141, ДЗ 2, Определители. Подпространства

Задачи

Задача 1. Найдите базис суммы и пересечения для подпространств $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 6}$ вида $U_1 = \{f \in V \mid f \,\vdots\, t^2 - 4t + 3\}$ и $U_2 = \{f \in V \mid f \,\vdots\, t^2 - 5t + 4\}$

Задача 2. Пусть U_1, U_2, U_3 – подпространства конечномерного пространства V. Доказать, что подпространство $(U_1 \cap U_2) + (U_2 \cap U_3) + (U_3 \cap U_1)$ содержится в подпространстве $(U_1 + U_2) \cap (U_2 + U_3) \cap (U_3 + U_1)$ и разность размерностей этих подпространств есть четное число.

Задача 3. Найти базис пересечения и суммы подпространств $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ в $\mathbb{R}^5$ если

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Найдите определитель

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & c_n \\ -1 & x & \dots & 0 & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_1 \end{vmatrix}$$

Задача 5. Обратите матрицу и посчитайте её определитель

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Определители

В этот раз мы поговорим об определителях. Определитель это некоторый способ численно померить, насколько ваша матрица обратимо. Точнее всем вам известно утверждение

Утверждение 1. Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда её определитель не ноль.

В связи с этим в большинстве задач интерес представляет вопрос, когда определитель равен нулю. Однако, как мы увидим позже не стоит игнорировать и его точное значение.

Как посчитать определитель. Строго говоря, определитель задан формулой

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Однако считать по этой формуле неудобно. Гораздо удобнее пользоваться различными свойствами определителя

Теорема 1. Отображение $\det\colon M_n(K) \to K$ обладает следующими свойствами:
1) Определитель меняется при элементарных преобразованиях столбцов $\det(\dots, u_i, \dots, u_j, \dots) = \det(\dots, u_i, \dots u_j + \lambda u_i, \dots)$ и аналогично строк.
2) Определитель линеен по строкам и столбцам. В частности, $\det(\dots, \lambda u_i, \dots) = \lambda \det(\dots, u_i, \dots)$. Аналогично по строкам.
3) При перемене пары строк или столбцов определитель меняет знак.
4) Определитель верхнетреугольной или нижнетреугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

Этих свойств хватает для того чтобы посчитать определитель и почти всегда их применение оправдано. Например:

Упражнение 1. *Найдите определитель*

$$\det\begin{pmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix}$$

Доказательство. Решение Перед тем как посчитать определитель стоит применить элементарное преобразование столбцов:

$$\det\begin{pmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 13547 & 100 \\ 28423 & 100 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 13547 & 100 \\ 14876 & 0 \end{pmatrix} = -1487600$$

□

Так как определитель более интересен в задачах с параметром, то удобно представлять определитель в качестве произведения выражений от параметра, так как это упрощает нахождение условий обнуления определителя.

Упражнение 2. *Найдите определитель*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Решение. В данном случае удобно просто переставить строчки, а затем столбцы

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1).$$

□

Такой ответ удобнее, так как итоговый многочлен оказался разложен на множители. Это упрощает разбор ситуации, когда определитель равен нулю. Во всех дальнейших ситуациях, если возможно, стоит получать ответ разложенным на множители.

Упражнение 3. *Вычислите определитель матрицы*

$$\begin{pmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{pmatrix}$$

При вычислении определителя матриц переменного размера удобнее, опять же, пользоваться элементарными преобразованиями

Упражнение 4. *Вычислите определитель матрицы*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Подпространства

Большая часть векторных пространств появляются как подпространства внутри больших объемлющих пространств. Приведём примеры:

1) Любая прямая, проходящая через 0 на плоскости или в $\mathbb{R}^3$ является подпространством. Аналогично, любая плоскость в трёхмерном пространстве, содержащая ноль даст двумерное подпространство. Вообще, любые подпространство размерности один будут называться прямыми, а подпространства размерности 2 – плоскостями.

2) Вообще, если рассмотреть наименьшее подпространство V содержащее векторы $v_1, \dots, v_n \in V$, то получится подпространство размерности не более n. Это подпространство состоит из всех линейных комбинаций $v_1, \dots, v_n$ и обозначается $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

3) В частности, подпространство многочленов $K[x]_{\leq n}$ ограниченной степени задаётся, как подпространство, порождённое векторами $1, x, \dots, x^n$.

4) Пусть $a_1, \dots, a_n \in K$. Тогда множество столбцов, удовлетворяющих уравнению $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ является подпространством в K^n.

5) Обобщая. Множество решений однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$ является подпространством в пространстве столбцов.

6) Рассмотрим пространство непрерывных функций $C([a, b])$. Тогда множество функций, обращающихся в 0 в фиксированной точке $y \in [a, b]$ является подпространством.

7) Аналогично в пространстве многочленов $K[x]$ множество $\{f \in K[x] \mid f(\lambda) = 0\}$ тоже является подпространством.

8) Множество многочленов в $K[x]$, кратных данному, тоже является подпространством.

9) Более того, множество многочленов, что $f'(\lambda) = 0$ тоже образуют подпространство.

Заметим, что например прямую в трёхмерном пространстве мы можем задать по разному – с одной стороны мы можем задать её направляющим вектором. С другой стороны, мы можем задать её двумя уравнениями. Аналогично плоскость задаётся двумя неколлинеарными векторами, или же одним уравнением.

Это наглядно показывает, что принципиально есть два способа задания подпространств – при помощи образующих или при помощи уравнений. Последние примеры иллюстрируют, как можно задать подпространство при помощи уравнений не переходя к координатам.

Научимся переходить от одного описания к другому.

3. Базис решений однородной системы

Обсудим сначала, как найти базис множества W – решений системы линейных уравнений $Ax = 0$, где $A \in M_{m\times n}(K)$.

Прежде всего стоит понять, как найти хотя бы одно нетривиальное решение такой системы. Для этого можно применить метод Гаусса и привести систему к ступенчатому виду. Осталось найти конкретное ненулевое решение.

Мы знаем, что после такого приведения все переменные разделятся на независимые $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$ и те, которые через них выражаются линейным образом. В таком случае, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_{11}x_{i_1} + \dots + c_{1k}x_{i_s} \\ \vdots \\ x_{i_1} \\ \vdots \\ c_{n1}x_{i_1} + \dots + c_{nk}x_{i_s} \end{pmatrix} = x_{i_1}C_1 + \dots + x_{i_s}C_s,$$

где $C_j \in K^n$, составлены из c_{ij}. Заметим, что это равенство означает, что C_j порождают множество W.

Осталось заметить, что C_j решение системы $Ax = 0$, когда все переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_s}$, кроме j-ой равны 0. Тогда заметим, что если вырезать из всех C_j только координаты $i_1, \dots, i_s$, то получатся стандартные базисные столбцы пространства K^s. Они независимы. Следовательно и объемлющие C_j независимы. В частности, размерность W равна числу независимых параметров.

Пример: Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем однородную систему

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Параметра два – это x_3, x_4. Подставляем стандартные вектора из K^2. Берём $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. Тогда $x_2 = 0, x_1 = 1$. Берём $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Тогда $x_1 = 0, x_2 = -1$. Итого базис пространства решений состоит из двух векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Как же перейти от задания пространства образующими (например, базисом) к заданию при помощи уравнений?

Пусть $W = \langle v_1, \dots, v_s\rangle \leq K^n$. Попробуем найти хотя бы одно уравнение, которому удовлетворяют элементы W. Каждое уравнение мы будем задавать строками y длины n. Тогда тот факт, что элемент x будет удовлетворять уравнению, запишется как $yx = 0$.

Заметим, что если набор $v_1, \dots, v_n$ удовлетворяет уравнению y, то этому уравнению удовлетворяет и всё W. Таким образом нам необходимо найти y, что $yv_1 = \dots = yv_s = 0$. Но это система однородных уравнений на y!

Здесь мы видим, что множество уравнений, которым удовлетворяет W само является векторным пространством. Нам надо найти его базис – это и будет наименьший набор уравнений, который задаст W.

4. Базис суммы и пересечения

Есть две основные конструкции новых подпространств из старых – это пересечение подпространств и сумма подпространств.

Определение. Суммой двух подпространств U, V в пространстве W называется подпространство

$$U + V = \{w \in W \,|\, \exists u \in U \text{ и } v \in V, \text{ что } w = u + v\}.$$

Научимся находить базис суммы и пересечения двух подпространств. Пусть $U_1 = \langle u_1, \dots u_k\rangle$, а $U_2 = \langle v_1, \dots, v_l\rangle$. Тогда порождающую систему для суммы $U_1 + U_2$ можно найти следующим образом – надо объединить наборы образующих $u_1, \dots, u_k$ и $v_1, \dots, v_l$. Осталось выделить из этого набора линейно независимый набор.

Для нахождения базиса пересечения надо постараться немного больше. Будем предполагать, что u_i и v_j базисы U_1 и U_2 соответственно. Для того, чтобы задать элемент из $U_1 \cap U_2$ необходимо и достаточно существование коэффициентов λ_i и μ_j, что

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = -(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_l),$$

то есть, вектора u_i и v_j должны обладать линейной зависимостью вида $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_l = 0$. Как и раньше пусть $e_1, \dots, e_n$ базис V. Найти все такие зависимости не составляет труда. А именно, надо составить матрицу A со столбцами $[u_1] \dots [v_l]$ и привести её к ступенчатому виду, что автоматически даст решение. Как же теперь найти базис $U_1 \cap U_2$?

Для этого построим $f_1, \dots, f_s$ – базис множества решений системы $Ax = 0$. Для каждого такого вектора возьмём его μ-часть и построим сумму $w_i = \sum \mu_i v_i$. По построению такая сумма равна $-\sum \lambda_i u_i$, то есть является элементом пересечения. Теперь необходимо понять почему указанная система векторов независима и порождает всё пространство. Порождаемость ясна, так как любой вектор из пересечения соответствует некоторой μ-части линейной комбинации, которая есть сумма f_i. Независимость: если есть линейная зависимость для μ частей f_i, то есть нетривиальная линейная зависимость с нулевой μ частью. Но тогда это линейная зависимость между векторами u_i. Противоречие! Если же μ-части f_i независимы, но зависимы соответствующие им вектора w_i, то получаем, что есть такая ненулевая μ-часть, которая даёт нулевой вектор из U_2, но это противоречит тому, что v_i базис U_2.

Замечание. Заметим, что для нахождения базиса суммы и пересечения необходимо привести к ступенчатому виду одну и ту же матрицу. Таким образом, обе эти задачи удобно решать одновременно.

Упражнение 5. *Найти базис пересечения и суммы подпространств $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ в $\mathbb{R}^5$ если*

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\\3\end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\\2\end{pmatrix},\ v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\\7\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\5\\1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Следствие 1 (Формула Грассмана)**.** $\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim U \cap V$.