# Билеты по мат. анализу, 2 сем

(преподаватель Кононова А. А.)
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

## Содержание

Интегральные суммы Римана. Интегрируемость по Риману.

**Опр**

$\tau$-разбиение на $[a;b]$:

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^{n} : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

**Опр**

Мелкость разбиения $\tau$:

$$\lambda(\tau) = \underset{k=0...n-1}{max}\ \Delta_k = x_{k+1} - x_k$$

**Опр**

Оснащение разбиения $\tau$:

$$\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

**Опр**

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, тогда сумма Римана:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k$$

**Опр**

Интегралом Римана функции $f$ по отрезку $[a,b]$ называется $I \in \mathbb{R}$:

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi\ |S(f, \tau, \xi) - I| < \mathcal{E}$$

то есть неформально

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} S(f, \tau, \xi) = I$$

**Опр**

Будем говорить, что $f$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, если $\exists I$ - интеграл функции $f$ по Риману на $[a,b]$. И записывать это как

$$f \in R[a,b],\ I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f$$

**Пример**

$$f(x) = C$$

**Решение**

$$\forall\tau\ \forall\xi\ S(f,\tau,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k = C\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k = C(b-a)$$

$$I = C(b-a) = \int\limits_a^b C dx$$

**Пример**

Функция Дирихле $\mathcal{D}(x)=\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ на отрезке $[0,1]$

**Опр**

$$A\subset\mathbb{R},\ \mathcal{X}_{\mathbb{A}} = \begin{cases} 1, & \text{если } x\in A \\ 0, & \text{если } x\notin A \end{cases}$$

**Решение**

Пусть $\tau$ - произвольное разбиение.

$\xi^*=\{\xi_k^*\}:\xi_k^*\in\mathbb{Q}\cap[x_k,x_{k+1}]$ - рациональное оснащение

$\widetilde{\xi}=\{\widetilde{\xi}_k\}:\widetilde{\xi}_k\in[x_k,x_{k+1}]\setminus\mathbb{Q}$ - иррациональное оснащение

$$S(f,\tau,\xi^*)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{D}(\xi_k^*)\Delta_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k=b-a$$

$$S(f,\tau,\widetilde{\xi})=0$$

$\mathcal{D}\notin R[0,1]$. Док-во от противного, пусть это не так, тогда

$$\exists I:\ \forall\mathcal{E}>0\ \exists\delta>0:\forall\tau:\ \lambda(\tau)<\delta,\ \forall\xi\ |S(f,\tau,\xi)-I|<\mathcal{E}$$

Возьмём $\xi^*$ и $\widetilde{\xi}$:

$$1=|S(f,\tau,\xi^*)-S(f,\tau,\widetilde{\xi})|\leqslant|S(f,\tau,\xi^*)-I|+|S(f,\tau,\widetilde{\xi})-I|\leqslant 2\mathcal{E}$$

**Пример**

$f(x)=\mathcal{X}_0,\ f\in R[-1,1]$

**Решение**

Покажем, что $I=0$. $\xi_i$ на интервалах $\delta_i$ может $max$ два раза попадать в 0. Пусть это будет при $k$, $k+1$. Тогда:

$$S(f,\tau,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta_i=\sum_{i=0,i\neq k,k+1}^{n-1}f(\xi_i)\Delta_i+f(\xi_k)\Delta_k+f(\xi_{k+1})\Delta_{k+1}=$$

$$=f(\xi_k)\Delta_k+f(\xi_{k+1})\Delta_{k+1}\leqslant\Delta_k+\Delta_{k+1}<2\lambda(\tau)\to 0$$

Интегрируемость по Риману. Ограниченность интегрируемой функции.

Определение интегрируемости см. в первом билете.

**Утв**

Если $f \in R[a,b]$, то $f$ - ограничена на $[a,b]$.

**Док-во (от противного)**

Пусть $\sup\limits_{[a,b]} f(x) = +\infty$.
Для $\mathcal{E} = 1$ $\exists \delta > 0 : \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \xi \ |S(f,\tau,\xi) - I| < \mathcal{E}$.
Зафиксируем $\tau^* : \lambda(\tau^*) < \delta$:

$$\text{Так как } \sup_{[a,b]} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists k : \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = +\infty.$$

"отпустим $\xi_k^*$". $S(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta_i = \sum\limits_{i \neq k}^{n-1} f(\xi_i)\Delta_i + f(\xi_k)\Delta_k$ (неограничена, выберем $\xi_k$ так чтобы) $> \mathcal{E} + I$, Противоречие.

Суммы Дарбу, их свойства (связь с суммами Римана, поведение при измельчении).

**Опр**

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\tau$-разбиение.
$M_k = \sup\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, тогда:

$S^*(f,\tau) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k\Delta_k$ - верхняя сумма Дарбу

$S_*(f,\tau) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k\Delta_k$ - нижняя сумма Дарбу

**Опр**

$\tau'$ называется измельчением $\tau$ ($\tau' \prec \tau$), если $\tau \subset \tau'$

**Свойства**

1. $\forall \xi,\ f,\tau$ - зафикс $\Rightarrow S_*(f,\tau) \leqslant S(f,\tau,\xi) \leqslant S^*(f,\tau)$
2. (а) $S^*(f,\tau) = \sup\limits_{\xi} S(f,\tau,\xi)$, (б) $S_*(f,\tau) = \inf\limits_{\xi} S(f,\tau,\xi)$
3. $S^*(f,\tau') \leqslant S^*(f,\tau)$, $S_*(f,\tau') \geqslant S_*(f,\tau)$
4. $\forall \tau_1,\tau_2 :\ S_*(\tau_1) \leqslant S^*(\tau_2)$

**Док-во**

1. Очевидно из определения
2. Докажем пункт (а). Нужно доказать, что:
$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \xi^*\ S(f,\tau,\xi^*) > S^*(f,\tau) - \mathcal{E}$$
$$M_k = \sup_{[x_k,x_{k+1}]} \Rightarrow \exists \xi_k^* : f(\xi_k^*) > M_k - \frac{\mathcal{E}}{b-a}$$
$$S(f,\tau,\xi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi^*)\Delta_k > \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta_k - \frac{\mathcal{E}}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k = S^*(f,\tau) - \mathcal{E}$$
3. Пусть $\tau : x_0 < x_1 < ... < x_n$, добавим $x'$:
$$\tau' : x_0 < x_1 < ... < x_k < x' < x_{k+1} < ... < x_n,$$
$$S^*(f,\tau) - S^*(f,\tau') = \underset{[x_k,x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1}-x_k) - \underset{[x_k,x']}{sup} f(x)(x'-x_k) - \underset{[x',x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1}-x') \geqslant$$
$$\geqslant \underset{[x_k,x_{k+1}]}{sup} f(x)(x_{k+1} - x_k - x' + x_k - x_{k+1} + x') = 0, \Rightarrow S^*(f,\tau') \leqslant S^*(f,\tau)$$
4. Пусть $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ (произведение разбиений в обозначениях Кононовой), тогда $\tau \prec \tau_1, \tau_2$, значит
$$S_*(f,\tau_1) \leqslant S_*(f,\tau) \leqslant S^*(f,\tau) \leqslant S^*(f,\tau_2)$$

Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Критерий Римана (б/д).

**Теорема (критерий Дарбу)**

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

**Док-во**

($\Rightarrow$) Необходимость. $f \in R[a,b] \Rightarrow I \in \mathbb{R}$ :

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta,\ \forall \xi\ |S(f,\tau,\xi) - I| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$I - \frac{\mathcal{E}}{3} \leqslant S_*(f,\tau) \leqslant S(f,\tau,\xi) \leqslant S^*(f,\tau) \leqslant I + \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$0 \leqslant S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leqslant \frac{2\mathcal{E}}{3} < \mathcal{E}$$

($\Leftarrow$) Достаточность.

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta\ S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

$$I^* := \inf_{\tau} S^*(f,\tau),\ I_* := \sup_{\tau} S_*(f,\tau)$$

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E} \Rightarrow I^* = I_* = I$$

$$\forall \xi\ S_*(f,\tau) \leqslant S(f,\tau,\xi) \leqslant S^*(f,\tau) \Rightarrow |S(f,\tau,\xi) - I| < \mathcal{E}$$

**Теорема (критерий Римана)**

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \tau : S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) < \mathcal{E}$$

Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции.

**Опр**

Колебание $f : E \to \mathbb{R}$ на $E \subset \mathbb{R}$, $\quad \omega(f, E) = \sup\limits_{x\in E} f(x) - \inf\limits_{x\in E} f(x)$,

$$d_k = [x_k, x_{k+1}],\ S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k$$

**Теорема (критерий Дарбу, другая форма)**

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k < \mathcal{E}$$

(неформально $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k = 0$)

**Следствие (1)**

$C[a,b] \subset R[a,b]$

**Док-во**

$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ равн. непр. на $[a,b]$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in E$ справедливо $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \mathcal{E}$

$\Rightarrow \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \omega(f, d_k) < \mathcal{E}$, рассмотрим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k < \mathcal{E}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = \mathcal{E}(b-a)\widetilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \text{ по критерию Дарбу } f \in R[a,b]$$

**Следствие (2)**

$f$-ограничена и монотонна на $[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

**Док-во**

$$(f \nearrow)\ \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{f(b) - f(a)},\ \text{пусть } \lambda(\tau) < \delta$$

$$\sum_{k=0}^{k-1} \omega(f, d_k)\Delta_k \leqslant \delta \sum_{k=0}^{k-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \delta(f(b) - f(a)) = \mathcal{E}$$

Интегрируемость кусочно-непрерывной функции.

**<u>Опр</u>**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - кусочно-непрерывная функция, если:

$$f \in C([a, b] \setminus \{t_1, ..., t_n\}) \text{ и } t_1, ..., t_n \text{ - точки разрыва I рода}$$

**<u>Следствие</u> (3)**

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ - кусочно-непрерывная } \Rightarrow f \in R[a, b]$$

**<u>Док-во</u>**

Пусть $A = \{k \in \mathbb{N} | \exists j : t_j \in d_k\}$, $C = \omega(f, [a, b]) < \infty$
Если $k \notin A \Rightarrow f$ - непр. на $d_k \Rightarrow$ р/н $\Rightarrow \exists \delta_k$ из р/н. Причем $|A| \leqslant 2n$, потому что $t_j$ могут попасть в max два соседниих промежутка.
Возьмём $\delta = \min\limits_{k \notin A} \delta_k$, если $\tau : \lambda(\tau) < \delta$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, d_k)\Delta_k = \sum_{k \in A} \omega(f, d_k)\Delta_k + \sum_{k \notin A} \omega(f, d_k)\Delta_k \leqslant 2nC\lambda_k + \mathcal{E} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k <$$

$$< 2nC\lambda(\tau) + \mathcal{E}(b - a) < (\text{пусть } \widetilde{\delta} = \min(\delta, \tfrac{\mathcal{E}}{2nC}), \text{ тогда } \forall \tau : \lambda(\tau) < \delta)$$

$$< \mathcal{E} + \mathcal{E}(b - a) = \mathcal{E}(1 + b - a)$$

Интегрируемость суммы, произведения, модуля.

**<u>Свойство</u> (1)**

$$f, g \in R[a,b] \Rightarrow f+g \in R[a,b]$$

**<u>Док-во</u>**

$$\omega(f+g,E) = \sup_E(f+g) - \inf_E(f+g) \leqslant \sup_E f + \sup_E g - \inf_E f - \inf_E g$$

$$\leqslant \omega(f,E) + \omega(g,E) \to 0 \underset{\text{кр. Дарбу}}{\Rightarrow} f+g \in R[a,b]$$

**<u>Свойство</u> (2)**

$$f \in R[a,b] \Rightarrow f^2 \in R[a,b]$$

**<u>Док-во</u>**

$f$ - ограничено $\Rightarrow \exists M > 0 : |f(x)| \leqslant M \quad \forall x \in [a,b]$

$$\omega(f^2,E) = \sup_E(f^2) - \inf_E(f^2) = \sup_{x_1,x_2\in E}(f^2(x_2) - f^2(x_1)) =$$

$$= \sup_{x_1,x_2\in E}(f(x_2)-f(x_1))(f(x_2)+f(x_1)) \leqslant 2M\omega(f,E) \to 0$$

**<u>Свойство</u> (3)**

$$f, g \in R[a,b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a,b]$$

**<u>Док-во</u>**

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow -f \in R[a,b]$

$$\Rightarrow f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in R[a,b]$$

**<u>Свойство</u> (4)**

$$f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$$

**<u>Док-во</u>**

$||f(x_1)| - |f(x_2)|| \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| \xrightarrow{sup} \omega(|f|,E) \leqslant \omega(f,E) \to 0 \Rightarrow \in R[a,b]$

Интегрируемость функции и ее сужений.

**Свойство** **(5)**

$$f \in R[a,b], \ [c,d] \subset [a,b] \Rightarrow f \in R[c,d]$$

**Док-во**

$f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0:$

для всех $\tau'$ на $[c,d]$ расширенных до $\tau$ на $[a,b]$ :

$$\lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau'} \omega(f, d_k)\Delta_k \Rightarrow \sum_{\text{разб } \tau} \omega(f, d_k)\Delta_k \Rightarrow < \mathcal{E}$$

**Свойство** **(6)**

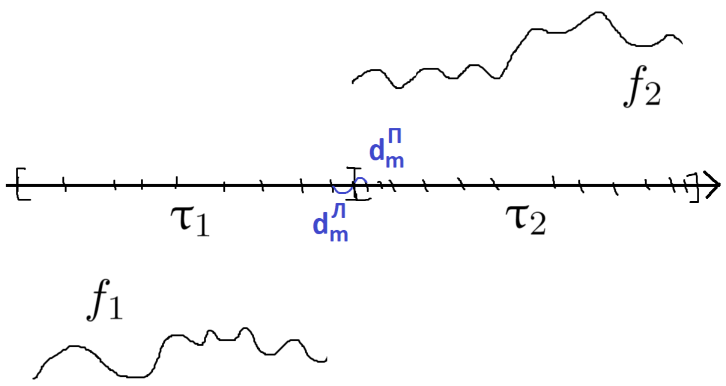
$$a < c < b \Rightarrow R[a,c] \cup R[c,b] \subset R[a,b]$$

**Док-во**

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \text{ на [a,c]} : \lambda(\tau_1) < \delta_1 \Rightarrow S^*(f_1, \tau_1) - S_*(f_1, \tau_1) < \mathcal{E}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ на [c,b]} : \lambda(\tau_2) < \delta_2 \Rightarrow S^*(f_2, \tau_2) - S_*(f_2, \tau_2) < \mathcal{E}$$

$$\text{Пусть } \delta = min(\delta_1, \delta_2), \ \tau = \tau_1 \cup \tau_2, \ \lambda(\tau_1) < \delta, \ \lambda(\tau_2) < \delta$$




Мог произойти разрыв, но $|f| \leqslant M \Rightarrow \omega(f, [a,b]) < W$

$$\sum \omega(f, d_k)\Delta_k = S^*(f,\tau) - S_*(f,\tau) \leqslant S^*(f,\tau_1) - S_*(f,\tau_1) + S^*(f,\tau_2) - S_*(f,\tau_2) +$$

$$+ d_m^{Л}\Delta_m^{Л} + d_m^{П}\Delta_m^{П} \leqslant (d_m = d_m^{Л} \cup d_m^{П}, \ \widetilde{\delta} = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\mathcal{E}}{W}))2\mathcal{E} + W\widetilde{\delta} < 3\mathcal{E}$$

Свойства интеграла Римана (линейность; аддитивность; свойства, связанные с неравенствами).

**Опр**

Если $a < b$, то $\int\limits_b^a f = -\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_a^a = 0$

**Свойство (1, линейность)**

$$\forall f, g \in R[a,b], \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_b^a (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_b^a f + \beta \int\limits_b^a g$$

**Док-во**

Знаем, что $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$,

$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$ (очевидно из определения сумм Римана)

**Свойство (2, аддитивность)**

$$\forall f \in R[a,b],\ a < c < b \Rightarrow \int\limits_b^a f = \int\limits_c^a f + \int\limits_b^c f$$

**Док-во**

Очевидно (аналогично прошлому)

**Свойство (3)**

$$\forall f \in R[a,b],\ a < b,\ f \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geqslant 0$$

**Док-во**

Очевидно из определения суммы Римана

**Свойство (4)**

$$\forall f, g \in R[a,b],\ g(x) \leqslant f(x)\ \forall x \in [a,b], a < b \Rightarrow \int\limits_b^a g \leqslant \int\limits_b^a f$$

**Док-во**

Очевидно, если взять одно разбиение и оснащение

**Свойство (5)**

$$\forall f \in R[a,b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a,b], a < b \Rightarrow m(b-a) \leqslant \int\limits_b^a f \leqslant M(b-a)$$

**Док-во**

С использованием предыдущего свойства взять интеграл

**Свойство (6)**

$$f \in R[a,b],\ m = \inf_{[a,b]} f,\ M = \sup_{[a,b]} f \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int\limits_b^a f = \mu(b-a)$$

**Док-во**

$$\mu = \frac{\int\limits_b^a f}{b-a} \in [m, M] \text{ (по предыдущему неравенству)}$$

**Свойство (7)**

$$f \in C[a,b], \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_b^a f = f(\xi)(b-a)$$

**Док-во**

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя предыдущее свойство

**Свойство (8)**

$$f \in R[a,b], \Rightarrow |\int\limits_b^a f| \leqslant \int\limits_b^a |f|$$

**Док-во**

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f| \Rightarrow -\int\limits_b^a |f| \leqslant \int\limits_b^a f \leqslant \int\limits_b^a |f| \Rightarrow |\int\limits_b^a f| \leqslant \int\limits_b^a |f|$$

Первая теорема о среднем. Следствие для непрерывных функций.

**Теорема**

$$f, g \in R[a, b],\ g \geqslant 0,\ m \leqslant f \leqslant M$$

$$\forall x \in [a, b] \Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int\limits_b^a fg = \mu \int\limits_b^a g$$

**Док-во**

$$mg \leqslant fg \leqslant Mg \Rightarrow m \int\limits_b^a g \leqslant \int\limits_b^a fg \leqslant M \int\limits_b^a g$$

$$\frac{m \int_b^a g}{\int_b^a g} \leqslant \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leqslant \frac{M \int_b^a g}{\int_b^a g}$$

$$m \leqslant \frac{\int_b^a fg}{\int_b^a g} \leqslant M$$

а) $\int\limits_b^a g = 0$, тогда $\mu$ - любое.

б) $\int\limits_b^a g \neq 0 \Rightarrow \mu := \frac{\int\limits_b^a fg}{\int\limits_b^a g} \in [m, M]$

**Следствие**

Если $f \in C[a, b],\ g \in R[a, b],\ g \geqslant 0 \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] : \int\limits_b^a fg = f(\xi) \int\limits_b^a g$

**Док-во**

По теореме о промежуточном значении (Больцано-Коши) используя неравенство из последнего доказательства для $m = \inf\limits_{[a,b]} f,\ M = \sup\limits_{[a,b]} f$

Формула Ньютона-Лейбница. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.

**Опр**

$$E \subset \mathbb{R}, \quad F : E \to \mathbb{R} \quad f : E \to \mathbb{R}$$

Тогда $F$ называется первообразной f, если $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in E$

**Утв**

$F_1, F_2$ - первообразные $f$ на $E$, тогда:

$$F(x_1) - F(x_2) = \text{const} \ \text{(т. Лагранжа)}$$

**Теорема (формула Ньютона-Лейбница)**

$f \in R[a, b],$ F -первообразная f, тогда:

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

**Док-во**

$\forall \tau$ на $[a, b]$ по теореме Лагранжа:

$$\exists \xi_k \in [x_k, x_{x+1}] : \ F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta_k$$

Так как $f \in R[a, b] \Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \tau : \ \lambda(\tau) < \delta, \ \forall \xi \ |S(f, \tau, \xi) - I| < \mathcal{E}$
Возьмём оснащение $\xi$ из теоремы Лагранжа:

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a)$$

**Опр**

$E \subset \mathbb{R}, \quad$ E - невырожденный промежуток,

$$f : E \to \mathbb{R} \quad \forall \alpha, \beta \in E : \quad \alpha < \beta \quad f \in R[\alpha, \beta] \quad \text{для } a \in E \text{ (фиксированного)}$$

$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом

$F : E \to \mathbb{R}$

**Теорема**

$f \in R[a, b], \ F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, тогда:

1. $F \in C[a,b]$

2. (теорема Барроу) Если $f$ - непр. в т. $x_0 \in [a,b]$, то $F'(x_0) = f(x_0)$

**Док-во**

$x \in [a,b],\ h : x+h \in [a,b]$

1) $F(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f - \int\limits_a^x f = \int\limits_a^{x+h} f + \int\limits_x^a f = \int\limits_x^{x+h} f$

Так как $f \in R[a,b] \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : |f| < M$, значит:

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \left| \int_x^{x+h} f \right| \leqslant \int_x^{x+h} |f| \leqslant M\,|h|$$

Кроме того, $\forall \mathcal{E} > 0,\ \delta = \frac{\mathcal{E}}{M}$ если $|h| < \delta \Rightarrow |F(x+h) - F(x)| < \mathcal{E}$

2) Рассмотрим $\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = |\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} dt| =$

$= \frac{1}{|h|} | \int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt| \leqslant \frac{1}{|h|} | \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \mathcal{E} dt| = \mathcal{E}$

(при $|h| < \delta\ \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \mathcal{E}$)

**Следствие**

$$F \in C[a,b] \Rightarrow \exists F : F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$$

**Пример**

$f(x) = |x|,\ F(x) = \int\limits_0^x |t|dt = \begin{cases} \left.\dfrac{t^2}{2}\right|_0^x, & x \geqslant 0 \\ \\ -\left.\dfrac{t^2}{2}\right|_0^x, & x < 0 \end{cases}$

**Пример**

$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$F(x) = |x|\ \forall x \neq 0$, видно что неверно для первообразной, но:

**Опр**

F - "почти первообразная", если:

1. $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b] \setminus \{t_1, ...t_n\}$

2. $F \in C[a,b]$

**Пример**

Пример для "почти первообразной". Найти $\int\limits_0^2 f(x)$, для $f(x) = \max(1, x)$

$$F(t) \overset{?}{=} \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ \frac{t^2}{2}, & t \in [1,2] \end{cases}$$


Попробуем использовать Н-Л: $F(t)\Big|_0^2 = F(2) - F(0) = 2$
Неверно, потому что это не первообразная и даже не "почти первообразная".
Поправим F(x):

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}, & t \in [1,2] \end{cases}$$


Это уже "почти первообразная" можно применять Н-Л.

Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Применение: формула Валлиса.

**Теорема**

$$F, G \text{ - первообразные } f, g \in R[a,b] \text{ на } [a,b], \text{ тогда } \int\limits_a^b Fg = FG|_a^b - \int\limits_a^b fG$$

$$(\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v)$$

**Док-во**

$$(FG)' = fG + Fg, \text{ по ф-ле Н-Л: } \int\limits_a^b (FG)' = FG|_a^b = \int\limits_a^b fG + |_a^b Fg$$

**Пример**

Если $I_m := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$, то:

$$I_m = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ - четное} \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m \text{ - нечетное} \end{cases}$$

**Док-во**

$$I_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{m-1} x dx =$$

$$= -\cos x \sin^{m-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(m-1)\sin^{m-2} x dx =$$

$$= (m-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{m-2} x - \sin^m x)dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m)$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2},\ I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1,\ I_2 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2},\ I_{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4}...\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$$

**Теорема (Формула Валлиса)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2*2*4*4*...*(2n)(2n)}{1*3*3*5*5...(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \ (\text{или } \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}(\tfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 = \pi)$$

**Док-во**

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ верно $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \leqslant \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$A_n = \frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} = B_n$$

$$B_n - A_n = \tfrac{(2n)!!(2n-2)!!}{((2n-1)!!)^2} - \tfrac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} =$$
$$= (\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}) = (\frac{((2n)!!)^2}{(2n-1)!!(2n-1)!!})\frac{1}{(2n+1)(2n)} =$$
$$= A_n \frac{1}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{2n} \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{\pi}{2}$$

Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

**Теорема**

$$f \in C^{n+1}([a,b]) \Rightarrow f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n(b,a),$$

$$\text{где } R_n(b,a) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt$$

**Замечание**

$$f \in C^{n+1}([a,b]) \Rightarrow f^{(n+1)} \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b] :$$

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int\limits_a^b (b-t)^n dt = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{-f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

**Док-во (по индукции)**

1) $n = 0$

$f(b) = f(a) + \int\limits_a^b f'(t)dt$ - формула Н-Л

2) Инд. переход. Пусть для $n-1$ - доказано, $f \in C^{n-1}[a,b] \subset C^n[a,b]$, по инд. предположению:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_{n-1}(*)$$

$$R_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt = \begin{bmatrix} u = f^{(n)}(t) \\ dv = (b-t)^{n-1}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(-f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n}\Big|_a^b + \int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n}dt) =$$

$$= \frac{1}{(n)!}(f^{(n)}(a)(b-a)^n + \int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n dt) \text{ - подставить в } (*)$$

Формула интегрирования по частям в интеграле Римана. Вторая теорема о среднем.

Формулу интегрирования по частям см. в 12 билете.

**Теорема (Бонне или вторая теорема о среднем)**

$$f \in C[a,b],\ \ g \in C^1[a,b], g - \text{монотонна}$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b fg = g(a) \int\limits_a^{\xi} f + g(b) \int\limits_{\xi}^b f$$

**Док-во**

(для $g \nearrow$) $F(x) := \int\limits_a^x f \Rightarrow F' = f$

$$\int\limits_a^b fg = \int\limits_a^b F'g = Fg|_a^b - \int\limits_a^b Fg' = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int\limits_a^b Fg' =$$

(т.к. $g \nearrow g \geqslant 0 \Rightarrow$ по т. о среднем $\exists \xi \in [a,b]$ :)

$$= F(b)g(b) - g(a)F(a) - F(\xi) \int\limits_a^b g' = g(b)(F(b) - F(\xi)) + g(a)(F(\xi) - F(a))$$

Замена переменной в определенном интеграле (две формулировки, доказательство одной).

**Теорема**

$$\varphi \subset C^1[\alpha, \beta],\ f \in C(\varphi([\alpha, \beta])),\ \text{тогда} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

**Док-во**

$f \in C(\varphi([\alpha, \beta])) \Rightarrow \exists F : F' = f$

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi' \Rightarrow \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi' = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha)$$

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

**Теорема**

$$f \in R[a, b],\ \varphi \in C^1[\alpha, \beta],\ \varphi \text{ - строго возрастает,}$$

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b,\ \text{тогда} \int\limits_{a}^{b} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)\varphi'$$

**Пример**

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx, \quad \varphi(t) = \cos t, \quad \varphi(\alpha) = 0,\ \varphi(\beta) = 1$$

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - \cos^2 t} \sin t dt = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = (-\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{4}$$

**Напоминание (про ряды)**

**Опр**

Числовой ряд из элементов $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ - это $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$

**Опр**

Частичная сумма ряда $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$

**Опр**

Говорят, что сумма ряда $S = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

**Замечание**

$$\text{Ряд } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ сходится или расходится одновременно с рядом } \sum_{j=N}^{\infty} a_j$$

**Теорема (необходимое условие сходимости)**

$$\text{Если } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ - сходится, то } \lim_{j\to\infty} a_j = 0$$

**Опр**

Ряд Лейбница $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$, $a_j > 0$, где $\lim\limits_{j\to\infty} a_j = 0$, $a_j \searrow$

**Теорема**

Пусть $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ - ряд Лейбница, тогда:

1. Ряд Лейбница сходится
2. $S_{2n} \searrow$, $S_{2n-1} \nearrow$
3. $|S - S_n| < a_{n+1}$

**Теорема**

Критерий Коши для числовых последовательностей.

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - сх $\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists N : \forall m > n > N\ |S_m - S_n| < \mathcal{E}$

Признаки сравнения для положительных рядов.

**Опр**

Если $a_j \geqslant 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - положительный ряд

**Теорема**

Положительный ряд сходится $\Leftrightarrow S_n$ - ограничены

**Следствие**

Пусть $0 \leqslant a_j \leqslant b_j$, тогда:

1. $\sum b_j$ - сх $\Rightarrow \sum a_j$ - сх (первый признак сходимости)
2. $\sum a_j$ - расх $\Rightarrow \sum b_j$ - расх (первый признак сравнения)

**Следствие**

$$a_k \geqslant 0,\ b_k \geqslant 0,\ \exists c, d > 0\ \exists N : \forall n > N\ 0 < c \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant d \leqslant \infty$$

Тогда $\sum a_k$ и $\sum b_k$ сх. или расх. одновременно

**Док-во**

(т.е. $\sum a_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum b_k$ - сх)
($\Leftarrow$) $0 \leqslant a_n \leqslant db_n$ т.к. $db_n$ - сх $\Rightarrow a_n$ - сх
($\Rightarrow$) $0 \leqslant cb_n \leqslant a_n$ т.к. $a_n$ - сх $\Rightarrow cb_n$ - сх $\Rightarrow b_n$ - сх

**Следствие (второй признак сравнения)**

Пусть $a_n, b_n \geqslant 0$, тогда если
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$, то $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сх или расх одновременно

**Док-во**

Возьмём $\mathcal{E} := \frac{L}{2} \Rightarrow \exists N : \forall n > N\ \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2} \Rightarrow$
$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} < +\infty \Rightarrow$ по предыдущему следствию верно

Признаки Даламбера и Коши для положительных рядов.

**Теорема (радикальный признак Коши для положительных рядов)**

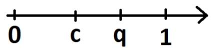
$a_k \geqslant 0$, $c := \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$

Если $c < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $c > 1$, то $\sum a_k$ - расх

**Док-во**

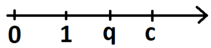
а) $0 \leqslant c < 1$




$q := \frac{c+1}{2}$, $c < q < 1$, по характеристике $\varlimsup$ : $\exists N : \forall n > N \ \sqrt[n]{a_n} < q$

т.к. $0 \leqslant a_n < q^n$ и $\sum q^n$ - сх $\Rightarrow \sum a_n$ - сх

б) $c > 1$




$q := \frac{c+1}{2}$, $1 < q < c$, по характеристике $\varlimsup$ : $\forall N : \exists n > N \ \sqrt[n]{a_n} > q$

т.е. $\exists$ бесконечное мн-во $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q$, $a_{n_k} > q^{n_k} > 1$

$\Rightarrow \lim a_{n_k} \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ - расх

**Теорема (признак Даламбера сходимости положительных рядов)**

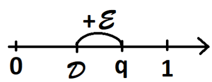
$a_k \geqslant 0$, $\mathcal{D} := \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$

Если $\mathcal{D} < 1$, то $\sum a_k$ - сх

Если $\mathcal{D} > 1$, то $\sum a_k$ - расх

**Док-во**

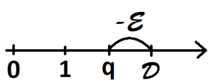
а) $\mathcal{D} < 1$, $q := \frac{\mathcal{D}+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{1-\mathcal{D}}{2}$




$\exists N : \forall k > N \ \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E} = q$ - геом пр. $q < 1$

$a_{k+1} < q a_k < q^2 a_{k-1} < ... < q^{k-N+1} a_N$, $\sum q^{k-N+1} a_k$ - сх $\Rightarrow \sum a_{k+1}$ - сх по первому пр. сходимости

б) $\mathcal{D} < 1$, $q := \frac{\mathcal{D}+1}{2}$ $\mathcal{E} := \frac{\mathcal{D}-1}{2}$



$\exists N : \forall k > N \ q = \mathcal{D} - \mathcal{E} < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \mathcal{D} + \mathcal{E},\ q > 1$

$a_{k+1} > qa_k > q^2 a_{k-1} > ... > q^{k-N+1} a_N$, $\sum q^{k-N+1} a_N$ - расх $\Rightarrow \sum a_{k+1}$ - расх по первому пр. сравнения

Абсолютная и условная сходимость рядов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

**Опр**

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ - сх абсолютно, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх

**Опр**

Ряд сходится условно если сходится, но не абсолютно

**Теорема**

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится

**Док-во**

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|$ - сх, по критерию Коши $\forall \mathcal{E} > 0 \; \exists N : \forall m > n > N :$

$||a_{n+1}| + ... + |a_m|| < \mathcal{E}$, по неравенству треугольника:

$$|a_{n+1} + ... + a_m| < \mathcal{E} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ - сх.}$$

Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Определения см. в предыдущем билете.

Ряд не сходится абсолютно, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расх. ряд, т.к.:

**Теорема (критерий Коши сходимости последовательности)**

$x_n$ - сх $\Leftrightarrow$ $x_n$ - сх в себе.

Покажем, что для $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ $\exists \mathcal{E} > 0 : \forall N \ \exists m, n \geqslant N : |x_m - x_n| > \mathcal{E}$:

$$\text{Возьмём } \mathcal{E} = \frac{1}{4} \text{ n } = N, \ m = 2N :$$

$$|S_{2N} - S_N| = \left|\frac{1}{N+1} + ... + \frac{1}{2N}\right| > N\frac{1}{2N} = \frac{1}{2} > \mathcal{E}$$

Но ряд сходится (значит условно сходится) по признаку Лейбница (или это можно показать прямо, доказав что $S_{2n} \nearrow$ и ограничена сверху единицей, а $S_{2n+1} = S_{2n}$ в пределе)

Перестановка абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана (б/д).

**Опр**

Пусть есть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и биективная функция $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ называется перестановкой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

**Теорема (Римана v1)**

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится, тогда:

$$\forall S \in \overline{\mathbb{R}}\ \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \sum a_{\varphi(k)} = S$$

**Опр**

$a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$, $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$

**Теорема (Дирихле, о перестановке абсолютно сходящегося ряда)**

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ сх абсолютно, то

$\forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $\varphi$ - биекция $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$

**Док-во**

а) Пусть $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - сх $\Leftrightarrow$ все частичные суммы ограничены, $S_n \leqslant S\ \forall n \in \mathbb{N}$

Частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$ обозначим перестановками ряда $T_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$

Пусть $m := \max\{\varphi(1), \varphi(2), ..., \varphi(n)\}$

$T_n \leqslant S_m := \sum\limits_{n=1}^{m} a_{\varphi(a_n)} \leqslant S \Rightarrow T_n \nearrow$ - огр $\Leftrightarrow$ ряд $T := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$ сходится.

Предельный переход даёт $T \leqslant S$, но так как $S$ - тоже перестаовка $T \Rightarrow S \leqslant T$

Значит $S = T$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(a_n)}$

б) Общий случай, $a_k \in \mathbb{R}$

$a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^- \Rightarrow a_k^+ = \frac{a_k + |a_k|}{2}$, $a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}$

т.к. $\sum a_k$ - сх абсолютно $\Rightarrow \sum |a_k|$ - сх

$\Rightarrow \sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ - сх (причем абсолютно)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{\varphi(k)}^+ - a_{\varphi(k)}^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}^- = \text{ (п. а) } \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

**Теорема (Римана v2)**

Пусть ряд $\sum a_n$ - условно сходится. Тогда $\sum a_n^+ - \sum a_n^- = +\infty$

**Док-во**

Можно доказать одну из теорем

Асимптотика частичных сумм расходящегося ряда (случай гармонического ряда). Постоянная Эйлера.

$$\frac{1}{1+k}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1}<\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}\Rightarrow 0<\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Значит,

$$0<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k})\right)<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$
$$=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-...+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n-1}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<1\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow S_n:=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k})\right)\nearrow \text{ и ограничено сверху } \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=-\ln 1+\cancel{\ln 2}-\cancel{\ln 2}+\cancel{\ln 3}-...-\cancel{\ln(n)}+\ln(n+1)=$$

$$=\ln(n+1)\Rightarrow\exists\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)$$

**Опр**

$\gamma:=\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n)=0,5722...$ - постоянная Эйлера

Несобственные интегралы. Примеры. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов.

**Опр (1)**

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R},\ f \in R[a, b]\ \forall b \in (a, +\infty).$

Если $\exists \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f,$ то говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f \text{ - сходится и равен } \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f$$

**Опр (2)**

$f : [a, \omega) \to \mathbb{R},\ -\infty < a < \omega \leqslant +\infty\ ,\ f \in R[a, b]\ \forall b \in (a, +\infty).$

Если $\exists \lim\limits_{b\to\omega_-} \int\limits_a^b f,$ то говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f \text{ - сх и равен } \lim_{b\to\omega_-}\int\limits_a^b f$$

**Опр (3)**

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\forall a < b \in \mathbb{R} : f \in R[a, b]$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f := \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b f,$

Если оба предела $\exists$ и конечны, то говорят что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f$ - сходится

**Опр (4)**

Аналогично $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}$, если $f \in R[a, b]\ \forall [a, b] \subset (\omega_1, \omega_2)$. $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f = \int\limits_{\omega_1}^{c} f + \int\limits_{c}^{\omega_2}$

**Пример**

1. $\alpha = 1,\ \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = +\infty$ - расх
2. $\alpha > 1,\ \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = 0 - \dfrac{1}{1-\alpha}$ - сх
3. $\alpha < 1,\ \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ - расх

**Пример**

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0_-} \int\limits_{-1}^{a} \frac{dx}{x} + \lim_{b\to 0_+} \int\limits_{b}^{1} \frac{dx}{x} \text{ - расх по опр, т.к. оба предела расх}$$

**Опр**

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ и } \forall a<b\in\mathbb{R}: f\in R[a,b], \text{ тогда (V.P.) } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f$$

**Пример**

$$(V.P.) \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x = \lim_{A\to+\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-A}^{A} = 0$$

$$(\text{Но } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x \text{ - расх})$$

**Теорема (критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов)**

$$f:[a,\omega)\to\mathbb{R}, \quad -\infty<a<\omega\leqslant+\infty, \quad f\in R[a,b] \quad \forall b\in(a,+\infty), \text{ тогда:}$$

$$\int\limits_{a}^{\omega} f \text{ - сх} \;\Leftrightarrow\; \forall\mathcal{E}>0\ \exists B\in(a,\omega): \forall b_1,b_2\in(B,\omega)\ \Big|\int\limits_{b_1}^{b_2}\Big|<\mathcal{E}$$

**Док-во**

$$\int\limits_{a}^{\omega} f \text{ - сх} \Leftrightarrow \exists \lim_{b\to\omega}\int\limits_{a}^{b} f \Leftrightarrow (\text{кр Коши для пределов ф.})$$

$$\forall\mathcal{E}>0\ \exists\delta>0: \forall b_1,b_2\in(\omega-\delta,\omega)\ \Big|\int\limits_{a}^{b_1} f - \int\limits_{a}^{b_2} f\Big|<\mathcal{E} \Rightarrow \Big|\int\limits_{b_1}^{b_2} f\Big|<\mathcal{E}$$

Свойства несобственных интегралов (линейность, аддитивность, монотонность, формула Ньютона-Лейбница).

**Свойство (1, линейность)**

$$\int\limits_a^\omega f_1, \int\limits_a^\omega f_2 \text{ - сх } \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \int\limits_a^\omega (k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 \int\limits_a^\omega f_1 + k_2 \int\limits_a^\omega f_2$$

**Свойство (2, монотонность)**

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f, g \in R[a, b], \quad \forall b \subset [a, \omega), \quad f(x) \leqslant g(x),$$

$$\forall x \in [a, \omega) \Rightarrow \int\limits_a^\omega f \leqslant \int\limits_a^\omega g$$

**Лемма**

$$f : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b], \ \forall b \in (a, \omega).$$

Пусть $c \in (a, \omega)$, тогда $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_c^\omega f$ - сх или расх одновременно

**Док-во**

$$\int\limits_a^\omega f \text{ - сх} \Leftrightarrow \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b f = A \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \int\limits_c^\omega f = \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_c^b f = \lim_{b \to \omega_-} (\int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f) = A - \int\limits_a^c f \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_c^\omega f \text{ - сх}$$

**Свойство (3, аддитивность)**

$$f : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b] \ \forall b \subset [a, \omega)$$

$$\forall c \in [a, \omega) \Rightarrow \int\limits_a^\omega f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^\omega f, \text{ причем } \int\limits_a^\omega f \text{ и } \int\limits_c^\omega f \text{ - сх или расх одновременно}$$

**Свойство (4, формула Н-Л)**

Если $F$ - первообразная $f$, то:

$$\int\limits_a^\omega f = \lim_{b \to \omega_-} (F(b) - F(a)) =: F\Big|_a^{\omega_-} = F(\omega_-) - F(a)$$

**Свойство (5)**

$$\text{Если } f \in R[a,\omega]\ (\omega \in \mathbb{R}),\ \text{ то (несоб. инт)} \int\limits_a^\omega f = \int\limits_a^\omega f (\text{инт Римана})$$

**Док-во**

$f \in R[a,\omega] \Rightarrow F(x) := \int\limits_a^x f \in C[a,\omega]$,

(несоб. инт) $\int\limits_a^\omega f = \lim\limits_{b\to\omega} \int\limits_a^b f (= F(b)$ (непр. в т $\omega$)$) = F(\omega) = \int\limits_a^\omega f$ (инт Римана)

Свойства несобственных интегралов (интегрирование по частям, замена переменной).

**<u>Свойство</u> (интегрирование по частям)**

Пусть $f, g \in C^1[a, \omega), \quad \exists \lim\limits_{x \to \omega_-} f(x)g(x) \in \mathbb{R},$ тогда:

$\int\limits_a^\omega f'g$ и $\int\limits_a^\omega fg'$ - сх или расх одновременно, причем

$$\int\limits_a^\omega fg' = fg|_a^\omega - \int\limits_a^\omega f'g (fg|_a^\omega = \lim_{x \to \omega_-} (f(x)g(x) - f(a)g(a))$$

**<u>Свойство</u> (замена переменной)**

Если $\int\limits_a^\omega f$ - сх, $\quad \varphi : [\alpha, \upsilon) \to [a, \omega), \quad \varphi \in C^1[\alpha, \upsilon), \quad \varphi$ - монот.,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \to \upsilon} \varphi(t) = \omega, \text{ тогда } \int\limits_a^\omega f = \int\limits_\alpha^\upsilon (f \circ \varphi)\varphi'$$

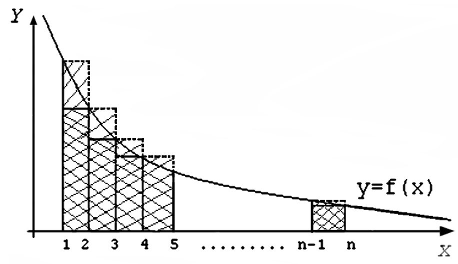
Интегральный признак Коши сходимости несобственных интегралов и рядов.

**Теорема**

Пусть $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f \in R[1, A]\ \forall A > 1$, $f$ - строго убывает (можно строго возрастает)

Тогда $\int\limits_1^\infty f$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n)$ - сх или расх одновременно, причем

$$\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \leqslant \int_1^\infty f \leqslant \sum_{n=1}^\infty f(n)$$




**Лемма**

Если $f > 0$, $f \in [a, \omega] \to [0, +\infty)$, $f \in R[a, b]\ \forall b \in (a, \omega)$

Тогда $\int\limits_a^\omega f$ - сх $\Leftrightarrow F(x) = \int\limits_a^x f$, $\exists M < \infty : F(x) \leqslant M\ \forall x \in [a, \omega)$

**Док-во**

($\Rightarrow$) очевидно

($\Leftarrow$) почти очевидно, $f \geqslant 0 \Rightarrow F \nearrow$ и огр $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to \omega} F(x) = \int\limits_a^\omega f < +\infty$

**Док-во**

$f(n+1) \leqslant \int\limits_n^{n+1} f \leqslant f(n)$ (видно через суммы Дарбу) $| \sum\limits_{n=1}^N$

$\sum\limits_{n=1}^N f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{N+1} f \leqslant \sum\limits_{n=1}^N f(n)$, при $N \to +\infty$ получим наше уравнение

1) Если $\sum\limits_1^\infty f(n)$ - сх $\Leftrightarrow \sum\limits_1^N f(n) \leqslant A \in \mathbb{R} \Rightarrow F(N+1) = \int\limits_1^{N+1} f \leqslant A \in \mathbb{R}$ сх

2) Если $\int\limits_1^\infty f$ - сх $\Rightarrow \sum\limits_1^N f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{N+1} f \leqslant \int\limits_1^\infty f \in \mathbb{R}$ - огр $\Rightarrow \sum\limits_1^N f(n+1)$ сх

**Примеры**

1. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 0 - (-1)$ - сх

2. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$. Сх. при $\alpha > 1$, расх. при $\alpha \leqslant 1$ (аналогично интегралу $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$)

Признаки сравнения для несобственных интегралов.

**Теорема (I признак сравнения)**

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f, g \geqslant 0, \quad f, g \in R[a, b], \quad b \in (a, \omega),$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, \omega)$$

Тогда $\int\limits_a^\infty g$ - сх $\Rightarrow \int\limits_a^\omega f$ - сх ($\int\limits_a^\omega f$ - расх $\Rightarrow \int\limits_a^\infty g$ - расх)

**Док-во**

$$F(b) := \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g \leqslant \int\limits_a^\omega g \in \mathbb{R}$$

То есть $\int\limits_a^\omega f$ - сх, т.к. $F \nearrow$ и огр сверху на $[a, \omega)$

**Теорема (II признак сравнения)**

$$f, g : [a, \omega) \to (0, +\infty),\ f, g \in R[a, b]\ \forall b \in (a, \omega)$$

Тогда если $\exists \lim\limits_{x \to \omega_-} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, то $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ - сх или расх одновременно

**Док-во**

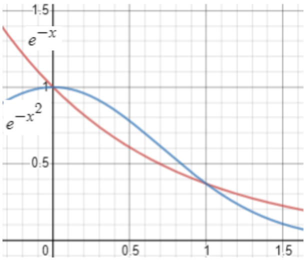
$$k := \lim_{x \to \omega_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty),\ \mathcal{E} := \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \exists b \in (a, \omega) : \forall x \in (b, \omega)\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} < \frac{f(x)}{g(x)} < 3\mathcal{E}$$

То есть с некоторого места $f(x) \leqslant g(x)$, а так как $\int\limits_a^\omega = \int\limits_a^b + \int\limits_b^\omega$ и $\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ - конечные числа, то $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ - сх или расх одновременно по первому признаку

**Пример**

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$$




$$e^{-x^2} \geqslant e^{-x} \Rightarrow x \in [0,1], \quad \int\limits_0^1 e^{-x} = \frac{1}{e} \underset{\text{по I пр. ср.}}{\Rightarrow} \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} \text{ - сх}$$

**Пример**

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx \text{ и } \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ - сх или расх одновр} \Rightarrow \text{сх}$$

Абсолютная и условная сходимость интегралов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

**Опр**

$f : [a, \omega) \to \mathbb{R},\ f \in R[a, b]\ \forall b \in (a, \omega)$

$\int\limits_a^\omega f$ - сх абсолютно $\Leftrightarrow \int\limits_a^\omega |f|$ - сх

$\int\limits_a^\omega f$ - сх условно $\Leftrightarrow \int\limits_a^\omega f$ - сх, $\int\limits_a^\omega |f|$ - расх

**Утв**

$\int\limits_a^\omega f$ - сх абсолютно $\Rightarrow$ сходится

**Док-во**

Пусть $\int\limits_a^\omega |f|$ - сх $\Leftrightarrow$ (кр. Больцано-Коши) $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists A \in (a, \omega) : \forall b_1, b_2 \in (A, \omega)$

$|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f|| < \mathcal{E} \Rightarrow$ т.к. $|\int\limits_{b_1}^{b_2} f| \leqslant |\int\limits_{b_1}^{b_2} |f|| < \mathcal{E}$, то по кр. Б-К $\int\limits_{b_1}^{b_2} f$ - сх

**Пример**

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3)dx = \begin{vmatrix} x^3 = t \\ x = \sqrt[3]{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \cos t \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{\sin t}{t^{\frac{2}{3}}}\Big|_0^\infty + \frac{2}{9}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{9}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}}$$

Исследуем $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} + \int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}$ :

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}$, $|sint| \leqslant t$ на $[0, 1]$

$$\int\limits_0^1 \frac{t}{t^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}} = 3t^{\frac{1}{3}}|_0^1 = 3 \text{ - сх} \underset{\text{по I пр ср}}{\Rightarrow} \int\limits_0^1 \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \text{ - сх}$$

б) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}, \quad \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}}$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} = -\frac{3}{2}t^{-\frac{2}{3}}|_1^\infty = \frac{3}{2} \text{ - сх} \underset{\text{по I пр ср}}{\Rightarrow} \int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \text{ - сх}$$

Значит $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}}$ - абс сх $\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3)$ - сх

Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$

Определения и теорему см. в билете 27

## **Пример**

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$$

1) $$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$$

Исследуем $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ на абс сходимость. $\frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}$ - сходится

$\Rightarrow$ по 1 признаку сравнения $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}$ - сх $\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ - сх абс $\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ - сх

2) $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}$$

Знаем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$. Кроме того, $\frac{|\sin x|}{x} < 1$, значит на конечном

промежутке $(0, \frac{\pi}{2}]$ интеграл конечный $\Rightarrow \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}$ - сх

3) Покажем, что $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}$ - расх. $\Rightarrow \int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}$ - расх

$$|\sin x| \geqslant |\sin^2 x|, \quad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x}(\text{расх}) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}(\text{сх})$$

Признаки Дирихле и Абеля для несобственных интегралов (док-во одного из них).

**Теорема (признак Абеля-Дирихле)**

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in C[a, \omega), \quad g \in C^1[a, \omega), \text{ g - монотонна.}$$

Тогда если выполнено одно из условий:

(А) $\displaystyle\int_a^\omega$ f - сх, g - огр

(Д) $F(x) := \displaystyle\int\limits_a^x$ f - огр, $g(x) \underset{x \to \omega_-}{\to} 0$

Тогда $\int\limits_a^\omega fg$ - сх

**Док-во**

(Д) без теоремы Бонне

$$|F(x)| \leqslant C : g(x) \underset{x \to \omega_-}{\to} 0$$

$$\lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b fg = \lim_{b \to \omega_-} (Fg|_a^b - \int\limits_a^b Fg') = F(a)g(a) - \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b Fg'$$

Исследуем интеграл на абс сходимость.

$$\int\limits_a^b |Fg'| \leqslant C \int\limits_a^b |g'| = (\text{т.к. g - монотонна}) C|\int\limits_a^b g'| = C|g(b) - g(a)| \underset{b \to \omega_-}{\to} C|g(a)|$$

Таким образом инт. ограничен $\Rightarrow$ изначальный сходится

Признаки Дирихле и Абеля для рядов (док-во одного из них).

**Опр**

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ A_0 = 0$

**Теорема (преобразование Абеля)**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

**Док-во**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

**Теорема (признак Дирихле для рядов)**

Пусть $A_n$ - огр., $b_k \to 0$, $b_k$ - монотонно. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх

**Док-во**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ - сх $\Leftrightarrow$ все частичные суммы огр

$\sum\limits_{k=1}^{N} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leqslant M \sum\limits_{k=1}^{N} |b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - b_{N+1}| \leqslant 2M|b_1| \Rightarrow$ исх ряд сх

**Теорема (признак Абеля для рядов)**

Пусть $A_n$ - сх. $b_k$ - монотонно, $b_k$ - огр. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх

Применение интеграла Римана для вычисления площадей и объемов. Примеры.

**Опр (школьное)**

Пусть $P \in \mathbb{R}^2$("фигрура"), $\mathcal{P}$ - некоторый набор плоских "фигур", $P_i \in \mathcal{P}$
$g : \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ - называется площадью, если:

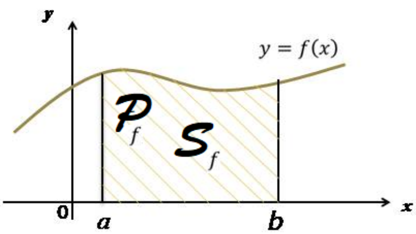
1. $\forall P \in \mathcal{P}$, $S(P) \geqslant 0$
2. $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P} : P_1 \cap P_2 = \varnothing \Rightarrow S(P_1 \cup P_2) = S(P_1) + S(P_2)$

**Опр**

$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняет расстояние

3. $\forall P \in \mathcal{P}$ $\tau$-движения $S(\tau(P)) = S(P)$

**Площадь криволинейной трапеции.**




**Опр**

Подграфиком $f \in R[a, b]$ называется $P_f := \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Возьмём разбиение и верх. и нижн. суммы Дарбу. $S$ - монотонна, т.е.

$$P_1 \subset P_2 \Rightarrow S(P_1) \leqslant S(P_2),\ S_*(\tau) = S(P_*(\tau)),\ S^*(\tau) = S(P^*(\tau))$$

$$P_*(f, \tau) \subset P(f) \subset R^*(f, \tau)$$

$$S(P_*(f, \tau)) = S_*(f, \tau) \to \int_a^b f,\ S(P^*(f, \tau)) = S^*(f, \tau) \to \int_a^b f,\ S(P_f) := \int_a^b f$$

**Пример**

Первая четверть эллипса с радиусами $(a, b)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad S = \int\limits_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$ - сложно, перейдём в поляры

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

$$\int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t d(a\cos t) = ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = -ab(t - \frac{\sin 2t}{2})|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 0 - (-\frac{\pi ab}{4}) = \frac{\pi ab}{4}$$

## Вычисление объемов

**Утв**

Принцип Кавальери. Если у двух тел одни сечения на одном уровне, то их объемы равны.

$\sum\limits_{k=0}^{n-1} S(\xi_k)\Delta_k$ - сумма Римана

$V = \int\limits_a^b S(x)dx$ - измельчаем плоскости

**Пример**

(на самом деле тела вращения можно считать как $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$)

Путь. Длина пути. Спрямляемый путь. Аддитивность длины пути.

**Опр**

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$, $\gamma_k : [a, b] \to \mathbb{R}$. Расстояние считается как $d(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$, $\gamma$ - путь, если $\forall i \in \{1, ...k\}$ $\gamma_i \in C[a, b]$

**Опр**

Путь называется $r$-гладким, если $\forall i \in \{1, ...k\}$ $\gamma_i \in C^r[a, b]$

**Опр**

Два пути считаются эквивалентными если можно сделать замену переменной. Т.е. пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, тогда:
$\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow \exists \varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ - строго возрастающая, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi$

**Опр**

Кривая - класс эквивалентности путей. $\forall$путь - представитель класса эквивалентности называется "параметризацией"

**Пример**

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = \cos t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = \sin t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x = \cos t^2 & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = \sin t^2 & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, определяют одну и ту же кривую (окружность)

**Опр**

Кривая называется $r$-гладкой, если у неё есть $r$-гладкая параметризация

**Опр**

$\gamma$ - простой путь $\Leftrightarrow \gamma$ - биекция на $(a, b)$, т.е. $\forall t_1, t_2 \in (a, b) : \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (без самопересечений).
Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma$ - замкнутый путь.

**Опр (длины пути)**

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\tau - [a, b] : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Соединим $[\gamma(t_k), \gamma(t_{k+1})]$ отрезками - получим вписанную ломанную.

$$\text{Длина } k\text{-ого звена: } \sqrt{\sum_{j=0}^{m} (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$$

Тогда длина вписанной ломанной: $l = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k))^2}$

Длиной пути назовём $S_\gamma := \sup\limits_\tau l_\tau$ - всевозможных ломанных

**Опр**

Путь называется спрямляемым, если $S_\gamma < +\infty$

**Утв**

Аддитивность длины пути. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, пусть $\gamma_1$ - сужение $\gamma$ на $[a, c]$, $\gamma_2$ - сужение $\gamma$ на $[c, b]$. Тогда $S_\gamma = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

**Док-во**

а) $S_\gamma \geqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?
Пусть $\tau_1$ - разбиение $[a, c]$, $\tau_2$ - разбиение $[c, b]$,
$\tau = \tau_1 + \tau_2$, $l_{\tau_1} + l_{\tau_2} = l_\tau \leqslant S_\gamma$
(т.к. $S_\gamma - \sup$)
Возьмём sup по всем разбиениям отрезка $[a, c]$
$\Rightarrow \sup\limits_{\tau_1}(l_{\tau_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + l_{\tau_2} \leqslant S_\gamma$
Теперь sup по всем разбиениям отрезка $[c, b]$
$\Rightarrow \sup\limits_{\tau_1}(S_{\gamma_1} + l_{\tau_2}) = S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2} \leqslant S_\gamma$
б) $S_\gamma \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$?
Пусть $\tau$ - разбиение $[a, b]$.
Пусть $\tau^* = \tau \cup \{c\}$. $l_\tau \leqslant l_{\tau^*}$, $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$,
где $\tau_1$ - разбиение $[a, c]$, $\tau_2$ - разбиение $[c, b]$.
$l_\tau \leqslant l_{\tau^*} = l_{\tau^1} + l_{\tau^2} \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$
Возьмём sup по всем разбиениям $\tau$: $\sup\limits_\tau(l_\tau) = S_\gamma \leqslant S_{\gamma_1} + S_{\gamma_2}$

**Примеры**

Неспрямляемые пути:
1) Кривая Пеано

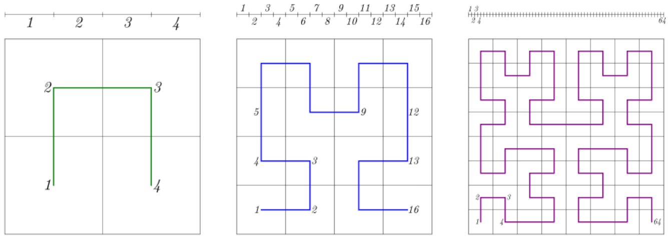
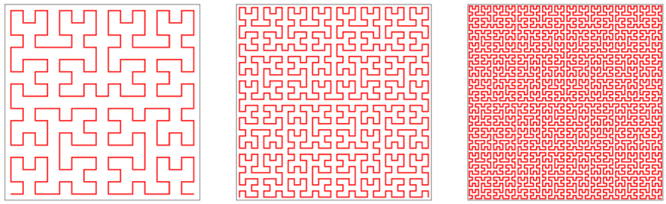
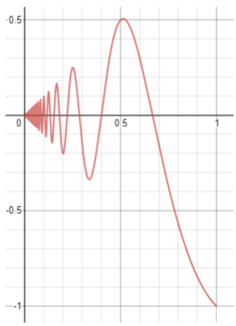


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



В пределе $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ - сюръективное отображение. В итоге получается прямая заполняющая весь квадрат с пересеченями (в смысле дополнение до подкривых пределе пусто)

2) $y = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$




Докажем, что прямая не является спямляемой.
Пусть $\tau : 0 < \frac{1}{N} < \frac{1}{N-1} < ... < 1$, $t_N = \frac{1}{N}$, тогда

$$y(t_k) = \frac{1}{k} \cos \pi k = \frac{1}{k} (-\pi)^k$$

Длина $k$-ого звена:

$$\frac{1}{k} - (-\frac{1}{k+1}) \geqslant \frac{2}{k} \Rightarrow l_\tau \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \Rightarrow \sup l_\tau = +\infty$$

Кривая. Длина кривой.

Опр. см. в билете 32

**Теорема (о длинах эквивалентных путей)**

Пусть $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^m$. Если $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$

**Док-во**

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \exists \varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ - строго возрастающая, $\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$, $\varphi(\tau_1) = \tau_2$ - разбиение $[a_2, b_2]$,

$$l_{\tau_1} = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^{m} (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} = l_{\tau_2} \leqslant S_{\tau_2}$$

Перейдём к sup по всем $\tau_1$: $\sup\limits_{\tau_1}(l_{\tau_1}) = S_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$

Аналогично получим неравенство $S_{\tau_2} \leqslant S_{\tau_1}$

**Замечание**

Корректность определения (с классами эквивалентности) длины пути следует из доказанной выше теоремы

Теорема о вычислении длины гладкого пути.

**Теорема**

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ - $C^1$-гладкая кривая, тогда $\gamma$ - спрямляется, $S_\gamma = \int\limits_a^b |\gamma'|$

**Док-во**

1) $\gamma$ - спрямляемая?

$\gamma_j \in C^1[a,b]\ \forall j \in \{1,2,...,m\}$ $\Rightarrow$(ф-ия достигает min и max на $[a,b]$ по т.Вейерштрасса)

$$m_j \leqslant \gamma_j \leqslant M_j,\ M := \sqrt{\sum_{j=1}^m M_j},\ m := \sqrt{\sum_{j=1}^m m_j},\ \gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ ... \\ \gamma_n' \end{pmatrix}$$

$\forall \tau$-разбиения $[a,b] : l_\tau = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2} =$

(по т. Лагранжа $\forall k = 0, 1, ...n-1\ \exists \xi_k \in [t_k, t_{k+1}] : \gamma_j(t_{k+1}) - \gamma_j(t_k) = \gamma_j'(\xi_k)\Delta_{t_k}$)

$= \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j'(\xi_k))^2 \Delta_{t_k}^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} (\gamma_j'(\xi_k))^2} \Delta_{t_k} \Rightarrow m \sum\limits_{k=0}^{n-1} \Delta_{t_k} \leqslant l_\tau \leqslant M \sum\limits_{k=0}^{n-1}$

$\Rightarrow m(b-a) \leqslant l_\tau \leqslant M(b-a) \underset{sup}{\to} m(b-a) \leqslant S_\gamma \leqslant M(b-a) \Rightarrow -\infty < S_\gamma < +\infty$

2) $S_\gamma = \int\limits_a^b |\gamma'|$?

Пусть $\gamma^{(k)}$ - сужение $\gamma$ на $[t_k, t_{k+1}]$. Для него выполняется пункт (1):

*переобозначим $\gamma'$ как $\dot\gamma$ из-за сложности обозначений*

$$m_j^{(k)} = \min_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot\gamma_j\ (t)|,\ M_j^{(k)} = \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |\dot\gamma_j\ (t)|$$

$$m^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (m_j^{(k)})^2},\ M^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (M_j^{(k)})^2}$$

$$m^{(k)} \Delta t_k \leqslant S_{\gamma^{(k)}} \leqslant M^{(k)} \Delta t_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leqslant S_\gamma \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)} \Delta t_k$$

$$m_j^{(k)} \leqslant |\dot\gamma_j^{(k)}\ (t) \leqslant M_j^{(k)}|\ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1},\ \forall j = 1, ..., m$$

Суммируем, возводим в квадрат, иззвлекаем корень:

$$m^{(k)} \leqslant |\dot\gamma^{(k)}\ (t)| \leqslant M^{(k)}|\ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$$

Проинтегрируем по $\displaystyle\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} dt :\ m^{(k)} \Delta t_k \leqslant \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\dot\gamma^{(k)}\ (t)| dt \leqslant M^{(k)} \Delta t_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \leqslant \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\overset{\bullet}{\gamma}^{(k)}(t)|dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M^{(k)}\Delta t_k, \text{ оценим } \sum_{k=1}^{n-1}(M^{(k)} - m^{(k)}\Delta t_k):$$

$$M^{(k)}-m^{(k)} = \frac{(M^{(k)})^2 - (m^{(k)})^2}{M^{(k)} + m^{(k)}} = \sum_{j=1}^{m}(M_j^{(k)}-m_j^{(k)})\frac{M_j^{(k)} + m_j^{(k)}}{M^{(k)} + m^{(k)}} \leqslant \sum_{j=1}^{m}(M_j^{(k)}-m_j^{(k)})$$

$$\gamma_j \in C^1[a,b] \Rightarrow \gamma_j' \in C[a,b] \Rightarrow \text{р/н} \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta_j > 0:$$

$$\lambda(\tau) < \delta_j \Rightarrow 0 \leqslant M_j^{(k)} - m_j^{(k)} \leqslant \frac{\mathcal{E}}{m(b-a)} \underset{\substack{\delta=\min \delta_j \\ 1\leqslant j\leqslant m}}{\overset{\sum\limits^{m}}{\Rightarrow}} 0 \leqslant M^{(k)} - m^{(k)} \leqslant \frac{\mathcal{E}}{b-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(M^{(k)-m^{(k)}}\Delta t_k < \frac{\mathcal{E}}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta t_k = \mathcal{E} \Rightarrow S_\gamma = \int\limits_a^b |\overset{\bullet}{\gamma}|$$

Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость. Примеры.

**Опр**

$$f_n : E \to \mathbb{R} \quad E \subset \mathbb{R}$$

говорят, что функ. последовательность сходится поточечно

к ф. $f : E \to \mathbb{R}$, если $\quad \forall x \in E \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(x,\mathcal{E})} : \quad \forall n > N$

$|f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

**Опр**

Говорят, что функ. послед. сходится к $f$ равномерно на $E$

$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Если $\sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(\mathcal{E})} \quad \forall n > N \quad \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{(\mathcal{E})} \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$

**Примеры**

1. $f_n(x) = \dfrac{sin^2(e^x) - \arctan(n^2\sqrt{x})}{\sqrt{n}} \qquad x \in [0; +\infty)$

$$0 \leqslant \sup_{[0,+\infty)} |f_n(x)| \leqslant \frac{10}{\sqrt{n}} \to 0$$

$$\Rightarrow f_n \underset{[0,+\infty)}{\rightrightarrows} 0$$

2. $f_n(x) = x^n - x^{2n} \qquad x \in [0, 1]$

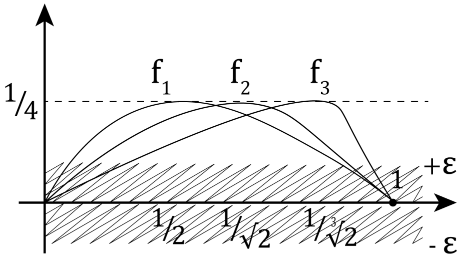
$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ - поточечно. Равномерно ли?

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = x^{n-1}(n - 2nx^n)$$

$x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ - крит. точка

$$f_n(x_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ равномерной сх-ти нет




Горбик убегает

**Замечание**

Из равномерной сх-ти $\Rightarrow$ поточечная

Критерий Коши для равномерной сходимости функциональной последовательности.

**Теорема (Критерий Коши для равномерной сходимости функ. послед.)**

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \qquad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \mathcal{E}$$

**Док-во**

($\Rightarrow$):

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} > 0 : \quad \forall m, n > N_{\mathcal{E}} :$$

$$\sup |f_n - f_m| \leqslant \sup(|f_n - f| + |f - f_m|) < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$$

($\Leftarrow$):

$$\forall x \in E \quad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \mathcal{E}$$

т.е. $\{f_n(x)\}$ - сх. в себе $\Leftrightarrow \{f_n(x)\}$ имеет конеч. предел

$f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ т.о. $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in E$

(т.е. f - поточеч. предел послед.)

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N_{\mathcal{E}} : \forall m, n > N_{\mathcal{E}} \quad \forall x \in E$$

$$f_m(x) - \mathcal{E} < f_n(x) < f_m(x) + \mathcal{E} \underset{n \to \infty}{\to} f_m(x) - \mathcal{E} \leqslant f(x) \leqslant f_m(x) + \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow |f_m(x) - f(x)| \leqslant \mathcal{E} < 2\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \sup |f_m(x) - f(x)| < \mathcal{E}$$

Сохранение непрерывности при равномерном предельном переходе. Теорема Дини (б/д). Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.

**Теорема (о равномерном пределе непр. функции)**

$f_n$ - непр в т. $x_0 \in E$

$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Тогда $f$ - непр. в т. $x_0$

**Док-во**

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad$ (зафиксир.)

Т.к. $f_n \rightrightarrows f$, то $\exists N_{\mathcal{E}} : \forall n > N_{\mathcal{E}} \quad$ (зафикс $n^* > N_{\mathcal{E}}$) $\quad \sup\limits_E |f_n - f| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \quad (*)$

В частности, для $n^* > N_{\mathcal{E}} \quad \sup\limits_E |f_n - f| < \dfrac{\mathcal{E}}{3}$

$f_{n^*}$ - непр. в т $x_0 : \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in E : \quad |t - x_0| < \delta \quad |f_{n^*}(t) - f_{n^*}(x_0)| < \dfrac{\mathcal{E}}{3}$

Тогда $\forall x \in E : \quad |x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{n^*}(x)| + |f_{n^*}(x) - f_{n^*}(x_0)| + |f_{n^*}(x_0) - f(x_0)| < \mathcal{E}$$

**Следствие**

Если $f_n \in C(E), \quad f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, то $f \in C(E)$

**Теорема (Дини)**

$f_n \in C[a,b] \qquad f_n(x) \to f(x) \quad$ (поточ. на $[a,b]$)

причем $\quad \forall x \in [a,b] \quad f_n(x) \searrow$ (по n). $\quad$ т.е $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

Если $f \in C[a,b]$, то $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$

**Теорема (о предельном переходе под знаком интеграла)**

$f_n \in R[a,b] \quad f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \in R[a,b]$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f$

**Док-во**

$$a < b$$

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| < \sup_{[a,b]} \left|\underset{\to 0}{f_n - f}\right| \cdot (b-a) \to 0$$

**Утв**

Функ. ряд сход равномерно $\Leftrightarrow$ посл-ть частичных сумм сход равномерно

**Следствие (1)**

$$f_n \in C[a,b] \quad \sum_{n=1}^{N} f_n \rightrightarrows f, \text{ тогда:}$$

$$1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C[a,b]$$

$$2) \quad \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

**Следствие (2)**

Если $f_n(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,b] \qquad f_n \in C[a,b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in C[a,b]$$

То $\sum f_n$ - сход. равномерно на $[a,b]$

Дифференцируемость и равномерная сходимость.

**Теорема (диф-сть и равном. сх-ть)**

$$f_n \in C^1[a,b] \quad f_n' \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g$$

и $\exists c \in [a,b]: \quad \{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ - сх

Тогда:

1. $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$
2. $f \in C^1[a,b]$ и $f' = g$

**Док-во**

$$(b) \quad f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f_n' \underset{n\to\infty}{\to} \int_c^x g = f(x) - f(c) \qquad f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$$

(по т. о предельном переходе под знаком интеграла)

$$f(x) = \int_c^x g + f(c)$$

т.о $f_n(x) \to f(x)$ поточ. на $[a,b]$ $\qquad f'(x) = g(x)$ непр (равн. предел непр ф.)

$\Rightarrow f \in C^1[a,b]$

$(a)$ покажем, что $f_n \rightrightarrows f$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup \left| f_n(x) - f_n(c) + \underbrace{f_n(c) - f(c)} + f(c) - f(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup \left| \int_c^x f_n' - \int_c^x g + f_n(c) - f(c) \right| \leqslant \sup \left| \int_c^x (f_n' - g) \right| + |f_n(c) - f(c)| \quad (*)$$

$$f_n' \rightrightarrows g \Rightarrow \left| \int_c^x (f_n' - g) \right| \leqslant \underbrace{\sup |f_n' - g|}_{\to 0} \underbrace{(x-c)}_{\leqslant (a-b)}$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad \left| \int_c^x (f_n' - g) \right| < \mathcal{E}$$

$\exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |f_n(c) - f(c)| < \mathcal{E}$

$\Rightarrow (*) < 2\mathcal{E}$

**Пример**

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(x^n)$$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n} \to 0 \qquad \text{т.е. } f_n \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 = f$$

$$f_n'(1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + x^{2n}} \cdot n \cdot x^{n-1} \Big|_1 = \frac{1}{2}$$

Но $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'_{x=1} = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1)$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

**Теорема (признак Вейерштрасса равн сх-ти)**

$f_n : E \to \mathbb{R}$

$\forall n \ \exists M_n \quad |f_n(x)| \leqslant M_n \quad \forall x \in E$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ (сход. мажоранта)

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сх. равн. (и абс) на $E$

**Док-во**

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall m, n > N \quad \left| \sum_{k=m}^{n} M_k \right| < \mathcal{E} \Leftrightarrow \sum M_k < \infty$$

Тогда $|S_n - S_{m-1}| = \left| \sum\limits_{k=m}^{n} f_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=m}^{n} |f_k(x)| \leqslant \left| \sum\limits_{k=m}^{n} M_k \right| < \mathcal{E}$

Т.е. $|S_n - S_{m-1}| < \mathcal{E}$ т.е. вып. кр. Коши для $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$

част. суммы сх равн. $\Rightarrow$ функ. ряд сх. равн.

Степенной ряд (в $\mathbb{C}$). Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.

**Опр**

Будем рассматривать

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad c_k, z \in \mathbb{C}$$

**Опр**

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = |z| \cos\varphi$$

$$y = |z| \sin\varphi$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$C_n = a_n + ib_n \quad n \in \mathbb{N}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, если $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n > N \quad |c_n - c| < \mathcal{E}$

**Утв**

$$c_n \underset{n\to\infty}{\to} c \Leftrightarrow \begin{matrix} a_n \to a \\ b_n \to b \end{matrix} \quad (n \to \infty)$$

$$c_n = a_n + ib_n$$

$$c = a + ib$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

**Опр**

Радиусом сх-ти степ. ряда $\sum c_n z^n$ назыв $R \in [0, +\infty]$ такое, что $(z \neq 0)$

$\forall z : |z| < R$ - ряд. сх

$\forall z : |z| > R$ - ряд расх.

**Примеры**

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k! z^k$ по пр. Даламб расх $\forall z \neq 0 \quad R = 0$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\left|(k+1)! z^{k+1}\right|}{|k! z^k|} = \infty, \quad z \neq 0$$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ - сх. $\forall z \in \mathbb{C}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$\begin{aligned} z^* = -1 \quad &: \quad \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ - сх } \Rightarrow \text{ сх. равн. } \forall\, |z| \leqslant d < 1 \\ z_0 = 1 \quad &: \quad \sum \frac{1}{n} \text{ - расх } \Rightarrow \forall\, |z| > 1 \end{aligned}$$

**Теорема** **(ф-ма Коши-Адамара)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad R \text{ - рад. сх-ти}$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

Теорема о комплексной дифференцируемости степенного ряда. Следствие: единственность разложения в степенной ряд.

Ряд Тейлора. Примеры ($e^x, \sin x, \ln(1+x), e^{-\frac{1}{x^2}}$).

**Опр**

$$f \in C^\infty(U_{x_0}) \qquad U_{x_0} \text{ - окр } x_0$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ назыв. Рядом Тейлора ф-и в т $x_0$

**Примеры**

1. $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k!}$
2. $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
3. $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
4. $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$

Биномиальный ряд $(1+x)^\alpha$

**Опр**

$$(1+x)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Запишем (формально) ряд Тейлора для $(1+x)^\alpha$ в т. $x_0 = 0$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-k+1)}{k!} = C_\alpha^k$$

Найдем интервал сходимость $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_\alpha^k z^k \quad z \in \mathbb{C}$ (по Даламберу)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_\alpha^{k+1} z^{k+1}}{c_\alpha^k z^k}\right| = \lim_{k\to\infty}$$

Признак Абеля-Дирихле для равномерной сходимости функциональных рядов (доказательство одного).

**Опр**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)b_k(t) \qquad \begin{array}{c} a_k : E \to \mathbb{C} \\ b_k : E \to \mathbb{R} \\ E \subset \mathbb{C} \end{array}$$

$b_k(t) -$ монот по $k \quad \forall t$

т.е $\quad b_{k+1}(t) \leqslant b_k(t) \quad \forall t($ или наоборот)

Абель

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ - сход р/м на $E$
2. $|b_k(t)| \leqslant M \qquad \forall k, \quad \forall t \in E$

Дирихле

1. $\left|\sum\limits_{k=0}^{N} a_k(t)\right| \leqslant M \quad \forall N, \forall t \in E$
2. $b_k(t) \rightrightarrows 0$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k(t)b_k(t)$ - сход равномерно на $E$

**Док-во** Дописать

Теорема Абеля. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

**Опр**

$$hint: \quad z \in [0, w] \Leftrightarrow z = t \cdot w \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

Пусть $\sum c_k z^k$ сход при $z = w \in \mathbb{C}$

Тогда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ - сход р-но на $[0, w]$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in C[0, w]$$

**Док-во**

$$f(t, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k w^k \qquad t \in [0, 1]$$

$\sum c_k w^k$ - сход (равн по t, т.к. не зависит от t)

$t^k$ - убывает

$$\left| t^k \right| \leqslant 1 \qquad \forall t \in [0, 1] \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ по пр. Абеля-Дирихле ряд сход. равномерно

**Пример**

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \qquad \forall x: \; -1 < x < 1$$

при $x = 1 \qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ - гармонич. знакочеред, он сход, т.о.

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ - сх. при $x = 1 \Rightarrow$ по т. Абеля

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \in C[0, 1]$$

В частности $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = f(1)$

$$\text{если } x \in (0,1), \text{ то } f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x)$$

$$\lim_{x\to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... = \ln 2$$

Интеграл комплекснозначной функции. Скалярное произведение и норма в пространстве $C(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, в пространстве $R([a;b])$. Ортогональность. Пример: $e_k(x) = e^{2\pi ikx}$.

<u>**Опр**</u>

$$f : [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

$$u(x) = \operatorname{Re} f(X)$$

$$v(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

$f$ - инт. по Риману $\quad f \in R_{\mathbb{C}}[a, b]$, если

$$u, v \in R[a, b]$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

<u>**Свойства**</u>

1. $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. $\displaystyle\int_a^b kf = k\int_a^b f \quad (k \in \mathbb{C})$
4. $\displaystyle\int_a^b \overline{f} = \int_a^b u - iv = \overline{\int_a^b f}$ (комплексное сопряжение)
5. $F' = f$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

6. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

<u>**Опр**</u> **(Периодич. функции)**

$$f(x + t) = f(x) \qquad \forall x$$

Будем считать, что $T = 1$

Периодич. функции с пер. 1 образуют линейное пр-во

$f, g$ - период. $T = 1$

$\Rightarrow f + k \cdot g$ - тоже период.$T = 1$

Если $f$ - периодич. $T = 1$, то

$$\int_0^1 f = \int_c^{c+1} f \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$0 < c < 1$

$$\int_0^1 f = \int_0^c f + \int_c^1 f = \int_0^c f(t+1)dt + \int_c^1 f = \int_1^{c+1} f(s)ds + \int_c^1 f$$

**Опр**

Рассмотрим пр-во функций с пер $T = 1$ и $\in R_{\mathbb{C}}[0,1] \Leftrightarrow R_{\mathbb{C}}[0,1]$ Введем на этом пр-ве структуру евклидова пр-ва

$$< f, g >= \int_0^1 f \cdot \overline{g} \text{ - скал. произведение}$$

**Опр (Норма в лин. пр-ве X со скал. произв.)**

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$$

1. $\|x\| \geqslant 0$

   $$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2. $\forall k \quad \|kx\| = \|k\| \cdot \|x\|$

**Опр**

$$f \perp g \quad (f \text{ ортогонально } g) \quad \Leftrightarrow \quad < f, g >= 0$$

**Пример**

$$a) e_n = e^{2\pi i n x} \qquad x \in [0,1] \qquad \|e_n\| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\|e_n\|^2 = \int_0^1 e_n \overline{e_n} = \int_0^1 e^{2\pi i n x} \cdot e^{-2\pi i n x} = 1$$

$$\overline{e^{i\varphi}} = \cos\varphi + \overline{i \sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}$$

$$b) < e_n, e_m >= \int_0^1 e^{2\pi i n x} \cdot e^{-2\pi i m x} = \int_0^1 e^{2\pi i x(n-m)} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} = \delta_{nm} \text{ - с. Крон.}$$

т.о. $\quad e_n \perp e_m \qquad \forall n \neq m$

Свойства скалярного произведения и нормы (теорема Пифагора, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника).

**<u>Свойства</u>**

$< ... >: X \times X \to \mathbb{C}$

1. $\forall x, y \in X \quad < x, y >= \overline{< y, x >}$
2. $\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall y \in X$

   $$< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y >$$

3. $\forall k \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in X$

   $$< kx, y > = \ k < x, y >$$

   $$< x, ky > = \ \overline{k} < x, y >$$

4. $< x, x > \geqslant 0$ причем $< x, x > = 0 \iff x = 0$
   Но для $f \in R_{\mathbb{C}}[0,1]$ необязательно из $< f, f > = \ 0$ следует, что $f = 0$

**<u>Свойства</u>**

1. $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \underbrace{< f, g > + < g, f >}_{2\,\mathrm{Re}< f,g >} + \|g\|^2 =$

   $$= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re} < f, g > + \|g\|^2$$

2. По т. Пифагора, если $f \perp g \ \Rightarrow$

   $$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

3. $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$
4. нер-во КБШ

   $$|< f, g >| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

5. Н-во треугольника

   $$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

**<u>Док-во</u> (КБШ)**

$$(*)\ |< f, g >| = \left| \int f\overline{g} \right| \leqslant \int |f|\,|g|$$

$$0 \leqslant \int (|f| + \lambda\,|g|)^2 = \underbrace{\|f\|^2 + 2\lambda \int |f|\,|g| + \lambda^2 \|g\|^2}_{\text{кв. трехчлен отн } \lambda} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$D \leqslant 0$

$$\frac{D}{4} = (\int |f|\,|g|)^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leqslant 0 \Rightarrow \int |f|\,|g| \leqslant \|f\| \|g\| \quad (**)$$

$(*)$ и $(**) \Rightarrow |< f, g >| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$

**Док-во (Нер-во треуг-ка)**

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re} < f, g > + \|g\|^2 \leqslant \|f\|^2 + 2\,|< f, g >| + \|g\|^2 \overset{\text{КБШ}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2 \Rightarrow \|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

**Теорема (Аксиомы нормы)**

$X$ – лин. пр-во $\qquad \|...\| : X \to [0, +\infty)$

1. $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
2. $\|kx\| = \|k\| \cdot \|x\| \qquad \forall k \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in X$
3. $\forall x, y \in X \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Коэффициенты Фурье функции по ортогональной системе $e_k$. Ряд Фурье.
Пример: тригонометрический полином.

**Опр** Тригонометрическим многочленом степени $N$ назовем:

$$T_n = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k(\cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx))$$

Как найти $c_k$, если известен $T_n(x)$ ?

$$T_n = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k \quad \Big| \cdot < ..., e_m >$$

$$< T_n, e_m > = c_m \cdot < \underbrace{e_m, e_m}_{=1} > \quad (\text{т.к.} < e_k, e_m >= \delta_{km})$$

$$c_m =< T_N, e_m >= \int_0^1 T_N \overline{e}_m$$

$\exists f, g$ - тригоном. полиномы, коэфф. в разложении по $e_k$ будем обозначать $\hat{f}(k) \in \mathbb{C}$

$$\text{т.е. } f = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k, \quad \hat{f}(k) =< f, e_k >$$

$$g = \sum_{k=-N}^{N} \hat{g}(k) e_k, \qquad \hat{g}(k) =< g, e_k >$$

$$< f, g >=< (\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k), (\sum_{j=-N}^{N} \hat{g}(j) e_j) >=$$

$$= \sum_{k,j=-N}^{N} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}}(j) < \underbrace{e_k, e_j}_{=\delta_{kj}} >= \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}}(k)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \qquad \hat{f}(k) =< f, e_k >$$

**Опр**

$$\hat{f}(k) =< f, e_k >= \int_0^1 f \cdot \overline{e}_k \text{ - коэфф. Фурье функции } f$$

по ортог. системе функций $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$

**Опр**

$$\text{Ряд Фурье функции } f: \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e_k(x)$$

Свойства коэффициентов Фурье (коэффициенты Фурье сдвига, производной).

**Свойства**

1. $f_a(t) = f(t+a) \quad \Rightarrow \hat{f}_a(k) = \int_0^1 f(t+a)e^{-2\pi ikt}dt =$

   $$= \int_a^{1+a} f(x)\cdot e^{-2\pi ik(x-a)}dx = \int_0^1 f(x)\cdot e^{-2\pi ikx}\cdot e^{e\pi ika} =$$

   $$= e^{2\pi ika}\hat{f}(k)$$

2. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

   $$\hat{f}'(k) = \int_0^1 f'(t)\cdot e^{-2\pi ikt}dt =$$

   Интегрируем по частям

   $$= \underbrace{f(t)e^{-2\pi ikt}}_{=0 \text{ т.к. } T=1}\Big|_0^1 + 2\pi ik \underbrace{\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt}_{\hat{f}(k)}$$

   $$\hat{f}'(k) = 2\pi ik\hat{f}(k)$$

3. Коэф. Фурье фещ. функции

   $$f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

   $$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)\cdot e^{-2\pi ikt}dt$$

   $$\hat{f}(-k) = \int_0^1 f(t)\cdot e^{2\pi kt}dt$$

   $$\Rightarrow \hat{f}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$$

4. Коэфф. Ферье четной функции

   $f$ - четная

   $$\hat{f}(k) = \int_{-k}^{k} f(t)e^{-2\pi ikt}dt = \int_{-k}^{k} \underbrace{f\cdot\cos 2\pi kt}_{\text{четная}} - i\int_{-k}^{k} \underbrace{f\cdot\sin 2\pi kt}_{\text{нечетная } =0} =$$

   $$= \int_{-k}^{k} f\cos 2\pi kt = \hat{f}(-k) \text{ поскольку четная}$$

Если $f$ - вещ и четная $\Rightarrow \quad \hat{f}(k) = \hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$

$\Rightarrow \hat{f}(k) \in \mathbb{R}$

Неравенство Бесселя. Лемма Римана-Лебега (light).

**Опр (Неравенство Бесселя)**

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \leqslant \int_0^1 |f|^2 = \|f\|^2$$

**Лемма**

$$f \in R[0,1], \quad S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k$$

$$f - S_N(f) \perp S_N(f)$$

**Док-во**

$$< f, S_N(f) >= \int_0^1 f(t) \cdot \overline{\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) \cdot e_k(t) dt} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{\hat{f}(k)} \int_0^1 f(t) \cdot \overline{e_k} dt = \sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{f}(k)\right|^2 =$$

$$=< S_N(f), S_N(f) > = \|S_N(f)\|^2$$

$$< f, S_N(f) > \quad = \quad < S_N(f), S_N(f) >$$

$$\Leftrightarrow < f - S_N(f), S_N(f) > \quad = 0$$

**Следствие**

т.к. $f - S_N(f) \perp S_N(f)$, то $\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2$

**Док-во (нер-ва Бесселя)**

$$\sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{f}(k)^2\right| = \|S_N(f)\|^2 \leqslant \|f\|^2 = \int_0^1 |f|^2$$

предельный переход в нер-ве $\quad (N \to \infty)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \leqslant \int_0^1 |f|^2$$

**Следствие (Лемма Римана-Лебега)**

$$f \in R_{\mathbb{C}}[0,1] \Rightarrow \hat{f}(k) \to 0 \quad k \to +\infty \quad k \to -\infty$$

**Док-во**

Необходимо усл. сх-ти ряда и нер-во Бесселя.
В нер-ве Бесселя ряд возрастает и ограничен сверху, значит он сходится.

$$\Rightarrow \hat{f}(k) \to 0$$

Вычисление интеграла Дирихле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$.

Ядра Дирихле, их свойства. Выражение частичных сумм ряда Фурье через ядра Дирихле.

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e_k(x) = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt \cdot e^{2\pi ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{2\pi ik(x-t)}dt =$$

$$= \int_0^1 f(t) \underbrace{\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ik(x-t)}}_{\text{Ядро Дирихле}}$$

**<u>Опр</u> (ядро Дирихле)**

$$D_N(y) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ky} \overset{\text{геом. прог.}}{=} e^{-2\pi iNy}\frac{1-e^{2\pi i(2N+1)y}}{1-e^{2\pi iy}} =$$

$$= e^{-2\pi iNy}\frac{1-e^{2\pi i(2N+1)y}}{1-e^{2\pi iy}} \cdot \frac{1-e^{-2\pi iy}}{1-e^{-2\pi iy}} = \frac{e^{-2\pi iNy}+e^{2\pi iNy}-e^{-2\pi i(N+1)y}-e^{2\pi i(N+1)y}}{1+1-e^{2\pi iy}-e^{-2\pi iy}} =$$

$$= \frac{2\cos 2\pi Ny - 2\cos 2\pi(N+1)y}{2-2\cos 2\pi y} =$$

Через разность косинусов

$$= \frac{2\sin\pi(2N+1)y\sin\pi y}{2\sin^2\pi y} = \frac{\sin\pi(2N+1)y}{\sin\pi y}$$

$$D_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\pi(2N+1)y}{\sin\pi y}, & y \neq 0 \\ 2N+1, & y = 0 \end{cases}$$

**<u>Свойства</u>**

1. $D_N(-y) = D_N(y)$ четная
2. $D_N \in C[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$
3. $D_n = \displaystyle\sum_{j=-N}^{N} e_j(y)$

   $$\hat{D}_N(k) = < D_n,\ e_k >$$

   $$\hat{D}_n(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leqslant N \\ 0, & |k| > N \end{cases}$$

   $$\Rightarrow \hat{D}_N(0) = < D_N,\ e_0 >= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t)dt = 1$$

Таким образом, част. суммы р. Фурье выражаются через ядро Дирихле.

$$S_N f(x) = \int_0^1 f(t) \cdot D_N(x-t)dt$$

Свертка. Простейшие свойства. Свертка с тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

**Опр (Свертка функций)**

$$f, g \in R\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)g(x-t)dt \quad \text{- свертка } f \text{ и } g$$

т.о $S_n = f * D_N$

**Свойства**

1. $f * g = g * f$ коммутативность

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)g(x-t) = [x - t = s] = -\int_{x+\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} f(x-s)g(s)ds =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)f(x-s)ds = g * f$$

2. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

3. $f * (kg) = k(f * g)$

4. $f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\quad T_N$ - тригонометр. полином степ $\leqslant N$
Тогда $f * T_n$ - тригоном. полином степ $\leqslant N$

$$f * T_N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)T_N(x-t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ik(x-t)}dt =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)e^{-e\pi ikt}dt \cdot e^{2\pi ikx} \text{ - триг. полином степ. } N$$

5. $f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$P_N$ - алг. полином степ $\leqslant N$

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x^k$$

$$f * P_N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \sum_{k=0}^{N} a_k (x-t)^k$$

Принцип локализации Римана.

$$S_N f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) D_N(t) dt$$

**Лемма**

$$f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{N \to \infty} \int f(x-t) D_N(t) dt = 0$$

$$\delta \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}$$

Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье для локально-Гельдеровой функции.

Ядра Фейера, их свойства. Связь с $\sigma_N(f)$.

Аппроксимативная единица. Определение, примеры. Теорема о равномерной сходимости свертки с аппроксимативной единицей.

Теорема Фейера. Теорема Вейерштрасса.

Среднеквадратичное приближение функций, интегрируемых по Риману, тригонометрическими полиномами.

Равенство Парсеваля.

Замечания из конспектов, которые не вошли в билеты Множества меры ноль

**Опр**

$E \subset \mathbb{R}$, говорят, что $E$ - мн-во меры ноль, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \;\; \exists \underset{\substack{\text{не более чем сч.} \\ \text{набор откр. инт.}}}{I_j = (\alpha_j, \beta_j)} : E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \;\; \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \mathcal{E} \; (|I_j| = \beta_j - \alpha_j)$$

**Примеры**

1) $\forall$ Конечное множество - мн-во меры ноль

$$E = \{x_1, ..., x_n\},\; I_j := (x_j - \frac{\mathcal{E}}{4n}, x_j + \frac{\mathcal{E}}{4n}),\; \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

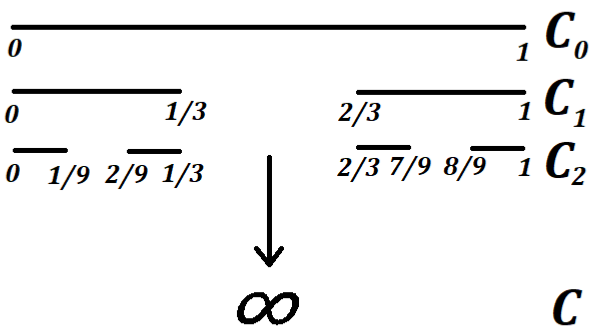
2) $A = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ - счётное $\Rightarrow$ имеет меру 0.

Как покрыть $\mathbb{N}$? $|I_j| = \dfrac{\mathcal{E}}{2^{j+1}}$ - геом. прогрессия

3) Несчетное множество меры ноль:

Канторовское мн-во (Канторовский компакт), построение:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$




Определим $C_{\frac{1}{3^p}}$ как множество отрезков, получинных для $\mathcal{E} = \dfrac{1}{3^p}$ для крайних точек каждого отрезка из $C_p$ (они их покроют "вплотную"и по краям будет немного лишнего). На каждом шаге $p$ у нас $2^p$ отрезков

$$\Rightarrow |C_{\frac{1}{3^p}}| = 5\frac{2^{p-1}}{3^p} \underset{p \to \infty}{\to} 0$$

Критерий Лебега интегрируемости функции

**Теорема**

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, тогда:

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ имеет ограниченное мн-во точек разрыва и меру 0

**Примеры**

1) Функция Дирихле $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\mathcal{D} \notin R[0,1]$. Проверим по критерию Лебега. Множество точек разрыва - $\mathbb{R}$, но оно не множество меры 0 (слишком много точек).

2) Функция Римана $\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ - несократимая дробь} \end{cases}$

Оказывается, она интегрируема по Риману на любом отрезке. Рассмотрим [0,1]:

а) $\forall a \in \mathbb{Q}$ - точка разрыва $\Phi$:

$\Phi(a) > 0$ по определению. С другой стороны как угодно близко найдётся иррациональная точка, в которой функция принимает значение 0.

б) $\forall a \notin \mathbb{Q}$ - непрерывна:

Для произвольного $\mathcal{E} > 0$ рассмотрим множество $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \mathcal{E}\}$.

Никакая иррациональная точка не лежит в $M$, поскольку в иррациональных точках функция $f$ обращается в ноль.

Если $x \in M$, тогда $x$ есть рациональное число вида $x = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, дробь $\frac{m}{n}$ несократима, и тогда $f(x) = \frac{1}{n} \geq \mathcal{E}$ и, следовательно, $n \leq \frac{1}{\mathcal{E}}$. Из ограничения на $n$ следует, что пересечение множества $M$ и любого ограниченного интервала состоит из конечного числа точек.

Пусть $\alpha$ - произвольное иррациональное число. По определению $f(\alpha) = 0$. Мы можем выбрать окрестность точки $\alpha$ так, чтобы в ней не содержалась ни одна точка множества $M$. Если же $x \notin M$, то $f(x) < \mathcal{E}$. Таким образом, мы нашли интервал, который требуется в определении непрерывности.