

# Практика по дифференциальным уравнениям, 3 сем (преподаватель Звягинцева Т. Е.) Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [вконтакте](#)

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Геометрические уравнения</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Однородные уравнения</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Метод вариации произвольной переменной</b>	<b>9</b>
4.1	Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель . . . . .	13
<b>5</b>	<b>ПРОПУЩЕННАЯ ПАРА</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>В ожидании кр...</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Уравнения первого порядка, не разряженные относительно производной</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Уравнения допускающие понижение порядка</b>	<b>21</b>

# 1 Введение

Разрешимо в квадратурах=разрешимо в интегралах

$y(x)$  - неизв. функция

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

(1)  $y' = f(x, y)$  - дифференциальное уравнение 1-го порядка

## Пример

$$y' = y, \text{ решение } y = ce^x$$

## Опр

Задача Коши: найти решение  $y = \phi(x) : \phi(x_0) = y_0$  ((2)  $(x_0, y_0)$ )

Считаем, что  $f(x, y) \in C(G)$

И пока что предполагаем, что  $df(x, y) \in C(G)$  (решение существует),  
 $dy \in C(G)$  (решение единственное)

$(x_0, y_0) \in G$   $y = \phi(x)$  - решение (1)  $\Rightarrow \phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$  ( $y_0 = \phi(x_0)$ )

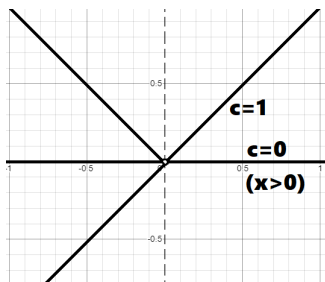
В каждой точке области  $G$  определено направление касательной к кривой, проходящей через эту точку

## Опр

Кривые, в которых направление поля постоянно называются изоклины

## Пример (стоим изоклины)

$$y' = \frac{y}{x}$$



$x \neq 0, \quad \frac{y}{x} = c (= \operatorname{tg} \alpha)$  - уравнение изоклин

$$(y' = f(x, y) \Rightarrow y' = c \Rightarrow f(x, y) = c)$$

$$\Rightarrow y = cx$$

При  $c = 0$  ( $\operatorname{ctg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ )  $\Rightarrow y = 0$

При  $c = 1$  ( $\operatorname{ctg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$ )  $\Rightarrow y = x$

3. Коши для  $(-1, 1)$ :  $y = -x$ ,  $x < 0$

### Пример (больше изоклин)

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{y}{x} = c \text{ - уравнение изоклин}$$

$$\Rightarrow c = 0 \text{ (} \operatorname{tg} \alpha = 0 \text{)} \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow c = 1 \text{ (} \alpha = \frac{\pi}{4} \text{)} \Rightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3} \text{ (} \alpha = \frac{\pi}{3} \text{)} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x$$

### Пример (16, дополнительно)

Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнений:

$$a) \quad y' = y - x^2$$

$$b) \quad y' = f(x, y)$$

### Решение

Условие перегиба графика  $y = f(x)$  - это  $y'' = 0$

$$a) \quad y' = y - x^2$$

$$y'' = y' - 2x = (y - x^2) - 2x = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x$$

b) Возьмем полный дифференциал от обеих частей равенства:

$$dy' = df(x, y) \Rightarrow dy' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y'' = f'_x + f'_y y' = 0 \Rightarrow f'_x + f'_y y' = 0$$

### Пример (замена переменной спасёт)

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

$$\text{Пусть } z = 4x + 2y - 1 \Rightarrow z' = 4 + 2y' \Rightarrow \frac{z' - 4}{2} = \sqrt{z}$$

$$\frac{z'}{2} = \sqrt{z} + 2 \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z} + 2} = 2dx$$

(дорешать)

Пример (не пугаться замен)

$$y' = \cos(y - x)$$

$$y - x = z \Rightarrow z' = y' - 1$$

$$z' = \cos z - 1$$

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$

$$\cos z = 1$$

$$z = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + 2\pi k$$

Пример (асимптота)

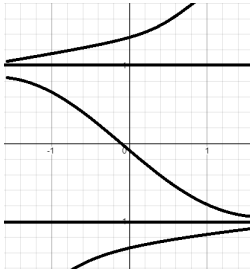
$$y' = y^2 - 1, \quad y \equiv 1, \quad y \equiv -1$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow y^2 > 1$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow y^2 < 1$$

$$y'' = 2yy'$$

$$y'' = 2yy(y^2 - 1)$$

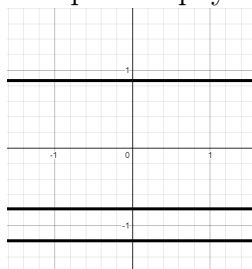
Пример (теоретическая задача)

Доказать, что решение ограничено сверху или снизу

$$Y' = P_n(y), \quad n = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N}$$

У многочлена нечетной степени всегда есть вещественный корень,  $y_j$  - корень,  $j = 1, \dots, k$ ,  $y = y_j$  - реш. Значит остальные решения не пересекают на графике это  $\Rightarrow$  те которые снизу, ограничены сверху, те

которые сверху ограничены снизу



### Пример (24, дополнительно)

Составить диф. уравнение для семейства линий  $y = ax^2 + be^x$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = 2ax + be^x \\ y' = 2a + be^x \end{cases}$$

Нетрудно найти:

$$a = \frac{y' - y''}{2(x - 1)}$$

Подставляя во второе уравнение:

$$b = \frac{y''x - y'}{e^x(x - 1)}$$

После подстановки в исходное:

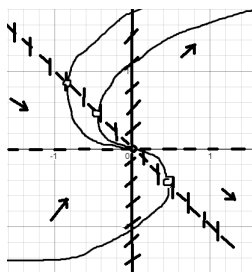
$$y''x(x - 2) - y'(x^2 - 2) + 2(x - 1)y = 0$$

## 2 Геометрические уравнения

### Пример

$$y' = \frac{y}{x + y}$$

$$y \neq x$$



$$y \equiv 0 - \text{реш}$$

$$y + x > 0 \equiv y > -x$$

$$y > 0$$

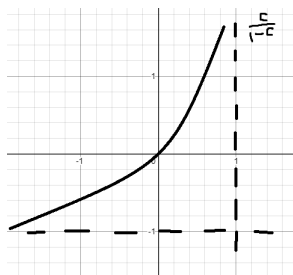
$$\frac{y}{z + y} = c \text{ - ур-ие изоклин}$$

$$c = 1 \quad y = x + y$$

$$y = cx + cy$$

$$y(1 - c) = cx$$

$$y = \frac{c}{1 - c}x, \quad c \neq 1$$

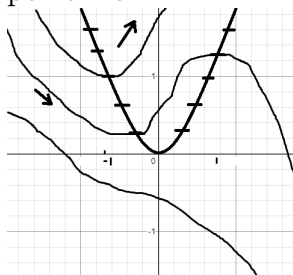


(упр.) Подставить точки

### Пример

$$y' = y - x^2 \Rightarrow y = x^2 + c$$

Сократится тогда, когда уравнение второй степени  $y = x^2 + ax + b$ , подставим:  $2x + a = ax + b \Rightarrow a = 2 \quad b = 2$ , значит  $y = x^2 + 2x + 2$  - решение



$$y'' = y' - 2x = y - x^2 - 2x, \quad y = x^2 + 2x$$

### Пример

Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная  $a^2$ .

◀ Как видим из рис. 1, площадь указанного треугольника равна  $S = \frac{1}{2}|NK|y$ . Поскольку  $\operatorname{tg} \alpha = y'$  (это вытекает из геометрического смысла производной), то  $S = \frac{y^2}{2y'}$ ,  $y' > 0$ . Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y^2}{2} = a^2 y'.$$

Считая  $y \neq 0$  и разделяя переменные, получаем

$$\frac{2dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}.$$

Отсюда находим  $-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C$ , или

$$y = -\frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

Если  $y' < 0$  (см. рис. 2), то  $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$ . Интегрируя это уравнение, получаем

$$y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}.$$

Наконец, обозначив  $Ca^2 = -\tilde{C}$ , оба ответа объединяем в один:

$$y = \frac{2a^2}{\tilde{C} \pm x}.$$

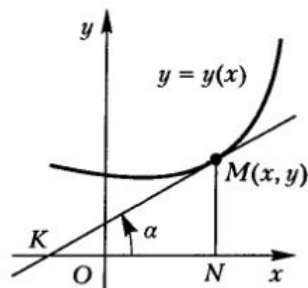


Рис. 1

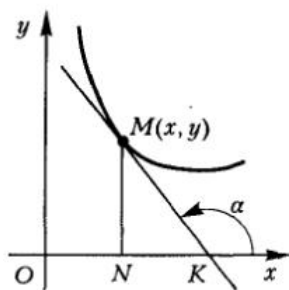


Рис. 2

## 3 Однородные уравнения

### Опр

$M(x, y)$  - однород. ур-ие степени  $k$ , если  $\forall \lambda > 0 \quad M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x, y)$

### Опр

Уравнение  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  - однородное, если  $M, N$  - однородное одинаковой степени  $k$

### Опр

Уравнение  $y' = f(x, y)$  - однородное, если  $f(x, y)$  - однородное степени 0

**Пример (однородное уравнение)**

$$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Замена  $y = tx$

То есть мы подставляем сперва  $y = ay$ ,  $x = ax$  и если  $a$  сокращаются, то уравнение однородное и можно сделать замену  $y = tx$

$$y' = t'x + t$$

$$dy = tdx + xdt$$

$$t'x = \operatorname{tg} t$$

Дз: 73, 76, 80, 84, 107, 109, 110, 101-112 (выбрать любую), 113

**Пример (пересекающиеся прямые)**

$(2x - 4 + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$ , чтобы сделать его однородным сделаем замену из системы (они не 0)

$$\begin{cases} 2x - 4 + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \tilde{x} + 1 \\ y = \tilde{y} + 2 \end{cases}$$

$$(2\tilde{x} - 4\tilde{y})d\tilde{x} + (\tilde{x} + \tilde{y})d\tilde{y} = 0$$

$$\tilde{y} = t\tilde{x} \Rightarrow d\tilde{y} = \tilde{x}dt + t d\tilde{x}$$

И так далее

**Пример (параллельные прямые)**

$$(2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 3)dy = 0$$

$$2x + y + 1 = z \Rightarrow 4x + 2y - 3 = 2z - 5$$

$$2dx + dy = dz \Rightarrow dy = dz - 2dx$$

$$zdx - (2z - 5)(dz - 2dx) = 0$$

Решаем уравнение для  $\frac{dz}{dx}$  и возвращаемся к прежним переменным

**Пример (страшное выражение)**

$$2xdy + (\underbrace{x^2y^4}_{\text{степень } y} + \underbrace{1}_{\text{степень } x})ydx = 0$$

Степени должны быть равны при замене  $y = z^m$ , если это однородное, то есть  $2 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}}, \text{ если } y > 0$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{z}}, \text{ если } y < 0$$

Но при такой замене теряем решение  $y \equiv 0$

При замене  $y_0$  на  $-y_0$  получается то же самое

$$x = \frac{t}{y^2} \Rightarrow dx = \frac{y^2 dt - 2y t dy}{y^4}$$

$$\Rightarrow 2tdy + (t^2 + 1)(ydt - 2tdy) = 0$$



ДЗ: 119, 120, 124, 127, 131, 132, 135 (любой из а-в)

### Теорема

$$y' = p(x)y + q(x) \quad p(x), q(x) \in C(a, b)$$

$$\Rightarrow \exists! \text{ реш. з. Коши } (x_0, y_0) : x_0 \in (a, b) \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

### Замечание

1.  $y' = p(x)y + q(x)$  - лин. неоднородное ( $q(x) \not\equiv 0$ )

2.  $y' = p(x)y$  - лин. однородное

Если  $y_1, y_2$  - реш (2),  $y_{1,2} \not\equiv 0 \Rightarrow \exists c = \text{const} : y_2 = cy_1$

### Док-во

$$y'_1 = p(x)y_1$$

$$y'_2 = p(x)y_2$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y'_2 y_1 - y'_1 y_2}{y_1^2} = \frac{py_2 - py_2}{y_1} = 0$$

Действительно,  $y_1, y_2$  отличаются на константу

Решение однор.  $y = cy_1 \quad \forall$  частн. решение  $y_1 \not\equiv 0$

ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, Я ОТВЛЕКСЯ НА ОБДУМЫВАНИЕ ПРОШЛОГО ДОК-ВА

## 4 Метод вариации произвольной переменной

1) Решаем однородное

2) Варьируем const

Найдем общее решение л.о.у.:

$$\text{I) } \frac{dy}{y} = p(x)dx$$

$$\ln |y| = \int p(x)dx + \ln |c|$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

$$\text{II)} \quad c' e^{\int p(x) dx} + c e^{\int p(x) dx} p(x) = p(x) c e^{\int p(x) dx} + q(x)$$

$$x' = q(x) e^{-\int p(x) dx} \Rightarrow c(x) = \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + \tilde{c}$$

$$y = e^{\int p(x) dx} \left( \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + \tilde{c} \right)$$

$$\text{3. К. } (x_0, y_0) \quad y = e^{\int_{x_0}^x p(\tau) d\tau} \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(\tau) e^{-\int_{x_0}^{\tau} p(s) ds} d\tau \right)$$

### Пример

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y$$

I) Решим сперва такое уравнение:  $(2x + 1)y' = 2y$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x + 1} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x + 1| + \ln |c|$$

$$y = c(2x + 1)$$

II)  $(2x + 1)(2c + (2x + 1)c') = 4x + 2c(2x + 1)$

$$c' \frac{4x}{(2x + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} c &= \int \frac{4x}{(2x + 1)^2} dx = \int \frac{u - 1}{u^2} du = \\ &= \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \ln |u| + \frac{1}{u} + \tilde{c} = \ln |2x + 1| + \frac{1}{2x + 1} + \tilde{c} \end{aligned}$$

Ответ:  $y = \left( \ln |2x + 1| + \frac{1}{2x + 1} + \tilde{c} \right) (2x + 1)$

$$\underbrace{y}_{\text{общее н.}} = \underbrace{(2x + 1) \ln |2x + 1| + 1}_{\text{частное н.}} + \underbrace{\tilde{c}(2x + 1)}_{\text{общее о.}}$$

### Опр (уравнение Бернулли)

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \text{особое реш. } y \equiv 0$$

Варьируем константу! Не делаем как в Филиппове

### Пример

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$y' = -2y \Rightarrow y = ce^{-2x} \text{ - подставим}$$

$$c' = c^2 e^{-x} \text{ - нужно разделить переменные}$$

$$\int \frac{dc}{c^2} = \int e^{-x} dx \Rightarrow \frac{1}{c} = e^{-x} + \tilde{c} \Rightarrow c = \frac{1}{e^{-x} + \tilde{c}}$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{1}{e^{-x} + \tilde{c}} e^{-2x}, \quad y \equiv 0$$

ДЗ: 136-160 (найти интересные), 146/148, 161-164, 178, 173/174

### Пример (162)

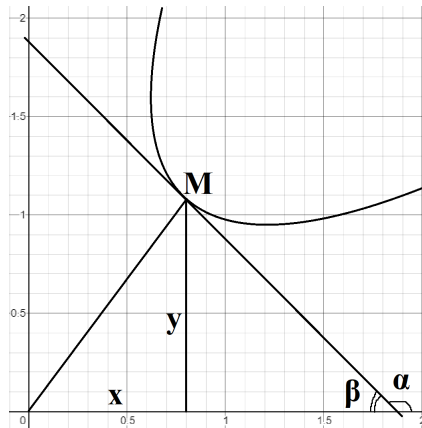
$$(x+1)(yy' - 1) = y^2$$

$$y^2 = z \Rightarrow 2yy' = z'$$

$$(x+1)\left(\frac{z'}{z} - 1\right) = z$$

### Пример (174, геометрическая задача)

Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная  $a^2$



$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha = -y'$$

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{y}{y'}\right)y = a^2$$

$$xy - 2a^2 = y^2 \frac{dx}{dy}$$

**Пример (178, мат. анализ наносит ответный удар)**

Найти то решение дифференциального уравнения

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

которое остается ограниченным при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

**Решение**

$$y = C \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$$

Следует, что

**Опр (Риккати)**

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (1)$$

В общем случае не интегрируется в квадратурах.

$$y = y_1(x) - \text{реш (1)} \Rightarrow \text{замена } y = z + y_1$$

$$z' + y_1' = a(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) + b(z + y_1) + c$$

$$z' + y_1' = a(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) + bz + \cancel{ay_1^2} + \cancel{by_1} + c$$

$$z' = (2ay_1 + b)z + az^2 - \text{уравнение Бернулли}$$

**Пример**

Как подбирать?  $y' + y^2 = x^2 + 2$

Попробуем подобрать степень  $x$  для  $y$ :  $a^2 x^{2n} + \dots = x^2 - 2x$

$$a = 1, \quad n = 1$$

$$y = x + c, \quad -1 + x^2 + 2xc + c^2 = x^2 - 2x \Rightarrow c = 1$$

$$y = x - 1 \Rightarrow -1 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x$$

**Пример (ещё пример)**

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$$

$$y = \frac{a}{x} \Rightarrow -\frac{a}{x^2} + \frac{2a^2}{x^2} = \frac{6}{x^2}$$

$$2a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

**Пример (171)**

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$$

$$y = e^x + z \Rightarrow z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 \stackrel{z \neq 0}{\Rightarrow} z = -\frac{1}{x + C}$$

Но при  $z = 0$  получаем решение  $y = e^x$

Ответ:  $y = e^x - \frac{1}{x+C}, \quad y = e^x$

## 4.1 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

### Опр

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  - уравнение в полных дифф, если  $M, N \in C^1(G)$

$$\exists u(x, y) : du = \underbrace{M}_{\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x} dx + \underbrace{N}_{\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y} dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = u''_{xy} = u''_{yx} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

### Пример (187)

Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его:

$$\underbrace{(2 - 9xy^2)x dx}_M + \underbrace{(4y^2 - 6x^3)y dy}_N = 0$$

$$M'_y = -18x^2y \quad N'_x = -19x^2y$$

$$M = u'_x \Rightarrow u = \int (2x - 9x^2y^2)dx + \varphi(y) = x^2 - 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$u'_y = -6x^3y + \varphi'(y) = N = 4y^3 - 6x^3y$$

$$\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$$

$$u(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + y^4$$

Ответ:  $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$ , т.к.  $du = 0 \Rightarrow u = c$

Для сравнения:

$$\underbrace{2x dx}_{d(x^2)} - \underbrace{9x^2y^2 dx - 6x^3y dy}_{-3(y^2 \underbrace{3x^2 dx}_{d(yx^3)} + x^3 \underbrace{2y dy}_{d(y^2)})} + \underbrace{4y^3 dy}_{d(y^4)} = 0$$

Дифференциал произведения  $d(x^3y^2)$

### Пример (193)

Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его:

$$\underbrace{3x^2 dx}_{d(x^3)}(1 + \ln y) = \underbrace{2y dy}_{-d(y^2)} - x^3 \underbrace{\frac{1}{y} dy}_{d(\ln y)}$$

Опр

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  - уравнение в полных дифф (1)

$\mu = \mu(x, y)$  - инт. мн-ль (1), если  $(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$  - ур. в полных лиф.

**Пример (195, фокус)** Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$$

$$(x^2 + y^2)dx + \underbrace{xdx + ydy}_{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)} = 0$$

$$dx + \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$$

Значит  $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$

$$dx + \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) = 0$$

Ответ:  $x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = c$

**Пример (196, фокус)** Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных:

$$(x^2 + y^2 + x)dx - xdy = 0$$

$$(x^2 + y^2)dx + ydx - xdy = 0 \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dyx - ydx}{x^2}$$

$$\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)dx - \underbrace{\frac{xdy - ydx}{x^2}}_{d\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\mu = \frac{1}{x^2(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2)} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

ДЗ: 167-170 (интересные), 188-194 (интересные), 196, 201, 203

## 5 ПРОПУЩЕННАЯ ПАРА

## 6 В ожидании кр...

### Пример

$$xy^2(xy' + y) = 1 \quad \text{Заметим, что } xy' + y = (xy)'$$

$$xy' + y - \frac{1}{xy^2} = 0 \quad xy = z \Rightarrow \frac{z^2}{x} z' = 1$$

$$x dy + \frac{xy^3 - 1}{xy^2} dx = 0$$

$$x^2 y^2 dy + xy^3 dx - dx = 0$$

$$\mu = ?$$

$$\underbrace{xdy + ydx}_{d(xy)} - \frac{dx}{xy^2} = 0$$

$$c = \frac{xy^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

### Пример (203)

$$y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0$$

$$yxdx + y^2dx + xydy + dy = 0$$

$$yxdx + y(\underbrace{ydx + xdy}_{d(xy)}) + dy = 0 \mid \cdot \frac{1}{y}$$

$$xdx + d(xy) + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + \ln|y| + c = 0$$

### Пример (301)

$$xy' + x^2 + xy - y$$

Док-во (похоже на частного, на однородное не тянет, но замена проходит)

$$\frac{xy' - y}{x^2} + 1 \frac{y}{x} = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

Пример (308)

$$x^2 y' = y(x + y)$$

Док-во (однородное/Бернулли)

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x^2}$$

Пример (309)

$$(1 - x^2)dy + xydx$$

Док-во (уравнение с разделяющимися переменными)Пример (311)

$$(y + y' \ln^2 y = (x + 2 \ln y)y')$$

Док-во (линейное уравнение)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

$$x'_y y = x + 2 \ln y$$

$$ydx - xdy(2 \ln y - \ln^2 y)dy$$

Пример (320)

$$2x^3 y y' + 3x^2 y^2 + 7 = 0$$

Док-во (производная произведения)

$$(x^3 y^2)' + 7 = 0'$$

Пример (330)

$$(1 - x^2)y^2 - 2xy^2 = xy$$

Док-во (переменные разделяются, Бернелли)Пример (333)

$$(\sin x + y)dy + (y \cos x - x^2)dx = 0$$



Док-во (уравнение в полных дифференциалах)

$$\underbrace{\sin x dy + y \cos x dx}_{d(y \sin x)} - y dy - x^2 dx = 0$$

Пример (338)

$$x(x+1)(y'-1) = y$$

Пример (349)

$$xy' = 2\sqrt{y} \cos x - 2y$$

Док-во (Бернулли, вариация переменной)Пример (359)

$$xy'(\ln y - \ln x) = y$$

Док-во (однородное)

$$y' \ln \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

Пример (361)

$$(2x^2y - 3y^2)y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1$$

Пример (368)

$$y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$$

Пример (371)

$$2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})dx + x^3dy$$

Пример (374)

$$(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0$$

Док-во (параллельные прямые)

$$2x + 3y - 1 = z \Rightarrow 2dx + 3dy = dz$$

Пример (414)

$$(x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0$$

Пример (438)

$$(2x + y + 5)y' = 3x + 6$$

Док-во (пересекающиеся прямые)

$$(2x + y + 5)dy - (3x + 6)dx = 0$$

$$\text{Замена } x + 2 = \tilde{x} \quad y + 1 = \tilde{y}$$

## 7 Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

2 способа решения:

$$1. \quad (a) \quad (y')^2 = y^2 \rightarrow \begin{cases} y' = y \\ y' = -y \end{cases} ???$$

$$(b) \quad \sin(y' - 1) = 0 ???$$

2. Метод введения параметра

$$f(x, y, y') = 0$$

$$y = g(x, y') \quad x = h(y, y')$$

$$y' = \frac{gy}{gx} = p$$

$$y = g(x, p) \quad x = h(y, p)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{=dp} &= dg(x, p) & \frac{dx}{p} &= dh(y, p) \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ} \quad \begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases} ???$$

### Пример (267-286)

$$y'(x - \ln y') = 1$$

$$x = \ln y' + \frac{1}{y'}$$

$$y' = p \quad y' > 0$$

$$x = \ln p + \frac{1}{p}$$

$$\frac{dy}{p} = dx = \frac{dp}{p} - \frac{dp}{p^2}$$

$$\int dy = \int (1 - \frac{1}{p}) dp$$

$$\begin{cases} y = p - \ln |p| + C \\ x = \ln p + \frac{1}{p} \end{cases}$$

Пример (280)

$$x^2(y')^2 = xy y' + 1$$

$$y = \frac{x^2(y')^2 - 1}{xy'} = xy' - \frac{1}{xy'}$$

$$y' = p$$

$$y' \left[ x - \frac{1}{xp} \right]$$

$$dy = xdp p dx - \frac{1}{x^2 p^2} (x dp + p dx)$$

$$p dx = x dp + p dx + \frac{1}{x^2 p^2} (x dp + p dx) \quad | x^2 p^2$$

$$0 = x^3 p dp + x dp + p dx$$

$$p dx = -(x^3 p^2 + x) dp - \text{уравнение Бернулли}$$

$$\frac{dx}{dp} = -(x^3 p + \frac{x}{p})$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{x}{p}$$

$$\int \frac{dp}{x} = - \int \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln |x| = \ln \left| \frac{1}{p} \right| + \ln |C|$$

$$x \neq 0 \quad p \neq 0$$

$$x = \frac{C(p)}{p}$$

$$\frac{C'p - C}{p^2} = \frac{-C^3}{p^2} - \frac{C}{p^2} \Rightarrow C'p = -C^3$$

$$\frac{dc}{dp} p = -c^3 \Rightarrow \int \frac{dc}{c^3} = - \int \frac{dp}{p}$$

$$\frac{C^{-2}}{2} = \ln |p| + C^* \Rightarrow \frac{1}{C^2} = 2 \ln |p| + C^{**}$$

$$C = \pm (\sqrt{2 \ln |p| + C^{**}})^{-1}$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{p \sqrt{2 \ln |p| + C^{**}}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2} < \dots >} + \frac{1}{p \sqrt{< \dots >}} \end{cases}$$

### Пример

$$y = y'x + \varphi(y') - \text{ур. Клеро}$$

Всегда касается решения?

$$y = f(y')x + g(y') - \text{ур. Лагранжа}$$

Всегда имеет вид линейного уравнения

### Док-во (Клеро)

$$y = xy' - (y')^2$$

$$y' = p \quad dy = p dx$$

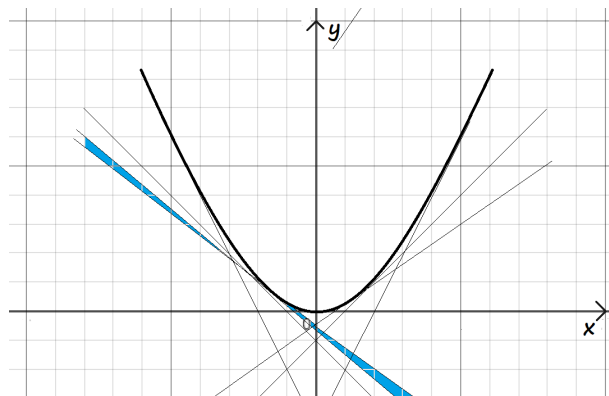
$$y = xp - p^2$$

$$p dx = p dx + x dp - 2p dp \quad (\text{всегда сокращается})$$

$$0 = dp(x - 2p)$$

1.  $dp = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$  - общее решение

2.  $x = 2p \Rightarrow y = 2p^2 - p^2 = p^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2p \\ y = p^2 \end{cases} \quad y = \frac{x^2}{4}$  - особое решение



Прямые образуют параболу

Через каждую точку параболы проходит бесконечно решений

$$(y')^2 - xy^2 + y = 0$$

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2}$$

Дз: 264 - 267, 282, 269, 271, 289, 290, 292 (Лагранж)

**Пример (292)**

$$y = x(y')^2 - 2(y')^3$$

$$y' = p \quad y = xp^2 - 2p^3$$

$$pdx = p^2dx + 2xpdp - 6p^2dp$$

$$(p - p^2)dx = (2xp - 6p^2)dp$$

$$p = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$p = 1 \Rightarrow y = x - 2$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{1-p} - \frac{6p}{1-p} \text{ - линейное уравнение}$$

## 8 Уравнения допускающие понижение порядка

**Опр**

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$1. F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(k)} = z \Rightarrow y^{(k+1)} = z' \quad F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)})$$

$$2. F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$y$  - новая нез. переменная.

$$y'_x = p(y) \text{ - новая независимая функция}$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = p'_x = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (p'_y \cdot p)'_y \cdot y'_x = (p'' \cdot p + (p')^2)p$$

$$3. F(x, \lambda y, \lambda y', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^s F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (\forall \lambda > 0) \text{ Суммарная степень слагаемых с } y \text{ и его производных одинаковая}$$

замена  $y' = yz$

$$\Rightarrow y'' = y'_y \cdot z + y \cdot z' = y(z^2 + z')$$

$$y''' = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

$$4. F(\lambda \cdot x, \lambda^m y, \lambda^{m-1} y', \dots, \lambda^{m-1} y^{(n)}) = \lambda^s F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = ze^{mt} \end{cases} \quad t - \text{нов. нез. перем}$$

$$z = z(t) - \text{новая ф-я}$$

### Задача (438)

$$y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$$

$$y'' = z \Rightarrow z - xz' + (z')^3 = 0$$

$$z = xz' - (z')^3 \text{ доделывать дома}$$

### Задача (436)

$$(y'')^2 = (y')^2 + 1$$

$$y' = p$$

$$y'' = p'p$$

$$(p'p)^2 = p^2 + 1$$

$$(p')^2 p^2 = p^2 + 1$$

$$p' = \frac{\pm \sqrt{p^2 + 1}}{p}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\pm \sqrt{p^2 + 1}}{p}$$

$$\frac{pdp}{\sqrt{p^2 + 1}} = \pm dy$$

$$\sqrt{p^2 + 1} = \pm y + C_1$$

$$p^2 + 1 = (C_1 \pm y)^2$$

$$y' = \pm \sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}} = \ln |t + \sqrt{t^2 \pm 1}| + C$$

$$\ln |y \pm C_1 + \sqrt{(y \pm C_1)^2 - 1}| = \pm x + C_2$$

Задача (226)

$$yy'' + 1 = (y')^2$$

$$y' = p \Rightarrow y'' = p \cdot p'$$

$$ypp' = p^2 - 1$$

$$\frac{pdp}{p^2 - 1} = \frac{dy}{y} \quad p = \pm 1$$

$$y' = \pm 1$$

$$y = \pm x + C$$

$$\frac{1}{2} \ln |p^2 - 1| = \ln |y| + \ln |C_1|$$

$$p^2 - 1 = C_1 y^2$$

$$(y')^2 = C_1 y^2 + 1$$

$$y' = \pm \sqrt{C_1 y^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 1}} = \pm dx$$

$$C_1 > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int \frac{\sqrt{C_1} dy}{\sqrt{(\sqrt{C_1} y)^2 + 1}}$$

$$C_1 < 0 \quad \frac{1}{\sqrt{-C_1}} \int \frac{\sqrt{-C_1} dy}{\sqrt{-(\sqrt{-C_1} y)^2 + 1}}$$

$$C_1 = 0 \quad y = \pm x + C$$

Задача (?)

$$xyy'' - x(y')^2 = yy'$$

$$x(yy'' - (y')^2) = yy'$$

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y'' \cdot y - y' \cdot y'}{y^2}$$

$$x \frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \frac{y'}{y}$$

$$\frac{y'}{y} = z \Rightarrow xz' = z$$

Задача (366)

$$xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$$

$$x(y \cdot y'' + (y')^2) = 2yy'$$

$$x(y \cdot y')' = 2yy' \quad yy' = z$$

$$xz' = 2z$$

Задача (466) Способ: догадайся

$$y' \cdot y''' = 2(y'')^2$$

$$\frac{y'''}{y''} = 2 \frac{y''}{y'} \quad y'' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$$

$$(\ln |y|)' = \frac{y'}{y}$$

$$(\ln |y''|)' = 2(\ln |y'|)'$$

$$\ln |y''| = 2 \ln |y'| + \ln |C_1|$$

$$y'' = C_1 (y')^2$$

$$\frac{y''}{y'} = C_1 y'$$

$$(\ln |y'|)' = C_1 y'$$

$$\ln |y'| = C_1 y + \ln |C_2|$$

$$y' = C_2 \cdot e^{C_1 y}$$

Задача (?)

$$x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$$

$$x^3 y'' = y^2 - 2xyy' + x^2 (y')^2 - xy + x^2 y'$$

$$3 + m - 2 = 2m = 1 + m + m - 1 = 2 + 2(m - 1) = 1 + m = 2 + m - 1$$

$$m + 1 = 2m = \dots = m + 1 = \dots$$

$$\Rightarrow m = 1$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z' e^{mt} + z m e^{mt}}{e^t} = (z' + m z) e^{(m-1)t}$$

$$y''_{xx} = (\dots) e^{(m-2)t}$$

доделать дома

ДЗ: 421-450, 449, 442, 467, 469

462 "догадайся"