

Содержание

1. Базис векторного пространства. Четыре эквивалентных переформулировки определения базиса.	3
2. Конечномерные пространства. Всякое линейно независимое семейство конечномерного пространства можно дополнить до базиса. Существование базиса конечномерного пространства.	5
3. Всякое семейство образующих конечномерного пространства содержит базис. Существование базиса конечномерного пространства.	6
4. Подпространства векторного пространства. Подпространство конечномерного пространства конечномерно.	7
5. Теорема о мощности базиса конечномерного пространства. Размерность пространства.	8
6. Координаты вектора в данном базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат при замене базиса. Матрица преобразования координат.	9
7. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения.	11
8. Прямая сумма подпространств. Эквивалентные переформулировки понятия прямой суммы подпространств.	13
9. Построение кольца многочленов.	15
10. Степень многочлена. Свойства степени. Область целостности. Кольцо многочленов над областью целостности есть область целостности.	17
11. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов.	19
12. Корни многочлена. Теорема Безу.	20
13. Кратные корни многочлена. Теорема о числе корней многочлена над полем.	22
14. Функциональное и формальное равенство многочленов.	24
15. Характеристика поля.	25
16. Производная многочлена. Свойства производной. Многочлены с нулевой производной.	26
17. Теорема о кратности	28
18. Интерполяционная задача. Существование и единственность решения.	29
19. Интерполяционный метод Ньютона.	30
20. Интерполяционный метод Лагранжа.	31

21. Делимость и ассоциированность в кольце многочленов над полем.	32
22. Наибольший общий делитель в кольце многочленов над полем. Существование и линейное представление.	33
23. Взаимно простые многочлены. Свойства взаимно простых многочленов. Если многочлен делит произведение двух многочленов и взаимно прост с первым сомножителем, то он делит второй сомножитель.	35
24. Неприводимые многочлены. Теореме о разложении многочлена в произведение неприводимых (существование). . .	36
25. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых (единственность).	38
26. Алгебраически замкнутые поля. Эквивалентные переформулировки. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.(б.д.)	39
27. Неприводимые многочлены над полем вещественных чисел. Теорема о разложении многочлена с вещественными коэффициентами в произведение неприводимых над \mathbb{R} . .	40
28. Поле частных области целостности. Поле частных кольца многочленов (поле рациональных функций).	41
29. Простейшие дроби. Разложение рациональной функции в сумму многочлена и простейших дробей. (существование). .	43
30. Разложение рациональной функции в сумму многочлена и простейших дробей. (единственность).	46
31. Факториальные кольца. Содержание многочлена над факториальным кольцом. Содержание произведения многочленов.	47
32. Теорема Гаусса о факториальности кольца многочленов над факториальным кольцом. Факториальность колец $K[x_1, \dots, x_n], \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$	49
33. Неприводимость над \mathbb{Q} и над \mathbb{Z} . Методы доказательства неприводимости многочленов с целыми коэффициентами (редукция по одному или нескольким простым модулям).	50
34. Критерий неприводимости Эйзенштейна.	51
39. Линейные отображения векторных пространств. Линейное отображение полностью задается своими значениями на базисных векторах.	52

40. Сумма линейных отображений, умножение на скаляр. Пространство линейных отображений.	53
41. Матрица линейного отображения для данных базисов. Матрица суммы отображений. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.	54
42. Композиция линейных отображений. Матрица композиции.	55
43. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.	56
44. Ядро и образ линейного отображения, их свойства. Критерий инъективности и сюръективности линейного отображения в терминах ядра и образа.	57
45. Выбор базисов, для которых матрица линейного отображения имеет почти единичный вид. Следствие для матриц. Теорема о размерности ядра и образа.	58
46. Критерий изоморфности конечномерных пространств	59
47. Двойственное пространство. Двойственный базис. Изоморфность конечномерного пространства и его двойственного. Пример пространства не изоморфного своему двойственному.	61
49. Линейные операторы. Кольцо линейных операторов. Изоморфность кольца линейных операторов и кольца матриц.	62
50. Многочлены от оператора. Коммутирование многочленов от одного оператора.	63
51. Характеристический многочлен матрицы и оператора. Независимость характеристического многочлена оператора от выбора базиса.	64
1. Базис векторного пространства. Четыре эквивалентных переформулировки определения базиса.	

Опр

V - в.п. над полем K

$\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - лин. незав., если

$$0 = \sum c_\alpha v_\alpha \Rightarrow \text{все } c_\alpha = 0$$

Опр

$\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - сем-во образующих, если

$$\forall v \in V \quad v = \sum c_\alpha v_\alpha$$

Опр

Базис - лин. незав. сем-во образующих ($\bar{0} \notin$ базису)

Опр

лин. независ. сем-во назыв. максимальным по включению, если при добавлении \forall нового вектора сем-во явл-ся ЛЗ

Опр

Сем-во образующих назыв. минимальным по включению, если при выбрасывании \forall вектора сем-во не является сем-вом образующих

Теорема (Равносильные утверждения)

1.

$\{v_\alpha\}$ - базис V над полем K

2.

$\{v_\alpha\}$ - макс. ЛНЗ сем-во

3.

$\{v_\alpha\}$ - мин. семейство образующих

4. $\forall v \in V$ единственным образом представим в виде лин. комбинации векторов из $\{v_\alpha\}$

2. Конечномерные пространства. Всякое линейно независимое семейство конечномерного пространства можно дополнить до базиса. Существование базиса конечномерного пространства.

Опр

V - в.п. над полем K , V называется конечномерным, если в V есть конечное сем-во образующих.

Теорема

Всякое линейно независимое сем-во конечномерного пространства можно дополнить до базиса.

Следствие

Во всяком конечномерном в.п. есть базис.

Док-во

Пустое сем-во ЛН

Дополним до базиса

3. Всякое семейство образующих конечномерного пространства содержит базис. Существование базиса конечномерного пространства.

Теорема

V - конечномерное в.п. над K Всякое сем-во образующих содержит базис.

Док-во

$\{u_1, \dots, u_k\}$ - сем-во

если $\{u_1, \dots, u_k\}$ - ЛНЗ, то это базис

иначе $\exists i : v_i$ - лин. комб. остальных

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k\}$ - сем-во образующих

сем-во конечно \Rightarrow процесс оборвется \Rightarrow

\Rightarrow получим ЛНЗ подсемейство, явл. образующим

Теорема

Во всяком конечномерном в.п. есть базис

Док-во

Пустое сем-во ЛНЗ

Дополним до базиса

4. Подпространства векторного пространства. Подпространство конечномерного пространства конечномерно.

Опр

V - в.п над полем K

$\emptyset \neq U \subseteq V$ U - подпр-во V , если

U - само явл. в.п. над K

Предположение (1)

$\emptyset \neq U \subseteq V$ U - подпр-во $V \Leftrightarrow$

1.

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U$$

2.

$$\forall u \in U \quad \forall a \in K \quad au \in U$$

(Операции, которые должны быть определены в векторном пр-ве)

\Rightarrow раз U - в.п. над полем K , эти операции определены

\leftarrow Операции определены, но в.п ли это? Надо проверить аксиомы в.п (комм., ассоц. сложения, $\exists 0$, обратного отно-но сложения, ассоц. умножения, $\exists 1$, две дистрибутивности)

Предположение (2)

V - конечномерное в.п над K

$U \subseteq V \Rightarrow U$ - конечномерное

Док-во

$$\{ \quad \} \subseteq U$$

Будем добавлять к этом сем-ву вектора с сохранением условия ЛН до тех пор, пока не получим семейство образующих U

В V есть конечное сем-во образующих

$U \subseteq V$ не может быть больше, чем векторов в сем-ве образующих $V \Rightarrow$ процесс оборвется, и мы найдем конечный базис

5. Теорема о мощности базиса конечномерного пространства. Размерность пространства.

Теорема

V - конечномерное пространство

$\{v_1, \dots, v_n\}, \{u_1, \dots, u_m\}$ - базисы V над K

$$\Rightarrow n = m$$

Док-во

u_1, \dots, u_m - лин.комб v_1, \dots, v_n

по т. о линейной зависимости лин. комбинаций

$$m \leq n \text{ и обратно } m \geq n \Rightarrow m = n$$

Опр

Размерность конечномерного в.п - кол-во векторов в базисе

$$\dim V$$

Если V не конечномерно, $\dim V = \infty$

6. Координаты вектора в данном базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат при замене базиса. Матрица преобразования координат.

Опр

V - в.п. над полем K

$n = \dim V < \infty$

v_1, \dots, v_n - базис V над K

$v \in V \quad \exists$ единственный набор $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i \forall i$ - координаты вектора v в базисе $\{v_1, \dots, v_n\}$

$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Пусть v_1, \dots, v_n - базис V

v'_1, \dots, v'_n - другой базис V

$v'_i = c_{1i} v_1 + \dots + c_{ni} v_n$

$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c_{1n} & & & c_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица перехода от базиса

(v_1, \dots, v_n) к базису (v'_1, \dots, v'_n)

$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$

$v_i = b_{1i} v'_1 + \dots + b_{ni} v'_n$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{n1} \\ b_{12} & & \\ & & \\ b_{1n} & & b_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица перехода от базиса (v'_1, \dots, v'_n)

к базису (v_1, \dots, v_n)

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$v = a'_1 v'_1 + \dots + a'_n v'_n$$

C - матрица перехода от (v_1, \dots, v_n) к (v'_1, \dots, v'_n)

$$C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{1i} & & c_{1n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & & & c_{nn} \end{pmatrix} = D - \text{матрица преобразования координат}$$

Теорема (В указанных выше обозначениях)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

Док-во

$$v = (a'_1, \dots, a'_n) \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = (a'_1, \dots, a'_n) \cdot C \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$v = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

В силу единственности разложения по базису

$$(a_1, \dots, a_n) = (a'_1, \dots, a'_n) \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

7. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения.

Теорема

1. Сумма является подпространством

$$U_1 + \dots + U_m$$

$$0 = 0 + \dots + 0 \in U_1 + \dots + U_m \Rightarrow \text{сумма} \neq \emptyset$$

$$\forall u, v \in U_1 + \dots + U_m$$

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_m$$

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_m$$

$$u + v = \underbrace{(u_1 + v_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(u_2 + v_2)}_{\in U_2} + \dots + \underbrace{(u_m + v_m)}_{\in U_m} \in U_1 + \dots + U_m$$

умножение на скаляр аналогично

2. Пересечение является подпространством

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \ni u, v \quad a \in K$$

$$\begin{array}{ll} u + v \in U_i & u + v \in \bigcap_{i=1}^n U_i \\ \forall i \quad u, v \in U_i & \\ au \in U_i & au \in \bigcap_{i=1}^n U_i \end{array}$$

не пусто, т.к.

$$0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq V$$

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq U_1 \subseteq U_1 + U_2 \supseteq U_2 \supset \bigcap_{i=1}^n U_i$$

Теорема

$U_1, U_2 \subseteq V$ U_1, U_2 - конечномерные

Тогда $U_1 \cap U_2$ и $U_1 + U_2$ - конечномерны

$$\text{и } \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$$

Док-во

$U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ - конечномерно

$\Rightarrow U_1 \cap U_2$ - конечномерно

w_1, \dots, w_r - базис $U_1 \cap U_2$, ЛНЗ сем-во в U_1

Дополним до базиса U_1

$w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s$ - базис U_1

Аналогично w_1, \dots, w_r дополним до базиса U_2

$w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_t$ - базис U_2

Проверим, что $w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t$ - базис $U_1 + U_2$

1. Семейство образующих

$$z \in U_1 + U_2 \quad z = z_1 + z_2 \quad z_1 \in U_1 \quad z_2 \in U_2$$

$$z_1 = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s$$

$$z_2 = c_1 w_1 + \dots + c_r w_r + d_1 v_1 + \dots + d_t v_t$$

$$z = (a_1 + c_1)w_1 + \dots + (a_r + c_r)w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s + d_1 v_1 + \dots + d_t v_t$$

$$\Rightarrow w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t - \text{сем-во образующих}$$

2. ЛНЗ

$$(*) 0 = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s + c_1 v_1 + \dots + c_t v_t$$

$$z = \underbrace{a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 u_1 + \dots + b_s u_s}_{\in U_1} = \underbrace{-c_1 v_1 - \dots - c_t v_t}_{\in U_2}$$

$$z \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow z = d_1 w_1 + \dots + d_r w_r =$$

$$= d_1 w_1 + \dots + d_2 w_2 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_s$$

В силу единственности разложения по базису U_1

$$b_1 = b_2 = \dots = b_s = 0$$

$$\text{Из } (*) \Rightarrow a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + c_1 v_1 + \dots + c_t v_t = 0$$

т.к. $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_t$ - базис U_2 , то

$$a_1 = \dots = a_r = c_1 = \dots = c_t = 0$$

$$\Rightarrow w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t - \text{ЛНЗ}$$

8. Прямая сумма подпространств. Эквивалентные переформулировки понятия прямой суммой подпространств.

Опр

V - в.п. над K

$$U_1, \dots, U_m \subseteq V$$

$U_1 + \dots + U_m$ назыв. прямой суммой, если любой $z \in U_1 + \dots + U_m$

единственным образом представим в виде суммы

$$z = u_1 + u_2 + \dots + u_m \quad u_i \in U_i \quad i = 1, \dots, m$$

Обозначение: $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$

Замечание

Сумма $U_1 + \dots + U_m$ - прямая \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow 0 = u_1 + \dots + u_m \quad u_i \in U_i$$

$$\Rightarrow u_1 = \dots = u_m = 0$$

Док-во

\Rightarrow очевидно

$$\leftarrow z \in U_1 + \dots + U_m$$

$$z = u_1 + \dots + u_m$$

$$z = v_1 + \dots + v_m$$

$$0 = z - z = \underset{\in U_1}{(u_1 - v_1)} + \dots + \underset{\in U_m}{(u_m - v_m)}$$

$$\forall i \quad u_i - v_i = 0 \text{ т.е. } u_i = v_i$$

Предположение (1)

Сумма $U_1 + U_2$ - прямая $\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Предположение (2)

Сумма U_1+U_2 - прямая \Leftrightarrow объединение базисов U_1 и U_2 - есть базис U_1+U_2

Предположение (3)

$U_1 + \dots + U_m$ - прямая \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m \quad U_i \cap (U_i + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_m) = \{0\}$

Предположение (4)

Сумма $U_1 + \dots + U_m$ - прямая \Leftrightarrow

\Leftrightarrow объединение базисов $U_i \quad i = 1, \dots, m$ - базис $U_1 + \dots + U_m$

9. Построение кольца многочленов.

Опр

R - комм. кольцо с 1

$$R[x] = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) : a_i \in R \quad i = 0, \dots \text{ п.в } a_i = 0\}$$

$$(a_0, a_1, \dots), (b_0, b_1, \dots) \in R[x]$$

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$\forall n > N \quad a_i = 0$$

$$\forall m > M \quad b_i = 0 \Rightarrow \forall i > \max(N, M) \quad a_i + b_i = 0$$

$$(a_0, a_1, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots) = (c_0, c_1, \dots)$$

$$c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$\forall n > N \quad a_n = 0$$

$$\forall m > M \quad b_m = 0$$

$$\forall k > N + M \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^N a_i b_{k-i} + \sum_{i=N+1}^k a_i b_{k-i} = 0$$

$$i \leq N \quad k - i \geq k - N > N + M - N = M$$

Теорема

$(R[x], +, \cdot)$ – комм. кольцо с 1

Опр

$$0 = (0, 0, \dots)$$

$$1 = (1, 0, \dots)$$

$R[x] \supset \{(a, 0, \dots); a \in R\}$ - подкольцо изоморфное R

$$(a, 0, \dots) + (b, 0, \dots) = (a + b, 0, \dots)$$

$$(a, 0, \dots) \cdot (b, 0, \dots) = (ab, 0, \dots)$$

Опр

$(a, 0, \dots) = a$ (обозначение)

$$x = (0, 1, 0, \dots)$$

$$x^i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots)$$

$$\begin{aligned}(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) &= (a_0, 0, \dots) + (0, a_1, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, a_n, 0, \dots) = \\ &= a_0 \cdot 1 + a_1(0, 1, \dots) + \dots + a_n(0, \dots, 1, \dots) =\end{aligned}$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

10. Степень многочлена. Свойства степени. Область целостности.

Кольцо многочленов над областью целостности есть область целостности.

Опр

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$$

наиб. m , т.ч. $a_m \neq 0$ назыв. степенью f
 $\deg f - degree$

$$\deg 0 = -\infty$$

Опр

ком. кольцо R с 1 назыв. областью целостности (или кольцом без делителей 0)

$$\text{Если } \forall a, b \in R \quad (ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0)$$

$$\forall a, b \in R \quad (a \neq 0 \quad b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0)$$

\mathbb{Z} - о.ц.

любое поле - о.ц

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ - не о.ц. $[a][b] = [m] = [0]$

Теорема (Свойства степени)

1.

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$$

$$\text{Если } \deg f \neq \deg g, \text{ то } \deg(f, g) = \max(\deg f, \deg g)$$

2.

$$\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$$

$$\text{Если } R - \text{о.ц, то } \deg(fg) = \deg f + \deg g$$

Док-во

1)

$$N = \deg f \quad M = \deg g$$

$$f = \sum_{i=0}^N a_i x^i \quad g = \sum_{i=0}^M b_i x^i$$

$$\forall n > \max(N, M) \quad a_n + b_n = 0 \Rightarrow \deg(f + g) \leq \max(N, M)$$

Равенства в общ. случае нет

$$\text{Если } N = M \quad a_N = -b_N \Rightarrow a_N + b_N = 0$$

$$\text{Если } N \neq M \quad \square N < M$$

$$a_M + b_M = 0 + b_M = b_M \neq 0$$

2)

$$fg = \sum_{i=0} c_i x^i \quad c_i = 0 \text{ для всех } i > N + M$$

$$\deg(fg) \leq N + M = \deg f + \deg g$$

$$c_{N+M} = a_N b_M \quad \text{в общем случае:}$$

$$\text{Если } R \text{ не о.ц, } a_N \neq 0 \quad b_M \neq 0 \text{ то } a_N \cdot b_M \text{ м.б } = 0$$

$$\text{Если } R - \text{о.ц, то } a_N \neq 0 \quad b_M \neq 0 \Rightarrow c_{NM} \neq 0$$

$$\Rightarrow \deg fg = \deg f + \deg g$$

Следствие

$$\text{Если } R - \text{о.ц, то } R[x] - \text{о.ц}$$

$$f, g \in R[x] \quad f \neq 0 \quad g \neq 0$$

$$\deg f \geq 0 \quad \deg g \geq 0$$

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g \geq 0 \Rightarrow \text{в } fg \text{ есть хотя бы один ненулевой коэф.}$$

$$\Rightarrow fg \neq 0$$

$$\text{Если } K - \text{поле} \quad K[x] - \text{о.ц}$$

Опр

$$R \quad R[x_1]$$

$$R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$$

$$R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n]$$

$$R - \text{о.ц} \Rightarrow R[x_1, \dots, x_n] - \text{о.ц}$$

11. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов.

Теорема R - комм. к. с ед.

$$f, g \in R[x]$$

$$g = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \in R^* \text{ обр. элем.}$$

 $\Rightarrow \exists!$ мн-ны q и r такие, что

$$f = qg + r \quad \deg r < \deg g$$

ПримерВ кольце $\mathbb{Z}[x]$ $x^2 + 1$ нельзя поделить на $2x + 1$

12. Корни многочлена. Теорема Безу.

Опр R - ком. кольцо с 1

$$R[x] \ni f \quad f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

для данного мн-на опред. отображение

$$c \rightarrow a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n = f(c)$$

отобр. из R в R Замечание

Разные мн-ны могут задавать одно и то же отображение

$$\mathbb{Z}_2 \mathbb{Z} \quad f = 0 \quad 0 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 0$$

$$f = x^2 + x \quad 0 \rightarrow 0 \quad 1 \rightarrow 0$$

Опр $f \in R[x] \quad c$ - корень f Если $f(c) = 0$

$$(f + g)(c) = f(c) + g(c)$$

$$(f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c)$$

Теорема (Безу)

$$f \in R[x] \quad c \in R$$

$$\exists q \in R[x] \quad f = (x - c)q + f(c)$$

Док-во $g = x - c$ по т. о делении с остатком

$$\exists q, r \in R[x]$$

$$f = (x - c)q + r$$

$$\deg r < \deg g = 1$$

$$\deg r \leq 0 \Rightarrow r \in R$$

$$f(c) = (c - c) \cdot q(c) + r = r$$

$$r = f(c)$$

Следствие

c - корень $f \Leftrightarrow (x - c) \mid f$

Док-во

$$\Rightarrow f(x) = (x - c)q(x) + f(c) = (x - c)q(x)$$

$$\leftarrow f(x) = (x - c)q(x)$$

$$f(c) = (c - c)q(c) = 0$$

13. Кратные корни многочлена. Теорема о числе корней многочлена над полем.

Опр

K - поле $K[x]$

$f \in K[x]$

a - корень f кратности k , если $(x - a)^k \mid f$ и $(x - a)^{k+1} \nmid f$

$f(x) = (x - a)^k \cdot g(x) \quad (x - a) \nmid g$

$f(x) = (x - a)^k \cdot g(x) \quad g(a) \neq 0$

Замечание

a - корень f_1 кратности k_1

a - корень f_2 кратности k_2

$\Rightarrow a$ - корень $f_1 \cdot f_2$ кратности $k_1 + k_2$

$f_1(x) = (x - a)^{k_1} g_1(x) \quad g_1(a) \neq 0$

$f_2(x) = (x - a)^{k_2} g_2(x) \quad g_2(a) \neq 0$

$f_1(x) f_2(x) = (x - a)^{k_1 + k_2} g_1(x) g_2(x)$

$g_1(a) g_2(a) \neq 0$ поле K - о.ц.

Лемма

$f, g, h \in K[x]$

$b \in K$ b - не корень h

$f(x) = h(x)g(x)$

b - корень $f \Rightarrow b$ - корень g той же кратности

Теорема

K - поле, $f \in K[x] \quad f \neq 0$

\Rightarrow число корней с учетом их кратности не превосходит $\deg f$

Замечание

Теор. не верна для $f \in R[x]$ (в случае произвольного комм. кольца R)

$$R = \mathbb{Z}/_8\mathbb{Z}$$

$$x^2 = [1] \in R[x]$$

корни 1, 3, 5, 7 $\deg f = 2$

Следствие

Если $f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0$

для попарно различных a_1, \dots, a_n ; $n > \deg f$, то $f = 0$

14. Функциональное и формальное равенство многочленов.

Опр

$$f, g \in K[x] \quad |K| > \max(\deg f, \deg g)$$

если f и g совп. функционально, то $f = g$

Замечание

для беск. полей из функ. равенства мн-ов следует формальное

15. Характеристика поля.

Опр

K - поле $1 \in K$

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_n$$

Если $n \cdot 1 \neq 0$ для всех $n \geq 1$, то говорят, что поле K имеет х-ку 0
 $\text{char} K = 0$

Если $\exists n \geq 1 \quad n \cdot 1 = 0$, то наименьшее такое положительное n называют х-кой K

Примеры

$\text{char } \mathbb{Q} = 0, \text{char } \mathbb{R} = 0, \text{char } \mathbb{C} = 0$

p - простое $\text{char}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

Теорема

Характеристика поля либо 0, либо простое число

Док-во

1) не $\exists n \geq 1 \quad n \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{char} K = 0$

2) $n \cdot 1 = 0$ возьмем наим. n и покажем, что n - простое

\square n - сост. $n = ab \quad 1 < a, b < n$

$$0 = \underbrace{1 + \dots + 1}_n = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_a \underbrace{(1 + \dots + 1)}_b$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 + \dots + 1}_a = 0 \text{ или } \underbrace{1 + \dots + 1}_b = 0$$

противоречие с $\min n$

$$\Rightarrow n \text{ не сост.}; 1 \neq 0 \Rightarrow n \neq 1$$

$\Rightarrow n$ - простое

16. Производная многочлена. Свойства производной. Многочлены с нулевой производной.

Опр

K - поле

$$f(x) \in K[x]$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n (k a_k) x^{k-1}$$

$$k \cdot a_k = \underbrace{a_k \cdot \dots \cdot a_k}_k$$

Теорема (Свойства)

1.

$$(f + g)' = f' + g'$$

2.

$$c \in K \quad (c \cdot f)' = c f'$$

3.

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$

(a)

$$f = x^n \quad g = x^m$$

$$(x^{n+m})' = (n + m)x^{n+m-1}$$

$$(x^n)'x^m + x^n(x^m)' = nx^{n-1} \cdot x^m + mx^n \cdot x^{m-1} = (n + m)x^{n+m-1}$$

(b)

$$f = x^n \quad g = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)' &= \left(\sum_{k=0}^m a_k x^n x^k \right)' = \sum_{k=0}^m a_k (x^n \cdot x^k)' = \\
 &= \sum_{k=0}^m a_k ((x^n)' \cdot x^k + x^n (k x^{k-1})) = \\
 (x^n)' \sum_{k=0}^m a_k x^k + x^n \left(\sum_{k=0}^m k a_k x^k \right) &= f' g + f g'
 \end{aligned}$$

(с)

f, g - произвольные

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{k=0}^n b_k x^k \\
 (fg)' &= \sum_{k=0}^n b_k (x^k g)' = \left(\sum_k b_k \cdot k x^{k-1} \cdot g \right) + \left(\sum_k b_k x^k \cdot g' \right) = \\
 &= f' g + f g'
 \end{aligned}$$

(d) Ф-ла Лейбница

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)} g^{(k-i)}$$

(е) Если $\text{char } K = 0 \Rightarrow f' = 0 \Leftrightarrow f \in K$
 Если $\text{char } K = p > 0$ то $f' = 0 \Leftrightarrow f \in K[x^p]$

$$(\text{т.е. } f = a_0 + a_p x^p + \dots + a_{kp} x^{kp})$$

17. Теорема о кратности

Теорема

K - поле $\text{char} K = 0$

$$f \in K[x] \quad a - \text{корень } f \text{ кр. } l \geq 1$$

тогда a - корень f' кр. $l - 1$

Замечание

Если $\text{char} K = p > 0$, то теор. не верна

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad f = x^{2p+1} \quad 0 - \text{корень кр. } p$$

$$f' = (2p+1)x^{2p} + px^{p-1} = x^{2p} \quad 0 - \text{корень кр. } 2p$$

18. Интерполяционная задача. Существование и единственность решения.

для интерпол. задачи

x	$a_1 \dots a_n$
f	$y_1 \dots y_n$

$\exists!$ решение f степени $< n$

Док-во

1) ед

f, h - решают одну и интер. задачу

$$\deg f, \deg h < n$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad f(a_i) = h(a_i) = y_i \quad f(a_i) - h(a_i) = 0$$

$f - h$ имеет $\geq n$ корней, а степ. $< n$

$$f - h = 0 \Rightarrow f = h$$

(теорема о числе корней мн-на)

2) существование

$$1 \text{ сл } f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

$$c_0 + c_1 a_i + \dots + c_{n-1} a_i^{n-1} = y_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \prod_{j>i} (a_j - a_i) \neq 0$$

A - обр.

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

19. Интерполяционный метод Ньютона.

Опр

x	a_1	$a_i \dots a_n$
$f(x)$	y_1	$y_i \dots y_n$

f_{i-1} - интерпол. мн-ен степени $\leq i - 1$

и решающий интерпол. задачу для первых i точек

$$f_0(x) = y_1$$

$$f_0(a_1) = y_1$$

\square построили f_{i-1} Ищем f_i

$$(f_i - f_{i-1})(a_j) = 0 \quad j = 1, \dots, i$$

$$f_i(x) = f_{i-1}(x) + c_i \cdot (x - a_1) \dots (x - a_i)$$

$$\deg f_i \leq i$$

$$y_{i+1} = f_i(a_{i+1}) = f_{i-1}(a_{i+1}) + c_i(a_{i+1} - a_1) \dots (a_{i+1} - a_i)$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - f_{i-1}(a_{i+1})}{(a_{i+1} - a_1) \dots (a_{i+1} - a_i)}$$

20. Интерполяционный метод Лагранжа.

Опр

x	a_1	a_{j-1}	a_j	a_{j+1}	a_n
$f(x)$	0	0	1	0	0

$$L_j(x) = a_j(x - a_1) \dots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \dots (x - a_n)$$

$$L_j(a_j) = 1$$

$$L_j(x) = \frac{(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{(a_j - a_1) \cdot \dots \cdot (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdot \dots \cdot (a_j - a_n)}$$

$L_j(x)$ - интерп. мн-ен Лагранжа

$$L_j(a) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \begin{aligned} \deg L_j(x) &= n - 1 \\ \deg f &\leq n - 1 \end{aligned}$$

x	a_1	a_n
$f(x)$	y_1	y_n

$$f(x) = \sum_{j=1}^n y_j L_j(x) \quad f(a_i) = \sum_{j=1}^n y_j L_j(a_j) = y_i L_i(a_i) = y_i$$

Мн-ен Лагранжа исп. в алг. быстрого умножения

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ алг. умн., который для n -разрядных чисел требует $O(n^{1+\varepsilon})$ поразрядных операций

21. Делимость и ассоциированность в кольце многочленов над полем.

Опр K - поле, $K[x]$ $f, g \in K[x]$ ассоциирован, если

$$f \mid g \text{ и } g \mid f$$

$$f \sim g \quad : \quad f \text{ и } g \text{ ассоц.}$$

$$0 \sim 0$$

 0 с другими не ассоц.

$$f \neq 0 \quad g \neq 0 \quad f \mid g \quad g \mid f$$

$$\deg f \leq \deg g \quad \deg g \leq \deg f$$

$$\Rightarrow \deg f = \deg g$$

$$f = c \cdot g \quad c \in K^* = K \setminus \{0\}$$

$$0 = 1 \cdot 0$$

$$\text{Если } f = c \cdot g, c \in K^* \quad g = c^{-1}f \Rightarrow g \mid f, \quad f \mid g$$

Следствие

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists c \in K^* \quad f = cg$$

Если $f \neq 0$, то в классе ассоц. с f мн-нов всегда можно выбрать мн-ен со старшим коэф 1.

Мн-ен со старшим коэф. 1 назыв. унитарным, приведенным

Замечание

$$f \mid g \quad f \sim f_1 \quad g \sim g_1$$

$$\Rightarrow f_1 \mid g_1$$

$$g = f \cdot h$$

$$cg = f(ch)$$

$$g = (cf)(c^{-1}h)$$

22. Наибольший общий делитель в кольце многочленов над полем.
Существование и линейное представление.

Опр

K - поле, $K[x]$

$f_1, \dots, f_n \in K[x]$

g - НОД f_1, \dots, f_n , если

$g \mid f_1, \dots, g \mid f_n$

и $\forall h \quad (h \mid f_1, \dots, h \mid f_n) \Rightarrow h \mid g$

Замечание

НОД опред. не однозначно, а с точностью до ассоц.

$\text{НОД}(0, \dots, 0) = 0$

Если хотя бы один $f_1 \dots f_n \neq 0$, то в классе ассоц. с НОД можно выбрать приведенный

Теорема

$\forall f_1, \dots, f_n \in K[x]$

Существует $g = \text{НОД}(f_1, \dots, f_n)$ и он допускает лин. предствление

$g = f_1 h_1 + \dots + f_n h_n$ для нек. $h_1 \dots h_n \in K[x]$

Док-во

1)

$f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0 \quad \text{НОД}(0, \dots, 0) = 0$

Положим $h_1 = \dots = h_n = 1$

2)

$\exists i \quad f_i \neq 0$

$I = \{f_1 h_1 + \dots + f_n h_n : h_1 \dots h_n \in K[x]\}$

$I \neq \{0\} \quad 0 \neq f_i \in I$

g - минимальная степень в $I \setminus \{0\}$

Утверждается, что g - НОД(f_1, \dots, f_n)

$$\begin{aligned} f_j &= g \cdot u_j + r_j & r_j &= 0 \text{ или} \\ r_j &= -g \cdot u_j + f_i & \deg r_j &< \deg g \\ &= -h_1 u_j f_1 - h_2 u_j f_2 + (-h_j u_j + 1) f_i - \dots \\ g &= h_1 f_1 + \dots + h_n f_n & r_j &\in I \end{aligned}$$

Т.к.

$\deg r_j < \deg g$ а степень g минимальная в $I \setminus \{0\}$

то $r_j = 0$

$$f_j = g u_j \quad g \mid f_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$h \mid f_i, \dots, h \mid f_n$$

$$g = \underbrace{f_1 h_1}_{\ddot{h}} + \dots + \underbrace{f_n h_n}_{\ddot{h}} : h \Rightarrow h \mid g$$

23. Взаимно простые многочлены. Свойства взаимно простых многочленов.
Если многочлен делит произведение двух многочленов и взаимно прост с первым сомножителем, то он делит второй сомножитель.

Опр

$f_1, \dots, f_n \in K[x]$ назыв. взаимно простыми, если $\text{НОД}(f_1, \dots, f_n) \sim 1$

Теорема (Свойства)

1. Если $g \sim \text{НОД}(f_1, \dots, f_n)$ (не все $f_i = 0$)

то $\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}$ - взаимно просты

2. f_1, \dots, f_n - вз. просты $\Leftrightarrow 1$ допускает лин. представление

$$1 = h_1 f_1 + \dots + h_n f_n \quad h_i, \dots, h_n \in K[x]$$

Док-во

См. док-ва для \mathbb{Z} (Спасибо, Всемиров)

Теорема

$f \mid gh$ и f и g - вз. просты $\Rightarrow f \mid h$

Док-во

$$\exists u, v \in K[x]$$

$$fu + gv = 1$$

$$\underset{\ddot{f}}{f} u h + g h v = h \quad \Rightarrow h \underset{\ddot{f}}{:} f$$

24. Неприводимые многочлены. Теореме о разложении многочлена в произведение неприводимых (существование).

Опр

$$K[x] = \{0\} \cup K^* \cup \{\text{мн-ны ст } \geq 1\}$$

$f \in K[x] \setminus K$ назыв. сост, если (или приводимым)

$$f = gh \quad 1 \leq \deg g, \deg h < \deg f$$

в противном случае f - назыв. неприводимым

f - неприводим, если ($f = gh \Rightarrow \deg h = 0$ или $\deg g = 0$)

Опр

f - неприв. \Leftrightarrow все делители f - это константы и мн-ны $\sim f$

Примеры

$x - a$ неприводим при любом a

$x^2 + 1$ неприводим в $\mathbb{R}[x]$

$x^2 + 1$ в $\mathbb{C}[x]$ приводим $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

В $\mathbb{R}[x]$ $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ - приводим, но корней нет

Если $\deg f \geq 2$ есть корень в K ,

то f - приводим в $K[x]$

$$f = (x - a)g \quad (\text{по т. Безу})$$

Обратное неверно. Но для мн-нов степени 2 и 3 неприводимость в $K[x]$ равносильна отсутствию корней в K

Теорема

$f \in K[x]$ f - неприводим

$$f \mid g_1 \cdot \dots \cdot g_n \Rightarrow \exists i : f \mid g_i$$

Теорема (Основная теорема арифметики в кольце многочленов.)

Всякий ненулевой $f \in K[x]$ может быть представлен в виде

$$c \cdot \prod_{i=1}^n g_i$$

$c \in K^*$, а все g_i - приведенные неприводимые мн-ны. Причем такое произведение ед. с точностью до порядка сомножителей.

Замечание

Для $f = c \in K^* \quad n = 0$

Лемма (1)

Всякий $f \quad \deg f \geq 1$ делится хотя бы на один неприводимый.

Док-во

f - непр - все доказано

Если приводим, то $f = f_1 \cdot g_1 \quad 1 \leq \deg f_1 < \deg f$

Если f_1 неприв, то делитель найден

Если приводим $f_1 = f_2 g_2 \quad q \leq \deg f_2 \leq \deg f_1$

$\deg f > \deg f_1 > \dots$ процесс оборвется

\Rightarrow Найдем неприв. делитель f

Док-во (Существование)

Инд. по $\deg f$

1)

$$\deg f = 0 \quad f = c \in K^* \quad f = c \cdot \left(\prod_{i=1}^0 g_i \right)$$

инд. переход $\deg f > 0$

по лемме \exists неприв. $g_1 \quad g_1 \mid f$

не умаляя общности g_1 - приведенный (с коэф. 1)

$$f = g_1 f_1 \quad \deg f_1 < \deg f - \deg g_1 < \deg f$$

По инд. предп.

$$f_1 = c \prod_{i=2}^n g_i \quad g_i - \text{прив. неприв.}$$

$$f = f_1 g_1 = c \prod_{i=1}^n g_i$$

25. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых (единственность).

Док-во

$$(*) \quad f = c \prod_{i=1}^n g_i = \tilde{c} \prod_{i=1}^m \tilde{g}_i$$

$$\Rightarrow n = m \quad c = \tilde{c} \text{ иначе перенумеруем сомнож. } g_i = \tilde{g}_i$$

Не умоляя общ. $n \leq m$

Инд. по n

$$n = 0 \quad c = \tilde{c} \prod_{i=1}^n \tilde{g}_i$$

$$\Rightarrow m = 0 \quad \tilde{c} = c$$

Инд. переход

$$g_n \mid \tilde{c} \prod_{i=1}^m \tilde{g}_i \Rightarrow \exists i \quad g_n \mid \tilde{g}_i$$

$$\tilde{c} \neq 0$$

Не умоляя общности $i = m$ (иначе перенумеруем)

$$g_n \mid \widetilde{g_m} \Rightarrow g_n = \widetilde{g_m}$$

В $(*)$ сократим на g_n

$$c \prod_{i=1}^{n-1} g_i = \tilde{c} \prod_{i=1}^{m-1} \tilde{g}_i \quad n-1 \leq m-1$$

По инд. предп. $n-1 = m-1 \quad (\Rightarrow n = m)$

$$c = \tilde{c} \text{ (после перенумерования)}$$

$$g_i = \tilde{g}_i \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$g_n = \tilde{g}_n$$

26. Алгебраически замкнутые поля. Эквивалентные переформулировки.
Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. (б.д.)

Теорема

$\square K$ - поле, рассмотрим $K[x]$

Следующие условия равносильны

1. Все неприводимые в $K[x]$ - это в точности линейные мн-ны
2. Всякий мн-н $f \in K[x], \deg f > 0$ раскладывается в произведение лин. множителей
3. Всякий $f \in K[x], \deg f > 0$ делится на линейный
4. Всякий $f \in K[x], \deg > 0$ имеет в K хотя бы 1 корень
5. Всякий $f \in K[x], \deg f > 0$ имеет в K в точности $n = \deg f$ корней с учетом кратности

Опр

Если для $K \subset K[x]$ выполнено любое из равносильных усл., то K назыв. алгебр. замкн.

Примеры

\mathbb{R}, \mathbb{Q} не алг. замкнуты

Любое конечное поле не алг. замкнуто

$$|F| = q \quad \deg f = n > q$$

Теорема (б.д.)

\mathbb{C} - алг. замк.

Следствие

$$f \in \mathbb{C}[x] \quad \deg f > 0$$

$$f = c \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{d_i} \quad a_i, c \in \mathbb{C}$$

27. Неприводимые многочлены над полем вещественных чисел. Теорема о разложении многочлена с вещественными коэффициентами в произведение неприводимых над \mathbb{R} .

Опр

Неприводимы:

$$x - c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + ax + b \quad a^2 - 4b < 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ (нет корней)}$$

Теорема

Всякий неприв. в $\mathbb{R}[x]$ ассоциирован с лин. или квадратичным с отр. дискр.

Следствие

$$f \in \mathbb{R}[x] \quad f \neq 0$$

$$f = c \prod_{i=1}^m (x - c_i)^{d_i} \prod_{j=1}^k (x^2 + a_j x + b_j)^{l_j} \quad a_j^2 - 4b_j < 0$$

Лемма

$$f \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$$

Если $z \in \mathbb{C}$ - корень f , то \bar{z} - корень f

Док-во

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$$

$$\overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \bar{0} = 0 \text{ (сопряжение)}$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n} (\bar{z})^n$$

$$a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n = f(\bar{z})$$

28. Поле частных области целостности. Поле частных кольца многочленов (поле рациональных функций).

Опр

R - комм. кольцо с 1, о.ц.

Хотим построить поле K , содержащее подкольцо изоморфное R , состоящее из "дробей"

$$X = R \times (R \setminus \{0\}) = \{(a, b) : a \in R, b \in R, b \neq 0\}$$

На X введем отношение эквив.

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ если } ad = bc$$

\sim - отношение эквив.

$$(a, b) \sim (a, b)$$

$$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$$

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (c, d) \\ (c, d) \sim (e, f) \end{aligned} \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$$

$$\frac{a}{b} = [(a, b)] - \text{класс эквив.}$$

$K = X_{/\sim}$ На K введем структуру поля

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0 \quad d \neq 0 \Rightarrow bd \neq 0 \quad (ac, bd) \in X$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (ad + bc, bd) \in X$$

Корректность определения (независимость от выбора представителя в классе)

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \quad \frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1} \quad \begin{aligned} ab_1 &= ba_1 \\ cd_1 &= dc_1 \end{aligned}$$

$$(ac, bd) \sim (a_1c_1, b_1d_1) \quad acb_1d_1 = bda_1c_1$$

$$(ad + bc, bd) \sim (a_1d_1 + b_1c_1, b_1d_1)$$

$$adb_1d_1 + bcb_1d_1 = bda_1d_1 + bdb_1c_1$$

$$\begin{aligned} + \quad ab_1 &= ba_1 \mid \cdot dd_1 \\ cd_1 &= dc_1 \mid \cdot bb_1 \end{aligned}$$

Теорема

$K, +, \cdot$ - поле

Опр

Поле K назыв. полем частных кольца R

Примеры

\mathbb{Q} - поле частных \mathbb{Z}

$K[x]$ - о.ц

Поле частных $K[x]$ обознач. $K(x)$ и назыв. полем рац. дробей или полем рац. функций

Рац. функ. не есть функции в смысле отобр.

29. Простейшие дроби. Разложение рациональной функции в сумму многочлена и простейших дробей. (существование).

Опр

$K(x)$ K - поле

$$0 \neq \frac{f}{g} \in K(x) \quad f, g \in K[x]$$

$\frac{f}{g}$ - правильная, если $\deg f < \deg g$

Лемма (1)

$$\frac{f}{g}; \quad \frac{f_1}{g_1} \text{ - прав. дроби} \Rightarrow \frac{f}{g} \cdot \frac{f_1}{g_1}; \quad \frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} \text{ - прав. дроби}$$

Док-во

$$\deg(f \cdot f_1) = \deg f + \deg f_1 < \deg g + \deg g_1 = \deg(g \cdot g_1)$$

$$\frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} = \frac{fg_1 + gf_1}{gg_1}$$

$$\deg(fg_1 + gf_1) \leq \max\{\deg(fg_1), \deg(gf_1)\} < \deg(gg_1)$$

$$\deg(fg_1) = \deg f + \deg g_1 < \deg g + \deg g_1 = \deg(gg_1)$$

$$\deg(gf_1) = \deg g + \deg f_1 < \deg g + \deg g_1 = \deg(gg_1)$$

Опр

Правильная дробь $\frac{f}{g}$ называется примарной, если $g = q^a$, q - неприв. многочлен

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{q^a} \quad \deg f < a \deg q$$

Опр

Дробь назыв. простейшей, если она имеет вид

$$\frac{f}{q^a} \quad q \text{ - неприв } a \geq 1$$

$$\deg f < \deg q$$

Теорема

$$\frac{f}{g} \in K(x) \text{ тогда } \frac{f}{g}$$

единственным образом (с точностью до порядка слагаемых) представима
в виде суммы многочлена и простейших дробей

Лемма (2)

$$\frac{f}{g} \in K(x) \quad \text{Тогда} \quad \frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g}, \quad h \in K(x), \quad \frac{f_1}{g} - \text{прав дробь}$$

Док-во

$$\text{Делим с остатком: } f = gh + f_1, \quad \deg f_1 < \deg g$$

$$\frac{f}{g} = h + \frac{f_1}{g} \quad \frac{f_1}{g} - \text{прав. дробь}$$

Лемма (3)

$$\frac{f}{g} - \text{прав. дробь}, \quad g = g_1 \cdot g_2, \quad \text{НОД}(g_1, g_2) = 1$$

$$\text{Тогда } \frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}, \quad \frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} - \text{прав. дроби}$$

Док-во

По теореме о линейном представлении НОД в $K[x]$

$$\exists u_1, u_2 \in K[x]$$

$$g_1 u_2 + g_2 u_1 = 1 \mid \cdot f$$

$$g_1(u_2 f) + g_2(u_1 f) = f$$

$$g_2(u_1 f) = f - g_1(u_2 f)$$

$$u_1 f = g_1 h_1 + f_1 \quad (\text{делим с остатком})$$

$$f = g_1(u_2f) + g_2(u_1f) = g_1(u_2f) + g_2(g_1h_1 + f_1) = g_1 \underbrace{(u_2f + g_2h_1)}_{=f_2} + g_2f_1 =$$

$= g_1f_2 + g_2f_1$ - надо убедиться, что правильное

$$g_1f_2 = f - g_2f_1$$

$$\deg g_1 + \deg f_2 \leq \max\{\deg f; \deg g_2 + \deg f_1\} < \deg g_1 + \deg g_2$$

$$\deg f_2 < \deg g_2$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f_2}{g_2} + \frac{f_1}{g_1}$$

30. Разложение рациональной функции в сумму многочлена и простейших дробей. (единственность).

Док-во

Не умоляя общности можно считать, что в обоих разложениях одни и те же неприводимые

$$\frac{f}{g} = h + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{a_i} \frac{f_{ij}}{q_i^j}, \deg f_{ij} < \deg q_i = \tilde{h} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{a_i} \frac{\widetilde{f_{ij}}}{q_i^j}, \deg \widetilde{f_{ij}} < \deg q_i$$

Не умоляя общности a_i одни и те же в обеих суммах.

$$h - \tilde{h} - \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^{a_i} \frac{f_{ij} - \widetilde{f_{ij}}}{q_i^j} = 0 \quad (*)$$

Положим не все $f_{ij} - \widetilde{f_{ij}} = 0 \Rightarrow \exists i, j : f_{ij} - \widetilde{f_{ij}} \neq 0$

Для такого i выберем наибольшее j из возможных. В $(*)$ наиб. степени q_i в дроби с ненулевым числителем равна q_i^j

Домножим $(*)$ на общее кратное знаменателей НОК = $q_i^j \cdot ()$ - произв. ост q в каких-то степенях

$$q_i(\dots) + q_i(\dots) + (f_{ij} - \widetilde{f_{ij}}) = 0 \Rightarrow$$

$$\deg(f_{ij} - \widetilde{f_{ij}}) \leq \max(\deg f_{ij}, \deg \widetilde{f_{ij}}) < \deg q_i$$

$$f_{ij} - \widetilde{f_{ij}} = 0?! \Rightarrow \text{в } (*) \text{ все } f_{ij} = \widetilde{f_{ij}}, \quad h = \tilde{h}$$

31. Факториальные кольца. Содержание многочлена над факториальным кольцом. Содержание произведения многочленов.

Опр

R - о.ц

$$a \notin \{0\} \cup R^*$$

назыв неприводимым, если

$$a = bc \Rightarrow b \in R^* \text{ и } c \sim a$$

$$\text{или } c \in R^* \text{ и } b \sim a$$

(все делители a есть либо обр. элем R либо ассоц. с a)

Опр

О.ц. R называется факториальным кольцом, если в нем справедлива т-ма об однозначном разложении на множ., а именно, всякий ненулевой необр. элемент R есть произведение неприводимых элементов, причем это разложение ед. с точностью до порядка сомножителей и ассоциированности

$$a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot \dots \cdot q_m \quad q_i, p_i - \text{неприв} \Rightarrow n = m \text{ и}$$

$$\exists \text{ биекция } \sigma \text{ на } \{1, \dots, n\}$$

$$p_i = q_{\sigma(i)}$$

$$\mathbb{Z}, K[x] - \text{факт. кольца}$$

В факториальных кольцах можно определить НОД

$$a = \varepsilon_1 \prod_{i=1}^k q_i^{k_i} \quad b = p_1 \prod_{i=1}^n q_i^{l_i} \quad \varepsilon_1, p_1 \in R^* \quad q_i - \text{попарно ассоц. неприв}$$

$$\text{НОД}(a, b) = \prod_{i=1}^n q_i^{\min(k_i, l_i)}$$

$$ab = \varepsilon_1 p_1 \prod_{i=1}^n q_i^{(k_i + l_i)}$$

Опр

Содержание многочлена f

$$\text{cont}(f) = \text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Опр

$f \in R[x]$ называется примитивным, если $\text{cont}(f) \sim 1$

В факториальном кольце \forall многочлен $f \in R[x]$ можно записать как $f(x) = \text{cont}(f) \cdot f_1$ - примитивный

Лемма (Гаусса)

$$\text{cont}(f) = \text{cont}(f) \cdot \text{cont}(g)$$

32. Теорема Гаусса о факториальности кольца многочленов над факториальным кольцом. Факториальность колец $K[x_1, \dots, x_n], \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$

Теорема

R - факториальное кольцо $\Rightarrow R[x]$ - факториальное

Лемма (Гаусса)

$f, g \in R[x]$ f, g - примитивны $\Rightarrow f \cdot g$ - примитивный

Следствие

$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n], K[x_1, \dots, x_n]$ - факториальны

33. Неприводимость над \mathbb{Q} и над \mathbb{Z} . Методы доказательства неприводимости многочленов с целыми коэффициентами (редукция по одному или нескольким простым модулям).

$$f \in \mathbb{Q}[x]$$

Хотим доказать, что f неприв над \mathbb{Q}

Не умоляя общности $f \in \mathbb{Z}[x]$ (можно домножить на знаменатель)

$\text{cont}(f) = 1$ коэфф. в совокупности вз. просты

Идея:

$$f = a_0 + \dots + a_n x^n$$

p - простое $p \nmid a_n$

$$\mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$$

каждый коэфф. заменяем на соотв. вычет

$$f \rightarrow \bar{f} = [a_0] + \dots + [a_n] \cdot x^n$$

Если $p \nmid a_n$ $\deg(\bar{f}) = \deg f$

Если f приводим над \mathbb{Q} , то по т. Гаусса

$$f = gh \quad g, h \in \mathbb{Z}[x]$$

$$\deg g, \deg h < \deg f$$

$$\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$$

Если p не делит страш. коэфф f , то $p \nmid$ страш. коэфф. g и h

$$\deg \bar{g} = \deg g \quad \text{и} \quad \deg \bar{h} = \deg h$$

Тогда приводимость f влечет приводимость \bar{f}

Предположение

$$\text{Если } p \nmid a_n \quad f = a_0 + \dots + a_n x^n \quad \text{cont } f = 1$$

и \bar{f} - неприводим над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то f неприводим над $\mathbb{Z} (\Rightarrow$ и над $\mathbb{Q})$

34. Критерий неприводимости Эйзенштейна.

Теорема

$$f \in \mathbb{Z}[x] \quad f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{cont}(f) = 1$$

p - простое

Если $*p \nmid a_n$

$*p \mid a_i \quad i = 0, \dots, n-1$, то f неприводим над $\mathbb{Z} (\Rightarrow$ и над $\mathbb{Q})$

$*p^2 \nmid a_0$

Док-во

$$\square f = gh \quad g, h \in \mathbb{Z}[x] \quad \deg g, \deg h < n$$

$$\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$$

$$\bar{f} = [a_n]x^n$$

$$\bar{g} \sim x^m \quad \bar{h} \sim x^{n-m} \quad 0 < m < n$$

$$g = b_mx^m + \dots + b_0 \quad b_m \not\equiv p, \quad b_{m-1}, \dots, b_0 \equiv p$$

$$h = c_{n-m}x^{n-m} + \dots + c_0$$

$$c_{n-m} \not\equiv p \quad c_{n-m}, \dots, c_0 \equiv p$$

по усл. $a_0 = b_0 \cdot c_0$ - противоречие

$$\begin{array}{ccc} \not\equiv & \dots & \dots \\ p^2 & p & p \end{array}$$

39. Линейные отображения векторных пространств. Линейное отображение полностью задается своими значениями на базисных векторах.

Опр

K - поле V - в.п. над K

$f : U \rightarrow V$ f - линейное, если $\forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

1.

$$f(\alpha u_1 + \alpha u_2) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2)$$

2. (a)

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

(b)

$$\forall u \in U \quad \forall \alpha \in K \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

лин. отобр \equiv гомеоморфизм вект пр-в

Теорема (св-ва)

f - лин. отобр.

$$f(0_u) = 0_v$$

$$f(-u) = -f(u)$$

Пример

$$K[x] \rightarrow K[x]$$

$$f \rightarrow f'$$

U - в.п $\{u_i\}_{i \in I}$ - базис U

Достаточно хадать лин. отобр. на базисных векторах

f - лин. отобр $f : U \rightarrow V$

$$u \in U \quad u = \sum \alpha_i u_i$$

$$f(u) = f\left(\sum \alpha_i u_i\right) = f\left(\sum_{\alpha_i \neq 0} \alpha_i u_i\right) = \sum_{\alpha_i \neq 0} \alpha_i f(u_i)$$

40. Сумма линейных отображений, умножение на скаляр. Пространство линейных отображений.

41. Матрица линейного отображения для данных базисов. Матрица суммы отображений. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

$$\dim U = m < \infty \quad \dim V = n < \infty$$

u_1, \dots, u_m - базис U ; v_1, \dots, v_n - базис V

$$f(u_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$$

$\alpha : U \rightarrow V$ - лин. отобр.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & & \ddots & \\ & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- коэфф разложения $f(u_i)$ по базису $\{v_1, \dots, v_n\}$

A - матрица лин. отобр в базисах $\{u_1, \dots, u_m\}, \{v_1, \dots, v_n\}$

$$A = [f]_{\{u_j\}}^{\{v_i\}}$$

$$f(u) = c_1 f(u_1) + \dots + c_m f(u_m) = \sum_{j=1}^m c_j f(u_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_j a_{ij} \right) v_i$$

где $u = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} = [u]_{\{u_i\}} \quad [v]_{\{v_i\}} = A \cdot [u]_{\{u_i\}}$$

$$[f+g]_{\{u_j\}}^{\{v_i\}} = [f]_{\{u_j\}}^{\{v_i\}} + [g]_{\{u_j\}}^{\{v_i\}}$$

u, v назыв. изоморфными, если $\exists f : U \rightarrow V$ 1) f - лин.

2) f - биекция

42. Композиция линейных отображений. Матрица композиции.

Опр

43. Преобразование матрицы линейного отображения при замене базисов.

Опр

$f : U \rightarrow V$ - лин

u_1, \dots, u_m - базисы U v_1, \dots, v_n - базисы V
 u'_1, \dots, u'_m v'_1, \dots, v'_n

$$A = [f]_{\substack{\{u_i\} \\ \{v_j\}}} \quad A' = [f]_{\substack{\{u'_i\} \\ \{v'_j\}}}$$

C - матрица замены координат при переходе от $\{u_i\}$ к $\{u'_i\}$

D - матрица замены координат при переходе от $\{v_j\}$ к $\{v'_j\}$

i - ый столбец C - это коорд. u'_i в базисе u_1, \dots, u_m

i - ый столбец D - это коорд. v'_j в базисе v_1, \dots, v_k

$$[u]_{\{u_i\}} = C[u]_{\{u'_i\}}, \text{ аналогично для } D$$

Теорема

$$A' = D^{-1}AC$$

44. Ядро и образ линейного отображения, их свойства. Критерий инъективности и сюръективности линейного отображения в терминах ядра и образа.

Опр

$$f : U \rightarrow V \quad f - \text{лин.}$$

$$f(U) = \{v \in V \mid \exists u \in U : v = f(u)\} = \text{Im} f \text{ (образ } f)$$

$$f^{-1}(\{0_v\}) = \{u \in U : f(u) = 0_v\} = \ker f \text{ (ядро } f)$$

Предположение

$$\text{Im} f \subseteq V; \quad \ker f \subseteq U$$

Предположение

$$\text{а) лин. отобр. } f : U \rightarrow V \text{ сюръективно} \Leftrightarrow \text{Im} f = V$$

$$\text{б) инъективно} \Leftrightarrow \ker f = \{0_u\}$$

45. Выбор базисов, для которых матрица линейного отображения имеет почти единичный вид. Следствие для матриц. Теорема о размерности ядра и образа.

Теорема

U, V - конечномерные; $f : U \rightarrow V$ - лин. Тогда \exists базисы пр-в U и V ,

в которых матрица f - почти единичная

$$[f]_{\substack{\{u_i\} \\ \{v_j\}}} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следствие (1)

$A \in M(n, m, K)$ Тогда \exists обрат. матрицы $C \in M(m, n, K)$ и

$$D \in M(n, m, K), \text{ такие, что } D^{-1}AC = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следствие (2)

$\dim U < \infty$; V - произв.

$$f : U \rightarrow V$$

$$\text{Тогда } \dim U = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

46. Критерий изоморфности конечномерных пространств

Опр

U, V изоморфны, если \exists биект. лин. отображение (изоморфизм) $f : U \rightarrow V$

$$U \cong V$$

Теорема

U, V - конечномерные в.п. над K

$$U \cong V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$$

Док-во

$\Rightarrow f : U \rightarrow V, \quad f$ - биекция, лин.

f - инъект. $\Rightarrow \ker f = \{0\}$

f - сюръект. $\Rightarrow \operatorname{Im} f = V$

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f = \dim U - \dim \ker f = \dim U - 0 = \dim U$$

$$\leftarrow \dim U = \dim V = n$$

u_1, \dots, u_n - базис U

v_1, \dots, v_n - базис V

Любой $u \in U$ единственным образом раскладывается в сумму

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad \alpha_i \in K$$

$$f(u) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\tilde{u} = \tilde{\alpha}_1 u_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n u_n$$

$$u + \tilde{u} = (\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1) u_1 + \dots + (\alpha_n + \tilde{\alpha}_n) u_n$$

$$f(\tilde{u}) = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \dots + \tilde{\alpha}_n v_n$$

$$f(u + \tilde{u}) = (\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \tilde{\alpha}_n) v_n$$

$$f(u + \tilde{u}) = f(u) + f(\tilde{u})$$

$$\text{Аналогично } f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

Значит f - лин. отображ.

т.к. v_1, \dots, v_n - сем-во образующих $\Rightarrow f$ - сюръект.

$$v \in V \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad f(u) = v$$

т.к. v_1, \dots, v_n - ЛНЗ, то f - инъект.

достаточно проверить, что $\ker f = \{0\}$

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$0 = f(u) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0, u = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\}$$

$\Rightarrow f$ - изоморфизм

47. Двойственное пространство. Двойственный базис. Изоморфность конечномерного пространства и его двойственного. Пример пространства не изоморфного своему двойственному.

Опр

V - в.п. над K

$V^* = L(V, K)$ - двойственное пр-во к V

(пр-во линейных отображений из V в K)

элементы V^* - лин. функционалы V (лин. отобр)

Пример

$V_{\mathbb{R}} = C([0; 1] \rightarrow \mathbb{R})$

$f \rightarrow \int_0^1 f(x)dx$

$a \in [0; 1] \quad f \rightarrow f(a)$

Опр

e_1, \dots, e_n - базис V

c_1, \dots, c_n - двойственный базис V , если

$$f(e_i, c_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Теорема

$\dim V = n < \infty \Rightarrow V^* \cong V$

Док-во

v_1, \dots, v_n - базис V

49. Линейные операторы. Кольцо линейных операторов. Изоморфность кольца линейных операторов и кольца матриц.

V - в.п. над K

$L(v, v)$ эл-ты этого пр-ва назыв. линейными операторами на V

$End(V) = L(V, V)$

На $End(V)$ определена композиция (умножение операторов)

$\square \dim V = n$

зафиксируем базис v_1, \dots, v_n пр-ва V

$End(V) \rightarrow M_n(K)$ изморфизм в.п.

$f \rightarrow [f]_{\{v_i\}}$ - матрица оператора в базисе

Теорема

$(End(V), \cdot, +)$ - кольцо

50. Многочлены от оператора. Коммутирование многочленов от одного оператора.

Опр

V - в.п. над K $\varphi \in \text{End}(V)$

$h = a_0 + a_1t + \dots a_mt^m \in K[t]$

$h(\varphi) = a_0id + a_1\varphi + \dots + a_m\varphi^m \in \text{End}(V)$

Умножение = композиция операторов

$A \in M_n(K)$

$h(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m$ - мн-н от матрицы

$(hg)(\varphi) = h(\varphi) \cdot g(\varphi)$

51. Характеристический многочлен матрицы и оператора. Независимость характеристического многочлена оператора от выбора базиса.

Опр

$$A \in M_n(K)$$

Характеристический многочлен A

$$\det(A - tE) = \mathcal{X}_A(t)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} - t \end{vmatrix} = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) t^{n-1} + \dots + \det A$$

V - в.п. $\dim V = n < \infty$ v_1, \dots, v_n - базис V

$f \in \text{End}(V)$ $A = [f]_{\{v_i\}}$ - матрица оператора в базисе v_1, \dots, v_n

$$\mathcal{X}_f(t) = \mathcal{X}_A(t)$$

Лемма

Характеристический многочлен f не зависит от выбора базиса в V

Док-во

v_1, \dots, v_n - базисы V C - матрица преобр. координат
 v'_1, \dots, v'_n при переходе от $\{v_i\}$ к $\{v'_i\}$

$$A = [f]_{\{v_i\}}$$

$$A' = [f]_{\{v'_i\}}$$

$$A' = C'AC \quad (A \text{ и } A' \text{ сократимы при помощи } C)$$

$$\mathcal{X}_{A'}(t) = \mathcal{X}_A(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{A'}(t) &= \det(C^{-1}AC - tE) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(tE)C) = \\ &= \det(C^{-1}(A - tE)C) = \det(C^{-1}) \cdot \det(A - tE) \cdot \det(C) = \\ &= \det(A - tE) = \mathcal{X}_A(t) \end{aligned}$$