Практика по матану, 3 сем

(преподаватель Демченко О. В.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Теория групп

1.1 Жордановы формы, 03.09.2019

Утв

Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $U \in GL_n(\mathbb{C}) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) : |U| \neq 0\}$
Сопряжение матрицы A с помощью U: $A \longmapsto U^-1AU$

Теорема (Жордана, матрич. форма)

$\forall A \exists U : U^{-1}AU = J$
Пусть $U^{-1}AU = J$, $V^{-1}AV = I$ - совпадают с точностью до перестановки жардановых блоков

Пример

$A_1 \in M_n(K)$, $A_2 \in M_m(K)$
$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$
С помощью какой матрицы можно поулчить сопряжением другую

Теорема (Жордана, операт. форма)

Пусть $L \in L(V)$ (оператор на V), V - конечномерное пр-во над $\mathbb{C}$. Тогда $\exists \{e_1, ..., e_n\}$ (жарданов базис) - базис V. $[L]_e = J$
Единственность: если есть два базиса, то матрицы можно получить перестановкой

———— тут не хватает чего-то

1.2 Собственные вектора, 10.09.2019

————- что-то пропущено

1.3 Жордановы матрицы, 17.09.2019

Пример

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$X^2 = A = C^{-1}JC$$

Пример $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $Y^2 = J$, $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & ? \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$, ? - из уравнения

Как найти J и C?

1) Находим все ссобственные числа матрицы A

Если все с.ч. равны, то J без единичек

Если одно собственное число а) диагонализируема $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

б) блоки 2 и 1 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Пример

Найдём, сколько собственных вектор-столбцов

Первая матрица: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = \lambda x_1 \\ \lambda x_2 = \lambda x_2 \\ \lambda x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$x_1, x_2, x_3 \in R$ - три л.н. переменные

Для второго решение: $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ - 2 собственных вектор-столбца

Пример

Пусть у нас матрица 4*4, 2 собственных л.н. столбца (два блока)

Утв

G,H - изоморфны, G - комм. $\Rightarrow$ H - комм.

Док-во

$\exists \varphi : G \to H : \varphi$ - биекция и $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$, кроме того, $g_1 g_2 = g_2 g_1$ $\forall g_1, g_2 \in G$, применим φ к последнему выражению

$h_1 h_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2)\varphi(g_1) = h_2 h_1$

$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Дз: G,H - изоморфны, G - цикл. $\Rightarrow$ H - цикл.

Решение

Грппа G - цикл $\Leftrightarrow \exists g \in G : \forall g' \in G \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

G - цикл., $G \cong H \Rightarrow \exists \varphi : G \to H$

$$\forall h' \in H \quad \exists g' \in G : h' = \varphi(g') = \varphi(g^k) = \varphi(\underbrace{g...g}_{k}) = \underbrace{\varphi(g)...\varphi(g)}_{k} = \underbrace{h...h}_{k} = h^k$$

Чтобы доказать, что две группы не изоморфны, можно доказать что у одной из них свойство выполняется, а у другой нет

Пример

1. $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$, D_3 - коммуннитативность
2. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - цикличность
3. $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - дз
4. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - порядки элементов
5. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - цикличность?

1.4 В ожидании кр..., 24.09.2019

Пример

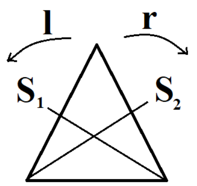
$$A \in M_n(\mathbb{C}), \quad A = C^{-1}JC, \quad C \in_n (\mathbb{C})$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

1) находим все с.ч.
2) для каждого с.ч. находим л.н. уравнение
3) решаем систему линейных уравнений
...ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, СМ. ТЕТРАДЬ

Пример

$$D_3 = \{e, l, r, s_1, s_2, s_3\}$$



$$H_1 = \{e, r, l\}$$

$$H_2 = \{e, s_1\}$$

1) Разбить по подгруппам, по левым и правым классам. Какая нормальная, какая нет?
2) Найти g,G. Чтобы произведение не лежало в H_2

Дз: $D_4 = \{...\}$, $H_1 = \{e, s_2\}$, $H_2 = \{e, r^2\}$
Дз: $K(D_3)$ - найти коммутант для D_3

1.5 Комутаторы и комутанты, 01.10.2019

Пример

Дз (прошлое): $G = D_4$

$$H = \{e, r^2\}$$

$$H \triangleleft G$$

$$G/_H$$

Дз (новое):

1. Чему изоморфно $G/_H$? $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$
2. $|G| = 4 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ccc} G & \cong & \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \\ G & \cong & \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \end{array}\right.$

Пример (я не знаю, что это было)

Пример

1. $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^* \quad (z \mapsto |z|)$
2. $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad (z \mapsto z^4)$

Что получается при применении основной теоремы о гомоморфизме? (найти ядро образ, факторизовать, д-ть, что изморфна образу)

Решение

1. $\mathbb{C}^*/_{\{Z \in \mathbb{C}:\ |z|=1\}} \cong \mathbb{R}^*_{>0}$
2. ДЗ

Пример

ДЗ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/_{\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):\ \det A = \pm 1\}} \cong ?$

Как это сделать? Нужно найти $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to H$ - гомоморфизм: $\operatorname{Ker}\varphi = \{A \in_n (\mathbb{R}) :\ \det A = \pm 1\}$

Решение

$$\varphi(A) = |\det A|$$

$$\varphi(A) = (\det A)^2$$

ДЗ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) /_{\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):\ \det A = \pm 1,\ \pm i\}} \cong ?$

1.5.1 Действие группы на множество

Пример

$$D_4$$

Написать разбиение этого множества из 16 эл-ов на орбиты. Сколько орбит?

Решение