Содержание

1 Метрические пространства **2**

Топология $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_j^n |x_j - y_j|^2}$ 5

Топологические св-ва 5

Ограниченность 6

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса 6

2 Компатные множества в $\mathbb{R}^n$ **7**

3 Отображения в $\mathbb{R}^n$ **12**

Непрерывные отображения 13

Локальные свойства непрерывности 15

4 Глобальные св-ва непрерывности **16**

Диф-ние композиции 29

5 Частные производные композиции (в усл. теоремы) **30**

Геометрические св-ва градиента 31

5.1 Непрерывно дифференцируемые отображения 33

Лемма о среднем 33

Т. о непр. диф. отображении в точке 34

5.2 Непрерывно дифференцируемые отображения 34

2019-09-04

1 Метрические пространства

$$M \text{ - мн-во}, \quad d : M \times M \to [0; +\infty) \text{ - метрика}$$

Теорема

Аксиомы метрики:

1. $d(x, y) \geqslant 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

Примеры

1. $M = \mathbb{R}^n \quad x \in M \quad x = (x_1, ..., x_n)$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j|$$

2. $M = \mathbb{R}^n$,

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum |x_j - y_j|^n_{j=1}}$$

$$\text{В частн. } d_2(x, y) = \sqrt{\sum^n |x_j - y_j|^2}$$

3. $M = C[0, 1]$

$$f, g \in M$$

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

4. $M = C[-1, 1] \quad d(f, g) = \int_{-1}^1 |f - g|$

Утв

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} \leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j|$$

$$d_\infty(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant n \cdot d_\infty(x, y)$$

Опр

$$x^{(m)} \in M$$

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x \Leftrightarrow d(x^{(m)}, x) \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

Пример

1. $M = C[0,1] \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

$$f^{(m)} \underset{d}{\to} f \Leftrightarrow f^{(m)} \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$$

2. $M = \mathbb{R}^n, \quad d_2(x,y) \quad x^{(m)} = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$

$$x^{(m)} \underset{d_2}{\to} x \Leftrightarrow x_j^{(m)} \to x_j \quad \forall j = 1, ...n$$

Т.о сходимостьть по метрике d_2 в $\mathbb{R}^n$ равносильна покоординатной сх-ти

Теорема (Критерий Коши)

$$(\mathbb{R}^n, d_2)$$

$$x^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} x \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n, k \geqslant N$$

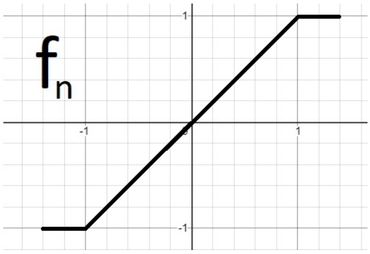
$d_2(x^{(n)}, x^{(k)}) < \mathcal{E}$ (упр, доказывается покоординатно)

Замечание

Аналогичн. Т. Верна не для всех метрич. пр

Пример

$$M = C[-1,1] \quad d(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} |f - g|$$

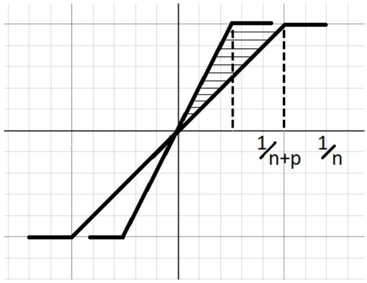


$\{f_n\}$ - сх. в себе:

$\forall\mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n > N \ \forall p > 0 \quad d(f_n, f_{n+p}) \overset{?}{<} \mathcal{E}$

$$d(f_n, f_{n+p}) = \int_{-1}^{1} |f_n - f_{n+p}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{1}{n} \to 0$$

$\Rightarrow \forall\mathcal{E} \quad \exists N : \forall n > N, p > 0 \ d(f_n, f_{n+p}) < \mathcal{E}$



Усл. Коши удовл. (сх в себе)

Есть ли $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$?

$g(x) = \operatorname{sign} x$ - поточечный предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_b - g| = 0$, но $g \notin C[-1, 1]$

Предположим, что $\exists f \in C[-1, 1] : \quad \lim f_n = f$, т.е $\int |f_n - f| \to 0$

$$0 \leqslant \int_{-1}^{1} |f - g| \leqslant \int_{-1}^{1} |f_n - f| + \int_{-1}^{1} |f_n - g| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{|f - g|}_{\in C[-1;1]} = 0$$

$$= \int_{-1}^{0} |f - \underbrace{g}_{=0}| + \int_{0}^{1} |f - \underbrace{g}_{=0}| \to \begin{matrix} f(x) = 1 & \forall x > 0 \\ f(x) = -1 & \forall x < 0 \end{matrix}$$

- неустранимый разрыв в точке $x = 0 \Rightarrow \lim f_n$ не существует

Упр

$C[0, 1] \quad d(f, g) = \sup\limits_{1\leqslant x\leqslant y} |f(x) - g(x)|$

Выполняется ли Т. Коши?

Топология $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_j^n |x_j - y_j|^2}$

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < r\}$

$X \subset \mathbb{R}^n \quad X$ - откр, если $\forall a \in X \quad \exists B_a : B_a \subset X$

X - замкнуто $\Leftrightarrow X^C$ - открыто

Теорема (св-ва)

1. U_α - откр $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ - откр.

2. $\{U_k\}_{k=1}^N$ - откр $\Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ - откр

3. F_α - замк $\forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$

4. F_k - замкн $\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{N} F_k$ - замк

Опр

Окрестность т. a:
 U - откр: $a \in U$

δ-окр. т. a:
 $U_a(\delta) = B(a,\delta)$

Прокол. δ-окр. т a:

$$\overset{\circ}{U}_a(\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\}$$

Внутренность $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{int}(X) = \{a \in X : \exists B_a \subset X\}$$

Внешность $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{ext}(X) = \mathrm{int}(X^c) = \{b \in X^c : \exists B_b \subset X^c\}$$

Замыкание:

$$\mathrm{Cl}(X) = (\mathrm{ext}(X))^c$$

Граница:

$$\partial X = \mathrm{Cl}(x) \setminus \mathrm{int}(X) = \mathbb{R}^n \setminus (\mathrm{int}\, X \cup \mathrm{ext}\, X)$$

Примеры

$$X = B(0,1)$$

$$\operatorname{int} X = B(0,1)$$

$$\operatorname{ext} X = \{x : d(0,x) > 1\}$$

$$\operatorname{Cl} X = \overline{B}(0,1) = \{x : d(0,x) \leqslant 1\}$$

Рисунок шарика

$$\partial X = S(0,1) = \{x : d(0,x) = 1\}$$

Упр

Доказать или опровергнуть

1. $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$
2. $\partial(\partial X) = \partial X$
3. $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} X) = \operatorname{Cl} X$

Утв

$$X \text{ - замкн } \Leftrightarrow ClX = X$$

Док-во

$$U \text{ - откр} \quad \operatorname{int} U = U$$

$$\Rightarrow X \text{ - замкн } \Leftrightarrow X^c \text{ - откр.} \Leftrightarrow \operatorname{ext} X = \operatorname{int}(X^c) = X^c \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Cl} X = (\operatorname{ext} X)^c = X^{cc} = X$$

Опр

Ограниченность:

$$X \subset \mathbb{R}^n, \quad \operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$$

$$X \text{ - огр. если } \operatorname{diam} X < \infty \Leftrightarrow \exists R > 0 : X \subset B(0,R) \text{ (УПР)}$$

Теорема (принцип выбора Больцано-Вейерштр.)

$$\forall \text{ огр. послед. } \{X^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n \text{ можно выделить сх. подпослед.}$$

2 Компатные множества в $\mathbb{R}^n$

Опр

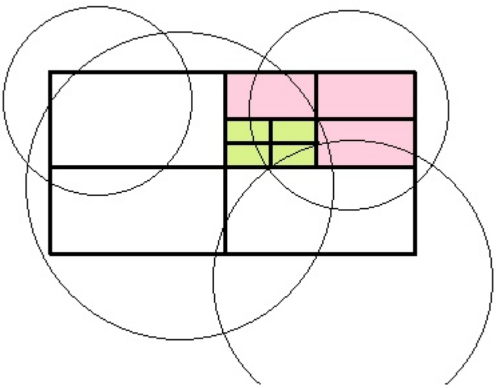
$K \subset \mathbb{R}^n$ - компактное мн-во $\Leftrightarrow \forall$ откр. покр. можно выделить конеч. подпокр.

Т.е. если $U_\alpha -$ откр. $\forall \alpha \in A : K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in A :$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_\alpha$$

Примеры

1. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ - компакт.
2. $I := \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$



$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n$$

$$\operatorname{diam} I_n = \frac{\operatorname{diam} I}{2^n} \to 0$$

I_n - замк

$$I_k = \prod_{j=1}^{n} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \qquad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] = \{c_j\} \forall j$$

$$[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \supset [a_j^{(k+1)}], b_j^{(k+1)}$$

$$x^* \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

Если $y^* \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k \Rightarrow d(x^*, y^*) \leqslant \operatorname{diam} I_k \to 0$

$\Rightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$

$x^* = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$

$x^* \in I \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \Rightarrow$

$\exists \alpha^* : x^* \in U_{\alpha^*}$ - откр

$\exists B(x^*, \delta) \subset U_{\alpha^*}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : I_N \subset U_{\alpha^*}$

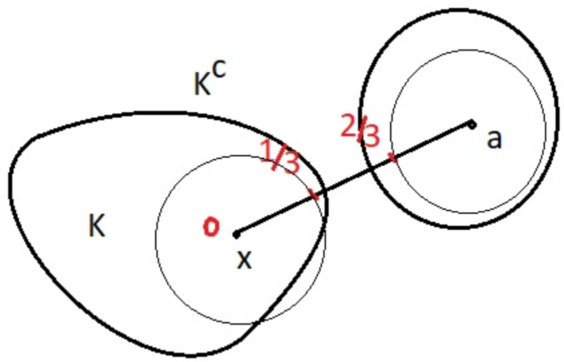
2019-09-11

Лемма

$K \subset \mathbb{R}^n$ - компакт, тогда:

1. K - замкн
2. K - огр
3. $\forall D \subset K \quad D$ - замк $\rightarrow D$ - комп

Док-во



1) $\quad K^c \ni a$

$\forall x \in K \quad d(a,x) > 0$

$$r_x = \frac{1}{3} d(x,a)$$

$\forall x \in K$

$B(x, r_x)$ - откр

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, r_x)$ - откр. покр. компакта K

$$\exists x_1, ..., x_N \in K : K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, r_{x_j})$$

$$a \in \bigcap_{k=1}^{N} B(a, r_{x_k}) = B(a, r_{\min}$$

$r = \min(r_x, r_{x_N}) > 0$

причем $\bigcap\limits_1^N B(a, r_{x_k})$ не имеет общих точек

$\bigcup\limits_1^N B(x_k, r_{x_k}) \supset K$

$\exists B(a, e_{mn}) \subset K^c \to K^c$ - откр $\to$ K - замкн

2) комп - $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B(0, k)$ - откр. покр

$\Rightarrow \exists k_1, ..., k_n$

$K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B(0, k_j) = B(0, \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N}(k_j)) \Rightarrow K$ - огр

3) замкн - $D \subset K$ - комп

Пусть откр. покр

$D \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$

$U^* = D^c$ - откр - добавим к покр. K$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$

$\Rightarrow$ выд. конечн. подпокрытие $K \quad \{U_{\alpha_j}\}_{j=1}^N \cup \{U^*\}$

$D \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} U_\alpha$

Теорема (След. усл. равносильны)

1. K - компакт.
2. K - замк. и огр.
3. $\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\ x_m \in K$

   $\exists$ подпосл $x_{m_k} \to x \in K$

Док-во

$(1 \Rightarrow 2)$ было

$(2 \Rightarrow 1)$

т.к. K - огр $\Rightarrow \exists I = \prod\limits_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$

замкн - $K \subset I$ - комп

$\Rightarrow$ (лемма) K - комп

$(2 \Rightarrow 3)$

$x_m \in K$ - замк и огр

$\Rightarrow \exists x_{m_k}$ - сх (пр. выб. Б-В)

$x_{m_k} \to x$ предпол $x \notin K$

$x \in K^c$ - откр $\Rightarrow \exists B_x \subset K^c$

Но $K \ni d(x_{m_k}, x) \to 0$ противореч $x \in K$

$(3 \to 2)$

а) предп.K не явл. огр.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K : d(0, x_n) > n$

$\{x_n\}$ не огр $\Rightarrow$ не сх.

$\Rightarrow K$ - огр

б) предп., что K - не явл. замкн

K^c - не откр

$\exists a \in K^c : \forall \delta > 0 \ B(a, \delta) \cap K \neq \varnothing$

$\exists x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap K$

$x_n \in K$

$0 \leqslant d(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0 \quad x_n \to a; \ x_{n_k} \to x \in K$

Упр

$K_1 \supset K_2 \supset ...$

д-ть $\bigcap\limits_{j \in \mathbb{N}} K_j \neq \varnothing$

3 Отображения в $\mathbb{R}^n$

Опр

$E \subset \mathbb{R}^n, \quad f : E \to \mathbb{R}^m$ - отобр-е (вект. ф-я)

($m = 1$ - ф-я)

$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$

$x = (x_1, ..., x_n) \quad f_j : E \to \mathbb{R}$ коорд. функ-ия

Опр

$a \in \mathbb{R}^n$

a - пред. т. E, если

$\forall \delta > 0 \quad U()(a, \delta) \cap E \neq \varnothing$

Опр

$f : E \to \mathbb{R}^m, a$ - пред. т E

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, если

(Коши)$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E$

$0 < d(x, a) < \delta \to d(f(x), L) < \mathcal{E}$

(Гейне) $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad x_k \in E \setminus \{a\} x_k \to_{k \to \infty} a \to F(x_k) \to_{k \to \infty} L$

Упр

Эквивалентность определений

Упр

Сходимость $\Leftrightarrow$ покоординатная сходимость

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

$$f(\delta,\delta) = \frac{1}{2} \underset{\delta\to 0}{\to} \frac{1}{2}$$

$$f(\delta,-\delta) = -\frac{1}{2}$$

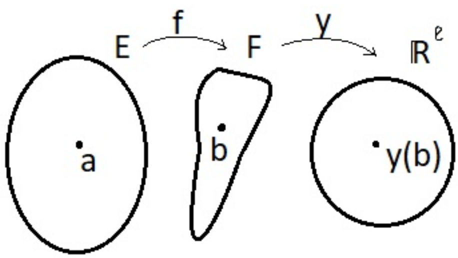
т.е $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не сущ.

Теорема **(предел композиции)**

$E \subset \mathbb{R}^n, \quad F \subset \mathbb{R}^m \qquad \mathbb{R}^n \ni a$ - пред т. E $F \ni b$ - пред. т. F

$f : E \to F; \quad g : F \to \mathbb{R}^l$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b; \quad \lim\limits_{x\to b} g(x) = g(b)$



Тогда $\lim\limits_{x\to a} g\circ f = g(b)$

Теорема **(Крит. Коши)**

a - пред т. E

$f(x)$ имеет предел в т.a

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overset{\circ}{U}(a,\delta) \cap E \to d(f(x), f(y)) < \mathcal{E}$

Опр (непрерывные отображения)

$a \in E \qquad f : E \to \mathbb{R}^m$

Если a - изол $\to f$ - непр в a,
если a - пред, то f - непр в т. $a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

f - непр в т.$a \Leftrightarrow f_j$ - непр. в т a $\forall 1 \leqslant j \leqslant m$

f - непр в т. $a; g$ - непр в $f(a) \Leftrightarrow g \circ f$ - непр в т a

непр сохр. при $+$, умн. на число

f - непр на $E \Leftrightarrow$ непр $\forall a \in E$

Теорема (эквивалентность определений непрерывности)

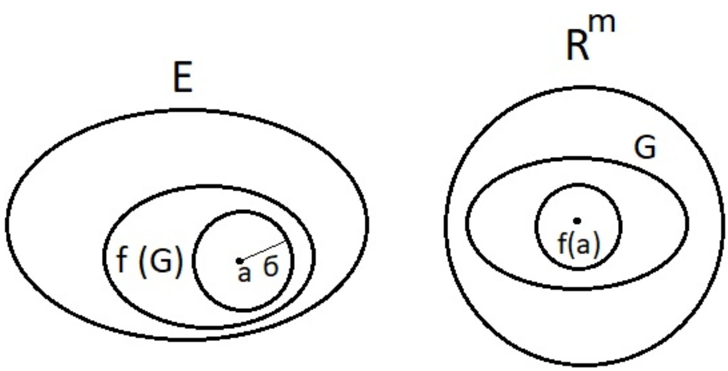
$f : E \to \mathbb{R}^m$

f - непр на $E \Leftrightarrow \forall G \subset \mathbb{R}^m \quad G$ - откр $\to f^{-1}(G)$ - откр в E

Док-во

G - откр.

$f^{-1}(G)$ - откр ?



$a \in f^{-1}(G)$

$f(a) \in G$ - откр $\to \exists U(f(a), \mathcal{E}) \subset G$

рисунок

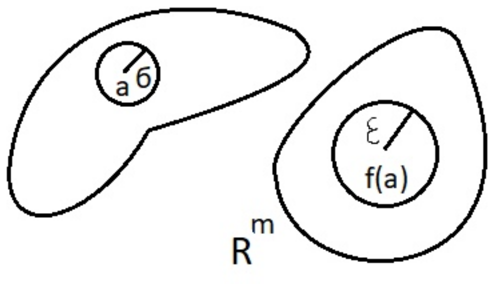
т.к f непр в т. a

$\exists \delta : d(a,x) < \delta \to d(f(a), f(x)) < \mathcal{E}$

$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \mathcal{E}) \subset G$

$\to B(a,\delta) \subset f^{-1}(G)$

$\leftarrow a \in E \to ?f$ - непр в т. а (рисунок)



$\forall \mathcal{E} > 0 B(f(a), \mathcal{E})$ - откр в $\mathbb{R}^m$

$\to f^{-1}(B(f(a), \mathcal{E})$ - откр. $\to \exists \delta : B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \mathcal{E})) \to f$ - непр. в т a

Теорема (локальные свойства непр. функций)

(дописать)

1. непрерывна в т. а $\Rightarrow$ найдетс
2. f - непр в т. a; g непр в a, $f \circ g$ непр в a.
3. f - непр в т. a, g - непр в f(a) $\Rightarrow$

$f : E \to \mathbb{R}^1$ - непр. в x_0

если $f(x^0) > 0 \to$

4 Глобальные св-ва непрерывности

Теорема (непрерывный образ компатка)

$f \in C(E, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f : E \to \mathbb{R}^m$ - непр. в E

K - компакт $\qquad K \subset \mathbb{R}^n$

$f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда $f(K)$ - компакт

рисунок 1

Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - откр. покр $f(K)$

$f(K) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$

$\to f^{-1}(U_\alpha)$ - откр, причем

$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$ - откр. покр. комп $\to \exists f^{-1}(U_{\alpha 1})...f^{-1}(U_{\alpha_N})$

$K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} f^{-1}(U_{\alpha_k}) \to$

$f(K) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_{\alpha_k}$ - выделили конечное подпокрытие

$f(K)$ - компакт

Теорема (Вейерштрасс)

K - компакт; $f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда

1. f - огр.
2. Если m = 1, то f достигает sup и inf на K

Док-во

$$f : K \to \mathbb{R}^m \text{ - огр} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in K \quad d(f(x), 0) < M$$

1. $f(k)$ - комп $\to$ огр
2. $f : K \to \mathbb{R} \to M = \sup\limits_{x \in K} f(x) < +\infty$ рисунок 2

   $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x^k \in K :$

   $M - \dfrac{1}{k} < f(x^k) \leqslant M \to f(x^k) \underset{k \to \infty}{\to} M$

   $f(x^k) \in f(K)$ - компакт $\to$ замнг

   $M \in f(K)$

Теорема **(Кантор)**

$$f \in C(K, \mathbb{R}^m) \quad K \subset \mathbb{R}^n \text{ - компакт } \to f \text{ - равном. непр на } K$$

Док-во

f - непр $\to$ непр. $\forall x \in K \quad \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_x :$

$\forall x' \in K \quad d(x', x) < 2\delta_x \to d(f(x'), f(x)) < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

рисунок 3

$\{B_x(\delta_x)\}_{x \in K}$ - откр. покрытие K - комп.

выделим конечное поддпокр.

$K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B_{x_j}(\delta_{x_j})$

$\delta = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} \delta_{x_j}$ - то, что надо

Пусть $d(\widetilde{x}, \widetilde{\widetilde{x}}) < \delta$

$\widetilde{x} \in K \to \exists x_l : \widetilde{x} \in B(x_l, \delta_{x_l})$

$d(\widetilde{\widetilde{x}}, x_l) \leqslant d(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{x}) + d(\widetilde{x}, x_l) < \delta + \delta_{x_l} < 2\delta_{x_l}$

$\to d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$ и $d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

$d(f(\widetilde{x}), f(\widetilde{\widetilde{x}})) \leqslant d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) + d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \mathcal{E}$

$\mathbb{R}^n$ как лин. пр-во

Опр

$$\text{Норма в } \mathbb{R}^n: \quad ||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

Аксиомы нормы

1. $||x|| \geqslant 0$
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $||k \cdot x|| = |k| \cdot ||x||$
4. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Стандартная норма в $\mathbb{R}^n$

$$||x|| = d(x, 0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$||x + y|| = d(x + y, 0) = d(x, -y) \leqslant d(x, 0) + d(0, -y) = ||x|| + ||y||$$

Бывают другие нормы
УПР.1 пусть $|||\cdot|||$ - другая норма в $\mathbb{R}^n$
Тогда $\quad \exists c, C > 0:$

$$c \cdot ||x|| \leqslant |||x||| \leqslant C \cdot ||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

УПР.2 $\forall$ норма непр в $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ - пр-во со скал. пр-нием

Опр

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x \cdot y = (x; y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$||x||^2 = (x; x)$$

н-во К-Б

$$(x, y)^2 \leqslant ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

Линейные операторы в $\mathbb{R}^n$

Опр

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - лин. операторы

$L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m):$

$\forall x, t \in \mathbb{R}^n; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}:$

$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$

пишут Lx вместо $L(x)$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - лин. пр-во:

если $A, B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

то $(A + B)(x) = Ax + Bx$

$A + B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$\forall k \in \mathbb{R}$

$(kA)(x) : k \cdot Ax$

kA - тоже лин. оператор

Кроме того $A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

$$AB = A \circ B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$$

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис (ортонорм) в $\mathbb{R}^n; \quad \{e_j^*\}_{j=1}^m$ - базис в $\mathbb{R}^m$

Тогда $\forall$ лин. оператору соотв. $Mat(A)$

$$Ae_j = \sum_{k=1}^m ae_k^* \qquad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq Mat_{\mathbb{R}}(m \times n) \simeq \mathbb{R}^{mn}$

$Mat(A \cdot B) = Mat(A) \cdot Mat(B)$ - матричное произв.

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

Теорема

$$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Док-во

$$d(x,y) = ||x-y||$$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - лин. оператор

$$||Ax - Ay|| = ||\underbrace{A(x-y)}_{A(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)e_j)}|| = ||\sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \cdot Ae_j|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \cdot ||Ae_j|| \leqslant M\sqrt{n}||x-y||$$

$$M = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} ||Ae_j|| \qquad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{M\sqrt{n}}$$

$B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ - компакт

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - непр на $B_0(1)$

$\to$ огр.

$||Ax||$ - нерп $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\to$ достигает наиб. знач. на комп. $B_0(1)$

Следствие

$$\sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| = \max_{||x|| \leqslant 1} ||A_x|| < \infty$$

Опр

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Норма лин. оператора A

$$||A|| = \max_{|x| \leqslant 1} ||A_x||$$

Теорема

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||A_x||}{||x||}$$

т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad ||A_x|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$

Док-во

Если $A \equiv 0$ - очев. $\quad (||A|| = 0)$

Пусть $A \not\equiv 0 \to$

$\exists x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : ||Ax^*|| \neq 0$

$$0 \neq \frac{||Ax^*||}{||x^*||} = ||A \underbrace{\frac{x^*}{||x^*||}}_{=y^* \in \phi_1 \subset B_0}||$$

$\to ||A|| > 0$

Пусть max достигается внутри ед. шара:

$||A|| = ||A\widetilde{x}||$

где $||\widetilde{x}|| < 1$

Рассм. $\widetilde{y} = \dfrac{\widetilde{x}}{||x||}$

рисунок5?

$$||A\widetilde{y}|| = \frac{||A\widetilde{x}||}{||\widetilde{x}||} > ||A\widetilde{x}||$$

т.е. $||A\widetilde{x}||$ не max!

$\to \max ||Ax||$ в $||x|| \leqslant 1 \quad$ достиг. на сфере $||x|| = 1$

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||A_x||$$

$$||A|| = max_{||x||=1}||Ax|| = \sup_{||x||=1} \frac{||Ax||}{||x||} \leqslant \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

$$\sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x|| \neq 0} ||A \frac{x}{||x||}|| \leqslant \max_{||y||=1} ||Ay|| = ||A||$$

Теорема

1. Норма оператора действительно норма
2. $||A \cdot B|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$

Док-во

1. проверим аксиомы нормы

$$(1) \quad ||A|| \geqslant 0 \text{ - очев}$$

$$(2) \quad ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ (начало предыдущей теоремы)}$$

$$(3) \quad ||k \cdot A|| = \max_{||x||=1} ||(k \cdot A)x|| = \max_{||x||=1} |k| \cdot ||Ax|| = |k| \cdot ||A||$$

$$(4) \quad ||A + B|| = \max_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leqslant \max_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leqslant$$

$$\leqslant ||A|| + ||B||$$

2. $||(AB)x|| = ||A(Bx)|| \leqslant ||A|| \cdot ||Bx|| \leqslant ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x||$

$$\sup_{||x|| \neq 0} \frac{||ABx||}{||x||} \leqslant ||A|| \cdot ||B||$$

$$\sup = ||AB||$$

Теорема (оценка нормы лин. оператора)

$$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$||A||^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 = ||A||^2_{HS} \text{ - норма Гильберта Шмидта}$$

$$y = Ax = A(\sum_{j=1}^{n} \cdot x_j \cdot e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot Ae_j$$

$$\underset{\text{k-я координата}}{y_k} = \sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k \text{ - к-я координата}$$

$$1 \leqslant k \leqslant m$$

$$|y_k|^2 = |\sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(Ae_j)^2_k}_{=a_{jk}} =$$

$$= ||x||^2 \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$||y||^2 = ||Ax||^2 = \sum_{k=1}^{m} |y_k|^2 \leqslant ||x||^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2$$

$$||A|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|}$$

УПР $||A||_{HS} \leqslant \sqrt{n} \cdot ||A||$

Дифференцирование

Опр

$$E \subset \mathbb{R}^n, \quad E \text{ - откр.} \quad a \in E$$

$$f : E \to \mathbb{R}^m$$

f - дифф-мо в т. a, если $\exists L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \underset{\alpha(h)}{o(||h||)} \qquad ||h|| \to 0$$

рисунок 6

$$(h : a + h \in E)$$

$$\alpha(h) = o(||h||) = o(h) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\alpha(h)||}{||h||} = 0$$

$$f(a + h) = f(a) + Lh + o(||h||) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a + h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

Если такой L $\exists$ то он ед.

Пусть $h \in \mathbb{R}^n : ||h|| = 1$

$$a + t \cdot h$$

рисунок 7

$$f(a + th) = f(a) + \underbrace{L(th)}_{= t \cdot Lh} + o(th)$$

$||th|| \to 0$

$\dfrac{f(a+th)f(a)}{t} = Lh + \dfrac{o(th)}{t} \underset{t\to 0}{\to} 0$

$Lh = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$

$\forall h : ||h|| = 1 \quad L$ опеределен однозначно $\to \forall x \neq 0$

$Lx = ||x|| \cdot L\dfrac{x}{||x||}$

L - дифференциал. f в т. а

$d_a f = L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$h \in \mathbb{R}^n \qquad d_a f(h) \in \mathbb{R}^m$

Примеры

$$lim_{||h||\to 0} \frac{||f(a+h)-f(a)-Lh||}{||h||} = 0$$

1. $f = const \to d_a f = 0$
2. $f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = f(a+h) - f(a) = f(h) \to Lh = f(h)$

   $d_a f = f$(если f линеен)

3. если $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - диф. в т. а, то

   $d_a(f+g) = d_a f + d_a g$

   $lim_{||h||\to 0} \dfrac{||(f+g)(a+h)-(f+g)(a)-d_a f(h) - d_a g(h)||}{||h||} =$

   $\leqslant \lim \dfrac{||f(a+h) = f(a) - d_a f(h)|| + ||g(a+h) - g(a) - d_a g(h)||}{||h||} = 0$

4. $d_a(kf) = k d_a f$

Производная по направлению

Опр

$$\text{Пусть } ||e|| = 1, \quad e \in \mathbb{R}^n \qquad f : E \to \mathbb{R}^m \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

Теорема (о производной по напр.)

$$f : E \to \mathbb{R}^m \text{ - дифф. в т. } a$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e)$$

рисунок 7

$$z = f(x, y)$$

$$f : E \to \mathbb{R}^1 \qquad E \subset \mathbb{R}^2$$

Док-во

$$f(a + te) - f(a) = d_a f(te) + o(te) \quad ||te|| \to 0 \qquad ||te|| = |t|$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t} = d_a f(e)$$

Опр

Частные производные $\{e_k\}_{k=1}^n$ - базис $\mathbb{R}^n$

$$f : E \to \mathbb{R}^m \qquad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{x_k}(a) = \frac{\partial t}{\partial e_k}(a)$$

Матрица Якоби

Опр

Пусть f - диф. в т. $a \in E$

Временно вернмеся к обозначению$L = d_a f$

$Mat(L)$ - матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad j \text{ - й столбец - координаты вектора}$$

$$d_a f(e_j) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$a_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

$$Mat(d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & & \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & & & \end{pmatrix}$$

2019-09-18

Напоминание

$$f : U \to \mathbb{R}^m, \quad a \in U, \quad f \text{ - диф в т} a \Rightarrow$$

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{Mat } (d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Якобиан - определитель матр. Якоби

Пример

$$f_1(\rho, \phi)$$

$$f(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi; \rho \sin \phi)$$

$$f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$J = d_{(\rho,\phi)} f = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \rho$$

Замечание

Но! из существования частной произв. (в общем случае) не следует диф-сть!

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

Частн. пр-ые в т. $(0, 0)$

$$f'_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x, 0) - f(0, 0)}{\triangle x} = 0$$

$$f'_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0, \triangle y) - f(0, 0)}{\triangle y} = 0$$

Если бы f - диф. в т. $(0, 0)$, то

$$f(x, y) = f(0, 0) + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||f(x,y) - f(0,0) - (0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}||}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

При $(x,y) = (t,t)$

$$\frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

частн. произв. $\exists$ во всех т., но f разрывна в $(0,0)$
3)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$a = (1,-1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$$

$$\mathrm{Mat}(d_a f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ - прирощение}$$

$$d_n f(h) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$$

Опр

Пусть $m = 1$

$f : U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad f$ - диф. в a

$d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ - лин. ф

$$\mathrm{Mat}(d_a f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} ... \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

∇ - "набла"

Градиент f в т. а (f диф в т. а)

$$\mathrm{grad}_a f = \nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot h_k$$

<u>Теорема</u> (Диф-ние композиции)

$$f : U \to \mathbb{R}^m; \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

$$g : V \to \mathbb{R}^k \qquad\qquad U, V \text{ - откр.}$$

f - диф. в т. $a \in U$

g - диф. в т. $f(a) = b$

Тогда $h = g \circ f$ - диф. в т. $a,$ причем

$$d_a h = d_{f(a)} g \circ d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

<u>Док-во</u>

$$A = d_a f; \quad B = d_b g \qquad f(x) = f(a) + A(x-a) + o||x-a|| \quad x \to a$$

$$r_f(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) = o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$r_g(y) = g(y) - g(b) - B(y-b) = o||y-b|| \quad (y \to b)$$

...

$$r_h(x) = h(x) - h(a) - BA(x-a)? =? o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$g(f(a)) = h(a)$$

Хотим показать, что

$$r_h(x) = o(||x-a||) \quad x \to a$$

$$r_h(x) = \underbrace{g(f(x)) - g(b) - B(f(x)-b)}_{=r_g(f(x))} + B(f(x)-b) - BA(x-a) =$$

$$= r_g(f(x)) + B(\underbrace{f(x) - f(a) - A(x-a)}_{=r_f(x)})$$

$$r_h(x) = r_g(f(x)) + B(r_f(x)) \qquad ||Ax|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$$

$$||r_h(x)|| \leqslant ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)||$$

Пусть $\mathcal{E} > 0$

1. (Из дф-сти g) $\exists \delta > 0$:

   $\forall y : ||y - b|| < \delta \Rightarrow$

   $r_g(y) < \mathcal{E} \cdot ||y - b||$

2. $\exists \alpha$:

   (a) (Из диф-сти f в т. a)

   $||r_f(x)|| < \mathcal{E}||x - a|| \forall x : ||x - a|| < \alpha$

   (b) $\forall x : ||x - a|| < \alpha$

   $||f(x) - f(a)|| < \delta$ (т.к. f непр в т. a) $\qquad f(a) = b$

Возьмем $x : ||x - a|| < \alpha \overset{2б}{\Rightarrow} ||f(x) - b|| < \delta \overset{(1)}{\Rightarrow} ||r_g(f(x))|| < \mathcal{E} \cdot ||f(x) - b||$

$||f(x) - b|| = ||r_j(x) + A(x - a)|| \leqslant ||r_f(x)|| + ||A|| \cdot ||x - a|| \underset{2a}{<}$

$< \mathcal{E} \cdot ||x - a|| + ||A|| \cdot ||x - a||$

$||r_h(x)|| \leqslant ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)|| < \mathcal{E}(\mathcal{E}||x - a|| + ||A|| \cdot ||x - a||) + ||B|| \cdot \mathcal{E}||x - a|| =$

$= (\mathcal{E}^2 + ||A||\mathcal{E} + ||B||\mathcal{E}) \cdot ||x - a||$

5 Частные производные композиции (в усл. теоремы)

Теорема

$$\frac{\partial (g \circ g)_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

$d_a g \circ f = d_{f(a)} g \circ d_a f \qquad$ комп. $\leftrightarrow$ пр-ие матриц

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & & \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial g_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Следствие (2)

$U \subset \mathbb{R}^n$

$f, g : U \to \mathbb{R}$ - диф в т. a

Тогда $d_a(fmulg) = f(a) \cdot d_a g + g(a) d_a f$

Док-во

1. Пусть $f = g \quad d_a f^2$

$$\phi(t) = t^2 \qquad d_t\phi(h) = 2t \cdot h$$

$$d_a f^2 = d_a \phi \circ f = d_{f(a)}\phi \circ d_a f$$
$$= 2f(a) \cdot d_a f$$

2. $d_a(f \cdot g) = d_a(\frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]) =$

$$= \frac{1}{4}[2(f(a)+g(a))d_a(f+g) - 2(f(a)-g(a))d_a(f-g)]$$

$$f(a)d_a g + g(a)d_a f$$

Следствие (3)

$$f, g : U \to \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^m$$

f, g - диф. в т. $a \in U$

$(f; g)$ - ск. пр-ие:

Тогда $d_a(f, g) = (f(a); d_a g) + (d_a f; g(a))$

Опр

Вернемся к градиенту

$f : U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f$ - диф. в т а $\in U$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h)$$
$$\nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

Свойства (геометрич. св-ва градиента)

1. f возрастает в напр. h в т. a, если $(\nabla_a f; h) > 0$
и убывает, если $(\nabla_a f; h) < 0$ рисунок 1

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + (\nabla_a f; th) + o(||th||) \qquad o(||t-h||) = o(t)$$

Пусть $t > 0$

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \frac{t \cdot (\nabla_a f, h)}{t} + \frac{o(t)}{t} > 0$$

начиная с нек. числа $(\forall 0 < t < \delta)$

$$\overset{0<t<\delta}{\Rightarrow} f(a+th) > f(a)$$

2. (Экстремальное св-во градиента)
   Если $\nabla_a f \neq 0$, то направление наибольшего возрастания f совпадает с направлением градиента

$$||e|| = 1$$

$$|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = |d_a f(e)| = |(\overrightarrow{\nabla}_a f; \overrightarrow{e})| \leqslant$$

$$\leqslant ||\nabla_a f|| \cdot \underbrace{||e||}_{=1} = ||\nabla_a f||$$

   Если $e = \frac{\nabla_a f}{||\nabla_a f||}$ то $|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = ||\nabla_a f||$

3. $f : U \to \mathbb{R}$ f - диф в т. $a \in U$ $U \subset \mathbb{R}^n$
   Если a - т. локального экстремума f $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{\nabla_a} f = \overrightarrow{0}$$

4. Пусть $\Gamma_a = \{x \in U : f(x) - f(a)\}$

   Тогда $\nabla_a f \perp \Gamma_a$

   Т.е. $\forall$ Гладкой кривой $\gamma : [-1, 1] \to \Gamma_a$,

   проход. через т. a $(\gamma(0) = a)$

$$\gamma(t)' = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$ - касат. вектор к Γ_a в т. a

   Говорят, что $\overrightarrow{v}$ - ортог. Γ_a в т. a

   Если $\overrightarrow{v} \perp \gamma'(0)$ $\forall$ гладкой кривой $\gamma : \gamma(0) = a$

Пример

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla_{(x,y,z)} f = (2x; 2y; 2z) = 2(x, y, z)$$

Опр

$f : U \to \mathbb{R};$ $a \in U$ - т. лок. макс. (минимума)

Если $\exists V_a : \forall x \in V_a$

$f(x) \leqslant f(a)$ $(f(x) \geqslant f(a))$

Пример (К свойствам)

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$a(1,1,1)$$
$$\Gamma_a=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=3\}$$
$$\nabla_a f=2(a1,a2,a3)=(2,2,2)$$

Док-во

$$\Gamma_a=\{x\in U\quad f(x)=f(a)\}$$

$$\gamma:[-1,1]\to\Gamma_a\quad\gamma(0)=a$$
$$\underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{обычная ф-я 1 перем}}=f(a)\quad\forall t\in[-1,1]$$
$$0=d_0(\gamma(t))=d_{\gamma(0)}f\circ d_0\gamma=d_af\circ\gamma'(0)=$$
$$=\nabla_af\cdot\gamma'(0)\Rightarrow\nabla_af\perp\gamma'(0)$$

5.1 Непрерывно дифференцируемые отображения

Опр

$$f:U\to\mathbb{R}^m\quad U\subset\mathbb{R}^n\quad a\in U$$

f - непр. диф в т. a, если

1. Все частные производные определены в некоторой окрестности т. а
2. Непр. в т. а

Говорят, что f - непр. диф. на U, если она непр. диф. в каждой точке

$$f\in C^1(U)$$

Лемма (т. о среднем)

$$f:U\to\mathbb{R}\quad a\in U\subset\mathbb{R}^n,\quad \text{Все частные пр-е определены в } V_a\subset U$$

$$\sqsupset h:a+h\in V_a$$
Тогда $\exists c^1,c^2,...,c^k$:
$$f(a+h)-f(a)=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k)\cdot h_k$$

Док-во Рисунок 2 (куб и система коорд.)

$$F_k(t) = f(a^{k-1} + t \cdot h_k e_k)$$

a^{k-1} - т. ребра $(a^{k-1}; a^k) \qquad o \leqslant t \leqslant 1$

$$F_k'(t) = f_{x_k}'(\underbrace{a^{k-1} + t \cdot h_k \cdot e_k}_{=a_1+h_1,a_2+h_2,\ldots,a_{k-1}+h_{k-1},a_k+th_k})$$

По т. Лагранжа $\exists \xi^k \in (0,1)$

$$F_k(1) - F_k(0) = F_k'(\xi^k)(1-0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a^{k-1} + \xi^k h_k e_k)$$

$c^k \in V_a$

$$f(\underbrace{a+h}_{=a^n}) - f(\underbrace{a}_{=a^0}) = \sum_{l=1}^{n} f(a^k) - f(a^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(1) - F_k(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$$

Теорема (О непр. диф. отобр. в точке)

$f : U \to \mathbb{R}^n \qquad U \in \mathbb{R}^n \quad a \in U$

f - непр. диф в т. а

Тогда

1. f - непр в V_a
2. f - диф в т. а

НЕОЖИДАННО ТО ЧТО ПИСАЛ ПАША

5.2 Непрерывно дифференцируемые отображения

Опр

$f : U \to \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n, a \in U$, f - непр диф в т. а., если все ч.п. определены в некоторой окр. V_a и непрерывны в т. а

Опр

Говорят, что f - непр дифферецируема на U, если она непр дифф в каждой точке. Ооначают $f \in C^1(U)$

Лемма (теорема о среднем)

$f : U \to \mathbb{R}$, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$, все частные производные опр. в $V_a \subset U$, пусть $h : h + a \in V_a$

Тогда $\exists c^1, c^2, ..., c^k : f(a+h) - f(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k 0 h_k)$

Док-во

$F_k(t) = f(a^{k-1} + th_k e_k)$

т.ребра (a^{k-1}, a^k) $o \leqslant t^2 \leqslant 1$

$$F_k'(t) = f_{x_k}'(\underbrace{a^{k-1} + th_k e_k}_{a_1+h_1, a_2+h_2, ..., a_{k-1}+h_{k-1}, a_k+th_k, a_{k+1}, ..., a_n})$$

По формуле Лагранжа: $\exists \xi^k \in (0,1) : F_k(1) - F_k(0) = F_k'(\xi^k)(1-0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underbrace{a^{k-1} + \xi^k h_k e_k}_{e_k \text{ - промеж. точка}})$, $e_k \in V_a$

$$f(\underbrace{a+h}_{a^n}) - f(\underbrace{a}_{a_0}) = \sum_{k=1}^{n} f(a^k) - f(a^{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} F_k(1) - F_k(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$$

Теорема (о непр диф отображении в точке)

$f : U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$

f - непр диф в точке а

Тогда

1) f - непрерывна в V_a

2) f - дифф в точке а

Док-во

f - непр диф в точке а $\Leftrightarrow$ все ч.п. опр. в V_a и непр в т.а.

Из лок св-ва непр ф-ий $\Rightarrow \exists$ окр $V_a(\delta)$: все ч.п. огр конст $M > 0$

$|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)| < M \ \forall x \in V_a(\delta)$

$|f(x+h) + f(x)| = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) h_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k)||h_k| \leqslant M \sum\limits_{k=1}^{n} |h_k| \leqslant Mn||h||$,

если $||h|| \to 0 \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \to 0$