Содержание

11.10.19 Условные экстремумы

$$u = f(x_1, ..., x_n) \text{ при усл } \begin{cases} \Phi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad m < n$$

1. Точка недифф-ти f или Φ_i
2. $\operatorname{rk} \Phi' < m$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad m \times n$$

3. $\mathscr{L} = f(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 \Phi_1(x_1, ..., x_n) - \lambda_2 \Phi_2(x_1, ..., x_n) - ... - \lambda_m \Phi_m(x_1, ..., x_n)$

Точка экстремума удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \Phi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad m + n \text{ уравнений}$$

$m + n$ неизвестных $\quad x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m$

Задача (1)

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \qquad a, b > 0 \text{ при усл. } x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\Phi} = 0 \qquad M$$

$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \qquad$ 1 ур-е $\Rightarrow$ 1 строка в матрице

$\operatorname{rk} \Phi' < 1 \Rightarrow \operatorname{rk} \Phi' = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \notin M$

$\forall (x, y) \in M \qquad \operatorname{rk} \Phi' = 1$

$\mathscr{L} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = \frac{1}{a} - 2\lambda \cdot x = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 & x = \frac{1}{2a\lambda} \\ \mathscr{L}'_y = \frac{1}{b} - 2\lambda \cdot y = 0 \Rightarrow & y = \frac{1}{2b\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} = 1$$

$$\frac{b^2 + a^2}{4a^2b^2\lambda^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 4a^2b^2\lambda^2$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}$$

$$1. \begin{cases} x = \frac{1 \cdot 2ab}{2a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda = +\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \end{cases}$$

Выясним, что будет в этих точках

$$\mathscr{L}''_{x^2} = -2\lambda$$

$$\mathscr{L}''_{xy} = 0$$

$$\mathscr{L}''_{y^2} = -2\lambda$$

$$\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 2\lambda \quad \Delta_2 = 4\lambda^2$$

$$\begin{array}{lllll} \text{для} & 1. & - & + & \max \\ & 2. & + & + & \min \end{array}$$

Задача (2)

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b > c > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk}\Phi' = 0 \Rightarrow \quad x = y = z = 0 \qquad (0,0,0)\not\in M$$

$$\mathscr{L} = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = 2x - \frac{2x\lambda}{a^2} = 0 \Rightarrow x(1 - \frac{\lambda}{a^2}) = 0 \\ \mathscr{L}'_y = 2y - \frac{2y\lambda}{b^2} = 0 \Rightarrow y(1 - \frac{\lambda}{b^2}) = 0 \\ \mathscr{L}'_z = 2z - \frac{2z\lambda}{c^2} = 0 \Rightarrow z(1 - \frac{\lambda}{c^2}) = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$1 - \frac{\lambda}{b^2} = 0 \Rightarrow \lambda = b^2$$

$$x = z = 0 \qquad y \pm b$$

$$1 - \frac{\lambda}{c^2} = 0 \Rightarrow \lambda = c^2$$

$$x = y = 0 \qquad z = \pm c$$

$$1 - \frac{\lambda}{a^2} = 0$$

$$\lambda = a^2 \qquad 1 - \frac{a^2}{b^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$1 - \frac{a^2}{c^2} \neq 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda = a^2 \end{cases}$$

6 решений $\begin{pmatrix} \pm a & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm b & 0 & b^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm c & c^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{2\lambda}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2\lambda}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{2\lambda}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 - \frac{2\lambda}{a^2} = 2(1 - \frac{\lambda}{a^2})$$

$$\Delta_2 = 4(1 - \frac{\lambda}{a^2})(1 - \frac{\lambda}{b^2})$$

$$\Delta_3 = 8(1 - \frac{\lambda}{a^2})(1 - \frac{\lambda}{b^2})(1 - \frac{\lambda}{c^2})$$

1. $\lambda = a^2 \qquad 0,\ 0,\ 0$
2. $\lambda = b^2 \qquad 1 - \frac{b^2}{a^2} > 0,\ 0,\ 0$
3. $\lambda = c^2 \qquad 1 - \frac{c^2}{a^2} > 0,\ (1 - \frac{c^2}{a^2})(1 - \frac{c^2}{b^2}) > 0,\ 0$

Но у нас 2 независимые переменные

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{\lambda^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{\lambda}{b^2})(dy)^2 + 2(1 - \frac{\lambda}{c^2})(dz)^2$$

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0$$

- линейная однородная система относительно диф-лов

dx, dy, dz - зависимы между собой

В точке $\left(\pm a,\ \ 0,\ \ 0,\ \ a^2\right)$ - максимум

$$\frac{\pm 2a}{a^2}dx = 0 \Rightarrow dx \equiv 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{a^2}{b^2})(dy)^2 + 2(1 - \frac{a^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{a^2}{b^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{a^2}{c^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \Delta_1 = & 2(1 - \frac{a^2}{b^2}) < 0 \\ \Delta_2 = & 4(1 - \frac{a^2}{b^2})(1 - \frac{a^2}{c^2}) > 0 \\ - \quad + & \underline{\text{максимум}} \end{array}$$

В точке $\left(0,\ \ \pm b,\ \ 0,\ \ b^2\right)$ нет экстремума

$$\pm\frac{2b}{b^2}dy = 0 \Rightarrow dy = 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{b^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{b^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{b^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{b^2}{c^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \Delta_1 = & 2(1 - \frac{b^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = & 4(1 - \frac{b^2}{a^2})(1 - \frac{b^2}{c^2}) < 0 \\ + \quad - & \underline{\text{нет экстремума}} \end{array}$$

В точке $\left(0,\ \ 0,\ \ \pm c,\ \ c^2\right)$ - минимум

$$\pm\frac{2c}{c^2}dz = 0 \Rightarrow dz = 0$$

$$d^2\mathscr{L} = 2(1 - \frac{c^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{c^2}{b^2})(dy)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{c^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{c^2}{b^2}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \Delta_1 = & 2(1 - \frac{c^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = & 4(1 - \frac{c^2}{a^2})(1 - \frac{c^2}{b^2}) > 0 \\ + \quad + & \underline{\text{минимум}} \end{array}$$

Задача (3)

$$u = xy + yz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad M$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rk}\Phi' < 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{противоречие с } x^2 + y^2 = 2$$

$$\forall (x, y) \in M \qquad \operatorname{rk}\Phi' = 2$$

$$\mathscr{L} = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(y + z - 2)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = y - 2\lambda_1 x & = 0 \\ \mathscr{L}'_y = x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 & = 0 \\ \mathscr{L}'_z = y - \lambda_2 & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 2 \\ y + z & = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \quad \lambda_1 = \frac{y}{2x}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ - противореч с $x^2 + y^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + z - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = z \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + 2 - y - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 - y \end{cases} \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x^2 + 2(1-y)x - y^2 = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ 2 - 2y^2 + 2(1-y)x = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ (1-y)(1+y) + x(1-y) = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases}$$

$$(1-y)(1+y+x) = 0$$

1. $y = 1$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$z = 2 - y = 1$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$(1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

2. $1 + y + x = 0$

$$x = -1 - y$$

$$(-1-y)^2 = 2 - y^2 \qquad y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$y^2 + 2y + 1 = 2 - y^2 \qquad z = 1 - \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{-2 + 1 \mp \sqrt{3}}{2}$$

$$2y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$(3)\begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_1 = ... \\ \lambda_2 = ... \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_1 = ... \\ \lambda_2 = ... \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{gathered} \Delta_1 = -2\lambda_1 \\ \Delta_2 = 4\lambda_1^2 - 1 \\ \Delta_3 = -1\begin{vmatrix} -2\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 \end{gathered}$$

В (1)   - 0 +   экстр. нет?
В (2)   + 0 -   экстр. нет?

$$d^2\mathscr{L} = (-2\lambda_1)(dx)^2 + 2dxdy + (-2\lambda_1)(dy)^2 + 2dydz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$$

В точке $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -dy \\ dz = -dy \end{cases}$$

$$d^2\mathscr{L} = (-dy)^2 + 2(-dy)dy - (dy)^2 + 2dy(-dy) = (-6)(dy)^2$$

$\begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}$ матрица из одного элемента

$\Delta_1 < 0 \qquad - \max$

В точке $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -\frac{1}{2}$

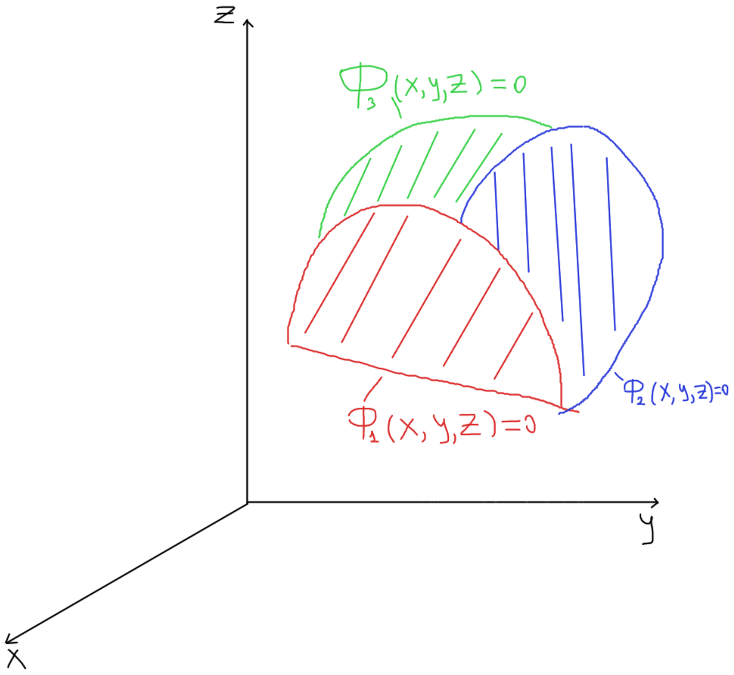
$$\begin{cases} -dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = dy \\ dz = -dy \end{cases}$$

$$d^2\mathscr{L} = 1\cdot(dy)^2 + 2dydy + 1\cdot(dy)^2 + 2dy\cdot(-dy) = 2(dy)^2$$

$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 > 0 \qquad \Rightarrow \min$

$\begin{pmatrix} -1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \qquad - \min$

наиб. и наим. значения функций от нескольких перем.



Опр

наиб и наим знач. ф. $u = f(x,y,z)$ на E

1. внутри $E \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$ - реш. системы
   (только принадлежащие E. Решения могут лежать вне E)
   Или точка недифф.

2. На участке $\Phi_1(x,y,z) = 0$

   (a) точка недифф-ти

   (b) $\operatorname{rk} \Phi'_1 < 1$

   (c) $\mathscr{L} = f - \lambda_1 \Phi_1$

   «Не нужно считать 2 пр-дные и делать лишнее!»

3. На участке $\Phi_2(x,y,z) = 0$
   Аналогично

4. На $\Phi_3(x,y,z) = 0$ Аналогично

5. на ребре

$$\begin{cases} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

   (a) Не дифф

   (b) $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} \Phi_1' \\ \Phi_2' \end{pmatrix} < 2$

   (c) $\mathscr{L} = f - \lambda_1\Phi_1 - \lambda_2\Phi_2$

6. на ребре

7. на ребре

8. в точках

$$\begin{cases} \Phi_1(x,y,z) = 0 \\ \Phi_2(x,y,z) = 0 \\ \Phi_3(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

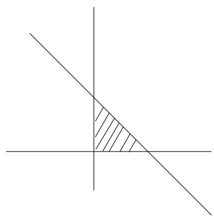
Все точки проверяем на $\in$ E
$f(x_1,y_1,z_1), f(x_2,y_2,z_2), ...$ выбираем точку с $\underset{\text{наим}}{\text{наиб}}$ знач.

<u>Задача</u> (1)

$$z = x^2 - xy + y^2$$

на мн-ве $\{(x,y):\ |x| + |y| \leqslant 1\}$

1)

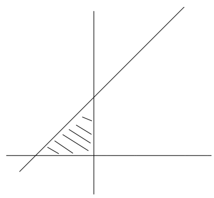


$x \geqslant 0$

$y \geqslant 0$

$x + y \leqslant 1$

2)

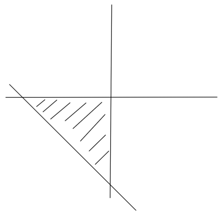


$x < 0$

$y \geqslant 0$

$-x + y \leqslant 1$

3)

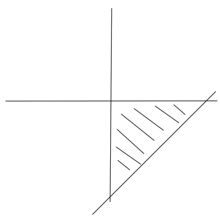


$x < 0$

$y < 0$

$-x - y \leqslant 1$

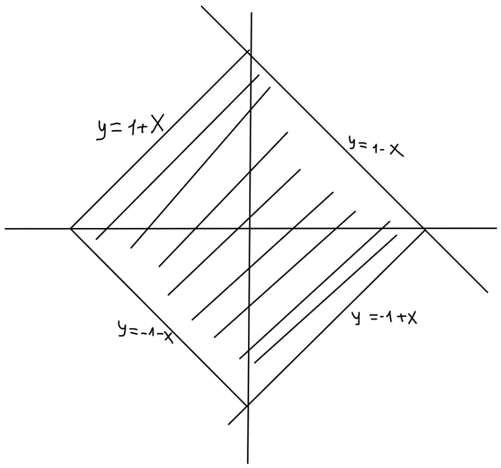
4)



$x \geqslant 0$

$y < 0$

$x - y \leqslant 1$



1)

$z'_x = 2x - y = 0$

$z'_y = -x + 2y = 0$

$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \\ 4x - x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ входит в множество

---

2)

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ z = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 3x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

$z'_x = 6x - 3 = 0$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ входит в мн-во

3)

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = x^2 - x(x-1) + (x-1)^2 \end{cases}$$

$z'_x = 2x - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Догадались о симметрии

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Входят в множество

4)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$z(0,0) = 0 \leftarrow \min$

$$z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$z(1,0) = 1$

$z(-1,0) = 1$

$z(0,1) = 1$

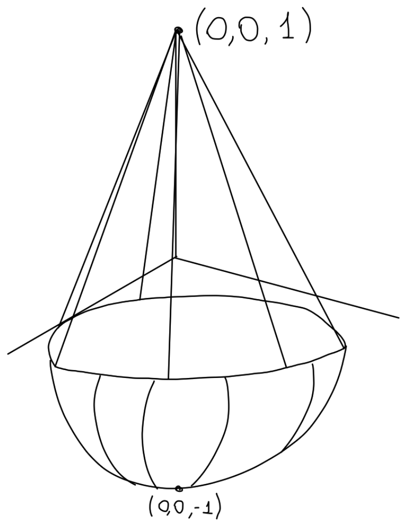
$z(0,-1) = 1 \leftarrow \max$

Задача (2 Найти max min)

$$u = x + y + 2z$$

на мн-ве $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant (z-1)^2, \quad (z \leqslant 1), \quad z \geqslant x^2 + y\}$

$$x^2 + y^2 \leqslant (z-1)^2 \text{ - конус}$$



1)

$$\begin{cases} u'_x = 1 & \neq 0 \\ u'_y = 1 & \neq 0 \\ u'_z = 2 & \neq 0 \end{cases}$$

Внутри точек нет

2) на $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z-1) \end{pmatrix} < 1$$

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$ на пов-ти

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 & \in E \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathscr{L} = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - (z-1)^2) \\ \mathscr{L}'_x = 1 - 2x\lambda = 0 \\ \mathscr{L}'_y = 1 - 2y\lambda = 0 \\ \mathscr{L}'_z = 2 + 2\lambda(z-1) = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$1 + 1 = 4 \quad \nexists$$

3) на $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x, & 2y, & -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rk} \Phi' = 1$$

$$\mathscr{L} = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - z - 1)$$

$$\begin{cases} \mathscr{L}'_x = 1 - 2\lambda x = 0 & x = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \\ \mathscr{L}'_y = 1 - 2\lambda y = 0 & y = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \\ \mathscr{L}'_z = 2 + \lambda = 0 & \lambda = -2 \\ x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - 1 = z \qquad z = -\frac{14}{16} = -\frac{7}{8}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z-1) \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & -2(z-1) \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -2x+4x(z-1) = 2x(-1+2z-2) = 2x(2z-3) = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2y & -2(z-1) \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = 2y(2z-3) = 0$$

$$1) \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{matrix}$$

1 - ур не вып.

$2) z = \frac{3}{2}$

Но $z \leqslant 1$ не входит в E

5)

$$\mathscr{L} = x + y + 2z - \lambda_1(x^2 + y^2 - (z-1)^2) - \lambda_2(x^2 + y^2 - z - 1)$$

Закончить дома

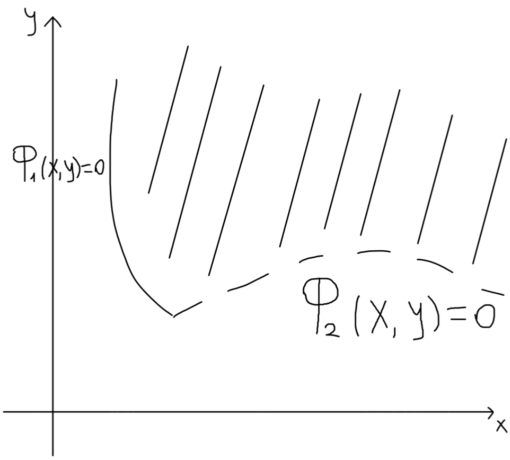
Дз 3657 б
3663 а
3668

18.10.19

Опр

$E \subset \mathbb{R}^2$ - не замк. и не огр $\qquad f$ - непр

$\exists \sup\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) \qquad \inf\limits_{(x,y)\in E} f(x,y)$



$\exists\ (x_n, y_n) \in E : f(x_n, y_n) \to \sup f$

$\exists \{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$

$x_{n_k} \to a, \quad y_{n_k} \to b$

$x_{n_k} \to a, \quad y_{n_k} \to \pm\infty$

$x_{n_k} \to +\infty, \quad y_{n_k} \to b$

$x_{n_k} \to \pm\infty, \quad y_{n_k} \to \pm\infty$

$x_{n_k} \to -\infty, \quad y_{n_k} \to b$

Если $(a,b) \in E$, то $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(a,b)$
т.е $f(a,b) = \sup = \max$

Если $(a,b) \not\in E$, то $(a,b) \in \underset{\text{Граница}}{\text{Fr E}}$

$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \sup f$

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} f(x, y)$$
$$x_{n_k} \to +\infty$$
$$y_{n_k} \to b$$

Подозр. точки

1. Внутри
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

2. На уч-ке $\Phi_1(x, y) = 0$
$$\operatorname{rk} \Phi'_1 < 1$$
$$\text{или } \mathscr{L} = f - \lambda \Phi_1$$

3. На участке $\Phi_2(x, y) = 0$
$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$$
$$\mathscr{L} = f(a, b) - \lambda \Phi_2(a, b)$$

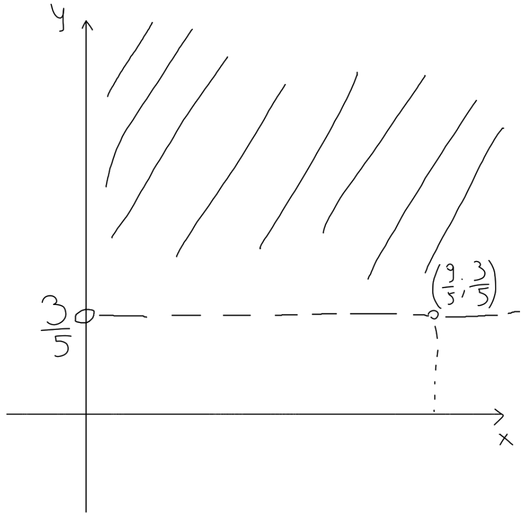
4. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ y \to +\infty}} f(x, y)$
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to b}} f(x, y)$$
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y)$$

Если наиб - предел, то sup не достигается, иначе достигается

Задача (1)

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x-2y}$$

$$\sup, \inf \text{ на множестве } E = \{(x, y)|\ x \geqslant 0,\ t > \frac{3}{5}\}$$



1) внутри

$$\begin{cases} f'_x = 2xe^{-x-2y} - (x^2+y^2)e^{-x-2y} = 0 \\ f'_y = 2ye^{-x-2y} - 2(x^2+y^2)e^{-x-2y} = 0 \end{cases}$$

$e^{-x-2y} \neq 0$

$$\begin{cases} 2x - (x^2+y^2) = 0 \\ 2y - 2(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x^2+y^2 \\ y = x^2+y^2 \end{cases}$$

$y = 2x$

$2x = x^2 + 4x^2$

$5x^2 - 2x = 0$

$x(5x-2) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \not\in E \text{ и не явл. границей}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \quad \in E$$

2) на участке $x = 0, \quad y > \dfrac{3}{5}$

Просто подставим $x = 0$ (можно без ф. Лагранжа)

$f(0, y) = y^2 e^{-2y}$

$f' = 2ye^{-2y} - 2y^2 e^{-2y} = 0 \qquad e^{-2y} \neq 0$ делим

$2y - 2y^2 = 0$

$y(1 - y) = 0$

$y = 0 \not\in E$

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \in E$

3) на участке границы $y = \dfrac{3}{5},\ x \geqslant 0$

т.к непр на все плоск.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to \frac{3}{5}}} (x^2 + y^2) e^{-x-2y} = (a^2 + \frac{9}{25}) e^{-a-\frac{6}{5}} \qquad a \geqslant 0$$

$((a^2 + \dfrac{9}{25}) e^{-\frac{5}{9}} e^{-a})' = e^{-\frac{6}{5}}(2ae^{-a} - (a^2 + \dfrac{9}{25}) e^{-a}) = 0$

$2a - a^2 - \dfrac{9}{25} = 0$

$25a^2 - 50a + 9 = 0$

$d = 2500 - 900 = 400^2$

$a_{1,2} = \dfrac{50 \pm 40}{50} = \dfrac{9}{5}, \quad \dfrac{1}{5}$

$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{9}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

4) угловые точки

$(0, \dfrac{3}{5})$ на границе, не берем

Значения:

$f(\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}) = (\dfrac{4}{25} + \dfrac{16}{25}) e^{-\frac{2}{5}-\frac{8}{5}} = \dfrac{4}{5} e^{-2} \approx 0,108$

$f(0, 1) = (0 + 1) e^{-0-2} = e^{-2} \approx 0,135..$

т.к. f -непр $\Rightarrow$ предел $=$ значению

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{5}\\ y\to\frac{3}{5}}} f(x,y) = (\frac{1}{25} = \frac{9}{25})e^{-\frac{1}{5}-\frac{6}{5}} = \frac{2}{5}e^{-\frac{7}{5}} \approx 0,099..$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{9}{5}\\ y\to\frac{3}{5}}} f(x,y) = (\frac{81}{25} + \frac{9}{25})e^{-\frac{9}{5}-\frac{6}{5}} = \frac{18}{5}e^{-3} \approx 0,1792$$

(т.к предел, то sup не достигается)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to\frac{3}{5}}} f(x,y) = (0 + \frac{9}{25})e^{-0-\frac{6}{5}} = \frac{9}{25}e^{-\frac{6}{5}} \approx 0,1084...$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to b}} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to b}} (x^2e^{-x}e^{-2y} + y^2e^{-x}e^{-2y}) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} (x^2e^{-x}e^{-2y} + y^2e^{-2y}e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2e^{-x}e^{-2y} + y^2e^{-2y}e^{-x}) = 0$$

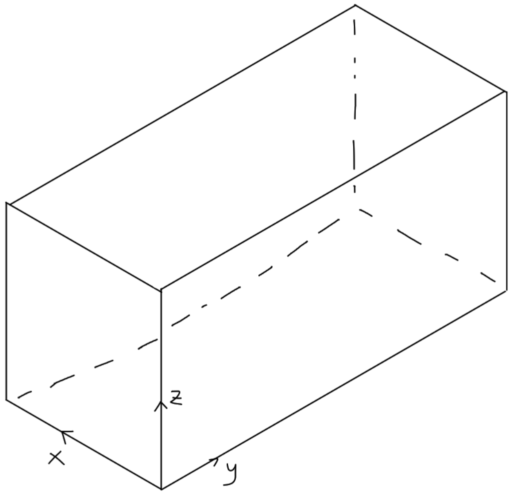
Наим - 0 - inf (не достиг., т.к. предел)

$$0 < (x^2+y^2)e^{-x-2y} < \frac{18}{5}e^{-3}$$

$$(x,y) \in E$$

Задача (2)

При каких размерах открытая коробка постоянного объема имеет наим. поверхность?



1. постановка задачи

$$S = xy + 2xz + 2yz \qquad x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0$$

$$V = xyz = const$$

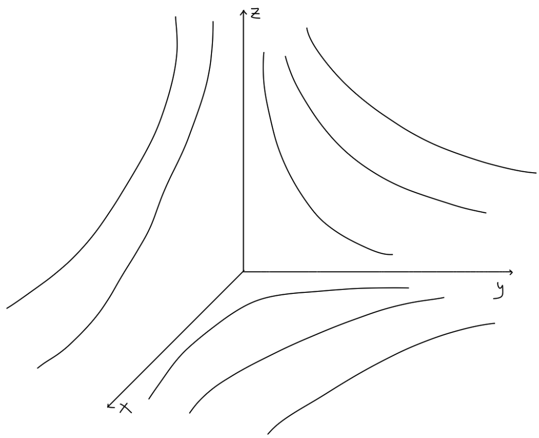
$$\Phi = xyz - V = 0$$

$$\Phi' = \big(yz, \;\; xz, \;\; xy\big)$$

$$\operatorname{rk}\Phi' = 1$$

$$\mathscr{L} = xy + 2xz + 2yz - \lambda(xyz - V)$$

На этой пов-ти



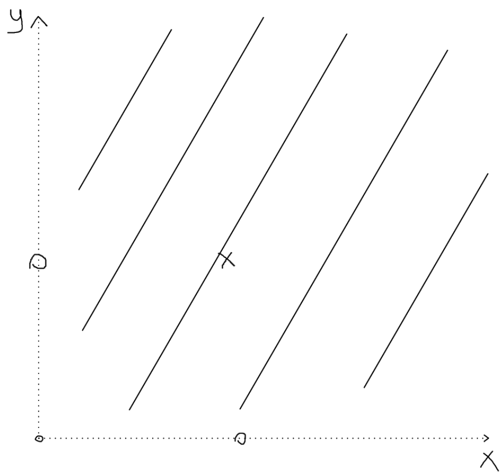
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0+\\ z\to ?}} S = ?$$

2. постановка задачи

$$z = \frac{V}{xy}$$

$$S = xy + 2x\cdot\frac{V}{xy} + 2y\cdot\frac{V}{xy} = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

Наим значение S в обл. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$



1) Внутри

$$\begin{cases} f'_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ f'_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{2V}{x^2}$$

$$x - \frac{2Vx^2}{4V^2} = 0$$

$$1 - \frac{x^3}{2V} = 0$$

$$x^3 = 2V$$

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

$$y = \frac{2V}{(2V)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{2V}$$

$$S(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \sqrt[3]{4V^2} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} = \sqrt[3]{4V^2} + 2\sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}$$

2)

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to 0+}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0+ \\ y \to a}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0+ \\ y \to 0+}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to a > 0 \\ y \to +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to a > 0}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0+ \\ y \to +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

Наим. знач $3\sqrt[3]{4V^2}$

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

$$y = \sqrt[3]{2V}$$

$$z = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}V}$$

2019-10-25

Неявные функции. Вычисл. их диф-лов, производных. Разложения неявных функций по ф-ле Тейлора

Напоминание

неявные ф-ии задаются системой ур-й

$$F_i \in C^1(G)$$

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0 \\ ... \\ F_n(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0 \end{cases} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y_1 = f_1(x_1,...,x_m) \\ ... \\ y_n = f_n(x_1,...,x_m) \end{cases}$$

$m+n$ - перем. $\quad n-$ ур-ний

Теорема

Если сис-ма удовлетв-ся в точке $(x_1^0,...,x_m^0,y_1^0,...,y_n^0)$ и в этой точке

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

То в окрестн. точки $(x_1^0,...,x_m^0,y_1^0,...,y_n^0)$ система однозн. разрешима и $f_k \in C^1(u(x_1^0,...,x_m^0))$

Если $F_i \in C^r(G) \qquad \Rightarrow f_k \in C^r(u(x_1^0,...,x_m^0))$

Вычислим диф-лы от каждого ур-я

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}dy_n = 0 \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}dy_n = 0 \\ ... \\ \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_m}dx_m + \frac{\partial F_n}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}dy_n = 0 \end{cases}$$

Линейная однородная система относительно $dy_1,..,dy_n$

$\Rightarrow$ система однозначно разрешима (т.к.)

$$dy_1 = \underbrace{...}_{\to\frac{\partial F_1}{\partial x_1}} dx_1 + \underbrace{...}_{\to\frac{\partial F_1}{\partial x_2}} dx_2 + ... + \underbrace{...}_{\to\frac{\partial F_1}{\partial x_m}} dx_m +$$

$$...$$

$$dy_n = ...dx_1 + ...dx_2 + ... + ...dx_m$$

Задача (1)

$$F = z^3 - 3xyz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = z(x, y)$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1 \Rightarrow z_0 = 1$$

Хотим найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}; \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}...$ (В том числе в точке $(0, 1)$)

$$dF = -3yzdx - 3xzdy + (3z^2 - 3xy)dz = 0$$

$$3z_0^2 - 3x_0y_0 = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow dz = +\frac{yz}{z^2 - xy}dx + \frac{xz}{z^2 - xy}dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = +\frac{yz}{z^2 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = +\frac{xz}{z^2 - xy}$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0$$

hint: Если нужны только в конкрет. точке, то проще подставить точку в ур-е

$$-3 \cdot 1 \cdot 1dx - 3 \cdot 0 \cdot 1dy + 3(1 - 0 \cdot 1)dz = 0$$

$$\Rightarrow dz = dx = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy$$

$$-yzdx - xzdy + (z^2 - xy)dz = 0$$

$$hint: \quad d(P \cdot Q) = P \cdot dQ + Q \cdot dP$$

$$d(-yz)dx + (-yz)d^2x + d(-xz)dy + (-xz)d^2y + d(z^2 - xy)dz + (z^2 - xy)d^2z = 0$$

x, y - нез. перем. (т.к. z - функция) $\Rightarrow d^2x, d^2y = 0$

$$-dy \cdot z \cdot dx - y \cdot xz \cdot dx - dx \cdot z \cdot dy - x \cdot dz \cdot dy + (2zdz - ydx - xdy)dz +$$

$$+(z^2 - xy)d^2z = 0$$

$$d^2z \text{ через } dx, dy$$

Если в конкретной точке: подставим точку $x = 0, y = 1, z = 1$

$$dz = dx \text{ (в этой точке)}$$

$$-dy \cdot 1dx - 1 \cdot dx \cdot dx - dx \cdot 1 \cdot dy - 0 \cdot dx \cdot dy +$$
$$+(2 \cdot 1dx - 1 \cdot dx - 0 \cdot dy)dx + (1^2 - 0 \cdot 1)d^2z = 0$$
$$-dy \cdot dx - (dx)^2 - dxdy + 2 \cdot (dx)^2 - (dx)^2 + d^2z = 0$$
$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\partial y)^2$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,1) = 0$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1) = 1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,1) = 0$$

Ф-ла Тейлора:

$$z(x,y) = z(0,1) + \frac{1}{1!}dz + \frac{1}{2!}d^2z + O(\|h\|^3) =$$
$$= 1 + dx + dxdy + O(\|h\|^3)$$

<u>Задача</u> (2)

$$\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v + \ln u \\ z = 2u + v \end{cases} \qquad x = 1, \quad y = 1 \Rightarrow u = 1, \quad v = 1, \quad z = 3$$

$$u(x,y), \quad v(x,y), \quad z(x,y) \text{ - неявные функции}$$

$$\begin{cases} x - u - \ln v = 0 \\ y - v + \ln u = 0 \\ z - 2u - v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \scriptstyle x & \scriptstyle y & \scriptstyle u & \scriptstyle v & \scriptstyle z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{v} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{u} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{v} & 0 \\ \frac{1}{u} & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & -1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{uv} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ условие теоремы выполнено

Найдим диф-лы

$$\left.\begin{aligned} dx &= du + \tfrac{1}{v}dv \\ dy &= dv - \tfrac{1}{u}du \\ dz &= 2du + dv \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ находим } du, dv, dz \text{ через } dx, dy$$

В точке $x = 1, \quad y = 1 \quad u = 1, \quad v = 1, \quad z = 3$

$$\begin{cases} dx = du + dv \\ dy = dv - du \\ dz = 2du + dv \end{cases} \qquad \begin{cases} du = \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy \\ dv = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy \\ dz = \frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}dy \end{cases}$$

Вторые диф-лы

$$d^2x = 0 = d^2u + (-\frac{1}{v^2})dv \cdot dv + \frac{1}{v}d^2v$$

$$d^2y = 0 = d^2v - (-\frac{1}{u^2})du \cdot du - \frac{1}{u}d^2u$$

$$d^2z = 2d^2u + d^2v$$

В точке:

$$\begin{cases} 0 = d^2u - \frac{1}{v^2}(dv)^2 + \frac{1}{v}d^2v = d^2u - (dv)^2 + d^2v \\ d^2v + (du)^2 - d^2u = 0 \\ d^2z = 2d^2u + d^2v \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = (dv)^2 = (\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy)^2 \\ d^2v - d^2u = -(du)^2 = -(\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy)^2 \\ d^2z = 2d^2u + d^2v \end{cases}$$

$$2d^2v = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}dxdy$$

$$2d^2u = 2\frac{1}{4}(dx)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}(dy)^2$$

$$d^2v = \frac{1}{2}dxdy$$

$$d^2u = \frac{1}{4}(dx)^2 + \frac{1}{4}(dy)^2$$

$$d^2z = \frac{1}{2}(dx)^2 + \frac{1}{2}(dy)^2 + \frac{1}{2}dxdy$$

Ф-ла Тейлора:

$$z = 3 + \frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}dy + \frac{1}{4}(dx)^2 + \frac{1}{4}(dy)^2 + \frac{1}{4}dxdy + O(\|h\|^3)$$

Задача (3)

$$(F)(\underset{1}{x},\ x \underset{2}{+} y,\ x + \underset{3}{y} + z))'_x = 0$$

$$z = z(x, y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ?$$

$$F'_1 \cdot (x)'_x + F'_2 \cdot (x+y)'_x + F'_3 \cdot (x+y+z)'_x = 0$$

$$F'_1 \cdot 1 + F'_2 \cdot 1 + F'_3 \cdot (1 + z'_x) = 0$$

$$F'_3 \cdot z'_x = -F'_1 - F'_2 - F'_3 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1$$

$$(F'_1(\underset{1}{x}, x \underset{2}{+} y, x + \underset{3}{y} + z))'_x = F''_{11} \cdot (x)'_x + F''_{12} \cdot (x+y)'_x + F''_{13} \cdot (x+y+z)'_x =$$

$$= F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x$$

$$(F'_3 \cdot z'_x)'_x = (F'_3)'_x \cdot z'_x + F'_x \cdot z''_{xx}$$

$$F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23} + F''_{23} \cdot z'_x + F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x +$$

$$+ (F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x) \cdot z'_x + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F''_{11} + 2F''_{12} + 2F''_{13} + F''_{22} + 2F''_{23} + F''_{33} + (2F''_{13} + 2F''_{23} + 3F''_{33}) \cdot z'_x + F''_{33} \cdot (z'_x)^2 + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F'_3 \cdot z''_{xx} = -F''_{11} - 2F''_{12} - ... - (2F''_{13} + 2F''_{23} + 2F''_{33}) \cdot (-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1) -$$

$$-F''_{33}(-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1)^2$$

z''_{xx} - из ур=я

$$z''_{xx} = -(\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3})'_x$$

Опр (Замена переменных в дифф. ур)

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z}, ...) = 0$$

$$z = z(x, y)$$

новые переменные u, v $\qquad w(u,v)$ - новая функция

$$\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

через $u, v, w, \ \frac{\partial w}{\partial u}, \ \frac{\partial w}{\partial v}$

$$x'_u = f'_1 \cdot (u)'_u + f'_2 \cdot (v)'_u + f'_3 (w)'_u = f'_1 + f'_3 \cdot w'_u$$

$$x'_v = f'_1 \cdot (u)'_v + f'_2 \cdot (v)'_v + f'_3 \cdot w'_v = f'_2 + f'_3 w'_v$$

$$y'_u = g'_1 + g'_3 w'_u$$

$$y'_v = g'_2 + g'_3 w'_v$$

$$z(x(u,v), y(u,v)) = h(u,v,w)$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u & = h'_1 + h'_3 w'_u \\ z'_x x'_v + z'_y y'_v & = h'_2 + h'_3 w'_v \end{cases}$$

$$z'_x = \Phi(y, v, w, w'_u, w'_v)$$

$$z'_y = \Psi(u, v, w, w'_u, w'_v)$$

Распишем как композицию

$$z'_x(x(u,v), y(u,v)) = \Phi(...)$$

$$z''_{xx} x'_u + z''_{xy} y'_u = (\Phi(...))'_u$$

$$z''_{xx} \cdot x'_v + z''_{xy} y'_v = (\Phi(...))'_v$$

Аналогично

$$z'_x(x(u,v), y(u,v)) = \Psi(...)$$

$$z''_{yx} x'_u + z''_{yy} y'_u = (\Psi(...))'_u$$

$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} y'_v = (\Psi(...))'_v$$

Задача (4)

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

Ввести новые переменные

$\exists x$ - новая ф-я, y, z - новые нез. переменные

!Переобозначим, чтобы не запутаться

$$\begin{cases} x = w \qquad w(u,v) \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$x'_u = w'_u \qquad x'_v = w'_v$$

$$y'_u = 1 \qquad y'_v = 1$$

$$z(x(u,v), y(u,v)) = v$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$$

$$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot w'_u + z'_y \cdot 1 = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z'_y = -z'_x \cdot w'_x = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$(w-v)\cdot\frac{1}{w'_v} - u\frac{w'_u}{w'_v} = 0$$

$$w - v - u\cdot w'_u = 0$$

$$w'_u = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

Задача (5) Мы перепутали знак, осторожно !

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \qquad x \text{ - нез перем.} \quad y(x) \text{ - ф-я}$$

φ - новая нез перем $\quad r(\varphi)$ - новая ф-я

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r\sin'\varphi$$

$$y(x(\varphi)) = r\sin\varphi$$

$$y'_x(x(\varphi))\cdot x'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x\cdot(r'_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi) = r'_\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x = \frac{r'_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\frac{r'_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$(r'_\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) = (\cos\varphi - \sin\varphi)\cdot(r'_\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi)$$

$$r'_\varphi\sin\varphi\cos\varphi + r'_\varphi\sin^2_\varphi - r\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$r'_\varphi\cos^2\varphi + r'_\varphi\cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi$$

$$r'_\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$r'_\varphi = -r$$

Задача (6)

$$\begin{cases} x = w'_u \\ y = u\cdot w'_u - w \end{cases}$$

x - старая нез. $\quad y(x)$ - ф-я

u - новая $\quad w(u)$ - ф-я

Найти $y'_x, \quad y''_{xx}, \quad y'''_{xxx}$

$$x'_u = w''_{uu}$$

$$y'_x\cdot x'_u = 1\cdot w'_u + uw''_{uu} - w'_u$$

$$y'_x\cdot w''_{uu} = uw''_{uu}$$

$$y'_x = u$$

$$y'_x(x(u)) = u$$

$$y''_{xx} \cdot x'_u = 1$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{w''_u u}$$

$$y''_{xx}(x(u)) = \frac{1}{w''_{uu}}$$

$$y'''_{xxx} \cdot x'_u = -\frac{1}{(w''_{uu})^2} \cdot w'''_{uuu}$$

$$y'''_{xxx} = -\frac{w'''_{uuu}}{(w''_{uu})^3}$$

Задача (7 3502 - частный случай)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \qquad y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$

$z = w$ старая функция равна новой

$$x'_u = \frac{1 \cdot (u^2+v^2) - 2u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_u = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_v = \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_u = \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_v = \frac{-(u^2+v^2)+2v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$z(x(u,v), y(u,v))$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = w'_u$$

Дз: 3388, 3395, 3404, 3502 закончить, 3433, 3471

2019-11-01

разбор дз от 2019-10-25

Задача (3404)

$$\begin{cases} u+v=x+y \\ \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y} \end{cases}$$

Найти $du,\ dv,\ d^2u,\ d^2v$

$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$

$y\cdot\sin u=x\cdot\sin v$

$du+dv=dx+dy$

$\sin u\cdot dy+y\cdot\cos u\cdot du=\sin v\cdot dx+x\cos v\cdot dv$

$$\begin{cases} du+dv=dx+dy \\ y\cos u\cdot du-x\cos v\cdot dv=\sin v\cdot dx-\sin u dy \end{cases}$$

Решаем по правилу Крамора

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y\cos u & -x\cos v \end{vmatrix}=-x\cos v-y\cos u$$

$$\Delta_{du}=\begin{vmatrix} dx+dy & 1 \\ \sin v\cdot dx-\sin u\cdot dy & -x\cos v \end{vmatrix}=-x\cos v\cdot dx-x\cdot\cos v\cdot dy-$$

$$-\sin v\cdot dx+\sin u\cdot dy$$

$$du=\frac{(-x\cos v+\sin v)dx+(-x\cos v+\sin u)dy}{-x\cos v-y\cos u}$$

$$\Delta_{dv}=\begin{vmatrix} 1 & dx+dy \\ y\cos u & \sin v\cdot dx-\sin u\cdot dy \end{vmatrix}=(\sin v-y\cos u)dx+(-\sin u-y\cos u)dy$$

$$dv=\frac{(\sin v-y\cos u)dx+(-\sin u-y\cos u)dy}{-x\cos v-y\cos u}$$

$d^2u+d^2v=d^2x+d^2y\equiv 0\qquad$ (x, y - нез. перем)

$$dy\cos u\cdot du-y\sin u\cdot du\cdot du+y\cos u\cdot d^2u-dx\cos v\cdot dv+x\sin v\cdot dv\cdot dv-x\cos v\cdot d^2v$$

$$=\cos v\cdot dv\cdot dx+\sin v\cdot d^2x-\cos u\cdot du\cdot dy-\sin u\cdot d^2y$$

$$\begin{cases} d^2u+d^2v=0 \\ y\cos u\cdot d^2u-x\cos v\cdot d^2v=-\cos u\cdot dy\cdot du+y\sin u\cdot(du)^2+\cos v\cdot dx\cdot dv- \\ -x\sin v\cdot(dv)^2+\cos v\cdot dv\cdot dx-\cos u\cdot du\cdot dy \end{cases}$$

Подставить $du,\ dv$ через $dx,\ dy$

Задача (9)

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \qquad y'_x, y''_{xx} \text{ через новые } w, t$$

x - новая ф-я

$t = xy$ - новая нез. перем

$x = w$ - новая ф-я

$$y = \frac{t}{x} = \frac{t}{w}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = \frac{t}{w} \end{cases}$$

$$x'_t = w'_t$$

$$y(x(t)) = \frac{t}{w} = t \cdot w^{-1}$$

$$y'_x \cdot x'_t = w^{-1} + t \cdot (-1)w^{-2} \cdot w'_t = \frac{1}{w} - w^2$$

Подставим

$$y'_x \cdot w'_t = \frac{1}{w} - \frac{t \cdot w'_t}{w^2}$$

$$y'_x = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y'_x(x(t)) = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y''_{xx} \cdot x'_t = -\frac{1}{w^2 \cdot (w'_t)^2} \cdot (w \cdot w'_t)'_t - 1 \cdot w^{-2} - t \cdot (-2)w^{-3} \cdot w'_t =$$

$$= -\frac{w'_t w'_t + w \cdot w''_{tt}}{w^2 \cdot (w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2t \cdot w'}{w^3}$$

$$y''_{xx} \cdot w'_t = -\frac{1}{w^2} - \frac{w''_{tt}}{w(w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2tw'_t}{w^3}$$

$$y''_{xx} = -\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3}$$

$$-\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3} + \frac{2}{w^2 w'_t} - \frac{2t}{w^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-\frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-w''_{tt} + t \cdot (w'_t)^3 = 0$$
$$w'_t = p$$
$$-p'_t + tp^3 = 0$$
$$\frac{dp}{dt} = t \cdot p^3$$

Замена переменных 2 метод

Опр

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} ...) = 0$$

x, y - нез. $\qquad z(x, y)$ - ф-я

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \\ v = g(x, y, z) \\ w = h(x, y, z) \end{cases}$$

u, v - нез $\qquad w(u, v)$ - ф-я

Вычисляем производные по x, y

$$f(x, y, z(x, y))$$

$$u'_x = f'_1 \cdot (x)'_x + f'_2 \cdot (y)'_x + f'_3 \cdot z'_x = f'_1 + f'_3 \cdot z'_x$$
$$v'_x = g'_1 \cdot (x)'_x + g'_2 \cdot (y)'_x + g'_3 \cdot z'_x = g'_1 + g'_3 \cdot z'_x$$
$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$

Берем пр-дную от левой части как от композиции

$$w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = h'_1 \cdot (x)'_x + h'_2 \cdot (y)'_x + h'_3 \cdot z'_x = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

В последнее уравнение подставляем u'_x и v'_x

$$w'_u \cdot (f'_1 + f'_3 \cdot z'_x) + w'_v \cdot (g'_1 + g'_3 \cdot z'_x) = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

Получили линейное уравнение относительно z'_x

$$z'_x = \Phi(x, y, z, w'_u, w'_v)$$

Для нахождения z'_y берем производную от уравнения по y

$$u = f(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, z(\underset{3}{x}, y))$$

$$u'_y = f'_1 \cdot (x)'_y + f'_2 \cdot (y)'_y + f'_3 \cdot z'_y = f'_2 + f'_3 \cdot z'_y$$
$$v = g(x, y, z(x, y))$$
$$v'_y = g'_1 \cdot (x)'_y + g'_2 \cdot (y)'_y + g'_3 \cdot z'_y$$
$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$
$$w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = h'_1 \cdot (x)'_y + h'_2 \cdot (y)'_y + h'_3 \cdot z'_y$$

Подставим и получим уравнение

$$w'_u \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w'_v \cdot (g'_2 + g'_3 \cdot z'_y) = h'_2 + h'_3 \cdot z'_y$$

лин. ур отн z'_y

$$z'_y = \psi(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, \underset{3}{z}, \underset{4}{w'_u}, \underset{5}{w'_v})$$
$$z = z(x, y) \qquad w'_u(u(x, y), v(x, y))$$
$$z''_{yy} = \psi'_1 \cdot (x)'_y + \psi'_2 \cdot (y)'_y + \psi'_3 \cdot z'_y + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_y + \psi'_5 \cdot (w'_v)'_y$$
$$(w'_u(u(x, y), v(x, y)))'_y = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y =$$

Подставим

$$= w''_{u^2} \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w''_{uv} \cdot (g'_3 + g'_3 \cdot z'_y)$$

Подставим z'_y

$$(w'_v(u(x, y), v(x, y)))'_y = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y$$

подставим u'_y, v'_y, z'_y

$$w''_{vu} = w''_{uv}$$

$$z''_{yx} = z''_{xy}$$
$$z''_{xy} = z''_{yx} = \psi'_1 \cdot (x)'_x + \psi'_2 \cdot (y)'_x + \psi'_3 \cdot z'_x + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_x + \psi'_5 \cdot (w_v)'_x$$

$$(w'_u(u(x, y), v(x, y)))'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x$$

Подставить z'_x

Замечание

Существует методичка на кафедре анализа по замене переменных

Задача (1)

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z \qquad u=x^2+y^2 \qquad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \qquad w=\ln z-(x+y)$$

Найти производные от всех ур-ний по x, потом от всех по y

$$w(u,v)=w(u(x,y),v(x,y))$$

$$u'_x=2x$$

$$v'_x=-1\cdot x^{-2}$$

$$w'_x=w'_u\cdot u'_x+w'_v\cdot v'_x=\frac{1}{z}\cdot z'_x-1$$

$$w'_u\cdot 2x+w'_v\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{1}{z}\cdot z'_x-1 \qquad z\cdot(w'_u2x+w'_v\frac{-1}{x^2})+z=z'_x$$

Аналогично от всех по y

$$u'_y=2y$$

$$v'_y=\frac{-1}{y^2}$$

$$w'_y=w'_u\cdot u'_y+w'_v\cdot v'_y=\frac{1}{z}\cdot z'_y-1$$

$$2yw'_u-\frac{1}{y^2}w'_v=\frac{1}{z}\cdot z'_y-1$$

$$z'_y=z\cdot(2yw'_u-\frac{1}{y^2}w'_v)+z$$

Подставим производные в уравнение

$$y\cdot z\cdot(w'_v2x+w'_v\frac{-1}{x^2})+yz-xz(2yw'_u-\frac{1}{y^2}w'_v)-xz=yz-xz$$

$$z(2xyw'_u-\frac{y}{x^2}w'_v-2yxw'_u+\frac{x}{y^2}w'_v)=0$$

$$z\cdot w'_v\cdot(-\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2})=0$$

Получили три варианта

$z\equiv 0$ - реш. уравнения

$\underline{w'_v = 0}$ новый вид нашего уравнения

$\dfrac{-y^3 + x^3}{x^2y^2} = 0 \Leftrightarrow y = x$ особенность нашей замены, а не уравнения

$w'_v = 0 \Leftrightarrow w = \varphi(u) \quad$ (произвольная функция) $\in C^1$

$\ln z - (x = y) = \varphi(x^2 + y2)$

$\ln z = \varphi(x^2 + y^2) + x + y$

$z = e^{\varphi(x^2+y^2)+x+y}$

Если заменить z на $-z$ уравнение удовл.

$z = c \cdot e^{\varphi(x^2+y^2)+x+y}$ на самом деле решение выглядит так

Задача (2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + \frac{\partial z}{\partial y})^3$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + z \\ w = z \quad \text{по умолч.} \end{cases}$$

$w(u, v) = w(u(x, y), v(x, y))$

$u'_x = 1$

$v'_x = z'_x$

$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = z'_x$

$w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot z'_x = z'_x$

$z'_x = \dfrac{w'_u}{1 - w'_v}$

Я писал у доски

Можно было решать и первым способом

$x = u$

$y = v - z = v - w$

$z = w$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v - w \\ z = w \end{cases}$$

Задача (3512)

$$z(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2})=(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$$

$$\begin{cases} w=z^2 \\ \text{по умолч} \\ u=x \\ v=y \end{cases}$$

$$z^2=(z(x,y))^2$$

$$u'_x=1$$

$$v'_x=0$$

$$(w)'_x=w'_u\cdot u'_x+w'_v\cdot u'_x=2zz'_x$$

$$w'_u=2zz'_x$$

$$z'_x=\frac{w'_u}{2z}$$

$$u'_y=0$$

$$v'_y=1$$

$$w'_y=w'_u\cdot u'_y+w'_v\cdot v'_y=2zz'_y$$

$$w'_v=2zz'_y$$

$$z'_y=\frac{w'_v}{2z}$$

$$(z'_x)'_x=\frac{1}{2}\frac{(w'_u)'_x\cdot z-(z)'_x\cdot w'_u}{z^2}$$

$$(w'_u)'_x=w''_{uu}\cdot u'_x+w''_{uv}\cdot v'_x=w''_{uu}$$

$$(z'_x)'_x=\frac{1}{2}\frac{w''_{uu}\cdot z-\frac{w'_u}{2z}\cdot w'_u}{z^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2z^2w'_{uu}-(w'_u)^2}{2z^3}\right)$$

$$(z'_y)'_y=\frac{1}{2}\left(\frac{2z^2w'_{vv}-(w'_v)^2}{2z^3}\right)$$

$$z\left(\frac{2z^2(w''_{uu}+w''_{vv})-(w'_v)^2-(w'_u)^2}{4z^3}\right)=\left(\frac{w'_u}{2z}\right)^2+\left(\frac{w'_v}{2z}\right)^2$$

$$2z^2w''_{uu}+2z^2w''_{vv}-2(w'_u)^2-2(w'_v)^2=0$$
$$w(w''_{uu}+w''_{ww})-(w'_u)^2-(w'_v)^2=0$$
$$w(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2})=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$$

Задача (3507)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$
$$\begin{cases}u=x+z\\v=y+z\\w=z\end{cases}$$

$$u'_x=1+z'_x$$
$$v'_x=z'_x$$
$$w'_x=w'_u\cdot u'_x+w'_v\cdot v'_x=z'_x$$
$$w'_u+w'_uz'_x+w'_v\cdot z'_x=z'_x$$

Линейное уравнение отн z'_x

$$z'_x=\frac{w'_u}{1-(w'_u+w'_v)}$$
$$u'_y=z'_y$$
$$v'_y=1+z'_y$$
$$w'_y=w'_u\cdot u'_y+w'_v\cdot v'_y=z'_y$$
$$z'_y=\frac{w'_v}{1-(w'_u+w'_v)}$$
$$(w'_u)'_x=w''_{uu}\cdot u'_x+w''_{uv}\cdot v'_x=w''_{uu}(1+z'_x)+w''_{uv}\cdot z'_x$$
$$(w'_v)'_x=w''_{vu}\cdot u'_x+w''_{vv}\cdot v'_x=w''_{uu}(1+z'_x)+w''_{vv}\cdot z'_x$$
$$z''_{xx}=\left(\frac{w'_u}{1-(w'_u+w'_v)}\right)'_x=\frac{(w'_u)'_x(1-(w'_u+w'_v))-w'_u\cdot((w'_u)'_x+(w'_v)'_x)}{(1-(w'_u+w'_v))^2}$$
$$\frac{(w'_u(1+z'_x)+w''_{vu}z'_x)(1-(w'_u+w'_v))+w'_u(w''_{uu}\cdot(1+z'_x)+z'_x(w''_{vu}+w''_{vv}))}{(1-(w'_u+w'_v)^2)}\overset{*}{=}$$

$$1 + z'_x = \frac{w'_u + 1 - w'_u - w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)} = \frac{1 - w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$\overset{*}{=} \frac{w''_{uu}(1 - w'_v) + w''_{vu} \cdot w'_u + \frac{w'_u \cdot w''_{uu} w''_{vu}(1-w'_v)}{1-(w'_u+w'_v)} + \frac{w'_u}{1-(w'_u+w'_v)}(w''_{vu} + w''_{uu})}{}$$

Закончить дома

Задача (3525)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

Доказать, что не меняется при любом распределении ролей между перем.
Будем делать первым методом

$$y, z \text{ - нез. перем} \qquad x \text{ - ф-я}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$u, v \text{ - нез.} \qquad w(u, v) \text{ - ф-я}$$

$$x'_u = w'_u \qquad y'_u = 1$$

$$x'_v = w'_v \qquad y'_v = 0$$

$$z(x(u, v), y(u, v)) = v$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$$

$$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$$

$$\begin{cases} z'_x w'_u + z'_y \cdot 1 & = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 & = 1 \end{cases}$$

$$z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$z'_y = -z'_x w'_u = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z'_x(x(u, v), y(u, v)) = \frac{1}{w'_v}$$

$$z''_{xx} \cdot x'_u + z''_{xy} \cdot y'_u = \left(\frac{1}{w'_v}\right)'_u = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} \cdot x'_v + z''_{xy} \cdot y'_v = \left(\frac{1}{w'_v}\right)'_v = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} w'_u + z''_{xy} \cdot 1 = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} \cdot w'_v + z''_{xy} \cdot 0 = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^3}$$

$$z''_{xy} = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} - z''_{xx} \cdot w'_u = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} + \frac{w''_{vv} \cdot w'_u}{(w'_v)^3}$$

$$z'_y(x(u,v), y(u,v)) = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z''_{yx} \cdot x'_u + z''_{yy} = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_u$$

$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} \cdot y'_v = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_v$$

$$z''_{yx} \cdot w'_u + z''_{yy} \cdot 1 = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_u$$

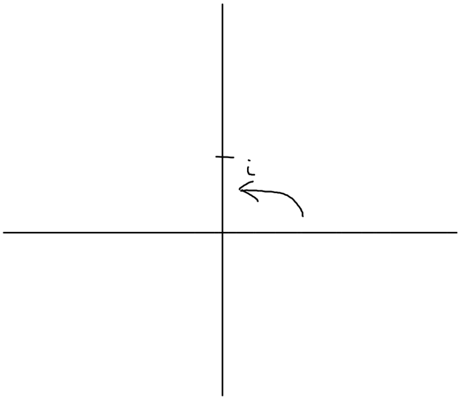
$$z''_{yx} \cdot w'_v + z''_{yy} \cdot 0 = (-\frac{w'_u}{w'_v})'_v$$

2019-11-08 ТФКП

Волковыский, Лунц, Араманович сборник задач по ТФКП

Задача

$\sqrt[3]{i}$ - все значения



Так будем обозначать все аргументы (с большой буквы)

$$\text{Arg } i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg } z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } z}{n} \right)$$

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{|i|} (\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \frac{\sin \frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3})$$

$$= 1(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}))$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_3 = -i$$

Задача

$\sqrt{1-i}$ - все значения

$$\mathrm{Re}(1-i)=1$$

$$\mathrm{Im}(1-i)=-1$$

$$|1-i|=\sqrt{2}$$

$$\mathrm{Arg}\ (1-i)=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$\sqrt{1-i}=\sqrt{|1-i|}(\cos\frac{\mathrm{Arg}\ (1-i)}{2}+i\sin\frac{\mathrm{Arg}\ (1-i)}{2})$$

$$k=0 \quad z_1=\sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{8})+i\sin(-\frac{\pi}{8}))$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\sin^2(-\frac{\pi}{8})=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$$

$$z_2=-z_1=-\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$$

Опр **(Формула Эйлера)**

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$$

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

Опр

$$Lnz=w=u+iv \ \Leftrightarrow e^{\ w}\underset{z\neq 0}{=}z \ \Leftrightarrow\ e^u(\cos v+i\sin v)=z$$

$$e^u=|z|$$

$$v=\mathrm{Arg}\ z$$

$Lnz=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\ z$ комплексный лог.

Опр

$$a > 0,\ \ b \in \mathbb{R}$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

По аналогии

$$z_1 \neq 0 \quad \Rightarrow z_1^{z_2} \overset{def}{=} e^{z_2 \cdot Ln z_1}$$

Утв

Если $z_2 = n \in \mathbb{N}$, то

$$z_1^n = \underbrace{z_1 \cdot z_1 ... z_1}_{n}$$

Если $z_2 = -n$, то

$$z_1^{-n} = \frac{1}{z_1 \cdot z_1 \cdot ... \cdot z_1}$$

Если $n = \dfrac{p}{q}$, то

$$z_1^n = (\sqrt[q]{z_1})^p$$

Задача (1)

Посчитать $e^{\frac{\pi i}{4}}$

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = e^0(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача (2)

Вычислить

$$Ln(1 + i)$$

$$|1 + i| = \sqrt{2}$$

$$\text{Arg }(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

Задача (3)

$$1^{\sqrt{2}}$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(i2\pi k)} =$$

$$|1| = 1$$

$$\text{Arg } 1 = 0 + 2\pi k$$

$$Ln1 = i \cdot 2\pi k$$

$$= e^0(\cos 2\sqrt{2}\pi k + i \sin 2\sqrt{2}\pi k)$$

$$= \cos(2\sqrt{2}\pi k + i \sin 2\sqrt{2}\pi k)$$

$$k = 0 \quad 1$$

$$k = 1 \quad \cos(2\sqrt{2}\pi) + i\sin(2\sqrt{2}\pi)$$

Всюду плотно. Их бесконечно много и все на ед. окр.

Задача (4)

$$i^i{-}?$$

$$Lni = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$i^i = e^{i \cdot Lni} = e^{i \cdot i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$$

точки расположены на луче

Задача (5)

$$(1+i)^{(1-i)}$$

$$e^{(1-i)Ln(1+i)} =$$

$$Ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

$$= e^{(1-i)(\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k))}$$

$$= e^{\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i(-\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)}$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}(\cos(-\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i\sin(-\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k))$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}(\cos(-\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(-\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}))$$

Опр

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{ch} z = \cos(iz) \qquad \operatorname{sh} z = i \cdot \sin(iz)$$

Отсюда получаются все тригонометрические тождества

$$\cos z = \operatorname{ch}(-iz) = \operatorname{ch}(iz)$$
$$\sin z = \frac{1}{i}\operatorname{sh}(\frac{1}{i}z) = (-i)\cdot\operatorname{sh}(-iz) = i\cdot\operatorname{sh}(iz)$$

Задача (6)

Доказать $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$

$$\sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2 = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_1}}{2} +$$
$$\frac{e^{iz_2} + e^{iz_2}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2i} =$$
$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(-z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} +$$
$$+ \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(-z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} =$$
$$= \frac{2e^{i(z_1+z_2) - 2e^{-i(z_1+z_2)}}}{4i} = \sin(z_1+z_2)$$

Задача (7)

$\sin(x+iy)$ через гипербол. ф.

$$\sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{-ix}\cdot e^{y}}{2i}$$

Удобнее по-другому

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \sin(iy)\cos(x) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + \cos x \cdot i \operatorname{sh} y =$$
$$= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

Задача (8)

$$w = \arcsin z \overset{def}{\Leftrightarrow} \sin w = z$$

$$\frac{e^{iw} - e^{iw}}{2i} = z$$

$$e^{-iw} = \frac{1}{e^{iw}}$$

$$\frac{e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}}}{2i} = z$$

$$t = e^{w} \neq 0$$

$$t - \frac{1}{t} = 2iz \;\; \Leftrightarrow \;\; t^2 - 1 = 2izt$$

$$t^2 - 2iz - 1 = 0$$

$$D = (-2iz)^2 + 4 = 4 - 4z^2$$

$$t = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \neq 0$$

$$iw = Ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

$$w = \frac{Ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})}{i} = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

Задача (9)

$$\arcsin 2 = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - 4}) = -iLn(2i \pm i\sqrt{3}) = -iLn(i(2 \pm \sqrt{3})) =$$

$$Arg = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

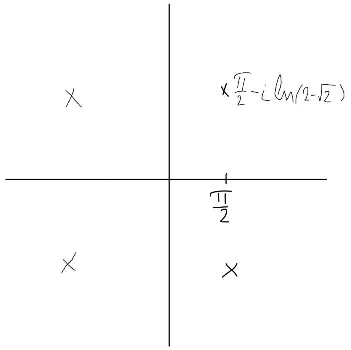
$$|..| = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$-i(\ln(2 + \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = -i\ln(2 + \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$= -i(\ln(2 - \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = -i\ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$$



Задача (дз)

$$\cos(x+iy) \qquad \operatorname{tg}(x+iy) \qquad (-2)^{\sqrt{2}} \qquad (3-4i)^{1+i}$$

Найти $\operatorname{arctg} z$ через Ln

Надо сразу перейди к двойному арг.

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{iw}}{i(e^{iw} + e^{iw})}$$

$$\operatorname{arctg}(1+2i)$$