2019-10-11 Классы смежности

Опр

G - группа $\qquad H \leqslant G$

$g \in G \qquad gH = \{gh \ | \ h \in H\}$ левый класс смежности

$$g_1, g_2 \in G \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g_1H = g_2H \\ g_1H \cap g_2H \quad = 0 \end{array}\right.$$

$gh_1 = gh_2$

$g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2$

$\Rightarrow h_1 = h2$

Следствие (Теор. Лагранжа)

$|G| = n$ и $H \leqslant G \qquad |H| = k$

$\Rightarrow n \,\vdots\, k$

Следствие (2)

$g \in G \quad n \,\vdots\, \operatorname{ord} g$

Док-во (2)

$H = \{g^0, g^1, g^2, ..., g^{\operatorname{ord} g - 1}\} \qquad |H| = \operatorname{ord} g$

Опр

Если $\forall g \in G \qquad gH = Hg$, то H - назыв. нормальной под-пой G

$\Leftrightarrow \forall g \in G \qquad H = gHg^{-1}$

2019-10-18

Задача (1)

Доказать: $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(xgx^{-1}) \qquad g, x \in G$

$$(g)^n = e$$

$$(xgx^{-1})^m = e$$

т.к. есть ассоц., то можно скобки переставлять

$$(xgx^{-1})(xgx^{-1}) \cdot ... \cdot (xgx^{-1}) = xg^m x^{-1}$$

$$xg^m x^{-1} = e$$

$$x^{-1}xg^m x^{-1}x = x^{-1}x = e$$

$$g^m = e$$

$$xg^n x^{-1} = e$$

$$= (xgx^{-1})(xgx^{-1}) \cdot ... \cdot (xgx^{-1}) = e$$

$$\Rightarrow (xgx^{-1})^n = e$$

$$\Rightarrow m = n$$

Задача (2)

Доказать: $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba) \qquad a, b \in G$

$$\urcorner \quad \begin{matrix} \mathrm{ord}(ab) = n \\ \mathrm{ord}(ba) = m \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (ab)^n = e \\ (ba)^m = e \end{matrix}$$

$$1) \quad \underbrace{(ab)(ab)...(ab)}_{n} = e$$

$$2) \quad \underbrace{(ba)(ba)...(ba)}_{m} = e$$

$$\Rightarrow \underbrace{(ab)(ab)...(ab)}_{m} = b^{-1}eb = e$$

$$\Rightarrow m \geqslant n$$

Аналогично $n \leqslant m$

$$\Rightarrow m = n$$

Задача (3)

Найти классы смежности

1. $(\mathbb{Z}, +)$ (по подгруппе $n\mathbb{Z}$)
   отв: остатки от деления на n

2. $(\mathbb{C}, +)$ по подгруппе целых Гаусовых чисел

Опр

f - гомоморфизм групп $f:\ G \to H,$ если

$(G, \cdot), (H, \circ) \qquad f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y)$

Опр

f - изоморфизм, если f - гомоморфизм и биекция

Теорема

$f : G \to H$, тогда

$G_{/\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$

Утв

изоморфизм сохраняет порядок

Задача (1)

(!) $(G, \cdot) \simeq (G, \circ),$ где $x \circ y = x \cdot a \cdot y$ a - фикс эл-нт G

Задача (2)

Изморфны ли группы?
С - цикл. группа

1. $C_2 \times C_3$ и S_3

2. $C_2 \times C_3$ е и C_6

3. $C_4 \times C_6$ и $C_8 \times C_3$

2019-10-25

Задача (1)

Изоморфны ли $C_8 \times C_3$ и $C_4 \times C_6$?

В $C_8 \times C_3$ есть эл-ты порядка 24
В $C_4 \times C_6$ макс порядок 12
$f : G \to H$ изоморфизм
$g \to h$ у g и h разные порядки?

$$(f(g))^{12} = f(g^{12}) = e$$

h - порядка 24 $h \in C_8 \times C_3$

$$f : C_4 \times C_6 \to C_8 \times C_3$$

$$g \to h$$

$$g = f^{-1}(h)$$

$$f(g^{12}) = e = (f(g))^{12}$$

$$f : G \to H$$

$$g \to h \qquad \exists \text{ порядок } g = n \qquad \text{порядок } h = m$$

$$h^n = (f(g))^n = f(g^n) = f(e_1) = e_2 \qquad m \,\vdots\, n \qquad m \geqslant n$$

$$e_2 = h^m = (f(g))^m = f(g^m) \Rightarrow e_1 = g^m \Rightarrow n \,\vdots\, m \quad n \geqslant m \Rightarrow n = m$$

Задача (2)

Для каких G следующие отображения $f : G \to G$
гомоморфизмы

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^{-1}$

Если взять $(Z, +)$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x + y) = 2(x + y)$$

Нужно проверить, выполняется ли такое соотношение:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x \cdot y) = x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot x \cdot y \cdot y$$

Для этого нужна комм. группа

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^2 = (x \cdot y)(x \cdot y)$$

$$f(x) \cdot f(y) = x^2 \cdot y^2 = x \cdot x \cdot y \cdot y$$

$$x \cdot (y \cdot x) = x \cdot (x \cdot y) \Leftrightarrow x \cdot y \cdot x = x \cdot x \cdot y \Leftrightarrow y \cdot x = x \cdot y$$

Ответ для 1. Необходима комм. группа

$$f(x) = x^{-1}$$

$$f(x \cdot y) = f(x)f(y) = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

$$f(x \cdot y) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = e$$

$$y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad \Big| \cdot x$$

$$xy^{-1}x^{-1} = y^{-1} \quad \Big| \cdot y$$

$$yxy^{-1}x^{-1} = e$$

$$yx = xy$$

Задача (3)

Найти нормальные подгруппы S_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3 подгруппы, (1 элемент остается на месте)
Рассмотрим циклы длины 3
Если возвести цикл в квадрат, то мы получим обратную перестановку
2 подгруппы (2 цикла)
1 группа из id

$$\{e, (1\ 2)\}$$

$$\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \text{ - нормальная?}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

порядок (1 2 3) $= 3$

В S_3 3 элемента

$g(1\ 2\ 3)g^{-1} =$ цикл длины 3

$\{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ - действительно нормальная

Проверим $\{e, (1\ 2)\}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Элемент не остался на месте

$\{e, (1\ 2)\}$ не нормальная

$S_{3/H} \simeq C_2$

Утв

Если есть цикл длины n, то порядок $= n$

Напоминание

$Q_8 \qquad \pm 1 \quad \pm i \quad \pm j \quad \pm k$

-1 коммутирует со всеми

$i \cdot j = k$

$j \cdot i = -k$

$j \cdot k = i$

$i \cdot k = -j$

$i^2 = -1$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Задача (4)

(!) Q_8 изоморфна группе матриц по умножению

$$E = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad \pm I = \begin{pmatrix}0 & i\\i & 0\end{pmatrix}$$

$$J = \pm\begin{pmatrix}i & 0\\0 & -i\end{pmatrix} \qquad \pm K = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\pm 1 \to \pm E$$

$$\pm i \to \pm I$$

$$\pm j \to \pm J$$

$$\pm k \to \pm K$$

$$K^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = -E$$

Надо все проверить

Упр

Досчитать 4 дома

Задача (5)

Найти все гомоморфизмы $Z_6 \to Z_{18}$

$$(\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_{/18}\mathbb{Z}, +)$$

$$(\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_{/18}\mathbb{Z}, +)$$

Вариант от Сережи

Слева порядок, а справа элемент из $\mathbb{Z}_{/6}\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ll}
1 & 0 \to 0\\
6 & 1 \to 3\\
3 & 2 \to 6\\
2 & 3 \to 9\\
3 & 4 \to 12\\
6 & 5 \to 15
\end{array}$$

$$f(x) = 3kx, \quad k \in N$$

$$f(x) = 3x$$

$$f(x) = 3kx \mod 18$$

$$f(x+y) = 3k(x+y) = 3kx + 3ky = f(x) + f(y)$$

Почему нельзя взять любое k?

$$0 = f(0) = f(1_1^6) = f(1_1)^6 = 6(1_2) \neq 0$$

$$f(1_1) \to$$

$$f(2_1) = f(1_1 + 1_1) = f(1_1) + f(1_1)$$

$$f(k_1) = kf(1_1)$$

1_1 - имеет порядок 6, значит она не может отобразиться в элементы с порядком не делителем 6, а иначе противоречие

$$f(1_1) \to 9_2$$

$$f(1_1) \to 12_2$$

2019-11-15 Конечные поля

Опр

$$|F| < \infty \quad \Rightarrow \quad F - \text{Конечное}$$

Опр

$$charF = \text{мин. ко-во ед, которое нужно сложить, чтобы получить ноль}$$

Задача (1)

Существует ли поле из $p \cdot q$ элементов, где p, q простые

Опр

$\exists f$ - неприв мн-н в поле K

$$K[x] \leftarrow \text{ есть идеал } < f >$$

Задача (2)

$$K[x]_{/<f>} \text{ - поле, если } f \text{неприв}$$

$$< f > \text{ - макс. идеал}$$

$$f, g, \text{ где } g \not\vdots f \qquad (f, g) = 1$$

$$1 = af + bg \qquad a, b \text{ - многочлены}$$

Опр

$\exists I$ - максимальный идеал

$$R \text{ - кольцо}$$

$$\forall I_1 \quad I \subset I_1 \subset R \to \left[\begin{matrix} I_1 = I \\ I_1 = R \end{matrix}\right.$$

Переформулировка

$$R_{/I} \text{ - поле}$$

Задача

$$\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \quad \text{ хотим поле из 4 эл-тов}$$

$$x^2 + x + 1 \text{ - неприв в } \mathbb{Z}_{/2}\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}_{/2}\mathbb{Z}[x]/_{<x^2+x+1>} = \{0, 1, x, x+1\}$$

Задача (2)

Найти $x \cdot (x+1)$ в $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}[x]/_{<x^2+x+1>}$
Ответ: 1

	0	1	x	x + 1
0	0	0	0	0
1	0	1	x	x + 1
x	0	x	x + 1	1
x + 1	0	x + 1	1	x

Задача (3)

В поле хар-ки p $\exists$ подполе изоморфное $\mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}$

Задача (4)

1. $\mathbb{Q}[x]/_{<x^3+2x^2+2x+1>}$ - поле
2. Найти обратный к $x^2 + x + 1$

Задача (5)

1. Найти неприв. мн-н степени 3 в $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z}$
2. Найти неприв мн-ны степеней 2 и 3 в $\mathbb{Z}/_3\mathbb{Z}$

Задача (6)

Написать таблицу умножения для $\mathbb{Z}/_3\mathbb{Z}[x]/_{<x^2+1>}$