[2019-10-17]

Опр

$$X(t,x) \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

X уд-т, условию Липшеца по x на $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

(Обозн. $X \in_x (D)$, если

$\exists L > 0 : \forall (t, \overline{x}), (t, \overline{\overline{x}}) \in D$

$\left|X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}})\right| \leqslant L \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad (1)$

Пример

$n = 1$

1. $X = t + \sin x \in_x (\mathbb{R}) \quad \left|X(t,\overline{x}) - X(t,\overline{\overline{x}})\right| = \left|\sin\overline{x} - \sin\overline{\overline{x}}\right| \leqslant \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right|$
2. $X = x^2 \qquad \left|X(\overline{x}) - X(\overline{\overline{x}})\right| = \left|\overline{x}^2 - \overline{\overline{x}}^2\right| = \left|\overline{x} + \overline{\overline{x}}\right| \cdot \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right|$

$$D \text{ - огр.} \Rightarrow X = x^2 \in_x (D) \;\; \notin_x (\mathbb{R})$$

Опр

$$X \in_x^{loc} (G) \qquad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

если $\forall (t_0, x_0) \in G \quad \exists$ окр. $U(t_0,x_0) \subset G$:

$X \in_x (U(t_0,x_0))$

Пример

$$X = x^2 \in_x^{loc} (\mathbb{R})$$

Замечание

$$X \in_x (G) \Rightarrow X \in_x^{loc} (G)$$

$$\not\Leftarrow$$

<u>Теорема</u>

$X(t, x)$ - непр

$X(t, x) \in_x^{loc} (G) \quad G$ - обл. $\quad G \subset \mathbb{R}^{n+1}$

D - комп. $\quad D \subset G$

$\Rightarrow X(t, x) \in_x (D)$

<u>Док-во</u> (от противного)

$\exists \underbrace{D}_{\text{комп.}} \subset G$

$\forall L > 0 \quad \exists (t,\ \overline{x}),\ (t,\ x) \in D :$

$|X(t, \overline{x}) - X(t, x)| > L\,|\overline{x} - x| \qquad (2)$

$\{L_k\}_{k=1}^{\infty} :\ L_k \underset{k \to +\infty}{\to} +\infty \qquad \exists \{(t_k, \overline{x}_k)\}_1^{\infty},\ \{(t_k, x_k)\}_1^{\infty} \subset \underset{\text{комп}}{D} :$

$|X(t_k, \overline{x}_k) - X(t_k, x_k)| > L_k\,|\overline{x}_k - x_k| \qquad (3)$

$\exists$п/послед $\{(t_k, \overline{x}_k)\}$, сх к $(t_0, \overline{x_0}) : (t_{k_m}, \overline{x}_{k_m}) \underset{n \to +\infty}{\to} (t_0, \overline{x}_0)$

$\exists$п/послед $\{(t_k, x_k)\}$, сх к $(t_0, x_0) : (t_{k_{m_j}}, x_{k_{m_j}}) \underset{j \to +\infty}{\to} (t_0, x_0) \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow (t_{k_{m_j}}, \overline{x}_{k_{m_j}}) \underset{k \to +\infty}{\to} (t_0, \overline{x}_0)$

$$\begin{cases} (t_k,\ \overline{x}_k) \to (t_0,\ \overline{x_0}) \in D \\ (t_k,\ x_k) \to (t_0,\ x_0) \in D \end{cases}$$

I) $\quad \overline{x}_0 \neq x_0$

$$\frac{|X(t_k, \overline{x}_k) - X(t_k, x)|}{|\overline{x} - x|} \underset{k \to +\infty}{\to} \frac{|X(t_0, \overline{x}) - X(t_0, x)|}{|\overline{x}_0 - x_0|} = N$$

$\Rightarrow \exists k_1 : \forall k > k_1 \quad |X(t_k, \overline{x}_k) - X(t_k, x_k)| \leqslant (N+1)\,|\overline{x}_k - x_k| \qquad (4)$

$\exists k_2 : \forall k > k_2 \quad L_k > N + 1 \qquad \forall k > \max(k_1, k_2)$ верно (3), (4)?

II) $\quad \overline{x}_0 = x_0$

$\exists U(t_0, \overline{x}_0) \subset G : \quad X(t, x) \in_x (U(t_0, x_0))$

$\exists k_0 : \forall k > k_0 \qquad (t_k, \overline{x}_k) \in U(t_0, \overline{x_0}), \quad (t_k, x_k) \in W(t_0, x_0)$

$\exists L : \forall (t_k, \overline{x}_k), (t_k, x_k) \in U(t_0, \overline{x}_0)$

$|X(t_k, \overline{x}_k) - X(t_k, x_k)| \leqslant L\,|\overline{x} - x_k| \qquad (5)$

$\exists k_{00} : \forall k > k_{00} \qquad L_k > L$

Теорема

$$X \in (t,x) \in C(G), \quad G \text{ - обл} \qquad \frac{\partial X_j}{\partial x_m} \in C(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \in_x^{loc} (G)$$

Док-во

$$(t_0, x_0) \in G$$

$$\exists \underset{\text{комп}}{D} = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a, \ |x - x_0| \leqslant b\} \subset G$$

$$(a > 0, b > 0)$$

фикс $j \qquad X_j(t,x) = X_j(t, x_1, ..., x_n)$

$$(t, \overline{x}), (t, x) \in D$$

$$f(s) = X_j(t, s\overline{x} + (1-s)x) = X_j(t, s\overline{x} + (1-s)x, ..., s\overline{x}_n + (1-s)x_n) \qquad s \in [0,1]$$

Докажем: $\quad (t, s\overline{x} + (1-s)x) \in D \quad \forall s \in [0,1]$

$$|s\overline{x} + (1-s)x - x_0| = |s(\overline{x} - x_0) + (1-s)(x - x_0)| \leqslant s\,|\overline{x} - x_0| + (1-s)\,|x - x_0| \leqslant$$

$$\leqslant sb + (1-s)b = b$$

$$|X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,x)| = |f(1) - f(0)| = |f'(\sigma)| \qquad \exists \sigma \in (0,1) \qquad (6)$$

$$f'(s) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial X_j(...)}{\partial x_m}(\overline{x}_m - x_m)$$

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_m} \in C(\underset{\text{комп}}{D}) \Rightarrow \exists K : \left|\frac{\partial X_j}{\partial x_m}\right| \leqslant K \qquad \forall m = 1, ..., n$$

Очев. $|\overline{x}_m - x_m| \leqslant |\overline{x} - x|$

$$\Rightarrow |f'(\sigma)| \leqslant \sum_{m=1}^{n} K\,|\overline{x} - x| = nK \cdot |\overline{x} - x| \qquad (8)$$

$$(6), (8) \Rightarrow |X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,x)| \leqslant nK\,|\overline{x} - x| \qquad \forall j = 1, ..., n$$

$$\Rightarrow |X(t,\overline{x}) - X(t,x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(X_j(t,\overline{x}) - X_j(t,x))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} n^2 k^2 \,|\overline{x} - x|^2} =$$

$$= n\sqrt{n}K\,|\overline{x} - x| \Rightarrow$$

$$\exists U(t_0, x_0) \subset D \subset G : \qquad X(t,x) \in_x (U(t_0, x_0))$$

1 Приближение Пикара

Опр (инт. дифф. уравнение)

$$(1) \quad \dot{x} = X(t,x) \qquad X(t,x) \in C(G) \qquad G - \text{ обл}$$

$$(2) \quad (t_0, x_0) \text{ - з. Коши}$$

$$(3) \quad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, x) d\tau$$

Решение (3) - ф-я $x = \varphi(t) \qquad t \in < a, b >$, подстав в (3) $\to$ тождество

Утв

З.Коши $(1), (2)$ эквив. инт. уравнению (3)

Док-во

1. $\Leftarrow \qquad \exists x = \varphi(t)$ - реш (3) $\Leftrightarrow \varphi(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \qquad (4)$

$$t = t_0 : \quad \varphi(t_0) = x_0$$

$$\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$$

$\Rightarrow \varphi(t)$ - реш з. К $(1), (2)$

2. $\Rightarrow \qquad x = \varphi(t)$ - реш. з.К $(1), (2) \qquad t \in (a, b)$

$$\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$$

инт. от t_0 до t

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \Rightarrow \varphi(\tau) \text{ - решение з.К.}$$