2019-10-01

Напоминание

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m^2\}$$

Док-во

$$\sum_{g \in G} |M^g| = |\{(g, m) \in G \times M : gm = m\}| =$$

$$= \sum_{m \in M} |Stab\ m| = |G| \sum_{m \in M} \frac{1}{|Orb\ m|} = |G| \cdot \text{Кол-во орбит}$$

1 Евклидовы и унитарные пр-ва

Опр

$$V \text{ - в.п. над } \mathbb{R}$$

Введем отображение

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(u, v)$$

Свойства этого отображения

1. Симметричность

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in V$$

2. Линейность

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \quad u, v \in V$$

$$(u + u', v) = (u, v) + (u', v) \qquad u, u', v \in V$$

3. $(u, v) \geqslant 0 \qquad \forall u \in V$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Такое пр-во V с введенным на нем таким отображением мы называем Евклидовым пр-вом, а отображение скалярным.

Напоминание

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \text{ - квадр. матрица}$$

$$Tr\ C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \text{ - след (Trace)}$$

(Сумма элементов главной диагонали)

Примеры

1. Школьные вектора
2. $\mathbb{R}^n$

$$((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_n$ конечномерное пр-во

$$(f, g) = \int_a^b fg dx$$

4. $V = M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) = Tr\ AB^T$$

(См. след в напоминании)

Опр

$$e = \{e_1, ..., e_n\} \text{ - базис } V$$

$$a_{ij} = (e_i, e_j)$$

$$\Gamma_e = \{a_{ij}{}_{i,j=1}^{n}\} \text{ - матрица Грама}$$

Свойства (матрицы Грама)

1. Матрица невырожд
2. e, f - базисы

$$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e M_{e\to f}$$

3. $\Gamma_e = \{a_i j\}$

$$u = \sum \lambda_i e_i$$

$$v = \sum \mu_j e_j$$

$$(u, v) = (\sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j)$$

$$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e [v]_e$$

Док-во

1. $\exists\, |\Gamma_e| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ не все 0 :

$$\sum \lambda_i (e_i, e_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum \lambda_i e_i,\ e_j \right) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum_i \lambda_i e_i,\ \sum_j \lambda_j e_j \right) = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_i e_i = 0$$

   противоречие

2. $\exists M_{e \to f} = \{a_{ik}\} \qquad f_k = \sum a_{ik} e_i$

$$f_l = \sum a_{jl} e_j$$

$$(f_k, f_l) = \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} (e_i, e_j)$$

$$a_{ik} (e_i, e_j) a_{je}$$

   Напоминание: X, Y- матр $\qquad X \times Y = Z \quad z_{ij} = \sum x_{is} y_{sj}$

Опр

$$V \text{ - в.п. над } \mathbb{R}$$

$$V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

$$v \to \|v\| \text{ - норма}$$

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V$

2. Нер-во треугольника

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

3. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Если такое отобр. существует, то оно называется нормой

Утв

$$(u, v) \text{ - ск. пр-ве}$$

$$\Rightarrow \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

Пример

$$\mathbb{R}^n$$

$$\|x\| = \max |x_i|$$

$$\|x\| = \sum_i |x_i|$$

Теорема (Нер-во Коши - Буняковского)

$$|(u,v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$$

Док-во

$$\varphi(t) = \|u + rv\|^2 = (u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + 2(u,v)t + t^2\|v\|^2$$

$$D = 4(u,v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$$

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

$$(u + v, u + v) \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$$

$$(u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u,v)$$

$$2(u,v) \leqslant 2\|u\|\|v\|$$

Утв (Теорема Пифагора)

$$\text{Если } u \perp v \Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Док-во

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u,v)$$

Опр (Ортогональное дополнение)

$$V \text{ - евкл. пр-во}$$

$$U \subset V \qquad U^\perp = \{v \in V : (v,u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

Множество всех векторов, которые ортогональны всем векторам из U
Такое мн-во называется ортогональным дополнением

Утв

$$U^\perp \text{ - под-пр } V$$

Док-во

$$\begin{array}{l}(v,u)=0 \quad \forall u\\(v',u)=0 \quad \forall u\end{array} \Rightarrow (v+v',u)=0 \quad \forall u$$

$$(v,u)=0 \quad \forall u$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda v,u)=0 \quad \forall u$$

Тогда $U^{\perp}$ дей-во линейное под-прво V

Свойства

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

$$u\in U\cap U^{\perp}$$

$$u\in U \quad u\in U^{\perp}$$

$$(u,u)=0$$

Док-во

$e_1,...,e_n$ - базис U дополняем до базиса V

$e_1,...,e_n,f_1,...,f_n$ - базис V

$$v\in U^{\perp} \quad v=\sum \lambda_i e_i+\sum \mu_j f_j$$

$$v\in U^{\perp} \Leftrightarrow (v,e_k)=0 \quad \forall 1\leqslant k\leqslant n$$

$$(v,e_k)=\sum \lambda_i(e_i,e_k)+\sum \mu_j(f_j,e_k)=0 \qquad \forall 1\leqslant k\leqslant n$$

это матрица

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{n} & \text{m}\\ \hline \text{n} & \Gamma_e & \text{C}\\ \hline \end{array}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma_e x+C_y=0$$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m:\Gamma_e x+C_y=0\}$ - размерность этого m

$$(x,y)\to y$$

$$\Gamma_e x+C_y=0$$

$$x=-\Gamma_e^{-1}e_y$$

$$\dim U+\dim U^{\perp}=\dim V$$