Лекции по геометрии, 3 сем

(преподаватель Солынин А. А.)

Записали Костин П.А., Щукин И.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей (в $\mathbb{R}^3$)

1.1 Дифференциальная геометрия кривых

1.1.1 Понятие кривой

Определение

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
2. Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ (особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)
3. Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x, y) = 0$

Пример

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Теорема (о неявной функции)

$F(x, y) = 0$, F - дифференцируема ($\exists \frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ - в окр. (x_0, y_0)). $F(x_0, y_0) = 0$

Если $\frac{dF}{dy}(x_0, y_0) \neq 0 \to \exists \mathcal{E} > 0\ \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + E) \subset \mathbb{R}\ F(x, f(x)) = 0$

Напоминание

$$\frac{dF}{dx}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x,y_0)-F(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$y = f(x) \to \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$

$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 :$ если $\rho(t, t_0) < \delta$, то $\rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$ ($\rho(t, t_0) = |t - t_0|$, $f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}$)

Св-ва пределов:

1. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)\pm g(t)) = \lim f(t) + \lim g(t)$

2. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t);g(t)) = (\lim f(t);\lim g(t))$ - скалярное умножение

3. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)xg(t)) = \lim f(t)x\lim g(t)$

Док-во

$\lim f(t) = (\lim x(t), \lim y(t), \lim z(t)),\ f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. *Пусть* $\mathcal{E} > 0$, *выберем* $\delta : |x(t) - x_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$, *аналогично* $|y(t) - y_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$ *и* $|z(t) - z_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$

Значит $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$

Определение

$f'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0)}{t - t_0}$

Свойство

1. $(f(t)\pm g(t))' = f'(t)\pm y'(t)$

2. $(cf(t))' = cf'(t)$

3. $(f(t);g(t))' = (f'(t);g(t)) + (f(t), g'(t))$

4. $(f(t)xg(t))' = f'(t)xg(t) + f(t)xg'(t)$

5. $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

Доказывается через $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Докажем векторное произведение $(f(t)xg(t))'|_{t=t_0} = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)xg(t) - f(t_0)xg(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)xg(t) - f(t_0)xg(t) + f(t_0)xg(t) - f(t_0)xg(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{(f(t) - f(t_0))xg(t)}{t - t_0} + \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t_0)x(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = f'(t_0)xg(t_0) + f(t_0)xg'(t_0)$

Пример

Контрпример (т. Лагаранжа) - не всегда верна

Можно ли $\int\limits_a^b \overrightarrow{f}(t)dt = (\int\limits_a^b x(t)dt, \int\limits_a^b y(t)dt, \int\limits_a^b z(t)dt)$

$\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{f}(t)$

$\overrightarrow{F}(b) - \overrightarrow{F}(a) = \int\limits_a^b \overrightarrow{f}(t)dt$

$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$

$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$

$\int\limits_a^b f(t)dt = (\int\limits_a^b x(t)dt, ...) = (X(b) - X(a) + ...$ (по ф-ле Н-Л)

Определение

Гладкая кривая - образ вектороднозначнойя функция

Определение

Кривая называется регулярной, если существует производная и $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$

Определение

Кривая называется бирегулярной, если существует вторая производная и $f''(t) \not\parallel f'(t)$

Определение

Параметризации $\overrightarrow{f}(t)\overrightarrow{g}(t)$ *(*$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $g : [c, d] \to \mathbb{R}^3$*) эквивалентны, если* $\exists$ *биекция* $\tau : [a, b] \to [c, d] : \tau(a) = c,\ \tau(b) = d,\ f(t) = g(\tau(t))$

Определение

Гладкая кривая - класс эквивалентности параметризации

Докажем, что экв. параметризации - отношение эквивалентность:

1. (рефл.) $\tau = id$
2. (симм.) $f(t) = g(\tau(t))$, $g(t) = f(\tau(t))$
3. (тран.) $f(t) = g(b(t))$, $g(t) = h(\tau(t))$, $f(t) = h(\tau(b(t)))$

Лемма

$\overrightarrow{f}(t)$ *- вектор-функция (регулярная),* $|\overrightarrow{f}(t)| = 1 \to f'(t) \perp f(t)$

Док-во

$(f(t); f(t)) = 1 \to 0 = (f(t); f(t))' = 2(f'(t); f(t)).$ $f(t) \neq 0$ *и*
$f'(t) \neq 0 \to f'(t) \perp f(t)$