Содержание

1 Теория групп

2019-09-17

Опр

G - мн-во, $* : G * G \to G,\ (g_1, g_2) \to (g_1 * g_2)\ (g_1 g_2)$

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$
2. $\exists e \in G : eg = ge = g \quad \forall g \in G$
3. $\forall g \in G \quad \exists \widetilde{g} \in G : g\widetilde{g} = g\widetilde{g} = e$
4. $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$

Примеры

1. $(\mathbb{Z}, +)$ - группа
2. $(\mathbb{Z}, \bullet)$ - не группа
3. $(R, +)$ - группа кольца
4. $(R^*, \bullet)$
5. Группа самосовмещения D_n, например D_4 - квадрат, композиция - группа, $|D_n| = 2n$
6. $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| \neq 0\}$, умножение - группа
7. $\mathbb{Z}n\mathbb{Z}$ - частный случай п.3,4

Теорема (простейшие св-ва групп)

1. e - единственный, e, e' - нейтральные: $e = ee' = e'$
2. $\widetilde{g}$ - единственный

   Пусть $\widetilde{g}, \hat{g}$ - обратные, тогда $\widetilde{g}g = g\widetilde{g} = e = \hat{g}g = g\hat{g}$

   $\hat{g} = e\hat{g} = (\widetilde{g}g)\hat{g} = \widetilde{g}(g\hat{g}) = \widetilde{g}e = \widetilde{g}$
3. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

   Это верно, если $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (b^{-1}a^{-1})(ab) = e$, докажем первое:

   $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = ((ab)b^{-1})a^{-1} = (a(bb^{-1}))a^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e$
4. $(g^{-1})^{-1} = g$

Опр

$g \in G \quad n \in \mathbb{Z}$, тогда $g = \left[\begin{array}{l} \overbrace{g...g}^{n}, \quad n > 0 \\ e, \quad n = 0 \\ \underbrace{g^{-1}...g^{-1}}_{n}, \quad n < 0 \end{array}\right.$

Теорема (св-ва)

1. $g^{n+m} = g^n g^m$
2. $(g^n)^m = g^{nm}$

Опр

$g \in G$, $n \in N$ - порядок g ($ordg = n$), если:

1. $g^n = e$
2. $g^m = e \to m \geqslant n$

Примеры

1. D_4 ord(поворот 90°) $= 4$

   D_4 ord(поворот 180°) $= 2$
2. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ $ord(\overline{1}) = 6$

   $ord(\overline{2}) = 3$

Утв

$g^m = e \quad ord(g) = n \to m \vdots n$ (n>0)

Док-во

$m = nq + r$, $0 \leqslant r < n$ $e = g^m = g^{nq+r} = (g^n)^q g^r = g^r \to r = 0$

Опр

$H \subset G$ называется подгруппой G (H $<$ G) (и сама является группой), если:

1. $g_1, g_2 \in H \to g_1 g_2 \in H$
2. $e \in H$
3. $g \in H \to g^{-1} \in H$

Примеры

1. $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

2. D_4

3. $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : \quad |A| = 1\}$, $SL_n(K) < GL_n(K)$

Мультипликативная запись	Аддитивная запись
$g_1 g_2$	$g_1 + g_2$
e	0
g^{-1}	$-g$
g^n	ng

Опр

$H < G$, $g_1, g_2 \in G$, тогда $g_1 \sim g_2$, если:

1. $g_1 = g_2 h$, $h \in H$ (левое)

2. $g_2 = h g_1$, $h \in H$ (правое)

Док-во (эквивалентность)

1. (симметричность) $g_1 = g_2 h \overset{*h^{-1}}{\to} g_2 = g_1 h^{-1}$

2. (рефлексивность) $g = ge$

3. (транзитивнось) $g_1 = g_2 h$, $g_2 = g_3 h \to g_1 = g_3(h_2 h_1)$, где $h_2 h_1 \in H$

Опр

$[a] = \{b : ab\}$классы эквивалентности

Опр

$[g] = gH = \{gh, h \in H\}$ (левый класс смежности)
$gh \sim g \to gh \in [g]$
$g_1 \in [g] \to g_1 \sim g \to g_1 = gh$

Утв

$[e] = H$
Установим биекцию:
$[g] = gh \leftarrow H$
$gh \leftarrow h$
Очевидно, сюръекция, почему инъекция? $gh_1 = gh_2 \overset{*g^{-1}}{\to} h_1 = h$

Теорема (Лагранжа)

$H < G$, $|G| < \infty$, тогда $|G| \vdots |H|$ (уже доказали!)

2019-09-10

Следствие (теорема Эйлера)

Напоминание
$n, a \in \mathbb{N}$, $(a, n) = 1$, тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1(mod n)$

Док-во

Рассмотрим $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})*$ $|G| = \varphi(n)$
$\overline{a} \in G$, $ord\overline{a} = k$
$\varphi(n) \vdots k \Rightarrow \varphi(n) = kl$
$\overline{a} = \overline{1}$
$\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}$

Опр

G - циклическая группа, если $\exists g \in G : \forall g' \in G : \exists k \in \mathbb{Z} : g' = g^k$
Такой g называется образующим

Опр

$\mathbb{Z}$ (образующий - единица и минус единица)

Замечание

Любая циклическая группа - коммунитативна

Док-во

$g'g'' = g''g' = g^k g^l = g^l g^k$

Пусть G,H - группы, рассмотрим $G \times H = \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$
Введем операцию $(g, h) * (g', h') \stackrel{def}{=} (g *_G g', h *_H h')$
Докажем, что это группа.
Доказательство ассоциативности: $((g, h)(g', h'))(g'', h'') \stackrel{?}{=} (g, h)((g', h')(g'', h'')$
$(gg', hh')(g'', h'') \stackrel{?}{=} (g, h)(g'g'', h'h'')$
$((gg')g'', (hh')h'') \stackrel{?}{=} (g(g', g''), h(h'h'')$ - очевидно
Нейтральный элемент:
Рассмотрим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1})\}$

Опр

Конечная группа порядка n является циклической тогда и только тогда, когда она содержит элемент порядка n ($|G| = n$, G - циклическая $\equiv$ $\exists g \in G : ordg = n$)

Рассмотрим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ - циклическая
$((\overline{1}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{2}))$
Рассмотрим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ - не циклическая

Опр

$\varphi : G \to H$ - биекция и $\varphi(g_1, g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$, тогда φ - изоморфизм

Примеры

1. $D_3 \to S_3$

2. $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \leftarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
   $(\frac{2\pi a}{n} + i \sin \frac{2\pi a}{n} = \varphi \overline{a} \overline{a})$
   $\overline{a} = \overline{b} \to \varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{b})$
   $\varphi(\overline{a} + \overline{b}) \stackrel{?}{=} \varphi(\overline{a})\varphi(\overline{b})$
   $\cos \frac{2\pi(a+b)}{n} + i \sin \frac{2\pi(a+b)}{n} = (\cos \frac{2\pi a}{n} + i \sin \frac{2\pi a}{n})$

Опр

Две группы называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм

Утв

Изоморфизм - отношение эквивалентности

Док-во

т.к. композиция изоморфизмов - изоморфизм $G \xrightarrow{e} H \xrightarrow{\psi} H$
$(\psi \circ \varphi)(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1)\varphi(g_2)) = \psi(\varphi(g_1))\psi(\varphi(g_2)) = (\psi \circ \varphi)(g_1) \circ (\psi \circ \varphi)(g_2)$
Рефлексивность - тождественное отображение - изоморфизм
Транзитивность: $G \underset{\varphi}{\to} H$, $H \underset{\varphi^{-1}}{\to} G$

Теорема

G - циклическая группа
1) $|G| = n \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
2) $|G| = \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}$

Док-во

1) g - обр. G, значит $G = \{e, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$ (среди них нет одинаковых), построим изоморфизм в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\varphi(g^k) = \overline{k}$
Проверим, что $\varphi(g^k g^l) = \varphi(g^k) + \varphi(g^l) = \overline{k} + \overline{l}$

Левая часть: $\varphi(g^{k+l} = \overline{(k+l) \mod n} = \overline{k} + \overline{l}$
2) $G = \{..., g^{-1}, e, g, g^2, ...\}$ (тоже нет совпадающих элементов, иначе $g^k = g^l$, при $k > l$, тогда $g^{k-l} = e$, но тогда конечное число элементов, потому что оно зацикливается через каждые $k-l$ элементов), построим отображение в $\mathbb{Z}$.
$\varphi(g^n) = n$ -, очевидно, биекция. И нужно доказать, что $\varphi(g^n g^k) = \varphi(g^n) - \varphi(g^k) = n + k$

2019-09-17

Утв

$|G| = p$, простое

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}} \qquad g \in G, g \neq e$

ord $g = p$

$\Rightarrow G = \{e = g^0, g^1, ..., g^{p-1}\}$

Утв

H, G - группы, $\quad g \in G$

$\varphi : G \to H$ - изоморфизм

$\Rightarrow$ ord $g =$ ord $\varphi(g)$

ord $g = n \qquad g^n = e$

$\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e) = e \qquad \varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$

$\varphi(g)^n \overset{?}{\Rightarrow} e \Rightarrow m \geqslant n$

$m \in \mathbb{N}$

$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = e = \varphi(e) \quad \Rightarrow g^m = e \Rightarrow m \geqslant n$

Опр

$H < G$

H - нормальная подгруппа, если $\forall h \in H, g \in G$

$g^{-1}hg \in H$ - сопряжение элемента h с помощью элемента g

рисунок 1

$H \lhd G$

Утв

$H \lhd G \Leftrightarrow$ - разбиение на л. и п. классы смежности по H совпадают

$\forall g \quad gH = Hg$

Док-во

$$\Rightarrow h \in H \qquad gh \in gH$$

$$gh = \underbrace{(g^{-1})^{-1}hg^{-1}}_{\in H}g = h_1g$$

$$\Leftarrow g \in G, h \in H$$

$$g^{-1}hg = h_1$$

$$hg \in Hg = gH \Rightarrow gh_1, h_1 \in H$$

$$H \lhd G$$

$$g_1H * g_2H \overset{def}{=} g_1g_2H$$

$$\widetilde{g_1}H = g_1H$$

$$\widetilde{g_2}H = g_2H \overset{?}{\Rightarrow} \widetilde{g_1}\widetilde{g_2}H = g_1g_2H$$

$$g_2^{-1}h_1g_2 = h_3 \in H$$

$$\widetilde{g_1}\widetilde{g_2}h = g_1h_1g_2h_2h = g_1g_2(\underbrace{g_2^{-1}h_1g_2}_{=h_3})h_2h$$

$$\widetilde{g_1}H = g_1H \Rightarrow \widetilde{g_1} = g_1h_1$$

$$\widetilde{g_2}H = g_2H \Rightarrow \widetilde{g_2} = g_2h_2$$

$$eH = H$$

$$1) \quad eH * gH = (eg)H = gH$$

$$2) \quad (g_1H * g_2H) * g_3H \overset{?}{=} g_1H * (g_2H * g_3H)$$

$$(g_1g_2)H * g_3H = (g_1g_2)g_3H$$

$$3) \quad gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH$$

$$G_{/H}$$

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, h$$

$$G = \mathbb{Z}$$

$$H = h\mathbb{Z} \quad g_1 - g_2 \in n\mathbb{Z}$$

$$[a] + [b] = [a + b]$$

Пример

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \text{ - коммутатор}$$

$$g,h \in G$$

$$K(G) = \{[g_1,h_1],...,[g_n,h_n], g_i,h_i \in G\} \text{ - коммутант}$$

Док-во

Коммутант - подгруппа

$$K(G) < G$$

$$[e,e] = e$$

$$[g_1,h_1]...[g_n,h_n]$$

$$[g,h]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h,g]$$

$$([g_1,h_1]...[g_n,h_n])^{-1} = [h_1,g_1]...[g_n,h_n]$$

$$g^{-1}[g_1,h_1]...[g_n,h_n]g =$$

$$= (g^{-1}[g_1,h_1]g)(g^{-1}[g_2,h_2]g)...(g^{-1}[g_n,h_n]g)$$

$$g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}g =$$

$$= (g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}(gh_1^{-1})h_1g^{-1})h_1^{-1}g$$

$$[g^{-1}g_1,h_1] \qquad [h_1,g^{-1}]$$

Утв

$$G_{/K(G)} \text{ - комм}$$

Док-во

$$g_1,g_2 \in G \qquad g_1K(G)g_2K(G) \stackrel{?}{=} g_2K(G)g_1K(G)$$

$$g_1g_2K(G) = g_1g_2K(G) \qquad g_2K(G)g_1K(G) = g_2g_1K(G)$$

$$[g_1,g_2] = g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in K(G)$$

Утв

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{mn}$, если $(m, n) = 1$

$[a]_{nm} \to ([a]_n, [a]_m)$

$[a]_{nm} = [a']_{mn} \Rightarrow [a]_n = [a']_n, [a']_m = [a']_m$

$\forall b, c \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} [x]_n = [b]_n \\ [x]_m = [c]_m \end{cases}$

$\begin{matrix} [a]_n = [b]_n \\ [a]_m = [b]_m \end{matrix} \Rightarrow [a]_{mn} = [b]_{mn}$

$\begin{matrix} a \equiv b(n) \\ a \equiv b(m) \end{matrix} \Rightarrow a \equiv b(mn)$

Опр

$\varphi : G \to H$ - гомоморфизм

$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$

изоморфизм = гомоморфизм + биективность

$\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ - множество гомоморфизмов

Примеры

1) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$

$z \to |z|$

2) $GL_n(K) \to K^*$

$A \to \det A$

3) $S_n \to \{\pm 1\}$

$\sigma \to \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ - четн.} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ - неч.} \end{cases}$

4) $a \in G \quad G \to G$

$g \to a^{-1} g a$

$(a^{-1} g a)(a^{-1} g_1 a) = a^{-1} g_g 1 a$

../../../template/template
2019-09-24

Напоминание

$$G/K(G) \text{ - коммутативна}$$

Утв

$$H \lhd G \quad G/_H \text{ - комм}$$

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad (g_1 H)(g_2 H) = (g_2 H)(g_1 H)$$
$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 \in H \Rightarrow K(G) \subset H$$

Свойства **(гомоморфизма)**

$$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$$

1. $f(e_G) = e_H \qquad f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e)$
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$
$$f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e$$
3. Композиция гомоморфизмов

Опр

$$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$$

$$Ker f = \{g \in G : \ f(g) = e\} \subset G$$
$$\mathrm{Im}\, f = \{f(g) : \ g \in G\} \subset H$$

Утв

Ker и Im - подгруппы G

Док-во

1. $f(g_1) = f(g_2) = e \Rightarrow f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = e \cdot e = e$
2. $f(e) = e$
3. $f(g) = e \Rightarrow f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = e^{-1} = e$

1. $f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1 g_2)$

2. $e = f(e)$
3. $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

<u>Утв</u>

Ker - нормальная подгруппа G

<u>Док-во</u>

$$Kerf \lhd G?$$

$$g \in G \qquad a \in Kerf$$

$$f(g^{-1}ag) = f(g)^{-1} \underbrace{f(a)}_{=e} f(g) = e$$

<u>Утв</u> (основная теорема о гомоморфизме)

$$G/_{Kerf} \cong \operatorname{Im} f$$

<u>Док-во</u>

Докажем, что это корректное отображение:

$$Kerf = K$$

$$\varphi(gK) \overset{def}{=} f(g) \qquad \varphi : G/_{Kerf} \to \operatorname{Im} f$$

$$gK = g'K \overset{?}{\Rightarrow} f(g) = f(g')$$

$$g' = g \cdot a, \quad a \in K \qquad f(g') = f(g) \cdot \underbrace{f(a)}_{=e} = f(g)$$

Докажем, что φ - гомоморфизм:

$$f(g_1)f(g_2) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K) \overset{?}{=} \varphi(g_1Kg_2K) = \varphi((g_1g_2)K) = f(g_1g_2)$$

$$\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K) \overset{?}{\Rightarrow} g_1K = g_2K$$

Докажем, что это биекция. Что сюръекция - очевидно

$$f(g_1) = f(g_2) \qquad \Rightarrow g_1g_2^{-1} \in K$$

$$\underbrace{f(g1)f(g_2)^{-1}}_{=f(g_1)f(g_2^{-1})} = e$$

Напоминание

$$SL_N(K) \text{ - квадратные матрицы с } \det = 1$$

Опр

$$\det : GL_n(K) \to K^*$$

Но это отображение - сюръекция, а значит:

$$GL_n(K)/_{SL_n(K)} \cong K^*$$

$$SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| = 1\}$$

Пример (1)

$$S_n \to \{\pm 1\}$$

$$S_n/_{A_n} \cong \{\pm 1\} (\cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$$

Пример (2)

$$G \times H \to G$$

$$(g_1 h) \to g$$

$$G \times H/_{e \times H} \cong G$$

1.1 Действие группы на множестве

Опр

$$M \text{ - множество}$$

$$G \text{ - группа}$$

$$G \times M \to M$$

$$(g, m) \to gm$$

1. $g_1(g_2 m) = (g_1 g_2)m \quad \forall g_1 g_2 \in G, \quad m \in M$
2. $em = m \quad \forall m \in M$

Если задано такое отображение, то говорим, что группа G действует на множестве M

<u>Пример</u> (1)

$$A = k^n \qquad (A, v) \to A_v$$

$$G = GL_n(K)$$

$$A(B_v) = (AB)_v$$

$$E_v = v$$

<u>Пример</u> (2)

M = {количество раскрасок вершин квадрата в два цвета}

$$G = D_4$$

$$\cdot \begin{matrix} \text{ч} & \text{ч} \\ \text{б} & \text{ч} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ч} & \text{б} \\ \text{ч} & \text{ч} \end{matrix}$$

$$M = G$$

$$gm = gm$$

<u>Опр</u>

$$m \in M$$

$Stab\ m = \{g \in G : gm = m\}$ - стабилизация

$Orb\ m = \{gm,\ g \in G\}$ - орбита

<u>Утв</u>

$$Stab\ m < G$$

<u>Док-во</u>

Доказательство того, что стабилизатор - подгруппа:

1. $g_1, g_2 \in Stab\ m$

$$(g_1 g_2)m = g_1(\underbrace{g_2 m}_{=m}) = g_1 m = m$$

2. $e \cdot m = m$

3. $gm = m \overset{?}{\Rightarrow} g^{-1}m = m$

$$gm = m$$

$$\underbrace{g^{-1}gm}_{=(g^{-1}g)m=em=m} = g^{-1}m$$

Утв

$$m_1, m_2 \in M$$

$$m_1 \sim m_2, \text{ если } \exists g \in G : gm_1 = m_2$$

$$\Rightarrow \sim \text{ - отношение эквив}$$

Док-во

$$\text{(рефл.) } gm_1 = m_2 \Rightarrow g^{-1}m_2 = m_1 \quad g^{-1} \in G$$

$$\text{(симм.) } em = m, \quad e \in G$$

$$\text{(тран.) } \left.\begin{aligned} gm_1 = m_2 \\ g'm_2 = m_3 \end{aligned}\right| \Rightarrow (g'g)m_1 = g'(gm_1) = g'm_2 = m_3$$

Утв

$$|Orb\ m| \cdot |Stab\ m| = |G|$$

Док-во

$$Stab\ m = H$$

$$\{gH,\ g \in G\} \to Orb\ m$$

$$gH \to gm$$

Хотим доказать, что это корректно

$$gH = g'H \overset{?}{\Rightarrow} gm = g'm$$

$$g' = ga, \quad g \in H$$

$$g'm = (ga)m = g(am) = gm$$

Хотим доказать биективность. Сюръективность - очев. Инъективность:

$$gm = g'm \Rightarrow gH = g'H$$

$$m = em = (g^{-1}g')m = g^{-1}(gm) = g^{-1}(g'm) = (g^{-1}g')m$$

$$\Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow gH = g'H$$

Лемма (Бернсайда)

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m\}$$

../../../template/template
2019-10-01

Напоминание

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m^2\}$$

Док-во

$$\sum_{g\in G}|M^g| = |\{(g,m)\in G\times M : gm = m\}| =$$

$$= \sum_{m\in M}|Stab\ m| = |G|\sum_{m\in M}\frac{1}{|Orb\ m|} = |G|\cdot\text{Кол-во орбит}$$

2 Евклидовы и унитарные пр-ва

Опр

$$V \text{ - в.п. над } \mathbb{R}$$

Введем отображение

$$V\times V\to\mathbb{R}$$

$$(u,v)$$

Свойства этого отображения

1. Симметричность

$$(u,v) = (v,u) \quad \forall u,v\in V$$

2. Линейность

$$(\lambda u, v) = \lambda(u,v) \qquad \lambda\in\mathbb{R} \quad u,v\in V$$

$$(u+u',v) = (u,v)+(u',v) \qquad u,u',v\in V$$

3. $(u,v)\geqslant 0 \qquad \forall u\in V$

$$(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Такое пр-во V с введенным на нем таким отображением мы называем Евклидовым пр-вом, а отображение скалярным.

Напоминание

$$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \text{ - квадр. матрица}$$

$$Tr\ C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \text{ - след (Trace)}$$

(Сумма элементов главной диагонали)

Примеры

1. Школьные вектора
2. $\mathbb{R}^n$

$$((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_n$ конечномерное пр-во

$$(f, g) = \int_a^b fg dx$$

4. $V = M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) = Tr\ AB^T$$

(См. след в напоминании)

Опр

$$e = \{e_1, ..., e_n\} \text{ - базис } V$$

$$a_{ij} = (e_i, e_j)$$

$$\Gamma_e = \{a_{ij}{}_{i,j=1}^{n}\} \text{ - матрица Грама}$$

Свойства (матрицы Грама)

1. Матрица невырожд
2. e, f - базисы

$$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e M_{e\to f}$$

3. $\Gamma_e = \{a_i j\}$

$$u = \sum \lambda_i e_i$$

$$v = \sum \mu_j e_j$$

$$(u, v) = (\sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j)$$

$$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e [v]_e$$

Док-во

1. $\exists\, |\Gamma_e| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ не все 0 :

$$\sum \lambda_i (e_i, e_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum \lambda_i e_i,\ e_j\right) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum_i \lambda_i e_i,\ \sum_j \lambda_j e_j\right) = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_i e_i = 0$$

противоречие

2. $\exists M_{e \to f} = \{a_{ik}\} \qquad f_k = \sum a_{ik} e_i$

$$f_l = \sum a_{jl} e_j$$

$$(f_k, f_l) = \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} (e_i, e_j)$$

$$a_{ik} (e_i, e_j) a_{je}$$

Напоминание: X, Y- матр $\qquad X \times Y = Z \quad z_{ij} = \sum x_{is} y_{sj}$

Опр

V - в.п. над $\mathbb{R}$

$V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$v \to \|v\|$ - норма

1. $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V$

2. Нер-во треугольника

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

3. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Если такое отобр. существует, то оно называется <u>нормой</u>

<u>Утв</u>

(u, v) - ск. пр-ве

$\Rightarrow \|u\| = \sqrt{(u, u)}$

<u>Пример</u>

$\mathbb{R}^n$

$\|x\| = \max |x_i|$

$\|x\| = \sum\limits_i |x_i|$

<u>Теорема</u> (Нер-во Коши - Буняковского)

$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$

<u>Док-во</u>

$\varphi(t) = \|u + rv\|^2 = (u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + 2(u, v)t + t^2\|v\|^2$

$D = 4(u, v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$

$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

$(u + v, u + v) \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$

$(u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$

$2(u, v) \leqslant 2\|u\|\|v\|$

<u>Утв</u> (Теорема Пифагора)

Если $u \perp v \Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

<u>Док-во</u>

$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$

Опр (Ортогональное дополнение)

V - евкл. пр-во

$U \subset V \qquad U^{\perp} = \{v \in V : (v, u) = 0 \quad \forall u \in U\}$

Множество всех векторов, которые ортогональны всем векторам из U
Такое мн-во называется ортогональным дополнением

Утв

$U^{\perp}$ - под-пр V

Док-во

$$\begin{matrix} (v, u) = 0 \quad \forall u \\ (v', u) = 0 \quad \forall u \end{matrix} \Rightarrow (v + v', u) = 0 \quad \forall u$$

$(v, u) = 0 \quad \forall u$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda v, u) = 0 \quad \forall u$

Тогда $U^{\perp}$ дей-во линейное под-прво V

Свойства

$V = U \oplus U^{\perp}$

$u \in U \cap U^{\perp}$

$u \in U \quad u \in U^{\perp}$

$(u, u) = 0$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - базис U дополняем до базиса V

$e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$ - базис V

$v \in U^{\perp} \quad v = \sum \lambda_i e_i + \sum \mu_j f_j$

$v \in U^{\perp} \Leftrightarrow (v, e_k) = 0 \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$

$(v, e_k) = \sum \lambda_i (e_i, e_k) + \sum \mu_j (f_j, e_k) = 0 \qquad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$

это матрица

$$\begin{array}{c|c|c} & \text{n} & \text{m} \\ \hline \text{n} & \Gamma_e & \text{C} \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \Gamma_e x + C_y = 0\}$ - размерность этого m

$(x, y) \to y$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$x = -\Gamma_e^{-1} e_y$

$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$

../../../template/template
2019-10-15

Свойство

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Док-во

$$\left.\begin{aligned} \dim U^\perp + \dim U = \dim V \\ \dim (U^\perp)^\perp + \dim U^\perp = \dim V \end{aligned}\right| \Rightarrow \dim (U^\perp)^\perp = \dim U$$

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V\}$$

Опр

$$U < V, \quad v \in V$$

$$U \oplus U^\perp = V$$

$$\Rightarrow \exists! u \in U,\ w \in U^\perp : v = u + w$$

u называется ортогональной проекцией

$$\text{Обозначение: } \operatorname{pr}_U v \overset{\text{def}}{=} u$$

$$v = \operatorname{pr}_U v + w \Rightarrow (v, u) = (\operatorname{pr}_U v, u)$$

Свойства (орт. проекции)

1. $\operatorname{pr}_U (v + v') = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{pr}_U v'$

$$v = u + w,\ u \in U, w \in U^\perp$$

$$v' = u' + w',\ u \in U,\ w' \in U^\perp$$

$$v + v' = (\underset{\in U}{u + u'}) + (\underset{\in U^\perp}{w + w'})$$

2. $\|v - \operatorname{pr}_U v\| \leqslant \|v - u\| \quad \forall u \in U$

$$\|v - u\|^2 = \|\underset{\in U^\perp}{v - \operatorname{pr}_U v}\|^2 + \|\underset{\in U}{\operatorname{pr}_U v - u}\|^2$$

Опр

$e_1, ..., e_n$ - базис V

Базис называется ортогональным, есди $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ - ортогональный баз

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \left[\begin{array}{l} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{array}\right.$$

Процесс ортоганализации Грамма-Шмидта:

$e_1, ..., e_n$ - базис

Хотим ортонормированный $f_1, ..., f_n :< f_1, ..., f_k >=< e_1, ...e_k > \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$:
Строим по индуции:
Б.И. k=1:

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

И.П. $k - 1 \to k$:

$$f_k = e_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f_i$$

$$(f_k, f_j) \stackrel{?}{=} 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant k - 1$$

$$(f_k, f_j) = (e_k, f_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\lambda_i (f_i, f_j)}_{=\lambda_j}$$

$$\lambda_j = -(e_k, f_j) \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant k - 1$$

Ортонормируем f_k, чтобы $(f_k, f_k) = 1$

Утв

Если $e_1, ..., e_n$ - ОНБ U

$$\operatorname{pr}_U v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i$$

Док-во

Хотим доказать $v - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i \in U^{\perp}$
Достаточно доказать, что вектор ортогонален любому

$$\underset{1 \leqslant j \leqslant n}{(v - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i) e_j} = (v, e_i) - \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)(e_i, e_j)$$

Пример

$\mathbb{R}^n$

$(x;y) = \sum x_i y_i$

$e_i = (0, 0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$

Пример

$$T_n = \{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\}$$

$$(f;g) = \int_0^{2\pi} fg dx$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx_{k=1,...,n}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx_{k=1,...,n}\right\}$$

$$\operatorname{pr}_{T_n} f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx\right)\cdot \cos kx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx\right)\cdot \sin kx$$

Опр

$A \in M_n(K)$ назыв. ортогональной, если

$A^T A = E$

$O_n(K)$ - множество орт. матриц

Утв

$O_n(K)$ - группа по умножению

Док-во

$$\left.\begin{array}{l} A^T A = E \\ B^T B = E \end{array}\right| \Rightarrow (AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{E} B = B^T B = E$$

$A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

$(A^{-1})^T A^{-1} \overset{?}{=} E$

$(A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = E$

Утв

$$L \in L(V)$$

1. $(L_v, L_{v'}) = (v, v') \quad \forall v, v' \in V$
2. $\|L_v\| = \|v\| \qquad \forall v \in V$
3. $[L]_e \in O_n(\mathbb{R})$, если e - отронорм. базис

Док-во

$2 \to 1$

$$(v, v') = \frac{1}{2}(\|v + v'\| - \|v\|^2 - \|v'\|^2)$$

$3 \to 2$

$$[L_v]_e = [L]_e[v]_e$$

$$\|L_v\|^2 = (L_v, L_v) = [L_v]_e^T \Gamma_e [L_v]_e = [L_v]_e^T [L_v]_e =$$
$$= [v]_e^T \underbrace{[L]_e^t [L]_e}_{=E} [v]_e = [v]_e^T [v]_e = [v]_e^T \Gamma_e [v]_e = (v, v) = \|v\|^2$$

$1 \to 3$

$$\mathcal{E}_i^T [L]_e^T [L]_e \mathcal{E}_j$$

$$\mathcal{E}_i = (0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$$

$$\mathcal{E}_i^T A \mathcal{E}_j = a_{ij}$$

$$\mathcal{E}_i = [e_i]_e$$

$$\mathcal{E}_j = [e_j]_e$$

$$[e_i]^T [L]_e^T [L]_e [e_j]_e = [L_{e_i}]_j^T [L_{e_j}]_e = [L_{e_i}]_e^T \Gamma_e [L_{e_j}]_e = (L_{e_i}, L_{e_j}) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Опр (унитарного пространства)

U - в.п. над $\mathbb{C}$

$$U \times U \to ()$$

1. $(u+v,\ w) = (u,\ w) + (v,\ w) \quad \forall u, v, w \in U$

$$(\lambda v,\ w) = \lambda(v, w) \quad \forall \lambda \in C, \quad v, w \in U$$

2. $(u,\ v) = \overline{(v,\ u)}$
3. $(u,\ u) \geqslant 0$
4. $(u,\ u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Пример

R^n	C^n
(x,y) $= \sum x_i y_i$	(x,y) $= \sum x_i \overline{y_i}$

$e_1, ..., e_n$ - базис

$\Gamma_e = \{(e_i,\ e_j)\}_{i,j}$ - матрица грамма

$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e \overline{[v]}_e$

$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e \overline{M}_{e\to f}$

$$|(u, v)| < \|u\| \cdot \|v\|, \quad \|u\| = \sqrt{(u,\ u)}$$

$$\|tu + v\|^2 = t^2\|u\| + t\underbrace{((u,\ v) + (v,\ u))}_{=2\operatorname{Re}(u,v)} + \|v\|^2$$

$$\operatorname{Re}(u, v) \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$$

$$(u,\ v) = |(u,\ v)| \cdot z| \Rightarrow |z| = 0$$

$$\operatorname{Re}(\frac{1}{z}u,\ v) \leqslant \|\frac{1}{z}u\|^2\|v\|^2 = \|u\|\|v\|$$

Напоминание: $\|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u,\ \lambda u)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(u, u)} = |\lambda|\,\|u\|$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}(u,\ v) = \operatorname{Re}|(u, v)| = |(u,\ v)|$$

Доказали КБШ

Опр

V - в.п. над K

$$V^* = L(V,\ k)$$

Пример

$$v \in V \text{ - евклидово пр-во (унитарное)}$$

$$\varphi_v(w) = (w,\ v) \quad \varphi_v : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Хотим доказать: $\varphi \in V^* \Rightarrow \exists! v \in V : \varphi = \varphi_v$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - ОНБ V

$$v = \sum \lambda_i e_i$$

Нужно $\forall w \in V \quad (w,\ v) = \varphi(w)$, т.к. φ - линейный функционал

$$\Leftrightarrow \forall j \quad (e_j,\ v) = \varphi(e_j)$$

$$(e_j,\ \sum \lambda_i e_i) = \sum_i \overline{\lambda}_i (e_j,\ e_i)$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$$A^* = \overline{A}^T \text{ - сопряженная матрица}$$

Свойства

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A*$
3. $(A+B)^* = A^* + B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Утв

V - унитарное пр-во, $L \in L(V)$, $u \in V$

$$\varphi_n(v) = (Lv,\ u) \in V^*$$

$$\Rightarrow (Lv,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$\exists! w_u \in V: \quad (v,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$u \to w_u$$

Утверждается, что отображение линейно

Док-во

$$\begin{array}{c|c} \text{(Lv, u)} = \text{(v, w}_u) & \text{(Lv, u+u')} = \text{(Lv, u)} + \text{(Lv, u')} = \\ \text{(Lv, u')} = \text{(v, w}_{u'}) & = \text{(u w}_u) + (v,\ w_{u'}) = (v,\ w_u + w_{u'}) = (v,\ w_{u+u'}) \end{array}$$

$$(Lv,\ \lambda u) = \overline{\lambda}(Lv,\ u) = \overline{\lambda}(v,\ w_u) = (v,\ \underbrace{\lambda w_u}_{=w_{\lambda u}})$$

$$L^* u = w_u \quad (Lv,\ u) = (v,\ L^* u)$$

Опр

L^* - эрмитов сопряженный оператор

Свойства

1. $L^{**} = L$

$$(L^* v,\ u) = (v,\ L^{**} u)$$

$$(L^* v,\ u) = \overline{(u,\ L * v)} = \overline{(Lu,\ )} = (v,\ Lu)$$

$$\Rightarrow L^{**} u = Lu \quad \forall u \in V$$

Почему так? $(v,\ w) = (v,\ w') \quad \forall v \Rightarrow w = w'$

$$(v,\ w - w') = 0$$

$$v = w - w'$$

$$\|w - w'\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow w - w' = 0$$

2. $(\lambda L)^* = \overline{\lambda} L^*$

$$(\lambda L)v,\ u) = (v,\ (\lambda L)^* u)$$

$$(\lambda L)v,\ u) = (\lambda \cdot Lv,\ u) = \lambda(Lv,\ u) = \lambda(v,\ L^* u) = (v,\ \overline{\lambda} L^* u)$$

3. $(L + L')^* = L^* + L'^*$ аналогично

4. $(LNv,\ u) = (v,\ (LN)^* u)$

$$(LNv,\ u) = (v,\ N^* L^* u) \text{ и то же, что делали раньше}$$

5. $[L]_e^* = [L^*]_e$, если e - ОНБ

$$Le_i = \sum a_{li} e_l \quad [L]_e = \{a_{ij}\}$$

$$Le_j = \sum b_{kj} e_k \quad [L]_e = \{b_{kj}\}$$

$$(\underbrace{Le_i, e_j}_{=a_{ij}}) = (\underbrace{e_i,\ L^* e_j}_{=\bar{b}_{ij}})$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

A - унитаная, если $A^* A = E$

$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : (\text{то что сверху})\}$

Док-во (что это группа по умножению)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}^* A = R \\ \mathrm{B}^* B = E \end{array}\right| \Rightarrow (AB)^* AB = B^* \underbrace{A^* A}_{=E} B = E$$

$(A^{-1})^* A^{-1} \overset{?}{=} E$

$\Leftrightarrow (A^{-1})^* = A$

$\Leftrightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$

Докажем, что любая унитарная матрица обратима и модуль определителя равен единице

$A^* A = E$

$\overline{\det A} \cdot \det A = 1$

$|\det A|^2 = 1$

Утв

$L \in L(V)$

Следующие условия равносильны:

1. $\|Lv\| = \|v\| \quad \forall v$
2. $(Lv,\ Lu) = (v, u) \quad \forall v, u$
3. $[L]_e \in U_n, \quad e$ - ортонорм.
4. $L^* L = \mathrm{id}_V$

И оператор, удовлетворяющий этим условиям называется "унитарным"(в евклидовом случае называется "ортогональным")

Док-во

$(4 \Rightarrow 2)$:

$$(v,\ \underbrace{L^* Lu}_{=(v,u)}) = (Lv,\ Lu)$$

$(2 \Rightarrow 4)$:

$$(v,\ L^* Lu) = (Lv,\ Lu) = (v,\ u)$$

По заклинанию $L^* L = \mathrm{id}_V$

Утв

1. $|\det L| = 1$
2. Если L - унитарный, $Lv = \lambda v \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1$
3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \quad \lambda \neq \mu| \Rightarrow (u,\ v) = 0$

Док-во

1 и 2:

$$\|v\| = \|Lv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

3:

$$(u,\ L^* v) = (u,\ \overline{\lambda} v) = \lambda(u,\ v)$$

$$(u,\ L^* v) = (Lu,\ v) = (\mu u,\ v) = \mu(u,\ v)$$

Хотим доказать: $Lv = \lambda v \Rightarrow L^* v = \overline{\lambda} v$

$$v = L^* L v = L^*(\lambda v) = \lambda L^* v$$

Делим на λ и туда переносится $\overline{\lambda}$