Санкт-Петербургский государственный университет

Лекции по алгебре

3 семестр, преподаватель Демченко О. В.

Записали Костин П.А. и Щукин И.В.[1]

[1] Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах вконтакте (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

2019-09-17

1 Теория групп

Опр (группа)

G - мн-во, $*:\quad G*G\to G,\ (g_1,g_2)\to(g_1*g_2)\quad(g_1g_2)$

1. $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)\quad\forall g_1,g_2,g_3\in G$
2. $\exists e\in G: eg=ge=g\quad\forall g\in G$
3. $\forall g\in G\quad\exists\widetilde{g}\in G: g\widetilde{g}=g\widetilde{g}=e$
4. $g_1g_2=g_2g_1\quad\forall g_1,g_2\in G$

Примеры

1. $(\mathbb{Z},+)$ - группа
2. $(\mathbb{Z},\cdot)$ - не группа
3. $(R,+)$ - группа кольца
4. $(R^*,\cdot)$
5. Группа самосовмещения D_n, например D_4 - квадрат, композиция - группа, $|D_n|=2n$
6. $GL_n(K)=\{A\in M_n(K):|A|\neq 0\}$, умножение - группа
7. $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ - частный случай п.3,4

Теорема (простейшие св-ва групп)

1. e - единственный,
   e,e' - нейтральные: $e=ee'=e'$
2. $\widetilde{g}$ - единственный

   Пусть $\widetilde{g},\hat{g}$ - обратные, тогда:

   $$\widetilde{g}g=g\widetilde{g}=e=\hat{g}g=g\hat{g}$$

   $$\hat{g}=e\hat{g}=(\widetilde{g}g)\hat{g}=\widetilde{g}(g\hat{g})=\widetilde{g}e=\widetilde{g}$$

3. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

   Это верно, если $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (b^{-1}a^{-1})(ab) = e$, докажем первое:

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = ((ab)b^{-1})a^{-1} = (a(bb^{-1}))a^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e$$

4. $(g^{-1})^{-1} = g$

Опр

$$g \in G \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ тогда } g^n = \left[\begin{array}{l} \overbrace{g...g}^{n}, \quad n > 0 \\ e, \quad n = 0 \\ \underbrace{g^{-1}...g^{-1}}_{n}, \quad n < 0 \end{array}\right.$$

Теорема (св-ва степени)

1. $g^{n+m} = g^n g^m$
2. $(g^n)^m = g^{nm}$

Опр

$g \in G$, $n \in N$ - порядок g $(\operatorname{ord} g = n)$, если:

1. $g^n = e$
2. $g^m = e \;\Rightarrow\; m \geqslant n$

Порядок может быть бесконечным

Примеры

1. D_4 ord(поворот $90°$) $= 4$

   D_4 ord(поворот $180°$) $= 2$

2. $(\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}, +)$

   $\operatorname{ord}(\overline{1}) = 6, \quad \operatorname{ord}(\overline{2}) = 3$

Утв

$$g^m = e \quad ord(g) = n \;\Rightarrow\; m \,\vdots\, n \quad (n > 0)$$

Док-во

$$m = nq + r, \quad 0 \leqslant r < n$$

$$e = g^m = g^{nq+r} = (g^n)^q g^r = g^r \;\Rightarrow\; r = 0$$

Опр

$H \subset G$ называется подгруппой G (H < G) (и сама является группой), если:

1. $g_1, g_2 \in H \;\Rightarrow\; g_1 g_2 \in H$
2. $e \in H$
3. $g \in H \;\Rightarrow\; g^{-1} \in H$

Примеры

1. $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$
2. D_4
3. $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : \quad |A| = 1\}$, $SL_n(K) < GL_n(K)$

Мультипликативная запись	Аддитивная запись
$g_1 g_2$	$g_1 + g_2$
e	0
g^{-1}	$-g$
g^n	ng

Опр

$H < G, \quad g_1, g_2 \in G,$ тогда $g_1 \sim g_2$, если:

1. $g_1 = g_2 h$, $h \in H$ (левое отношение)
2. $g_2 = h g_1$, $h \in H$ (правое отношение)

Док-во (эквивалентность)

1. (симметричность) $g_1 = g_2 h \overset{*h^{-1}}{\Rightarrow} g_2 = g_1 h^{-1}$
2. (рефлексивность) $g = ge$
3. (транзитивнось) $g_1 = g_2 h_1$, $g_2 = g_3 h_2 \Rightarrow g_1 = g_3(h_2 h_1)$, где $h_2 h_1 \in H$

Опр

$[a] = \{b : a \sim b\}$ классы эквивалентности

Опр

$[g] = gH = \{gh, h \in H\}$ (левый класс смежности)

$$gh \sim g \to gh \in [g]$$

$$g_1 \in [g] \to g_1 \sim g \to g_1 = gh$$

Утв

$[e] = H$
Установим биекцию:

$$[g] = gh \leftarrow H$$

$$gh \leftarrow h$$

Очевидно, сюръекция, почему инъекция?

$$gh_1 = gh_2 \xrightarrow{*g^{-1}} h_1 = h$$

Теорема (Лагранжа)

$H < G$, $|G| < \infty$, тогда $|G| \,\vdots\, |H|$ (уже доказали!)

2019-09-10

Следствие

G - кон. группа, $a \in G$, $\operatorname{ord} a = m$, $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$, тогда $|H| = m$

Док-во

$\{a^0 = e, a_1, ..., a^{m-1}\}$ - подмножество H

Докажем, что все остальные элементы тоже здесь есть:

$$n \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ n = mq + r, \quad 0 \leqslant m - 1$$

$$a^n = a^{mq+r} = (a^m)^q a^r = a^r$$

$$a^k = a^l, \quad 0 \leqslant k \leqslant l \leqslant m-1, \quad \text{умножим на} a^{-k}$$

$$e = a^{l-k}, \quad 0 \leqslant l-k \leqslant m-1 \quad \text{m - наименьшее } \mathbb{N} \text{ такое что } a^m = e$$

$$l - k = 0 \ \Rightarrow \ l = k$$

Докажем, что $|H| = m$:

$$\Rightarrow |G| \, \vdots \, m = \operatorname{ord} a$$

Т.о. в группе порядок эл-та - делитель порядка группы

Напоминание (теорема Эйлера)

$n, a \in \mathbb{N}$, $(a, n) = 1$, тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$

Док-во

Рассмотрим $G = (\mathbb{Z}_{/n}\mathbb{Z}, *)$ $\quad |G| = \varphi(n)$

$$\overline{a} \in G, \operatorname{ord} \overline{a} = k$$

$$\varphi(n) \, \vdots \, k \Rightarrow \varphi(n) = kl$$

$$\overline{a} = \overline{1}$$

$$\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}$$

Опр

G - циклическая группа, если:

$$\exists g \in G : \forall g' \in G : \exists k \in \mathbb{Z} : g' = g^k$$

Такой g называется образующим

Опр

$\mathbb{Z}$ (образующий - единица и минус единица)

Замечание

Любая циклическая группа - коммутативна

Док-во

$g'g'' = g''g' = g^k g^l = g^l g^k$

Опр

Пусть G,H - г руппы, рассмотрим

$$G \times H = \{(g,h) : g \in G, h \in H\}$$

Введем операцию

$$(g,h) * (g',h') \overset{def}{=} (g *_G g', h *_H h')$$

Докажем, что это группа.

Док-во (ассоциативности)

$$((g,h)(g',h'))(g'',h'') \overset{?}{=} (g,h)((g',h')(g'',h'')$$

$$(gg',hh')(g'',h'') \overset{?}{=} (g,h)(g'g'',h'h'')$$

$$((gg')g'',(hh')h'') \overset{?}{=} (g(g',g''),h(h'h'') \text{ - очевидно}$$

Пример

$$\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}$$

Опр

Конечная группа порядка n является циклической тогда и только тогда, когда она содержит элемент порядка n

$$(|G| = n, \text{ G - циклическая } \equiv \exists g \in G : \operatorname{ord} g = n)$$

Пример

Рассмотрим $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_3\mathbb{Z}$ - циклическая

$$((\overline{1},\overline{1}),(\overline{0},\overline{2}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2}))$$

Рассмотрим $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_4\mathbb{Z}$ - не циклическая

Опр

$\varphi : G \to H$ - биекция и $\varphi(g_1, g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$,
тогда φ - изоморфизм

Примеры

1. $D_3 \to S_3$

2. $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \leftarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$(\cos\frac{2\pi a}{n} + i\sin\frac{2\pi a}{n} = \varphi\overline{a}\overline{a})$$

$$\overline{a} = \overline{b} \to \varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{b})$$

$$\varphi(\overline{a} + \overline{b}) \overset{?}{=} \varphi(\overline{a})\varphi(\overline{b})$$

$$\cos\frac{2\pi(a+b)}{n} + i\sin\frac{2\pi(a+b)}{n} = (\cos\frac{2\pi a}{n} + i\sin\frac{2\pi a}{n})$$

Опр

Две группы называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм

Утв

Изоморфизм - отношение эквивалентности

Док-во

Т.к. композиция изоморфизмов - изоморфизм $G \xrightarrow{e} H \xrightarrow{\psi} H$

$$(\psi \circ \varphi)(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1)\varphi(g_2)) =$$

$$= \psi(\varphi(g_1))\psi(\varphi(g_2)) = (\psi \circ \varphi)(g_1) \circ (\psi \circ \varphi)(g_2)$$

Рефлексивность - тождественное отображение - изоморфизм
Транзитивность: $G \underset{\varphi}{\to} H$, $H \underset{\varphi^{-1}}{\to} G$

Теорема

G - циклическая группа

1. $|G| = n \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2. $|G| = \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}$

Док-во

1. g - обр. G, значит $G = \{e, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$
   (среди них нет одинаковых)

   Построим изоморфизм в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\varphi(g^k) = \overline{k}$

   Проверим, что $\varphi(g^k g^l) = \varphi(g^k) + \varphi(g^l) = \overline{k} + \overline{l}$

   Левая часть: $\varphi(g^{k+l} = \overline{(k+l) \mod n} = \overline{k} + \overline{l}$

2. $G = \{..., g^{-1}, e, g, g^2, ...\}$
   (тоже нет совпадающих элементов, иначе $g^k = g^l$, при $k > l$, тогда $g^{k-l} = e$, но тогда конечное число элементов, потому что оно зацикливается через каждые $k - l$ элементов), построим отображение в $\mathbb{Z}$.
   $\varphi(g^n) = n$ - очевидно, биекция.
   Нужно доказать, что $\varphi(g^n g^k) = \varphi(g^n) - \varphi(g^k) = n + k$

2019-09-17

Утв

$|G| = p, \quad p$ - простое $\Rightarrow \; G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Док-во

$g \in G$, $g \neq e$, $\operatorname{ord} g = p$
$\Rightarrow G = \{e = g^0, g, ..., g^{p-1}\}$

Утв

H, G - группы, $\varphi : G \to H$ - изоморфизм $\Rightarrow n = \operatorname{ord} g = \operatorname{ord} \varphi(g)$

Док-во

Пусть $g^n = e, \; \varphi(g^n) = \varphi(e) \stackrel{?}{=} e$

$$\varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$$

Теперь докажем, что меньшего нет

$$\varphi(g)^m = e, \; m \in \mathbb{N} \stackrel{?}{\Rightarrow} m \geqslant n$$

$$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = e = \varphi(e) \quad \Rightarrow g^m = e \Rightarrow m \geqslant n$$

Опр

$H < G$, тогда H - нормальная подгруппа, если $\forall h \in H, g \in G \Rightarrow g^{-1}hg \in H$ - сопряжение элемента h с помощью элемента g, обозначается: $H \triangleleft G$

Замечание

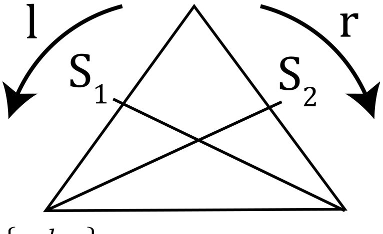
Элементы подгруппы при сопряжении переходят в элементы подгруппы

Замечание

Подгруппа любой коммутативной группы нормальна

Пример

D_3 - 6 элементов, 3 поворота и 3 симметрии



$\{e, l, r\}$ - нормальная
$\{e, s_1\}$ - не нормальная

Утв

$H \triangleleft G \Leftrightarrow$ разбиение на Л и П кл3ассы смежности по Н совпадают

$$\forall g \quad gH = Hg$$

Док-во

Берем произвольный элемент из левого и правого и докажем, что совпадают. Берем слева:

$$h \in H \quad gh \in gH$$

$$gh = \underbrace{(g^{-1})^{-1}hg^{-1}}_{\in H} g = h_1 g$$

Теперь справа:

$$g \in G, \quad h \in H, \quad g^{-1}hg = h_1$$

$$hg \in Hg = gH \Rightarrow gh_1, h_1 \in H$$

Опр (умножение классов смежности)

$$H \triangleleft G$$

$$g_1H * g_2H \stackrel{\text{def}}{=} g_1g_2H$$

Док-во (корректности)

Хотим проверить, что

$$\widetilde{g}_1H = g_1H, \quad \widetilde{g}_2H = g_2H \stackrel{?}{\Rightarrow} \widetilde{g}_1\widetilde{g}_2H = g_1g_2H$$

Аналогично прошлому доказательству

$$g_2^{-1}h_1g_2 = h_3 \in H$$

$$\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2h = g_1h_1g_2h_2h = g_1g_2\underset{=h_3}{(g_2^{-1}h_1g_2)}h_2h$$

$$\widetilde{g}_1H = g_1H \Rightarrow \widetilde{g}_1 = g_1h_1$$

$$\widetilde{g}_2H = g_2H \Rightarrow \widetilde{g}_2 = g_2h_2$$

Не использовали условие $g_2^{-1}h_1g_2 = h_3 \in H$

$$\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2H = g_1h_1g_2h_2h = g_1g_2\underset{=h_3}{(g_2^{-1}h_1g_2)}h_2h$$

Осталось доказать, что получается группа

1) Нейтральный элемент $eH = H, \quad eH * gH = (eg)H = gH$

2) Ассоциативность $(g_1H + g_2H) * g_3H \stackrel{?}{=} g_1H * (g_2H * g_3H)$

$(g_1g_2)H * g_3H = (g_1g_2)g_3H$

3) $gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH$

Замечание

G/H

Была эквивалентность: $a \sim b \Leftrightarrow a - b \vdots h$

$G = \mathbb{Z}$

$H = h\mathbb{Z}, \quad g_1g_2^{-1} \in H$ - мульт. запись , $\quad g_1 - g_2 \in n\mathbb{Z}$ - адд. запись

$[a] + [b] = [a + b]$

Аддитивная группа кольца класса вычетов - это то же самое, что фактор группа группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$

Опр

Как в произвольной группе найти подгруппу?

$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$ - коммутатор элементов $h, g \in G$

Коммутант - множество произведений всех возможных коммутаторов

Обозначается $K(G) = \{[g_1, h_1]...[g_n, h_n],\ g_i, h_i \in G\}$

Док-во (коммутант - подгруппа)

$K(G) < G$

Нейтральный элемент:

$[e, e] = e$

Обратный элемент?

$[g_1, h_1]...[g_n, h_n]$

Как его найти?

$[g, h^{-1}]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h, g]$

$$([g_1, h_1]...[g_n, h_n])^{-1} = [g_1, h_1]...[g_n, h_n]$$

Значит это подгруппа. Нормальная ли?

$$g^{-1}[g_1, h_1]...[g_n, h_n]g$$

$$g^{-1}[g_1, h_1]g(g^{-1}[g_2, h_2]g)...(g^{-1}[g_n, h_n]g)$$

Нужно доказать, что сопряжение коммутатора лежит в коммутанте

$$g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}g = \underbrace{g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}}_{=[g^{-1}g_1, h_1]}\underbrace{h_1g^{-1}h_1^{-1}g}_{=[h_1, g^{-1}]}$$

Утв

Фактор-группа $(G/K(G))$ по коммутанту - коммутативна

Док-во

$$g_1, g_2 \in G \qquad g_1K(G)g_2K(G) \overset{?}{=} g_2K(G)g_1K(G)$$

$$g_1g_2K(G) = g_1g_2K(G) \qquad g_2K(G)g_1K(G) = g_2g_1K(G)$$

$$[g_1, g_2] = g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in K(G)$$

Утв

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{mn}, \text{ если } (m, n) = 1$$

Док-во

Нужно построить изоморфизм $[a]_{mn} \mapsto ([a]_n, [a]_m)$

$$[a]_{mn} = [a']_{mn} \Rightarrow [a]_n = [a']_n,\ [a]_m = [a']_m$$

Теперь нужно проверить биекцию

Сюръективность:

$$\forall b, c \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} [x]_n = [b]_n \\ [x]_m = [c]_m \end{cases},\ \text{по КТО всё хорошо}$$

Инъективность:

$$\left[\begin{matrix} [a]_n = [b]_n \\ [a]_m = [b]_m \end{matrix}\right. \Rightarrow\ [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

На языке сравнений:

$$\begin{matrix} a \equiv b(n) \\ a \equiv b(m) \end{matrix} \Rightarrow\ a \equiv b(mn)$$

На самом деле достаточно было проверить одно

Опр

$\varphi : G \to H$ - гомоморфизм, если $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$

изоморфизм = гомоморфизм + биекция

$\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ - множество гомоморфизмов

Примеры 1. $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$

$z \to |z|$

2. $GL_n(K) \to K^*$

$A \to \det A$

3. $S_n \to \{\pm 1\}$

$$\sigma \to \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ - четн.} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ - неч.} \end{cases}$$

4. $a \in G \quad G \to$

$g \to a^{-1} g a$

$(a^{-1} g a)(a^{-1} g_1 a) = a^{-1} g_1 g a$

2019-09-24

Напоминание

$$G/K(G) \text{ - коммутативна}$$

Утв

$$H \triangleleft G \quad G/_H \text{ - комм}$$

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad (g_1H)(g_2H) = (g_2H)(g_1H)$$
$$[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in H \Rightarrow K(G) \subset H$$

Свойства (гомоморфизма)

$$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$$

1. $f(e_G) = e_H \qquad f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e)$
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
$$f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e$$
3. Композиция гомоморфизмов

Опр

$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$

$$\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G : \ f(g) = e\} \subset G$$

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(g) : \ g \in G\} \subset H$$

Утв

Ker и Im - подгруппы G

Док-во

1. $f(g_1) = f(g_2) = e \Rightarrow f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = e \cdot e = e$
2. $f(e) = e$
3. $f(g) = e \Rightarrow f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = e^{-1} = e$

1. $f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1g_2)$

2. $e = f(e)$
3. $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

Утв

Ker - нормальная подгруппа G

Док-во

$\operatorname{Ker} f \triangleleft G$?

$$g \in G \qquad a \in \operatorname{Ker} f$$

$$f(g^{-1}ag) = f(g)^{-1} \underbrace{f(a)}_{=e} f(g) = e$$

Утв (основная теорема о гомоморфизме)

$$G/_{\operatorname{Ker} f} \cong \operatorname{Im} f$$

Док-во

Докажем, что это корректное отображение:

$$\operatorname{Ker} f = K$$

$$\varphi(gK) \stackrel{def}{=} f(g) \qquad \varphi : G/_{\operatorname{Ker} f} \to \operatorname{Im} f$$

$$gK = g'K \stackrel{?}{\Rightarrow} f(g) = f(g')$$

$$g' = g \cdot a, \quad a \in K \qquad f(g') = f(g) \cdot \underbrace{f(a)}_{=e} = f(g)$$

Докажем, что φ - гомоморфизм:

$$f(g_1)f(g_2) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K) \stackrel{?}{=} \varphi(g_1Kg_2K) = \varphi((g_1g_2)K) = f(g_1g_2)$$

$$\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K) \stackrel{?}{\Rightarrow} g_1K = g_2K$$

Докажем, что это биекция. Что сюръекция - очевидно

$$f(g_1) = f(g_2) \qquad \Rightarrow g_1g_2^{-1} \in K$$

$$\underbrace{f(g1)f(g_2)^{-1}}_{=f(g_1)f(g_2^{-1})} = e$$

Напоминание

$$\mathrm{SL}_N(K) \text{ - квадратные матрицы с } \det = 1$$

Опр

$$\det : \mathrm{GL}_n(K) \to K^*$$

Но это отображение - сюръекция, а значит:

$$\mathrm{GL}_n(K)/_{\mathrm{SL}_n(K)} \cong K^*$$

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| = 1\}$$

Пример (1)

$$S_n \to \{\pm 1\}$$

$$S_n/_{A_n} \cong \{\pm 1\} (\cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$$

Пример (2)

$$G \times H \to G$$

$$(g_1 h) \to g$$

$$G \times H\Big/_{e \times H} \cong G$$

1.12 Действие группы на множестве

Опр

M - множество ,G - группа

$$G \times M \to M$$

$$(g, m) \to gm$$

1. $g_1(g_2 m) = (g_1 g_2)m \quad \forall g_1 g_2 \in G, \quad m \in M$
2. $em = m \quad \forall m \in M$

Если задано такое отображение, то говорим, что группа G действует на множестве M

Пример (1)

$$A = k^n \qquad (A, v) \to A_v$$

$$G = \mathrm{GL}_n(K)$$

$$A(B_v) = (AB)_v$$

$$E_v = v$$

Пример (2)

M = {количество раскрасок вершин квадрата в два цвета}

$$G = D_4$$

$$\begin{matrix} \text{ч} & \text{ч} \\ \text{б} & \text{ч} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ч} & \text{б} \\ \text{ч} & \text{ч} \end{matrix}$$

$$M = G$$

$$gm = gm$$

Опр

$m \in M$

$$\mathrm{Stab}\ m = \{g \in G : gm = m\} \text{ - стабилизатор}$$

$$\mathrm{Orb}\ m = \{gm,\ g \in G\} \text{ - орбита}$$

Утв

$$\mathrm{Stab}\ m < G$$

Док-во

Доказательство того, что стабилизатор - подгруппа:

1. $g_1, g_2 \in Stab\ m$

$$(g_1 g_2)m = g_1(\underbrace{g_2 m}_{=m}) = g_1 m = m$$

2. $e \cdot m = m$

3. $gm = m \overset{?}{\Rightarrow} g^{-1}m = m$

$$gm = m$$

$$\underbrace{g^{-1}gm}_{=(g^{-1}g)m = em = m} = g^{-1}m$$

Утв

$$m_1, m_2 \in M$$

$$m_1 \sim m_2, \text{ если } \exists g \in G : gm_1 = m_2$$

$$\Rightarrow \sim \text{ - отношение эквив}$$

Док-во

$$\text{(рефл.) } gm_1 = m_2 \Rightarrow g^{-1}m_2 = m_1 \quad g^{-1} \in G$$

$$\text{(симм.) } em = m, \quad e \in G$$

$$\text{(тран.) } \left.\begin{aligned} gm_1 = m_2 \\ g'm_2 = m_3 \end{aligned}\right| \Rightarrow (g'g)m_1 = g'(gm_1) = g'm_2 = m_3$$

Утв

$$|\text{Orb } m| \cdot |\text{Stab } m| = |G|$$

Док-во

$$\text{Stab } m = H$$

$$\{gH,\ g \in G\} \to Orb\ m$$

$$gH \to gm$$

Хотим доказать, что это корректно

$$gH = g'H \overset{?}{\Rightarrow} gm = g'm$$

$$g' = ga, \quad g \in H$$

$$g'm = (ga)m = g(am) = gm$$

Хотим доказать биективность. Сюръективность - очев. Инъективность:

$$gm = g'm \Rightarrow gH = g'H$$

$$m = em = (g^{-1}g')m = g^{-1}(gm) = g^{-1}(g'm) = (g^{-1}g')m$$

$$\Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow gH = g'H$$

Лемма (Бернсайда)

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m\}$$

2019-10-01

Напоминание

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m\}$$

Док-во

$$\sum_{g\in G}|M^g| = |\{(g,m) \in G\times M : gm = m\}| =$$

$$= \sum_{m\in M}|Stab\ m| = |G|\sum_{m\in M}\frac{1}{|Orb\ m|} = |G|\cdot\text{Кол-во орбит}$$

2 Евклидовы и унитарные пр-ва

Опр

V - в.п. над $\mathbb{R}$

Введем отображение

$$V\times V\to\mathbb{R}$$

$$(u,v)$$

Свойства этого отображения

1. Симметричность

$$(u,v) = (v,u) \quad \forall u,v\in V$$

2. Линейность

$$(\lambda u, v) = \lambda(u,v) \qquad \lambda\in\mathbb{R} \quad u,v\in V$$

$$(u+u',v) = (u,v) + (u',v) \qquad u,u',v\in V$$

3. $(u,v) \geqslant 0 \qquad \forall u\in V$

$$(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Такое пр-во V с введенным на нем таким отображением мы называем Евклидовым пр-вом, а отображение скалярным.

Напоминание

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n \text{ - квадр. матрица}$$

$$Tr\ C = \sum_{i=1}^n c_{ii} \text{ - след (Trace)}$$

(Сумма элементов главной диагонали)

Примеры

1. Школьные вектора
2. $\mathbb{R}^n$

$$((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_n$ конечномерное пр-во

$$(f, g) = \int_a^b fg dx$$

4. $V = M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) = Tr\ AB^T$$

(См. след в напоминании)

Опр

$$e = \{e_1, ..., e_n\} \text{ - базис } V$$

$$a_{ij} = (e_i, e_j)$$

$$\Gamma_e = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \text{ - матрица Грама}$$

Свойства (матрицы Грама)

1. Матрица невырожд.
2. e, f - базисы

$$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e M_{e\to f}$$

3. $\Gamma_e = \{a_{ij}\}$

$$u = \sum \lambda_i e_i$$

$$v = \sum \mu_j e_j$$

$$(u,v) = (\sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j)$$

$$(u,v) = [u]_e^T \Gamma_e [v]_e$$

<u>Док-во</u>

1. $\exists\, |\Gamma_e| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ не все 0 :

$$\sum \lambda_i (e_i, e_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum \lambda_i e_i,\ e_j \right) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum_i \lambda_i e_i,\ \sum_j \lambda_j e_j \right) = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_i e_i = 0$$

противоречие

2. $\exists M_{e \to f} = \{a_{ik}\} \qquad f_k = \sum a_{ik} e_i$

$$f_l = \sum a_{jl} e_j$$

$$(f_k, f_l) = \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} (e_i, e_j)$$

$$a_{ik} (e_i, e_j) a_{je}$$

Напоминание: X, Y- матр $\qquad X \times Y = Z \quad z_{ij} = \sum x_{is} y_{sj}$

<u>Опр</u>

V - в.п. над $\mathbb{R}$

$V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$v \to \|v\|$ - норма

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V$

2. Нер-во треугольника

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

3. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Если такое отобр. существует, то оно называется нормой

Утв

(u, v) - ск. произв.

$\Rightarrow \|u\| = \sqrt{(u, u)}$

Пример

$\mathbb{R}^n$

$\|x\| = \max |x_i|$

$\|x\| = \sum\limits_i |x_i|$

Теорема (Нер-во Коши - Буняковского)

$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$

Док-во

$\varphi(t) = \|u + rv\|^2 = (u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + 2(u, v)t + t^2\|v\|^2$

$D = 4(u, v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$

$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

$(u + v, u + v) \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$

$(u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$

$2(u, v) \leqslant 2\|u\|\|v\|$

Утв (Теорема Пифагора)

Если $u \perp v \Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Док-во

$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$

Опр (Ортогональное дополнение)

V - евкл. пр-во

$$U \subset V \qquad U^\perp = \{v \in V : (v,u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

Множество всех векторов, которые ортогональны всем векторам из U
Такое мн-во называется ортогональным дополнением

Утв

$U^\perp$ - под-пр V

Док-во

$$\left.\begin{matrix}(v,u) = 0 \quad \forall u \\ (v',u) = 0 \quad \forall u\end{matrix}\right. \Rightarrow (v+v',u) = 0 \quad \forall u$$

$$(v,u) = 0 \quad \forall u$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda v, u) = 0 \quad \forall u$$

Тогда $U^\perp$ дей-во линейное подпр-во V

Свойства

$$V = U \oplus U^\perp$$

$$u \in U \cap U^\perp$$

$$u \in U \quad u \in U^\perp$$

$$(u,u) = 0$$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - базис U дополняем до базиса V

$e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$ - базис V

$$v \in U^\perp \quad v = \sum \lambda_i e_i + \sum \mu_j f_j$$

$$v \in U^\perp \Leftrightarrow (v, e_k) = 0 \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$$

$$(v, e_k) = \sum \lambda_i (e_i, e_k) + \sum \mu_j (f_j, e_k) = 0 \qquad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$$

это матрица

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{n} & \text{m} \\ \hline \text{n} & \Gamma_e & \text{C} \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \Gamma_e x + C_y = 0\}$ - размерность этого m

$(x, y) \to y$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$x = -\Gamma_e^{-1} e_y$

$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$

2019-10-15

Свойство

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Док-во

$$\left.\begin{aligned} \dim U^\perp + \dim U = \dim V \\ \dim (U^\perp)^\perp + \dim U^\perp = \dim V \end{aligned}\right| \Rightarrow \dim(U^\perp)^\perp = \dim U$$

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V\}$$

Опр

$$U < V, \quad v \in V$$

$$U \oplus U^\perp = V$$

$$\Rightarrow \exists! u \in U,\ w \in U^\perp : v = u + w$$

u называется ортогональной проекцией

$$\text{Обозначение: } \operatorname{pr}_U v \overset{\text{def}}{=} u$$

$$v = \operatorname{pr}_U v + w \Rightarrow (v, u) = (\operatorname{pr}_U v, u)$$

Свойства (орт. проекции)

1. $\operatorname{pr}_U(v + v') = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{pr}_U v'$

$$v = u + w,\ u \in U, w \in U^\perp$$

$$v' = u' + w',\ u \in U,\ w' \in U^\perp$$

$$v + v' = (\underset{\in U}{u + u'}) + (\underset{\in U^\perp}{w + w'})$$

2. $\|v - \operatorname{pr}_U v\| \leqslant \|v - u\| \quad \forall u \in U$

$$\|v - u\|^2 = \|\underset{\in U^\perp}{v - \operatorname{pr}_U v}\|^2 + \|\underset{\in U}{\operatorname{pr}_U v - u}\|^2$$

Опр

$e_1, ..., e_n$ - базис V

Базис называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \left[\begin{array}{l} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{array}\right.$$

Алгоритм

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта:

$e_1, ..., e_n$ - базис

Хотим ортонормированный $f_1, ..., f_n$:

$$< f_1, ..., f_k > = < e_1, ...e_k > \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n :$$

Строим по индуции:
Б.И. k=1:

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

И.П. $k - 1 \to k$:

$$f_k = e_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f_i$$

$$(f_k, f_j) \stackrel{?}{=} 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant k - 1$$

$$(f_k, f_j) = (e_k, f_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\lambda_i (f_i, f_j)}_{=\lambda_j}$$

$$\lambda_j = -(e_k, f_j) \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant k - 1$$

Ортонормируем f_k, чтобы $(f_k, f_k) = 1$

Утв

Если $e_1, ..., e_n$ - ОНБ U

$$\mathrm{pr}_U\, v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i$$

Док-во

Хотим доказать $v - \sum_{i=1}^n (v, e_i)e_i \in U^\perp$
Достаточно доказать, что вектор ортогонален любому

$$\underset{1\leqslant j\leqslant n}{(v - \sum_{i=1}^n (v, e_i)e_i)e_j} = (v, e_i) - \sum_{i=1}^n (v, e_i)(e_i, e_j)$$

Пример

$$\mathbb{R}^n$$

$$(x; y) = \sum x_i y_i$$

$$e_i = (0, 0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$$

Пример

$$T_n = \{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx\}$$

$$(f; g) = \int_0^{2\pi} fg dx$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx_{k=1,\ldots,n}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx_{k=1,\ldots,n}\right\}$$

$$\operatorname{pr}_{T_n} f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx\right) \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx\right) \cdot \sin kx$$

Опр

$A \in M_n(K)$ назыв. ортогональной, если $A^T A = E$

$O_n(K)$ - множество орт. матриц

Утв

$O_n(K)$ - группа по умножению

Док-во

$$\left.\begin{array}{l} A^T A = E \\ B^T B = E \end{array}\right| \Rightarrow (AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{E} B = B^T B = E$$

$$A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} \stackrel{?}{=} E$$

$$(A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = E$$

Утв

$L \in \mathscr{L}(V)$ (пр-во лин. функционалов)

Следуюшие утверждения равносильны:

1. $(L_v, L_{v'}) = (v, v') \quad \forall v, v' \in V$
2. $\|L_v\| = \|v\| \qquad \forall v \in V$
3. $[L]_e \in O_n(\mathbb{R})$, если e - ортонорм. базис

Док-во

$2 \to 1$

$$(v, v') = \frac{1}{2}(\|v + v'\| - \|v\|^2 - \|v'\|^2)$$

$3 \to 2$

$$[L_v]_e = [L]_e [v]_e$$

$$\|L_v\|^2 = (L_v, L_v) = [L_v]_e^T \Gamma_e [L_v]_e = [L_v]_e^T [L_v]_e =$$

$$= [v]_e^T \underbrace{[L]_e^t [L]_e}_{=E} [v]_e = [v]_e^T [v]_e = [v]_e^T \Gamma_e [v]_e = (v, v) = \|v\|^2$$

$1 \to 3$

$$\mathcal{E}_i^T [L]_e^T [L]_e \mathcal{E}_j$$

$$\mathcal{E}_i = (0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$$

$$\mathcal{E}_i^T A \mathcal{E}_j = a_{ij}$$

$$\mathcal{E}_i = [e_i]_e$$

$$\mathcal{E}_j = [e_j]_e$$

$$[e_i]^T [L]_e^T [L]_e [e_j]_e = [L_{e_i}]_j^T [L_{e_j}]_e = [L_{e_i}]_e^T \Gamma_e [L_{e_j}]_e = (L_{e_i}, L_{e_j}) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

2019-10-22

Опр (унитарного пространства)

U - в.п. над $\mathbb{C}$

$$(\cdot,\cdot):\ U\times U\to\mathbb{C}\quad \text{- эрмитово скал. произведение}$$

1. $(u+v,\ w)=(u,\ w)+(v,\ w)\quad \forall u,v,w\in U$

   $$(\lambda v,\ w)=\lambda(v,w)\quad \forall\lambda\in C,\quad v,w\in U$$

2. $(u,\ v)=\overline{(v,\ u)}$

3. $(u,\ u)\geqslant 0$

4. $(u,\ u)=0\Rightarrow u=0$

$(U,(\cdot,\cdot))$ - унитарное пространство

Пример

R^n	C^n
(x,y) $=\sum x_iy_i$	(x,y) $=\sum x_i\overline{y_i}$

$e_1,\ldots,e_n$ - базис

$\Gamma_e=\{(e_i,\ e_j)\}_{i,j}$ - матрица грама

$(u,v)=[u]_e^T\Gamma_e\overline{[v]}_e$

$\Gamma_f=M_{e\to f}^T\Gamma_e\overline{M}_{e\to f}$

$|(u,v)|<\|u\|\cdot\|v\|,\quad \|u\|=\sqrt{(u,\ u)}$

$\|tu+v\|^2=t^2\|u\|+t(\underbrace{(u,\ v)+(v,\ u)}_{=2\,\mathrm{Re}(u,v)})+\|v\|^2$

$\mathrm{Re}(u,v)\leqslant\|u\|^2\|v\|^2$

$(u,\ v)=|(u,\ v)|\cdot z|\Rightarrow|z|=0$

$\mathrm{Re}(\frac{1}{z}u,\ v)\leqslant\|\frac{1}{z}u\|^2\|v\|^2=\|u\|\|v\|$

Напоминание: $\|\lambda u\|=\sqrt{(\lambda u,\ \lambda u)}=\sqrt{\lambda\overline{\lambda}(u,u)}=|\lambda|\,\|u\|$

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}(u,\ v)=\mathrm{Re}\,|(u,v)|=|(u,\ v)|$$

Доказали КБШ

Опр

V - в.п. над K

$$V^* = \mathscr{L}(V,\ K) \text{ - двойственное пр-во}$$

Пример

$$v \in V \text{ - евклидово пр-во (унитарное)}$$

$$\varphi_v(w) = (w,\ v) \quad \varphi_v : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Хотим доказать: $\varphi \in V^* \Rightarrow \exists! v \in V : \varphi = \varphi_v$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - ОНБ V

$$v = \sum \lambda_i e_i$$

Нужно $\quad \forall w \in V \quad (w,\ v) = \varphi(w)$, т.к. φ - линейный функционал

$$\Leftrightarrow \forall j \quad (e_j,\ v) = \varphi(e_j)$$

$$(e_j,\ \sum \lambda_i e_i) = \sum_i \overline{\lambda}_i (e_j,\ e_i)$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$$A^* = \overline{A}^T \text{ - эрмитово-сопряженная матрица}$$

Свойства

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A*$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Утв

V - унитарное пр-во, $L \in \mathscr{L}(V)$, $u \in V$

$$\varphi_n(v) = (Lv,\ u) \in V^*$$

$$\Rightarrow (Lv,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$\exists! w_u \in V : \quad (v,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$u \to w_u$$

Утверждается, что отображение линейно

Док-во

$$\left.\begin{array}{r}(\text{Lv, u}) = (\text{v, w}_u) \\ (\text{Lv, u'}) = (\text{v, w}_{u'})\end{array}\right| \begin{array}{c}(\text{Lv, u+u'}) = (\text{Lv, u}) + (\text{Lv, u'}) = \\ = (\text{u w}_u) + (v,\ w_{u'}) = (v,\ w_u + w_{u'}) = (v,\ w_{u+u'})\end{array}$$

$$(Lv,\ \lambda u) = \overline{\lambda}(Lv,\ u) = \overline{\lambda}(v,\ w_u) = (v,\ \underbrace{\lambda w_u}_{=w_{\lambda u}})$$

$$L^* u = w_u \quad (Lv,\ u) = (v,\ L^* u)$$

Опр

L^* - эрмитов сопряженный оператор

Свойства

1. $L^{**} = L$

$$(L^* v,\ u) = (v,\ L^{**} u)$$

$$(L^* v,\ u) = \overline{(u,\ L * v)} = \overline{(Lu,\ )} = (v,\ Lu)$$

$$\Rightarrow L^{**} u = Lu \quad \forall u \in V$$

Почему так? $(v,\ w) = (v,\ w') \quad \forall v \Rightarrow w = w'$

$$(v,\ w - w') = 0$$

$$v = w - w'$$

$$\|w - w'\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow w - w' = 0$$

2. $(\lambda L)^* = \overline{\lambda} L^*$

$$(\lambda L)v,\ u) = (v,\ (\lambda L)^* u)$$

$$(\lambda L)v,\ u) = (\lambda \cdot Lv,\ u) = \lambda(Lv,\ u) = \lambda(v,\ L^* u) = (v,\ \overline{\lambda} L^* u)$$

3. $(L+L')^* = L^* + L'^*$ аналогично

4. $(LNv,\ u) = (v,\ (LN)^*u)$

   $(LNv,\ u) = (v,\ N^*L^*u)$ и то же, что делали раньше

5. $[L]_e^* = [L^*]_e$, если e - ОНБ

   $$Le_i = \sum a_{li}e_l \quad [L]_e = \{a_{ij}\}$$

   $$Le_j = \sum b_{kj}e_k \quad [L]_e = \{b_{kj}\}$$

   $$\underbrace{(Le_i, e_j)}_{=a_{ij}} = \underbrace{(e_i,\ L^*e_j)}_{=\bar{b}_{ij}}$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

A - унитарная, если $A^*A = E$

$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{(то что сверху)}\}$

Док-во (что это группа по умножению)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}^*A = R \\ \mathrm{B}^*B = E \end{array}\right| \Rightarrow (AB)^*AB = B^*\underbrace{A^*A}_{=E}B = E$$

$(A^{-1})^*A^{-1} \stackrel{?}{=} E$

$\Leftrightarrow (A^{-1})^* = A$

$\Leftrightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$

Докажем, что любая унитарная матрица обратима и модуль определителя равен единице

$A^*A = E$

$\overline{\det A} \cdot \det A = 1$

$|\det A|^2 = 1$

Утв

$$L \in \mathscr{L}(V)$$

Следующие условия равносильны:

1. $\|Lv\| = \|v\| \quad \forall v$
2. $(Lv,\ Lu) = (v, u) \quad \forall v, u$
3. $[L]_e \in U_n, \quad e$ - ортонорм.
4. $L^*L = \mathrm{id}_V$

И оператор, удовлетворяющий этим условиям называется "унитарным"(в евклидовом случае называется "ортогональным")

Док-во

$(4 \Rightarrow 2)$:

$$(v,\ \underbrace{L^*Lu}_{=(v,u)}) = (Lv,\ Lu)$$

$(2 \Rightarrow 4)$:

$$(v,\ L^*Lu) = (Lv,\ Lu) = (v,\ u)$$

$L^*L = \mathrm{id}_V$

Утв

1. $|\det L| = 1$
2. Если L - унитарный, $Lv = \lambda v \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1$
3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \quad \lambda \neq \mu| \Rightarrow (u,\ v) = 0$

Док-во

1 и 2:

$$\|v\| = \|Lv\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$

3:

$$(u,\ L^*v) = (u,\ \overline{\lambda} v) = \lambda(u,\ v)$$

$$(u,\ L^*v) = (Lu,\ v) = (\mu u,\ v) = \mu(u,\ v)$$

Хотим доказать: $Lv = \lambda v \Rightarrow L^*v = \overline{\lambda} v$

$$v = L^*Lv = L^*(\lambda v) = \lambda L^* v$$

Делим на λ и туда переносится $\overline{\lambda}$

2019-10-29

Опр

L - орт. оператор на плоскости, $\det L = 1$, тогда L - поворот

$$\text{e - ортонорм. базис, } [L]_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

$$a = \cos\varphi, \quad c = \sin\varphi$$

$$b = \sin\varphi, \quad d = \cos\psi$$

$$\underbrace{\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi}_{=\sin(\varphi+\psi)} = 0$$

$$\underbrace{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi}_{=\cos(\varphi+\psi)} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi + \psi = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Опр

Если L - ортогональный оператор на пл-ти, $\det L = -1$
S - какая-то осевая симметрия
Тогда:

1. $L = S \circ R_\psi$
2. $L = R_\varphi \circ S$

Рассмотрим $S^{-1} \circ L$ - ортогональный оператор с определителем 1, значит по предыдущему определению $S^{-1} \circ L = R_\varphi$

Утв (теорема Эйлера)

В трехмерном пространстве ортогональное отображение с определителем 1 является поворотом относительно некоторой оси

Следствие: берем две прямые. Поворачиваем сначала относительно одной, потом относительно другой. И их композицией будет повров

Док-во (теоремы Эйлера)

L - орт. оператор в пр-ве

$$\det L = 1$$

$$\chi_L(t) \in \mathbb{R}[x], \quad \deg \chi_i = 3$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - корни

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

Два варианта:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$
2. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$

В 1 случае одно из λ равно 1, пусть λ_1
Во 2 случае $\lambda_1 = 1$ т.к. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\overline{\lambda_2}\lambda_3 = \lambda_1|\underbrace{\lambda_3}_{=1}|^2 = \lambda_1$
С.в. остается неподвижным при повороте. Ось тоже. Значит собственный вектор при повороте и есть ось
Осталось д-ть, что ортогональное дополнение есть вращение. Тогда докажем, что наш исходный оператор - вращение относительно оси

$$\exists Lv = v$$

$$v^\perp$$

Докажем, что эта плоскость - инвариантное подпространство. Нужно доказать:

$$(u, v) = 0 \to (Lu, v) = 0$$

То есть результат будет тоже из ортогонального дополнения

$$(Lu, v) = (Lu, Lv) = (u, v) = 0 \text{ ч.т.д.}$$

Так как инвариантное подпространство, можем сузить L. Оно является плоскостью. Т.к. L - орт. оператор, значит он сохраняет расстояние. Т.к. S тоже сохраняет расстояние, значит L является ортоганальным оператором на плоскости. Осталось убедиться, что модуль равен 1. Если исходный оператор сохраняет расстояние, то и его сужение сохраняет ориентацию. Другой способ: построим матрицу L в базисе: V, {два ортогональных вектора на плоскости}, матрица L будет такой:

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Вместо ? будет матрица сужения. Мы должны доказать, что это матрица поворота. Определитель большой матрицы равен определителю маленькой, но т.к. большая 1, то и он 1.

По предыдущим рассуждениям - это поворот. То есть у нас есть пространство с осью, на которую оператор действует тождественно, а на другое он действует как поворот.

Утв

Если L - ортогональный оператор в пре-ве с определитем -1 равен композиции поворота, относительно оси и симметрии, то это поворот.

Док-во

Аналогично

Теорема

Унитарный оператор имеет ортонормированный базис из с.в.

Док-во

Индукция по размерности пр-ва.
Пусть одномерное пр-во ($n = 1$) - очевидно, т.к. оператор-вектор v

$$Lv = u, \quad \|u\| = \|v\| \Rightarrow u = \lambda v, \quad |\lambda| = 1$$

Значит $Lv = \lambda v$ - подходит, когда ортонормируем
v - с.в. L с каким-то λ

$$Lv = \lambda v$$

$$< v >^{\perp}$$

Хотим доказать, что подпространство инвариантно относительно действия L:

$$(v,\ u) = 0 \Rightarrow (v,\ Lu) = 0$$

$$(v,\ Lu) = (L^* v,\ u) \stackrel{(*)}{=} (\overline{\lambda} v,\ u) = \overline{\lambda}(v, u) = 0$$

(∗) т.к. мы доказывали, что у собственного оператора. Если v - вектор унитарного оператора с с.ч. λ
Раз исходный оператор унитарный, то сужение тоже унитарно. Значит мы можем применить индукционное предположение к сужению. На этом ортогональном дополнении у оператора есть базис ортогональных векторов. Добавим к нему отнонормированный вектор v. Очевидно, получим ортонормированный базис из собственных векторов всего пр-ва

Переформулируем на языке матриц

Теорема

U - унитарная матрица, тогда:

$$U = MDM^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1, \quad M \text{ - унитарная}$$

Док-во

$$\mathbb{C}^n \quad Lz = Uz \qquad [L]_e = U$$

e - есть базис $\mathbb{C}^n$

$$[L^*L]_e = [L^*]_e[L]_e = [L]_e^*[L]_e = U^*U = E$$

(∗) Из какого-то рассуждения получается
⇒ L - унитарный оператор
По теореме, которую доказали ранее, f - ортонормированный базис $\mathbb{C}^n$ из с.в. L

$$D = [L]_f = M_{e\to f}^{-1}\underbrace{[L]_e}_{=U}M_{e\to f}$$

(∗) У D - на диагонали с.ч., по модулю равные 1
Хотим д-ть: у нас есть два ОНБ, тогда матрица перехода между ними будет унитарна

$$M_{e\to f} = \{a_{ij}\}$$

$$f_j = \sum a_{ij}e_i$$

$$\delta_{jk} = (f_j,\ f_k) = \left(\sum_i a_{ij}e_{ij},\ \sum_l a_{ij}\overline{a}_{lk}e_l\right) = \sum_{i,l} a_{ij}\overline{a}_{lk}(e_i,\ e_l) \sum a_{ij}\overline{a}_{ik}$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$ - эрмитова, если $A^* = A$
$L \in \mathscr{L}(V)$ - самосопряженный, если $L^* = L$

Свойства

1. L - самосопряженный, тогда $[L]_e$ - эрмитова, если e - ортонормированный

$$[L]_e^* = [L^*]_e = [L]_e$$

2. L - самосопряженный, тогда с.ч.$\in \mathbb{R}$

$$\exists Lv = \lambda v, \quad v \neq 0$$

$$\lambda(u,\ v) = (Lv,\ v) = (v,\ Lv) = (v,\ \lambda v) = \overline{\lambda}(v,\ v)$$

3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \qquad \lambda \neq \mu \Rightarrow (u,\ v) = 0$

$$\lambda(v,\ u) = (Lv,\ u) = (v,\ Lu) = (v,\ \mu u) = \mu(v,\ u)$$

2019-10-29

Теорема

L - самосопр. $\Rightarrow \exists e_1, ..., e_n$ - ортнорм. базис из с.в. L

$Lv = \lambda v$

$(u, v) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} (Lu, v) = 0$

$(Lu, v) = (u, L^* v) = (u, Lv) = (u, \lambda v) = \lambda(u, v) = 0$

Тут мы должны задать вопрос.

Опр

A - эрмитова матрица

$\Rightarrow M$ - унитарная

D - $\underset{\in \mathbb{R}}{\text{диагональная}}$ $: A = MDM^{-1}$

Теорема

A - эрмитова матрица

Тогда условия равносильны

1. $\underset{x \neq 0}{\forall x \in} \mathbb{C}^n \qquad \underset{\in \mathbb{R}}{x^* A x} > 0 \qquad (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$
2. Все с.ч. $A > 0$
3. Все гл. миноры $A > 0$ (критерий Сильвестра)
4. $\exists P$ - обратимое: $A = P^* P$

Если хотя бы одно из них выполняется, то матрица A - положительно опред.

Док-во

$4 \to 1$

$A = P^* P$

$x^* A x = x^* P^* P x = (Px)^*(Px) =< Px, Px >$

$< a, b >= \sum a_i \bar{b}_i$ Стандартное эрмитово скал. произв. в $\mathbb{C}$

$2 \to 4$

$A = MDM^{-1} \quad M$ - унит $\quad D$ - диаг. $(\in \mathbb{R})$

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & ... & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & ... & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \qquad A = (D^{\frac{1}{2}}M^*)^*(D^{\frac{1}{2}}M^*)$$

M - унитар $\Rightarrow MD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}M^* = MDM^{-1} = A$

$1 \to 2$

$Ax = \lambda x$

$\underbrace{x^*Ax}_{>0} = x^*\lambda x = \lambda x^*x = \lambda \underbrace{< x, x >}_{>0}$

$1 \to 3$

Нужно доказать, что все главные миноры больше 0

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = x'^*A'x' > 0 \quad \forall x' \neq 0$$

$\Rightarrow A'$ уд первому условию, а еще 4 условию

$A' = P * P$

$$\det A' = \det P^* \cdot \det P = \overline{\det P} \cdot \det P = |\det P|^2 > 0 \qquad \text{т.к. P обратим}$$

$3 \to 2$

Индукция по размеру A
Когда матрица 1×1 очев.
Инд. переход : $n \to n + 1$
Пусть λ - с.ч A , $\quad \lambda < 0 \Rightarrow \exists \mu < 0$

$$Ax = \lambda x \qquad Ay = \mu y, \quad < x, y >= 0$$

Если λ и μ различные.
Если с.ч. различны, то им соотв. ортогон. с.в $\Rightarrow$ у эрмит. матр. ортогон с.в соотв. различным с.ч .

У эрмитовой матрицы существует онб из с.в - столбцов. В этом базисе будет два вектора, лежащие в одном подпр-ве.

Что такое собственное под-во?

Если λ и μ совпадают, то есть два неколл. с.в., мы можем их ортогонализировать

$$\exists\alpha, \beta \in \mathbb{C} : \underbrace{\alpha x + \beta y}_{=u} = (u', 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$u'^* A' u' = u^* A u = |\alpha|^2 x^* A x + |\beta|^2 y^* A y =$ подставили u, которое сверху

$$= |\alpha|^2 \underset{<0}{\lambda} \cdot \|x\|^2 + |\beta|^2 \underset{<0}{\mu} \|y\|^2 < 0$$

$$u'^* A' u' < 0$$

Если бы для матрицы A' выполнялось 3 условие, то должно было бы выполняться 2 условие, а 1 не выполняется, это значит, что 3 условие не вып. Все главные миноры A' - это в частности главные миноры A. А 3 выполняется для A. Мы получили противоречие.

Замечание

Все то же самое, можно доказать для симм. матрицы.
Пусть след. усл равносильны... для симм. матрицы над $\mathbb{R}$
Только тут будет P над $\mathbb{R}$

Теорема

A - эрмит. матрица

тогда след. условия равносильны

1. $\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \underset{\in\mathbb{R}}{x^* A x} \geqslant 0$
2. Все с.ч. $A \geqslant 0$
3. Все гл. миноры $A \geqslant 0$
4. $\exists P : \qquad A = P^* P$

Такая матрица называется положительно полуопред.

Док-во

Упражнение

Опр (Singular value decompostition SVD)

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists \underset{m\times m}{U}, \underset{n\times n}{V} \text{ - унитарные}, \quad S \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

S - диаг. насколько это возможно для прямоуг. матрицы, с неотр числами на диаг.

$$A = USV^*$$

Поворот, растяжение, поворот

Док-во

$$m \leqslant n$$

$$A^*A \text{ - эрмитова} \qquad (A^*A)^* = A^*A \text{ - proof}$$

$$x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) \geqslant 0$$

Значит эта матрица положительно полуопред.

$$\exists V \text{ - унитарная:} \quad V^*A^*AV = D' \text{ - диаг} \quad V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

т.к. эта матрица положительно полуопред., то у этой матрицы на диаг будут стоять неотр. с.ч. Переставим с.ч так, что сначала идут положительные, а потом нули

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D \in M_k(\mathbb{R}) \quad m \geqslant n \geqslant k$$

$$V = (\underset{k \text{ столб}}{V_1} \quad \underset{n-k \text{ столб.}}{V_2}) \quad V_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}) \quad V_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$$

$$D' = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix} A^*A \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*A^*AV_1 & V_1^*A^*AV_2 \\ V_2^*A^*AV_1 & V_2^*A^*AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*A^*AV_1 = D \\ V_2^*A^*AV_2 = 0 \Rightarrow AV_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*V_1 & V_1^*V_2 \\ V_2^*V_1 & V_2^*V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*V_1 = E_k \\ V_2^*V_2 = E_{n-k} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} = V_1V_1^* + V_2V_2^* = E_n$$

$$U_1 \stackrel{\text{det}}{=} AV_1D^{-\frac{1}{2}} \in M_{m,k}(\mathbb{C})$$

$$U_1D^{\frac{1}{2}}V_1^* = AV_1D^{-\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}V_1^* = A - AV_2V_2^* = A$$

2019-11-05 Продолжение док-ва:

Док-во

$$U_1^* U_1 \overset{def}{=} D^{-\frac{1}{2}} \underbrace{V_1^* A^* A V_1}_{=D} D^{-\frac{1}{2}} = E_k$$

Осталось из U_1 и V_1 сделать прямоуг. матрицы $\Rightarrow U_1$ содержит k ортогональных столбцов. Раз они ортогональны, можно дополнить до ортогонального базиса в $\mathbb{C}^n$ и получаем:

$$U = (U_1 U_2) \in M_n(\mathbb{C})$$

Эта матрица ортонормирована из-за ортог. столбцов.

$$S := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m_1 n}(\mathbb{C})$$

$$(U_1 U_2) S (V_1 V_2)^* = U_1 F^{\frac{1}{2}} V_1^* = A$$

Матрица S нужного размера. Матрица U_1 - квадратная и унитарная. С V_1 тоже все ок

Замечание

Такая же теорема верна в $\mathbb{R}$. Только если тут унитарные матрицы, то там ортоганальные

2.25 Квадратичные формы над $\mathbb{R}$

Опр

$$x = (x_1, ..., x_n), \text{ тогда:}$$

$$S(x) = \sum_{i \geqslant j} a_{ij} x_i x_j \text{ - квадратичная форма}$$

Замечание

$$S(x) = \sum_{b_{ij} = b_{ji}} a_{ij} x_i x_j$$

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij}, & i = j \\ \frac{a_{ij}}{2}, & i > j \\ \frac{a_{ji}}{2}, & j > i \end{bmatrix}$$

$B = (b_{ij})$ - матрица соответствующая

$S(x) = x^T Bx$

$x = My$

$S(x) = y^T M^T BMy$

Опр

S - положительно определена, если:

1. $\forall x \quad S(x) \geqslant 0$
2. $S(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Замечание

Эквивалентно тому, что матрица S - положительно определена. В частности это значит, что верен критерий Сильвестра

Опр

$$S(x) = a_1 x^2 + ... + a_n x_n^2 \text{ - канонический вид}$$

Теорема

Любую матрицу можно привести к каноническому виду с помощью элементарного преобразования

Док-во

Любая самосопряженная матрица представляется в виде: унитарная матрица * диагональная * унитарная сопряженная к первой. В $\mathbb{R}$ формулируется так: любая симметрическая матрица: ортогональная * симметричная * ортогональная в минус 1. То есть получили то что нам нужно

2.26 Применение сингулярного разложения

$Ax = b$

У А столбцов мало, строк много

Хотим решить приближенно, то есть чтобы $\|Ax - b\| \to \min$

Опр

x, который минимизирует разность называется решением методом наименьших квадратов (МНК)

Теорема

$A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

1. x^* - решение МНК $\Leftrightarrow A^T A x^* = A^T b$
2. $A^T A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = m$

Док-во

1. x^* - решением МНК $\Leftrightarrow$

   Ax^* - проекция b на линейную оболочку столбцов A

   $Ax^* = \operatorname{pr}_L v$

   $b - \operatorname{pr}_L b \perp L \Rightarrow A^T(b - \operatorname{pr}_L b) = 0$

   Почему $v \perp L \Rightarrow A^T v = 0$?

   $\forall e\colon \underbrace{(Ae, v)}_{=(e, A^T v)} = 0$

   Какой вектор ортогонален произвольному? Только нулевой. Мы в док-ве воспользовались $(Ax, y) = (x, A^T y)$ (просто расписать)

   $A^T b = A^T A x^*$

   $A^T A x^* = A^T b$

   $A^T(Ax^* - b) = 0 \ \Rightarrow \ Ax^* - b \perp L$ (аналогично)

   $\Rightarrow b = \underbrace{Ax^*}_{\in L} - (\in \in L^{\perp} Ax^* - b)$

2. $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T A x = 0$. В $(\Rightarrow)$ - очевидно.
   Пусть $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow (Ax)^* Ax \Leftrightarrow Ax = 0$
   Будем говорить в этом случае (немного некорректно), что x лежит в ядре матрицы A. Теперь к пункту 2.

   $(\Rightarrow)$:

   $A^T A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{Ker} A^T A = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

   Значит Ax - не имеет решения кроме нулевого. Но это ЛК столбцов матрицы. Значит столбцы матрицы A - ЛН. Значит она имеет полный ранг. Ч.т.д.

   $(\Leftarrow)$:
   Ранг равен m $\Rightarrow$ столбцы ЛН $\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
   Но знаем, что ядро у матриц в $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T A x = 0$ равны нулю $\Rightarrow A^T A$ - обратимо

Теорема

$$A = UDV^T \qquad A \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \qquad D \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

Док-во

D - как бы диагональна. А все диагональные элементы вещ. неотриц. числа, приведем её так:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^+ \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A^+ = VD^+U^T$$

x^* - решение МНК $Ax = b \Leftrightarrow x^* = A^*b$

$$A^TAx^* = A^Tb$$

$$A^TAA^+b \stackrel{?}{=} A^+b$$

$$VD^T\cancel{U^T}UDV^T\cancel{V}D^+U^Tb \stackrel{?}{=} VD^TU^Tb$$

$$V\underbrace{D^TDD^+}_{=D^T}U^Tb$$

Опр

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

Свойства

1. $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$

2. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A+B)y\| \leqslant \sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| + \sup_{\|z_2\|=1} \|Bz_2\|$$

Пусть sup достигается в z_1, z_2

$$\|Az_1\| \geqslant \|Ay\|$$

$$\|Az_2\| \geqslant \|Ay\|$$

Подробное док-во:

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A+B)y\| = M$$

$$\sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| = m_1$$

$$\sup_{\|z_2\|=1} \|Az_2\| = m_2$$

$M \leqslant m_1 + m_2$

$$\forall z : \|z\| = 1 \qquad \|Az\| \leqslant m_1$$

$$\|Bz\| \leqslant m_2 \Rightarrow \|(A+B)z\| \leqslant \|Az\| + \|Bz\| \leqslant m_1 + m_2$$

3. $\|UA\| = \|AV\|\|A\|,$ если U,V - ортогон. матрицы (очевидно)

$$\|UA\| = \sup_{\|y\|=1} \|UAy\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|$$

4. $\|A\| = \sigma_1(A)$ - наибольшее сингулярное число. Как его получить? Взяли сингулярное разложение $A = UDV^T$. На диагонали D выбираем наибольшее сингулярное число

2019-11-12

Док-во

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{pmatrix}$$

$$A = UDV^T$$

$$\|A\| = \|D\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|D_x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{(\sigma_1 x_1)^2 + (\sigma_2 x_2)^2 + ... + (\sigma_k x_k)^2}}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}}$$

Задача

Необходимо сжать изображение. Мы хотим сделать так, чтобы фотография занимала меньше места на компьютере. Формально, мы ищем матрицу, которая близка к исходной.

Док-во

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad m \geqslant n$$

$$\hat{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad \|A - \hat{A}\| \to \min \qquad \operatorname{rk} \hat{A} \leqslant r$$

Мы можем измерить объем информации рангом матрицы и хранить ЛНЗ строки и линейные комбинации

$$A = UDV^T$$

$$U = (U_1 U_2)$$

$$V = (V_1 V_2)$$

$$U_1 \in M_{m,r}(\mathbb{R})$$

$$V_1 \in M_{n,r}(\mathbb{R})$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \qquad D_1 \in M_r(\mathbb{R})$$

$$\hat{A} = U_1 D_1 V_1^T$$

$$\hat{A} = U \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

$$\|A - \hat{A}\| = \|U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} V^T\| = \|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\| = \sigma_{r+1}$$

$$B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \overset{?}{\Rightarrow} \|A - B\| \geqslant \sigma_{r+1}$$

$$\operatorname{rk} B = r$$

$$\operatorname{rk} B = r \Rightarrow B = XY^T, \qquad X \in M_{m,r}(\mathbb{R}) \quad Y \in M_{n,r}(\mathbb{R})$$

Матрица Y образована из ЛНЗ строк из B. Каждая строка B записывается как ЛК этих строчек. X - матрица коэфф.

$$\mathcal{Y} \text{ - линейная оболочка столбцов } Y \quad (\text{в } \mathbb{R}^n)$$

$$\dim \mathcal{Y} \leqslant r$$

Можно взять орт. дополнение

$$\Rightarrow \dim \mathcal{Y}^\perp \geqslant n - r$$

$$\hat{\mathcal{V}} \text{ - линейная оболочка первых } r+1 \text{ столбцов } V \qquad (\text{ в } \mathbb{R}^n)$$

$$\dim \hat{\mathcal{V}} = r + 1$$

У них есть нетрив. пересеч. по формуле размерностей подрв-в

$$\Rightarrow \exists\, w \in \hat{\mathcal{V}} \cap \mathcal{Y}^\perp \qquad w \neq 0$$

$$\|w\| = 1$$

$$w \in \mathcal{Y}^\perp \Rightarrow Y_w^T = 0$$

$$w \in \hat{\mathcal{V}} \Rightarrow w = V \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

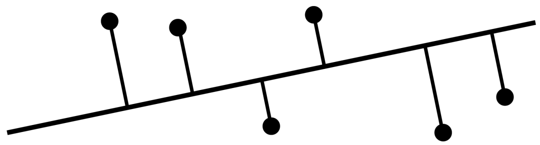
$$\|A - B\|^2 \geqslant \|(A-B)w\|^2 = \|Aw\|^2 = \|UDV^TV \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\|^2 = \|D \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\|^2$$

$$= \sigma_1^2 \gamma_1^2 + \ldots + \sigma_{r+1}^2 \gamma_{r+1}^2 \geqslant \sigma_{r+1}^2$$

$$1 = \|w\| = \|V \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \| = \sqrt{\gamma_1^2 + ... + \gamma_{r+1}^2}$$

Задача

В n - мерном пр-ве есть набор точек и нам нужно найти подпр-во заданной размерности, которое приближает этот набор точек. Что значит приближает? Это наилучшая аппроксимакция этих точек. Берем точки и их проекции. Складываем расстояния в квадрате для каждой точки.



прямая, которая аппроксимирует точки

Дисперсия - сумма квадратов отклонений от среднего значения (центр массы)

$$x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$$

$$\dim L = k \qquad L = \underset{\text{ортнорм}}{< u_1, ..., u_k >}$$

$$\mathrm{pr}_L\, x = \sum_{i=1}^{k} (u_i, x) u_i = \begin{pmatrix} u_1 & ... & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u_1, x) \\ \vdots \\ (u_k, x) \end{pmatrix}$$

$$U = (\begin{pmatrix} u_1 & ... & u_k \end{pmatrix}) \in M_{n,k}(\mathbb{R}) =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & ... & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_k^T \end{pmatrix} x = UU^T x$$

$$U^T U = I_k$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \|(I_n - UU^T)(x_i - u_0)\|^2$$

$U \in M_{n,k}(\mathbb{R})$

$U^T U = I_k$

$u_0 \in \mathbb{R}^n$

Любое подпр-во проходит через ноль, но мы хотим избавиться от этого ограничения. Мы можем перенести наше под-прво. u_0 - вектор сдвига. Или мы сдвигаем все точки на u_0.

Док-во (решение)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \text{ - центр масс}$$

$$\widetilde{X} = X - \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \vdots \\ \overline{x} \end{pmatrix} \text{ центрированная матрица} \quad \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\widetilde{X}^T \widetilde{X} \in M_n(\mathbb{R})$$

У этой матрицы есть система из ортонорм с.в. А соотв. с.ч. вещ. неотр.
Упорядочим с.в. по величине с.ч.
Берем первые k с.в., где k - размер нужного подпр-ва
Нужно взять $u_0 = \overline{x}$

Теорема

Такая задача о минимизации имеет след. решение. Взять $u_0 = \overline{x}$
Взять в качестве U матрицу, сост из первых k веторов матрицы $\widetilde{X}^T \widetilde{X}$, упорядоч. по собс. числу

Лемма

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \|y_i - b\|^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \|y_1 - \overline{y}\|^2 + \|\overline{y} - b\|^2$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i$$

<u>Док-во</u>

$$\frac{1}{m}\sum \|y_1 - b\|^2 = \frac{1}{m}\sum \|(y_1 - \overline{y}) + (\overline{y} - b)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{m}\sum \|y_1 - \overline{y}\|^2 + \|\overline{y} - b\|^2 + \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_1 - \overline{y}, \overline{y} - b) =$$

$$= \frac{1}{m}\sum \|y_1 - \overline{y}\|^2 + \|\overline{y} - b\|^2 + \frac{2}{m}(\underbrace{\sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})}_{=0},\ \overline{y} - b)$$

2019-11-19

Док-во (теоремы)

Минимизация в $u_0 = \widetilde{x}$, задача свелась к:

$$\min_{U^TU=I_n} \sum_{i=1}^{m} \|(I - UU^T)(x_i - \overline{x})\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{m} \|(I - UU^T)(x_i - \overline{x})\|^2 \overset{1}{=} \sum_{i=1}^{m} \|x_i - \overline{x}\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \|U^T(x_i - \overline{x})\|^2 \overset{2}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \|x_i - \overline{x}\| - \mathrm{Tr}(U^T \widetilde{X}^T \widetilde{X} U)$$

Откуда взялись равенства? Объясним первое:

$$\|(I-UU^T)(x_i-\overline{x})\|^2 = \|x_i-\overline{x}\|^2 - 2\underbrace{(x_i - \overline{x},\ UU^T(x_i - \overline{x}))}_{(*)} + \|UU^T(x_i-\overline{x})\|^2$$

т.к. было: $(U^Ta,\ b) = (a,\ Ub)$

$$\Rightarrow (*) = (U^T(x_i-\overline{x}),\ U^T(x_i-\overline{x})) \overset{\text{U -трансп.}}{=} (U^T(x_i-\overline{x}),\ U^TUU^T(x_i-\overline{x})) \overset{\text{лемма}}{=}$$

$$= \|UU^T(x_i - \overline{x})\|^2$$

Замечание: посмотрев на первое равенство, понимаем, что задача эквивалентна задаче про максимизацию, которая стоит с минусом, а его можно записать как $\|UU^T(x_i - \overline{x})\|^2$.

Это и есть дисперсия (т.е. второй способ формулировки задачи: мы ищем пр-во, дисперсия проекций на которую максимальна)

Теперь объясним второй переход:

$$\sum_{i=1}^{m} \|U^T(x_i - \overline{x})\|^2 \overset{?}{=} \mathrm{Tr}(U^T \widetilde{X}^T \widetilde{X} U)$$

$$x_i - \overline{x} = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U^T = \{u_{\alpha\beta}\}$$

$$U^T\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \sum_\beta u_{1\beta}x_{i\beta} \\ \vdots \\ \sum_\beta u_{k\beta}x_{i\beta} \end{pmatrix}$$

$$\text{ЛЧ (в ?)} = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{\beta=1}^{n} u_{\alpha\beta}x_{i\beta})^2$$

Обозначим $U^T\widetilde{X}^T = A$, хотим найти $\mathrm{Tr}\,AA^T$, который равен сумме квадратов элементов этой матрицы:

$$A = \{a_{ij}\} \qquad (AA^T)_{ik} = \sum_j a_{ij}a_{kj} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,AA^T = \sum_i\sum_j a_{ij}a_{ij}$$

То есть ПЧ = ЛЧ

Задача свелась к:

$$\max_{U^TU=I} Tr(U^T\widetilde{X}^T\widetilde{X}U)$$

Лемма

D - диагональная матрица, с упорядоченными по убыванию с.ч.:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$$

Докажем, что $\max\limits_{\substack{W \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \\ W^TW = I}} \mathrm{Tr}(W^TDW)$ при $W = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$

Док-во

$$W^T = \{w_{ij}\} \qquad c_j = \sum_{i=1}^{k} w_{ij}^2$$

$$\mathrm{Tr}(W^TDW) = \sum_{i,j}\lambda_j W_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

Что мы знаем про c_j?

1. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \overset{\text{т.к. столбцы ортонорм.}(W^TW=I)}{=} k$
   (сумма квадратов по строчкам равна сумме квадратов по столбцам, но все они равны 1, а их k штук)

2. $0 \leqslant c_j \leqslant 1$
   (у матрицы W столбцы ОНБ вектора, любой набор ОН может дополнен до ОНБ, тогда матрица будет ортогональной, но у нее ОН строчки, в частности сумма квадратов элементов 1, значит у недополненной $\leqslant 1$)

Задача свелась к тому, чтобы д-ть:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$$

(в качестве c_j взять первые k единиц, остальные 0)

$$\lambda_1 + ... + \lambda_k - \lambda_1 c_1 - ... - \lambda_n c_n \overset{\text{по 1}}{=}$$
$$= \lambda_1 + ... + \lambda_k - \lambda_1 c_1 - ... - \lambda_k c_k - \lambda_{k+1}(k - c_1 - ... - c_k - c_{k+2} - ... - c_n) -$$
$$- \lambda_{k+2} c_{k+2} - ... - \lambda_n c_n =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_{k+1})(1 - c_1) + ...(\lambda_k - \lambda_{k+1})(1 - c_n) + (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+2}) c_{k+2} + ...(\lambda_{k+1} - \lambda_n) c_n \geqslant 0$$

$$\widetilde{X}^T \widetilde{X} = S^T D S, \quad S \in Q_n(\mathbb{R}), \quad \text{D - диаг}$$

$$\max_{\substack{W \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \\ W^TW = I}} \operatorname{Tr}(U^T \widetilde{X}^T \widetilde{X} U) = \operatorname{Tr}((SU)^T D (SU))$$

<u>Док-во</u> (продолжение д-ва теоремы)

$$\widetilde{X}^T \widetilde{X} = (S^T D S) S^T \underset{\text{на i}}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} = S^T D \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_i S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(S^T D S) S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - с.в. с с.ч. } \sigma_i. \text{ U состоит их таких столбцов}$$

Такое решение называется методом главных компонент (PCA)

2019-11-19

3 Конечные поля

Кольцом R будем называть ассоциативное коммутативное кольцо с 1

Опр

$I \subset R$ - идеал, если:

1. $\forall a, b \in I \quad a + b \in I$
2. $\forall a \in I,\ r \in R \quad ra \in I$

Пример

Четные числа - идеал кольца целых чисел

Замечание

Идеал - подгруппа аддитивной группы

Опр (конструкция)

$$a_1, ..., a_n \in R$$

$$(a_1, ..., a_n) = \{r_1 a_1 + ... + r_n a_n, \quad r_i \in R\}$$

Утв

Это множество является идеалом

Пример

Четные числа - идеал (2)

Опр

Идеал, порожденный одним элементом называется главным идеалом

$$(a) = \{ra, \quad r \in R\}$$

Свойства

1. $a \vdots b \Leftrightarrow (a) \subset (b)$
2. $a \sim b \Leftrightarrow (a) = (b)$

Док-во (1)

($\Leftarrow$):

$$a \vdots b \;\Rightarrow\; a = bc$$

$$ra = rcb$$

($\Rightarrow$):

$$(a) \subset (b) \;\Rightarrow\; a \in (b)$$

$$\Rightarrow a = bc \;\Rightarrow\; a \vdots b$$

Теорема

Любой идеал $\mathbb{Z}$ (и $K[x]$) - главный

Док-во (для $\mathbb{Z}$)

I - идеал в $\mathbb{Z}$
Пусть a - минимальный положительный элемент этого идеала

$$b \in I$$

Поделим b на a с остатком:

$$b = aq + c, \quad 0 \leqslant c < a$$

$$a \in I \;\Rightarrow\; aq \in I$$

$$b \in I \;\Rightarrow\; b - aq \in I \;\Rightarrow\; c \in I$$

Значит $c \in I$ и $0 \leqslant c < a \;\Rightarrow\; c = 0$
Значит любой элемент делится нацело на a
Доказали, что $I \subset (a)$
Но $a \in I \;\Rightarrow\; ar \in R$, доказали

Док-во (для $K[x]$)

Как доказать для кольца многочленов?
Вместо минимального положительного возьмем многочлен минимальной степени, который лежит в идеале. Дальше также. Берем любой, делим на мн-н минимальной степени. Степень остатка меньше степени исходного мн-на

Теорема

В $\mathbb{Z}$ (в $R[x]$)

$$(a, b) = (\text{НОД}(a, b)) \qquad \text{НОД}(a, b) = d$$

Док-во **($\mathbb{Z}$)**

$(a, b) \subset (\text{НОД}(a, b))$:

$ra + sb = xd \in (d)$

Возьмем xd

По теореме о линейном представлении: $t_1 a + t_2 b = d$

$\Rightarrow xd = (t_1 x)a + (t_2 x)b \in (a, b)$

Док-во **(в $\boldsymbol{R[x]}$)**

Аналогично

Опр

$I \subset R$
Идеал является подгруппой аддитивной группы кольца, которая коммутативна.
Профакторизуем: $R/_I$ (фактор-группа по сложению)
Сложение такое же.
Умножение: $\overline{a} \cdot \overline{b} \overset{def}{=} \overline{ab}$

$$\left.\begin{matrix} \overline{a} = \overline{a'} \\ \overline{b} = \overline{b'} \end{matrix}\right| \overset{?}{\Rightarrow} \overline{ab} = \overline{a'b'}$$

$$\begin{matrix} a - a' \in I & a' = a + s, & s \in I \\ b - b' \in I & b' = b + t, & t \in I \end{matrix}$$

Перемножим равенства:

$$a'b' - ab = at + sb + st \overset{\text{т.к. каждый} \in I}{\in} I$$

Утв

$R/_I$ - кольцо (ком., асс., с 1)

Замечание

Достаточно д-ть:

1. $(\overline{a}\overline{b})\overline{c} = \overline{a}(\overline{b}\overline{c})$
2. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$
3. $\overline{1}\overline{a} = \overline{a}$

4. $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\overline{b}+\overline{ac}$

Док-во

Докажем комутативность:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \overline{b}\cdot\overline{a}$$

(остальные аналогично)

У нас получилось новое кольцо, которое мы будем называть фактор-кольцом ($\mathbb{R}/_I$) по идеалу I

Напоминание

$$\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \text{ - поле (было)}$$

Утв

$K[x]/_{(f)}$ - поле (f - непр.)

Док-во

Достаточно доказать, что любой $\overline{g} \neq \overline{0} \quad g \in K[x]$ - обратим

$$\Leftrightarrow g \neq (f)$$

Рассмотрим (g, f), f - неприводим, значит либо $f|g$, либо НОД $= 1$
Но первый вариант не может быть, значит $(g, f) = 1$
Значит существует линейное представление:

$$gh_1 + fh_2 = 1, \quad h_1, h_2 \in K[x]$$

Обратно перейдем в фактор-кольцо

$$gh_1 - 1 \in I$$

$$\Leftrightarrow \overline{gh_1} = \overline{1}, \text{ но } \overline{gh_1} = \overline{g}\overline{h_1}$$

Нашли обратный

Поняли, как строить определенные поля. Как строить любые?

Утв

$$f \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}[x] \text{ - непр.} \quad \deg f = n$$

$$\left|\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}[x]/_{(f)}\right| = p^n$$

Док-во

$$g \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}[x]$$

Поделим с остатком на f:

$$g = fh + r, \quad \deg r < n$$

Утверждается, что в фактор-кольце лежат такие элементы:

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1}x^{n-1}} \in \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}[x]/_{(f)}$$

Всего таких классов p^n в силу произвольности выбора

1. Докажем, что любой элемент поля равен одному из них

$$\overline{g} = \overline{n}, \text{ т.к. } \deg r < n$$

2. Докажем, что что никакие два элемента не совпадают

$$\exists \overline{\alpha_1 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1}x^{n-1}} = \overline{\beta_1 + \beta_1 x + ... + \beta_{n-1}x^{n-1}}$$

Рассмотрим $\overline{\alpha_1 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1}x^{n-1} - \beta_1 + \beta_1 x + ... + \beta_{n-1}x^{n-1}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1}x^{n-1} - \beta_1 + \beta_1 x + ... + \beta_{n-1}x^{n-1} \in (f)$

Многочлен $\deg = n$ делится на многочлен $\deg < n$, такое может быть только тогда, когда многочлен нулевой

Научились строить поля, у которых p^n элементов
Пусть хотим найти многочлен степени 6 над конечным полем

Как это сделать?
Рекурсивно. Составляем список унитарных мн-ов степени 2. Вычеркиваем все, у которых есть корень (подставляем элементы нашего конечного поля). Мн-н неприводим, когда у него нет корней.
Дальше составляем список унитарных мн-ов степени 3.
Составляем список мн-ов степени 4. Вычеркиваем все, у которых есть корень и которые делятся на мн-ны степени 2...
За конечное время можно получать такие списки А можно ли сделать поле из 24 элементов? Нельзя.

Напоминание

Характеристика поля 0 или простое число

Опр

$K'/_K$, $K \subset K'$, K, K' - поля.

Называем $K'/_K$ - расширением полей (это не факторизация!)

Пример

$$\mathbb{C}/_\mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}/_\mathbb{Q}$$

Опр

$[K', K]$ - степень расширения $K'/_K$

Пусть $K'/_K$, $K \subset K'$

Рассмотрим $\mathbb{C}$ как векторное пр-во над $\mathbb{R}$

Замечание

Степень расширения - размерность K', рассмотренного как векторное пр-во над K

$$[K', K] = \dim_K K'$$

Пример

Степень расширения $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ - 2

Степень расширения $\mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$ - $+\infty$

(не существует конечного набора над $\mathbb{R}$ такого, чтобы любое другое являлось комбинацией этих коэф. из $\mathbb{Q}$)

Утв

Рассмотрим $|K| < \infty$

1. $\Gamma K \neq 0$ ($\Rightarrow \Gamma K = p$)

   Т.к. когда-то $\underbrace{1 + ... + 1}_{n} = 1 + \underset{m}{...} + 1 \quad m > n$, т.к. поле конечно

   $$\Rightarrow \underbrace{1 + ... + 1}_{m+n} = 0$$

   Значит конечная ненулевая характеристика

   $$\exists \Gamma K = p$$

   $$\Omega = \{0, 1, 1+1, ..., 1+1+1, ...\} \subset K$$

   $$\hat{\Omega} = \{0, 1, 1+1, ..., \underbrace{1 + ... + 1}_{p+1}\}$$

   $$\hat{\Omega} \subset \Omega$$

(a) Докажем, что в них нет совпадающих элементов. Пусть это не так

$$\underbrace{1+1+...+1}_{n} = \underbrace{1+...+1}_{m} \quad 0 \leqslant n < m \leqslant p+1$$

$$\underbrace{1+....+1}_{m-n} \quad p-1 \geqslant m-n > 0$$

Но $\Gamma = p$, а тут не так

(b) Любой элемент из Ω лежит в $\hat{\Omega}$
Возьмем $\underbrace{1+...+1}_{n}$
Поделим с остатком:

$$\underbrace{1+...+1}_{n} = (\underbrace{1+\overset{=0}{...}+1}_{p})(\underbrace{1+...+1}_{s}) + (\underbrace{1+...+1}_{q})$$

$$n = ps + q, \quad 0 \leqslant p < p$$

(c) Хотим д-ть, что Ω - поле

i. $(1+...+1)+(1+...+1) = 1+...+1$ (замкнутость относительно сложения)

ii. $(1+...+1)\cdot(1+...+1) = 1+...+1$

iii. $0 \in \Omega$

iv. $1 \in \Omega$

v. $|\Omega| = p$

vi. $\underbrace{1+...+1}_{n}+\underbrace{1+...+1}_{\leqslant p-n} = (\underbrace{1+...+1}_{s})(\underbrace{1+\overset{=0}{...}+1}_{p})$

$$sp - n \geqslant 0$$

vii. $1+...+1 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; n \not\vdots\, p$

$$(n,p) = 1$$

$$ns - pq = 1, \text{ либо } pq - ns = 1$$

В первом случае:

$$(\underbrace{1+...+1}_{p})(\underbrace{1+...+1}_{s}) = 1 + (\underbrace{1+\overset{=0}{...}+1}_{p})(\underbrace{1+...+1}_{q})$$

Во втором случае:

$$1 + (\underbrace{1 + ... + 1}_{p})(\underbrace{1 + ... + 1}_{s}) = (\overset{=0}{\underbrace{1 + ... + 1}_{p}})(\underbrace{1 + ... + 1}_{q})$$

Получилось:

$$(\underbrace{1 + ... + 1}_{n})(\underbrace{1 + ... + 1}_{s}) = -1$$

$$(\underbrace{1 + ... + 1}_{n})(\underbrace{1 + ... + 1}_{pt-s}) = 1, \quad pt > s$$

2019-12-03

Утв

$$K/_{\Omega} \qquad \operatorname{char} K = p \qquad |\Omega| = p$$

$\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ - базис K над Ω

$\Rightarrow \forall \alpha \in K \quad \alpha = \xi_1\alpha_1 + ... + \xi_n\alpha_n, \quad \xi_i \in \Omega$

Утв

Если есть два поля одинаковой мощности, то они изоморфны

Утв

$K\big/_L,\ N\big/_K$ - конечные расширения

$\Rightarrow N\big/_L$ - конечно и $[N : L] = [N : K][K : L]$

Док-во

$K\big/_L$ - конечно $\Rightarrow \exists \beta_1, ..., \beta_n \in K : \forall \beta \in K \quad \exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in L :$

$\beta = \alpha_1\beta_1 + ... + \alpha_n\beta_n$

$N\big/_K$ - конечно $\Rightarrow \exists \gamma_1, ..., \gamma_m \in N : \forall \gamma \in N \quad \exists! \widetilde{\beta}_1, ..., \widetilde{\beta}_m \in L :$

$\gamma = \widetilde{\beta}_1\gamma_1 + ... + \widetilde{\beta}_m\gamma_m$

$$\{\beta_i\gamma_j\}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$$

Докажем, что это действительно базис N:

Возьмём $\gamma \in N$

$$\gamma = \sum \widetilde{\beta}_j\gamma_j = \sum(\sum \alpha_{ij}\beta_i)\gamma_j, \quad \alpha_{ij} \in L$$

Теперь нужно док-ть линейную независимость

$$\sum \delta_{ij}\beta_i\gamma_j = 0 \quad \delta_{ij} \in L$$

$$\sum_j(\sum_i \underbrace{\delta_{ij}\beta_i}_{\in K})\gamma_i = 0$$

Так как базис, то в каждой скобке стоит ноль, снова применяем это рассуждение

$\Rightarrow \delta_{ij} = 0$

Пример

$$\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$$

$$\mathbb{C}/_{\mathbb{R}}$$

Замечание

Такая конструкция называется башней расширения

Напоминание

$$G \text{ - группа}, \quad \operatorname{ord} a = s \quad a^t = e \ \Rightarrow \ t \,\vdots\, s$$

Утв

G - абелева (=коммутативная) группа

1. $\left.\begin{array}{r} \operatorname{ord} a = n \\ \operatorname{ord} b = m \\ (n, m) = 1 \end{array}\right| \ \Rightarrow \ \operatorname{ord} ab = nm$

$$(ab)^{nm} = a^{nm} b^{nm} = e$$

$$\text{Предположим } (ab)^k = e \ \Rightarrow \ \underbrace{(ab)^{nk}}_{= a^{nk} b^{nk} = b^{nk}} \ \Rightarrow \ nk \,\vdots\, m \ \Rightarrow \ k \,\vdots\, m$$

Аналогично $k \,\vdots\, n$

$$\left.\begin{array}{r} k \,\vdots\, m \\ k \,\vdots\, n \end{array}\right| \ \Rightarrow \ k \,\vdots\, m$$

2. $\left.\begin{array}{r} \operatorname{ord} a = n \\ \operatorname{ord} b = m \end{array}\right| \ \Rightarrow \ \exists n', m' : \left.\begin{array}{c} n \,\vdots\, n', \ m \,\vdots\, m' \\ (n', m') = 1 \\ n'm' = \text{НОК}(n, m) \end{array}\right| \ \Rightarrow \ \exists c \in G :$

$$\operatorname{ord} c = \text{НОК}(m, n)$$

Док-во первой части:

(a) Пусть $n = p^\alpha, \ m =^\beta, \quad \alpha \geqslant \beta$

$$n' =^\alpha, \quad m' = 1$$

(b) $n = p_1^{\alpha_!} ... p_s^{\alpha_s}, \quad m = p_1^{\beta_1} ... p_s^{\beta_s}$

Док-во второй части: достаточно д-ть, что $\exists$ эл-ты порядка n', m'

Пусть $n = n'm'$

$a^n = e$

$\Rightarrow \ (a^{s'})^{n'} = e$

$? \operatorname{ord} a^{s'} = n'$

$(a^{s'})^t = e \quad (t < e') \ \Rightarrow \ a^{st} = e \ \Rightarrow \ st < s'n' = n$

Противоречие с порядком
Значит мы нашли эл-т порядка n', аналогично порядка m'. Пользуемся предыдущим пунктом и утверждение доказано

Теорема

Мультипликативная группа конечного поля циклическая

Док-во

Пусть $|K^*| = m$ (мультипликативная группа)

$\alpha \in K^*$ - макс. порядка, $\quad \operatorname{ord} \alpha = s$

По следствию из теоремы Лагранжа $m \geqslant s$

$\beta \in K^* \quad \deg \beta = r$

$\exists \gamma \in K^* : \operatorname{ord} \gamma = \text{НОК}(s, r) \geqslant s$

$\Rightarrow \text{НОК}(s, r) = s \ \Rightarrow \ s \vdots r$

$\beta^r = 1 \ \Rightarrow \ \beta^s = 1$

Рассмотрим $x^s - 1 \in K[x]$. Доказали, что каждый ненулевой элемент будет корнем. Значит у него по крайней мере m корней

Степень многочлена не превосходит числа корней

$\Rightarrow s \geqslant m \ \Rightarrow \ s = m$

Значит есть образующий элемент и группа циклическая

Утв

$K/_L$ - конечно, $\quad \alpha \in K$

$\Rightarrow \exists f \in L[x] : f(\alpha) = 0$

Док-во

Пусть $[K : L] = n$

Рассмотрим $1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^n \in K$

Если рассматривать это как вектора, то они ЛЗ

$$\Rightarrow \exists \gamma_i : \sum \gamma_i \alpha^i = 0$$

$$f(x) = \sum \gamma_i x^i$$

Опр

$f \in L[x]$ - минимальный мн-н для $\alpha \in K$ (в расширении $K/_L$), если:

1. $f(\alpha) = 0$
2. $g(\alpha) = 0 \ \Rightarrow \ \deg g \geqslant \deg f$

$$g \in L[x]$$

Пример

Мн-н минимальной степени в $\mathbb{R}$ у которого корень i - это $x^2 + 1$

Свойства

1. f - минимальный мн-н над L - неприводим
   Док-во:

   $$f = gh, \quad g, h \in L[x] : \deg g < deg f, \quad \deg h < f$$

   $$\underbrace{f(\alpha)}_{=0} = f(\alpha)h(\alpha)$$

   Противоречие

2. $g(\alpha) = 0, \quad g \in L[x] \ \Rightarrow \ g \,\vdots\, f$
   Док-во:

   $$g = fh + r, \quad \deg r < \deg f, \quad r \in L[x]$$

   $$\underbrace{g(\alpha)}_{=0} = \underbrace{f(\alpha)}_{=0}h(\alpha) + r(\alpha)$$

   $\Rightarrow r$ - тожд. мн-н $\ \Rightarrow \ g$ делится на f без остатка

Следствие

Значит минимальный многочлен единственный с точностью до ассоциированности

Следствие

Унитарный минимальный многочлен единственный

3. $[K:L] \vdots \deg f$

Рассмотрим $L(\alpha) := \{\lambda_0 + \lambda_1\alpha + ... + \lambda_s\alpha^s, \quad \lambda_i \in L\} \subset K$

Хотим доказать, что это поля. Очевидно кроме

$$\left.\begin{matrix}\varphi(\alpha) \neq 0 \\ \varphi \in L(x)\end{matrix}\right| \Rightarrow \varphi(\alpha)^{-1} \in L(\alpha)$$

Рассмотрим $(\varphi, f) \overset{\text{f - неприв.}}{=} \left[\begin{matrix} f \Rightarrow \varphi \vdots f \text{ - невозможно} \\ 1 \end{matrix}\right.$

$$\Rightarrow (\varphi, f) = 1 \Rightarrow 1 = \varphi h + fg, \quad h, g \in L[x]$$

$$1 = \varphi(\alpha)h(\alpha) + \underbrace{f(\alpha)}_{=0}g(\alpha)$$

Замечание

Получили башню расширения: $K - L(\alpha) - L$

$$[K:L] = [K:L(\alpha)]\underbrace{[L(\alpha):L]}_{\overset{?}{=}\deg f}$$

$$\deg f = n$$

$1, \alpha, \alpha^2 ... \alpha^{n-1}$ - базис $L(\alpha)$ над L?

(a) ЛН?

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i\alpha^i = 0, \quad c_i \in L$$

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in L[x]$$

$$\begin{matrix}\psi(\alpha) = 0 \\ \deg\psi \leqslant n-1\end{matrix} \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow c_i = 0$$

(b) Порождаемость?

$$\varphi(\alpha) \in L(\alpha), \quad \varphi \in L[x]$$

$$\varphi = fg + r, \quad \deg f < n, \quad r \in L[x]$$

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha) + r(\alpha)$$

т.е. $r(\alpha)$ - ЛК базисных векторов

2019-12-10

Утв

$$x^{p^n} - x = \prod_{d|n} \text{унитарные непр. мн-ны над } \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z} \text{ степени } d$$

Пример

$$p = 2 \qquad n = 4$$

$$x^{16} - x = x(x+\overline{1})(x^2+x+\overline{1})(x^4+x^3+x^2+x+\overline{1})(x^4+x^3+\overline{1})(x^4+x+\overline{1})$$

Опр

$m_p(d)$ - кол-во непр. унит. мн-нов степ d над $\mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}$

$$p^n = \sum_{d|n} m_p(d)d \qquad m_p(1) = p$$

Следствие

Все $M_p(d)$ - полож.

Док-во (следствия)

$$M_p(d) = m_p(d)d$$

$$p^n = \sum_{d|n} M_p(d) \qquad M_p(d) \leqslant p^d$$

$$M_p(n) = p^n - \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} M_p(d) \geqslant p^n - \sum_{\substack{d|n \\ d\neq n}} p^d \geqslant p^n - (p^{n-1} + p^{n-2} + ... + p) =$$

$$= p^n - \frac{p^n - p}{p-1} = \frac{p^{n+1} - 2p^n + p}{p-1} > 0$$

Утв (предложение)

$f \in \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[x]$ - непр $\deg f = d$

$$x^{p^n} - x \,\vdots\, f \Leftrightarrow n \,\vdots\, d$$

Док-во

Только часть док-ва

$$h \vdots g^2$$

$$\Rightarrow h' \vdots g$$

Лемма (для док-ва предложения)

$$(x^{p^n} - x, x^{p^d} - x) = x^{p^{(n,d)}} - x$$

Док-во (предложения)

$$\Leftarrow n \vdots d$$

$$F = \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[x]\Big/_{(f)} \qquad |F| = p^d$$

$\overline{x}$ - класс по модулю

$$|F^*| = p^d - 1$$

$$\forall \alpha \in F^* \quad \operatorname{ord} \alpha = t \quad ts = p^d - 1$$

$$\alpha^t = 1$$

$$\alpha^{p^d - 1} = \alpha^{st} = 1$$

$$\alpha^{p^d} = \alpha$$

$$\overline{x}^{p^d} = \overline{x} \ \text{ в } F$$

$$x^{p^d} - x \vdots f$$

$$(x^{p^n} - x, x^{p^d} - x) = x^{p^{(n,d)}} - x = x^{p^d} - x \vdots f$$

Если НОД делится на $f \Rightarrow$ каждый делится

$$\Rightarrow x^{p^n} - x \vdots f$$

$$x^{p^d} - x \vdots f$$

$$\Rightarrow (x^{p^n} - x, x^{p^d} - x) = x^{p^{(n,d)}} - x \vdots f$$

$$d' = (n, d)$$

$$\overline{x}^{p^{d'}} = \overline{x} \quad \text{ в } F$$

$$\varphi(\overline{x})^{p^{d'}} = \varphi(\overline{x}) \qquad \varphi \in \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[t]$$

1) $\left.\begin{array}{l}\lambda^{p^{d'}} = \lambda \\ \eta^{p^{d'}} = \eta\end{array}\right| \Rightarrow (\lambda+\eta)^{p^{d'}} = (\lambda+\eta) \qquad \lambda, \eta \in F$

2) $\lambda^{p^{d'}} = \lambda \Rightarrow (a\lambda)^{p^{d'}} = a\lambda \quad a \in \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}, \quad \lambda \in F$

1) $(x+y)^p = x+y$ в поле хар-ки p

2) $a \in \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z} \quad a^p = a$

$$\lambda^{p^{d'}} = \lambda \quad \forall \lambda \in F$$

$$\Rightarrow \lambda^{p^{d'}-1} = 1$$

Это происходит с любым элементом поля F, в котором p^d элементов. В $|F^*|$ $p^d - 1$ элемент, а мы получили, что $\forall$ элемента $\lambda^{p^{d'}} = 1$, это возможно, только, если $d' = d$

$$\Rightarrow n \,\vdots\, d$$

<u>Док-во</u> (леммы)

$$n = dq + r$$

$$x^{p^n} - x = x^{p^{dq+r}} - x =$$
$$= \underbrace{(x^{p^d} - x)^{p^{d(q-1)+r}} + (x^{p^d} - x)^{p^{d(q-2)+r}} + \ldots + (x^{p^d} - x)^{p^r}}_{\vdots\, x^{p^d} - x} + (x^{p^r} - x)$$

$$\begin{array}{ll} n = dq + r & x^{p^n} - x = (x^{p^d} - x)g + x^{p^r} - x \\ d = rq_1 + r_1 & x^{p^d} - x = (x^{p^r} - x)g_1 + x^{p^{r_1}} - x \\ r = r_1 q_2 + r_2 & \ldots \end{array}$$

<u>Утв</u>

F_1, F_2 - изоморфны, если $\exists \varphi : F_1 \to F_2$:

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
3. φ - биекция

<u>Утв</u> (предложение)

$$|F_1| = |F_2| = p^n \Rightarrow F_1 \cong F_2$$

Док-во

$$\mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[x]\Big/_{(f)}, \quad f \in \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[x] \qquad \deg f = n$$

$$|F| = p^n$$

$$\overline{x}^{p^n} = \overline{x} \text{ в } \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[x]\Big/_{(f)}$$

$$\Rightarrow x^{p^n} - x \,\vdots\, f$$

$$\forall \alpha \in F \quad \alpha^{p^n} = \alpha$$

$$x^{p^n} - x \text{ над } F(\text{произв. поле})$$

$$x^{p^n} - x = \prod_{\alpha \in F}(x - \alpha)$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in F : f(\alpha) = 0$$

$$\mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[x]\Big/_{(f)} \to F$$

$$\varphi(\overline{x}) \to \varphi(\alpha), \quad \varphi \in \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[t]$$

Нужно ядро $= 0$

$$\varphi(\overline{x}) \quad \varphi(\alpha) = 0 \quad f(\alpha) = 0 \quad f \text{ - непр}$$

$$\Rightarrow \varphi \,\vdots\, f$$

2019-12-17

4 Кодирование

Есть некоторый алфавит - конечный набор
Слово - конечная последовательность символов из алфавита
Слово $\to$ Кодовое слово $\underset{\text{помехи}}{\to}$ принятое кодовое слово $\to$ раскодированное слово
Передаем мы кодовое слово

Опр

Количество несовпадающих символов у двух слов одинаковой длины - мера "расстояния" между словами

Пусть есть конечное число кодовых слов. хотим, чтобы расстояние между ними было максимальным и количество слов тоже
Если есть набор кодовых слов с мин. расстоянии d, то можем восстановить слово с числом ошибок $= \frac{d}{2}$

Теперь возьмем поле из конечного кол-ва элементов.

Опр **(Линейное кодирование)**

Алфавит - элементы некоторого конечного поля
пусть поле из p^n элементов
Слово $x_0, ..., x_n$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{кодовое слово}} \to y_0, ..., y_{n-1}$$

Опр **(Полиномиальное кодирование)**

Из слова сделали полином

$$\underbrace{(a_0 + ta_1 + ... + t^k a_k)}_{\text{фикс. полином}}(x_0 + tx_1 + ... + t^{n-1} x_{n-1}) = \underbrace{(y_0 + ty_1 + ... + t^{m-1} y_{m-1})}_{\text{кодовое слово}}$$

(частный случай линейного кодирования)

4.1 Код Боуза-Чоудхури-Хоквингена

Опр

$$|F| = p^n$$

Фиксируем $d \leqslant p^n - 1$
Мы будем строить кодовые слова, расстояние между которыми не меньше, чем d

$$N = p^n - 1 \text{ - длина кодовых слов}$$

Рассмотрим α - примитивный элемент (примитивный - образующий мультипл. группы)

$$m_i \text{ - мин. мн-н для } \alpha^i \qquad m_i \in \mathbb{Z}_{/p}\mathbb{Z}[x]$$

$$g = \text{НОК}(m_1, ..., m_{d-1})$$

Утверждается, что код построенный по этому многочлену будет уд. условию, что расстояние будет не меньше, чем d
От противного:
Есть два кода, расстояние между которыми не меньше d
Рассмотрим разность этих многочленов (они отличаются не меньше, чем в d разрядах)

$$P(x) = b_1 x^{k_1} + ... + b_{d-1} x^{k_{d-1}}, \quad \text{- разность} \quad 0 \leqslant k_1 < ... < k_{d-1} \leqslant N = p^n - 1$$

P делится на g

$$\Rightarrow P(\alpha) = P(\alpha^2) = ... = P(\alpha^{d-1}) = 0$$

$$\begin{cases} b_1\alpha^{k_1} + ... + b_{d-1}\alpha^{k_{d-1}} = 0 \\ b_1\alpha^{2k_1} + ... + b_{d-1}\alpha^{2k_{d-1}} = 0 \\ ... \\ b_1\alpha^{(d-1)k_1} + ... + b_{d-1}\alpha^{(d-1)k_{d-1}} = 0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha^{k_1} & \alpha^{k_2} & ... & \alpha^{k_{d-1}} \\ \alpha^{2k_1} & \alpha^{2k_2} & ... & \alpha^{2k_{d-1}} \\ & & & \\ \alpha^{(d-1)k_1} & \alpha^{(d-1)k_2} & ... & \alpha^{(d-1)k_{d-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{d-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det C = \alpha^{k_1 + ... + k_{d-1}} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d-1} (\alpha^{k_j} - \alpha^{k_i}) \neq 0$$

$$\Rightarrow b_i = 0 \ \forall i$$

Значит, эти два слова должны совпадать

Пример

$$p = 2, \quad n = 4 \qquad F = \mathbb{Z}_{/2}\mathbb{Z}[t]\Big/_{(t^4+t+1)}$$

$$\alpha = \bar{t}$$

Рассмотрим порядок α, если он не 1, не 3 и не 5, то он 15
Порядок, действительно, 15

$$m_1(x) = t^4 + t + 1$$

$$m_2(x) = t^4 + t + 1$$

$$m_3(x) = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$$

$$m_5(x) = t^2 + t + 1$$

$$m_7(x) = t^4 + x^3 + 1$$

$$m_1 = m_2 = m_4 = m_8$$

$$m_3 = m_6 = m_9$$

$$m_5 = m_{10}$$

$$m_7 = m_{11} = m_{13} = m_{15}$$

$$d = 2, 3 \quad g = x^4 + x + \overline{1}$$

$$d = 4, 5 \quad g = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + \overline{1}$$

$$d = 6, 7 \quad g = x^{10} + x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + \overline{1}$$

$$d = 8 \qquad g = x^1 4 + ... + \overline{1}$$