ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО

0.1 18.11.2019

0.1.1 Функции комплексных переменных

Опр

$$f : D \to \mathbb{C} \qquad D \subset \mathbb{C}$$

f (компл.) диф. в z_0, если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \qquad D \subset \mathbb{R}^2$

$|z| = \sqrt{x^2 + z^2}$

$f(z) = f(x, y)$

Замечание

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad$ диф. (вещ.) в (x_0, y_0), если:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underset{\in M_2(\P)}{A} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) =$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) =$$

$$= f(z_0) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z - z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{(z - z_0)} \right) + o(|z - z_0|)$$

$$\overline{z - z_0} = x - x_0 - i(y - y_0)$$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} + \overline{o}(1)$$

Если f - вещ. диф., то:

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \exists$ (т.е. f - компл. диф.)

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ - уравнение Коши-Римана

$\Leftrightarrow f = u + iv \qquad u'_x = v'_y \qquad v'_x = -u'_y$

Пример

$$f(x,y) = (y,x)$$

$$f(z) = \overline{z}i = i(x-iy) = y+ix$$

Замечание

f - компл. диф в $z_0 \Leftrightarrow$

$$f(z) = f(z_0) + c(z-z_0) + \overline{o}(|z-z_0|)$$

$$c = f'(z_0)$$

Обозн

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f'_{\overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

f - вещ. диф $\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0)\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) + o(z-x_0)$

Если f вещ диф $\Rightarrow$ f компл. диф. $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$

Опр

f - голоморфна (аналитична) в D, если f компл. диф. в D (регулярная)

Задача

Выяснить, в каких точках компл. дифференцируема $f(z) = x^2y^2$ $(z = x+iy)$

Решение

f - вещ. дифф. $\Rightarrow xy^2 + ix^2y^2 = 0$, тогда комп. диф.
f - диф при x или y равными 0

Задача

$$f(z) = \underbrace{2xy}_{u} - i(\underbrace{x^2-y^2}_{-v})$$

Решение

Снова вещ. диф-мы, потому что мнимые и вещ. части - многочлены

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = 2y = v'_y \\ u'_y = 2x = -v'_x \end{cases} \quad \Rightarrow \text{f диф на } \mathbb{C}$$

Упр

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad |z| < R \qquad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}$$

$$\Rightarrow f \text{ гол. в } |z| < R \text{ и } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

21.11.19

Пример

1. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

   ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО

Опр

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - целая, если f голом. в $\mathbb{C}$

2. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Упр

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$z = x + iy \qquad e^z = e^x(\cos x + i \sin y)$$

$$e^{ix} = \cos c + i \sin x$$

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \qquad R = 1$$

Теорема

f голом. в $D \subset \mathbb{C}$, D - обл. с кус. гл. гран., $f \in C(\overline{D})$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \overset{=dx+idy}{d\xi} = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

Пример

$$\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} = 2\pi i \frac{1}{(z-1)^3}\Big|_{z=-1}$$

$$|z+1| < 1 \qquad \frac{1}{(z-1)^3} \text{ гол. в } |z+1| < 1$$

$$\int\limits_{|\xi+1|=1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi + 1} = 2\pi i f(z) = -\frac{\pi i}{4}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{(\xi - 1)^3} \qquad z = -1$$

Замечание

Γ_+ - обход кривой против часовой
Γ_- - обход кривой по часовой

$$\int_{\Gamma_+} f dz = -\int_{\Gamma_-} f dz$$

В нашем примере (добавим ограниченность f):

$$-\int^{-||} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} = -\int\limits_{\partial(|z+1|>1)} \frac{dz \cdot 1}{(z+1)(z-1)^3} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{z+1}\right)''\Big|_{z=1} = \pi i \frac{2}{2^3} = -\frac{\pi}{4}$$

Пример

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} =$$

$$= -\pi \frac{e + e^{-i}}{2} = -\pi \operatorname{ch} 1$$

$$\Rightarrow \cos iz = \operatorname{ch} z \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z$$

Пример

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z dz}{z \cdot (1-z)^3}$$

$$D = \{|z| < \frac{3}{2}\}$$

$$\frac{1}{z(1-z)^3} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2} + \frac{D}{(1-z)^3}$$

$$A = D = 1$$

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2} \qquad C = 1, \quad B = 1$$