

---

## 1 Базис векторного пространства. Четыре эквивалентных переформулировки определения базиса.

### Опр

Пусть  $V$  - векторное пространство над полем  $K$ , тогда:

1.  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$  - линейно независима, если  $\sum_{\text{почти все } c_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha = 0 \Rightarrow \text{все } c_\alpha = 0$
2.  $\{v_\alpha\}$  - семейство образующих  $V$ , если любой  $v \in V$  - есть линейная комбинация  $\{v_\alpha\}$ , если любой  $v \in V$  есть  $\sum_{\text{почти все } c_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha$

### Опр

Базис - лин. незав. сем-во образующих ( $\bar{0} \notin$  базису)

### Опр

Линейно независимое семейство векторов называется максимальным (по включению), если при добавлении  $\forall$  вектора новое семейство ЛЗ

### Опр

Сем-во образующих называется минимальным по включению, если при выбрасывании  $\forall$  вектора сем-во не является семейством образующих

### Теорема (Равносильные утверждения)

$V$  - в.п. над  $K$ ,  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , следующие условия равносильны:

1.  $\{v_\alpha\}$  - базис  $V$  над  $K$
2.  $\{v_\alpha\}$  - max ЛН семейство
3.  $\{v_\alpha\}$  - min семейство образующих
4.  $\forall v \in V$  единственным образом представим в виде лин. комбинации векторов из  $\{v_\alpha\}$

### Док-во

(1  $\Rightarrow$  2):

Базис  $\Rightarrow$  ЛН.

Добавим  $v \in V$  к  $\{v_\alpha\}$ :  $v = \sum_{\text{Почти все } c_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha$ ,

но тогда  $-v + \sum_{\text{Почти все } c_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha = 0 \Rightarrow$  новое семейство ЛЗ  $\Rightarrow \{v_\alpha\}$  - ЛЗ

(2  $\Rightarrow$  1):

---

$\{v_\alpha\}$  - max ЛН

$\Rightarrow$  при добавлении  $\forall v \in V \exists c \neq 0 : 0 = cv + \sum_{\text{Почти все } c_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha$

$\Rightarrow v = \sum_{\text{Почти все } c_\alpha = 0} (c^{-1}c_\alpha)v_\alpha$  в силу произвольности  $v$ ,  $\{v_\alpha\}$  - базис.

(1  $\Rightarrow$  3):

$\{v_\alpha\}$  - базис  $\Rightarrow$  семейство образующих. Пусть  $v \in \{v_\alpha\}$ .

Если бы  $\{v_\alpha\}$  без  $v$  было бы семейством образующих,

то  $v = \sum_{\text{п.в. } c_\alpha = 0, v \notin \{v_\alpha\}} c_\alpha v_\alpha$ , но тогда  $0 = -v + \sum_{\text{п.в. } c_\alpha = 0, v \notin \{v_\alpha\}} c_\alpha v_\alpha$

(3  $\Rightarrow$  1):

$\{v_\alpha\}$  - min семейство образующих, нужно проверить что ЛН.

Пусть ЛЗ, тогда  $\sum_{\text{п.в. } c_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha = 0 \Rightarrow c_{\alpha_0} \neq 0$ .

Но тогда  $v_{\alpha_0} = \sum_{\text{п.в. } c_\alpha = 0} (c_{\alpha_0}^{-1}c_\alpha)v_\alpha$ , противоречие с min сем-ом обр.

(4  $\Rightarrow$  1):

4 формально сильнее

(1  $\Rightarrow$  4):

$$v = \sum_{\text{п.в. } c_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha = \sum_{\text{п.в. } c'_\alpha = 0} c'_\alpha v_\alpha \Rightarrow 0 = \sum_{\text{п.в. } c_\alpha - c'_\alpha = 0} c_\alpha v_\alpha$$

В силу единственности разложения нуля получаем  $c_\alpha = c'_\alpha \forall \alpha$

---

## 2 Конечномерные пространства. Всякое линейно независимое семейство конечномерного пространства можно дополнить до базиса. Существование базиса конечномерного пространства.

### Опр

$V$  - в.п. над полем  $K$ ,  $V$  называется конечномерным, если в  $V$  есть конечное сем-во образующих.

### Пример

$\mathbb{C}$  - ВП не являющееся конечномерным.

$V = \{(c_1, c_2, \dots), \text{ не все } c_i = 0\}$

Сложение, умножение на скаляр - некоординатно.

$V$  - ВП над  $\mathbb{C}$ , пусть  $v_1, \dots, v_k \in V$ ,  $v_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots)$ , почти все  $c_{ij} = 0$

$\exists N : \forall j > N, \forall i \ c_{ij} = 0$

### Теорема

Всякое линейно независимое сем-во конечномерного пространства можно дополнить до базиса.

### Док-во

1)  $\{v_\alpha\}$  - ЛН  $\Rightarrow$  либо порождает  $V$ , либо можно дополнить с сохранением условия ЛН.

То есть линейная оболочка  $\{\sum c_\alpha v_\alpha\}$  либо равна  $\forall v \in V$ , тогда  $\{v_\alpha\}$  - семейство образующих  $V$ , либо неравна, тогда  $v$  и  $\{v_\alpha\}$  ЛН и можно им дополнить

2)  $V$  - конечномерно, пусть  $u_1, u_2, \dots, u_m$  - конечное семейство образующих  $V$ , тогда если  $v_1, v_2, \dots, v_n$  - его ЛК и  $m > n$ , то  $\{u_\alpha\}$  - ЛЗ  $\Rightarrow$  всякое ЛН семейство из  $V$  содержит  $\leq m$  векторов. Значит добавление векторов оборвётся.

### Следствие

Во всяком конечномерном в.п. есть базис.

### Док-во

Пустое сем-во ЛН

Дополним до базиса

---

### 3 Всякое семейство образующих конечномерного пространства содержит базис. Существование базиса конечномерного пространства.

#### Теорема

$V$  - конечномерное в.п. над  $K$

Всякое конечномерное сем-во образующих содержит базис.

#### Док-во

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_k$  - семейство образующих  $V$ . Если оно ЛН, то базис.

Если ЛЗ, то  $\exists i: v_i$  - линейная комбинация остальных

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k\}$  - семейство образующих, а т.к. семейство конечно, то процесс выкидывания "оборвётся" и на каком-то шаге получится ЛН зависимое семейство, то есть базис.

#### Теорема

Во всяком конечномерном в.п. есть базис

#### Док-во

Возьмём конечное семейство образующих, по теореме оно содержит базис.

---

#### 4 Подпространства векторного пространства. Подпространство конечномерного пространства конечномерно.

##### Опр

$V$  - в.п над полем  $K$ ,  $U \neq \emptyset$  - подпр-во  $V$  (записывается  $U \subseteq V$ ),  
если  $U$  - само явл. в.п. над  $K$

##### Предположение (1)

$$\emptyset \neq U \subseteq V \quad U \text{ - подпр-во } V \Leftrightarrow$$

1.  $\forall u_1, u_2 \in U : \quad u_1 + u_2 \in U$
2.  $\forall u \in U, \forall a \in K \quad au \in U$

##### Док-во

( $\Rightarrow$ )

По определению ВП.

( $\Leftarrow$ )

Операции сложения и умножения на скаляр определены на  $U$ . Осталось проверить аксиомы ВП:

1.  $\forall x, y \in U \quad x + y = y + x$  по опр. сложения
2.  $\forall x, y, z \in U \quad (x + y) + z = z + (y + z)$ , аналогично
3. Т.к.  $U \neq \emptyset$ , то  $\exists u \in U$ .  $0_V = u + (-1)u$ .

По условию теоремы следует, что  $0 \in U$ , так как  $u, (-1)u, u + (-1)u \in U$ .  $\forall u \in U: 0 + u = u, u + 0 = u$

4.  $\forall u \in U \quad \exists -u = (-1)u, u - u = 0$

Остальные 4 аналогично.

##### Предположение (2)

$V$  - конечномерное в.п над  $K$

$$U \subseteq V \Rightarrow U \text{ - конечномерное}$$

##### Док-во

$\{\}$  - пустое семейство.

Будем добавлять к нему вектора из  $U$  с сохранением ЛН, пока не получим семейство образующих. Причем в  $V$  есть конечное семейство ЛН образующих.

Значит так как векторов в семействе  $U$  не может быть больше, чем в семействе  $V$ , то там тоже их конечное количество.

---

## 5 Теорема о мощности базиса конечномерного пространства. Размерность пространства.

### Теорема

$V$  - конечномерное пространство

$\{v_1, \dots, v_n\}, \{u_1, \dots, u_m\}$  - базисы  $V$  над  $K$

$$\Rightarrow n = m$$

### Док-во

$u_1, \dots, u_m$  - лин.комб  $v_1, \dots, v_n$

$\Rightarrow$  по т. о линейной зависимости лин. комбинаций

$$m \leq n \text{ и аналогично } m \geq n \Rightarrow m = n$$

### Опр

Размерность конечномерного пространства - размерность векторов в его базисе.

Обозначаем как  $\dim_K V = \dim V$

Если пространство не конечно, то пишем  $\dim V = \infty$

---

**6 Координаты вектора в данном базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат при замене базиса. Матрица преобразования координат.**

**Теорема**

Пусть  $V$  - ВП над  $K$ ,  $n = \dim_K V < \infty$ ,  $v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$  над  $K$ .

Тогда если  $v \in V$ , то  $\exists!$  набор  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

**Опр**

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  будем называть координатами  $v$  в базисе  $\{v_1, \dots, v_n\}$  и записывать как  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ , причем  $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$

**Док-во**

Пусть  $v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$

$v'_1, \dots, v'_n$  - другой базис  $V$

$$v'_i = c_{1i}v_1 + \dots + c_{ni}v_n$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c_{1n} & & & c_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица перехода от базиса}$$

$(v_1, \dots, v_n)$  к базису  $(v'_1, \dots, v'_n)$

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

$$v_i = b_{1i}v'_1 + \dots + b_{ni}v'_n$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{n1} \\ b_{12} & & \\ & & \\ b_{1n} & & b_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица перехода от базиса } (v'_1, \dots, v'_n)$$

к базису  $(v_1, \dots, v_n)$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$v = a'_1 v'_1 + \dots + a'_n v'_n$$

$C$  - матрица перехода от  $(v_1, \dots, v_n)$  к  $(v'_1, \dots, v'_n)$

---


$$C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{1i} & & c_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & & & c_{nn} \end{pmatrix} = D - \text{матрица преобразования координат}$$

Теорема (в указанных выше обозначениях)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

Док-во

$$v = (a'_1, \dots, a'_n) \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = (a'_1, \dots, a'_n) \cdot C \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$v = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

В силу единственности разложения по базису

$$(a_1, \dots, a_n) = (a'_1, \dots, a'_n) \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$



## 7 Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения.

### Опр

$V$  - ВП над  $K$ ,  $U_1, \dots, U_m \subseteq V$

Пересечение:  $\bigcap_{i=1}^n U_i = \{v \in V | v \in U_1, \dots, v \in U_n\}$

Сумма:  $U_1 + \dots + U_n = \{v \in V | \exists u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n : v = u_1 + \dots + u_n\}$

### Теорема

1. Сумма  $U_1 + \dots + U_m$  является подпространством

$$0 = 0 + \dots + 0 \in U_1 + \dots + U_m \Rightarrow \text{сумма} \neq \emptyset$$

$\forall u, v \in U_1 + \dots + U_m$ :

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_m$$

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_m$$

$$u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(u_m + v_m)}_{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$$

умножение на скаляр аналогично

2. Пересечение является подпространством

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \ni u, v \quad a \in K$$

$$\begin{array}{ll} \forall i & u + v \in U_i \\ & u + v \in \bigcap_{i=1}^n U_i \\ & au \in U_i \\ & au \in \bigcap_{i=1}^n U_i \end{array}$$

не пусто, т.к.:

$$0_V \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq V$$

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq U_1 \subseteq U_1 + U_2 \supseteq U_2 \supset \bigcap_{i=1}^n U_i$$

## Теорема

$U_1, U_2 \subseteq V$   $U_1, U_2$  - конечномерные

Тогда  $U_1 \cap U_2$  и  $U_1 + U_2$  - конечномерны

и  $\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

## Док-во

$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ ,  $U_1$  - конечномерно

$\Rightarrow U_1 \cap U_2$  - конечномерно

$w_1, \dots, w_r$  - базис  $U_1 \cap U_2$ , ЛНЗ сем-во в  $U_1$

Дополним до базиса  $U_1$ :

$w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s$  - базис  $U_1$

Аналогично  $w_1, \dots, w_r$  дополним до базиса  $U_2$ :

$w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_t$  - базис  $U_2$

Проверим, что  $w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t$  - базис  $U_1 + U_2$ :

1. Семейство образующих

$$z \in U_1 + U_2 \quad z = z_1 + z_2 \quad z_1 \in U_1 \quad z_2 \in U_2$$

$$z_1 = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s$$

$$z_2 = c_1 w_1 + \dots + c_r w_r + d_1 v_1 + \dots + d_t v_t$$

$$z = (a_1 + c_1)w_1 + \dots + (a_r + c_r)w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s + d_1 v_1 + \dots + d_t v_t$$

$$\Rightarrow w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t - \text{сем-во образующих}$$

2. ЛНЗ

$$(*) 0 = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s + c_1 v_1 + \dots + c_t v_t$$

$$z = \underbrace{a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s}_{\in U_1} = \underbrace{-c_1 v_1 - \dots - c_t v_t}_{\in U_2}$$

$$z \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow z = d_1 w_1 + \dots + d_r w_r =$$

$$= d_1 w_1 + \dots + d_2 w_2 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_s$$

В силу единственности разложения по базису  $U_1$

$$b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$$

---


$$\text{Из } (*) \Rightarrow a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + c_1 v_1 + \dots + c_t v_t = 0$$

т.к.  $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_t$  - базис  $U_2$ , то

$$a_1 = \dots = a_r = c_1 = \dots = c_t = 0$$

$\Rightarrow w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t$  - ЛНЗ

Знаем,

$$\dim(U_1) = r + s$$

$$\dim(U_2) = r + t$$

$$\dim(U_1 \cap U_2) = r$$

$$\dim(U_1 + U_2) = r + t + s$$

Значит,

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

---

## 8 Прямая сумма подпространств. Эквивалентные переформулировки понятия прямой суммы подпространств.

$V$  - в.п. над  $K$ ,  $U_1, \dots, U_m \subseteq V$

### Опр

$U_1 + \dots + U_m$  назыв. прямой суммой, если любой  $z \in U_1 + \dots + U_m$  единственным образом представим в виде суммы:

$$z = u_1 + u_2 + \dots + u_m \quad u_i \in U_i \quad i = 1, \dots, m$$

Обозначение:  $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$

### Замечание

Сумма  $U_1 + \dots + U_m$  - прямая  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = u_1 + \dots + u_m \quad u_i \in U_i \Rightarrow u_1 = \dots = u_m = 0$$

### Док-во

( $\Rightarrow$ )

очевидно

( $\Leftarrow$ )

$$z \in U_1 + \dots + U_m$$

$$z = u_1 + \dots + u_m = v_1 + \dots + v_m$$

$$0 = z - z = (u_1 - v_1) + \dots + (u_m - v_m)$$

$\in U_1 \qquad \qquad \qquad \in U_m$

$$\forall i \quad u_i - v_i = 0 \text{ т.е. } u_i = v_i$$

### Предположение (1)

Сумма  $U_1 + U_2$  - прямая  $\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$

### Предположение (2)

Сумма  $U_1 + U_2$  - прямая  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  объединение базисов  $U_1$  и  $U_2$  - есть базис  $U_1 + U_2$

### Предположение (3)

$U_1 + \dots + U_m$  - прямая  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m \quad U_i \cap (U_i + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_m) = \{0\}$$

### Предположение (4)

Сумма  $U_1 + \dots + U_m$  - прямая  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  объединение базисов  $U_i \quad i = 1, \dots, m$  - базис  $U_1 + \dots + U_m$

---

## 9 Построение кольца многочленов.

### Опр

$R$  - комм. кольцо с 1

$$R[x] := \{(a_0, a_1, a_2, \dots) : a_i \in R \quad i = 0, \dots \text{ п.в. } a_i = 0\}$$

$$(a_0, a_1, \dots), (b_0, b_1, \dots) \in R[x]$$

Сложение:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

Замечание:

$$\begin{aligned} \forall n > N \quad a_i = 0 \\ \forall m > M \quad b_i = 0 \end{aligned} \Rightarrow \forall i > \max(N, M) \quad a_i + b_i = 0$$

Умножение:

$$(a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$$

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Замечание:

$$\forall n > N \quad a_n = 0$$

$$\forall m > M \quad b_m = 0$$

$$\forall k > N + M \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^N a_i b_{k-i} + \sum_{i=N+1}^k a_i b_{k-i} = 0$$

$$i \leq N \quad k - i \geq k - N > N + M - N = M$$

### Теорема

$$(R[x], +, \cdot) - \text{комм. кольцо с 1}$$

### Док-во (ассоциативность умножения)

$$A = (a_0, a_1, \dots), \quad B = (b_0, b_1, \dots), \quad C = (c_0, c_1, \dots)$$

$$(AB)C \stackrel{?}{=} A(BC)$$

$$\text{Пусть } AB = D, \quad BC = E, \quad (AB)C = F, \quad A(BC) = G$$

$$\begin{aligned}
f_n &= \sum_{i=0}^n d_i c_{n-i} = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) c_{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} c_{n-i} = \sum_{j=0}^n a_j \left( \sum_{i=j}^n b_{i-j} c_{n-i} \right) \underset{\text{напр. движения индекса изменилось}}{=} \\
&= \sum_{j=0}^n a_j \left( \sum_{k=0}^{n-j} b_k c_{n-j-k} \right) = \sum_{j=0}^n a_j c_{n-j} = g_n
\end{aligned}$$

## Упр

Остальное д-ть самостоятельно

## Опр

Введем 0 и 1:

$$0 = (0, 0, \dots)$$

$$1 = (1, 0, \dots)$$

Нетрудно проверить, что они уд-ют необходимым свойствам

$R[x] \supset \{(a, 0, \dots); a \in R\}$  - подкольцо изоморфное R

$$(a, 0, \dots) + (b, 0, \dots) = (a + b, 0, \dots)$$

$$(a, 0, \dots) \cdot (b, 0, \dots) = (ab, 0, \dots)$$

$$(a, 0, \dots) = a \text{ (обозначение)}$$

$$x = (0, 1, 0, \dots)$$

$$x^i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots)$$

$$\begin{aligned}
(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) &= (a_0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, a_n, 0, \dots) = \\
&= a_0 \cdot 1 + a_1(0, 1, \dots) + \dots + a_n(0, \dots, 1, \dots) =
\end{aligned}$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

---

**10 Степень многочлена. Свойства степени. Область целостности. Кольцо многочленов над областью целостности есть область целостности.**

**Опр**

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$$

Наибольшее  $m$ , т.ч.  $a_m \neq 0$  называется степенью  $f$  ( $\deg f - degree$ )  
 $\deg 0 = -\infty$

**Опр**

Ком. кольцо  $R$  с 1 назыв. областью целостности (или кольцом без делителей 0)

$$\text{Если } \forall a, b \in R \quad (ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0)$$

$$\forall a, b \in R (a \neq 0 \quad b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0)$$

**Примеры**

1.  $\mathbb{Z}$  - о.ц.
2. Любое поле - о.ц
3.  $\mathbb{Z}/_m\mathbb{Z}$  - не всегда о.ц.  $[a][b] = [m] = [0]$

**Теорема (Свойства степени)**

1.  $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$

$$\text{Если } \deg f \neq g, \text{ то } \deg(f, g) = \max(\deg f, \deg g)$$

2.  $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$

$$\text{Если } R - \text{о.ц, то } \deg(fg) = \deg f + \deg g$$

**Док-во**

- 1)  $N = \deg f \quad M = \deg g$

$$f = \sum_{i=0}^N a_i x^i \quad g = \sum_{i=0}^M b_i x^i$$

$$\forall n > \max(N, M) \quad a_n + b_n = 0 \Rightarrow \deg(f + g) \leq \max(N, M)$$

---

Равенства в общ. случае нет

$$\text{Если } N = M \quad a_N = -b_N \Rightarrow a_N + b_N = 0$$

$$\text{Если } N \neq M \quad \sqsubset N < M$$

$$a_M + b_M = 0 + b_M = b_M \neq 0$$

$$2) fg = \sum_{i=0} c_i x^i \quad c_i = 0 \text{ для всех } i > N + M$$

$$\deg(fg) \leq N + M = \deg f + \deg g$$

$$c_{N+M} = a_N b_M \quad \text{в общем случае:}$$

$$\text{Если } R \text{ не о.ц, } a_N \neq 0 \quad b_M \neq 0 \text{ то } a_N \cdot b_M \text{ м.б. } = 0$$

$$\text{Если } R - \text{о.ц, то } a_N \neq 0 \quad b_M \neq 0 \Rightarrow c_{N+M} \neq 0$$

$$\Rightarrow \deg fg = \deg f + \deg g$$

### Следствие

$$\text{Если } R - \text{о.ц, то } R[x] - \text{о.ц}$$

### Док-во

$$f, g \in R[x] \quad f \neq 0 \quad g \neq 0$$

$$\deg f \geq 0 \quad \deg g \geq 0$$

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{в } fg \text{ есть хотя бы один ненулевой коэф.}$$

$$\Rightarrow fg \neq 0$$

### Замечание

$$\text{Если } K - \text{поле} \quad K[x] - \text{о.ц}$$

### Замечание

$$R \rightarrow R[x_1] \text{ с помощью индукции сделаем вывод}$$

$$R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$$

$$R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n]$$

$$\Rightarrow R - \text{о.ц} \Rightarrow R[x_1, \dots, x_n] - \text{о.ц}$$



## 11 Теорема о делении с остатком в кольце многочленов.

### Теорема

$R$  - комм. к. с ед.,  $f, g \in R[x]$ ,

$$g = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \in R^* \text{ обр. элем.}$$

Тогда  $\exists!$  мн-ны  $q$  и  $r$  такие, что:

$$f = q \cdot g + r, \quad \deg r < \deg g$$

### Док-во

(Существование):

Индукция по  $m = \deg f$

База.  $\deg f < \deg g$

$$h := 0, \quad r := f$$

$$f = g \cdot 0 + f$$

Инд. переход. Пусть  $m \geq n$  и утверждение доказано для всех многочленов меньшей степени  $< m$

$$f = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

$$f_1 := f - a_n^{-1}b_mx^{m-n}g = \cancel{b_mx^m} + \dots - (\cancel{a_n^{-1}b_ma_nx^m} + \dots) \Rightarrow \deg f_1 < m$$

$$f_1 = gh_1 + r_1, \quad \text{по инд.п. } \deg r_1 < \deg g$$

$$f = f_1 - a_n^{-1}b_mx^{m-n}g = \underbrace{(h_1 + a_1^{-1}b_mx^{m-n})}_{=h}g + \underbrace{r_1}_{=r}$$

$$\deg r = \deg r_1 < g$$

(Единственность):

$$f = gh + r = g\tilde{h} + \tilde{r}, \quad \deg r < \deg g, \quad \deg \tilde{r} < \deg g$$

$$g(\tilde{h} - h) = r - \tilde{r} \quad \deg(r - \tilde{r}) < \deg g$$

Если  $\tilde{h} - h \neq 0$ , то положим  $d = \deg(\tilde{h} - h)$

$$\tilde{h} - h = \underset{\neq 0}{c_d}x^d + \dots$$

$$g(\tilde{h} - h) = \underset{\neq 0}{a_nc_d}x^{n+d} + \dots$$

(Если  $a_nc_d = 0 \Rightarrow c_d = a_n^{-1}a_nc_d = a_n^{-1}0 = 0$ , противоречие)

$$\deg(r - \tilde{r}) = \deg g(\tilde{h} - h) \geq g, \text{ но } \deg(r - \tilde{r}) < \deg g$$

### Пример

В кольце  $\mathbb{Z}[x]$

$x^2 + 1$  нельзя поделить на  $2x + 1$

---

## 12 Корни многочлена. Теорема Безу.

### Опр

$R$  - ком. кольцо с 1

$$f \in R[x] \quad f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Для данного мн-на определим отображение из  $R$  в  $R$ :

$$c \rightarrow a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n = f(c)$$

### Замечание

Разные мн-ны могут задавать одно и то же отображение

$$\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \quad f = 0 \quad 0 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 0$$

$$f = x^2 + x \quad 0 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 0$$

$$(f + g)(c) = f(c) + g(c)$$

$$(f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c)$$

### Опр

$f \in R[x] \quad c$  - корень  $f$ , если  $f(c) = 0$

### Теорема (Безу)

$f \in R[x] \quad c \in R$ , тогда:

$$\exists q \in R[x] \quad f = (x - c)q + f(c)$$

### Док-во

$g = x - c$ , по т. о делении с остатком:

$$\exists q, r \in R[x] : f = (x - c)q + r$$

$$\deg r < \deg g = 1$$

$$\deg r \leq 0 \Rightarrow r \in R$$

$$f(c) = (c - c) \cdot q(c) + r = r \Rightarrow f = (x - c)q + f(c)$$

### Следствие

$$c \text{ - корень } f \Leftrightarrow (x - c) \mid f$$

### Док-во

$(\Rightarrow)$ :

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c) = (x - c)q(x) \Rightarrow (x - c) \mid f$$

$(\Leftarrow)$ :

$$f(x) = (x - c)q(x) \Rightarrow f(c) = (c - c)q(c) = 0$$

---

### 13 Кратные корни многочлена. Теорема о числе корней многочлена над полем.

#### Опр

$K$  - поле  $f \in K[x]$

Тогда  $a$  - корень  $f$  кратности  $k$ , если  $(x - a)^k \mid f$  и  $(x - a)^{k+1} \nmid f$

$$(\text{т.е. } f(x) = (x - a)^k \cdot g(x) \quad (x - a) \nmid g \quad (\Leftrightarrow g(a) \neq 0))$$

#### Замечание

$a$  - корень  $f_1$  кратности  $k_1$ ,  $a$  - корень  $f_2$  кратности  $k_2$

$$\Rightarrow a \text{ - корень } f_1 \cdot f_2 \text{ кратности } k_1 + k_2$$

#### Док-во

$$f_1(x) = (x - a)^{k_1} g_1(x) \quad g_1(a) \neq 0 \quad f_2(x) = (x - a)^{k_2} g_2(x) \quad g_2(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow f_1(x) f_2(x) = (x - a)^{k_1 + k_2} g_1(x) g_2(x)$$

(поле  $K$  - о.ц.)

#### Лемма

$f, g, h \in K[x], \quad b \in K \quad b \text{ - не корень } h$

$$f(x) = h(x)g(x)$$

$b$  - корень  $f \Rightarrow b$  - корень  $g$  той же кратности

#### Док-во

1)  $b$  - корень  $f$  кр.  $l \geq 1 \Rightarrow b$  - корень  $g$  кратности  $\geq l$

Индукция по  $l$ . Б.И.:

$$l = 1 \quad f(b) = 0 \quad h(b)g(b) = 0 \Rightarrow g(b) = 0$$

$b$  - корень  $g \Rightarrow$  корень  $g$  кр.  $\geq 1$

Инд. переход  $(l \rightarrow l + 1)$

$$b \text{ - корень } f \text{ кр. } l + 1 \Leftrightarrow f(x) = (x - b)^{l+1} f_1(x)$$

По предп.  $b$  - корень  $g \quad g(x) = (x - b)g_1(x)$

$$(x - b)^{l+1} f_1(x) = (x - b)g_1(x)h_1(x) \quad (= f(x))$$

---

В обл. целостности можем сократить на ненулевой множитель

$$(x - b)^l f_1(x) = g_1(x)h(x)$$

По инд. предп.  $b$  - корень кратности  $\geq l$

$\Rightarrow b$  - корень  $g$  кр.  $\geq l + 1$  (при перемножении кр-ти складываются)

2)  $f(x) = h(x)g(x)$  и  $b$  - корень  $g$  кр-ти  $k$

$$(x - b)^k \mid g(x) \Rightarrow (x - b)^k \mid f(x)$$

$b$  - корень кр-ти не больше кр-ти корня  $f$

### Теорема

$K$  - поле,  $f \in K[x]$   $f \neq 0$

$\Rightarrow$  число корней с учетом их кратности не превосходит  $\deg f$

### Док-во

Индукция по  $\deg f$

Б.И.:

$\deg f = 0$  корней нет

Инд. переход:

$a$  - корень  $f$  кр.  $k \Rightarrow f(x) = (x - a)^k g(x)$

Пусть  $b \neq a \Rightarrow b$  - корень  $f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b$  - корень  $g$ , причем кратности совпадают (по лемме, т.к.  $(x - b)^k \neq 0$ )

По инд. предп. число корней  $g$  с учетом кратности  $\leq \deg g$

(а это в точности все корни  $f$ , отличные от  $a$ )

Сумм. кр. корней  $f = k + \text{сумм. кр. корней } g \leq k + \deg g = \deg f$

### Замечание

Теор. не верна для  $f \in R[x]$  (в случае произвольного комм. кольца  $R$ )

$$R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$

$$x^2 = [1] \in R[x]$$

корни 1, 3, 5, 7  $\deg f = 2$

### Следствие

Если  $f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0$  для попарно различных  $a_1, \dots, a_n$

И  $n > \deg f$ , тогда  $f = 0$

---

## 14 Функциональное и формальное равенство многочленов.

### Следствие (пред. [теореме](#))

$f, g \in K[x] \quad |K| > \max(\deg f, \deg g),$   
если  $f$  и  $g$  совп. функционально, то  $f = g$

### Док-во

Функ. рав-во:  $\forall a \in K \quad f(a) = g(a) \Rightarrow (f - g)(a) = 0$

$$\deg(f - g) \leq \max(\deg f, \deg g) < |K|$$

по пред. [сл.](#)  $f - g = 0 \Rightarrow f = g$

### Замечание

Для беск. полей из функ. равенства мн-ов следует формальное

## 15 Характеристика поля.

### Опр

$K$  - поле  $1 \in K$

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_n$$

Если  $n \cdot 1 \neq 0$  для всех  $n \geq 1$ , то говорят, что поле  $K$  имеет х-ку 0  
 $\text{char } K = 0$

Если  $\exists n \geq 1 : n \cdot 1 = 0$ , то наименьшее такое положительное  $n$  называют х-кой  $K$

### Примеры

1.  $\text{char } \mathbb{Q} = 0, \quad \text{char } \mathbb{R} = 0, \quad \text{char } \mathbb{C} = 0$

2.  $p$  - простое  $\text{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$

### Теорема

Характеристика поля либо 0, либо простое число

### Док-во

1) не  $\exists n \geq 1 \quad n \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{char } K = 0$

2)  $\exists n : n \cdot 1 = 0$  возьмем наим.  $n$  и покажем, что  $n$  - простое

$\square$   $n$  - сост.  $n = ab \quad 1 < a, b < n$

$$0 = \underbrace{1 + \dots + 1}_n = (\underbrace{1 + \dots + 1}_a)(\underbrace{1 + \dots + 1}_b)$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 + \dots + 1}_a = 0 \text{ или } \underbrace{1 + \dots + 1}_b = 0$$

противоречие с  $\min n$

$\Rightarrow n$  не сост.;  $1 \neq 0 \Rightarrow n \neq 1$

$\Rightarrow n$  - простое

---

**16 Производная многочлена. Свойства производной.  
Многочлены с нулевой производной.**

**Опр**

$K$  - поле

$$f(x) \in K[x]$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n (k a_k) x^{k-1}$$

$$k \cdot a_k = \underbrace{a_k \cdot \dots \cdot a_k}_k$$

**Теорема (Свойства)**

1.  $(f + g)' = f' + g'$

2.  $c \in K \quad (c \cdot f)' = c f'$

3.  $(f \cdot g)' = f' g + g' f$

(a)  $f = x^n \quad g = x^m$

$$(x^{n+m})' = (n+m)x^{n+m-1}$$

$$(x^n)' x^m + x^n (x^m)' = n x^{n-1} \cdot x^m + m x^n \cdot x^{m-1} = (n+m)x^{n+m-1}$$

(b)  $f = x^n \quad g = \sum_{k=0}^m a_k x^k$

$$(f \cdot g)' = \left( \sum_{k=0}^m a_k x^n x^k \right)' = \sum_{k=0}^m a_k (x^n \cdot x^k)' =$$

$$= \sum_{k=0}^m a_k ((x^n)' \cdot x^k + x^n (k x^{k-1})) =$$

$$(x^n)' \sum_{k=0}^m a_k x^k + x^n \left( \sum_{k=0}^m k a_k x^{k-1} \right) = f' g + f g'$$

---

(с)  $f, g$  - произвольные

$$f = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

$$\begin{aligned}(fg)' &= \sum_{k=0}^n b_k (x^k g)' = \left( \sum_k b_k \cdot k x^{k-1} \cdot g \right) + \left( \sum_k b_k x^k \cdot g' \right) = \\ &= f'g + fg'\end{aligned}$$

(d) Ф-ла Лейбница

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)} g^{(k-i)}$$

(е) Если  $\text{char } K = 0 \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow f \in K$   
Если  $\text{char } K = p > 0$  то  $f' = 0 \Leftrightarrow f \in K[x^p]$

$$(\text{т.е. } f = a_0 + a_p x^p + \dots + a_{kp} x^{kp})$$



---

## 17 Теорема о кратности

### Теорема

$K$  - поле  $\text{char } K = 0$

$f \in K[x]$   $\alpha$  - корень  $f$  кр.  $l \geq 1$

тогда  $\alpha$  - корень  $f'$  кр.  $l - 1$

### Замечание

Если  $\text{char } K = p > 0$ , то теор. не верна

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$   $f = x^{2p+1}$   $0$  - корень кр.  $p$

$f' = (2p + 1)x^{2p} + px^{p-1} = x^{2p}$   $0$  - корень кр.  $2p$

## 18 Интерполяционная задача. Существование и единственность решения.

для интерпол. задачи

$$\begin{array}{c|ccc} x & a_1 & \dots & a_n \\ \hline f & y_1 & \dots & y_n \end{array}$$

$\exists!$  решение  $f$  степени  $< n$

### Док-во

1) ед

$f, h$  - решают одну и интер. задачу

$$\deg f, \deg h < n$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad f(a_i) = h(a_i) = y_i \quad f(a_i) - h(a_i) = 0$$

$f - h$  имеет  $\geq n$  корней, а степ.  $< n$

$$f - h = 0 \Rightarrow f = h$$

(теорема о числе корней мн-на)

2) существование

$$1 \text{ сл } f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$$

$$c_0 + c_1a_i + \dots + c_{n-1}a_i^{n-1} = y_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{j>i} (a_j - a_i) \neq 0$$

$A$  - обр.

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

## 19 Интерполяционный метод Ньютона.

Опр

$x$	$a_1$	$a_i \dots a_n$
$f(x)$	$y_1$	$y_i \dots y_n$

$f_{i-1}$  - интерпол. мн-ен степени  $\leq i-1$

и решающий интерпол. задачу для первых  $i$  точек

$$f_0(x) = y_1$$

$$f_0(a_1) = y_1$$

$\square$  построили  $f_{i-1}$  Ищем  $f_i$

$$(f_i - f_{i-1})(a_j) = 0 \quad j = 1, \dots, i$$

$$f_i(x) = f_{i-1}(x) + c_i \cdot (x - a_1) \dots (x - a_i)$$

$$\deg f_i \leq i$$

$$y_{i+1} = f_i(a_{i+1}) = f_{i-1}(a_{i+1}) + c_i(a_{i+1} - a_1) \dots (a_{i+1} - a_i)$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - f_{i-1}(a_{i+1})}{(a_{i+1} - a_1) \dots (a_{i+1} - a_i)}$$

## 20 Интерполяционный метод Лагранжа.

Опр

$x$	$a_1$	$a_{j-1}$	$a_j$	$a_{j+1}$	$a_n$
$f(x)$	0	0	1	0	0

$$L_j(x) = a_j(x - a_1) \dots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \dots (x - a_n)$$

$$L_j(a_j) = 1$$

$$L_j(x) = \frac{(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{(a_j - a_1) \cdot \dots \cdot (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdot \dots \cdot (a_j - a_n)}$$

$L_j(x)$  - интерп. мн-ен Лагранжа

$$L_j(a) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \begin{aligned} \deg L_j(x) &= n - 1 \\ \deg f &\leq n - 1 \end{aligned}$$

$x$	$a_1$	$a_n$
$f(x)$	$y_1$	$y_n$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n y_j L_j(x) \quad f(a_i) = \sum_{j=1}^n y_j L_j(a_j) = y_i L_i(a_i) = y_i$$

Мн-ен Лагранжа исп. в алг. быстрого умножения

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$  алг. умн., который для  $n$ -разрядных чисел требует  $O(n^{1+\varepsilon})$  поразрядных операций

## 21 Делимость и ассоциированность в кольце многочленов над полем.

### Опр

$K$  - поле,  $K[x]$

$f, g \in K[x]$  ассоциирован, если

$$f \mid g \text{ и } g \mid f$$

$$f \sim g : f \text{ и } g \text{ ассоц.}$$

$$0 \sim 0$$

0 с другими не ассоц.

$$f \neq 0 \quad g \neq 0 \quad f \mid g \quad g \mid f$$

$$\deg f \leq \deg g \quad \deg g \leq \deg f$$

$$\Rightarrow \deg f = \deg g$$

$$f = c \cdot g \quad c \in K^* = K \setminus \{0\}$$

$$0 = 1 \cdot 0$$

$$\text{Если } f = c \cdot g, c \in K^* \quad g = c^{-1}f \Rightarrow g \mid f, \quad f \mid g$$

### Следствие

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists c \in K^* \quad f = cg$$

Если  $f \neq 0$ , то в классе ассоц. с  $f$  мн-нов всегда можно выбрать мн-ен со старшим коэф. 1.

Мн-ен со старшим коэф. 1 назыв. унитарным, приведенным

### Замечание

$$f \mid g \quad f \sim f_1 \quad g \sim g_1$$

$$\Rightarrow f_1 \mid g_1$$

$$g = f \cdot h$$

$$cg = f(ch)$$

$$g = (cf)(c^{-1}h)$$

---

## 22 Наибольший общий делитель в кольце многочленов над полем.

Существование и линейное представление.

### Опр

$K$  - поле,  $K[x]$

$f_1, \dots, f_n \in K[x]$

$g$  - НОД  $f_1, \dots, f_n$ , если

$g \mid f_1, \dots, g \mid f_n$

и  $\forall h \quad (h \mid f_1, \dots, h \mid f_n) \Rightarrow h \mid g$

### Замечание

НОД опред. не однозначно, а с точностью до ассоц.

$$\text{НОД}(0, \dots, 0) = 0$$

Если хотя бы один  $f_1 \dots f_n \neq 0$ , то в классе ассоц. с НОД можно выбрать приведенный

### Теорема

$$\forall f_1, \dots, f_n \in K[x]$$

Существует  $g = \text{НОД}(f_1, \dots, f_n)$  и он допускает лин. предствление

$$g = f_1 h_1 + \dots + f_n h_n \text{ для нек. } h_1 \dots h_n \in K[x]$$

### Док-во

$$1) f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0 \quad \text{НОД}(0, \dots, 0) = 0$$

$$\text{Положим } h_1 = \dots = h_n = 1$$

$$2) \exists i \quad f_i \neq 0$$

$$I = \{f_1 h_1 + \dots + f_n h_n : h_1 \dots h_n \in K[x]\}$$

$$I \neq \{0\} \quad 0 \neq f_i \in I$$

$g$  - мн-ен наим. степени в  $I \setminus \{0\}$

Утверждается, что  $g = \text{НОД}(f_1, \dots, f_n)$

---


$$\begin{aligned}
f_j &= g \cdot u_j + r_j & r_j &= 0 \text{ или} \\
r_j &= -g \cdot u_j + f_i = & \deg r_j &< \deg g \\
&= -h_1 u_j f_1 - h_2 u_j f_2 + (-h_j u_j + 1) f_i - \dots \\
g &= h_1 f_1 + \dots + h_n f_n & r_j &\in I
\end{aligned}$$

Т.к.

$\deg r_j < \deg g$  а степень  $g$  наим в  $I \setminus \{0\}$

то  $r_j = 0$

$$f_j = g u_j \quad g \mid f_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$h \mid f_i, \dots, h \mid f_n$$

$$g = \underbrace{f_1 h_1 + \dots + f_n h_n}_{\ddot{h}} : h \Rightarrow h \mid g$$

**23 Взаимно простые многочлены. Свойства взаимно простых многочленов.** Если многочлен делит произведение двух многочленов и взаимно прост с первым сомножителем, то он делит второй сомножитель.

### Опр

$f_1, \dots, f_n \in K[x]$  назыв. взаимно простыми, если  $\text{НОД}(f_1, \dots, f_n) \sim 1$

### Теорема (Свойства)

1. Если  $g \sim \text{НОД}(f_1, \dots, f_n)$  (не все  $f_i = 0$ )

то  $\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}$  - взаимно просты

2.  $f_1, \dots, f_n$  - вз. просты  $\Leftrightarrow 1$  допускает лин. представление

$$1 = h_1 f_1 + \dots + h_n f_n \quad h_i, \dots, h_n \in K[x]$$

### Док-во

См. док-ва для  $\mathbb{Z}$  (Спасибо, Всемиров)

### Теорема

$f \mid gh$  и  $f$  и  $g$  - вз. просты  $\Rightarrow f \mid h$

### Док-во

$$\exists u, v \in K[x]$$

$$fu + gv = 1$$

$$\underset{\ddot{f}}{f} u h + g \underset{\ddot{f}}{h} v = h \Rightarrow h \underset{\ddot{f}}{:} f$$



---

## 24 Неприводимые многочлены. Теореме о разложении многочлена в произведение неприводимых (существование).

### Опр

$$K[x] = \{0\} \cup K^* \cup \{\text{мн-ны ст } \geq 1\}$$

$f \in K[x] \setminus K$  назыв. сост., если (или приводимым)

$$f = gh \quad 1 \leq \deg g, \deg h < \deg f$$

в противном случае  $f$  - назыв. неприводимым

$f$  - неприводим, если ( $f = gh \Rightarrow \deg h = 0$  или  $\deg g = 0$ )

### Опр

$f$  - неприв.  $\Leftrightarrow$  все делители  $f$  - это константы и мн-ны  $\sim f$

### Примеры

$x - a$  неприводим при любом  $a$

$x^2 + 1$  неприводим в  $\mathbb{R}[x]$

$x^2 + 1$  в  $\mathbb{C}[x]$  приводим  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

В  $\mathbb{R}[x]$   $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$  - приводим, но корней нет

Если  $g \mid f$   $\deg f \geq 2$  есть корень в  $K$ ,

то  $f$  - приводим в  $K[x]$

$$f = (x - a)g \quad (\text{по т. Безу})$$

Обратное неверно. Но для мн-нов степени 2 и 3 неприводимость в  $K[x]$  равносильна отсутствию корней в  $K$

### Теорема

$f \in K[x]$   $f$  - неприводим

$$f \mid g_1 \cdot \dots \cdot g_n \Rightarrow \exists i : f \mid g_i$$

### Теорема (Основная теорема арифметики в кольце многочленов.)

Всякий ненулевой  $f \in K[x]$  может быть представлен в виде

$$c \cdot \prod_{i=1}^n g_i$$

$c \in K^*$ , а все  $g_i$  - приведенные неприводимые мн-ны. Причем такое произведение ед. с точностью до порядка сомножителей.

### Замечание

Для  $f = c \in K^* \quad n = 0$

### Лемма (1)

Всякий  $f \quad \deg f \geq 1$  делится хотя бы на один неприводимый.

### Док-во

$f$  - непр - все доказано

Если приводим, то  $f = f_1 \cdot g_1 \quad 1 \leq \deg f_1 < \deg f$

Если  $f_1$  неприв, то делитель найден

Если приводим  $f_1 = f_2 g_2 \quad q \leq \deg f_2 \leq \deg f_1$

$\deg f > \deg f_1 > \dots$  процесс оборвется

$\Rightarrow$  Найдем неприв. делитель  $f$

### Док-во (Существование)

Инд. по  $\deg f$

1)  $\deg f = 0 \quad f = c \in K^* \quad f = c \cdot (\prod_{i=1}^0 g_i)$  инд. переход  $\deg f > 0$

по лемме  $\exists$  неприв.  $g_1 \quad g_1 \mid f$

не умоляя общности  $g_1$  - приведенный (с коэф. 1)

$$f = g_1 f_1 \quad \deg f_1 < \deg f - \deg g_1 < \deg f$$

По инд. предп.

$$f_1 = c \prod_{i=2}^n g_i \quad g_i - \text{прив. неприв.}$$

$$f = f_1 g_1 = c \prod_{i=1}^n g_i$$

## 25 Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых (единственность).

Док-во

$$(*) \quad f = c \prod_{i=1}^n g_i = \tilde{c} \prod_{i=1}^m \tilde{g}_i$$

$\Rightarrow n = m \quad c = \tilde{c}$  иначе перенумеруем сомнож.  $g_i = \tilde{g}_i$

Не умоляя общ.  $n \leq m$

Инд. по  $n$

$$n = 0 \quad c = \tilde{c} \prod_{i=1}^n \tilde{g}_i$$

$$\Rightarrow m = 0 \quad \tilde{c} = c$$

Инд. переход

$$g_n \mid \tilde{c} \prod_{i=1}^m \tilde{g}_i \Rightarrow \exists i \quad g_n \mid \tilde{g}_i$$

$$\tilde{c} \neq 0$$

Не умоляя общности  $i = m$  (иначе перенумеруем)

$$g_n \mid \widetilde{g_m} \Rightarrow g_n = \widetilde{g_m}$$

В  $(*)$  сократим на  $g_n$

$$c \prod_{i=1}^{n-1} g_i = \tilde{c} \prod_{i=1}^{m-1} \tilde{g}_i \quad n-1 \leq m-1$$

По инд. предп.  $n-1 = m-1 \quad (\Rightarrow n = m)$

$$c = \tilde{c} \text{ (после перенумерования)}$$

$$g_i = \tilde{g}_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$g_n = \tilde{g}_n$$

---

## 26 Алгебраически замкнутые поля. Эквивалентные переформулировки.

### Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.(б.д.)

#### Теорема

$\square K$  - поле, рассмотрим  $K[x]$

Следующие условия равносильны

1. Все неприводимые в  $K[x]$  - это в точности линейные мн-ны
2. Всякий мн-н  $f \in K[x], \deg f > 0$  раскладывается в произведение лин. множителей
3. Всякий  $f \in K[x], \deg f > 0$  делится на линейный
4. Всякий  $f \in K[x], \deg > 0$  имеет в  $K$  хотя бы 1 корень
5. Всякий  $f \in K[x], \deg f > 0$  имеет в  $K$  в точности  $n = \deg f$  корней с учетом кратности

#### Опр

Если для  $K \subset K[x]$  выполнено любое из равносильных усл., то  $K$  назыв. алгебр. замкн.

#### Примеры

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$  не алг. замкнуты

Любое конечное поле не алг. замкнуто

$$|F| = q \quad \deg f = n > q$$

#### Теорема (б.д.)

$\mathbb{C}$  - алг. замк.

#### Следствие

$$f \in \mathbb{C}[x] \quad \deg f > 0$$

$$f = c \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{d_i} \quad a_i, c \in \mathbb{C}$$

---

## 27 Неприводимые многочлены над полем вещественных чисел. Теорема о разложении многочлена с вещественными коэффициентами в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ .

### Опр

Неприводимы:

$$x - c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + ax + b \quad a^2 - 4b < 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ (нет корней)}$$

### Теорема

Всякий неприв. в  $R[x]$  ассоциирован с лин. или квадратичным с отр. дискр.

### Следствие

$$f \in \mathbb{R}[x] \quad f \neq 0$$

$$f = c \prod_{i=1}^m (x - c_i)^{d_i} \prod_{j=1}^k (x^2 + a_j x + b_j)^{l_j} \quad a_j^2 - 4b_j < 0$$

### Лемма

$$f \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$$

Если  $z \in \mathbb{C}$  - корень  $f$ , то  $\bar{z}$  - корень  $f$

### Док-во

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

$$\overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \bar{0} = 0 \text{ (сопряжение)}$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n}$$

$$a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n = f(\bar{z})$$

## 28 Поле частных области целостности. Поле частных кольца многочленов (поле рациональных функций).

### Опр

$R$  - комм. кольцо с 1, о.ц.

Хотим построить поле  $K$ , содержащее подкольцо изоморфное  $R$ , состоящее из "дробей"

$$X = R \times (R \setminus \{0\}) = \{(a, b) : a \in R, b \in R, b \neq 0\}$$

На  $X$  введем отношение эквив.

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ если } ad = bc$$

$\sim$  - отношение эквив.

$$(a, b) \sim (a, b)$$

$$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$$

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (c, d) \\ (c, d) \sim (e, f) \end{aligned} \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$$

$$\frac{a}{b} = [(a, b)] \text{ - класс эквив.}$$

$K = X_{/\sim}$  На  $K$  введем структуру поля

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0 \quad d \neq 0 \Rightarrow bd \neq 0 \quad (ac, bd) \in X$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (ad + bc, bd) \in X$$

Корректность определения (независимость от выбора представителя в классе)

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1} \quad ab_1 = ba_1 \quad cd_1 = dc_1$$

$$(ac, bd) \sim (a_1c_1, b_1d_1) \quad acb_1d_1 = bda_1c_1$$

$$(ad + bc, bd) \sim (a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1)$$

$$adb_1d_1 + bcb_1d_1 = bda_1d_1 + bdb_1c_1$$

$$\begin{aligned} & ab_1 = ba_1 \mid \cdot dd_1 \\ + & cd_1 = dc_1 \mid \cdot bb_1 \end{aligned}$$

---

## Теорема

$K, +, \cdot$  - поле

## Опр

Поле  $K$  назыв. полем частных кольца  $R$

## Примеры

$\mathbb{Q}$  - поле частных  $\mathbb{Z}$

$K[x]$  - о.ц

Поле частных  $K[x]$  обознач.  $K(x)$  и назыв. полем рац. дробей или полем рац. функций

Рац. функ. не есть функции в смысле отобр.

---

## 29 Простейшие дроби. Разложение рациональной функции в сумму многочлена и простейших дробей. (существование).

### Опр

$K(x)$   $K$  - поле

$$0 \neq \frac{f}{g} \in K(x) \quad f, g \in K[x]$$

$\frac{f}{g}$  - правильная, если  $\deg f < \deg g$

### Лемма (1)

$$\frac{f}{g}; \quad \frac{f_1}{g_1} \text{ - прав. дроби} \Rightarrow \frac{f}{g} \cdot \frac{f_1}{g_1}; \quad \frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} \text{ - прав. дроби}$$

### Док-во

$$\deg(f \cdot f_1) = \deg f + \deg f_1 < \deg g + \deg g_1 = \deg(g \cdot g_1)$$

$$\frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} = \frac{fg_1 + gf_1}{gg_1}$$

$$\deg(fg_1 + gf_1) \leq \max\{\deg(fg_1), \deg(gf_1)\} < \deg(gg_1)$$

$$\deg(fg_1) = \deg f + \deg g_1 < \deg g + \deg g_1 = \deg(gg_1)$$

$$\deg(gf_1) = \deg g + \deg f_1 < \deg g + \deg g_1 = \deg(gg_1)$$

### Опр

Правильная дробь  $\frac{f}{g}$  называется примарной, если  $g = q^a$ ,  $q$  - неприв. многочлен

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{q^a} \quad \deg f < a \deg q$$

### Опр

Дробь назыв. простейшей, если она имеет вид

$$\frac{f}{q^a} \quad q \text{ - неприв } a \geq 1$$

$$\deg f < \deg q$$



## Теорема

$$\frac{f}{g} \in K(x) \text{ тогда } \frac{f}{g}$$

единственным образом (с точностью до порядка слагаемых) представима  
в виде суммы многочлена и простейших дробей

## Лемма (2)

$$\frac{f}{g} \in K(x) \quad \text{Тогда } \frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g}, \quad h \in K(x), \quad \frac{f_1}{g} - \text{прав дробь}$$

## Док-во

Делим с остатком:  $f = gh + f_1, \quad \deg f_1 < \deg g$

$$\frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g} \quad \frac{f_1}{g} - \text{прав. дробь}$$

## Лемма (3)

$$\frac{f}{g} - \text{прав. дробь}, \quad g = g_1 \cdot g_2, \quad \text{НОД}(g_1, g_2) = 1$$

$$\text{Тогда } \frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}, \quad \frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} - \text{прав. дроби}$$

## Док-во

По теореме о линейном представлении НОД в  $K[x]$

$$\exists u_1, u_2 \in K[x]$$

$$g_1 u_2 + g_2 u_1 = 1 \mid \cdot f$$

$$g_1(u_2 f) + g_2(u_1 f) = f$$

$$g_2(u_1 f) = f - g_1(u_2 f)$$

$$u_1 f = g_1 h_1 + f_1 \text{ (делим с остатком)}$$

$$f = g_1(u_2 f) + g_2(u_1 f) = g_1(u_2 f) + g_2(g_1 h_1 + f_1) = g_1 \underbrace{(u_2 f + g_2 h_1)}_{=f_2} + g_2 f_1 =$$

$$= g_1 f_2 + g_2 f_1 - \text{надо убедиться, что правильное}$$

$$g_1 f_2 = f - g_2 f_1$$

$$\deg g_1 + \deg f_2 \leq \max\{\deg f; \deg g_2 + \deg f_1\} < \deg g_1 + \deg g_2$$

$$\deg f_2 < \deg g_2$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f_2}{g_2} + \frac{f_1}{g_1}$$

### 30 Разложение рациональной функции в сумму многочлена и простейших дробей. (единственность).

#### Док-во

Не умоляя общности можно считать, что в обоих разложениях одни и те же неприводимые

$$\frac{f}{g} = h + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{a_i} \frac{f_{ij}}{q_i^j}, \deg f_{ij} < \deg q_i = \widetilde{h} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{a_i} \frac{\widetilde{f}_{ij}}{q_i^j}, \deg \widetilde{f}_{ij} < \deg q_i$$

Не умоляя общности  $a_i$  одни и те же в обеих суммах.

$$h - \widetilde{h} - \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{a_i} \frac{f_{ij} - \widetilde{f}_{ij}}{q_i^j} = 0 \quad (*)$$

Положим не все  $f_{ij} - \widetilde{f}_{ij} = 0 \Rightarrow \exists i, j : f_{ij} - \widetilde{f}_{ij} \neq 0$

Для такого  $i$  выберем наибольшее  $j$  из возможных. В  $(*)$  наиб. степени  $q_i$  в дроби с ненулевым числителем равна  $q_i^j$

Домножим  $(*)$  на общее кратное знаменателей НОК  $= q_i^j \cdot ()$  - произв. ост  $q$  в каких-то степенях

$$q_i(\dots) + q_i(\dots) + (f_{ij} - \widetilde{f}_{ij}) = 0 \Rightarrow$$

$$\deg(f_{ij} - \widetilde{f}_{ij}) \leq \max(\deg f_{ij}, \deg \widetilde{f}_{ij}) < \deg q_i$$

$$f_{ij} - \widetilde{f}_{ij} = 0?! \Rightarrow \text{в } (*) \text{ все } f_{ij} = \widetilde{f}_{ij}, \quad h = \widetilde{h}$$

### 31 Факториальные кольца. Содержание многочлена над факториальным кольцом. Содержание произведения многочленов.

Опр

$R$  - о.ц

$$a \notin \{0\} \cup R^*$$

назыв неприводимым, если

$$a = bc \Rightarrow b \in R^* \text{ и } c \sim a$$

$$\text{или } c \in R^* \text{ и } b \sim a$$

(все делители  $a$  есть либо обр. элем  $R$  либо ассоц. с  $a$ )

Опр

О.ц.  $R$  называется факториальным кольцом, если в нем справедлива т-ма об однозначном разложении на множ., а именно, всякий ненулевой необр. элемент  $R$  есть произведение неприводимых элементов, причем это разложение ед. с точностью до порядка сомножителей и ассоциированности

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot \dots \cdot q_m \quad q_i, p_i - \text{неприв} \Rightarrow n = m \text{ и}$$

$$\exists \text{ биекция } \sigma \text{ на } \{1, \dots, n\}$$

$$p_i = q_{\sigma(i)}$$

$$\mathbb{Z}, K[x] - \text{факт. кольца}$$

В факториальных кольцах можно определить НОД

$$a = \varepsilon_1 \prod_{i=1}^k q_i^{k_i} \quad b = p_1 \prod_{i=1}^n q_i^{l_i} \quad \varepsilon_1, p_1 \in R^* \quad q_i - \text{попарно ассоц. неприв}$$

$$\text{НОД}(a, b) = \prod_{i=1}^n q_i^{\min(k_i, l_i)}$$

$$ab = \varepsilon_1 p_1 \prod_{i=1}^n q_i^{(k_i + l_i)}$$

Опр

Содержание многочлена  $f$

$$\text{cont}(f) = \text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

---

## Опр

$f \in R[x]$  называется примитивным, если  $\text{cont}(f) \sim 1$

В факториальном кольце  $\forall$  многочлен  $f \in R[x]$  можно записать как  $f(x) = \text{cont}(f) \cdot f_1$  - примитивный

## Лемма (Гаусса)

$$\text{cont}(f) = \text{cont}(f) \cdot \text{cont}(g)$$

---

**32 Теорема Гаусса о факториальности кольца многочленов  
над факториальным кольцом. Факториальность колец**  
 $K[x_1, \dots, x_n], \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$

**Теорема**

$R$  - факториальное кольцо  $\Rightarrow R[x]$  - факториальное

**Лемма (Гаусса)**

$f, g \in R[x]$   $f, g$  - примитивны  $\Rightarrow f \cdot g$  - примитивный

**Следствие**

$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n], K[x_1, \dots, x_n]$  - факториальны

---

### 33 Неприводимость над $\mathbb{Q}$ и над $\mathbb{Z}$ . Методы доказательства неприводимости многочленов с целыми коэффициентами (редукция по одному или нескольким простым модулям).

$$f \in \mathbb{Q}[x]$$

Хотим доказать, что  $f$  неприв над  $\mathbb{Q}$

Не умоляя общности  $f \in \mathbb{Z}[x]$  (можно домножить на знаменатель)

$\text{cont}(f) = 1$  коэфф. в совокупности вз. просты

Идея:

$$f = a_0 + \dots + a_n x^n$$

$p$  - простое  $p \nmid a_n$

$$\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$$

каждый коэфф. заменяем на соотв. вычет

$$f \rightarrow \bar{f} = [a_0] + \dots + [a_n] \cdot x^n$$

Если  $p \nmid a_n$   $\deg(\bar{f}) = \deg f$

Если  $f$  приводим над  $\mathbb{Q}$ , то по т. Гаусса

$$f = gh \quad g, h \in \mathbb{Z}[x]$$

$$\deg g, \deg h < \deg f$$

$$\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$$

Если  $p$  не делит страш. коэфф  $f$ , то  $p \nmid$  страш. коэфф.  $g$  и  $h$

$$\deg \bar{g} = \deg g \quad \text{и} \quad \deg \bar{h} = \deg h$$

Тогда приводимость  $f$  влечет приводимость  $\bar{f}$

#### Предположение

$$\text{Если } p \nmid a_n \quad f = a_0 + \dots + a_n x^n \quad \text{cont } f = 1$$

и  $\bar{f}$  - неприводим над  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , то  $f$  неприводим над  $\mathbb{Z} (\Rightarrow$  и над  $\mathbb{Q})$

### 34 Критерий неприводимости Эйзенштейна.

#### Теорема

$$f \in \mathbb{Z}[x] \quad f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{cont}(f) = 1$$

$p$  - простое

Если  $*p \nmid a_n$

$*p \mid a_i \quad i = 0, \dots, n-1$ , то  $f$  неприводим над  $\mathbb{Z} (\Rightarrow$  и над  $\mathbb{Q})$

$*p^2 \nmid a_0$

#### Док-во

$$\square f = gh \quad g, h \in \mathbb{Z}[x] \quad \deg g, \deg h < n$$

$$\overline{f} = \overline{g} \cdot \overline{h}$$

$$\overline{f} = [a_n]x^n$$

$$\overline{g} \sim x^m \quad \overline{h} \sim x^{n-m} \quad 0 < m < n$$

$$g = b_mx^m + \dots + b_0 \quad b_m \not\equiv p, \quad b_{m-1}, \dots, b_0 \equiv p$$

$$h = c_{n-m}x^{n-m} + \dots + c_0$$

$$c_{n-m} \not\equiv p \quad c_{n-m}, \dots, c_0 \equiv p$$

по усл.  $a_0 = b_0 \cdot c_0$  - противоречие

$$\begin{matrix} \not\equiv \\ p^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \dots \\ p \end{matrix} \quad \begin{matrix} \dots \\ p \end{matrix}$$

---

**35 Линейные отображения векторных пространств.**  
**Линейное отображение**  
**полностью задается своими значениями на базисных**  
**векторах.**

**Опр**

$K$  - поле       $V$  - в.п. над  $K$

$f : U \rightarrow V$        $f$  - линейное, если  $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

1.

$$f(\alpha u_1 + \alpha u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)$$

2. (a)

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

(b)

$$\forall u \in U \quad \forall \alpha \in K \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

лин. отобр  $\equiv$  гомеоморфизм вект пр-в

**Теорема (св-ва)**

$f$  - лин. отобр.

$$f(0_u) = 0_v$$

$$f(-u) = -f(u)$$

**Пример**

$$K[x] \rightarrow K[x]$$

$$f \rightarrow f'$$

$$U - \text{в.п.} \quad \{u_i\}_{i \in I} - \text{базис } U$$

Достаточно хадать лин. отобр. на базисных векторах

$$f - \text{лин. отобр} \quad f : U \rightarrow V$$

$$u \in U \quad u = \sum \alpha_i u_i$$

$$f(u) = f\left(\sum \alpha_i u_i\right) = f\left(\sum_{\alpha_i \neq 0} \alpha_i u_i\right) = \sum_{\alpha_i \neq 0} \alpha_i f(u_i)$$



---

36 Сумма линейных отображений, умножение на скаляр.  
Пространство линейных отображений.

**37 Матрица линейного отображения для данных базисов. Матрица суммы отображений. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.**

$$\dim U = m < \infty \quad \dim V = n < \infty$$

$$u_1, \dots, u_m - \text{базис } U; \quad v_1, \dots, v_n - \text{базис } V$$

$$f(u_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

$$\alpha : U \rightarrow V - \text{лин. отобр.}$$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & & \ddots & \\ & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$- \text{коэфф разложения } f(u_i) \text{ по базису } \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$A - \text{матрица лин. отобр в базисах } \{u_1, \dots, u_m\}, \{v_1, \dots, v_n\}$$

$$A = [f]_{\{u_j\}}^{\{v_j\}}$$

$$f(u) = c_1 f(u_1) + \dots + c_m f(u_m) = \sum_{j=1}^m c_j f(u_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m c_j a_{ij} \right) v_i$$

$$\text{где } u = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} = [u]_{\{u_i\}} \quad [v]_{\{v_i\}} = A \cdot [u]_{\{u_i\}}$$

$$[f+g]_{\{u_j\}}^{\{v_i\}} = [f]_{\{u_j\}}^{\{v_i\}} + [g]_{\{u_j\}}^{\{v_i\}}$$

$$u, v \text{ назыв. изоморфными, если } \exists f : U \rightarrow V \quad \begin{array}{l} 1) f - \text{лин.} \\ 2) f - \text{биекция} \end{array}$$

---

38    Композиция линейных отображений. Матрица  
         композиции.

Опр

---

### 39 Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.

#### Опр

$f : U \rightarrow V$  - лин

$u_1, \dots, u_m$  - базисы  $U$        $v_1, \dots, v_n$  - базисы  $V$   
 $u'_1, \dots, u'_m$        $v'_1, \dots, v'_n$

$$A = [f]_{\substack{\{u_i\} \\ \{v_j\}}} \quad A' = [f]_{\substack{\{u'_i\} \\ \{v'_j\}}}$$

$C$  - матрица замены координат при переходе от  $\{u_i\}$  к  $\{u'_i\}$

$D$  - матрица замены координат при переходе от  $\{v_j\}$  к  $\{v'_j\}$

$i$  - ый столбец  $C$  - это коорд.  $u'_i$  в базисе  $u_1, \dots, u_m$

$i$  - ый столбец  $D$  - это коорд.  $v'_j$  в базисе  $v_1, \dots, v_k$

$$[u]_{\{u_i\}} = C[u]_{\{u'_i\}}, \text{ аналогично для } D$$

#### Теорема

$$A' = D^{-1}AC$$

---

**40 Ядро и образ линейного отображения, их свойства.  
Критерий инъективности и сюръективности линейного  
отображения в терминах ядра и образа.**

**Опр**

$$f : U \rightarrow V \quad f - \text{лин.}$$

$$f(U) = \{v \in V \mid \exists u \in U : v = f(u)\} = \text{Im} f \text{ (образ } f)$$

$$f^{-1}(\{0_v\}) = \{u \in U : f(u) = 0_v\} = \ker f \text{ (ядро } f)$$

**Предположение**

$$\text{Im} f \subseteq V; \quad \ker f \subseteq U$$

**Предположение**

$$\text{а) лин. отобр. } f : U \rightarrow V \text{ сюръективно} \Leftrightarrow \text{Im} f = V$$

$$\text{б) инъективно} \Leftrightarrow \ker f = \{0_u\}$$

---

**41 Выбор базисов, для которых матрица линейного отображения имеет почти единичный вид. Следствие для матриц. Теорема о размерности ядра и образа.**

**Теорема**

$U, V$  - конечномерные;  $f : U \rightarrow V$  - лин. Тогда  $\exists$  базисы пр-в  $U$  и  $V$ ,

в которых матрица  $f$  - почти единичная

$$[f]_{\substack{\{u_i\} \\ \{v_j\}}} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Следствие (1)**

$A \in M(n, m, K)$  Тогда  $\exists$  обрат. матрицы  $C \in M(m, n, K)$  и

$$D \in M(n, m, K), \text{ такие, что } D^{-1}AC = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Следствие (2)**

$\dim U < \infty$ ;  $V$  - произв.

$$f : U \rightarrow V$$

Тогда  $\dim U = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

---

## 42 Критерий изоморфности конечномерных пространств

### Опр

$U, V$  изоморфны, если  $\exists$  биект. лин. отображение (изоморфизм)  $f : U \rightarrow V$

$$U \cong V$$

### Теорема

$U, V$  - конечномерные в.п. над  $K$

$$U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

### Док-во

$\Rightarrow f : U \rightarrow V, \quad f$  - биекция, лин.

$f$  - инъект.  $\Rightarrow \ker f = \{0\}$

$f$  - сюръект.  $\Rightarrow \operatorname{Im} f = V$

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f = \dim U - \dim \ker f = \dim U - 0 = \dim U$$

$$\Leftarrow \dim U = \dim V = n$$

$u_1, \dots, u_n$  - базис  $U$

$v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$

Любой  $u \in U$  единственным образом раскладывается в сумму

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad \alpha_i \in K$$

$$f(u) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\tilde{u} = \tilde{\alpha}_1 u_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n u_n$$

$$u + \tilde{u} = (\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1) u_1 + \dots + (\alpha_n + \tilde{\alpha}_n) u_n$$

$$f(\tilde{u}) = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n v_n$$

$$f(u + \tilde{u}) = (\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \tilde{\alpha}_n) v_n$$

$$f(u + \tilde{u}) = f(u) + f(\tilde{u})$$

$$\text{Аналогично } f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

Значит  $f$  - лин. отображ.

т.к.  $v_1, \dots, v_n$  - сем-во образующих  $\Rightarrow f$  - сюръект.

$$v \in V \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

---

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad f(u) = v$$

т.к.  $v_1, \dots, v_n$  - ЛНЗ, то  $f$  - инъект.

достаточно проверить, что  $\ker f = \{0\}$

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$0 = f(u) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0, u = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$$

$\Rightarrow f$  - изоморфизм



---

### 43 Двойственное пространство. Двойственный базис.

Изоморфность конечномерного пространства и его двойственного. Пример пространства не изоморфного своему двойственному.

#### Опр

$V$  - в.п. над  $K$

$V^* = L(V, K)$  - двойственное пр-во к  $V$

(пр-во линейных отображений из  $V$  в  $K$ )

элементы  $V^*$  - лин. функционалы  $V$  (лин. отобр)

#### Пример

$V_{\mathbb{R}} = C([0; 1] \rightarrow \mathbb{R})$

$f \rightarrow \int_0^1 f(x)dx$

$a \in [0; 1] \quad f \rightarrow f(a)$

#### Опр

$e_1, \dots, e_n$  - базис  $V$

$c_1, \dots, c_n$  - двойственный базис  $V$ , если

$$f(e_i, c_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

#### Теорема

$\dim V = n < \infty \Rightarrow V^* \cong V$

#### Док-во

$v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$

---

#### 44 Линейные операторы. Кольцо линейных операторов. Изоморфность кольца линейных операторов и кольца матриц.

$V$  - в.п. над  $K$

$L(v, v)$  эл-ты этого пр-ва назыв. линейными операторами на  $V$

$$\text{End}(V) = L(V, V)$$

На  $\text{End}(V)$  определена композиция (умножение операторов)

$$\square \dim V = n$$

зафиксируем базис  $v_1, \dots, v_n$  пр-ва  $V$

$\text{End}(V) \rightarrow M_n(K)$  изморфизм в.п.

$f \rightarrow [f]_{\{v_i\}}$  - матрица оператора в базисе

#### Теорема

$(\text{End}(V), \cdot, +)$  - кольцо

---

**45 Многочлены от оператора. Коммутирование многочленов от одного оператора.**

**Опр**

$V$  - в.п. над  $K$        $\varphi \in \text{End}(V)$

$$h = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m \in K[t]$$

$$h(\varphi) = a_0 \text{id} + a_1 \varphi + \dots + a_m \varphi^m \in \text{End}(V)$$

Умножение = композиция операторов

$$A \in M_n(K)$$

$$h(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_m A^m - \text{мн-н от матрицы}$$

$$(hg)(\varphi) = h(\varphi) \cdot g(\varphi)$$

---

**46 Характеристический многочлен матрицы и оператора.  
Независимость характеристического многочлена оператора от  
выбора базиса.**

**Опр**

$$A \in M_n(K)$$

Характеристический многочлен  $A$

$$\det(A - tE) = \mathcal{X}_A(t)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \det A$$

$V$  - в.п.  $\dim V = n < \infty$   $v_1, \dots, v_n$  - базис  $V$

$f \in \text{End}(V)$   $A = [f]_{\{v_i\}}$  - матрица оператора в базисе  $v_1, \dots, v_n$

$$\mathcal{X}_f(t) = \mathcal{X}_A(t)$$

**Лемма**

Характеристический многочлен  $f$  не зависит от выбора базиса в  $V$

**Док-во**

$v_1, \dots, v_n$  - базисы  $V$   $C$  - матрица преобр. координат  
 $v'_1, \dots, v'_n$  при переходе от  $\{v_i\}$  к  $\{v'_i\}$

$$A = [f]_{\{v_i\}}$$

$$A' = [f]_{\{v'_i\}}$$

$$A' = C' A C \quad (A \text{ и } A' \text{ сократимы при помощи } C)$$

$$\mathcal{X}_{A'}(t) = \mathcal{X}_A(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{A'}(t) &= \det(C^{-1} A C - tE) = \det(C^{-1} A C - C^{-1} (tE) C) = \\ &= \det(C^{-1} (A - tE) C) = \det(C^{-1}) \cdot \det(A - tE) \cdot \det(C) = \\ &= \det(A - tE) = \mathcal{X}_A(t) \end{aligned}$$

---

## 47 Собственные числа и собственные векторы оператора и матрицы.

### Собственные числа как корни характеристического многочлена

#### Опр

$$f \in \text{End}(V) \quad \lambda \in K$$

$\lambda$  - собственное число  $f$ , если  $\exists v \neq 0; \quad v \in V : f(v) = \lambda \cdot v$

Если  $\lambda$  - собс. число  $f \quad v \in V \quad f(v) = \lambda v$ , то  $v$  - собс вектор

#### Опр

$$\lambda - \text{с.ч. } f \Rightarrow V_\lambda = \{v : f(v) = \lambda v\}$$

Поэтому удобно 0 считать с.в.

#### Опр

$$A \in M_n(K)$$

$$\lambda - \text{с.ч. } A, \text{ если } \exists v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n : A_n = \lambda_n$$

#### Теорема

$$A \in M_n(K)$$

$$\lambda \in K - \text{с.ч. } A \Leftrightarrow \lambda - \text{корень } \mathcal{X}_A(t)$$

#### Док-во

$$\exists v \neq 0 \quad Av = \lambda v$$

$$(A - \lambda E)v = 0$$

Рассмотрим коэф. столбца  $V$  как неизвестные

$$\lambda - \text{с.ч. } A \Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0 - \text{имеет нетривиальный ранг}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{X}_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \text{корень } \mathcal{X}_A(t)$$

---

### Следствие

$$\dim V = n < \infty \quad f \in \text{End}(V)$$

$$\lambda \in K - \text{с.ч. } f \Leftrightarrow \lambda - \text{корень } \mathcal{X}_f(t)$$

### Док-во

Фиксируем базис  $v_1, \dots, v_n$

$$f \rightarrow [f] = A \quad v \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [v]$$

$$\Leftrightarrow v - \text{с.в. } f, \text{ отвеч. } \lambda \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \text{с.в. } A, \text{ отвеч. } A$$

---

## 48 Теорема Гамильтона-Кэли.

### Теорема

$$A \in M_n(K) \quad \mathcal{X}_A(A) = O_{M_n(K)}$$

## 49 Диагонализируемые операторы. Критерий диагонализируемости.

### Примеры недиагонализируемых операторов

#### Опр

$V$  - в.п. над  $K$   $\dim V = n < \infty$

$\varphi \in \text{End}(V)$

$\varphi$  - диагонализируем, если  $\exists$  базис  $V$ , в котором матрица  $\varphi$  - диагональна

#### Теорема

$V$  - в.п.  $\dim V = n < \infty$

$\varphi \in \text{End}(V)$

$\varphi$  - диагонализируем  $\Leftrightarrow \exists$  базис  $V$ , состоящий из собс. векторов  $\varphi$

#### Док-во

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$  - базис

$$[\varphi]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i \quad v_i \neq 0 \Rightarrow v_i$  - с.в.

$\Leftarrow v_1, \dots, v_m$  - базис из с. в.  $\varphi$

$\varphi(v_i) = \lambda_i v_i \quad \lambda \in K$

$\varphi(v_i) = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots$

$$[\varphi]_{\{v_i\}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

#### Пример

$V = \mathbb{C}^2$

$$\varphi(x) = A \cdot x \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{X}_\varphi(t) = \mathcal{X}_A(t) = t^2 \quad \text{с.ч } \lambda = 0$

$Ax = 0$

$\text{rk } A = 1 \quad 2 \text{ перем} \Rightarrow \text{пр-во решений одномерно}$

$\Rightarrow$  все с.в. лежат в одномерном пр-ве  $\Rightarrow$  непорожд  $\mathbb{C}^2$

$\Rightarrow$  не диагонализ.



---

### Пример

$$V = K[x]_n = \{f \in K[x]; \deg f \leq n\}$$

$$\text{char } K = 0$$

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \quad \varphi(f) = f'$$

$$\text{с.ч. } \lambda = 0$$

с.в. пр. : константы

$$\dim V = n + 1 \quad (n \geq 1 \Rightarrow \varphi - \text{не диагонализ})$$

**50 Жорданова форма оператора. Жорданов базис.**  
**Формулировка теоремы о жордановой форме оператора.**  
**Сведение к случаю оператора с единственным собственным**  
**числом.**

**Опр**

$$\lambda \in K$$

$$\mathfrak{J}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} - \text{жордан. клетка размера } n \text{ отвечающей } \lambda$$

$A$  - жорд. матрица, если  $A$  - блочно диаг, а диг. блоки - жорд. клетки

$$\mathfrak{J}_1 = (\lambda)$$

$$\mathfrak{J}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathfrak{J}_{m_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \mathfrak{J}_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{J}_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

**Теорема (1)**

$$K - \text{алг. замк. } V, \quad \dim V = n < \infty$$

$$\varphi \in \text{End}(V)$$

Тогда  $\exists$  базис пр-ва  $V$ , в котором матрица  $\varphi$  является жордановой матрицей. Причем клетки опред. однозначно с точностью до перестановки диаг. блоков