Санкт-Петербургский государственный университет

Практика по геометрии

3 семестр, преподаватель Амрани И. М.

Записал Костин П.А.[1]

[1]Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах вконтакте (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

[03.09.19]

1 Дифференциальная геометрия

1.1 Кривые и поверхности

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^2, \text{ т.ч. } \quad |\gamma(t)| = 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$$

Д-ть, что $\gamma'(t) \perp \gamma''(t) \; \forall t \in \mathbb{R}$

Док-во

$$|\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{< \dot\gamma, \dot\gamma >} = 1 \Leftrightarrow < \dot\gamma, \dot\gamma >= 1$$

$$(< \dot\gamma, \dot\gamma >)' = (1)' \Rightarrow 2 < \dot\gamma, \ddot\gamma >= 0$$

Вообще очевидно, но если нет, то:

$$(< \dot\gamma, \dot\gamma >)' = (\sum_{i=1}^{3} \dot\gamma_i{}^2)' = \sum_{i=1}^{3} 2\dot\gamma_i \ddot\gamma_i = 2 < \dot\gamma, \ddot\gamma >$$

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^3, \quad |\gamma'| = 1, \quad \gamma'' \neq 0$$

$$T(t) = \gamma'(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t), \quad N(t) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$$

1. Д-ть, что $\{T(t), N(t), B(t)\}$ - ОНБ
2. Найти координаты $\frac{dT}{dt}, \frac{dN}{dt}, \frac{dB}{dt}$ в базисе $\{T, N, B\}$

Решение

1. Очевидно, $B(t) = \underset{=1}{T} \cdot \underset{=1}{N} \sin \angle(T, N)$

   $$T \perp N \text{ (по пред. задаче)}, \quad B \perp N, \quad B \perp T \text{ (по опр. вект. произв.)}$$

2. По определению "взятием производной" получаем:

   $$\frac{dT}{dt} = 0T + |\ddot\gamma| N + 0B$$

   $$< N, T >= 0 \Rightarrow < \frac{dN}{dt}, T > + < N, \frac{dT}{dt} >= 0$$

Аналогично $0 =< \dfrac{dT}{dt}, B >= - < \dfrac{dB}{dt}, T >$

$|\ddot{\gamma}| =< \dfrac{dN}{dt}, T >= - < N, \dfrac{dT}{dt} >$

$\dfrac{dN}{dt} = -|\ddot{\gamma}|T + 0N + \tau(t)B$

$\dfrac{dB}{dt} = 0T - \tau(t)N + 0B$

10.09.19

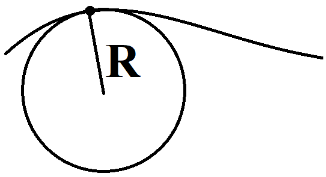
1.2 Задачи на кривые

Мы хотим найти τ через $\dot\gamma,\ \ddot\gamma,\ \dddot\gamma$

Замечание

На плоскоти в каждой точке гладкой кривой есть окружность, которая наилучшим образом приближает кривую

$$R = \frac{1}{|\ddot\gamma|}, \quad |\ddot\gamma| := æ \text{ - кривизна}$$



Решение (продолжение)

$$\tau =< \frac{dN}{dt},\ B >$$

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|}\right)' = \frac{\dddot\gamma|\ddot\gamma| - |\ddot\gamma|'\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|^2}$$

$$\Rightarrow < \frac{dN}{dt},\ B >=< \frac{\dddot\gamma|\ddot\gamma| - |\ddot\gamma|'\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|^2},\ \frac{\dot\gamma\times\ddot\gamma}{|\ddot\gamma|} >=$$

$$= \frac{1}{|\ddot\gamma|^3} < \dddot\gamma|\ddot\gamma| - |\ddot\gamma|'\ddot\gamma,\ \dot\gamma\times\ddot\gamma > \underset{\text{см. на N}}{=}$$

$$= \frac{1}{|\ddot\gamma|^3} < \dddot\gamma|\ddot\gamma|,\ \dot\gamma\times\ddot\gamma >= \frac{1}{|\ddot\gamma|^2} < \dddot\gamma,\ \dot\gamma\times\ddot\gamma >= \frac{(\dot\gamma,\ \ddot\gamma,\ \dddot\gamma)}{|\ddot\gamma|^2}$$

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(t),\ 5 - 5\sin(t),\ -3\cos(t))$$

1. Найти æ и τ

2. Понять, что из себя представляет линия

Решение

1. Предыдущую задачу мы не можем просто так применить, потому что $|\dot{\gamma}| = 5 \neq 1$, но мы можем перепараметризовать:

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(\frac{t}{5}),\ 5 - 5\sin(\frac{t}{5}),\ -3\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ -\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{5}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{25}\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{25}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{4}{125}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ -\frac{3}{125}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2} = 25(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}) = 0$$

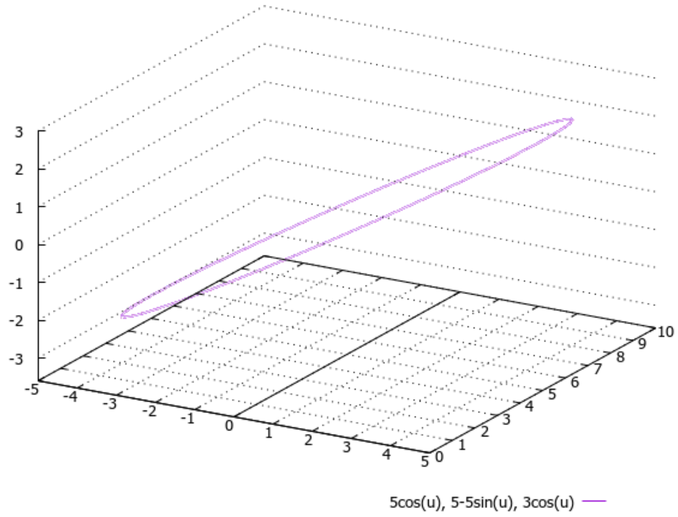
2. Наша линия находится на плоскости:

$$3x + 0y + 4z$$

И лежит на сфере:

$$x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 25$$

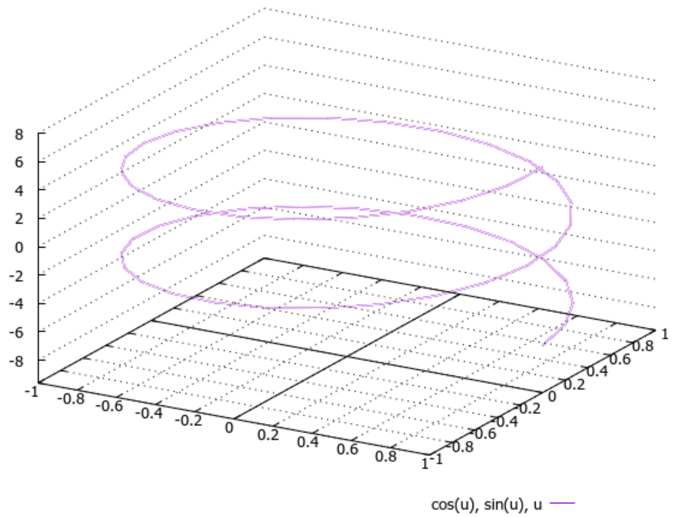
Значит она представляет из себя окружность, потому что есть разные точки



Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t),\ \sin(t),\ t)$$

1. Построить график



2. Найти æ и τ

<u>**Решение**</u>

Аналогично $t \to \dfrac{t}{\sqrt{2}}$

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{2}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}) = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}$$

17.09.19

1.3 Поверхности

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r(t),\ 0,\ z(t)),\ \text{где } r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Найти параметрищацию поверхности вращения вокруг OZ

Док-во

Из геометрических соображений: $(r(t)\cos\varphi,\ r(t)\sin\varphi,\ z(t)),\ \varphi \in [0,\ 2\pi]$
Более строго:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\alpha \\ r(t)\sin\alpha \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Опр

Гладкая двухмерная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

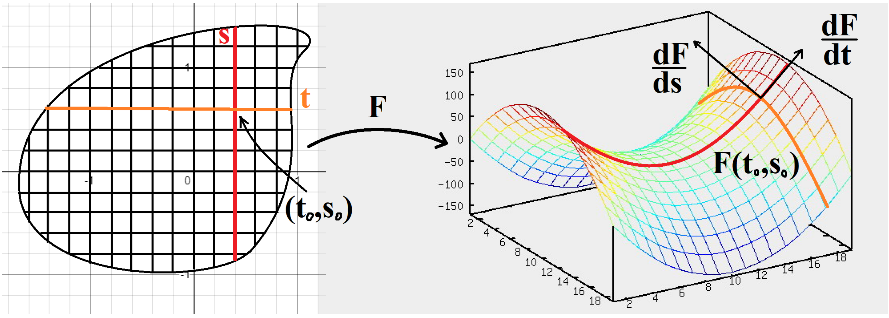
т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial S}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - непрерывные функции

Опр

Гладкая регулярная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial s}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - линейно независимы
"регулярная = скорость не обнуляется"



24.10.19

1.4 Первая фундаментальная форма

Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\det \begin{pmatrix} < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} > \\ < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} > \end{pmatrix} =$$

$$=< \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} >< \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} > - < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} >< \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} >=$$

$$= \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 - \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \cos^2 t = \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right|^2$$

Замечание

$$A(S) = \sum A(\square)$$

$$A(\square) \approx \left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right| \Delta t \Delta s$$

$$\mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} > \\ < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} > & < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} > \end{pmatrix}$$

$$A(S) = \iint \left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial v}\right| dtds = \iint \sqrt{\det \mathrm{I}(F)} dtds$$

Пример

$$F : (0,\ 2\pi) \times (0,\ 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$(\theta,\ \varphi) \to (\cos\theta \sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta)$$

1. Доказать, что образ F находится на сфере радиуса 1

2. Найти S сферы через $\mathrm{I}(F)$

Док-во

1. Видно из параметрического уравнения сферы что это сфера, а также понятен радиус и её центр

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos\theta, \end{cases}$$

где $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi)$ (у нас будет сдвиг на угол)

2. Найдем переменные для $\mathrm{I}(F)$:

$$< \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta = 1$$

$$< \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= \cos^2\theta$$

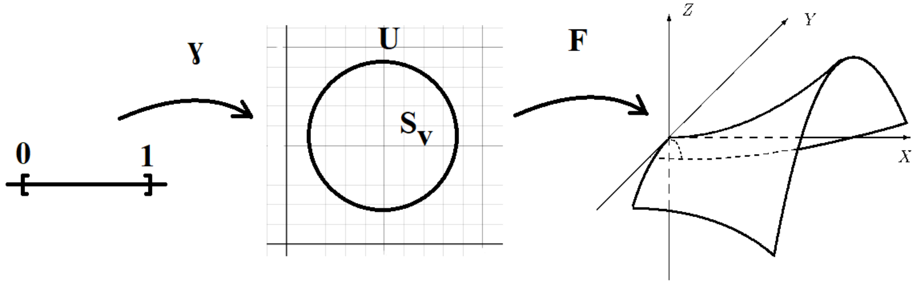
$$\Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint \sqrt{\det \mathrm{I}(F)} d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\cos\theta| d\theta d\varphi = \int_0^\pi 4 d\varphi = 4\pi$$

01.10.19

Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad C^1 \text{ регулярная}$$



Найти длину $\widetilde{\gamma} = F \circ \gamma$ через γ и $\mathrm{I}(F)$

Решение

$$l(F \circ \gamma) := \int_0^1 |F \circ \gamma(t)'| dt$$

$$\frac{d(F \circ \gamma(t))}{dt} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{\text{вектор}} \overbrace{\dot{\gamma}_1(t)}^{\text{скаляр}} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t) =$$

$$= < \frac{\partial F}{\partial x} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t), \ \frac{\partial F}{\partial x} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t) > =$$

$$= < \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x} > \dot{\gamma}_1^2(t) + 2 < \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} > \dot{\gamma}_1(t) \dot{\gamma}_2(t) + < \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y} > \dot{\gamma}_2^2(t) =$$

$$= (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \mathrm{I}(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow l(F \circ \gamma) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \mathrm{I}(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}} dt$$

01.10.2019

1.5 Вторая фундаментальная форма

Опр

$$F : \underset{x,y}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad C^2 \text{ регулярная}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y}\right| \neq 0$$

$$n := \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} \times \dfrac{\partial F}{\partial y}}{\left|\dfrac{\partial F}{\partial x} \times \dfrac{\partial F}{\partial y}\right|} \text{ - перп. обоим и по модулю 1}$$

$$L =< \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ n >, \quad M =< \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ n >, \quad N =< \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ n >$$

$$\mathrm{II}(F) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Замечание

$\mathrm{II}(F)$ говорит, какая ПВП лучше всего приближает в данной точке

Пример

Пусть есть сфера радиуса r:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos\theta, \end{cases}$$

где $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ и $\phi \in [0,\ 2\pi)$

Найти $\mathrm{II}(F)$, $\mathrm{I}(F)$ и $\dfrac{\det(\mathrm{II})}{\det(\mathrm{I})}$

Решение

Посчитаем $\mathrm{I}(F)$:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (-r\sin\theta\cos\varphi,\ -r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-r\cos\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$< \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= r^2, \quad < \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= 0$$

$$< \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= r^2\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Посчитаем $\mathrm{II}(F)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = (-r\cos\varphi\cos\theta,\ -r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi} = (r\sin\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = (-r\cos\theta\cos\varphi,\ -r\cos\theta\sin\varphi,\ 0)$$

Напоминание В правом ортонормированном базисе:

Если два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ представлены координатами

$$\overrightarrow{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z), \quad \overrightarrow{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z),$$

то их векторное произведение имеет координаты

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать мнемонический определитель:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-r^2\cos^2\theta\cos\varphi,\ -r^2\cos^2\theta\sin\varphi,\ -r^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$n = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}}{\left|\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}\right|} = (-\cos\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$L =< \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2},\ \overline{n} >= r$$

$$M =< \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi},\ \overline{n} >= 0$$

$$N =< \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2},\ \overline{n} >= r\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}(F) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det \mathrm{II}(F)}{\det \mathrm{I}(F)} = \frac{1}{r^2} \text{ - кривизна Гаусса}$$

Пример

Пусть $\gamma : t \to (t - \mathrm{th}(t),\ 0,\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}), \quad t > 0$

1. Найти S поверхности, полученной вращением γ вокруг OZ
2. Найти $\mathrm{II}(F)$, $\mathrm{I}(F)$ и $K = \dfrac{\det(\mathrm{II})}{\det(\mathrm{I})}$

Решение

Была задача $(r(t),\ 0,\ z(t)) \Rightarrow (r(t)\cos\varphi,\ r(t)\sin\varphi,\ z(t)),\ \varphi \in [0,\ 2\pi]$

$$\Rightarrow \left((t - \mathrm{th}(t))\cos\varphi,\ (t - \mathrm{th}(t))\sin\varphi,\ \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right),\ \varphi \in [0,\ 2\pi]$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}\right)\cos\varphi,\ \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}\right)\sin\varphi,\ \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = \left(\mathrm{th}^2(t)\cos\varphi,\ \mathrm{th}^2(t)\sin\varphi,\ \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-(t - \mathrm{th}(t))\sin\varphi,\ (t - \mathrm{th}(t))\cos\varphi,\ 0)$$

$$< \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} >= \mathrm{th}^4(t) + \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^4(t)} = \mathrm{th}^4\left(1 + \frac{1}{\mathrm{sh}^2}\right) = \mathrm{th}^2(t), \quad < \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= 0$$

$$< \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial t} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= (t - \operatorname{th}(t))^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} \operatorname{th}^2(t) & 0 \\ 0 & (t - \operatorname{th}(t))^2 \end{pmatrix}$$

$$A(S) = \iint \sqrt{\det \mathrm{I}(F)} dt d\varphi = \iint \sqrt{(t - \operatorname{th}(t))^2 \operatorname{th}^2(t)} dt d\varphi =$$
$$= \iint |(t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}(t)| \, dt d\varphi = \iint (t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}(t) dt d\varphi$$

- ???

$$\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} =$$
$$\Bigg(\left(\operatorname{th}^2(t) \sin\varphi\right)(0) - \left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}\right)((t - \operatorname{th}(t)) \cos\varphi),$$
$$\left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}\right)((\operatorname{th}(t) - t) \sin\varphi) - \left(\operatorname{th}^2(t) \cos\varphi\right)(0),$$
$$\left(\operatorname{th}^2(t) \cos\varphi\right)((t - \operatorname{th}(t)) \cos\varphi) - \left(\operatorname{th}^2(t) \sin\varphi\right)((\operatorname{th}(t) - t) \sin\varphi) \Bigg) =$$

$$= \Bigg(-\left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}\right)(t - \operatorname{th}(t)) \cos\varphi,$$
$$\left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}\right)(\operatorname{th}(t) - t) \sin\varphi, \ (t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}^2(t) \Bigg) =$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}\right)((t - \operatorname{th}(t)))^2 + \left((t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}^2(t)\right)^2} =$$

$$= |t - \operatorname{th}(t)| \operatorname{th}^2(t) \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sh}^2(t)} + 1} = |(t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}(t)| \operatorname{th}^2(t) = \operatorname{th}^3(t)(t - \operatorname{th}(t))$$

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right|} = \left(-\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\right) \frac{1}{\operatorname{th}^2(t)} \cos\varphi, \ -\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(t)}\right) \frac{1}{\operatorname{th}^2(t)} \sin\varphi, \ \frac{1}{\operatorname{th}(t)} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\operatorname{th}^2(t) \cos\varphi, \ \operatorname{th}^2(t) \sin\varphi, \ \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \left(2\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}\operatorname{th}(t)\cos\varphi,\ 2\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)}\operatorname{th}(t)\sin\varphi,\ \frac{ch^3(t) - 2\operatorname{sh}^2(t)\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^4(t)}\right)$$

$$\Rightarrow L =< \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},\ \overline{n} >=?$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi} = (?,\ ?,\ ?)$$

$$\Rightarrow M =< \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi},\ \overline{n} >=?$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-(t - \operatorname{th}(t))\sin\varphi,\ (t - \operatorname{th}(t))\cos\varphi,\ 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = (?,\ ?,\ ?)$$

$$\Rightarrow N =< \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2},\ \overline{n} >=?$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}(F) = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$K = \dfrac{\det \mathrm{II}(F)}{\det \mathrm{I}(F)}$ =? - кривизна Гаусса

08.10.19

<u>Пример</u> (стереографическая проекция)

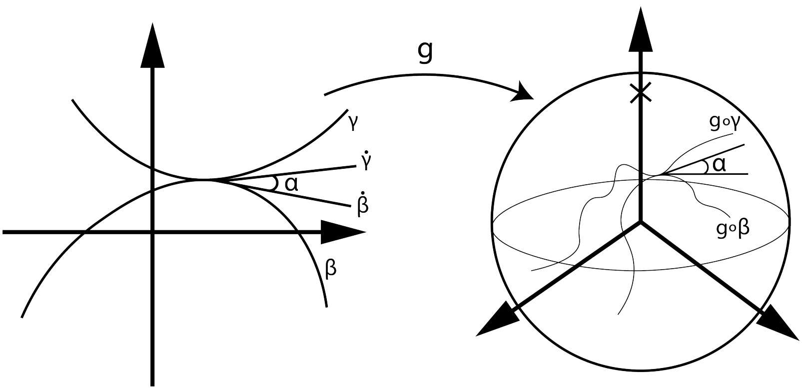
$$f: S^2 - \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z},\ \frac{y}{1-z}\right)$$

где $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

1. Найдите $f^{-1} = g \quad \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\}$ (полюс)
2. Доказать, что g сохраняет углы
3. Найдите I(F) (п.ф.ф.) g

здесь должен быть рисунок, но его нет, как и смысола

<u>Решение</u>



1. Надо найти g: $f \circ g = \mathrm{id}$ и $g \circ f = \mathrm{id}$

$$a = \frac{x}{1-z}, \quad b = \frac{y}{1-z}, \quad x^2+y^2+z^2 = 1$$

Найдем из уравнений x, y, z:

$$z = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}, \quad x = \frac{2a}{a^2+b^2+1}, \quad y = \frac{2b}{a^2+b^2+1}$$

2. Вспомним, что

$$\cos(\alpha) = \frac{<\dot{\gamma},\ \dot{\beta}>}{|\gamma|\,|\beta|}, \qquad \cos(\theta) = \frac{<\dot{\tilde{\gamma}},\ \dot{\tilde{\beta}}>}{|\tilde{\gamma}|\left|\tilde{\beta}\right|}$$

$$\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma \quad \widetilde{\beta} = g \circ \beta$$

$$\widetilde{\gamma} = \left(\frac{2\gamma_1}{{\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2 + 1}, \ \frac{2\gamma_2}{{\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2 + 1}, \ \frac{{\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2 - 1}{{\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2 + 1} \right)$$

Аналогично другие. Можно было бы посчитать всё и подставить

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\gamma} = \frac{\partial g}{\partial a}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial b}\dot{\gamma}_2$$

Обозначим $\bigstar = a^2 + b^2 + 1$

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \left(\frac{2\bigstar - 4a^2}{\bigstar^2}, \ \frac{2\bigstar - 4b^2}{\bigstar^2}, \ \frac{4b}{\bigstar^2} \right)$$

$$\mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} \overbrace{< \frac{\partial g}{\partial a}, \ \frac{\partial g}{\partial a} >}^{=\rho} & \overbrace{< \frac{\partial g}{\partial b}, \ \frac{\partial g}{\partial a} >}^{=0} \\ \\ \underbrace{< \frac{\partial g}{\partial a}, \ \frac{\partial g}{\partial b} >}_{=0} & \underbrace{< \frac{\partial g}{\partial b}, \ \frac{\partial g}{\partial} >}_{=\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

То есть на самом деле:

$$\cos(\theta) = \frac{< \dot{\widetilde{\gamma}}, \ \dot{\widetilde{\beta}} >}{|\widetilde{\gamma}||\widetilde{\beta}|} = \frac{< \dot{\gamma}, \ \mathrm{I}\dot{\beta} >}{\sqrt{< \dot{\gamma}, \ \mathrm{I}\dot{\gamma} >}\sqrt{< \dot{\beta}, \ \mathrm{I}\dot{\beta} >}}$$

$$\widetilde{\gamma} =< \frac{\partial g}{\partial a}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial b}\dot{\gamma}_2, \ \frac{\partial g}{\partial a}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial b}\dot{\gamma}_2 >$$

$$< \dot{\widetilde{\gamma}}, \ \dot{\widetilde{\gamma}} >=< \frac{\partial g}{\partial a}, \ \frac{\partial g}{\partial a} > \dot{\gamma}_1^2 + 2 < \frac{\partial g}{\partial a}, \ \frac{\partial g}{\partial b} > \dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2 + < \frac{\partial g}{\partial b}, \ \frac{\partial g}{\partial b} > \dot{\gamma}_2^2$$

$$=< \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}, \mathrm{I} >< \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\rho < \dot{\gamma}, \ \dot{\beta} >}{\sqrt{\rho}|\dot{\gamma}|\sqrt{\rho}|\dot{\beta}|} = \frac{\rho < \dot{\gamma}, \ \dot{\beta} >}{\rho|\dot{\gamma}||\dot{\beta}|} = \frac{< \dot{\gamma}, \ \dot{\beta} >}{|\dot{\gamma}||\dot{\beta}|} = \cos\alpha$$

3. см. выше

15.10.19

Пример

$$f : \mathbb{R}^*_+ \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$u, v \mapsto \left(\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u},\ \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u},\ u - \operatorname{th} u\right)$$

1. Найдите $\mathrm{I}(F)$
2. Найдите $\mathrm{II}(F)$
3. Найдите кривизну Гаусса
4. Найдите площадь поверхности

Решение

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(-\frac{\cos v \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u},\ -\frac{\sin v \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u},\ \overbrace{1 - \frac{1}{ch^2 u}}^{=\operatorname{th}^2 u}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left(-\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u},\ \frac{\cos v}{\operatorname{ch} u},\ 0\right)$$

$$< \frac{\partial f}{\partial u},\ \frac{\partial f}{\partial u} >= \operatorname{th}^2$$

$$< \frac{\partial f}{\partial u},\ \frac{\partial f}{\partial v} >= 0$$

$$< \frac{\partial f}{\partial v},\ \frac{\partial f}{\partial v} >= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} \operatorname{th}^2 u & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial u} = (-\cos v \frac{\operatorname{th}^2}{\operatorname{ch} u},\ \sin \frac{\operatorname{th}^2 u}{\operatorname{ch} u},\ -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^3 u})$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial u}\right| = \frac{\operatorname{th} u}{\operatorname{ch} u}$$

$$n = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial v} \times \dfrac{\partial F}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial F}{\partial v} \times \dfrac{\partial F}{\partial u}\right|} = \left(-\operatorname{th} u \cos v,\ -\operatorname{th} u \sin v,\ -\frac{1}{\operatorname{ch} u}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \left(-\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u},\ -\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u},\ 0\right)$$

$$L =< \frac{\partial^2 F}{\partial v^2},\ \overline{n} >= -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = \Big(\ ,\ \ ,\ 0\Big)$$

$$M =< \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u},\ \overline{n} >= 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \left(-\cos v \frac{1 - \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch}^3 u},\ -\sin v\ \right)$$

$$N =< \frac{\partial^2 F}{\partial u^2},\ \overline{n} >= \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}(F) = \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} u & 0 \\ 0 & \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \end{pmatrix}$$

$$A(S) = 2\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sh} u}{ch^2 u} du dv = 2 \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} du = 4\pi$$

Пример

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto (F_1(u, v),\ F_2(u, v),\ F_3(u, v))$$

При каких условиях на $\mathrm{I}(F)$ F "сохраняет расстояние" (доказать)

Решение

$$l(\gamma) \stackrel{?}{=} l(F \circ \gamma) = \int_0^1 \|(F \circ \gamma)\| dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 < \dot{\gamma}, \dot{\gamma} >^{\frac{1}{2}} dt \stackrel{\forall \gamma}{=} \int_0^1 < \dot{\gamma}, \mathrm{I}(F)\dot{\gamma} > dt$$

т.к. $< \dot{\gamma}, \dot{\gamma} >=< \dot{\gamma}, \mathrm{I}(F)\dot{\gamma} > \quad \forall \gamma$

$$\mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ - ортогональная}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = b \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - cb = \pm 1 \end{cases}$$

т.к. $a, d > 0 \Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Пример</u>

Сделаем цилиндр из плоскости с сохранением расстояния

$$u, v \overset{F}{\mapsto} (\cos v,\ \sin v,\ u)$$

$$\mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

22.10.19

1.6 Завершаем тему

Пример

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi \text{ - регулярная поверхность}$$

Такая что $\forall u \subset \mathbb{R}^2$ (отк)
Площадь: $\mathcal{A}(\varphi(u)) = \mathcal{A}(u)$

1. Доказать, что $\det(\mathrm{I}(\varphi)) = 1$

2. Доказать, что φ сохраняет углы и площади $\Leftrightarrow$ φ сохраняет расстояние

Док-во

1. $\iint\limits_U \sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)} dudv = \mathcal{A}(u) = \iint\limits_u dudv \quad \forall u \subset \mathbb{R}^2$ отк.

$$\iint\limits_u (\sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)} - 1) dudv = 0 \quad \forall u \subset \mathbb{R}^2$$

Но $\varphi \in C^1 \Rightarrow \sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)} - 1$ непр.
Предположим, что $\sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)} - 1 \neq 0 \Rightarrow \exists (u_0,\ v_0)$ т.ч. $\sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)_{(u_0,\ v_0)}} - 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \exists V \ni (u_0,\ v_0) \text{ т.ч. } \forall (u,\ v) \in V, \quad \sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)} - 1 \neq 0$$

$$\forall (u,\ v) \in V \quad \sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)} - 1 > 0$$

Тогда $\iint\limits_V \sqrt{\det \mathrm{I}(\varphi)} - 1 > 0$ - противоречие
Значит, что $\det \mathrm{I}(\varphi) = 1$

2. ???

Замечание

Есть такая теорема:

$$\varphi : (0,\ 2\pi) \times (0,\ 2\pi) \to TOR \subset \mathbb{R}^3$$

$\varphi \in C^1$ т.ч. $\mathrm{I}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Опр

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$$

Опр

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

Пример

Доказать, что $\mathbb{R}^4 \supseteq S^3 \cong SU(2)$

Док-во

Мы можем перейти $SU(2) \to S^3$, расписав через Re и Im. Получится подобное уравнение как в S^3, аналогично назад:

$$\varphi : S^3 \to SU(2) \subset \mathbb{R}^8$$

$$x, y, z, t \to \begin{pmatrix} x + iy & -z + it \\ z + it & x - iy \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\varphi} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^8$$

Непрерывная функция компактна, значит Хаусдорф

29.19.19

1.7 Кривые и поверхности

<u>**Задача**</u>

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f \in C^2$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z = f(x, y)\}$$

Найти кривизну Гаусса

<u>**Док-во**</u>

$$V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$(x, y) \xrightarrow{\varphi} (x, y, f(x, y))$ почему это рег повер-ть?

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ - ЛН $\Rightarrow$ поверхность регулярная

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$K = \frac{\det(\mathrm{II})}{\det(\mathrm{I})}$$

$$I(f) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_x \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II}(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}$$

Задача

$$f : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\gamma : \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 | f(x) = y\}$$

Найти кривизну γ

Напоминание

$$\gamma : (0,\ 1) \to \mathbb{R}^3 \quad \gamma \in C^2$$

$$t \mapsto (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t),\ \gamma_3(t))$$

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = 1$$

Тогда $æ(t) = |\ddot{\gamma}(t)|$ - кривизна

Док-во

Мы знаем, что для любой кривой есть нат. парам.

$$\gamma(t) = (t,\ f(t)) \quad \gamma : [0,\ 1] \to \mathbb{R}^3$$

$$\exists \varphi : [0,\ l(\gamma)] \to [0,\ 1]$$

$$s \mapsto \varphi(s) = t$$

т.ч. $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi(s)$ т.ч. $|\dot{\widetilde{\gamma}}(s)| = 1 \quad \forall s \in [0,\ l(\gamma)]$

$$\widetilde{\gamma}(s) = (\varphi(s),\ f(\varphi(s)))$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (\dot{\varphi}(s),\ \dot{\varphi}(s) f'(\varphi(s)))$$

мы знаем, что $\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2 f'^2(\varphi(s)) = 1$,

$$\text{т.е.} \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{1 + {f'_{(\varphi(s))}}^2}$$

$$K(s) = \left|\ddot{\widetilde{\gamma}}\right|$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (\underset{(1)}{\ddot{\varphi}(s)}, \ddot{\varphi} f'(\varphi(s)) \underset{(2)}{+} \dot{\varphi}^2 f'' \varphi(s))$$

$$\ddot{\varphi} = ?$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{f'_{\varphi(s)} f''_{\varphi(s)}}{(1 + {f'_{(\varphi(s))}}^2)^2}$$

$$(2) = (\frac{f''}{1+f'^2} - \frac{f'^2 f''}{(1+f'^2)^2})$$

$$(2)^2 = \frac{f''^2}{(1+f'^2)^2} - \frac{2f''^2 f'^2}{(1+f'^2)^3} + \frac{f'^4 f''^2}{(1+f'^2)^4} =$$

$$= \frac{f''^2}{(1+f'^2)^2}(\frac{(1+f'^2)^2 - 2f'^2(1+f'^2) + f'^4}{(1+f'^2)^2}) = \frac{f''^2}{(1+f'^2)^4}$$

$$(1)^2 = \frac{f'^2 f''^2}{(1+f'^2)^4}$$

$$\left|\ddot{\tilde{\gamma}}\right| = \frac{|f''|\sqrt{f'^2+1}}{(1+f'^2)} = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

05.11.19

Задача

$$\varphi : \underset{u,v}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{регулярная, } C^2$$

$$\mathcal{F} = \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix}$$

Главные кривизны k_1, k_2 - это собственные числа матрицы $\mathcal{F}$

Доказать, что:

1. $K = k_1 k_2$
2. $H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{ER+GP-2FQ}{2(EG-F^2)}$

Решение

$$\det \mathcal{F} = \det \mathrm{I}^{-1} \det \mathrm{II} = (\det \mathrm{I})^{-1} \det \mathrm{II} = \det K$$

??? В жардановом базисе $\mathcal{F} = PDP \qquad K = \det P \det D (\det P)^{-1}$

Задача

$$\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

$$\varphi_{uu} = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{11}\varphi_v + L_1 N$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + L_2 N$$

$$\varphi_{vu} = \Gamma^1_{21}\varphi_u + \Gamma^2_{21}\varphi_v + L_2' N$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + L_3 N$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v + tN$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v + sN$$

Доказать, что:

$$t = s = 0$$

$$L_1 = P, \quad L_2 = L_2' = Q$$

$$L_3 = R$$

$$a_{11} = \frac{QF - PG}{EG - F^2}, \qquad a_{12} = \frac{RF - QG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{PF - QE}{EG - F^2}, \qquad a_{22} = \frac{QF - RE}{EG - F^2}$$

<u>Решение</u>

$$P =< \varphi_{uu}, N >= L_1 N^2 = L_1$$

Аналогично L_2, L_3
Знаем, $< N(u,v), N(u,v) >= 1 \quad | \quad \frac{\partial}{\partial u}$

$$2 < \frac{\partial N}{\partial u}, N >= 0 \qquad < \frac{\partial N}{\partial u}, N >= t \Rightarrow t = 0$$

Аналогично s

$$< N, \varphi_u >= 0$$

$$\Rightarrow < N_u, \varphi_u > + < N, \underset{=P}{\varphi_{uu}} >= 0$$

$$\Rightarrow < N_v, \varphi_v > + < N, \underset{=Q}{\varphi_{uv}} >= 0$$

$$< N,_v >= 0$$

$$\Rightarrow < N_u, \varphi_v > + < N, \underset{=Q}{\varphi_{vu}} >= 0$$

$$\Rightarrow < N_v, \varphi_v > + < N, \underset{=R}{\varphi_{vv}} >= 0$$

$$-P = a_{11}E + a_{21}F \quad (1)$$

$$-Q = a_{12}E + a_{22}F \quad (2)$$

$$-Q = a_{11}F + a_{21}G \quad (3)$$

$$-R = a_{12}F + a_{22}G \quad (4)$$

(1), (3) $\Rightarrow a_{11}, a_{21}, \quad$ (2), (4) $\Rightarrow a_{22}, a_{12}$

12.11.19

Утв

$$K = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} \text{ зависит от } \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ и } \frac{\partial F}{\partial u} \quad \frac{\partial F}{\partial v}$$

Задача

1. Доказать, что

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \qquad\qquad E_u = \frac{\partial}{\partial u} E$$

$$\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v$$

$$\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v$$

$$\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u$$

$$\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

$$\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v$$

2. Доказать, что Γ_{ij}^k зависят от $E, F, G, E_u, E_v, F_u, F_v, G_u, G_v$

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + PN$$

$$< \varphi_{uu}, \varphi_u > = \Gamma_{11}^1 \underbrace{< \varphi_u, \varphi_u >}_{E} + \Gamma_{11}^2 \underbrace{< \varphi_v, \varphi_u >}_{F}$$

$$\frac{1}{2} E_u = < \varphi_{uu}, \varphi_u > = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$$

$$E_u = \frac{\partial}{\partial u} < \varphi_u, \varphi_u > = 2 < \varphi_{uu}, \varphi_u >$$

$$< \varphi_{uu}, \varphi_v > = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G$$

$$F'_u - \frac{1}{2}E'_v = < \varphi''_{uu}, \varphi'_v > \; + \; < \varphi'_u, \varphi''_{uv} > \; - \frac{1}{2}(< \varphi''_{uv}, \varphi'_u > \; + \; < \varphi'_u, \varphi''_{uv} >)$$

$EG - F^2 \neq 0$ т.к. опред. I формы

Γ^k_{ij} выражаются из линейной системы из п.1

Задача

$\varphi \qquad C^3$

$$\frac{\partial}{\partial v}\varphi_{uu} = \frac{\partial}{\partial u}\varphi_{uv}$$

Доказать,что

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + Pa_{12} + \partial_v\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + Qa_{11} + \partial_u\Gamma^1_{12} \qquad (*)$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} = a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v$$

$$\partial\varphi_{uu} = \partial_v\Gamma^1_{11}\varphi_u + \Gamma^1_{11}\varphi_{uv} + \partial_v\Gamma^2_{11}\varphi_v + \Gamma^2_{11}\varphi_{vv} + P_vN + PN_v$$

$$N_v = a_{12}\varphi_u = a_{22}\varphi_v$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + QN$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma^1_{22}\varphi_u + \Gamma^2_{22}\varphi_v + RN$$

$$\{\partial v\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + Pa_{12}\}\varphi_u$$

$$\varphi_u v = \Gamma^1_{12}\varphi_u + \Gamma^2_{12}\varphi_v + QN$$

$$\partial_u\varphi_{uv} = \partial_u\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{12}\varphi_{uu} + \partial_u\Gamma^2_{12}\varphi_v + \Gamma^2_{12}\varphi_{uv} + Q_uN + QN_u$$

$$\partial\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + Qa_{11}$$

$$(**)\begin{cases} a_{11} = \frac{QF-PG}{EG-F^2} \\ a_{12} = \frac{RF-QG}{EG-P^2} \end{cases}$$

$$(*)+(**) \Rightarrow \partial_u\Gamma^2_{12} - \partial_v\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} = -EK(\text{крив. Гаусса})$$

19.11.19

Задача

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

Предположим, что $\mathrm{I}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$

1. $\Gamma_{ij}^k, \qquad i,j,k \in \{1,2\}$
2. Найдите K

Решение

1. Воспользуемся предпоследней задачей и из уравнений найдем:

$$\Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{y}$$

2. По последней задаче:

$$K = \frac{\partial_u \Gamma_{12}^2 - \partial_v \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2}{-E} = \frac{0 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\frac{1}{y} + 0 + \frac{1}{y}\frac{1}{y} + 0}{?} = -$$

Задача

Пусть $\gamma : [0,1] \to H \qquad C^2$ (обозначения из пред. задачи)

$$\gamma(0) = a \qquad \gamma(1) = b$$

$$t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t))$$

$k = 1,2$

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}_k + \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0 \qquad \text{ур-ия Лагранжа} \\ \\ < \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{I}_{\gamma_1(t),\ \gamma_2(t)} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix} >= 1 \end{cases}$$

Решение

Первое уравнение даёт:

$$\ddot{\gamma}_1 - \frac{2}{\gamma_2}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2 = 0 \qquad k = 1$$

$$\ddot{\gamma}_2 - \frac{2}{\gamma_2}\left(\dot{\gamma}_1^2 \dot{\gamma}_2^2\right) = 0 \qquad k = 2$$

Второе уравнение:

$$< \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_2^2} \\ \\ \frac{\dot{\gamma}_2}{\gamma_2^2} \end{pmatrix} >= \frac{(\dot{\gamma}_1)^2 + (\dot{\gamma}_2)^2}{\gamma_2^2} = 1$$

<u>Опр</u>

У нас было стандартное скалярное произведение, мы определили новое:

$$< \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} >' := < \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} >$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Где $ab - c^2 > 0$, с.ч. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

$$\gamma : [0,1] \to H$$

$$t \mapsto (\gamma_1(t),\ \gamma_2(t))$$

$$l_{stand} = \int_0^1 |\dot{\gamma}| dt$$

Будем считать с новым ск. произведенем как:

$$l^1(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{< \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix},\ \mathrm{I}_{\gamma(t)} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix} >}$$

<u>Утв</u>

$$\mathbb{R}^n = C^2([0,1],\ \mathbb{R}^2)$$

$$U \in C^2([0,1],\ H) \qquad (U \subset \mathbb{R}^n \qquad C^2([0,1],\ H) \subset C^2([0,1],\ \mathbb{R}^2))$$

$$L : C^2([0,1],\ H) \to \mathbb{R}$$

$$\gamma \mapsto L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{< \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix},\ \mathrm{I}_{\gamma(t)} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix} >}$$

Оказывается,

$$\frac{dL}{d\gamma} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\gamma}_1 - \frac{2}{\gamma_2}\dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 = 0 \\ \ddot{\gamma}_2 - \frac{2}{\gamma_2}\left(\dot{\gamma}_1^2 \dot{\gamma}_2^2\right) = 0 \end{cases}$$

Утв

Решение этой системы:

$$\dot{\gamma}_1 = \alpha\gamma_2^2 \qquad \alpha \in \mathbb{R}\ (const)$$

Решение

Действительно, если подставить в систему, выйдет тождество
ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, РАЗОБРАТЬСЯ, ЧТО ЭТО БЫЛО (Привет, Лада)

$$\alpha \neq 0:$$

$$\gamma_1 = \alpha\gamma_2^2$$

$$\dot{\gamma}_2 = \pm\gamma_2\sqrt{1-\alpha^2\beta^2}$$

Выберем γ_1 так:

$$\gamma_1 = \frac{\tanh h(t)}{\alpha}$$

Тогда γ_2:

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\alpha\,\mathrm{ch}(t)}$$

Значит

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

Пример

$$F : C^2([0,1],\ \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \int_0^1 \mathcal{L}(f(t), f'(t), t)dt$$

Где $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad C^2$
Хотим посчитать:

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(F(f+s\Delta) - F(f)),\ \text{где } \Delta \in C^2([0,1].\ \mathbb{R})_{0,0} \text{ и } \Delta(0) = \Delta(1) = 0$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\int_0^1 \mathcal{L}(f+s\Delta,\ f'+s\Delta',\ t) - \mathcal{L}(f,\ f',\ t)\right)dt =$$

$$= \int_0^1 \lim_{s\to 0}\left(\mathcal{L}(f+s\Delta,\ f'+s\Delta',\ t) - \mathcal{L}(f,\ f',\ t)\right)dt$$

Пример **(посчитать подобный пример)**

$$\mathcal{L}(f,\ f') = f^2 + f^{-2}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\mathcal{L}(f+s\Delta,\ f'+s\Delta',\ t) - \mathcal{L}(f,\ f',\ t)}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(f+s\Delta)^2 + (f+s\Delta)'^2 - f^2 - f'^2}{s} = 2f\Delta + 2f'\Delta'$$

Пример **(продолжение)**

$$= \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f}(f,\ f',\ t)\Delta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}(f,\ f',\ t)\Delta' dt$$

Что произошло?

$$\frac{\mathcal{L}(f+s\Delta,\ f'+s\Delta'.\ t) - \mathcal{L}(f,\ f'+s\Delta',\ t) + \mathcal{L}(f',\ f'+s\Delta,\ t) - \mathcal{L}(f,\ f',\ t)}{s}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\Delta' dt \overset{\text{по частям}}{=} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\Delta - \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right)\Delta$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right)\right)\Delta dt =: dF(t)[\Delta]$$

Как найти условие на f, т.ч. $dF(t)[\Delta] = 0 \quad \forall \Delta \in C^2([0,1],\ \mathbb{R})$?

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right) = 0 \text{ - условие, уравнение Лагранжа}$$

Пример **(поменяем условие на)**

$$F : C^2([0,1],\ \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

$$(f_1, ..., f_n) \mapsto \int_0^1 \mathcal{L}(f_1, ..., f_n, f_1', ..., f_n')dt$$

$$F(f)[\Delta] = 0 \quad \forall \Delta \in C^2([0,1],\ \mathbb{R}^n)?$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\partial f_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i'} = 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$$

Пример **(новая ситуация)**

$$F : C^2([0,1], \mathcal{H}) \to \mathbb{R}$$

$$(\gamma_1,\ \gamma_2) = \gamma \mapsto \int_0^1 \frac{\dot\gamma_1 + \dot\gamma_2^2}{\gamma^2} dt$$

$$dF[\Delta] = 0 \quad \forall \Delta$$

$$dF^r(t)[\Delta] = 0 \quad \forall \Delta$$

Написать уравнение Лагранжа

Решение

$$L(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dot\gamma_1,\ \dot\gamma_2,\ t) = \frac{\dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2}{\gamma_2^2}$$

Лагранжа:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\gamma}\right) = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot\gamma_1}{\gamma_2^2}\right) = 2\frac{2\ddot\gamma_1\gamma_2^2 - 2\gamma_2\dot\gamma_2\dot\gamma_1}{\gamma_2^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_2 \neq 0\\ \ddot\gamma_1\gamma_2 - 2\dot\gamma_1\dot\gamma_2 = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\gamma_2 \neq 0\\ \ddot\gamma_2 - \frac{2\dot\gamma_1\dot\gamma_2}{\gamma_2}\end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\gamma_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\gamma_2}\right) = -2\frac{\dot\gamma_1 + \dot\gamma_2}{\gamma_2^3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{2\dot\gamma_2}{\gamma_2^2}\right) =$$

$$= \frac{\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2}{\gamma_2^3} + \frac{\ddot\gamma_2\gamma_2^2 - 2\gamma_2\dot\gamma_2\dot\gamma_2}{\gamma_2^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_2 \neq 0\\ \dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2 + \ddot\gamma_2\gamma_2 - 2\dot\gamma_2^2 = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_2 \neq 0\\ \dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2 + \ddot\gamma_2\gamma_2 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma_2 \neq 0\\ \frac{\dot\gamma_1 - \dot\gamma_2^2}{\gamma_2} + \ddot\gamma_2 = 0\end{cases}$$

$$\ddot\gamma_k + \sum_i\sum_j \Gamma_{ij}^k\dot\gamma_1\dot\gamma_2$$