Метрические пространства 2019-09-04

$$M \quad d: M \times M \to [0; +\infty)$$

d - метрика

**Теор**

*Аксиомы метрики:*

*1.*

$$d(x, y) \geq 0$$

*2.*

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

*3.*

$$d(x, y) = d(y, x)$$

*4.*

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

**Примеры**

*1.*

$$M = \mathbb{R}^n \quad x \in M \quad x = (x_1, ..., x_n)$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$$

*2.*

$$M = \mathbb{R}^n,$$

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum |x_j - y_j|_{j=1}^n}$$

$$\textit{В частн. } d_2(x, y) = \sqrt{\sum^n |x_j - y_j|^2}$$

*3.*

$$M = C[0, 1]$$

$$f, g \in M$$

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

*4.*

$$M = C[-1,1] \quad d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f-g|$$

**<u>Утв</u>**

$$\max_{1\le j\le n} |x_j - y_j| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} \le n \cdot \max_{1\le j\le n} |x_j - y_j|$$

$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le n \cdot d_\infty(x,y)$$

**<u>Опр</u>**

$$x^{(m)} \in M$$

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x \Leftrightarrow d(x^{(m)}, x) \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

**<u>Пример</u>**

*1.*

$$M = C[0,1] \quad d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$$f^{(m)} \underset{d}{\to} f \Leftrightarrow f^{(m} \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$$

*2.*

$$M = \mathbb{R}^n, d_2(x,y) \quad x^{(m)} = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$$

$$\textit{сх-сть } (\mathbb{R}^n, d_2) \Leftrightarrow \textit{ покоорд сх-ти}$$

$$x^{(m)} \underset{d_2}{\to} x \Leftrightarrow x_j^{(m)} \to x_j \quad \forall j = 1, ...n$$

*Т.о сх-ть по метрике $d_2$ в $\mathbb{R}^n$ равносильна покоорд сх-ти*

**<u>Теор</u> (Критерий Коши)**

$$(\mathbb{R}^n, d_2)$$

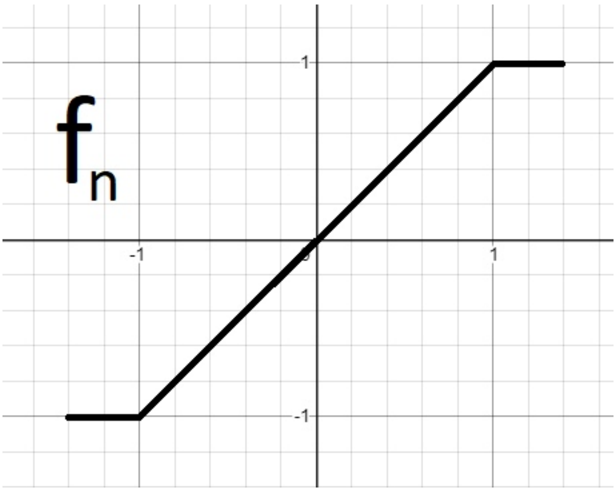
$$x^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} x \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n, k \ge N$$

$d_2(x^{(n)}, x^{(k)}) < \mathcal{E}$ *(УПР)*

*Аналогичн. Т. Верна не для всех метрич. пр-в:*

*Напр:* $M = C[-1,1] \quad d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f-g|$

$f_n:$




$\{f_n\}$ *- сх. в себе:*

$\forall \mathcal{E} > 0 \exists N : \forall n > N \ \forall p > 0?$

$d(f_n, f_{n+p}) < \mathcal{E}$

$$d(f_n, f_{n+p}) = \int_{-1}^{1} |f_n - f_{n+p}| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

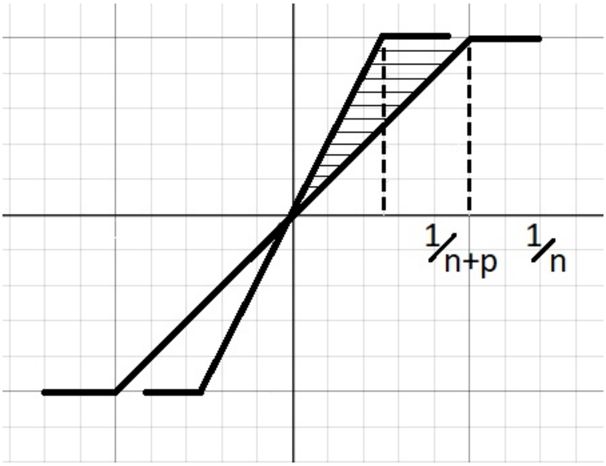
$\forall \mathcal{E} \exists N : \forall n > N, p > 0 \ d(f_n, f_{n+p}) < \mathcal{E}$

*Усл. Коши удовл. (сх в себе)*

*Есть ли* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$?

$g(x) = sign\ x$ *поточечн предел*

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |f_b - g| = 0$, *но* $g \notin C[-1,1]$




$$\textit{предпол } f \in C[-1,1] \quad \lim f_n = f \ \textit{т.е} \ \int |f_n - f| \to 0$$

$$0 \le \int_{-1}^{1} |f-g| \le \int_{-1}^{1} |f_n - f| + \int_{-1}^{1} |f_n - g| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{|f-g|}_{\in C[-1;1]} = 0$$

$$\int_{-1}^{0} |\underbrace{f-g}_{=0}| + \int_{0}^{1} |\underbrace{f-g}_{=0}| \Rightarrow \begin{matrix} f(x) = 1 & \forall x > 0 \\ f(x) = -1 & \forall x < 0 \end{matrix}$$

- *неустранимый разрыв в т.* $x = 0 \quad \Rightarrow \lim f_n$ *не существует*

$$\textit{УПР } C[0,1] \quad d(f,g) = \sup_{1 \le x \le y} |f(x) - g(x)|$$

*Вып ли Т. Коши?*

Топология

$$\mathbb{R}^n \quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}$$

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < r\}$$

$X \subset \mathbb{R}^n \quad X$ - откр, если

$\forall a \in X \exists B_a : B_a \subset X$

$X$ - замкн $\Leftrightarrow X^c$ - откр

**Теор** **(св-ва)**

*1.*

$$U_\alpha \text{ - откр } \forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ - откр.}$$

*2.*

$$\{U_k\}_{k=1}^N \text{ - откр } \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n U_k \text{ - откр}$$

*3.*

$$F_\alpha \text{ - замк } \forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$$

*4.*

$$F_k \text{ - замкн } \Rightarrow \bigcup_{k=1}^N F_k \text{ - замк}$$

**Опр**

*Окр. т* $a$ *-* $U$ *- откр:* $a \in U$
$\delta$ *окр-ть т.* $a$ $U_a(\delta) = B(a, \delta)$
*прокол.* $\delta$ *окр-ть*

$$\overset{\circ}{U}_a(\delta) = B(a, \delta) \setminus \{a\}$$

*Внутренность* $X \subset \mathbb{R}^n$

$$int(X) = \{a \in X : \exists B_a \subset X\}$$

*Внешность* $X \subset \mathbb{R}^n$

$$ext(X) = int(X^c) = \{b \in X^c : \exists B_b \subset X^c\}$$

*Замыкание*

$$Cl(X) = (ext(X))^c$$

*Граница*

$$\partial X = Cl(x) \setminus int(X) = \mathbb{R}^n \setminus (intX \cup extX)$$

**Примеры**

$$X = B(0,1)$$

$$intX = B(0,1)$$
$$exX = \{x : d(0,x) > 1\}$$
$$ClX = \overline{B}(0,1) = \{x : d(0,x) \leq 1\}$$

*Рисунок шарика*

$$\partial X = S(0,1) = \{x : d(0,x) = 1\}$$

*УПР. Доказать или опровергнуть*

1. $$int(intX) = intX$$

2. $$\partial(\partial X) = \partial X$$

3. $$Cl(ClX) = ClX$$

**Утв**

$$X \text{ - замкн } \Leftrightarrow ClX = X$$

**Док-во**

$$U \text{ - откр} \quad intU = U$$

$$\Rightarrow X \text{ - замкн } \Leftrightarrow X^c \text{ - откр.} \Leftrightarrow extX = int(X^c) = X^c \Leftrightarrow$$
$$ClX = (extX)^c = X^{cc} = X$$

**Опр**

*Ограниченность*

$$X \subset \mathbb{R}^n$$

$$diamX = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$$

$$X \text{ - огр. если } diamX < \infty \Leftrightarrow \exists R > 0 : X \subset B(0,R) \text{ (УПР)}$$

**Теор** **(Принцип выбора Больцано-Вейерштр.)**

$$\forall \text{ огр. послед. } \{X^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n \text{ можно выделить сх. подпослед.}$$

Компатные множества в $\mathbb{R}^n$

**Опр**

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ - компактное мн-во } \Leftrightarrow \forall \text{ откр. покр. можно выделить конеч. подпокр.}$$

$$\text{Если } U_\alpha - \text{ откр } .\forall \alpha \in A : K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in A :$$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_\alpha$$

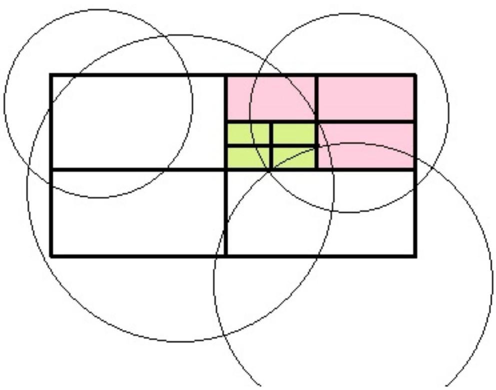
**Примеры**

*1.*

$$[a, b] \subset \mathbb{R} \text{ - компакт.}$$

*2.*

$$I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^n$$



$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n$$

$$diam I_n = \frac{diam I}{2^n} \to 0$$

$$I_n \text{ - замк}$$

$$I_k = \prod_{j=1}^{n} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \qquad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] = \{c_j\} \forall j$$

$$[a_j^{(k)}, b_j^{(k)}] \supset [a_j^{(k+1)}], b_j^{(k+1)}$$

$$x^* \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$$

$$\text{Если } y^* \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \Rightarrow d(x^*, y^*) \leq diam I_k \to 0$$

$$\Rightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$$

$$x^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$$

$$x^* \in I \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow$$

$$\exists \alpha^* : x^* \in U_{\alpha^*} \text{ - откр}$$

$$\exists B(x^*, \delta) \subset U_{\alpha^*}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : I_N \subset U_{\alpha^*}$$

**Лемма**

$K \subset \mathbb{R}^n$ - *компакт*

*Тогда*

1. $K$ - *замкн*
2. $K$ - *огр*
3. $\forall D \subset K \quad D$ - *замк* $\Rightarrow D$ - *комп*

b

**Док-во**

1.

$K^c \ni a$*Рисунок области с k x a*

$\forall x \in K \quad d(a,x) > 0$

$r_x = \frac{1}{3} d(x,a)$

$\forall x \in K$

$B(x, r_x)$ - *откр*

$K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, r_x)$ - *откр. покр. компакта K*

$\exists x_1, ..., x_N \in K : K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B(x_j, r_{x_j})$

$a \in \bigcap\limits_{k=1}^{N} B(a, r_{x_k}) = B(a, r_{\min}$

$r = \min(r_x, r_{x_N}) > 0$

*причем* $\bigcap\limits_{1}^{N} B(a, r_{x_k})$ *не имеет общих точек*

$\bigcup\limits_{1}^{N} B(x_k, r_{x_k}) \supset K$

$\exists B(a, e_{mn}) \subset K^c \Rightarrow K^c$ - *откр* $\Rightarrow K$ - *замкн*

*2.*

$$\text{комп - } K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(0,k) \text{ - откр. покр}$$

$$\Rightarrow \exists k_1, ..., k_n$$

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(0,k_j) = B(0, \max_{1\le j\le N}(k_j)) \Rightarrow K \text{ - огр}$$

*3.*

$$\text{замкн - } D \subset K \text{ - комп}$$

*Пусть откр. покр*

$$D \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

$$U^* = D^c \text{ - откр - добавим к покр. } K\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$$

$$\Rightarrow \text{ выд. конечн. подпокрытие } K \quad \{U_{\alpha_j}\}_{j=1}^{N} \cup \{U^*\}$$

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_\alpha$$

**Теор (След. усл. равносильны)**

1. $K$ - *компакт.*
2. $K$ - *замк. и огр.*
3. 

$$\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty}\ x_m \in K$$

$$\exists \text{ подпосл } x_{m_k} \to x \in K$$

**Док-во**

$1 \Rightarrow 2$

$2 \Rightarrow 1$

$$\text{т.к. } K \text{ - огр} \Rightarrow \exists I = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$$

$$\text{замкн - } K \subset I \text{ - комп}$$

$\Rightarrow$ *(лемма)* $K$ *- комп*

$2 \Rightarrow 3$

$x_m \in K$ *- замк и огр*

$\Rightarrow \exists x_{m_k}$ *- сх (пр. выб. Б-В)*

$x_{m_k} \to x$ *предпол* $x \notin K$

$x \in K^c$ *- откр* $\Rightarrow \exists B_x \subset K^c$

*Но* $K \ni d(x_{m_k}, x) \to 0$ *противореч* $x \in K$

$3 \Rightarrow 2$

*а) предп.*$K$ *не явл. огр.*

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K : d(0, x_n) > n$

$\{x_n\}$ *не огр* $\Rightarrow$ *не сх.*

$\Rightarrow K$ *- огр*

*б) предп., что* $K$ *- не явл. замкн*

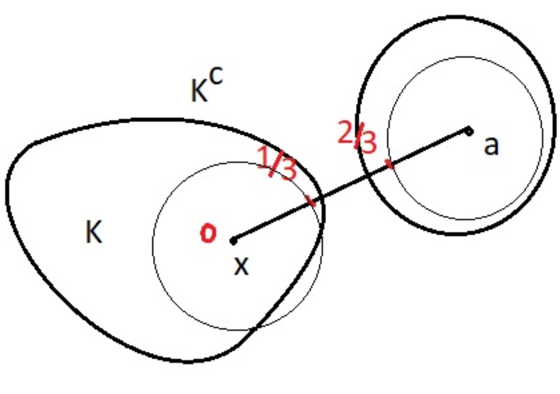
$K^c$ *- не откр*

$\exists a \in K^c : \forall \delta > 0 \ B(a, \delta) \cap K \neq \varnothing$

$\exists x_n \in B(a, \dfrac{1}{n}) \cap K$

$x_n \in K$

$0 \leq d(x_n, a) < \dfrac{1}{n} \to 0 \quad x_n \to a; \ x_{n_k} \to x \in K$



*УПР:*

$$K_1 \supset K_2 \supset ...$$

$$\text{д-ть} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} K_j \neq \varnothing$$

**Опр**

*Отображения в* $\mathbb{R}^n$

$$E \subset \mathbb{R}^n$$

$f : E \to \mathbb{R}^m$ *- отобр-е (вект. ф-я)*

$m = 1$ *- ф-я*

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$$

$= (x_1, ..., x_n) \quad f_j : E \to \mathbb{R}$ *коорд. функ-ии*

$$a \in \mathbb{R}^n$$

$a$ *- пред. т.* $E$*, если*

$$\forall\delta > 0 \quad U()(a, \delta) \cap E \neq \varnothing$$

**Опр**

$f : E \to \mathbb{R}^m, a$ *- пред. т* $E$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$*, если*

*(Коши* $)\forall\mathcal{E} > 0\exists\delta > 0 : \forall x \in E$

$$0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), L) < \mathcal{E}$$

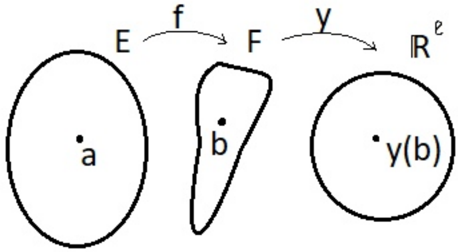
*(Гейне)* $\forall\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \quad x_k \in E \setminus \{a\} x_k \to_{k\to\infty} a \Rightarrow F(x_k) \to_{k\to\infty} L$

**Пример**

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Повторные пределы*

$$\lim_{x\to0} \lim_{y\to0} f(x, y) = 0$$




$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$

$f(\delta,\delta) = \dfrac{1}{2} \underset{\delta\to 0}{\to} \dfrac{1}{2}$

$f(\delta,-\delta) = -\dfrac{1}{2}$

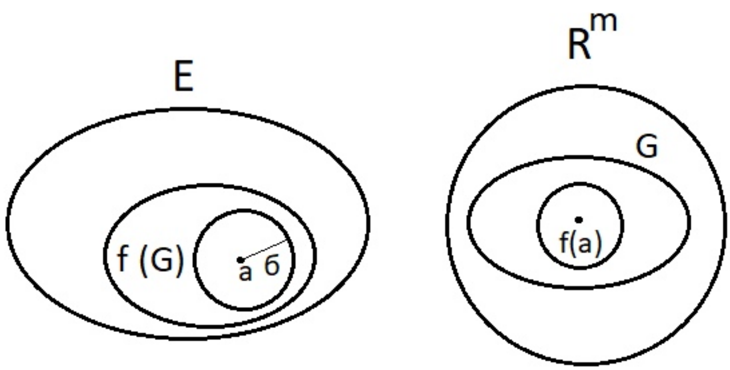
*т.е* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *не сущ.*

**Теор (предел композиции)**

$E \subset \mathbb{R}^n, \quad F \subset \mathbb{R}^m \qquad \mathbb{R}^n \ni a$ *- пред т.* $E$ $F \ni b$ *- пред. т.* $F$

$f : E \to F; \quad g : F \to \mathbb{R}^l$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b; \quad \lim\limits_{x\to b} g(x) = g(b)$




*Тогда* $\lim\limits_{x\to a} g\circ f = g(b)$

**<u>Теор</u> (Крит. Коши)**

$a$ - *пред т.* $E$

$f(x)$ *имеет предел в т.a*

$\Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overset{\circ}{U} (a, \delta) \cap E \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \mathcal{E}$

**<u>Опр</u> (непрерывные отоб-я)**

$a \in E \qquad f : E \to \mathbb{R}^m$

*Если a - изол* $\Rightarrow f$ *- непр в a,*
*если a - пред, то* $f$ *- непр в т. a* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$f$ *- непр в т.a* $\Leftrightarrow f_j$ *- непр. в т a* $\forall 1 \leq j \leq m$

$f$ *- непр в т. a;* $g$ *- непр в* $f(a) \Leftrightarrow g \circ f$ *- непр в т a*

*непр сохр. при +, умн. на число*

$f$ *- непр на* $E \Leftrightarrow$ *непр* $\forall a \in E$

**<u>Теор</u>**

$f : E \to \mathbb{R}^m$

$f$ *- непр на* $E \Leftrightarrow \forall G \subset \mathbb{R}^m \quad G$ *- откр* $\Rightarrow f^{-1}(G)$ *- откр в* $E$

**<u>Док-во</u>**

$G$ *- откр.*

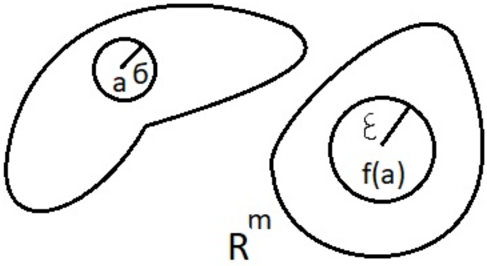
$f^{-1}(G)$ *- откр ?*

$a \in f^{-1}(G)$

$f(a) \in G$ *- откр* $\Rightarrow \exists U(f(a), \mathcal{E}) \subset G$

*рисунок*

*т.к* $f$ *непр в т. a*




$\exists\delta : d(a,x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \mathcal{E}$

$f(B(a,\delta)) \subset B(f(a), \mathcal{E}) \subset G$

$\Rightarrow B(a,\delta) \subset f^{-1}(G)$

$\Leftarrow a \in E \Rightarrow ? f$ - *непр в т. a (рисунок)*

$\forall \mathcal{E} > 0 B(f(a), \mathcal{E})$ - *откр в* $\mathbb{R}^m$

$\Rightarrow f^{-1}(B(f(a), \mathcal{E})$ - *откр.* $\Rightarrow \exists\delta : B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \mathcal{E})) \Rightarrow f$ - *непр. в т a*

**<u>Теор</u> (локальные свойства непр. функций)**

*(дописать)*

*непрерывна в т. a* $\Rightarrow$ *найдетс*

2. *f непр в a.; g непр в a, f ∘ g непр в a.*