1 Вычисление интеграла Дирихле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$.

2 Ядра Дирихле, их свойства. Выражение частичных сумм ряда Фурье через ядра Дирихле.

$$S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e_k(x) = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt \cdot e^{2\pi ikt} = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{2\pi ik(x-t)}dt =$$

$$= \int_0^1 f(t) \underbrace{\sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ik(x-t)}}_{\text{Ядро Дирихле}}$$

<u>Опр</u> (ядро Дирихле)

$$D_N(y) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ky} \overset{\text{геом. прог.}}{=} e^{-2\pi iNy}\frac{1-e^{2\pi i(2N+1)y}}{1-e^{2\pi iy}} =$$

$$= e^{-2\pi iNy}\frac{1-e^{2\pi i(2N+1)y}}{1-e^{2\pi iy}} \cdot \frac{1-e^{-2\pi iy}}{1-e^{-2\pi iy}} = \frac{e^{-2\pi iNy}+e^{2\pi iNy}-e^{-2\pi i(N+1)y}-e^{2\pi i(N+1)y}}{1+1-e^{2\pi iy}-e^{-2\pi iy}} =$$

$$= \frac{2\cos 2\pi Ny - 2\cos 2\pi(N+1)y}{2-2\cos 2\pi y} =$$

Через разность косинусов

$$= \frac{2\sin \pi(2N+1)y \sin \pi y}{2\sin^2 \pi y} = \frac{\sin \pi(2N+1)y}{\sin \pi y}$$

$$D_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(2N+1)y}{\sin \pi y}, & y \neq 0 \\ 2N+1, & y = 0 \end{cases}$$

<u>Свойства</u>

1. $D_N(-y) = D_N(y)$ четная
2. $D_N \in C[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$
3. $D_n = \sum_{j=-N}^{N} e_j(y)$

$$\hat{D}_N(k) = < D_n,\ e_k >$$

$$\hat{D}_n(k) = \begin{cases} 1, & |k| \leqslant N \\ 0, & |k| > N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_N(0) = < D_N,\ e_0 > = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_N(t)dt = 1$$

Таким образом, част. суммы р. Фурье выражаются через ядро Дирихле.

$$S_N f(x) = \int_0^1 f(t) \cdot D_N(x-t)dt$$

3 Свертка. Простейшие свойства. Свертка с тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

<u>Опр</u> (Свертка функций)

$$f, g \in R\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)g(x-t)dt \quad \text{- свертка } f \text{ и } g$$

$$\text{т.о } S_n = f * D_N$$

<u>Свойства</u>

1. $f * g = g * f$ коммутативность

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)g(x-t) = [x-t=s] = -\int_{x+\frac{1}{2}}^{x-\frac{1}{2}} f(x-s)g(s)ds =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s)f(x-s)ds = g * f$$

2. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

3. $f * (kg) = k(f * g)$

4. $f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\quad T_N$ - тригонометр. полином степ $\leqslant N$
Тогда $f * T_n$ - тригоном. полином степ $\leqslant N$

$$f * T_N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)T_N(x-t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi i k(x-t)}dt =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)e^{-e\pi ikt}dt \cdot e^{2\pi ikx} \text{ - триг. полином степ. } N$$

5. $f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$P_N \text{ - алг. полином степ } \leqslant N$$

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot x^k$$

$$f * P_N = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sum_{k=0}^{N} a_k(x-t)^k$$

4 Принцип локализации Римана.

$$S_N f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x-t) D_N(t) dt$$

Лемма

$$f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{N \to \infty} \int f(x-t) D_N(t) dt = 0$$

$$\delta \leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}$$

5 Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье для локально-Гельдеровой функции.

Теорема

здесь когда-нибудь будет теорема

Док-во

здесь когда-нибудь будет док-во

6 Ядра Фейера, их свойства. Связь с $\sigma_N(f)$.

здесь когда-нибудь будет разобрано, что тут нужно, потому что скорее всего имелось ввиду то, что за прошлым билетом

$$S_N f = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k(x)$$

$$\sigma_N f(x) = \frac{S_0 + S_1 + ... + S_N f}{N+1} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} f * D_k(x) =$$

$$= f * (\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k)$$

Опр (Ядро Фейера)

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} \frac{\sin \pi(2k+1)x}{\sin \pi x}$$

$$(\sum_{k=0}^{N} \sin \pi(2k+1)x) \cdot \sin \pi x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} (\cos 2\pi k x - \cos 2\pi(k+1)x) =$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x + \cos 2\pi x - \cos 4\pi x + \cos 4\pi + ... - \cos 2\pi(N+1)x)$$

$$F_N(x) = \frac{1 - \cos 2\pi(N+1)x}{2(N+1)\sin^2 \pi x} = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2 \pi(x+1)x}{\sin^2 \pi x}$$

$\sigma_N(f)$ - сумма Фейера

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k = \int_0^1 f(t) F_N(x-t)dt$$

7 Аппроксимативная единица. Определение, примеры. Теорема о равномерной сходимости свертки с аппроксимативной единицей.

Опр

здесь когда-нибудь будет определение

Примеры

здесь когда-нибдуь будут примеры

Теорема

здесь когда-нибудь будет теорема

Док-во

здесь когда-нибудь будет док-во

8 Теорема Фейера. Теорема Вейерштрасса.

Теорема (Фейера)

$$f \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow \sigma_N(f) = f * F_n \underset{R}{\rightrightarrows} f$$

Теорема (Вейерштрасса)

$$f \in R(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = R_{per}[0,1]$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists T \text{ - триг. полином}$$

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - T(x)| < \mathcal{E}$$

Следствие (1)

здесь когда-нибудь будет следствие

Следствие (2)

здесь когда-нибудь будет следствие

Следствие (3)

здесь когда-нибудь будет следствие

9 Среднеквадратичное приближение функций, интегрируемых по Риману, тригонометрическими полиномами.

10 Равенство Парсеваля.