Санкт-Петербургский
государственный
университет

Практика
по математическому анализу

3 семестр, преподаватель Роткевич А. С.

Записал Костин П.А.[1]

[1] Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах вконтакте (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

1 Функции от нескольких переменных

02.09.2019

1.1 Основные определения

Опр

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика, если

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

   (X, ρ) - метрическое пространство

Примеры

1. $\mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |x - y|$
2. $x \neq \varnothing$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
3. $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$,

   где $x = (x_1, ..., x_n)$ $y = (y_1, ..., y_n)$

Опр

$\rho_1, \rho_2 : X * X \to \mathbb{R}$ - метрики, тогда ρ_1, ρ_2 - эквивалентны, если

(они задают одну топологию) $c_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant c_2\rho_1(x, y)$ для $c_1, c_2 > 0$ - const

Пример

$\mathbb{R}^2$ $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{2\rho_2^2(x, y)}$

$\rho_2(x, y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ (упр.)

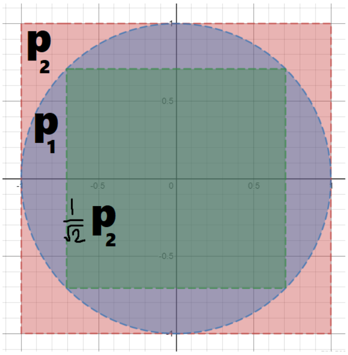
$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \rho_1(x, y)$

Пусть $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + ...|x - n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$

Если $p \to \infty$ $\rho_3 \to \rho_2$

$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$ - пространство Лебега конечномерное

(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны (ρ_1, ρ_2, ρ_3)



Опр

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика,

Открытым шаром в X относительно метрики ρ называется мн-во $B_r(x) = B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$

Замкнутым шаром называется $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y,x) \leqslant r\}$

Сферой называется $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x,y) = r\}$

Упр

Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

Пример

$l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}\ 1 \leqslant p < \infty$

$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$

l^p - пр-во Лебега (последовательностей)

Пример

$C[0,1]$ - пр-во непр. функций

$\rho(f,g) = \max\limits_{[0,1]} |f - g|$ - полна (любая фундаментальная последовательность сходится)

$\rho_p(f,g) = (\int\limits_0^1 |f-g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ - не полная

Опр

(X,ρ) - метр. пр-во, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $a \in X$ $x_k \to a$ в пр-ве X по метрике ρ, если $\rho(x_n, a) \underset{k\to\infty}{\to} 0$

Примеры

$\mathbb{R}^2$ $M_k = (x_k, y_k)$ $P = (a,b)$ $M_k \to P$ в евкл. метрике, т.е. $\rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k-a)^2 + (y_k-b)^2} \underset{k\to\infty}{\to} 0 x_k \to a,\ y_k \to b$

Замечание

Есть ρ_1, ρ_2 - экв. метрики, то $\rho_1(x_k, a) \to 0 \rho_2(x_k, a) \to 0$

Упр

$x_k \to a,\ x_k \to b \Rightarrow a = b$

$(\rho(a,b) \leqslant \rho(a, x_k) + \rho(x_k, b) \to 0 \Rightarrow \rho(a,b) \to 0 \Rightarrow a = b)$

Опр

$E \subset X$, (X, ρ) - метр. пр-во, то $a \in X$ - т. сгущ. E, если

$\forall \mathcal{E}\ \exists x \in E : \rho(a, x) < \mathcal{E}$

Опр

$f : E \to Y\ (X, \rho)$, (Y, d) - метр. пр-ва $(E \subset X)$, a - т. сгущ. E, $A \in Y$,

тогда A - предел отображения f в точке a, если

$f(x) \to A$ при $x \in E \setminus \{a\} \to a$

(или $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \rho(x, a) < \delta$ и $x \in E \subset \{a\}$, то $d(f(x), A) < \mathcal{E}$)

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to A\ x \to a$

Замечание

$A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_{\mathcal{E}}(A)$

05.09.2019

1.2 Примеры для $\mathbb{R}^2$

Будем в $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Опр

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ - точка сгущения, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$, если
$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x, a) < \delta$, $x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < \mathcal{E}$

В $\mathbb{R}^2$ работают:
арифм. действия, теор. о двух миллиционерах, критерий Коши:

Опр

$f : E \to \mathbb{R}$, частный случай $\exists \lim\limits_{x\to a} f \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 :$
$|f(x) - f(y)| < \mathcal{E}\ 0 < \rho(x, a), \rho(y, a) < \delta$ (упр)

Упр

$\exists \lim\limits_{x\to a} f \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \to a\ (\rho(x_n, a) \to 0)\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ - предел функции в т. (x_0, y_0)

Пример

$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$, т.к.$|f(x, y)| \leqslant |x| + |y| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\to} 0$, $\nexists \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to y} f(x, y)$

Пример

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$ - не существует, так как $\lim f(x, x) = 1$, $f(x, 2x) = 0$

Пример

Построить $f(x, y)$ т.ч. $\forall a, b\ \exists \lim\limits_{t\to 0} f(at, bt) = A$, но $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$

$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a} t \to 0$, но при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ предел - единица

Замечание

Если $\gamma(t) \underset{t\to t_0}{a} \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\exists \lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma(t))$

Замечание

Если $\forall \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\gamma}(t) \to a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim f(\boldsymbol{\gamma}(t))$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} f$

Замечание

$\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ - не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть $= \lim\limits_{x \to x_0} \overline{f}(x)$

$\overline{f}(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \neq$(не обязательно) $\neq f(x, y_0)$

Опр

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y) = A$, если

$\forall \mathcal{E} > 0 \; \exists M > 0 : \forall x, y : \max(x, y) > M \; |f(x, y) - A| < \mathcal{E}$

Пример

$f = \frac{y}{x} tg(\frac{x}{x+y})$ - не имеет предела, $f(x, x) = tg(\frac{1}{2})$, $f(x, x^2) = xtg(\frac{1}{1+x}) \to 0$

09.09.2019

1.3 Ещё больше определений

Опр

1. $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : x > M\ y > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

2. $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : |x| > M\ |y| > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

3. $A = \lim\limits_{P\to\infty} f(P)\ P \in \mathbb{R}^2$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : \rho(0,P) > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

Замечание

Демидович по первым двум определениям

Опр

Для конечного предела: $A = \lim\limits_{x\to a\ y\to+\infty} f(x,y)$, если

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists M > 0 \quad \delta > 0 : y > M \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

1.4 Ещё больше примеров

Пример

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

Решение

Заметим, что $\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leqslant x^2+y^2 \Rightarrow 0 \leqslant (x-y)^2$ для x $\neq y$

Значит дробь стремится к 0

Пример

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

Решение

При $x = y$ предел $\frac{1}{2}$

При $x = y^2$ предел 0

Пример

$f = \sin(\dfrac{\pi y^2}{x^2+3y^2})$

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} f$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f$

Решение

Первый не имеет предела ($x=y$, $x=\sqrt{y}$). Второй $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Третий 0

Пример

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \frac{sin(y-x^2)}{y-x^2}$$

Решение

$z = y - x^2$, $z\to 0 \Rightarrow x, y\to 0$

$|z| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$

Пример

$f = \dfrac{1-\sqrt[3]{sin^4x+cos^4y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, найти $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f$

Решение

$1-\sqrt[3]{t}\underset{t\to1}{}\dfrac{1-t}{3}$ (т.к. $1-\sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1+\sqrt[5]{t}+\sqrt[3]{t^2}}$)

Значит $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{1}{3}\dfrac{1-(sin^4x+cos^4y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{2sin^2y-sin^4y-sin^4x}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Заменим по Тейлору: $= \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{2y^2+\overline{o}(y^3)-x^4+\overline{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Попробуем оценить по модулю $|\dfrac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}|$, заметим что $y^2 \leqslant x^2+y^2$,

$x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$ (для $x^2+y^2<1$),

чтобы избавиться от $\overline{o}$ оценим так:

$\overline{o}+y^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, $\overline{o}+x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$

Тогда $|\dfrac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leqslant 2\dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} \to 0$

12.09.2019

1.5 Некоторые особенные примеры

Пример

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}((1+x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{1+xy}} = e$$

Пример

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & , x^2+2^2 \neq 0 \\ a & , else \end{cases}$$

1) $a = ?$, т.ч. f - непр

2) $a = ?$, f - непрю на прямых, проходящих через 0

Решение

1) $a = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$

Замечание

$x^n y^m \leqslant (\sqrt{x^2+y^2})^{n+m}$ и $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

1.6 Частные производные. Определения

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Опр

f - диф. в точке P_0, если $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, т.ч.

$f(x_0, +\delta x, y_0+\delta y, z+\delta z = f(x_0,y_0,z_0)+A\delta x+B\delta y+C\delta z+\overline{o}(\sqrt{(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2})$

Пусть $h = (\delta x, \delta y, \delta z)^T$

$$f(P_0+h) = f(P_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}^T h + \overline{o}(|h|)$$

$df(x,y,z) = Adx + Bdy + Cdz$

Дифференциал сопоставляет $(dx, dy, dz) \to Adx + Bdy + Cdz$

Опр

Частной произв. по перем. x в т. (x_0, y_0, z_0) называется предел (если $\exists$)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0, t_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

1.7 Частные производные. Примеры

Утв

f - дифф. $\Rightarrow \exists$ част. пр. и $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial x}$, $C = \frac{\partial f}{\partial x}$

Производные старшего порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \neq \text{(не всегда) } \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Частные производные сложной функции

$$w = f(x, y, z),\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.\ (u, v) \to (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$w = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$
$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Пример

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial \chi}{\partial v})\frac{\partial \varphi}{\partial u} + ...$$

Пример

$$F = f(x, xy, xyz) = f(u, v, w)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}1 + \frac{\partial f}{\partial v}y + \frac{\partial f}{\partial w}yz$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v} + uz\frac{\partial}{\partial w}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v})y + \frac{\partial f}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial w})yz + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial}{\partial x}(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (yz)^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + zy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y^2 z\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}$$

Пример

Дано $u = x^y$, найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{d^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x)x^y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \ln^2(x)x^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y\ln(x)x^{y-1}$$

16.09.2019

Пример

Выяснить, есть ли производная у $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

Решение

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}},\quad x^3+y^3\neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3+0^3}-\sqrt[3]{o^3+0^3}}{t}=1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}$ не $\exists$

Пусть $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ - диф. в точке $(0,0)\Rightarrow$

$$\sqrt[3]{x^3+y^3}=0+x+y+\overline{o}(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\sqrt[3]{(0+\delta x)^3+(0+\delta y)^3}=\underset{=0}{f(x,y)}+\underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\delta x+\underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\delta y+\overline{o}(\sqrt{\delta x^2+\delta y^2})$$

$$\sqrt[3]{x^3+y^3}=x+y+\overline{o}(\sqrt{x^2+y^2}),\quad x,y\to 0$$

$x_n=y_n\quad \sqrt[3]{2}x=2x+\overline{o}(x)$

$\sqrt[3]{2}-2=\overline{o}(1)$?!!

То есть из существования ч.п. не следует дифференцируемость

Теорема

Если существуют ч.п. и они непр. в рассм. точке $\Rightarrow$ ф-ия диф. в этой точке

Пример

$f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0\Rightarrow$ f - непр. в 0

$$g(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}-2x^2y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})|_{(0,0)}=\lim_{t\to 0}(\frac{-\frac{t^3}{t^2}-0}{t})=-1$$

Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y})=1$

Теорема

Если $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ $\exists$ в окр. точки, непр. в этой точке $\Rightarrow$ в этой точке $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

1.8 Дифференцирование неявных функций

Опр

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $F(x_1, ..., x_n; y)$, $F(x_1^0, ..., x_n^0; y^0) = 0$

$y = f(x_1, ..., x_n)$ - ф-ия задана неявно уравнением $F(x_1, ..., x_n; y) = 0$ в откр. точке $(x_1^0, ..., x_n^0, y^0)$, если $(x = (x_1, ..., x_n))$:

1. $F(x, f(x)) \underset{=}{} 0$ (в окр. x^0)

2. $f(x^0) = y^0$

Теорема (о неявном отображении)

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x^0, y^0) = 0, \text{ F - непр. диф. в окр } (x^0, y^0),$$

$$F'_y(x^0, y^0) \neq 0, \text{ тогда:}$$

1. $\exists y = f(x_1, ..., x_n)$ зад. неявно ур. $F(x, y) = 0$

2. f диф. в окр. x^0

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x_0} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_0} / \dfrac{\partial F}{\partial y}$ в окр. x^0

19.09.2019

1.9 Неявные функции наносят ответный удар

Пример

$$F(x,y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \overline{o}(x^n), \text{ при } x \to 0$$

$$x_0 = 0 \quad y(0) =? \quad ye^y = 0 \quad y = 0$$

$$F'y = e^y + ye^y|_{(0,0)} = 1 \neq 0$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x}{F'_y}|_{(0,0)} = -\frac{1+2x}{1} = -1 \text{ т.о. неявное отображение}$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}$$

$$y(x) = 0 - x + \overline{o}(x)$$

Что теперь делать? Способ 1:

$$y''(x) = (y'(x))' = (-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))})' = (-\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}})'$$

$$= -\frac{2}{(y(x)+1)e^{y(x)}} + \frac{1+2x}{((y(x)+1)e^{y(x)}}(y(x)+2)e^{y(x)}y'(x) \underset{\substack{x=0\\y=0}}{=} -2-4 = -6$$

Наш ряд Тэйлора:

$$y(x) = -x - 3x^2 + \overline{o}(x^2)$$

Способ 2 (метод неопр. коэффициентов)

$$y(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \overline{o}(x^3)$$

$$F(x, y(x)) = 0 \text{ в опр x=0}$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \overline{o}(x^3))e^{-x+ax^2+bx^3+\overline{o}(x^3)} + x + x^2 = 0$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \overline{o}(t^3), \quad t \to 0$$

$$t = y(x)$$

$$(-x + ax^2 + bx^3)[1 + (-x + ax^2 + bx^3) + \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^2}{2} +$$
$$+ \frac{(-x + ax^2 + bx^3)^3}{6} + o(x^2)] + x + x^2 = 0$$

$$F(x, y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$(-x+ax^2+bx^3+\overline{o}(x^3))(1-x+(a+\frac{1}{2})x^2+(b-a-\frac{1}{6})x^3+\overline{o}(x^3))+x+x^2 = 0$$

$$\overline{o}(x^3) - x + x^2(1 + a) + x^3(b - a - a - \frac{1}{2}) + x + x^2 = 0$$

$$\overline{o}(x^3) + (a + 2)x2 + (b - 2a - \frac{1}{2})x^3 = 0$$

$$\begin{cases} a + 2 = 0 \\ b - 2a - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{система должна быть диагональной}$$

$$a = -2 \quad b = -\frac{7}{2}$$

Пример

$$\cos(xy) + \sin x + e^{y+x} = 2$$

Проверить условие т.о неявной ф-ии и найти разл y(x) по Тейллору до $\overline{o}(x^3)$

$$x = 0, \quad F(0, y) = 0 \to y(0)$$

1. $1 + e^y = 2$, $y = 0$, $F(0, 0) = 0$, $y(0) = 0$
2. $F'_y = -x\sin(xy) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 1 \neq 0$
   $F'_x = -y\sin(xy) + \cos(x) + e^{y+x}|_{(0,0)} = 2$
   $y'(0) = -2$

Методом неявных коэффициентов

$$y(x) = -2x + ax^2 + bx^3 + \overline{o}(x^3)$$

$$\cos(-2x^2 + ax^3 + bx^4 + \overline{o}(x^4)) + \sin x + e^{-x+ax^2+bx^3+\overline{o}(x^3)} = ...$$

23.09.2019

$$F(u; x, y) = 0$$

$$\left.\begin{array}{rcl} F(u_0; x_0, y_0) & = & 0 \\ F'_u(u_0; x_0, y_0) & \neq & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{c} \exists \text{ неявная ф-ия } u(x, y) \\ u(x_0, y_0) = u_0 \\ F(u(x, y), x, y) = 0 \\ u'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y} \\ u'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_u} \end{array}$$

Ф-ла Тейлора для функциийи от неск. перем.

$$u : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \in E \to u(x)$$

$$T_R(x, x^0) = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \frac{\partial^\alpha u(x^0)}{\partial x^\alpha} \frac{(x - x^0)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{d^j u(x^0)[x - x^0]}{j!}$$

$$\alpha \text{ - мультииндекс}, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k), \quad \alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}}, \quad (x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}...(x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

Теорема

$$u \in C^k \overset{\text{в окр. } x^0}{\Rightarrow}$$

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) +'_x (x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$$

$$+ u''_{xx} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + u''_{xy} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{1!} + u''_{yy} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \frac{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x - x^0)^3}{3!} +$$

$$+ \frac{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}(x - x^0)^2 (y - y^0)}{2!1!} + ... + \overline{o}(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})^3$$

1.10 Дифференциалы высших порядков

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \to u(x,y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} dx + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} dy = du[dx,dy]$$

$du : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (dx,dy) \to du[dx,dy]$ - дифференциал первого порядка

$$d^2u = d(du) = d(\frac{\partial u}{\partial x})dx + d(\frac{\partial u}{\partial y})dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

$$\underbrace{d_d^k}_{=dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}}(d^{k-1}u) = \sum_{j=0}^{k} C_j^k \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j} dx^j dy^{k-j}} = d^k u[dx,dy], \quad u \in C^k$$

Понятно, что можно дальше обобщать, но делать мы это, конечно, не будем

Пример

$$f = x^y = e^{y \ln x}, \quad d^2 f \text{ в точке } (2,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x}\frac{y}{x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \ln x$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \ln x}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - e^{y \ln x}\frac{y}{x^2} \overset{(2,1)}{=} 0$$

$$f''_{yy} = e^{y \ln x} \ln^2 \overset{(2,1)}{=} ln^2 2$$

$$f''_{xy} = e^{y \ln x}\frac{y}{x}\ln x + e^{y \ln x}\frac{1}{x} \overset{(2,1)}{=} \ln 2 + 1$$

Тогда наш ответ:

$$d^2u|_{(2,1)} = 2(\ln 2 + 1)dxdy + 2\ln^2 2dy^2$$

Пример

Найти $d^3 f$ для $f = x^4 + xy^2 + yz^2 + zx^2$

Как понять, что такое $d^3 f$ от отрех переменных?

$$d^3 u = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z})^3 u$$

$$d^3 \overset{(0,1,2)}{=} 3 * 2dx^2dz + 3 * 2dydz^2 + 3 * 2dx^2dy$$

26.09.2019

1.11 Ничего интересного

03.10.2019

1.12 Ф-ла Тейлора для неявной функции

Пример

$$F(x,y;u) = u^3 + 3yu - 4x = 0, \quad u(x,y) \text{ в окр. } (1,1)$$

Задача. Написать ф. Тейлора для $u(x,y)$ с точность. до $\underline{o}(\underbrace{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}_{\varphi})^n$

$$(x,y) = (1,1) \qquad u^3+3u-4 = 0 \Rightarrow (u^2+u+4)(u-1) = 0 \Rightarrow u(1,1) = 1$$

Проверим, что $F'_u(1,1;1) \neq 0$, $3u^2+3y \neq 0$

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{2}{3} \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

$$u(x,y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \overline{o}(\varphi) \quad n = 1$$

Способ 1 ($n = 2, 3, ...$)

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{4}{3u^2+3y} \quad u''_{xx} = \frac{4 * 6uu'_x}{(3u^2+3y^2)^2} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$$

$$u''_{xy} = \frac{4(6uu'_y+3)}{(3u^2+3y^2)^2} = 0 \quad u''_{yy} = \left(-\frac{3u}{3u^2+3y}\right)'_y = -\frac{u'_y(u^2+y)-(2uu'+1)u}{(u^2+y)^2} = \frac{1}{4}$$

$$u(x,y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(-\frac{4}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2)^2 + \overline{o}(\varphi^2)$$

Способ 2 (более высокие степени, метод неопр. коэф.)

$$u^3(x,y) = (1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)+a(x-1)^2+b(x-1)(y-1)+c(y-1)^2+\overline{o}(\varphi^2))^3$$

$$t = x-1 \qquad s = y-1$$

$$0 = u^3+3yu-4x = \overline{o}(\varphi^2) + 1 + 3*1^2\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + at^2 + bts + cs^2\right) +$$

$$+3\left(\left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \frac{s^2}{4} - \frac{2}{3}ts\right) + 3(s+1)u - 4(t+1) =$$

$$\left((s+1)u = s + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + s\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s\right) + at^2 + bts + cs^2 + \overline{o}(\varphi^2)\right)$$

$$= \overline{o}(\varphi^2) + \cancel{(1+3-4)} + t\cancel{\left(3\frac{2}{3}+3\frac{2}{3}-4\right)} + s\cancel{\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)} + t^2\underbrace{\left(3a+3\frac{4}{9}+3a\right)}_{=0} +$$

$$+ts\underbrace{\left(3b-2+3\left(\frac{2}{3}+b\right)\right)}_{=0} + s^2\underbrace{\left(3c+\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+3c\right)}_{=0}$$

Приравняли к 0, т.к. у найденного выше $u(x,y)$ эти коэф. $= 0$

$$\Rightarrow a = -\frac{2}{9} \quad b = 0 \quad c = \frac{1}{8}$$

ДЗ: 3127-3186 (10 задач)

07.10.2019

1.13 Готовимся к к.р.

Пример

$$ue^{x+u} + y\cos(x+y) = 0 \quad (x_0, y_0) \quad o(\varphi^2) \quad o(\varphi^3) \quad \varphi = \sqrt{x^2+y^2}$$

Решение

Решил у доски

Замечание

Можно подставлять $(0, y)$, $(x, 0)$, (x, x)

Пример

$$u\cos(x-u) + e^u \sin(x+u) = 0$$

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + c_6 x^6 + \overline{x^6} \quad x_0 = 0 \quad u(0) = 0$$

$$F'_u = \cos(x-u) + u\sin(x-u) + 2ue^{u^2}\sin(x+u) + e^{u^2}\cos(x+u) \overset{(0,0)}{=} 2$$

$$c_1 = u'_x(0) = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что $F(-x, -u) = -F(x, u)$

$$\Rightarrow F(x, yu) = 0 \Rightarrow F(-x, -u) = 0$$

u - нечетна $\Rightarrow c_{2n} = 0$

$$u(x) = -\frac{x}{2} + c_3 x^3 + c_4 x^5 + o(x^6)$$

$$\left(-\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_5x^5 + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2} - c_3x^3\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{3x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right) +$$

$$+ \left(1 + \left|-\frac{x}{2} + c_3x^3\right| + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right)$$

$$\left(\frac{x}{2} + c_3x^3 + c_5x^5 + o(x^6)\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} + c_3x^3\right)^2 = 0$$

Замечание

1. Если $F(-x, u) = F(x, u)$ или $F(-x, u) = -F(x, u) \Rightarrow$ u - четна
2. Если $F(-x, -u) = F(x, u)$ или $F(-x, -u) = -F(x, u) \Rightarrow$ u - нечетна

14.10.2019

1.14 Замена переменных в дифференциальных выражениях

Замена перем. в выражениях с полными производными

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, ...)$$

$$\begin{matrix} (x,y) \to & (u,v) \\ y(x) & u(v) \end{matrix} \quad y'_x, y''_{xx}, .. \text{ нужно выразить через } u'_v, u''_{vv}$$

$$\exists x = f(u,v) \quad y = g(u,v)$$

$$y(x) = y(f(u,v)) = y(f(u(v),v)) = g(u(v),v)$$

Дифференцируем по v: $\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial g}{\partial v} = y'_x\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right) \quad (*)$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}}$$

Другой способ воспринимать: $\qquad y = y(x)$

Продифференцируем ещё раз $(*)$ по v:

$$\text{u}''_{vv}\frac{\partial y}{\partial u} + u'_v\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}u'_v + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} =$$

$$= y''_{xx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}u'_v + \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + y'_x\left(u''_{vv}\frac{\partial f}{\partial u} + (u'_v)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u'_v\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

Второй способ:

$$x = f(u(v),v) \quad y'_x = h(u(v), \underbrace{u'_v(v)}_{w}, v) \leftarrow *$$

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial h}{\partial w}u''_{vv} + \dfrac{\partial h}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}}$$

Пример

Подставить в дифференциальное уравнение выражения

$$y^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0 \quad y(x) \to u(t)$$

$$x = e^t \quad y = ue^{2t}$$

Решение

Проблема в том, что мы не знаем, что такое y', т.к. в диф. ур-ии производная по x

$$x = f(u,t) = e^t \quad y = g(u,t) = ue^{2t}$$

$$u(t)e^{2t} = y = y(e^t)$$
$$u'_t e^{2t} + 2ue^{2t} = y'_x e^t \Rightarrow y'_x(e^t) = y'_x|_{x=e^t} = (u'_t + 2u)e^t$$
$$y''_{xx}\cancel{e^t} = ((u'_t + 2u) + (u''_{tt} + 2u'_t))\,\cancel{e^t}$$

Пример

$$y'y''' - 3(y'')^2 = x$$

$$y(x) \to x(y)$$

Решение

$$x = u \quad y = t \quad u(t)$$

$$(x,y) \to (u,t)$$

$$t = y(u(t)) \Rightarrow 1 = y'u' \Rightarrow y' = \frac{1}{u'}$$

$$y'' = \frac{u''}{(u')^3}$$

$$y''' = \frac{u'''(u')^3 - 3(u'')^2(u')^2}{(u'^7)} = \frac{u'''}{(u')^4} - 3\frac{(u'')^2}{(u')^5}$$

Подставляя, получаем:

$$-\frac{x'''_{yyy}}{(x'_y)^5} = x$$

ДЗ: 3431-3449

17.10.2019

1.15 Я не знаю название этой темы

1. Замена независимой переменной

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}...)$$

$$z(x, y)$$

$$x = f(u, v)$$

$$y = g(u, v)$$

$$z = z(x, y) = z(f(u, v),\ g(u, v))$$

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} = ... \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = ... \end{matrix}$$

Нужно учитывать Якобиан $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$ - без этого нет решения системы

Вторые производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{cases}$$

Пример

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 f}{\partial u^2}$$

2. Замена переменных и функций

$$(x, y, z(x, y)) \to (u, v, w(u, v))$$

$$x = f(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

$$\Rightarrow h(u, v, w(u, v)) = z(x, y) = z(f(u, v, w(u, v)),\ g(u, v, w(u, v)))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial u} + \dfrac{\partial h}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial u}\right) \\ \\ \dfrac{\partial h}{\partial v} + \dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial w}{\partial v} = ... \end{cases}$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial x} = ..., \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ...$$

Пример

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$(x, y, z(x, y)) \to (r, \varphi, z(r, \varphi))$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} z(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = 1$$

Наша зависимость:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + (... + ...)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

Упр

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

3. Новые переменные выражены через старые

$$(x, y, z(x, y)) \to (u, v, w(u, v))$$

$$u = p(x, y, z)$$

$$v = q(x, y, z)$$

$$w = r(x, y, z)$$

$$\Rightarrow r(x, y, z(x, y)) = w = w(u, v) = w(p(x, y, z(x, y)),\ q(x, y, z(x, y)))$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial x} = F(\frac{\partial w}{\partial n},\ \frac{\partial w}{\partial v}, x, y, z)$$

Проблема в том, что он выражен через страые переменные, а нужно как-то выражать через новые (u, v, w)

Можно попробовать через $\begin{matrix} u = p(x, y, z) \\ v = q(x, y, z) \\ w = r(x, y, z) \end{matrix} \to \begin{matrix} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w) \\ z = h(u, v, w) \end{matrix}$

Пример

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

$$u = \frac{x}{y} \qquad v = x \qquad w = xz - y$$

$$xz(x, y) - y = w(u, v) = w(\frac{x}{y},\ x)$$

Выражение через старые переменные тут лучше, потому что нам нужно считать меньше производных

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = \frac{\partial w}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{2x}{y^3}$$

$$y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{x}{y^4}+\cancel{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{2}{y^3}}\right)+2\left(\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}}\right)=\cancel{\frac{2}{x}}$$

$$\cancel{\frac{x}{y^3}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0\leftarrow \text{Ура, не зависит от x,y}$$

Альтернативный вариант был $\rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= v \\ y &= \frac{v}{u} \\ z &= \frac{w+\frac{v}{u}}{v} \end{aligned}$$

21.10.2019

1.16 Продолжаем делать примеры

Пример (3475)

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

$$x,\ y,\ z(x,y)\to u,\ v,\ w(u,v)$$

$$u=x,\quad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\quad w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$$

Решение

Выразим старые переменные через новые:

$$x=u,\quad y=\frac{u}{uv+1},\quad z=\frac{u}{uw+1}$$

Можем составить тождество:

$$\frac{u}{uw+1}=z(x,\ y)=z(u,\ \frac{u}{uv+1})$$

Продифференцируем ЛЧ:

$$\Rightarrow\left(\frac{u}{uw+1}\right)'_u=\frac{(uw+1)-(w+uw'_u)u'}{(uw+1)^2}=\frac{1-uw'_uu'}{(uw+1)^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{u}{uw+1}\right)'_v=\frac{-u^2w'_v}{(uw+1)^2}$$

Теперь продифференцируем ПЧ и составим систему:

$$\begin{cases} z\left(u,\ \dfrac{u}{uv+1}\right)'_u=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{1(\cancel{uv}+1)-\cancel{vu}}{(uv+1)^2}\right)=\dfrac{1-uw'_uu'}{(uw+1)^2} \\ \\ z\left(u,\ \dfrac{u}{uv+1}\right)'_v=\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{-u^2}{(uv+1)^2}\right)=\dfrac{1-uw'_uu'}{(uw+1)^2} \end{cases}$$

Мы нашли то что хотели:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{w'_v(uv+1)^2}{(uw+1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-u^2w'_u}{(uw+1)^2}-\frac{w'_v(vu+1)^2}{(uw+1)^2}\frac{1}{(uv+1)^2}$$

Пример

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = xy - z$$

Решение

Составим тождество

$$xy - z = w(x + y,\ x - y) = w(u, v)$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} + \frac{\partial w}{\partial v} = y - z'_x$$

$$w'_x = (xy - z)'_x = y - z'_x$$

Дифференцируем по y:

$$\frac{\partial w}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial w}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=-1} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} = x - z'_y$$

$$w'_y = (xy - z)'_y = x - z'_y$$

$$z'_x = y - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}}_{w(u,v) = h(x+y,\ x-y)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x}\big(h(\underbrace{x + y}_{u},\ \underbrace{x - y}_{v})\big) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v} = \underbrace{-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}_{\text{из начальных уравнений}}$$

$$z'_y = x + \frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y}\big(h_1(x+y,\ x-y)\big) = \frac{\partial h_1}{\partial u} - \frac{\partial h_1}{\partial v} = 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

24.10.2019

1.17 Экстремумы

Теорема (необходимое условие лок. экстремума)

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x^0 \text{ - внутр. точка D, f - диф. в } x^0$$

$$\text{в } x^0 \text{ лок. экстр. } \Rightarrow \forall j \quad \frac{\partial f}{\partial x_0}(x^0) = 0$$

Опр

x^0 - страционарная, если $\forall g \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_0}(x^0) = 0$

Пример

$$f = x^3 \quad f'(0) = 0, \text{ но } x_0 = 0 \text{ - не экстр. точка}$$

Утв

Достаточное условие лок. экстремума: Пусть $f \in C^2$, $\quad x^0$ - страционарная точка, тогда:

1. $d^2 f$ - строго пол. определен $\Rightarrow$ в x^0 лок. мин.
2. $d^2 f$ - отриц. опр. $\Rightarrow$ лок. макс.
3. $\exists e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n : \left. \begin{matrix} d^2 f(x^0)[e_1] > 0 \\ d^2 f(x^0)[e_2] < 0 \end{matrix} \right| \Rightarrow$ в x^0 нет экстр.

$$d^2 f = \sum_{i,j=0}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{a_{ij}} dx_i dx_j = dx^T A dx$$

$$dx = \begin{matrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{matrix} \quad A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{2}$$

Опр

Кв. форма пол. определена $\Leftrightarrow$ она принимает пол. значения на вект $\neq 0$
Кв. форма отр. определена $\Leftrightarrow$ -//- отр. знач.

$$f(x) = f(x^0) + d^2 f(x^0)[x - x^0] + \overline{o}(|x - x^0|^2)$$

Теорема (критерий Сильвестра)

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j$$

Кв. форма пол. опр. $\Leftrightarrow A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ ...,\ A_n > 0$
Кв. форма отр. опр. $\Leftrightarrow A_1 < 0,\ A_2 < 0,\ ...,\ A_n < 0$

$$A_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^{k}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ ... & & & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Пример (n=2)

$$\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R}^2 & \Rightarrow & \mathbb{R} \qquad (x_0,\ y_0) \text{ - стац.} \\ & (x,y) & \to & f(x,y) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & d'_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

x^0 - лок. мин $\Leftrightarrow A > 0$ и $AC - B^2 > 0$
x^0 - лок. макс $\Leftrightarrow A < 0$ и $AC - B^2 < 0$
Если $AC - B^2 > 0 \underset{\text{упр.}}{\Rightarrow}$ нет экстр.

Пример

$$f = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 2x - y - 2 & = & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & -x + 2y + 1 & = & 0 \end{array}\right| \Rightarrow (1,0) \text{ - стац. точка}$$

$$d^2 f = 2dx^2 \underset{2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{- 2dxdy} + 2dy^{@}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 2 > 0$$

$$AC - B^2 = 5 > 0$$

$$\Rightarrow (1,\ 0) \text{ - лок. экстр.}$$

28.10.2019

1.18 Экстремумы

Пример

Найти экстремумы

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$$

Решение

Найдем первые производные и приравняем к 0:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \\ f'_y = 2y - 6 = 0 \\ f'_z = -2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \quad y = -3 \quad z = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow A_1 = \det\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2 \quad A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \quad A_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8$$

$$\partial^2 f = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$$

$$d^2 f(e_1) > 0 \qquad (\overset{dx}{1},\ \overset{dy}{1},\ \overset{dz}{0})$$

$$d^2 f(e_2) < 0 \qquad (0,\ 0,\ 1)$$

$$d^2 f = (dx + dy)^2$$

$$f(x,\ -x)$$

Пример

$$f(x,\ y,\ z) = (x + 7z)e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$$\begin{cases} f'_x = e^{-(\ )} + (x+7z)(-2x)e^{-(\ )} = 0 \\ f'_y = (x+7z)(-2y)e^{-(\ )} = 0 \\ f'_z = 7e^{-(\ )} + (x+7z)(-2z)e^{-(\ )} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \pm\frac{1}{10}$$

Можно не дифференцировать всё, т.к. нас интересуют только слагаемые, которые мы обнуляем

$$f''_{xx} \overset{\text{в инт. точке}}{\sim} (-4x-14z)e^{-(\ )} \quad f''_{yy} \sim -2(x+7z)e^{(\ )} \quad f''_{zz} \sim (-28z-2x)e^{(\ )}$$

$$f''_{xy} \sim 0 \quad f''_{xz} = (-14x)e^{(\ )} \quad f''_{yz} = 0$$

Матрица для точки $x = \frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \frac{1}{10}$:

$$\begin{pmatrix} -102 & 0 & -14 \\ 0 & -100 & 0 \\ -14 & 0 & -198 \end{pmatrix}$$

$$A_1 < 0 \quad A_2 > 0 \quad A_3 < 0 \Rightarrow \text{лок. max}$$

Матрица для точки $x = -\frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = -\frac{1}{10}$:

$$\begin{pmatrix} 102 & 0 & 14 \\ 0 & 100 & 0 \\ 14 & 0 & 198 \end{pmatrix}$$

$$A_1,\ A_2,\ A_3 > 0 \Rightarrow \text{лок. min}$$

Замечание

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow (fg)'(x_0) = fg'(x_0)$$

1.19 Условный экстремум

Теорема

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \varphi_1, ..., \varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad k < n$$

Локальный экстр. f при условии $\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ ... \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases}$ $\qquad x = (x_1, ..., x_n)$

$\nabla\varphi_1,\ \nabla\varphi_2,\ ...,\ \nabla\varphi_k$ - лин. незав.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$L(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \varphi_j(x) \text{ - ф-ия Лагранжа}$$

$\lambda_1, ..., \lambda_k$ - мн-ли Лагранжа

Алгоритм:

1. Ищем стац. точки L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} L(x) = 0, \quad j = 1...n \\ \varphi_i(x) = 0, \quad i = 1...k \end{cases}$$ - система из $k+n$ уравнений

$\Rightarrow$ находим стац. точки (это точки, подозр. на экстр.)

2. Нужно проверить, что в стац. точках условия $\varphi_i = 0$ должны быть независимы в том смысле, что вектора $\nabla\varphi_1, ..., \nabla\varphi_k$ - лин. независимы или:

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k$$

$k = 1$ означает $\nabla\varphi_1 \neq 0$

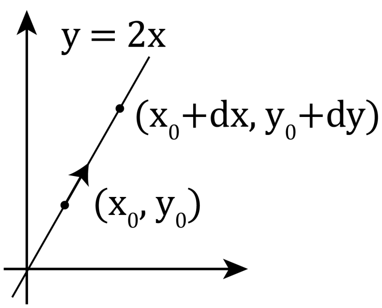
3. Исследуем d^2L в стац. точках

$d^2L > 0$ при усл., что $d\varphi_i \overset{\text{усл. на } dx_1, ..., dx_n}{=} 0$ $j = 1...k \Rightarrow$ усл. лок. min
$d^2L < 0$ при усл., что $d\varphi_i = 0$ $j = 1...k \Rightarrow$ усл. лок. max

"Пример" $f = \frac{x^2 - y^2}{2}$

$$d^2L = dx^2 - dy^2$$

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2}y = 0$$



$$d\varphi = dx + \frac{dy}{2} = 0$$

$$d^2L = \left(\frac{dy}{2}\right)^2 - (dy)^2 = -\frac{3}{4}dy^2 < 0$$

Пример

$$\varphi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$f(x) = x^3$$

Решение

Шаг 1:

$$L(x) = x^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 = x(2x + 2\lambda) \\ L'_y = 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \quad y^2 + z^2 = 1$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow y = z = 0 \qquad x = 1 \quad \lambda = -\frac{3}{2} \qquad x = -1 \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Шаг 2: $(x,\ y,\ z,\ lambda)$ - стац. точка

$$d^2L = (2\lambda + 6x)d^2x + 2\lambda dy^2 + 2\lambda z^2$$

Можем изучать при $0 = d(x^2+y^2+z^2-1) = \underset{\text{фикс}}{2x}\ dx + \underset{\text{фикс}}{2y}\ dy + \underset{\text{фикс}}{2z}\ dz \underset{\text{усл. на } (dx, dy, dz)}{=} 0$

Случай 2:

$$\lambda \neq 0 \qquad dx = \frac{ydy + zdz}{x} = 0 \qquad (y = z = 0)$$

$$d^2L = 2\lambda(dy^2 + dz^2)$$

$\lambda > 0$ - пол. опр $(-1,\ 0,\ 0)$, $\lambda < 0$ - отр. опр. $(1,\ 0,\ 0)$
$(-1,\ 0,\ 0)$ - лок. макс.
$(1,\ 0,\ 0)$ - лок. мин.
Случай 1:

$$x = 0 \quad \lambda = 0 \quad d^2L = 0 \text{ - метод не работает}$$

Но $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ нет лок. мин. и лок. макс.

Пример

$$u = xyz \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$L(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x^2+y^2+z^2) + \lambda_2(x+y+z)$$

$$\begin{cases} yz+2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ xz+2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ xy+2\lambda_1 z+\lambda_2=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}xyz$$

$$\overset{1+2+3}{\Rightarrow} \lambda_2 = -\frac{1}{3}(yz+xz+xy)$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} (x+\underset{=0}{y}+z)^2 - 2(xy+\underset{=\frac{1}{2}}{xz}+yz) = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} (z-2\lambda_1)(y-x)=0 \\ (x-2\lambda_1)(z-y)=0 \\ (y-2\lambda_1)(x-z)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}};\ \pm\frac{1}{2\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{6}\right) \text{ и ещё ...}$$

Следующий шаг:

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,\ \text{кроме} x=y=z$$

Следующий шаг:

$$d^2L = 2\lambda_1(dx^2+dy^2+dz^2) + 2xdydz + 2ydxdz + 2zdxdy$$

Но нам известно:

$$\begin{cases} 2xdx+2ydy+2zdz=0 \\ dx+dy+dz=0 \end{cases}$$

Посмотрим на точку $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow dz = 0 \qquad dx = -dy \Rightarrow d^2L = (4\lambda_1 - 2z)dx^2 = \pm\sqrt{6}dx^2$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ - усл. лок. мин., $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ - усл. лок. макс.

Остальные аналогично

31.11.2019

Пример

$$f = xy + 2xz + 2yz, \qquad xyz = 108$$

$$L(x) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 108)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,\ y,\ z) = y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,\ y,\ z) = x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(z,\ y,\ z) = 2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$2xz + 2yz + 108\lambda = 0$$

$$x + y + 4z + \lambda(\underbrace{xz + yz}_{=-54\lambda}) = 0$$

$$xy + 2xz + 108\lambda = 0$$

$$xy + 2yz + 108\lambda = 0$$

$$\Rightarrow xz = yz \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} x = y$$

$$xyz = 4z^3 = 108 \Leftrightarrow z = 3, \qquad z = y = 6$$

$$2*6*3 + 2*6*3 = -108\lambda \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$$

$$dL_{(x,y,z)} = (y + 2z - \frac{2}{3}yz)dx + (x + 2z - \frac{2}{3}xz)dy + (2x + 2y - \frac{2}{3}xy)dz$$

$$d^2_{(x,y,z)}L = 0dx^2 + 2(1 - \frac{2}{3}z)dx + dy + 2(2 - \frac{2}{3}y)dxdz + 2(2 - \frac{2}{3}x)dydz$$

$$d^2_{(x,y,z)}L = 2(1-\frac{2}{3}3)dxdy+2(2-\frac{2}{3}6)dxdy+2(2-\frac{2}{3}6)dy = -2dxdy-4dxdz-4dydz\boxed{=}$$

$$\underbrace{d(xyz)}_{=yzdx+xzdy+xydz} = 0 \text{ в } (6{,}6{,}3)$$

$$d_{(6,6,3)}(xyz) = 18dx18dy + 36dz = 0 \Rightarrow dz = -\frac{dx + dy}{2}$$

$$\underset{dz=\frac{dx+dy}{2}}{\boxed{=}} - 2dxdy + 2(dx^2 + dxdy) + 2(dy^2 + dxdy) =$$

$$= 2(dx^2 + 2\frac{1}{2}dxdy + dy^2) > 0, \qquad dx^2 + dy^2 > 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

т.о. в (6,6,3) - лок. усло. мин.

Пример

$$F(x,y,u) = 2x^2 + 2y^2 + u^2 + 8yu - u + 8 = 0$$

Найти экстр. $u(x,y)$

Решение

В принципе это квадратное уравнение и мы можем выразить u просто его решив, но давайте забудем, что мы так умеем...

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{4x}{2u+8y-1} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{4y+8u}{2u+8y-1} = 0 \end{cases}$$

$F'_u = 2u + 8y - 1 \neq 0$

$x = 0 \qquad y = -2u$ в стац. точке

$F(x,y,u) = 0$ - и это условие

$F(0,-2u,u) = 8u^2 + u^2 - 16u^2 - u + 8 = -7u^2 - u + 8 = 0$

$u_1 = 1 \qquad u_2 = -\dfrac{8}{7}$

Подозрительные точки $(0,-2,1) \qquad F'_u(0,-2,1) = -15 \neq 0$

$(0, \dfrac{16}{7}, -\dfrac{8}{7}) \qquad F'_u(0, \dfrac{16}{7}, -\dfrac{8}{7}) = -1 - 14u = -15$

В стационарных точках

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{4}{F'_u} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{4 + \overbrace{8u'_y}^{=0}}{F'_u}$$

Пояснение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(F''_{xx} + F''_{xu}\overbrace{u'_x}^{=0})F'_u - \overbrace{F'_x}^{=0}(F''_{xu} + F''_{uu}u'_x)}{(F'_u)^2}$$

$= -\dfrac{F''_{xx}}{F'_u}$ в стац. точке!

$F'_u(x,y,u(x,y))'_x$

$(0,-2,1) \qquad d^2u = \dfrac{u}{15}(dx^2 + dy^2)$ - стр. пол. опр. $\Rightarrow$ точка лок. min

$(0, \dfrac{16}{7}, -\dfrac{8}{7}) \qquad d^2u = -\dfrac{4}{15}(d^2x + dy^2) \leqslant 0 \Rightarrow$ лок max

Пример

$$F(x,y,u) = (x^2+y^2+u^2)^2 - 8(x^2+y^2-u^2) = 0, \qquad u > 0$$

$$F'_x = 4x(x^2+y^2+u^2) - 16x = 0$$

$$F'_y = 4y(x^2+y^2+u^2) - 16y = 0$$

ТУТ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО (я занимался файликами)
То есть стационарные точки находятся на:

$$u = 1 \qquad x^2+y^2 = 3$$

Функция постоянна на целой окружности, значит нет строгого экстремума. Можем только надеяться, что в других направлениях форма положительно определена

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad t^2 = x^2+y^2$$

$$(t^2+f^2)^2 - 8(t^2-f^2) = 0$$

$f'_t = 0 \qquad t = \sqrt{3}$ - стац. точка $f(\sqrt{3}) = 1$

1.20 ???

1.21 ???

18.11.2019

1.22 Функции комплексных переменных

Опр

$$f : D \to \mathbb{C} \qquad D \subset \mathbb{C}$$

f (компл.) диф. в z_0, если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \qquad D \subset \mathbb{R}^2$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$f(z) = f(x, y)$$

Замечание

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диф. (вещ.) в (x_0, y_0), если:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underset{\in M_2(\P)}{A} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) =$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) =$$

$$= f(z_0) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(z - z_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{(z - z_0)}\right) + o(|z - z_0|)$$

$$\overline{z - z_0} = x - x_0 - i(y - y_0)$$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} + \overline{o}(1)$$

Если f - вещ. диф., то:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \exists \text{ (т.е. f - компл. диф.)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ - уравнение Коши-Римана}$$

$$\Leftrightarrow f = u + iv \qquad u'_x = v'_y \qquad v'_x = -u'_y$$

Пример

$$f(x, y) = (y, x)$$

$$f(z) = \overline{z}i = i(x - iy) = y + ix$$

Замечание

f - компл. диф в $z_0 \Leftrightarrow$

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + \overline{o}(|z - z_0|)$$
$$c = f'(z_0)$$

Обозн

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$f'_{\overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

f - вещ. диф $\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0)\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + o(z - x_0)$

Если f вещ диф $\Rightarrow$ f компл. диф. $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$

Опр

f - голоморфна (аналитична) в D, если f компл. диф. в D (регулярная)

Задача

Выяснить, в каких точках компл. дифференцируема $f(z) = x^2y^2$ $(z = x + iy)$

Решение

f - вещ. дифф. $\Rightarrow xy^2 + ix^2y^2 = 0$, тогда комп. диф.
f - диф при x или y равными 0

Задача

$$f(z) = \underbrace{2xy}_{u} - i(\underbrace{x^2 - y^2}_{-v})$$

Решение

Снова вещ. диф-мы, потому что мнимые и вещ. части - многочлены

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = 2y = v'_y \\ u'_y = 2x = -v'_x \end{cases} \quad \Rightarrow \text{f диф на } \mathbb{C}$$

Упр

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad |z| < R \qquad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}$$

$$\Rightarrow f \text{ гол. в } |z| < R \text{ и } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$

21.11.19

Пример

1. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

   ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО

Опр

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - целая, если f голом. в $\mathbb{C}$

2. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Упр

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$z = x + iy \qquad e^z = e^x(\cos x + i \sin y)$$

$$e^{ix} = \cos c + i \sin x$$

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} \qquad R = 1$$

Теорема

f голом. в $D \subset \mathbb{C}$, D - обл. с кус. гл. гран., $f \in C(\overline{D})$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \overset{=dx+idy}{d\xi} = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = \begin{cases} f^{(n)}(z), & z \in D \\ 0, & z \notin D \end{cases}$$

Пример

$$\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} = 2\pi i \frac{1}{(z-1)^3}\Big|_{z=-1}$$

$$|z+1| < 1 \qquad \frac{1}{(z-1)^3} \text{ гол. в } |z+1| < 1$$

$$\int\limits_{|\xi+1|=1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi + 1} = 2\pi i f(z) = -\frac{\pi i}{4}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{(\xi - 1)^3} \qquad z = -1$$

Замечание

Γ_+ - обход кривой против часовой
Γ_- - обход кривой по часовой

$$\int_{\Gamma_+} f dz = -\int_{\Gamma_-} f dz$$

В нашем примере (добавим ограниченность f):

$$-\int^{-||} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} = -\int\limits_{\partial(|z+1|>1)} \frac{dz \cdot 1}{(z+1)(z-1)^3} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{z+1}\right)''\Big|_{z=1} = \pi i \frac{2}{2^3} = -\frac{\pi}{4}$$

Пример

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi}{2!}(\cos z)''\Big|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi \frac{e^{ii}+e^{-ii}}{2} =$$

$$= -\pi \frac{e+e^{-i}}{2} = -\pi \operatorname{ch} 1$$

$$\Rightarrow \cos iz = \operatorname{ch} z \qquad \sin iz = i \operatorname{sh} z$$

Пример

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z dz}{z \cdot (1-z)^3}$$

$$D = \{|z| < \frac{3}{2}\}$$

$$\frac{1}{z(1-z)^3} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2} + \frac{D}{(1-z)^3}$$

$$A = D = 1$$

$$\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{(1-z)^2} \qquad C = 1, \quad B = 1$$

$$\int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{z} dz - \int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{z-1} dz + \int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{(z-1)^2} dz - \int\limits_{\partial D} \frac{e^z}{(z-1)^3} dz =$$

$$= 2\pi i (e^0 - e^1 + \frac{(e^z)'_{z=1}}{1!} - \frac{-(e^z)''_{z=1}}{2!}) = 2\pi i (1 - \frac{e}{2})$$