2019-11-05 Продолжение док-ва:

Док-во

$$U_1^* U_1 \overset{def}{=} D^{-\frac{1}{2}} \underbrace{V_1^* A^* A V_1}_{=D} D^{-\frac{1}{2}} = E_k$$

Осталось из U_1 и V_1.$\Rightarrow$ U_1 содержит k ортогональных столбцов. Раз они ортогональны, можно дополнить до ортогонального базиса в $\mathbb{C}^n$ и получаем:

$$U = (U_1 U_2) \in M_n(\mathbb{C})$$

Эта матрица ортонормирована из-за ортог. столбцов.

$$S := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m_1 n}(\mathbb{C})$$

$$(U_1 U_2) S (V_1 V_2)^* = U_1 F^{\frac{1}{2}} V_1^* = A$$

Матрица S нужного размера. Матрица U_1 - квадратная и унитарная. С V_1 тоже все ок

Замечание

Такая же теорема верна в $\mathbb{R}$. Только если тут унитарные матрицы, то там ортоганальные

0.1 Квадратичные формы над $\mathbb{R}$

Опр

$$x = (x_1, ..., x_n), \text{ тогда:}$$

$$S(x) = \sum_{i \geqslant j} a_{ij} x_i x_j \text{ - квадратичная форма}$$

Замечание

$$S(x) = \sum_{b_{ij} = b_{ji}} a_{ij} x_i x_j$$

$$b_{ij} = \left[\begin{array}{ll} a_{ij}, & i = j \\ \frac{a_{ij}}{2}, & i > j \\ \frac{a_{ji}}{2}, & j > i \end{array} \right.$$

$$B = (b_{ij}) \text{ - матрица ...?}$$

$$S(x) = x^T B x$$

$$x = My$$

$$S(x) = y^T M^T B M y$$

Опр

S - положительно определена, если:

1. $\forall x \quad S(x) \geqslant 0$
2. $S(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Замечание

Эквивалентно тому, что матрица S - положительно определена. В частности это значит, что верен критерий Сильвестра

Опр

$$S(x) = a_1 x^2 + ... + a_n x_n^2 \text{ - канонический вид}$$

Теорема

Любую матрицу можно привести к каноническому виду с помощью элементарного преопразования

Док-во

Любая самосопряженная матрица представляется в виде: унитарная матрица * диагональная * унитарная сопряженная к первой. В $\mathbb{R}$ формулируется так: любая симметрическая матрица: ортогональная * симметричная * ортоганальная в минус 1. То есть получили то что нам нужно

0.2 Применение сингулярного разложения

$$Ax = b$$

У A столбцов мало, строк много
Хотим решить приближенно, то есть чтобы $\|Ax - b\| \to \min$

Опр

x, который минимизирует разность называется решением методом наименьших квадратов (МНК)

Теорема

$$A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

1. x^* - решение МНК $\Leftrightarrow A^T A x^* = A^T b$
2. $A^T A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = m$

Док-во

1. x^* - решением МНК $\overset{\text{Лада записала}}{\Leftrightarrow}$

$$Ax^* \text{ - проекция b на линейную оболочку столбцов A}$$

$$Ax^* = \operatorname{pr}_L v$$

$$b - \operatorname{pr}_L b \perp L \Rightarrow A^T(b - \operatorname{pr}_L b) = 0$$

Почему $v \perp L \Rightarrow A^T v = 0$?
$\forall e$: $\underbrace{(Ae, v)}_{=(e, A^T v)} = 0$
Какой вектор ортогонален произвольному? Только нулевой. Мы в док-ве воспользовались $(Ax, y) = (x, A^T y)$ (просто расписать)

$$A^T b = A^T A x^*$$

$$A^T A x^* = A^T b$$

$$A^T(Ax^* - b) = 0 \;\Rightarrow\; Ax^* - b \perp L \text{ (аналогично)}$$

$$\Rightarrow b = \underset{\in L}{Ax^*} - (\in \in L^{\perp} Ax^* - b)$$

2. $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T A x = 0$. В $(\Rightarrow)$ - очевидно.
Пусть $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow (Ax)^* Ax \Leftrightarrow Ax = 0$
Будем говорить в этом случае (немного некорректно), что x лежит в ядре матрицы A. Теперь к пункту 2.

$(\Rightarrow)$:

$$A^T A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{Ker} A^T A = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$$

Значит Ax - не имеет решения кроме нулевого. Но это ЛК столбцов матрицы. Значит столбцы матрицы A - ЛН. Значит она имеет полный ранг. Ч.т.д.

$(\Leftarrow)$:
Ранг равен m $\Rightarrow$ столбцы ЛН $\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
Но знаем, что ядро у матриц в $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T A x = 0$ равны нулю $\Rightarrow A^T A$ - обратимо

Теорема

$$A = UDV^T \qquad A \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \qquad D \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

Док-во

D - как бы диагональна. А все диагональные элементы вещ. неотриц. числа, приведем её так:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^+ \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A^+ = VD^+U^T$$

x^* - решение МНК $Ax = b \Leftrightarrow x^* = A^*b$

$$A^TAx^* = A^Tb$$

$$A^TAA^+b \overset{?}{=} A^+b$$

$$VD^T\cancel{U^T}UDV^T\cancel{V}D^+U^Tb \overset{?}{=} VD^TU^Tb$$

$$V\underbrace{D^TDD^+}_{=D^T}U^Tb$$

Опр

$$\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

Свойства

1. $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$

2. $\|A + B\| \geqslant \|A\| + \|B\|$

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A+B)y\| \leqslant \sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| + \sup_{\|z_2\|=1} \|Bz_2\|$$

Пусть sup достигается в z_1, z_2

$$\|Az_1\| \geqslant \|Ay\|$$

$$\|Az_2\| \geqslant \|Ay\|$$

Подробное док-во: (убидили д-ть)

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A+B)y\| = M$$

$$\sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| = m_1$$

$$\sup_{\|z_2\|=1} \|Az_2\| = m_2$$

$M \leqslant m_1 + m_2$

$$\forall z : \|z\| = 1 \qquad \|Az\| \leqslant m_1$$

$$\|Bz\| \leqslant m_2 \Rightarrow \|(A+B)z\| \leqslant \|Az\| + \|Bz\| \leqslant m_1 + m_2$$

3. $\|UA\| = \|AV\|\|A\|,$ если U,V - ортогон. матрицы (очевидно)

$$\|UA\| = \sup_{\|y\|=1} \|UAy\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|$$

4. $\|A\| = \sigma_1(A)$ - наибольшее сингулярное число. Как его получить? Взяли сингулярное разложение $A = UDV^T$. На диагонали D выбираем наибольшее сингулярное число