Павел Костин — Матмех СПбГУ

Homework, 141 группа — Homework 3 — 29 May 2019

Problem 1. Найти НОД и его линейное разложение для многочленов $f = x^5 + x^4 + 1$ и $g = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ в кольце $F_2[x]$.

Solutions 1. Выполним деление:

$$
\begin{array}{r l}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \\ \cline{2-2}
x^5 + x^4 + 1 \big) & x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \\
 & -x^6 - x^5 \qquad\qquad\quad - x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad x^4 + x^2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r l}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x + 1 \\ \cline{2-2}
x^4 + x^2 + 1 \big) & x^5 + x^4 \qquad\qquad\qquad + 1 \\
 & -x^5 \qquad - x^3 \qquad - x \\ \cline{2-2}
 & \qquad x^4 - x^3 \qquad - x + 1 \\
 & \quad -x^4 \qquad - x^2 \qquad - 1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -x^3 - x^2 - x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r l}
 & \qquad\qquad\qquad\quad x - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 + x^2 + x \big) & x^4 \qquad + x^2 \qquad + 1 \\
 & -x^4 - x^3 - x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -x^3 \\
 & \qquad x^3 + x^2 + x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad x^2 + x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r l}
 & \qquad\qquad\quad x \\ \cline{2-2}
x^2 + x + 1 \big) & x^3 + x^2 + x \\
 & -x^3 - x^2 - x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Значит НОД: $x^2 + x + 1$. Знаем:

$x^4 + x^2 + 1 = (x^3 + x^2 + x)(x + 1) + x^2 + x + 1$

$x^5 + x^4 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x + 1) + x^3 + x^2 + x$

$x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 = (x^5 + x^4 + 1)x + x^4 + x^2 + 1$

Значит:

$x^2 + x + 1 = x^4 + x^2 + 1 + (x^3 + x^2 + x)(x + 1)$

$x^2 + x + 1 = x^4 + x^2 + 1 + (x^5 + x^4 + 1 + (x^4 + x^2 + 1)(x + 1))(x + 1)$

$x^2 + x + 1 = (x^5 + x^4 + 1)(x + 1) + (x^4 + x^2 + 1)x^2$

$x^2 + x + 1 = (x^5 + x^4 + 1)(x + 1) + (x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 + (x^5 + x^4 + 1)x)x^2$

$x^2 + x + 1 = (x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1)x^2 + (x^5 + x^4 + 1)(x^3 + x + 1)$

$x^2 + x + 1 = fx^2 + g(x^3 + x + 1)$

Problem 2. Доказать, что полином $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n$ не имеет кратных корней в C.

Solutions 2. $\sqsupset$ x_0 - корень кратности k, $k \geqslant 2$. Тогда $f(x) \vdots (x - x_0)^k$, $f(x)' \vdots (x - x_0)^{k-1}$, но $f(x) = f'(x) + \frac{1}{n!}x^n$, правая часть не делится на $(x - x_0)^k$ (кроме случая $x = 0$) $\Rightarrow$ получено противоречие. При $x = 0$ мы видим $f(0) = 1$ и тут тоже не может быть корней.

Problem 3. Избавится от кратных множителей и найти разложение на неприводимые для многочлена с коэффициентами в Z/3

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

Solutions 3. Знаем, что НОД(f, f') $= \hat{f}$ - произведение всех кратных корней. $f'(x) = x^3 + x + 1$, найдем $\hat{f}$:

$$\begin{array}{r|l}
 & x + 1 \\
\hline
x^3 + x + 1 & x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
 & -x^4 \qquad - x^2 - x \\
 & x^3 + x^2 \qquad + 1 \\
 & -x^3 \qquad - x - 1 \\
 & x^2 - x
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 2 \\
\hline
x^2 + 2x & x^3 \qquad + x + 1 \\
 & -x^3 - 2x^2 \\
 & -2x^2 + x \\
 & 2x^2 + 4x \\
 & 5x
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -x - 2 \sim x + 2 \\
\hline
-x & x^2 + 2x \\
 & -x^2 \\
 & 2x \\
 & -2x \\
 & 0
\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - x^2 + 4x - 7 \\ \hline
x+2 & x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
 & -x^4 - 2x^3 \\ \hline
 & -x^3 + 2x^2 \\
 & x^3 + 2x^2 \\ \hline
 & 4x^2 + x \\
 & -4x^2 - 8x \\ \hline
 & -7x + 1 \\
 & 7x + 14 \\ \hline
 & 15
\end{array}
$$

$\hat{f} = x^3 + 2x^2 + x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 4 \\ \hline
x-1 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\
 & -x^3 + x^2 \\ \hline
 & 3x^2 + x \\
 & -3x^2 + 3x \\ \hline
 & 4x + 2 \\
 & -4x + 4 \\ \hline
 & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 1 \\ \hline
x^3 + 2x^2 + x + 2 & x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
 & -x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x \\ \hline
 & -x^3 + x^2 - x + 1 \\
 & x^3 + 2x^2 + x + 2 \\ \hline
 & 3x^2 + 3
\end{array}
$$

$\hat{f} = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x-1)(x^2+1)$
$f = x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x-1)^2(x^2+1)$

Problem 4. Не раскрывая скобки докажите тождество

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

Solutions 4. $\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$, подставим x=0:

$\frac{aabc}{(a-b)(a-c)} + \frac{babc}{(b-c)(b-a)} + \frac{cabc}{(c-a)(c-b)} = 0$ если все множетели не ноль, можно сократить на abc и получить искомое равенство, если один из них ноль, равенство имеет вид (боо a): $\frac{b}{(b-c)(b)} + \frac{c}{c(c-b)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{(b-c)} + \frac{1}{(c-b)} = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Problem 5. Найти сумму $\sum\limits_{k\equiv 1(3)} (-1)^k C_n^k$

Solutions 5. $\sqsupset$ $f(x) = (x-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^{n-k}$, рассмотрим $f(x)$ по mod x^3-1: $\bar{f}(x) = \sum\limits_{k\equiv 0(3)}^{n} (-1)^k x^{n-k} + x \sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k x^{n-k} + x^2 \sum\limits_{k\equiv 2(3)}^{n} (-1)^k x^{n-k}$, домножим на x^2, чтобы было удобнее:

$x^2\bar{f}(x) = x^2 \sum\limits_{k\equiv 0(3)}^{n} (-1)^k x^{n-k} + \sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k x^{n-k} + x \sum\limits_{k\equiv 2(3)}^{n} (-1)^k x^{n-k}$, теперь у нужной нам суммы нулевая степень x. С другой стороны, остаток от деления $f(x)$ на x^3-1 - это решение интерполяционной задачи:

$x^3 - 1 = (x-1)(x-\epsilon_3)(x-\epsilon_3^2)$, то есть:

$x^2\bar{f}(x) = \frac{\epsilon_3^2(1-\epsilon_3)^n(x-1)(x-\epsilon_3^2)}{3\epsilon_3^2} + \frac{\epsilon_3(1-\epsilon_3^2)^n(x-1)(x-\epsilon_3^2)}{3\epsilon_3} = \frac{(1-\epsilon_3)^n(x-1)(x-\epsilon_3^2)}{3} + \frac{(1-\epsilon_3^2)^n(x-1)(x-\epsilon_3^2)}{3}$,

значит:

$\sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k C_n^k = \frac{\epsilon_3^2(1-\epsilon_3)^n}{3} + \frac{\epsilon_3(1-\epsilon_3^2)^n}{3}$, подставим $\epsilon_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{6}$ и $\epsilon_3^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$,

получим:

$\sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k C_n^k = \frac{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(1-\frac{-1-i\sqrt{3}}{6})^n}{3} + \frac{\frac{-1-i\sqrt{3}}{6}(1-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^n}{3}$, сгруппипуем:

$\sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k C_n^k = \frac{1}{3}(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})^n + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})^n)$, вынесем за скобки корень:

$\sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k C_n^k = \frac{1}{3}(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})^n + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^n)$, перейдем для удобства в exp:

$\sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k C_n^k = \frac{1}{3}(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n e^{(\frac{-\pi n}{6})} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3})^n e^{(\frac{-\pi n}{6})})$, немного упростим выражение:

$\sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k C_n^k = \frac{1}{3}(\sqrt{3})^n(-\frac{e^{(\frac{-\pi n}{6})} + e^{(\frac{\pi n}{6})}}{2} - -i\sqrt{3}\frac{e^{(\frac{-\pi n}{6})} - e^{(\frac{\pi n}{6})}}{2i})$, окончательный ответ:

$\sum\limits_{k\equiv 1(3)}^{n} (-1)^k C_n^k = -\frac{1}{3}(\sqrt{3})^n(\cos\frac{\pi n}{6} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi n}{6})$

Problem 6. Разложите на простейшие над C и над R $\frac{x^2}{x^6+27}$

Solutions 6. Разложим $x^6 + 27 = (x^2)^3 + 3^2 = (x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) = (x^2+3)(x^2-i\sqrt{3}x-3)(x^2+i\sqrt{3}x-3)$, решения: x$=i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$, значит по формуле Лагранжа $\sum\limits_{k=1}^{6} \frac{x_k^2}{6x_i^5(x-x_i)}$ - над C, подставляя и группируя получаем ответ над R: $\frac{1}{18(x^2-3x+3)} + \frac{1}{18(x^2+3x+3)} - \frac{1}{9(x^2+3)}$

ИДЗ КП. Найдите интерполяционный многочлен принимающий значения

7, -3, -1, 1, 15

в точках -2, -1, 0, 1, 2 соответственно.

Solutions ИДЗ. $f = -1 + 2x^3$, подходит $x = -1,\ 0,\ 1,$, по методу Ньютона $f_{new} = f + c\phi$, где $\phi = (x-2)(x-1)x(x+1) = (x^3-x)(x-2)$, $c = \frac{7-f(-2)}{\phi(-2)} = \frac{7+17}{24} = 1$, значит $f_{new} = -1 + 2x^3 + (x^3 - x)(x-2)$ - ответ