2019-10-15

Свойство

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Док-во

$$\left.\begin{aligned} \dim U^\perp + \dim U = \dim V \\ \dim (U^\perp)^\perp + \dim U^\perp = \dim V \end{aligned}\right| \Rightarrow \dim (U^\perp)^\perp = \dim U$$

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V\}$$

Опр

$$U < V, \quad v \in V$$

$$U \oplus U^\perp = V$$

$$\Rightarrow \exists! u \in U,\ w \in U^\perp : v = u + w$$

u называется ортогональной проекцией

$$\text{Обозначение: } \operatorname{pr}_U v \overset{\text{def}}{=} u$$

$$v = \operatorname{pr}_U v + w \Rightarrow (v, u) = (\operatorname{pr}_U v, u)$$

Свойства (орт. проекции)

1. $\operatorname{pr}_U(v + v') = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{pr}_U v'$

$$v = u + w,\ u \in U, w \in U^\perp$$

$$v' = u' + w',\ u \in U,\ w' \in U^\perp$$

$$v + v' = (\underset{\in U}{u + u'}) + (\underset{\in U^\perp}{w + w'})$$

2. $\|v - \operatorname{pr}_U v\| \leqslant \|v - u\| \quad \forall u \in U$

$$\|v - u\|^2 = \|\underset{\in U^\perp}{v - \operatorname{pr}_U v}\|^2 + \|\underset{\in U}{\operatorname{pr}_U v - u}\|^2$$

Опр

$e_1, ..., e_n$ - базис V

Базис называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \left[\begin{aligned} &0, i \neq j \\ &1, i = j \end{aligned}\right.$$

Алгоритм

Процесс ортоганализации Грамма-Шмидта:

$$e_1, ..., e_n \text{ - базис}$$

Хотим ортонормированный $f_1, ..., f_n :< f_1, ..., f_k >=< e_1, ...e_k > \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$:
Строим по индуции:
Б.И. k=1:

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

И.П. $k-1 \to k$:

$$f_k = e_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f_i$$

$$(f_k, f_j) \stackrel{?}{=} 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1$$

$$(f_k, f_j) = (e_k, f_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \underbrace{(f_i, f_j)}_{=\lambda_j}$$

$$\lambda_j = -(e_k, f_j) \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant k-1$$

Ортонормируем f_k, чтобы $(f_k, f_k) = 1$

Утв

Если $e_1, ..., e_n$ - ОНБ U

$$\operatorname{pr}_U v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i$$

Док-во

Хотим доказать $v - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i \in U^{\perp}$
Достаточно доказать, что вектор ортогонален любому

$$(v - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i) \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{e_j} = (v, e_i) - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)(e_i, e_j)$$

Пример

$$\mathbb{R}^n$$

$$(x; y) = \sum x_i y_i$$

$$e_i = (0, 0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$$

Пример

$$T_n = \{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\}$$

$$(f;g) = \int_0^{2\pi} fg dx$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx_{k=1,\dots,n}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx_{k=1,\dots,n} \right\}$$

$$\mathrm{pr}_{T_n} f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) \cdot \sin kx$$

Опр

$A \in M_n(K)$ назыв. ортогональной, если

$$A^T A = E$$

$O_n(K)$ - множество орт. матриц

Утв

$O_n(K)$ - группа по умножению

Док-во

$$\left. \begin{matrix} A^T A = E \\ B^T B = E \end{matrix} \right| \Rightarrow (AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{E} B = B^T B = E$$

$$A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} \stackrel{?}{=} E$$

$$(A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = E$$

Утв

$L \in \mathscr{L}(V)$ (пр-во лин. функционалов)

Следуюшие утверждения равносильны:

1. $(L_v, L_{v'}) = (v, v') \quad \forall v, v' \in V$
2. $\|L_v\| = \|v\| \qquad \forall v \in V$

3. $[L]_e \in O_n(\mathbb{R})$, если e - отронорм. базис

Док-во

$2 \to 1$

$$(v, v') = \frac{1}{2}(\|v + v'\| - \|v\|^2 - \|v'\|^2)$$

$3 \to 2$

$$[L_v]_e = [L]_e[v]_e$$

$$\|L_v\|^2 = (L_v, L_v) = [L_v]_e^T \Gamma_e [L_v]_e = [L_v]_e^T [L_v]_e =$$

$$= [v]_e^T \underbrace{[L]_e^t [L]_e}_{=E} [v]_e = [v]_e^T [v]_e = [v]_e^T \Gamma_e [v]_e = (v, v) = \|v\|^2$$

$1 \to 3$

$$\mathcal{E}_i^T [L]_e^T [L]_e \mathcal{E}_j$$

$$\mathcal{E}_i = (0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$$

$$\mathcal{E}_i^T A \mathcal{E}_j = a_{ij}$$

$$\mathcal{E}_i = [e_i]_e$$

$$\mathcal{E}_j = [e_j]_e$$

$$[e_i]^T [L]_e^T [L]_e [e_j]_e = [L_{e_i}]_j^T [L_{e_j}]_e = [L_{e_i}]_e^T \Gamma_e [L_{e_j}]_e = (L_{e_i}, L_{e_j}) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$