

## 0.1 19.09.2019

### 0.1.1 Неявные функции наносят ответный удар

#### Пример

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n), \text{ при } x \rightarrow 0$$

$$x_0 = 0 \quad y(0) = ? \quad ye^y = 0 \quad y = 0$$

$$F'_y = e^y + ye^y|_{(0,0)} = 1 \neq 0$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x}{F'_y}|_{(0,0)} = -\frac{1+2x}{1} = -1 \text{ т.о. неявное отображение}$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}$$

$$y(x) = 0 - x + \bar{o}(x)$$

Что теперь делать? Способ 1:

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left(-\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}\right)' = \left(-\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}\right)' \\ &= -\frac{2}{(y(x)+1)e^{y(x)}} + \frac{1+2x}{((y(x)+1)e^{y(x)})^2} (y(x)+2)e^{y(x)}y'(x) \underset{\substack{x=0 \\ y=0}}{=} -2 - 4 = -6 \end{aligned}$$

Наш ряд Тэйлора:

$$y(x) = -x - 3x^2 + \bar{o}(x^2)$$

Способ 2 (метод неопр. коэффициентов)

$$y(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$F(x, y(x)) = 0 \text{ в окр } x=0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} + x + x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} e^t &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \bar{o}(t^3), \quad t \rightarrow 0 \\ t &= y(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-x + ax^2 + bx^3)[1 + (-x + ax^2 + bx^3) + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^2}{2} + \\ + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^3}{6} + o(x^2)] + x + x^2 = 0 \end{aligned}$$

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3))(1 - x + (a + \frac{1}{2})x^2 + (b - a - \frac{1}{6})x^3 + \bar{o}(x^3)) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) - x + x^2(1 + a) + x^3(b - a - a - \frac{1}{2}) + x + x^2 = 0$$

$$\bar{o}(x^3) + (a + 2)x^2 + (b - 2a - \frac{1}{2})x^3 = 0$$

$$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ b - 2a - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{система должна быть диагональной}$$

$$a = -2 \quad b = -\frac{7}{2}$$

### Пример

$$\cos(xy) + \sin x + e^{y+x} = 2$$

Проверить условие т.о неявной ф-ии и найти разл  $y(x)$  по Тейллору до  $\bar{o}(x^3)$

$$x = 0, \quad F(0, y) = 0 \rightarrow y(0)$$

$$1. \quad 1 + e^y = 2, \quad y = 0, \quad F(0, 0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$2. \quad \begin{aligned} F'_y &= -x \sin(xy) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 1 \neq 0 \\ F'_x &= -y \sin(xy) + \cos(x) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 2 \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

Методом неявных коэффициентов

$$y(x) = -2x + ax^2 + bx^3 + \bar{o}(x^3)$$

$$\cos(-2x^2 + ax^3 + bx^4 + \bar{o}(x^4)) + \sin x + e^{-x+ax^2+bx^3+\bar{o}(x^3)} = \dots$$