t)} \overset{?}{\Rightarrow} (4') \quad u(t) \leqslant c \cdot e^{L(t - t_0)}$$

$$u(t) \leqslant v(t)$$

$$\frac{d}{dt}(v(t) \cdot e^{-Lt}) = \underbrace{\dot{v}(t)}_{L \cdot u(t)} e^{-Lt} + v(t)(-L)e^{-Lt} =$$

$$L \cdot e^{-Lt}(u(t) - v(t)) \leqslant 0$$

$v(t)e^{-Lt}$ - убыв. $\Rightarrow$

$$v(t)e^{-Lt} \leqslant v(t_0)e^{-Lt_0} \Rightarrow$$

$$U(t) \leqslant v(t) \leqslant \underbrace{v(t_0)}_{=c} \cdot e^{L(t - t_0)} = c \cdot e^{L(t - t_0)}$$

Следствие

Если $c = 0$, то $u(t) \equiv 0$ на $< a, b >$

../../../template/template

Напоминание

$$(1) \quad \dot{x} = X(t, x), \qquad X(t, x) \in C(G) \quad \underbrace{G}_{\text{Обл}} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(2) \quad (t_0, x_0) \in G$$

Теорема

$$\exists \underbrace{V}_{\text{окр}}(t_0, x_0) \subset G : \quad \frac{\partial X}{\partial x} \in C(V(t_0, x_0))$$

$$\Rightarrow (t_0, x_0) \text{ - точка ед-ти}$$

Следствие

$$X \in C(G), \quad \frac{\partial X}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow G \text{ - обл ед-ти}$$

Док-во

1. $\exists a > 0, b > 0 :$

$$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a, \ |x - x_0| \leqslant b\} \subset V(t_0, x_0) \subset G$$

$$\Rightarrow \exists M : |X(t, x)| \leqslant M \quad \forall (t, x) \in D$$

$$\exists L : \left| \frac{\partial X}{\partial x}(t, x) \right| \leqslant L \quad \forall (t, x) \in D$$

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$\Rightarrow \exists \text{Реш}(1), (2) \quad x = \varphi(t), \quad x \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

$$\underline{\Delta = h}$$

$$\urcorner x = \psi(t) \text{ - реш}(1)2(0$$

Докажем: оно определено на $[t_0 - h, t_0 + h]$ т.е

$$|\psi(t) - x_0| \leqslant b \quad \forall t : |t - t_0| \leqslant h$$

$$\text{от прот. } \urcorner \exists t^* : \begin{cases} |t^* - t_0| \leqslant h \\ |\psi(t^*) - x_0| > b \end{cases}$$

$$t^* \neq t_0 \quad (\psi(t_0) = x_0) \quad \text{НУО } t^* > t_0$$

$$v(t) = |\psi(t) - x_0| - b \text{ - непр}$$

$$\left. \begin{array}{l} v(t_0) = -b < 0 \\ v(t^*) > 0 \end{array} \right| \Rightarrow \exists t_1 : t_0 < t_1 < t^* : \quad v(t_1) = 0$$

$$O = \{t \in [t_0, t^*] : v(t) = 0\} \quad O \neq \varnothing \quad O \text{ - замк. огр}$$

$$\Rightarrow \exists \min O = t_2 \quad (\text{мб } t_1 = t_2)$$

$$\forall t \in [t_0, t_2) \quad v(t) < 0 \quad v(t_2) = 0 \quad t_0 < t_2 < t^*$$

$\Rightarrow$ на $[t_0, t_2]$ $\quad |\psi(t) - x_0| \leqslant b$

$\dot{\psi}(t) = X(t, \psi(t)), \quad \psi(t_0) = x_0$

инт на $[t_0, t_2]$

$$|\psi(t_2) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t_2} X(t, \psi(t))dt\right| \leqslant \int_{t_0}^{t_2} \left|\underbrace{X(t, \psi(t))}_{\leqslant M}\right| dt$$

$\leqslant M \cdot (t_2 - t_0) < M(t^* - t_0) \leqslant Mh \leqslant b$

Получим $|\psi(t_2) - x_0| < b$ - противореч: $t_2 \in O$

2. $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ рисунок 1

$$f(s) = X(t, s\varphi(t) + (1 - S)\varphi(t)), \quad s \in [0, 1]$$

$$|s\varphi(t) + (1 - s)\psi(t) - x_0| \leqslant |s\varphi(t) - sx_0| + |(1 - s)\psi(t) - (1 - s)x_0| =$$

$$= s\left|\underbrace{\varphi(t) - x_0}_{\leqslant b}\right| + (1 - s)\left|\underbrace{\psi(t) - x_0}_{\leqslant b}\right| \leqslant b(s + (1 - s)) = b \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(s)$ опред. при $|t - t_0| \leqslant h$

$|X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))| = |f(1) - f(0)| = \qquad \exists\theta \in (0, 1)$

$$= |f'(\theta)| = \left|\frac{\partial X}{\partial x}\bigg|_{x = s\varphi(t) + (1-s)\psi(t)} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\bigg|_{s=\theta}\right| =$$

$$= \left|\underbrace{\frac{\partial X}{\partial x}\bigg|_{\dots}}_{\leqslant L}\right| \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|$$

Итог: $|X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))| \leqslant L\,|\varphi(t) - \psi(t)| \quad (5)$

3. $\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$\dot{\psi}(t, \psi(t))$

$\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi(t)} = X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))$

Инт. $[t_0, t]$

$$\varphi(t) - x_0 - (\psi(t) - x_0) = \int_{t_0}^{t} (X(\tau, \varphi(\tau)) - X(\tau, \psi(\tau)))d\tau$$

$$\Rightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |X(t, \varphi(\tau) - X(\tau, \psi(\tau))| \, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \cdot \left| \int_{t_0}^{t} |\varphi(t\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau \right| \overset{\text{Л.Г.}}{\Rightarrow} \varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t : |t - t_0| \leqslant h$$

$$(u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)| : u(t) \leqslant L \quad \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right|)$$

3 Уравнения в симметричной форме

Опр

(1) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - ур. 1 порядка в симм. форме

$M, N \in C(G) \qquad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^2$

Опр

ф-я $y = \varphi(x) \quad x \in < a, b >$

(или ф-я $x = \psi(y) \quad y \in < c, d >$)

наз. реш. (1), если подст в (1) получ. тождество

Если $y = \varphi(x)$ - реш (1) $\quad x \in < a, b >$

$M(x, \varphi(x))dx + N(x, \varphi(x))\varphi'(x)dx = 0$

$y = \varphi(x) \quad x \in < a, b >$ - реш.(1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (2) $\quad M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на $< a, b >$

$\Rightarrow y = \varphi(x)$ удовл. ур-нию $\qquad$ если $N(x, \varphi(x)) \neq 0$ на $< a, b >$

(3) $\qquad y' = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$

аналог: $x = \psi(y) \quad y \in < c, d >$ - реш (1) $\Leftrightarrow$

$M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) \equiv 0$ на $< c, d > \qquad (2')$

и $x = \psi(y)$ уд. ур-нию $\qquad$ (если $M(\psi(y), y) \neq 0$ на $< c, d >$)

$(3') \qquad x' = -\dfrac{N(x, y)}{M(x, y)}$

$(x_0, y_0) \in G$

если $N(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists < a, b >$: $x_0 \in (a, b) \quad \exists$реш $y = \varphi(x) \quad$ (3) (и реш (1))

если $M(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists < c, d >$: $y_0 \in (c, d) \quad \exists$реш $x = \psi(y) \quad (3')$ (и реш (1))

если $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ - особая точка

Замечание

Если $\varphi(x)$ - реш, $\varphi(x)^-1 =$

Опр

$$u(x,y) \in C^1 \quad (u : G \in \mathbb{R}) \text{ интеграл (1), если}$$

$$1) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \quad \forall \text{ обык. точки из } G \quad (x,y)$$

$$2) \quad (4) \to N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - M(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \equiv 0 \text{ в } G$$

$$(N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0)$$

Теорема (1)

$$y = \varphi(x) \text{ - реш.(1)} \quad x \in < a, b >$$

$$(x, \varphi(x)) \text{ - обыкн. точка для } \forall x \in < a, b >$$

$$u(x,y) \text{ - интеграл (1) в } G$$

$$\Rightarrow u(x, \varphi(x)) = const \quad x \in < a, b >$$

Док-во

$$y = \varphi(x) \text{ - реш (1)} \quad x \in < a, b > \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{M(x, \varphi(x))}{M(x, \varphi(x))} \qquad N(x, \varphi(x)) \neq 0$$

(если N(...) $=$ 0, то $\overset{(2)}{\Rightarrow} M(...) = 0$ - против. усл)

$$\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x)) = \frac{\partial u(...)}{\partial x} + \frac{\partial u(...)}{\partial y} \cdot \varphi'(x) =$$

$$= \frac{\partial u(...)}{\partial x} + \frac{\partial u(...)}{\partial y}(-\frac{M(...)}{N(...)}) = \frac{1}{N(...)}(N(...)\frac{\partial u(...)}{\partial x} - M(...)\frac{\partial u(...)}{\partial y})$$

Теорема (1')

$$x = \psi(y) \text{ - реш (1)} \quad y \in < c, d > ...$$

../../../template/template
[2019-10-03]

Напоминание

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1) \qquad M, N \in C(G)$$

$y = \varphi(x)$ - реш (1), $x \in (a,b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M(x,\varphi(x)) + N(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a,b)

Опр

$u(x,y) \in C^1(G)$

Интл (1), если

1. хоть одна из $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ не 0 в $\forall$ обыкн. точке G
2. $N \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ в $G \qquad (4)$

$(5) \qquad u(x,y) = u(x_0,y_0) \qquad (x_0,y_0) \in G$

u - инт-л (1) в G

Теорема (2)

$N(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$

рав-во (5) разрешимо отн y: его решение

$y = \varphi(x)$ опред на $(a,b) \quad x_0 \in (a,b) \quad \varphi(x_0) = y_0$

$y = \varphi(x)$ непр дифф на (a,b) и явля реш ур (1)

Док-во

$N(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow N(x,y) \neq 0$ в нек. окр-ти $V(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0 (\text{ из (4): если } \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = 0, \text{ то } \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = 0)$$

Противореч. с тем, что (x_0, y_0) - обыкн

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \neq 0 \text{ в нек. окр } \widetilde{V}(x_0, y_0)$$

$\Rightarrow$ теорема о неявн. функции $\quad \exists y = \varphi(x)$ - реш (5) : $y_0 = \varphi(x_0)$

$\varphi(x)$ - непр дифф $\qquad x \in (a,b) \quad (x_0 \in (a,b))$

$u(x, \varphi(x)) = u(x_0, y_0)$ на (a,b)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}}{\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}}$$

$$\text{в (2) } M(...) + N(...)\left(-\frac{\frac{\partial u(...)}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}(...)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}(...)}[N(...)\frac{\partial u}{\partial x}(...) - M(...)\frac{\partial u(...)}{\partial y}] \equiv 0 \text{ в } G$$

Теорема (2)

Следствие

(x_0, y_0) - обыкн точка G, то рав-во (5)

разреши. отн y или отн x и его реш - реш (1)

$(M \neq 0$ или $N \neq 0)$

Опр

равн-во $u(x,y) = c$ - общ. инт-л (1)

Пример

$$xdx + ydy = 0$$

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)} = c$$

4 Уравнения в полных дифф.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

Опр

(1) - ур в полных дифф, если

$$\exists u(x,y) : \quad du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2)$$

$$((1) : du = 0)$$

Теорема (1)

(1) - ур в полных дифф $\Rightarrow u(x,y)$ - инт-л (1)

Док-во

1. $u(x,y)$ - непр дифф.
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = N \qquad (3)$
3. $N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} = N \cdot M - M \cdot N \equiv 0$

Теорема

если $\exists \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(G) \quad (1)$ - ур. в полных дифф

то $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ в $G \qquad (4)$

Док-во

(1) - ур в п. дифф $\Rightarrow \exists u(x,y) \quad (2),(3)$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$G = \{(x,y) : \ a < x < b, c < y < d\}$$

(м.б $a = -\infty, \ c = -\infty \qquad b = +\infty, \ d = +\infty$)

Теорема (3)

$$\exists \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(G)$$

И вып (4) $\Rightarrow$ (1) - ур. в п. д.

Док-во

$(x_0, y_0), (x, y) \in G$

$\forall t \in [x_0, x] \quad (t, y) \in G$

$\dfrac{\partial u(t, y)}{\partial x} = M(t, y)$ - инт от x_0 до x

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt \qquad (5)$$

$\forall t \in [y_0, y] \quad (x_0, y) \in G$

$\dfrac{\partial u(x_0, t)}{\partial y} = N(x_0, t)$ - инт от y_0 до y

$$u(x_0, y) - \underbrace{u(x_0, y_0)}_{\text{НУО } =0} = \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt \qquad (6)$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)dt \qquad (7)$$

Проверяем, что это та функция, которая нужна

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} M(t, y)dt + N(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} dt + N(x_0, y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} dt + N(x_0, y) = N(x, y) - N(x_0, y) + N(x_0, y)$$

Замечание (1)

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x, t)dt \qquad (7')$$

Утв

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad \text{Вып (4)} \quad G \text{ - односвяз.}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_\Gamma M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (8) \text{ - криволин. инт}$$

Γ - любая кривая, соед $(x_0, y_0), (x, y)$

Условие (4) гарантирует нам, что криволин. интеграл не зависит от кривой интегрирования

Замечание (2)

Прямоугольность области G не требуется по-существу, нужна только односвязность (отсутсвие дырок или возможность стянуть любой путь в точку)

Опр

$$(1) \qquad \mu = \mu(x,y) \in C(G) \qquad \mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in G$$

μ - интегр мн-ль для (1), если

$$(9) \quad (\mu M)dx + (\mu N)dy = 0 \text{ - ур. в п. д}$$

$$\exists M, N, \mu \in C^1(G) \quad (G \text{ - односвяз})$$

$$(9) \text{ - ур в п.д.} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (1)$$

Частный случай 1

$\underline{\mu = \mu(x)}$

$$\text{из (10):} \frac{d\mu}{dx} N = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (11)$$

$$N = f(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(x)dx$$

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

Частный случай 2

$$\underline{\mu = \mu(y)}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \qquad (12)$$

$$M = g(y)$$

../../../template/template
2019-10-10

<u>Напоминание</u>

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

$$\mu = \mu(x) \qquad \frac{1}{\mu}\mu' = \frac{1}{N}(M'_y - N'_x) \qquad (11)$$

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt \qquad (7')$$

<u>Пример</u> (важнейший)

$$(13) \qquad y' = p(x)y + g(x) \qquad p(x), g(x) \in C(a,b)$$

$$(13') \qquad (p(x)y + g(x))dx - dy = 0 \qquad (x \not\equiv const)$$

$$\frac{1}{N}(M'_y - N'_x) = -1 \cdot (p(x) - 0) = -p(x)$$

$$\exists \mu = \mu(x) : \frac{d\mu}{\mu} = -p(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

$$e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}(p(x)y + g(x))dx - e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}dy = 0 \qquad (14)$$

Применяем к этому формулу $7'$
полагаем для простоты $y_0 = 0$

$$u(x,y) = -\int_{0}^{y} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}dt + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \cdot g(t)dt$$

$$\underline{u(x,y) = -c}$$

$$-ye^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}g(t)dt = -c$$

$$y = c \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}g(t)dt \qquad (15)$$

З. Коши $(x_0, y_0) \qquad (x_0 \in (a,b))$

$$\Rightarrow (15), \text{ где } c = y_0$$

$$(15') \qquad y = ce^{\int p(x)} + e^{\int p(x)dx} \int e^{-\int p(x)dx}g(x)dx$$

5 Системы дифф. уравнений

Опр

Система дифф уравнений, разрешенная относительно старших производных

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1^{(m_1)} = X_1(t, x_1, \dot{x_1}, ..., x_1^{(m_1-1)}, ..., x_k, \dot{x_k}, ..., x_k^{(m_k-1)}) \\ x_2^{(m_2)} = X_2(...) \\ ... \\ x_k^{(m_k)} = X_k(...) \end{cases}$$

$$n = \sum_{j=1}^{k} m_j$$

Опр

Реш (1): $x_1 = \varphi_1(t), ..., x_k = \varphi_k(t) \qquad t \in (a, b)$

$\underset{j=1,...,k}{X_j} \in C(D) \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Подставили и получили тождество

Опр (Частный случай)

1. $k = 1$

$$x^{(n)} = X(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n-1)}) \qquad (2)$$

2. $\underset{j=1,...,k}{m_j} = 1$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = X_1(t, x_1, ..., x_n) \\ ... \\ \dot{x_n} = X_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Система в нормальной форме или нормальная система

В (2) замена

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \\ ... \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ ... \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = X(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (5)$$

в (3) $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

$(3') \qquad \dot{x} = X(t, x)$

$(3')$ - система, записанная в векторной форме

<u>**Замечание**</u>

Будем рассматривать только системы в нормальной форме

З. Коши

для (1) : при $t = t_0$:

$$\begin{cases} x_1 - x_{1_0}, \dot{x_1} = \dot{x}_{1_0}, ..., x_1^{(m_1-1)} = x_{1_0}^{(m_1-1)} \\ x_2 = x_{2_0}, ..., x_2^{(m_2-1)} = x_{2_0}^{(m_2-1)} \\ x_k = x_{k_0}, ..., x_k^{(m_k-1)} = x_{k_0}^{(m_k-1)} \end{cases}$$

для (2) : при $t = t_0 \quad x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0, ..., x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}$

для (3) : $t = t_0 : x_1 = x_{1_0}, x_2 = x_{2_0}, ..., x_n = x_{n_0}$

<u>**Замечание**</u>

сист (5) и ур (2)

реш $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(t), \quad t \in (a, b) \end{cases}$ $\qquad$ реш $x = \varphi(t) \quad t \in (a, b)$

Решения разные, но мы называем (5) и (2) эквивалентными

$\varphi_1(t) = \varphi(t)$

$\varphi_2(t) = \dot{\varphi}(5)$

...

$\varphi_n(t) = \varphi^{(n-1)}(t)$

Опр

Договоримся с обозначениями

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ - вектор}$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \text{ - норма}$$

$$a^{(k)} = a^{\{k\}} \text{ - послед. векторов}$$

$$a^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} a \Leftrightarrow a_j^{(k)} \underset{\substack{k\to+\infty \\ \forall j=1,\dots,n}}{\to} a \Leftrightarrow \left|a^{(k)} - a\right| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

$$f(x_1, ..., x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_m) \\ ... \\ f_n(x_1, ..., x_m) \end{pmatrix} \text{ вектор-функция}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$u(t) \text{ - непр на } [a, b] \Rightarrow \int_a^b u(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b u_n(t)dt \end{pmatrix}$$

$$\left|\int_a^b u(t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^b |u(t)|\, dt\right|, \text{ если } b \geqslant a \quad \text{ здесь норма } |.|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$a^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ ... \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Признак Вейерштрасса работает.

$$\exists \text{ сх ряд } \sum_{k=1}^{\infty} b_k : \left|a^{(k)}(t)\right| \leqslant b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(t) \text{сх равн и абс} \quad \forall t \in \Omega$$

Опр

$$(1) \qquad \dot{x} = X(t,x) \qquad X \in C(D), D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ ... \\ X_2 \end{pmatrix}$$

З.Коши (2) $\quad (t_0, x_0)$ Смысл геометрический и механический полностью совпадают с одномерным случаем
геом - поле направлений
мех - мгновенная скорость в точке и во времени

реш (1) ф-я $x = \varphi(t) \quad t \in (a, b)$ подст тожд в (1)

Теорема (Пеано)

$$D = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$$

$$X(t,x) \in C(D)$$

$$\Rightarrow \exists M :\ |X(t,x)| \leqslant M \quad h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$\Rightarrow \exists \text{ реш } (1)\ x = \varphi(t) \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

$(x_0 = \varphi(t_0))$ доказывается аналогично одномерному сл.

6 Условие Липшеца

../../../template/template
[2019-10-17]

Опр

$$X(t,x) \qquad X=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix} x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

X уд-т, условию Липшеца по x на $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$

(Обозн. $X\in\mathrm{Lp}_x(D)$, если

$\exists L>0:\forall(t,\overline{x}),(t,\overline{\overline{x}})\in D$

$\left|X(t,\overline{x})-X(t,\overline{\overline{x}})\right|\leqslant L\left|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\right| \qquad (1)$

Пример

$n=1$

1. $X=t+\sin x\in\mathrm{Lp}_x(\mathbb{R}) \quad \left|X(t,\overline{x})-X(t,\overline{\overline{x}})\right|=\left|\sin\overline{x}-\sin\overline{\overline{x}}\right|\leqslant\left|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\right|$
2. $X=x^2 \qquad \left|X(\overline{x})-X(\overline{\overline{x}})\right|=\left|\overline{x}^2-\overline{\overline{x}}^2\right|=\left|\overline{x}+\overline{\overline{x}}\right|\cdot\left|\overline{x}-\overline{\overline{x}}\right|$

$$D\text{ - огр.}\Rightarrow X=x^2\in\mathrm{Lp}_x(D)\ \notin\mathrm{Lp}_x(\mathbb{R})$$

Опр

$$X\in\mathrm{Lp}_x^{loc}(G) \qquad \underbrace{G}_{\text{обл}}\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

если $\forall(t_0,x_0)\in G \quad \exists$ окр. $U(t_0,x_0)\subset G:$

$X\in\mathrm{Lp}_x(U(t_0,x_0))$

Пример

$$X=x^2\in\mathrm{Lp}_x^{loc}(\mathbb{R})$$

Замечание

$$X\in\mathrm{Lp}_x(G)\Rightarrow X\in\mathrm{Lp}_x^{loc}(G)$$

$$\not\Leftarrow$$

Теорема

$X(t,x)$ - непр

$X(t,x) \in \mathrm{Lp}_x^{loc}(G) \quad G$ - обл. $\quad G \subset \mathbb{R}^{n+1}$

D - комп. $\quad D \subset G$

$\Rightarrow X(t,x) \in \mathrm{Lp}_x(D)$

Док-во (от противного)

$\exists \underbrace{D}_{\text{комп.}} \subset G$

$\forall L > 0 \quad \exists (t,\ \overline{x}),\ (t,\ \overline{\overline{x}}) \in D:$

$\left|X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}})\right| > L\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad (2)$

$\{L_k\}_{k=1}^{\infty}:\ L_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty \qquad \exists\{(t_k,\overline{x}_k)\}_1^{\infty},\ \{(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\}_1^{\infty} \subset \underset{\text{комп}}{D}:$

$\left|X(t_k,\overline{x}_k) - X(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\right| > L_k\left|\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}_k\right| \qquad (3)$

$\exists$п/послед $\{(t_k,\overline{x}_k)\}$, сх к $(t_0,\overline{x_0}):(t_{k_m},\overline{x}_{k_m}) \underset{n\to+\infty}{\to} (t_0,\overline{x}_0)$

$\exists$п/послед $\{(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\}$, сх к $(t_0,\overline{\overline{x_0}}):(t_{k_{m_j}},\overline{\overline{x}}_{k_{m_j}}) \underset{j\to+\infty}{\to} (t_0,\overline{\overline{x}}_0) \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow (t_{k_{m_j}},\overline{x}_{k_{m_j}}) \underset{k\to+\infty}{\to} (t_0,\overline{x}_0)$

$$\begin{cases}(t_k,\ \overline{x}_k) \to (t_0,\ \overline{x_0}) \in D \\ (t_k,\ \overline{\overline{x}}_k) \to (t_0,\ \overline{\overline{x_0}}) \in D\end{cases}$$

I) $\quad \overline{x}_0 \neq \overline{\overline{x}}_0$

$$\frac{\left|X(t_k,\overline{x}_k) - X(t_k,\overline{\overline{x}})\right|}{\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right|} \underset{k\to+\infty}{\to} \frac{\left|X(t_0,\overline{x}) - X(t_0,\overline{\overline{x}})\right|}{\left|\overline{x}_0 - \overline{\overline{x}}_0\right|} = N$$

$\Rightarrow \exists k_1 : \forall k > k_1 \quad \left|X(t_k,\overline{x}_k) - X(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\right| \leqslant (N+1)\left|\overline{x}_k - \overline{\overline{x}}_k\right| \qquad (4)$

$\exists k_2 : \forall k > k_2 \quad L_k > N+1 \qquad \forall k > \max(k_1,k_2)$ верно (3), (4)?

II) $\quad \overline{x}_0 = \overline{\overline{x}}_0$

$\exists U(t_0,\overline{x}_0) \subset G: \quad X(t,x) \in \mathrm{Lp}_x(U(t_0,x_0))$

$\exists k_0 : \forall k > k_0 \qquad (t_k,\overline{x}_k) \in U(t_0,\overline{x_0}), \quad (t_k,\overline{\overline{x}}_k) \in W(t_0,x_0)$

$\exists L : \forall (t_k,\overline{x}_k),(t_k,\overline{\overline{x}}_k) \in U(t_0,\overline{x}_0)$

$\left|X(t_k,\overline{x}_k) - X(t_k,\overline{\overline{x}}_k)\right| \leqslant L\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}_k\right| \qquad (5)$

$\exists k_{00} : \forall k > k_{00} \qquad L_k > L$

Теорема

$$X \in (t,x) \in C(G), \quad G \text{ - обл} \qquad \frac{\partial X_j}{\partial x_m} \in C(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \in \mathrm{Lp}_x^{loc}(G)$$

Док-во

$$(t_0, x_0) \in G$$

$$\exists \underset{\text{комп}}{D} = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\} \subset G$$

$$(a > 0, b > 0)$$

$$\text{фикс } j \qquad X_j(t,x) = X_j(t, x_1, ..., x_n)$$

$$(t, \overline{x}), (t, \overline{\overline{x}}) \in D$$

$$f(s) = X_j(t, s\overline{x}+(1-s)\overline{\overline{x}}) = X_j(t, s\overline{x}+(1-s)\overline{\overline{x}}, ..., s\overline{x}_n+(1-s)\overline{\overline{x}}_n) \qquad s \in [0,1]$$

Докажем: $\quad (t, s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}}) \in D \quad \forall s \in [0,1]$

$$\left|s\overline{x} + (1-s)\overline{\overline{x}} - x_0\right| = \left|s(\overline{x} - x_0) + (1-s)(\overline{\overline{x}} - x_0)\right| \leqslant s\left|\overline{x} - x_0\right| + (1-s)\left|\overline{\overline{x}} - x_0\right| \leqslant$$

$$\leqslant sb + (1-s)b = b$$

$$\left|X_j(t, \overline{x}) - X_j(t, \overline{\overline{x}})\right| = |f(1) - f(0)| = |f'(\sigma)| \qquad \exists \sigma \in (0,1) \qquad (6)$$

$$f'(s) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial X_j(...)}{\partial x_m}(\overline{x}_m - \overline{\overline{x}}_m)$$

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_m} \in C(\underset{\text{комп}}{D}) \Rightarrow \exists K : \left|\frac{\partial X_j}{\partial x_m}\right| \leqslant K \qquad \forall m = 1, ..., n$$

Очев. $\left|\overline{x}_m - \overline{\overline{x}}_m\right| \leqslant \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right|$

$$\Rightarrow |f'(\sigma)| \leqslant \sum_{m=1}^{n} K\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| = nK \cdot \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad (8)$$

$$(6), (8) \Rightarrow \left|X_j(t, \overline{x}) - X_j(t, \overline{\overline{x}})\right| \leqslant nK\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad \forall j = 1, ..., n$$

$$\Rightarrow \left|X(t, \overline{x}) - X(t, \overline{\overline{x}})\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(X_j(t, \overline{x}) - X_j(t, \overline{\overline{x}}))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} n^2k^2\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right|^2} =$$

$$= n\sqrt{n}K\left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \Rightarrow$$

$$\exists U(t_0, x_0) \subset D \subset G : \qquad X(t,x) \in \mathrm{Lp}_x(U(t_0, x_0))$$

7 Приближение Пикара

Опр (инт. дифф. уравнение)

(1) $\dot{x} = X(t,x) \qquad X(t,x) \in C(D) \qquad (D$ – произв. мн-во$)$

(2) $(t_0, x_0) \in D$ - з. Коши

(3) $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, x) d\tau$

Решение (3) - ф-я $x = \varphi(t) \qquad t \in <a, b>$, подстав в (3) $\to$ тождество

Утв

З.Коши $(1), (2)$ эквив. инт. уравнению (3)

Док-во

1. $\Leftarrow \quad \exists x = \varphi(t)$ - реш (3) $\Leftrightarrow \varphi(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \qquad (4)$

$t = t_0 : \quad \varphi(t_0) = x_0$

$\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$\Rightarrow \varphi(t)$ - реш з. К $(1), (2)$

2. $\Rightarrow \quad x = \varphi(t)$ - реш. з.К $(1), (2) \qquad t \in (a, b)$

$\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

инт. от t_0 до t

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \Rightarrow \varphi(\tau) \text{ - решение з.К.}$$

$\varphi_0(t) = x_0 \qquad \exists (t_0, x_0) \in D \quad \forall t \in <a_1, b_1>$

$\varphi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_0(\tau))) d\tau \quad \exists (t, \varphi_1(t)) \in D \qquad \forall t \in <a_2, b_2> \subset <a_1, b_1>$

$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_1(\tau)) d\tau ...$

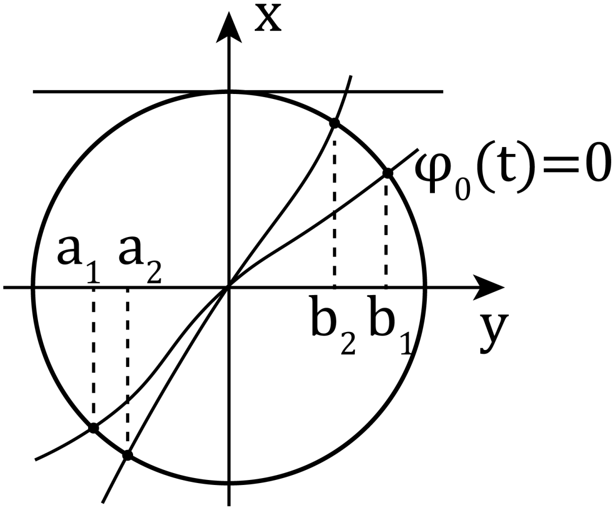
$\exists (t, \varphi_{k-1}(t)) \in D \qquad \forall t \in <a_k, b_k> \subset <a_{k-1}, b_{k-1}>$

$\Rightarrow \varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau \qquad (6)$ опред $\varphi_k(t)$ при $t \in <a_k, b_k>)$

../../../template/template

Пример

$$(t,x) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad D = \{(t,x) : x^2 + t^2 \leqslant 1\}$$



1. $(t_0, x_0) = (0, 0)$

   $\varphi_0(t) = 0$ - опред при $t \in [-1; 1]$

   $\varphi_1(t)$ - опред на $[a, b]$

2. $(t_0, x_0) = (0, 1) \qquad \varphi_0(t) \equiv 1$ опред при $t = 0$

Теорема (Пикара)

$$(1), (2) \qquad X \in C(D), \quad D \text{ - замкн} \qquad (D \subset \mathbb{R}^{n+1})$$

$X \in \mathrm{Lip}_x(D)$

$\varphi_k(t)$ - опред на $[a, b] \quad \forall k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad \varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \varphi(t) \text{ и } \varphi(t) \text{ - реш З.К. } (1), (2)$$

Док-во

Ряд $\quad \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \quad (6)$

$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + ...$

$S_k(t) = \varphi_k(t)$

$|\varphi_0(t)| = |x_0|$

$$(7) \quad |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} X(\tau, x_0) d\tau\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |X(\tau, x_0)| \, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant M \, |t - t_0| \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\exists M : |X(t, x_0)| \leqslant M \quad \forall t \in [a, b]$$

по усл : $\exists L > 0 : \forall (t, \overline{x}), (t, \overline{\overline{x}}) \in D \qquad \left|X(t, \overline{x} - X(t, \overline{\overline{x}}))\right| \leqslant L \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \quad (8)$

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (X(\tau, \varphi_1(\tau)) - X(\tau, \varphi_0(\tau)))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |X(\tau, \varphi_1(\tau)) - X(\tau, \varphi_0(\tau))| \, d\tau\right| \overset{(8)}{\leqslant} L \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi_1(\tau) - \varphi_0|\right| d\tau \underset{(7)}{\leqslant}$$

$$\leqslant LM \left|\int_{t_0}^{t} |\tau - t_0| \, d\tau\right| = M \cdot L \frac{|t - t_0|^2}{2} = \frac{M}{L} \frac{(L \, |t - t_0|^2)}{2} \quad (9)$$

$$|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| \leqslant \frac{M}{L} \frac{(L \, |t - t_0|)^k}{k!}$$

$$|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |X(\tau, \varphi_k(\tau)) - X(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))| \, d\tau\right| \overset{(8)}{\leqslant}$$

$$\leqslant L \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi_k(\tau) - \varphi_{k-1}(\tau)| \, d\tau\right| \overset{(10)}{\leqslant} L \frac{M}{L} \left|\int_{t_0}^{t} \frac{(L \, |\tau - t_0|^k)}{k!} d\tau\right| =$$

$$= \frac{M}{L} \frac{(L \, |t - t_0|)^{k+1}}{k!()}$$

$$(11) \qquad |\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}| \leqslant \frac{M}{L} \frac{(L(b - a)^k)}{k!}$$

(6) $\qquad$ мажоририруется рядом $\; |x_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L} \frac{(L(b - a))^k}{k!}$

сх-ся к $\; |x_0| + \frac{M}{L}(e^{L(b-a)} - 1)$

$\Rightarrow (6)$ сх. абс. и равномерно на $[a, b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_k(t) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(t)$ и $(t, \varphi(t)) \in D \qquad \forall t \in [a, b]$

$$(5) \qquad \varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau$$

из $(8) : |X(t, \varphi(t)) - X(t, \varphi_k(t))| \leqslant L \left| \underset{\rightrightarrows 0}{\varphi(t) - \varphi_k(t)} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow X(t, \varphi_k(t)) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} X(t, \varphi(t)) \Rightarrow$ в (5) можно перейти к пределу

$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$, т.е.

$\varphi(t)$ - решение (3) и реш. З.Коши (1),(2)

Следствие

$\varphi_0(t) \equiv x_0$

$$(5) \qquad \varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau$$

$X \in C(\mathbb{R}^{n+1})$

$X \in \mathrm{Lip}_x(\mathbb{R}^{n+1})$

$\Rightarrow \varphi_k(t)$ опред на $\mathbb{R}$ и $\varphi(t)$ опред на $\mathbb{R}$

Док-во

$\varphi_k(t)$ опред на $\mathbb{R}$ (по (5))

$\{h_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad h_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty$

$\forall [t_0 - h_k, t_0 + h_k]$ верна Т. Пеано, т.е

$\varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\rightrightarrows} \varphi(t)$ на отрезке $[t_0 - h_k, t_0 + h_k]$

$\forall t -$ фикс $\exists h_k : t \in [t_0 - h_k, t_0 + h_k] \Rightarrow \varphi(t)$ - опред $\forall t \in \mathbb{R}$

Теорема (1)

рассм. (1), (2) $\quad D = \{(t,x) : |t-t_0| \leqslant a, |x-x_0| \leqslant b\} \qquad a>0 \quad b>0$

$$X \in C(D) \Rightarrow \exists M : |X(t,x)| \leqslant M \quad \forall (t,x) \in D$$

$$h = \min(a, \frac{b}{m}), \quad X \in \mathrm{Lip}_x(D)$$

$\varphi_k(t)$ опред на $[t_0-h, t_0+h]$ и $\varphi_k(t) \underset{k\to+\infty}{\overset{[t_0-h,t_0+h]}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$реш З. Коши (1), (2)

Док-во

$\varphi_0(t) \equiv x_0$ - опр. на $[t_0-h, t_0+h]$ Пусть φ_{k-1} опред на $[t_0-h, t_0+h]$

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |X(\tau, \underset{\leqslant M}{\varphi_{k-1}}(\tau))| d\tau\right| \leqslant M\,|t-t_0| \leqslant Mh \leqslant b$$

$\Rightarrow (t, \varphi_k(t)) \in D$, т.е $\varphi_k(t)$ - опред на $[t_0-h, t_0+h]$

Следствие (из теоремы 1)

$$X \in C(G) \quad X \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(G) \qquad G \text{ - обл. } G \subset \mathbb{R}^{n+1} \qquad (t_0, x_0) \in G$$

$\Rightarrow \exists h:$ при $t \in [t_0-h, t_0+h]$ прибл. Пеано $\varphi_k(t) \underset{k\to+\infty}{\overset{[t_0-h,t_0+h]}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$ - реш. З.К (1)(2)

Док-во

$$\forall (t_0, x_0) \in G \quad \exists a>0,\ b>0:$$

$$D = \{(t,x) : |t-t_0| \leqslant a, \quad |x-x_0| \leqslant b\} \subset G$$

и $X(t,x) \in \mathrm{Lip}_x(D)$

Замечание

T1 вместе со следствием - теорема о сущестовании решения

Замечание

$$X \in C(\mathbb{R}^{n+1}), \quad X \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(\mathbb{R}^{n+1}) \not\Rightarrow \varphi_k(t) \quad \text{опред на } \mathbb{R}$$

Док-во (Пример)

$$\dot{x} = x^2 + 1 \qquad \text{З.К } (0,0)$$

$$x^2 + 1 \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(\mathbb{R}) \qquad x^2 + 1 \not\in \mathrm{Lip}_x(\mathbb{R})$$

$$\frac{dx}{x^2+1} = dt$$

$$\operatorname{arctg} x = t + c \qquad \text{реш. З.К. } x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Теорема (2)

$$X \in C(G) \qquad X \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(G) \qquad (t_0, x_0) \in G \qquad G \text{ - обл}$$

$$\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{matrix} \quad \text{реш З.Коши } (1),(2) \text{ опред на } < a, b >$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \equiv \psi(t) \qquad \forall t \in < a, b >$$

../../../template/template ../../../template/KillContents
2019-10-31

Док-во

$$\Theta \in <a, b> \quad \text{д-м } \varphi(\Theta) = \psi(\Theta)$$

$$\text{От прот: пусть } \varphi(\Theta) \neq \psi(\Theta) \Rightarrow \Theta \neq t_0$$

$$(\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0) \quad \text{НУО } \Theta > t_0$$

$$\Gamma_1 = \{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0, \Theta]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(t, \psi(t)) : t \in [t_0, \Theta]\}$$

$$\Gamma_j \text{ - замк., огр. } (j = 1, 2)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ - замк., огр.}$$

$$\Rightarrow X \in \mathrm{Lip}_x(\Gamma)$$

$$\exists L : \forall (t, \overline{x}), (t, \overline{\overline{x}}) \in \Gamma$$

$$\left|X(t, \overline{x}) - X(t, \overline{\overline{x}})\right| \leqslant L \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad (\#))$$

$$\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{matrix} \text{ - реш. З.К. (1)(2)} \Rightarrow \begin{matrix} \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \\ \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau, \psi(\tau)) d\tau \end{matrix}$$

$$\forall t \in <a, b> \Rightarrow \text{ и } \forall t \in [t_0, \Theta]$$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \int_{t_0}^t |X(\tau, \varphi(\tau)) - X(\tau, \psi(\tau))| \, d\tau \overset{(\#)}{\leqslant}$$

$$\leqslant L \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t) \qquad \forall t \in [t_0, \Theta]$$

$$u(\tau) \leqslant L \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \qquad \text{(Л. Гронуолла } c = 1)$$

8 Продолжение решений

Пример (1)

$$\dot{x} = x^2 + 1 \qquad \text{З.К.}(0, 0)$$

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = dt$$
$$\operatorname{arctg} x = t + c$$

$$x = \operatorname{tg} t \quad \text{ реш З.К, опред на } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Пример (2)

$$\dot{x} = x^2 \qquad (0,1)$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt$$

$$-\frac{1}{x} = t + c$$

$$x = -\frac{1}{t+c}$$

$$x = \frac{1}{1-t}$$

$$t \in (-\infty, 1)$$

Напоминание

$$(1) \qquad \dot{x} = X(t,x) \quad \begin{cases} X \in C(G) \\ X \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(G), \qquad \underset{\text{обл}}{G} \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$$

$x = \varphi(t)$ - реш (1), $\quad t \in (a,b)$

Опр

реш $x = \varphi(t), \quad t \in (a,b)$ продолжимо вправо за b

если $\exists$ реш (1) $\quad x = u(t)$, опред при $t \in (a, \overline{b}) \quad \overline{b} > b$,

такое, что $u(t) \equiv \varphi(t)$ на (a,b)

$u(t)$ называется продолжением решения $\varphi(t)$

Аналогично определяется продолжимость решения влево за a

Теорема

реш $x = \varphi(t) \quad (t \in (a,b))$ - продолжимо вправо за b

$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{t \to b-} \varphi(t) = \xi$, и $(b, \xi) \in G$

Док-во

$\Rightarrow)\quad \exists$ реш $x = u(t) \qquad t \in (a, \overline{b})$

$\overline{b} > b, \quad u(t) \equiv \varphi(t) \quad$ на (a, b)

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to b-} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to b} u(t) = u(b), \quad (b, u(b)) \in G$

$\Leftarrow)\quad \varphi(b) = \xi$ - по непр

З.Коши $(b, \xi) \in G$

$\exists h > 0:$ на $[b-h, b+h]$ опред. решение (1) $\quad x = w(t): \quad w(b) = \xi$

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (a, b] \\ w(t), & t \in [b-h, b+h] \end{cases} \text{ - продолжение } \varphi(t)$$

Определено корректно, т.к. $\varphi(t) \equiv w(t)$ на $[b-h, b]$ (почему? А потому что они решают одну задачу Коши)

8.1 Максимальный промежуток задания решения

Теорема (2)

(1) $\quad \dot{x} = X(t, x)$

$x = \varphi(t)$ - реш (1), $\quad t \in (a, b) \quad$ (м.б $b = +\infty$)

$\Rightarrow \exists \beta \geqslant b : \exists$ реш (1) $x = u(t) : \varphi(t) \equiv u(t)$ на (a, b)

опред на (a, β) и не продолжимо вправо за β

Док-во

$b = +\infty \Rightarrow \beta = +\infty \Rightarrow$ все д-но

$\varphi(t)$ - не продолжимо вправо за $b \Rightarrow \beta = b \Rightarrow$ все доказано

Осталось: $b < +\infty$ и $\varphi(t)$ - продолжимо вправо за b

$B = \{\overline{b} : u(t)$ - продолжение $\varphi(t)$, опред на $(a, \overline{b})\}$

$\overline{b} \in B \quad$ и $\quad b < \Theta < \overline{b} \Rightarrow \Theta \in B$

$\overline{b}_1, \overline{b}_2 \in B, \quad \overline{b}_1 < \overline{b}_2 \qquad u_{\overline{b}_1}, u_{\overline{b}_2}$ - соотв. прод-я $\varphi(t)$

$\Rightarrow u_{\overline{b}_1} \equiv u_{\overline{b}_2}$ на $(a, \overline{b}_1)$

$\beta = \sup B$

если $\beta = +\infty \Rightarrow$ все доказано

если $\beta < +\infty$

$\exists$ продолжение $\varphi(t)$ на (a, β), т.е. $u_\beta(t)$ - реш (1) опред на (a, β)

$(u_\beta(t) \equiv \varphi(t)$ на $(a, b))$

$t \in [b, \beta) \Rightarrow \exists \overline{b} \in B :$ опред-но $u_{\overline{b}}(t)$

Докажем, что $u_\beta(t)$ не продолжимо ща β вправо

$$\urcorner \exists \widetilde{\beta} > \beta : U_\beta(t) \text{ - продолжимо до } \widetilde{\beta} \Rightarrow \widetilde{\beta} \in B$$

Противоречит супремуму

Теорема (2')

Аналогично влево

Следствие

$\forall$ реш (1) $\quad x = \varphi(t),$ опред на (a, b)

$$\exists \begin{cases} \alpha \leqslant a \\ \beta \geqslant b \end{cases} \quad : \quad \exists \text{ реш } (1) \quad x = w(t) : \quad w(t) \equiv \varphi(t) \text{ на } (a, b)$$

$w(t)$ опред на (α, β) и не продолжимо ни вправо за β ни влево за α

Док-во

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in (a, \beta) \qquad (\beta \text{ из } T_2) \\ v(t), & t \in (\alpha, b) \qquad (\alpha \text{ из } T_2') \end{cases}$$

$(u(t) \equiv v(t) \equiv \varphi(t)$ на $(a, b))$

Опр

промежуток (α, β) называется максимальным промежутком задания

Теперь мы рассматриваем решения с макс. промежутком задания.