Санкт-Петербургский государственный университет

Лекции по геометрии

3 семестр, преподаватель Солынин А. А.

Записали Костин П.А. и Щукин И.В.[1]

[1] Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах вконтакте (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

Дифф. геометрия кривых (в $\mathbb{R}^3$) и поверхностей (в $\mathbb{R}^3$) 2019-09-09

1 Дифференциальная геометрия кривых

Опр

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
2. Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

   (особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)
3. Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x, y) = 0$

Пример

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ явное задание

рис 3

Теорема (о неявной функции)

$F(x, y) = 0$

F - дифф ($\exists \dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ - непр в окр (x_0, y_0)), $\quad F(x_0, y_0) = 0$

Если $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow\ \exists \mathcal{E} > 0\ \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$

$F(x, f(x)) = 0$

Напоминание

$$\frac{dF}{dx}\Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$y = f(x) \to \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда

$\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ \exists \delta > 0 : \text{ если } \rho(t, t_0) < \delta, \text{ то } \rho(f(t), (x_0, y_0, z_0)) < \mathcal{E}$$

$$(\rho(t, t_0) = |t - t_0|, \quad \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2})$$

Теорема (свойства пределов)

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) \pm g(t)) = \lim_{t \to t_0} f(t) \pm \lim_{t \to t_0} g(t)$$

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) \underset{\text{скал}}{\cdot} g(t)) = (\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t)) \text{ - скалярное умножение}$$

$$\lim_{t \to t_0} (f(x) \times g(t)) = \lim_{t \to t_0} f(x) \times \lim_{t \to t_0} g(t)$$

Док-во

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = (\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(t)))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Пусть $\mathcal{E} > 0$, выберем $\delta : |x(t) - x_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3}$

если $|t - t_0| < \delta$

$$\Rightarrow \begin{matrix} |y(t) - y_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \\ |z(t) - z_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$$

Опр

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Теорема (свойства)

1. $(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm y'(t)$

2. $(cf(t))' = cf'(t)$
3. $(f(t);g(t))' = (f'(t);g(t)) + (f(t);g'(t))$
4. $(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$
5. $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

Доказывается через $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Докажем ВП: $(f(t) \times g(t))'|_{t=t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0)} =$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x) \times g(x) - f(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(f(t) - f(t_0)) \times g(t)}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0 \times (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} =$$

$$= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)$$

Пример

Контрпример
Т. Лагранжа - неверна рис 4

$$\int_b^a \overrightarrow{f}(t)dt = (\int_a^b x(t)d(t), \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt)$$

$$\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{f}(t)$$

$$\overrightarrow{F}(b) - \overrightarrow{F}(a) = \int_a^b \overrightarrow{f}(t)dt$$

$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b x(t)dt, ...) = (X(b) - X(a), ...$$

Опр

Гладкая кривая - диффер. векторнозначная функция, ее образ тоже

Опр

Кривая называется регулярной, если существует производная и
$f'(t) \neq \overrightarrow{0}$

Опр

Кривая называется бирегулярной, если существует вторая производная и $f''(t) \nparallel f'(t)$

Опр

Параметризации $\overrightarrow{f}(t)$ и $\overrightarrow{g}(t)$ эквивалентны

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$g : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

Если $\exists$ биекция $\tau : [a, b] \to [c, d]$

$$\tau(a) = c; \quad \tau(b) = d :$$

$$f(t) = g(\tau(t)) \qquad (\tau \text{ возрастает и гладкая})$$

Лемма

Эквив параметризаций - эквививалентность

Док-во

Докажем, что экв. параметризаций - отношение эквивалентности:

1. (рефл.) $\tau = id$
2. (симм.) $f(t) = g(\tau(t)), \quad g(t) = f(\tau(t))$
3. (тран.) $f(t) = g(\sigma(t)), \quad g(t) = h(\tau(t)), \quad f(t) = h(\tau(\sigma(t)))$

Лемма

$\overrightarrow{f}(t)$ - вектор-функция/ регуляр.

$$|\overrightarrow{f}(t)| = 1 \Rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

Док-во

$$(f(t); f(t)) = 1$$

$$0 = (f(t), f(t))' = 2(f'(t), f(t))$$

$$f(t) \neq 0$$

$$f'(t) \neq 0 \Rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

2019-09-16

Теорема (Ф-ма Тейлора)

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{t_0} + \overrightarrow{f'}(t_0)(t - t_0) + \frac{\overrightarrow{f''}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + ...$$
$$+\frac{\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n$$
$$\overrightarrow{g}(t) = o(t - t_0)^n, \text{ если}$$
$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{g}(t)}{(t - t_0)^n} = \overrightarrow{0}$$

Опр (Длина кривой) рисунок 1 Пусть есть кривая $\overrightarrow{f}(t)$, $t \in [a, b]$

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

а) $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$

б) $\lim\limits_{\max\limits_{i=1..n} |t_i - t_{i-1}| \to 0} ...$

-длина кривой

Утв

Оба определения эквивалентны

Теорема

$$S \text{ - длина кривой } \Rightarrow S = \int_a^b |\overrightarrow{f'}(t)| dt$$

Опр

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

Замечание

Если $|\overrightarrow{f'}(t)|$ - интегр. $\Rightarrow$ кривая спрямляемая

Пример

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad (0, 1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во $\triangle_i t = t_i - t_{i-1}$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\triangle_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$

$$|\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant |\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle_i t| + \\ + |\sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle t_i| - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II} \leqslant \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \triangle t_i - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \triangle_i t$$

$f'(t)$ - непр на $[a, b] \Rightarrow$ равномерно непр. на $[a, b]$(т. Кантора)

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$, если $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$, если $|\sigma_i - \tau_i| < \delta$

$$\mathrm{II} \leqslant \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \triangle_i t = \mathcal{E}(b-a) \underset{\mathcal{E} \to 0}{\to} 0$$

$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leqslant ||f'(\tau_i)| - ||f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$

$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \triangle_i t$

Опр

Параметризация $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Теорема

Натуральная параметризация $\exists$ и ед.

Лемма

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\tau : [c, d] \to [a, b]$ - монотонная биекция ($\tau' > 0$), тогда $f \circ \tau : [c, d] \to \mathbb{R}^3$
Длина кривой (f) не зависит от перепараметризации ($f \circ \tau$)

Док-во

$$\int_a^b |f'(t)|dt \overset{?}{=} \int_c^d |(f \circ \tau)(s)|ds$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)|ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)|ds = \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)|dt$$

$t = \tau(s)$

Док-во (Т)

Существование

Хотим подобрать $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)|ds$$

$\sigma : [a, b] \to [0, S]$

S - длина кривой

σ - возрастающая и дифф. ($\sigma'(t) = |f'(t)|$)

σ - биекция $\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$

$$\int_0^t |(f \circ t)'(s)|ds = \int_0^t |f'(\tau(s))| \cdot t'(s)ds =$$

$$= \int_0^t |f'(\tau(s)| \frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|} ds = t$$

Единственность

$f(t)$ и $g(t)$ - нат. параметризации

$f, g : [0, s] \to \mathbb{R}^3$

$f - g$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)|dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)|dt \leqslant \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)||dt = 0$$

Примеры

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)} dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = & r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y' = & r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$$\left|\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 cos'2\varphi + r^2 sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}d\varphi$$

1.7 Репер Френе

Опр

$$\overrightarrow{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\overrightarrow{v} = f'(t)$ - если парам. натуральн.

v - касательный вектор

Опр Прямая, содерж в $\overrightarrow{v}$ наз. касательной к $\overrightarrow{f}(t)$ в точке t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \overrightarrow{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \overrightarrow{g}(t)$$

$\overrightarrow{g}(t)$ - ур-е касат. прямой

Нормальная плоскость

$f'(t_0) \cdot (\overrightarrow{h} - \overrightarrow{f}(t_0)) = 0$

Теорема

δ - расстояние от $f(t)$ до касат. прямой

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

2019-09-23

Напоминание

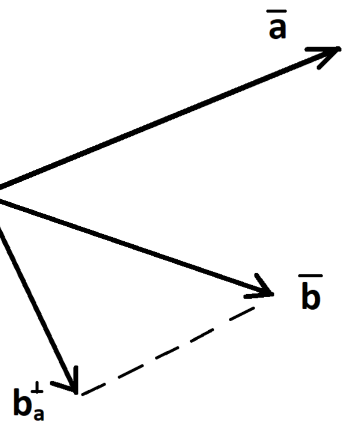
$$\left|\sum |f(t_i) - f(t_{i-1)}|\right| - \sum ||f(t_i) - f(t_{i-1})| - |f'(\tau_i)\Delta t_i|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)|\, dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(\tau_i)|\, dt \right| =$$

$$\sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'(t_i)|\, dt < \sum \mathcal{E}\Delta_i t = \mathcal{E}(b-a)$$

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$ если $f_i - f_{i-1} < \delta$

$\Rightarrow |f'(t) - f'(\tau_i)| < \mathcal{E}$

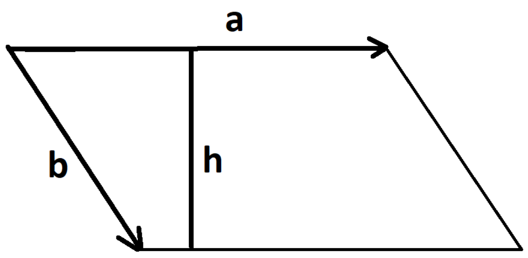


Лемма

$$\overrightarrow{b} = \text{Пр}_a b + b\frac{1}{a}$$

$$\overrightarrow{\text{Пр}_a b} = \frac{(a,b)}{|a|^2}\overrightarrow{a}$$

$$\left|b\frac{1}{a}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|}{|a|}$$



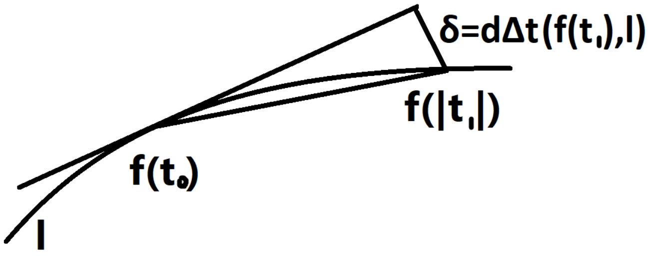
Док-во

$$h = \frac{S}{|a|}$$

$$\frac{(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a}}{|a|^2} = b\frac{1}{a}$$

$(a, b, a \times b)$ - прав. тройка

$(a \times b, a, b)$ - прав. тройка



Теорема

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\delta}{|f(t_1) - f(t_0)|} = 0$$

$\overrightarrow{f'}(t_0) \Rightarrow$ по лемме

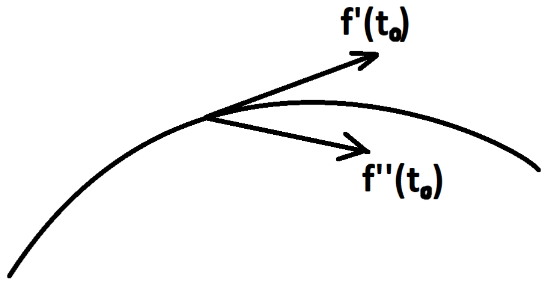
$$\delta = \frac{|f'(t_0) \times (f(t_1) - f(t_0))|}{|f'(t_0)|}$$

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\delta}{\underbrace{f(t_1) - f(t_0)}_{\overrightarrow{a}(t_0)}} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{|f'(t_0) \times \overrightarrow{a}(t_1)|}{|f'(t_0)| \cdot |a(t_1)|}$$

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\left| f'(t_0) \times \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} \right|}{\left| f'(t_0) \cdot \left| \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} \right| \right|} = \frac{f'(t_0) \times f'(t_0)}{\left| f'(t_0) \right|^2} = 0$$

$\Leftarrow$ очев

1.8 Вектор кривизны



Опр

$$g(\varphi(t)) = g(s) = f(t) \qquad s = \varphi(t)$$

$$\overrightarrow{f'}(t) = (g(\varphi_i t_i))' = \overrightarrow{g'} \cdot \varphi'(t)$$

$$\overrightarrow{v}(t_0) = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} \qquad \overrightarrow{n} : |n| = 1; \quad \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$$

$n \in < f', f'' >$ $\quad \overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{f}''$ в одной полуплоскости $f'(t)$

$\overrightarrow{v}'(t) \perp \overrightarrow{v}(t)$

$\overrightarrow{v}'(t) = k \cdot \overrightarrow{n}$

$|n| = 1 \quad k(t)$ - <u>кривизна кривой</u> $\quad k(t) \geqslant 0$ в точке t

$\overrightarrow{n}$ - вектор главной нормали

$\overrightarrow{v}$ - касат. вект

Утв

$f(t)$ - натуральная парам.

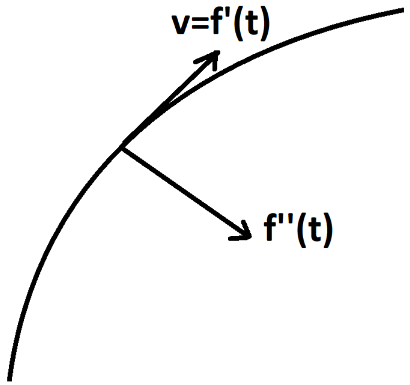
$|f'(t)| = 1 \Rightarrow v = f'(t)$

$f''(t) = k\overrightarrow{n}$

$$\overrightarrow{n} = \frac{f''(t)}{|f''(t)|}$$

$$k = |f''(t)|$$

рисунок 5 (центростр. ускорение)



$f(t)$ - любая параметризация, $g(s)$ - натур. парам.

$f(t) = g(\varphi(t)) \qquad s = \varphi(t)$ - нат. парам

$$s = \underbrace{\int_a^t (f'(\tau))d\tau}_{=\varphi(t)}$$

$$f'(t) = g'(s) \cdot \varphi'(t)$$

$$f''(t) = (g'(\varphi(t)))' \cdot \varphi'(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) =$$

$$= \underbrace{g''(s) \cdot \varphi'^2(t)}_{\perp \overrightarrow{v}} + \underbrace{g'(s)\varphi''(t)}_{\| g'(s) = v}$$

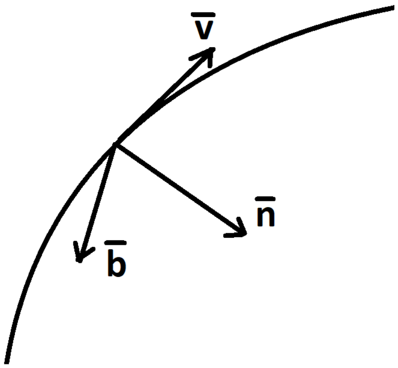
Теорема

Плоск. на вект $f'(t)$ и $f''(t)$ не зависит от параметризации

Опр

Эта плоскость (на вект. $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{n}$) наз. соприкасающейся плоск.

1.9 Формула Френе



Опр

$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{n}$ - вектор бинормали

$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$ - базис Френе

Трехвекторник Френе или ренер Френе

$\overrightarrow{v}' = k \cdot \overrightarrow{n}$

$b' \perp b$

$b' = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{n})' = \underbrace{\overrightarrow{v}' \times \overrightarrow{n}}_{=0} + \overrightarrow{v} \times n' \perp \overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{v}' = k\overrightarrow{n}$

$\Rightarrow b' \parallel \overrightarrow{n} \Rightarrow b' = -\text{æ} \cdot \overrightarrow{n}$ - капа

æ называется кручением кривой

Теорема

$\text{æ} = 0 \Leftrightarrow$ Кривая плоская

Кривая плоская $\Leftrightarrow$ она лежит в плоск $< v, n > \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ нормаль к $< v, n >$ постоянна $\Leftrightarrow b = const \Leftrightarrow b' = 0 \Leftrightarrow \text{æ} = 0$

$$n' = (\overrightarrow{b} \times v)' = b' \times v + b \times v' = -æ\, n \times v + k \cdot b \times n =$$

$$æ \cdot \overrightarrow{b} - k\overrightarrow{v}$$

$$v' = kn$$

$$n' = -kv + æb$$

$$b' = -æn$$

	v	n	b
v'	0	k	0
n'	-k	0	æ
b'	0	-æ	0

1.10 Вычисление кривизны кручения

Теорема

$$k = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|t'(t)|^3}$$

Док-во

$$g(s) \text{ - нат. парам } f(t) = g(\varphi(t)) \quad s = \varphi(t) \quad \varphi(t) = \int_a^t |f'(\tau)|\, d\tau$$

$$g'(s) = \overrightarrow{v} \quad g''(s) = k\overrightarrow{n} \qquad \varphi'(t) = |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(s) \cdot \varphi^2(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) = k \cdot \overrightarrow{n} \cdot |f'(t)|^2 + v \cdot \varphi''(t)$$

$$f''(t) \times f'(t) = k\, |f'(t)|^2 \cdot \overrightarrow{n} \times f'(t) + 0 = \qquad v'(t) = |f'(t)|\, \overrightarrow{v}$$

$$k \cdot \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v}\, |f'(t)|^3$$

$$|f''(t) \times f'(t)| = k\, |f'(t)|^3$$

$$k = \frac{|f''(t) \times f'(t)|}{|f'(t)|^3}$$

2019-09-30 Вычисление кручения

Напоминание

$$(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c} + \alpha \overrightarrow{a})$$

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

Теорема

$g(s)$ - нат. парам., тогда:

$$æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

Док-во

$$g'(s) = \overrightarrow{v} \qquad |\overrightarrow{v}| = 1$$

$$g''(s) = v' = k\overrightarrow{n}$$

$$g'''(s) = kn' = k(-k\overrightarrow{v} + æ\overrightarrow{b}) = -k^2\overrightarrow{v} + æk\overrightarrow{b}$$

$$(g', g'', g''') = (\overrightarrow{v}; k\overrightarrow{n}; -k^2\overrightarrow{v} + æk\overrightarrow{b}) = (v; kn; ækb) = æk^2$$

$$\Rightarrow æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

Теорема

$f(t)$ - парам $(\forall)$, тогда:

$$æ = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

Док-во

$f(t)$ - парам $(\forall)$

$$S = \psi(t) = \int_a^t |f'(\tau)|\, d\tau \qquad g(s) \text{ - нат. парам}$$

$$\psi'(t) = |f'(t)|$$

$$g(S) = g(\psi(t)) = f(t)$$

$$f'(t) = g'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = g'(s) \cdot |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(\psi(t))(\psi(t))^2 + g'(\psi(t))\psi''(t) = g''(s)\cdot\left|f'(t)\right|^2 + g'(s)\cdot\psi''(t)$$

$$f'''(t) = g'''(\psi(t))(\psi'(t))^3 + g''(\psi(t))\cdot 3\psi'(t)\psi''(t) + g'(\psi(t))\cdot\psi'''(t)$$

$$(f', f'', f''') = (\overrightarrow{f'}(s)\cdot|f'(t)|\,;\ \overrightarrow{g}''(s)\left|f'(t)\right|^2, g'''(s)\cdot\left|f'(t)\right|^3) =$$

$$= (g', g'', g''')\cdot\left|f'(t)\right|^6$$

$$æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2} = \frac{(f', f'', f''')}{\left|f'(t)\right|^6}\cdot\frac{\left|f'(t)\right|^6}{\left|f'\times f''\right|^2} = \frac{(f', f'', f''')}{\left|f'\times f''\right|^2}$$

Пример

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$y = f(x) \qquad \overrightarrow{f} = (x; f(x); 0) \qquad \overrightarrow{f}'(1; f'(x); 0) \qquad f''(0; f''(x); 0)$$

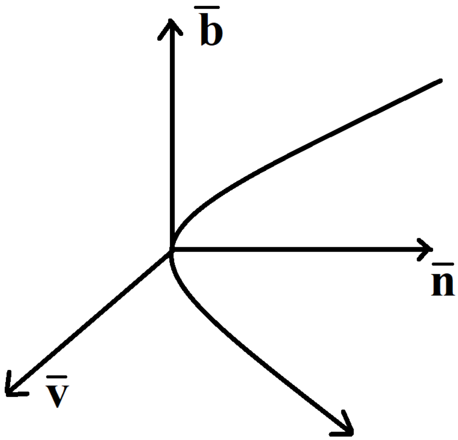
$$f''' = (0; f'''(x); 0)$$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'\times f'' = (0; 0; f''(x))$$

$$æ = 0$$

1.11 Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми



Опр

Соприкас плоскость : $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$
Нормальная плоскость кривой : $< n, b >$
Спрямляющая плоскость : $< v, b >$

Теорема

$\overrightarrow{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t))$ ур-е нормали плоск.

$\overrightarrow{v} \parallel f'(t) = (f_1', f_2', f_3') \quad f_1'(t_0)\cdot(x - f_1(t_0)) + f_2'(t_0)\cdot(y - f_2(t_0)) + f_3'(t_0)\cdot(z - f_3(t_0)) = 0$

$f' \times f'' \parallel b$

так как л.н.

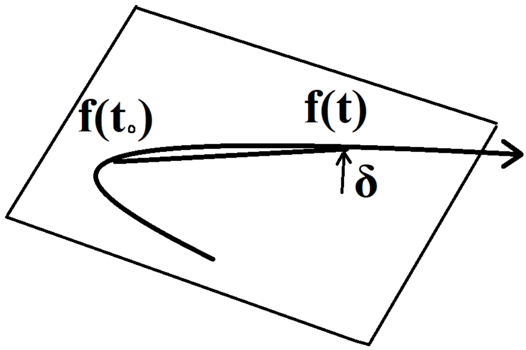
$$(f_1', f_2', f_3') \times (f_1'', f_2'', f_3'') = (f_2'f_3'' - f_3'f_2''; f_3'f_1'' - f_1'f_3''; f_1'f_2'' - f_2'f_1'')$$

Соприкас плоск.

$$\begin{vmatrix} f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & f_3'(t_0) \\ f_1''(t_0 & f_2''(t_0) & f_3''(t_0) \\ x - f_1(t_0) & y - f_2(t_0) & z - f_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$(f'(t_0) \times f''(t_0)) \times f'(t_0) \parallel \overrightarrow{n}$$

Ур-е спрям. плоск - УПР



Теорема

δ - расст. от $f(t)$ до соприкас. плоскости

Если плоскость явл. соприкас., то

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|^2} = 0$$

Плоскость с таким соотношением ед.

Док-во Условия достигаются за счет подходящей системы координат

$a)\quad f(t_0) = (0,0,0)$

$b)\quad OX \parallel \overrightarrow{v}(t_0)$

$c)\quad OY \parallel \overrightarrow{n}(t_0)$

$d)\quad t_0 = 0$

$e)\quad t$ - нат. параметр

б, в $\Rightarrow OZ \parallel \overrightarrow{b}(t_0)$

$$f(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \Rightarrow \delta = |f_3(t)s|$$

Соприкас $z = 0$

$$\overrightarrow{v} \parallel f' = (f_1', f_2', f_3') \parallel OX \Rightarrow f_2'(0) = 0, \quad f_3'(0) = 0 \quad f_1'(0) \neq 0$$

$$\overrightarrow{n} \parallel f'' = (f_1'', f_2'', f_3'') \parallel OY \Rightarrow f_1''(0) = 0; \quad f_3''(0) = 0$$

Следует из пунтка е)

$$\text{Хотим } \lim_{t \to 0} \frac{|f_3(t)|}{|f(t)|^2} = 0$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f_3(t)}{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2} \overset{\text{Лопиталь}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{f_3'(t)}{2f_1(t)f_1'(t) + 2f_2(t)f_2'(t) + 2f_3(t)f_3'(t)} \overset{\text{Лопитал}}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{f_3''(t)}{f_1'^2(t) + f_1(t)f_1''(t) + f_2(t)f_2''(t) + f_3'^2(t) + f_3(t)f_3''(t)}$$

Все кроме первого слагаемого в знаменателе стремятся к 0, числитель тоже стремится к 0. Замечание. Можно было разложить f_1, f_2, f_3 по Тейлору. Можно зачеркнуть пункт д(е)) и $f_1''(0) = 0$

1.12 Дополнение 2: натур. ур-я кривой

Теорема

$g_1(s)$ и $g_2(s)$ - нат. парам. двух кривых

$\begin{matrix} k_1(s) & k_2(s) \\ æ_1(s) & æ_2(s) \end{matrix}$ - кривизны и кручения

Если $\begin{matrix} k_1(s) = k_2(s) \\ æ_1(s) = æ_2(s) \end{matrix} \Rightarrow$ кривые наклад. при движении пр-ва

Док-во

$v_1(s), n_1(s), b_1(s)$ - базис Френе I кривой

$v_2(s), n_2(s), b_2(s)$ - базис Френе II кривой

Считаем
$$\begin{aligned} v_1(s_0) &= v_2(s_0) \\ n_1(s_0) &= n_2(s_0) \\ b_1(s_0) &= b_2(s_0) \end{aligned}$$

В данной точке базисы кривой одинаковы, а дальше возможно не совпадают. Почему не может?

$$h(s) = \overrightarrow{v}_1(s)\overrightarrow{v}_2(s) + \overrightarrow{n}_1(s)\overrightarrow{n}_2(s) + \overrightarrow{b}_1(s)\overrightarrow{b}_2(s) \quad h(s_0) = 3$$

$$h'(s) = v_1'v_2 + v_1v_2' + n_1'n_2 + n_1n_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' =$$

По формуле Френе

$$= \underline{\underline{k_1n_1v_2}} + \underline{k_2v_1n_2} + (\underline{-k_1v_1} + \text{æ}_1b_1)n_2 + n_1(\underline{\underline{-k_2v_2}} + \text{æ}_2b_2) - \text{æ}_1n_1b_2 - \text{æ}_2b_1n_2 = 0$$

$$\Rightarrow h(s_0) \equiv 3$$

$$\Rightarrow v_1 \equiv v_2 \quad n_1 \equiv n_2 \quad b_1 \equiv b_2$$

2019-09-30

2 Дифференциальная геометрия поверхностей

2.1 Понятие поверхности

Пример (способы задания поверхностей)

1. $z = f(x, y)$ - явное задание
2. $F(x, y, z) = 0$ - неявное задание

Теорема (о неявной функции)

$$F(x,y,z) = 0, \quad F \text{ - непр. дифф.}, \quad F(x_0,y_0,z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists f(x,y) : F(x,y,f(x,y)) = 0 \text{ в некоторой окр.}$$

Опр

$$D \subset \mathbb{R}^2, \quad \forall (u,v) \in D, \quad \overline{r} -$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$$\overline{r} = \overline{r}(u,v) \quad \overline{r} : D \to \mathbb{R}^3$$

Пример

$$z = f(x,y)$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

Координат. линии поверхности:

$$u = u_0 \quad \overline{r}(u,v) \text{ - кривая}$$

$$\overline{r}(u,v) \text{ - другое семейство}$$

Замечание

Линии перпендикулярны

Опр

Перепараметризация биекция

Опр

Параметризация называется регулярной, если

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \text{ не перпендикулярны ни в одной точке}$$

$$(\Leftrightarrow \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \neq 0)$$

Опр

Кривая лежит на поверхности, если все её точки лежат на поверхности
$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \overline{r} = (x(u(t), v(t)),\ y(...)...)$$

Опр

Вектор называется касательным, если он является касательным к кривой на поверхности

Теорема

Если поверхность регулярная $\Rightarrow$ касательные векторы образуют плоскость

Опр

Касательная плоскость - плоскость из касательных векторов

Док-во

Базис: $\frac{\partial r}{\partial u} A$ и $\frac{\partial r}{\partial v} A$
$\begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases}$

$$\begin{cases} u^2 = u_0 \\ v = t \end{cases} \quad \overline{r}(t) = (x(t_0, v_0),\ y(t_0, v_0),\ z(t_0, v_0))$$

$$\overline{r'}(t) = (x'(t_0, v_0),\ y'(t_0, v_0),\ z'(t_0, v_0)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} ...\right)$$

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

$$\frac{dr}{dt}\Big|_A = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\right)\frac{du}{dt} + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\Big| + a$$

Наоборот $\alpha\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\Big|_A + \beta\frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\Big|_A$ - вектор

$\begin{cases} u(t) = \alpha t \\ v(t) = \beta t \end{cases}$

Как задать касательную плоскость в координатах?
Пусть $\overline{n}$ - нормаль к плоскости

$$\overline{n} = (A,\ B,\ C)$$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\overline{n} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$$

$$\overline{r} = (x,\ y,\ z)$$

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\overline{n} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ - уравнение касательной плоскости}$$

Утв

В неявном виде

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right) \text{ - перп. плоскости}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla F \circ \underbrace{(x', y', z')}_{\text{касат. вектор}} = 0$$

$\nabla F \perp$касат. вектору (любому) $\Rightarrow \nabla F$ - норм пов-ть

Утв

Уравнение касательной плокости:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0)$$

2.3 Первая квадратичная плоскость

Длина кривой на поверхности

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

$\overline{r}$ - пов-ть

$$r = (x, y, z) = (x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t)))$$

$$\text{Длина кривой} = \int_{t_0}^{t_1} \left|\frac{d}{dt}\overline{r}(u(t), v(t))\right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left|\left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v',\ \frac{\partial y}{\partial u}u' + \frac{\partial y}{\partial v}v',\ \frac{\partial z}{\partial u}u\right.\right.$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$$

Опр

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt \text{ - первая квадратичная форма}$$

2019-10-14

Теорема

Угол медлу кривыми

$$\cos\alpha = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv + 1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\sqrt{...}}$$

Док-во

Найдем, как вычисляется угол между кривыми

$$\begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}$$

Нужно найти угол между $\overline{r}_t'(u_1(t), v_1(t))$ и $\overline{r}_t'(u_2(t), v_2(t))$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{r}_t'(u_1(t), v_1(t)) * \overline{r}_t'(u_2(t), v_2(t))}{|\overline{r}_t'(u_1(t), v_1(t))||\overline{r}_t'(u_2(t), v_2(t))|}$$

$$r_t'(u_1(t), v_1(t)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv_1}{dt}; ...\right)$$

$$\frac{d\overline{r}}{dt}(u_i(t), v_i(t)) = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}u_i' + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}v_i'$$

$$\frac{dr}{dt}(u_1(t), v_1(t))\frac{dr}{dt}(u_2(t), v_2(t)) = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}u_1' + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}v_1'\right)\left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}u_2' + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}v_2'\right) = Eu_1'u_2' + F(u_1'$$

$$\cos\alpha = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv + 1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\sqrt{...}}$$

Опр

Поверхности Φ_1 и Φ_2 называются изометричными, если $\exists$ параметризации $\overline{r}_1$ у Φ_1 и $\overline{r}_2$ у Φ_2 $r_1, r_2 : D \to \mathbb{R}^3$ и $\forall$ кривой D длины $|r_1(l)| = |r_2(l)|$

Опр

Внутренняя метрика поверхности $(A, B) = inf\{$длина кривой на поверхности, с

Теорема

Если у Φ_1 и Φ_2 совпадают коэффициенты I кв. формы, то они изометричны

Док-во

Уже доказали, потому что форма вычисления длины кривой одинаковая на обеих поверхностях

Замечание

Если поверхности изометричны, то $\exists D$ и параметризации $\overline{r}_1, \overline{r}_2 : D \to \mathbb{R}^3$, r_i - параметризация поверхности Φ_i такие что E, F, G совпадают для $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$

Док-во

f - изометрия

Кривая в D: $\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = v_0 & v' = 0 \end{cases}$

$$l_1 = \int_a^b \sqrt{E_1 1} dt$$

$$l_2 = \int_a^b \sqrt{E_2 1} dt$$

т.к. $l_1 = l_2 \Rightarrow E_1 = E_2$

Аналогично $G_1 = G_2$ ($\begin{cases} u = u_0 \\ v = t \end{cases}$)

$$\begin{cases} u = t + u_0, & u' = 1 \\ v = t + v_0, & v' = 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \sqrt{E_1 + 2F_1 + G} dt = \int_a^b \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2} dt$$

$$E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2 \Rightarrow F_1 = F_2$$

Следствие

I кв. форма определяет внутреннюю геометрию

Пример

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\psi \\ y = R\sin\varphi\cos\psi \\ z = R\sin\psi \end{cases}$$

$$\overline{r} = (R\cos\varphi\cos\psi,\ R\sin\varphi\cos\psi,\ R\sin\psi)$$
$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\cos\psi,\ R\cos\varphi\cos\psi,\ 0)$$
$$r'_\psi = (R\cos\varphi\sin\psi,\ -R\sin\varphi\sin\psi,\ R\cos\psi)$$
$$E = r'^2_\varphi = R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi = R^2\cos^2\psi$$
$$F = R^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi\sin\psi - R^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi + 0 = 0$$
$$G = R^2$$

Пример (параметризация поверхности вращения)

$$\begin{cases} x = f(t)\cos\varphi \\ y = f(t)\sin\varphi \\ z = g(t) \end{cases}$$

Упр

У любой поверхности вращения $F = 0$, E не зависит от φ, G тоже

Теорема

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

Док-во

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = (\overline{x}_u,\ \overline{y}_u,\ \overline{z}_u) \times (\overline{x}_v,\ \overline{y}_v,\ \overline{z}_v) = (y_u z_v - z_u y_v,\ z_u x_v - x_u z_v,\ x_u y_v - y_u x_v)$$

$$|\overline{r}_n \times \overline{r}_v| = \sqrt{(y_u z_v - z_n y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2} =$$
$$= \sqrt{(y_u^2 z_v^2 \underbrace{+}_{=A} z_n^2 y_v^2) - 2(y_u z_v z_u y_v + z_u \underbrace{x_u}_{=B} z_v x_u + x_u x_v y_u y_v)}$$
$$EG - F^2 = (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(z_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 =$$
$$= (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) + (A) - (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) - 2(B)$$

Следствие

$$EG - F^2 > 0$$

Теорема

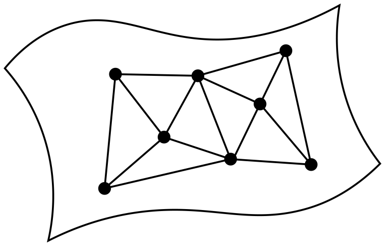
Площадь поверхности $S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv$

2019-10-21

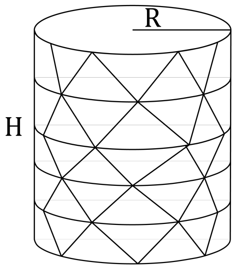
Как не нужно вводить площадь?

Конструкция: Ф - пов-ть, впишем в Ф кус.-лин. пов-ть

$$\lim_{|\Delta_i| \to 0} \sum_{\Delta} S_\Delta \stackrel{?}{=} S_{\text{пов-ти}}$$



Контрпример: сапог Шварца



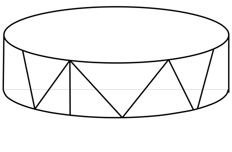
h - высота каждого

k слоев

$$H - kh$$

$$k \to \infty$$

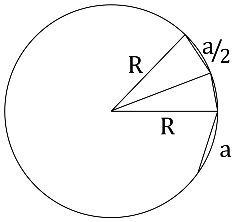
$$n \to \infty$$

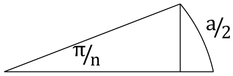


В слое 2n Δ

$$h' = \sqrt{h^2 + b^2}$$

Всего 2nk Δ





$$\frac{a}{2} = R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$b = R - R\cos\frac{\pi}{n} \quad h = \frac{H}{K}$$

$$h' = \sqrt{h^2 + R^2(1 -]cos\frac{\pi}{n})^2}$$

$$S = \frac{1}{2}ah' = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{h^2 + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})}$$

$$\sum_{\Delta} S_{\Delta} = 2nkR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{K^2} + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2}$$

$$\lim_{n,k\to\infty} 2nkR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{K^2} + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2} =$$
$$= 2\pi R\lim_{n,k\to\infty}\sqrt{H^2 + R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2K^2} =$$
$$= 2\pi R\sqrt{H^2 + R^2\lim_{n,k\to\infty}K^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2} =$$
$$= 2\pi K\sqrt{H^2 + R^2\frac{\pi^4}{4}\lim_{k,n\to\infty}\frac{k^2}{n^4}}$$

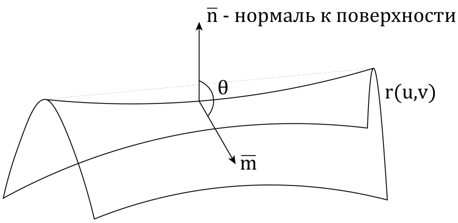
Если $k = \underset{n\to\infty}{o(n^2)} \Rightarrow \pi RH$

Если $k = n^2 \Rightarrow 2\pi R\sqrt{H^2 + \dfrac{\pi^4}{n}R^2} \neq 2\pi RH$

Если $k = n^3 \Rightarrow ... = \infty$

Почему так?
Посмотрим, что происходит, когда k растет быстрее, чем n^2
При маленьком а выходит тонкий слой и получается "помятый"сапог Шварца

2.7 II квадратичная форма



$$\psi(s) \qquad k = \overset{=\overline{m}}{\psi''}(s)$$

θ - угол между $\overline{m}$ и $\overline{n}$

$$k = |\psi''(s)| = \frac{\overline{\psi}''(s)\cdot\overline{n}}{\cos\theta}$$

$u(s),\ v(s)$ - внутр. ур-я кривой

$$\psi' = r_u u' + r_v v'$$

$$\psi'' = \overline{r}_{uu}u'^2 + \overline{r_{uv}}u'v' + \overline{r}_u u'' + \overline{r}_{uu}u'v' + \overline{r}_{vv}v'^2 + \overline{r}_v v''$$

$$\psi''n = \overline{r}_{uu}\overline{n}u'^2 + 2\overline{r}_{uv}nu'v' + \overline{r}_{vv}nv'^2 = Lu'^2 + 2Mu'v' - Nv'^2 = \mathrm{II}(u',\ v')$$

$$\overline{r}_u\overline{n} = 0$$

$$\overline{r}_v\overline{n} = 0$$

$$\begin{cases} \overline{r}_{uu}\overline{n} = L \\ \overline{r}_{uv}\overline{n} = M \\ \overline{r}_{vv}\overline{n} = N \end{cases} \qquad \text{- коэф. II кв. формы пов-ти}$$

$$\mathrm{I}(u', v') = Ru'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$$

Теорема

Если s - нат. параметризация, $k = \cos\theta = \mathrm{II}(u'(s),\ v'(s))$

Теорема

$\forall$ параметризации $\Rightarrow k\cos\theta = \dfrac{\mathrm{II}(u'(t); v'(t))}{\mathrm{I}(u'(t); v'(t))}$

Док-во

Пусть теперь $\psi(t)$ - произвольная параметризация

$$\psi'(s) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$$

$$(u'(s), v'(s)) = \frac{(u'(t), v'(t))}{|\varphi'(t)|}$$

$$|\varphi'(t)| = Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t)$$

$$k\cos\theta = \frac{\mathrm{II}(u'(t),\ v'(t))}{|\varphi'(t)|} = \frac{\mathrm{II}(u'(t); v'(t))}{\mathrm{I}(u'(t); v'(t))}$$

Пример

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\psi \\ y = R\sin\varphi\cos\psi \\ z = R\sin\psi \end{cases} \quad \text{- сфера}$$

$$\overline{n} = \frac{\overline{r}}{R} = (\cos\varphi\cos\psi,\ \sin\varphi\cos\psi,\ \sin\psi)$$

$$\overline{r}_{\varphi\varphi} = (-R\cos\varphi\cos\psi,\ -R\sin\varphi\cos\psi,\ 0)$$

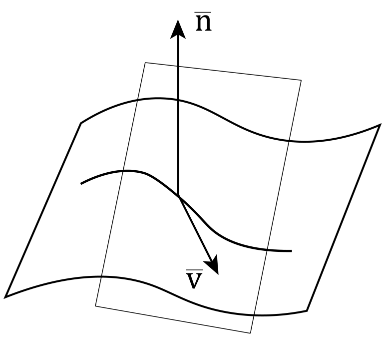
$$L = -R\cos^2\psi$$

$$\overline{r}_{\varphi\psi} = (R\sin\varphi\sin\psi,\ -R\cos\varphi\sin\psi,\ 0)$$

$$M = 0$$

$$\overline{r}_{\psi\psi} = (-R\cos\varphi\cos\psi,\ -R\sin\varphi\cos\psi,\ -R\sin\psi)$$

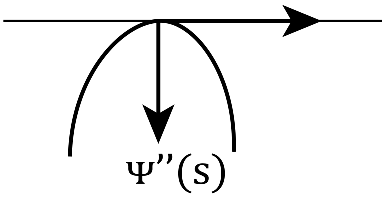
$$N = -R$$



Теорема

Проекция векторов кривизны кривых на поверхности с данным касательным вектором на вектор нормали к поверхности одинаковы (все это $k\cos\theta$)

$(u'(s_0),\ v'(s_0))$ - у всех таких кривых одинак.



Теорема

$$k\cos\theta = \mathrm{II}(u'(s),\ v'(s)),\ \text{если s - натур. параметризация}$$

Док-во

Пусть параметризации натуральные

Возьмем кривую: $\cos\theta = \pm 1$ (знак зависит от $\overline{n}$)
Рассмотрим кривые с данным единичным кас. векором и $\cos\theta = \pm 1 \Rightarrow$ у них одинаковые кривизны

$$k_\nabla = \mathrm{II}(u'(s),\ v'(s))$$

Нормальная кривизна поверхности в направлении ∇

2019-10-28

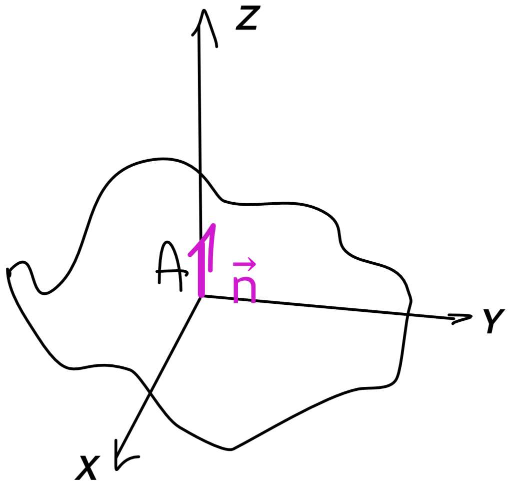
<u>Напоминание</u>

2.8 Соприкас. парабалоид

«Введем нового героя»

<u>Опр</u>

A - точка на пов-ти



$\Rightarrow$ в окр. A поверхность задается $z = f(x, y)$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = f(x_0,\ y_0) = 0$

Разложим $z = f(x, y)$ по ф. Тейлора

$$z = f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y+$$

$$\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0))xy + f_{yy}(x_0, y_0)y^2)$$

$$f_x(0, 0) = 0 \qquad f_y(0, 0) = 0$$

$$r(v, u) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \qquad r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \qquad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$$

r_u и r_v - лежат в кас. плоск, а это OXY

$$z = \underbrace{\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2)}_{\text{пов-ть 2 порядка}} + o(x^2+y^2)$$

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$z = Ax^2 + Cy^2$ можем поворотом привести к этому

Это может быть:
- эллиптич. параболоид A, C - одного знака
- гипербол. параболоид A, C - разных знаков
- параболический цилиндр $A = 0, \quad C \neq 0$ или наоборот
- плоскость A = 0, C = 0

Опр

Точка A наз. элиптической, если соприкас. параболоид - элипт.
A - гиперболическая, если соприкас параболоид - гиперб.
A - парабол., если соприкас параб - параб. цилинд или плоскость

Опр

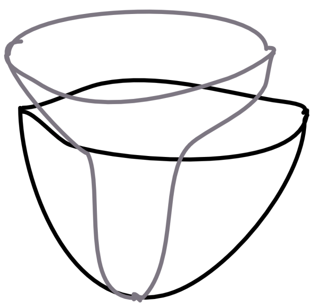
Точка A наз. точкой округления (омбилическая), если сопр. параб. - пар. вращения

Опр

Точка A - точка уплощения, если соприкас. параб - плоскость

Теорема

I и II формы в точке A у поверхности и параболоида совпадают



В параметризации $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$

Док-во

очевидно
Давайте поймем, от чего зависят $E, F, G, ..., M, V$?
от $\overline{r}_u,\ \overline{r}_v,\ \overline{r}_{uu},\ \overline{r}_{uv},\ \overline{r}_{vv}$

Следствие

Норм. кривизны у поверх-ти и соприкас. параб совпадают

Опр

Главные кривизны k_1 и k_2

$\overrightarrow{a}$ - направление в кас. плоск

$\overline{k}_{\overrightarrow{a}}$ - нормальная кривизна

$k_{\overrightarrow{a}}$ - норм. кривизина в напр. $\overrightarrow{a}$

$\overline{k}_{\overrightarrow{a}} = k_{\overrightarrow{a}}\overline{n}$

$k_1 = \min\limits_{\overrightarrow{a}} k_{\overrightarrow{a}} \qquad k_2 = \max\limits_{\overrightarrow{a}} k_{\overrightarrow{a}}$

Опр

$\overrightarrow{a}_1$ и $\overrightarrow{a}_2$, соотв k_1 и k_2 наз. главными направлениями

Утв

$\overrightarrow{a}_1 \perp \overrightarrow{a}_2$(докажем позже)

Опр

$K = k_1 \cdot k_2$ - гауссова кривизна

«Главный герой всего нашего курса»

Свойства

$K > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ - эллипт типа
$K < 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ - гиперб. типа
$K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ - параб. типа

Утв ("Блистательная теорема Гаусса")

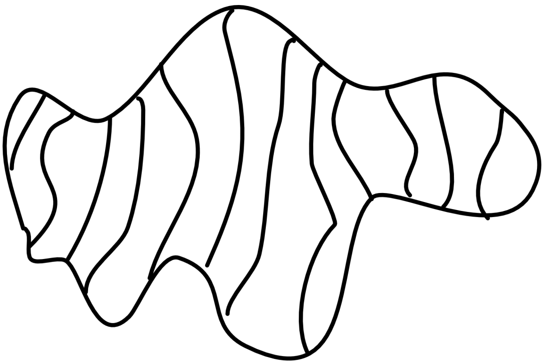
K - инвариант относительно изометрии пов-ти

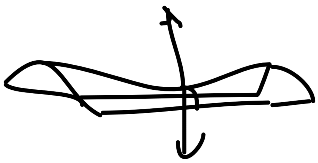
Опр

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \text{ - средняя кривизна}$$

Смысл: В мыльных пленках (незамкн.) средняя кривизна $= 0$

Пример: мыльная плёнка





Теорема (Эйлера)

$$k_{\overrightarrow{a}} = k_1 \cos^2 \Theta + k_2 \sin^2 \Theta$$

где k_1, k_2 - гл. кривизны, Θ - угол между напр. $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{a}_1$

Док-во

$z = Ax^2 + Cy^2$ - сопр. парабол.

$\overrightarrow{a} = (\cos\Theta;\ \sin\Theta)$ - направление

$$\begin{cases} x = t\cos\Theta \\ y = t\sin\Theta \\ z = Ax^2 + Cy^2 = t^2(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = \begin{cases} \cos\Theta \\ \sin\Theta \\ rt(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{cases}$$

$$r''(t) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ r(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{cases}$$

$$k = \frac{|r'(t_0) \times r''(t_0)|}{|r'(t_0)|^{3/2}}$$

$$t_0 = 0$$

$$r'(t_0) = \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |r'(t)| = 1$$

$$r''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{pmatrix}$$

$$|r''(t_0)| = 2\left|A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta\right|$$

$$r'' \perp r'$$

В данном случае $k = |r''(t_0)| = 2\left|A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta\right|$

$k_{\overrightarrow{a}} = \pm k \quad$ (от сонапр. с $\overrightarrow{n}$)

$$k_{\overrightarrow{a}} = 2(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta)$$

Хотим теперь найти минимум и максимум этой штуки

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$z = Ax^2 + Cy^2$$

$$\frac{dk_{\overrightarrow{a}}}{d\Theta} =$$

Мы не хотим брать произв.

$$k_{\overrightarrow{a}} = 2(A\cos^2\Theta + C(1 - \cos\Theta)) = 2C + \cos^2\Theta(2A - 2C)$$

При $A = C \qquad$ A - точка округл.

$$\exists A > C$$

$\max k_{\overrightarrow{a}}$ достиг при $\Theta = 0 \quad$ (или π)

$$k_1 = 2C + 2A - 2C = 2A$$

$\min k_{\overrightarrow{a}}$ при $\dfrac{\pi}{2} \quad$ (или $-\dfrac{\pi}{2}$)

$$k_2 = 2C$$

Следствие (1)

Пов-ть задана ур-ем $z = f(x, y)$

$$f(0,0) = 0 \qquad f_x(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 0 \qquad f_{xy}(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = f_{xx}(0,0) \quad k_2 = f_{yy}(0,0)$$

(или наоборот мы рассматривали только $A > C$)

Следствие (2)

Главные напр $\perp$

2019-11-18

Док-во (блистательная теорема Гаусса)

M - поверхность, X_0 - точка M, в X_0 сопр

$$E, F, G \text{ - I кв. ф.}$$

$$L, M, N \text{ - II кв. ф.}$$

(ξ, nu) - напр. во внутр. координатах

$$k(\xi, n) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\nu + M\nu^2}{E\xi^2 + 2F\xi\nu + G\nu^2} = \frac{Nx^2 + 2Mx + L}{Gx^2 + 2Fx + e} \to \min$$

$$x = \frac{\nu}{\xi}(x \to \infty)$$

$$= \frac{\mathrm{II}(x)}{\mathrm{I}(x)}$$

$$k'(0) = 0$$

$$k'(x) = \frac{\mathrm{II}'(x)\mathrm{I}(x) - \mathrm{II}(x)\mathrm{I}(x)}{\mathrm{I}^2(x)} = 0$$

Знаменатель не равен нулю, потому что $EG - F^2 > 0$

$$\mathrm{II}'(x) = 2Nx + 2M$$

$$\mathrm{I}'(x) = 2Gx + 2F$$

$$(2Nx + 2M)(Gx^2 + 2Fx + E) - (2Gx + 2F)(Nx^2 + 2Mx + L) = 0$$

$$\cancel{NGx^3} + MGx^2 + 2NFx^2 + \cancel{2MFx} + FNx + ME - \cancel{GNx^3} - FNx^2 - 2GMx^2 - \cancel{2FMx} - GI$$

$$x^2(NF - MG) + x(EN - GL) + (ME - FL) = 0 \quad | \cdot \xi^2$$

$$\nu^2 \begin{vmatrix} F & G \\ M & N \end{vmatrix} - \xi\nu \begin{vmatrix} G & E \\ N & L \end{vmatrix} + \xi^2 \begin{vmatrix} E & F \\ L & M \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \nu^2 & -\xi\nu & \xi^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{pmatrix}$$

Хотим понять, что происходит с различными k:

$$\frac{\mathrm{II}(\xi, \nu)}{\mathrm{I}(\xi, \nu)} = k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$x = \frac{\nu}{\xi}$$

$$\mathrm{II}(x) = k\mathrm{I}(x)$$

$$Nx^2 + 2Mx + L = k(Gx^2 + 2Fx + E)$$

$$(N - kG)x^2 + 2(M - kF)x + (L - kE) = 0$$

Если уравнение имеет 0 корней, такое число в качестве нормальной кривизны не достигается (если k слишком велико или слишком мало)

Откуда могут взять два корня? Пусть в одном направлении кривизна k_1, в другом k_2. Кривизна направления с углом α по ф-ле Эйлера $k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha$

У симмитричного относительно OX направления такая же кривизна. Вот откуда два корня

А в каком случае корень x_0 единственный?

$$\Leftrightarrow \text{напр. главное и } k = k_1 \text{ или } k_2$$

$$(M - kF)^2 = (N - kG)(L - kE)$$

Его два решения - главные кривизны (решать мы, конечно, не будем (с) Солынин)

$$M^2 - kMF + k^2F^2 = NL - k(GL + NE) + k^2GE$$

$$k^2(GE - F^2) - k(GL + NE - 2MF) + (NL - M^2) = 0$$

$$\Rightarrow K = k_1k_2 \overset{\text{Виет}}{=} \frac{NL - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{GL - MF + NE}{EG - F^2}$$

Лемма

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}, \overline{e}, \overline{f}$ - вект

$$\Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})(\overline{d}, \overline{e}, \overline{f}) = \begin{vmatrix} \overline{a} \cdot \overline{d} & \overline{a} \cdot \overline{e} & \overline{a} \cdot \overline{f} \\ \overline{b} \cdot \overline{d} & \overline{b} \cdot \overline{e} & \overline{b} \cdot \overline{f} \\ \overline{c} \cdot \overline{d} & \overline{c} \cdot \overline{e} & \overline{c} \cdot \overline{f} \end{vmatrix}$$

Теорема (egrerium)

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \text{ выражается через } E, F, G \text{ и их произв.}$$

Док-во (теоремы)

$$L = \overline{f}_{uu}\overline{n}$$

$$M = \overline{f}_{uv}\overline{n}$$

$$N = \overline{f}_{vv}\overline{n}$$

$$\overline{n} = \frac{\overline{f}_u \times \overline{f}_v}{|f_u \times f_v|} = \frac{\overline{f}_u \times \overline{f}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$L = \frac{(f_{uu}, f_u, f_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \frac{(f_{uv}, f_u, f_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$N = \frac{(f_{vv}, f_u, f_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2}((f_{uu}, f_u, f_v)(f_{vv}, f_u, f_v) - (f_{uv}, f_u, f_v)(f_{uv}, f_u, f_v))$$

$$= \frac{1}{EG - F^2}\begin{vmatrix} f_{nu}f_{vv} & f_{un}f_n & f_{uu}f_v \\ f_uf_{vv} & f_uf_n & f_uf_v \\ f_vf_{vv} & f_vf_n & f_uf_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_{nv}f_{nv} & f_{uv}f_n & f_{uv}f_v \\ f_uf_{nv} & f_uf_n & f_nf_v \\ f_vf_{nv} & f_vf_n & f_nf_v \end{vmatrix} =$$

$$F_u = (f_nf_n)_u = 2f_nf_{uu}$$

$$E_v = (f_n^2)_v = 2f_nf_{nv}$$

$$F_u = (f_nf_v)_u = f_{nu}f_v + f_nf_uv$$

$$F_v = (f_nf_v)_v = f_nf_{vv} + f_vf_{uv}$$

$$G_u = (f_vf_v)_u = 2f_vf_{nv}$$

$$G_v = (f_vf_v)_v = 2f_{vv}f_v$$

$$f_nf_{nv} = \frac{1}{2}E_v$$

$$f_{nu}f_v = F_n - \frac{1}{2}E_v$$

$$f_{vv}f_u = F_v - \frac{1}{2}G_n$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} f_{nn}f_{vv} & \frac{1}{2}F_u & F_n - \frac{1}{2}F_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_n & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_{uv}^2 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_n \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}F_u & F & G \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix} f_{nn}f_{vv}-f_{uv}^2 & \frac{1}{2}F_u & F_n-\frac{1}{2}F_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_n & E & F \\ \frac{1}{2}G_n & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_n \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_n & F & G \end{vmatrix}\right)$$

$$F_{uv} = (f_{uu}f_v)_v + (f_u f_{uv})_v = f_{uuv}f_v + \underline{f_{uu}f_{vv}} + \underline{f_{uv}f_{uv}}$$

$$G_{uu} = 2f_{uv}^2 + 2f_v f_{uvu}$$

$$E_{vv} = 2f_{uv}^2 + 2f_u f_{uvv}$$

$$\Rightarrow f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2 = F_{uv} - \frac{1}{2}(G_{uu}+E_{vv})$$

Можем заменить теперь в определителе и теорема будет доказана

<u>Док-во</u> (леммы)

Хотим $a \to \overline{a} + \alpha\overline{b}$ (чтобы было ортоганально)

$$\begin{vmatrix} (a+\alpha b)d & (a+\alpha b)e & (a+\alpha b)f \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{vmatrix} \overset{\text{тот же трюк с разл.}}{=} \begin{vmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha bd & \alpha be & \alpha bf \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$(a,b,c) \to (a, b+\alpha a, c+\beta a+\gamma b)$$

(трюк из первого семестра, $a\perp b\perp c\perp a$)
Считаем, что они единичные:

$$a = (1,0,0) \qquad b = (0,1,0) \qquad c = (0,0,1)$$

$$d = (d_1,d_2,d_3) \qquad e = (e_1,e_2,e_3) \qquad f = (f_1,f_2,f_3)$$

$$(d,e,f) = \begin{vmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

2019-11-25

2.11 Сферическое отображение

Опр

Φ - поверхность, гладкая, регулярная, $f : D \to \mathbb{R}^3$,$\Phi = f(D)$

$$\Gamma : \Phi \to \cancel{\mathbb{R}^3} S^2 \text{ - отобр } x \mapsto \overline{n}(x)$$

Такое отображение называется сферическим

Примеры

1. Φ - сфера радиуса 1
   $\Gamma(x) = x$
   Φ - сфера, радиуса R
   $$\Gamma(x) = \frac{x}{|x|}$$
2. Φ - плоск., $\Gamma(x) = \text{const}$

Опр

Основной оператор пов-ти - дифференциал данного отображения Γ

Т.е. это линейный оператор $x \in \mathbb{R}$

$$R_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\forall \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2$$

$$x = f(u_0,\ v_0)$$

$R_x(\overrightarrow{w}) = \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\Gamma(f((u_0;\ v_0) + \alpha \overrightarrow{w})) - \Gamma(f(u_0;\ v_0))}{\alpha}$ - вектор в кас. плоскости S^2

(в числителе единичные векторы, точнее их производные)

Пример

Сама функция $R_x(\overrightarrow{w})$ работает как производная, это некоторый вектор. Его можно разложить по базису

Пусть $w_1 = u, \quad w_2 = v$, тогда $\frac{R_x(w_1}{|R_x(w_1)|}$, $\frac{R_x(w_2}{|R_x(w_2)|}$ - базисные векторы

Теорема (Родрич)

С.ч. основного оператора - главные кривизны со знаками минус ($-k_1$ и $-k_2$), а с.в. - главные направления

Теорема

Пусть координаты линии поверхности совп. с главными направлениями $\Rightarrow$

$$n_u = -k_1 f_u \qquad n_v = -k_1 f_v$$

где $f_u,\ f_v$ - производные по u и по v

Замечание (теоремы равносильны)

$$\begin{matrix} n_u = R_x(1,\ 0) & f_u = (1,\ 0) \\ n_v = R_x(0,\ 1) & f_v = (0,\ 1) \end{matrix} \text{ в кас. плоск. пов.}$$

Потому что у пов. есть два с.ч.

Как мы выбирали систему координат?

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \varphi(u,\ v) \\ \text{н. коорд. } (0,0,0) \\ \varphi(0,0) = 0 \end{cases}$$

Также мы выбирали, чтобы кас. пл-ть $z = 0$ т.е. $\varphi_u(0,0) = 0 \quad \varphi_v(0,0) = 0$

Что мы делали?

$$\varphi_{uu}(0,0) = L, \quad \varphi_{uv}(0,0) = M, \quad \varphi_{vv}(0,0) = N$$

$$z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$$

Что мы вспоминали? Можем выбрать так парабалоид, чтобы при x, y координаты равнялись 0, то есть координатные длины совпали с главными направлениями т.е. $M = 0 = \varphi_{uv}(0,0)$

Давайте что-нибудь посчитаем

$$f(u,v) = (u, v, \varphi(u,v))$$

$$f_u = (1,\ 0,\ \varphi_u)$$

$$f_v = (0,\ 1,\ \varphi_v)$$

$$\overline{n} = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|} = \frac{(-\varphi_u;\ -\varphi_v;\ 1)}{\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}}$$

$$n_u = \left(-\frac{\varphi_u}{\sqrt{}},\ -\frac{\varphi_v}{\sqrt{}},\ \frac{1}{\sqrt{}}\right)_u =$$

$$\left((\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2})_u = \frac{\varphi_u\varphi_{uu}+\varphi_v\varphi_{uv}}{\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}}\right)$$

$$= \left(-\frac{\varphi_{uu}\sqrt{\dots} - \varphi\frac{\varphi_u\varphi_{uu}+\varphi_v\varphi_{vv}}{\sqrt{\dots}}}{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}; -\frac{\varphi_{vv}\sqrt{\dots} - \varphi_v\frac{\dots}{\dots}}{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}; -\frac{1}{(1+\varphi_u^2+\varphi_v^2)^{\frac{3}{2}}}(\varphi_u\varphi_{uv}+\varphi_v\varphi_{uv})\right)$$

Наш корень в $(0,0,0)$ равняется 1, $\varphi_{uu} = 0$ как мы договорились, аналогично остальные, используем это:

$$n_u\Big|_{(0,0,0)} = (-\varphi_{uu},\ 0,\ 0) = -k_1 \cdot (1,\ 0,\ 0)$$

$$k_1 = \varphi_{uu} \qquad f_u = (1,\ 0,\ \varphi_u)$$

n_v - аналогично (первая 0, вторая не 0, ...)

$$n_v\Big|_{(0,0,0)} = (0,\ -\varphi_{vv},\ 0) = -k_2(0,\ 1,\ 0) = -k_2 f_v$$

Теорема

$\widetilde{D}$ - область на поверхности

$$\lim_{diam(\widetilde{D})\to 0} \frac{S(\Gamma(\widetilde{D}))}{S(\widetilde{D})} = |K|$$

"Мера на сколько изменилась"

Док-во

$$S(\widetilde{D}) = \iint\limits_D |\overline{f}_u \times \overline{f}_v| dudv \underset{\text{т. о среднем}}{=} S(D)|f_u \times f_v|\Big|_{(u_0,v_0)}$$

$$D(\Gamma(\widetilde{D})) = \iint\limits_D |n_u \times n_v| dudv \underset{\text{т. о среднем}}{=} |n_u \times n_v|\Big|_{(u_0,v_0)} S(D)$$

$$\lim_{diam\widetilde{D}\to 0} \frac{S(\Gamma(\widetilde{D}))}{S(\widetilde{D})} = \lim \frac{|n_u \times n_v|\Big|_{u_0,v_0} \cancel{S(D)}}{|f_u \times f_v|\Big|_{(u_0,v_0)} \cancel{S(D)}} = \frac{|n_u \times n_v|}{|f_u \times f_v|}$$

Введем специальные координаты, чтобы направления совпадали с главными (u, v - главн.) (насколько это переход к частному случаю? Нужно понять, что $n_u \times n_v$ не зависит от выбора координат)

Тогда у нас есть теорема Радриго:

$$n_u = -k_1 f_u \qquad n_v = -k_2 f_v$$

$$\Rightarrow \frac{|n_u \times n_v|}{|f_u \times f_v|} = |(-k_1)(-k_2)| = |K|$$

2.12 Деривационные формулы

Являются аналогами формул Френе.

У нас есть три вектора: $(\overline{f}_u,\ \overline{f}_v,\ \overline{n})$ - базис

$$f_{uu} = \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + \alpha\overline{n}$$

$$f_{uv} = \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + \beta\overline{n}$$

$$f_{vv} = \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + \gamma\overline{n}$$

$$n_u = \alpha_1 f_u + \beta_1 f_v + \gamma_1\overline{n}$$

$$n_v = \alpha_2 f_u + \beta_2 f_v + \gamma_2\overline{n}$$

Γ^k_{ij} наз. символами Кристоффеля

Факт. Γ^k_{ij} относ. к внутр. геометрии (б/д)

Заметим, что $\alpha = L,\ \beta = M,\ = N$ - коэф. II формы

$$L := f_{uu} \cdot n = \Gamma^1_{11} \underbrace{f_u \cdot n}_{=0} + \alpha \underbrace{\overline{n} \cdot \overline{n}}_{=1}$$

Заметим, что $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, т.к. $|\overline{n}| = 1 \Rightarrow \overline{n}_u \perp \overline{n}$, значит:

$$f_{uu} = \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L\overline{n}$$

$$f_{uv} = \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + M\overline{n}$$

$$f_{vv} = \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + N\overline{n}$$

$$n_u = \alpha_1 f_u + \beta_1 f_v \mid \cdot f_u$$

$$n_v = \alpha_2 f_u + \beta_2 f_v$$

$$f_u n_u = \alpha_1 E + \beta_1 F$$

$$f_v n_u = \alpha_1 F + \beta_1 G$$

$$f_u n_v = \alpha_2 E + \beta_2 F$$

$$f_v n_v = \alpha_2 F + \beta_2 G$$

$$0 = (f_u \cdot n)_u = \underbrace{f_{uu} n}_{=L} + f_u n_u \;\Rightarrow\; -L = f_u n_u$$

$$0 = (f_v \cdot n)_u = \underbrace{f_{uv}}_{=-M} + f_v n_u$$

Аналогично $-M = f_v n_u = f_u n_v$ и $-N = f_v n_v$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} -L & F \\ -M & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ E & G \end{vmatrix}} = \frac{MF - LG}{EG - F^2}$$ из системы сост. ур-ий

$$\beta_1 = \frac{LF - ME}{EG - F^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{NF - MG}{EG - F^2}$$

$$\beta_2 = \frac{MF - NE}{EG - F^2}$$

2019-11-25

Переобозначим f на r в прошлой лекции

Напоминание

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$|n_u \times n_v| = \Big| \left(\frac{MF - LG}{EG - F^2} r_u + \frac{LF = ME}{EG - F^2} r_v \right) \times$$

$$\times \left(\frac{NF - MG}{EG - F^2} r_u + \frac{MF - NE}{EG - F^2} r_v \right) \Big| =$$

$$= \frac{1}{(EG - F)^2} |(MF - LG)(MF - NE) - (LF - ME)(NF - MG) =$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} |M^2F^2 - \cancel{LMFG} - \cancel{MNEF} + LNEG -$$

$$-LNF^2 + \cancel{LMFG} + \cancel{MNEF} - M^2EF| =$$

$$= \frac{1}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} \left|(LN - M^2)(EF - F^2)\right| = \frac{|LN - M^2|}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Теорема

Γ_{ij}^k относ. к внутренней геометрии

Док-во

$$r_{uu} = \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + Ln \quad | \cdot r_u \quad | \cdot r_v$$

$$r_{uu} r_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$

$$r_{uu} r_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$

$$E_u = (r_u r_v)'_u = 2 r_{uu} r_v$$

$$F_u = (r_u r_v)_u r_{uu} r_v + r_u r_{uv}$$

$$E_v = (r_u r)_v = 2 r_{uv} r_u$$

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = r_{uu} r_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$$

Заметим, что система невырожденная, поэтому символы кристофеля выражаются и зависят только от первой формы. Аналогично остальные Γ_{ij}^k

Проверим некоторые:

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = r_{uv} r_u = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = r_{uv} r_v = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

2.13 Геодезическая кривизна

$k_n = \mathrm{pr}_{\overline{n}} \overrightarrow{k}$ - нормальная кривизна

Опр

$k_g := |\,\mathrm{pr}_{\text{кас. пл.}} \overrightarrow{k}\,|$ - геодезическая кривизна

Свойство

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

Теорема

k_g относ. к внутренней геометрии

Док-во

Будем рассматривать натуральную параметризацию $(u(s),\ v(s))$

$$\overrightarrow{k} = \frac{d^2}{ds^2}\overline{r}(u(s),\ v(s))$$

$$\frac{d}{ds}\overline{r}(u(s),\ v(s)) = r_u u' + r_v v'$$

$$\overrightarrow{k} = \frac{d^2}{ds}r(u(s),\ v(s)) = r_{uu}u'^2 + 2r_{uv}u'v' + r_{vv}v'^2 + r_u u'' + r_v v''$$

$$\overrightarrow{k}_n = (Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)\cdot\overrightarrow{n} \text{ - знаем}$$

$$\overrightarrow{k} = \underline{(\Gamma^1_{11}r_u + \Gamma^2_{11}r_v)u'^2 + 2(\Gamma'_{12}r_u + \Gamma^2_{12}r_v)u'v' + (\Gamma'_{22}r_u + \Gamma^2_{22}r_v)v'^2 +}$$
$$\underline{r_u u'' + r_v v''} + \overrightarrow{n}(Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)$$

$$k_g = \underline{\quad}$$

$$\underline{\quad} = Ar_u + V_v$$

$A,\ B$ - только от 1 формы

$$k_g = A^2E + 2ABF + B^2G$$

$$\overrightarrow{k}_g = A\overrightarrow{n}_u + B\overrightarrow{r}_v$$

$$|k_g| = \sqrt{(Ar_u + Br_v)(Ar_v + Br_v)} = \sqrt{A^2\underbrace{r_u r_u}_{E} + 2AB\underbrace{r_u r_v}_{F} + B\underbrace{r_v r_v}_{G}}$$

Опр

Геодезической называется линия, у которой $k_g = 0$

Утв (формула)

$$k_g = \frac{(\varphi'',\ \varphi',\ n)}{|\varphi'|^3} \qquad \varphi(t) = r(u(t),\ v(t))$$

Док-во

$$k = \frac{|\varphi'' \times \varphi'|}{|\varphi'|^3}$$

$$\varphi'' \times \varphi' = (\varphi_1'' + \varphi_2'') \times \varphi' = \underbrace{\varphi_1'' \times \varphi'}_{||n} + \underbrace{\varphi_2'' \times \varphi'}_{\perp n}$$

Утв

Следующие определения геодезической линии эквивалентны:

1. $k_g = 0$
2. Соприкасающая пл-ть содержит $\overline{n}$
3. Соприкасающая пл-ть = кас. пл-ть к пов-ти
4. $k = k_n$

Упр

Д-ть