Опр

$$\sin z = \frac{e^i z - e^{-iz}}{zi}$$

$$\sin z = -i\operatorname{sh}(iz)$$

Период $f(z) = \sin z \quad T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
$g(z) = \operatorname{sh} z$ - период $2\pi i$

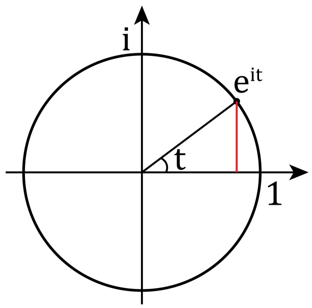
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{z} = \operatorname{ch}(iz)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{z}$$

Опр (Функция Жуковского)

$$Ж(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

$$T = \{z : |z| = 1\}$$



$$z = e^{it} = \cos t + i\sin t$$

$$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$$

$$Ж(e^{it}) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t = Ж(e^{-it})$$

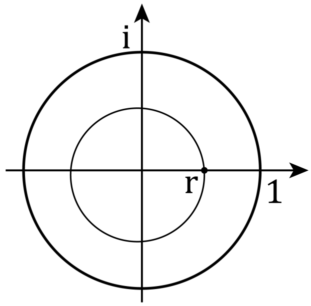
$$Ж(T) = [-1, 1] \text{не вз-одн}$$

Прообраз $\forall a \in (-1, 1)$ сост из двух т.

$$rT = \{re^{it}, -\pi \leqslant t \leqslant \pi\}$$

$0 < r < 1$

$$Ж(re^{it}) = \frac{1}{2}(re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos t + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin t$$



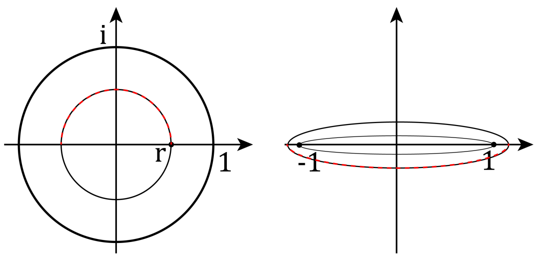
$\begin{cases} \operatorname{Re} Ж(re^{it}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos t \\ \operatorname{Im} Ж(re^{it}) = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin t \end{cases}$ - пар. ур. эллипса с полуосями

$$a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \geqslant 1$$

$$-b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$$

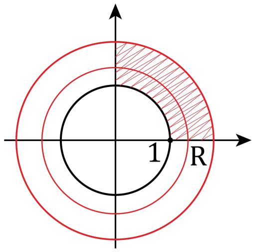
$$b = \frac{1}{2}(\frac{1}{r} - r)$$

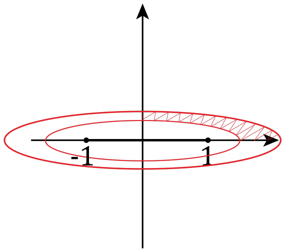
$$-\pi \leqslant t \leqslant \pi$$



$R > 1$ $\quad Ж(Re^{it}) = \frac{1}{2}(\underbrace{R + \frac{1}{R}}_{\geqslant 1})\cos t + i\frac{1}{2}(\underbrace{R - \frac{1}{R}}_{\geqslant 0})\sin t$

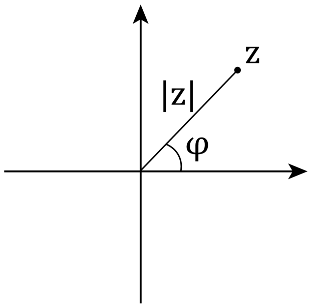
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{z} = Ж(e^{iz})$$





Опр (**Аргумент комплексного числа**)

$$z = x + iy; \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z \to |z|\,;\ \text{угол } \varphi \qquad z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Подходят все углы $\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Arg} z = \{\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}\} \text{ - полное знач. арг.}$$

Отображегие $\mathrm{Arg} : \mathbb{C} \to$
$\forall z \in \mathbb{C}$ сопоставляет множество

Опр (**Непрерывная ветвь аргемнта**)

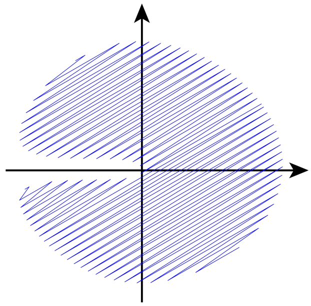
$$\text{Ф-я } \alpha : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subset \mathbb{C}$$

Называется непр. ветвью аргумента z, если

$$\alpha \in C(\Omega) \text{ и } \forall z \in \Omega \quad \alpha(z) \in \ \mathrm{Arg} z$$

Пример

$$\Omega = \{|z| < 1\} \text{ здесь нельзя определить однозн. ветвь аргумента}$$



$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x; \quad x \in (-\infty, 0]\}$$

Главное значение аргумента

$$\begin{cases} \arg(z) \in \operatorname{Arg}(z) \\ \arg(z) \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

$$z = x < 0 \qquad \arg(z) = \pi$$

$$\operatorname{Arg}\, z = \{\arg\, z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\operatorname{Arg}\, z = \arg\, z + 2\pi k$$

<u>Пример</u> (Некоторые многозначные функции)

$$w^n = z, \quad n \in \mathbb{N}$$

Уравнение имеет n решений

$$w = |w| \cdot e^{i\operatorname{Arg}\, w} \quad z = |z| \cdot e^{i\operatorname{Arg}\, z}$$

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\operatorname{Arg}\, w = \operatorname{Arg}\, z \end{cases}$$

$$|w| = \underset{\mathbb{R}}{\sqrt[n]{|z|}} \qquad \underset{\mathbb{R}}{\sqrt[n]{x}} = x^{\frac{1}{n}} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$n\operatorname{Arg}\, w = \arg\, z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Arg}\, w = \left\{\frac{\arg\, z}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$w = \underset{\mathbb{C}}{\sqrt[n]{z}} = \underset{\mathbb{R}}{\sqrt[n]{|z|}} \cdot e^{i(\frac{\arg\, z}{n} + \frac{2\pi k}{n})}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$\sqrt[n]{z}$ принимает n разл. знач.

<u>Опр</u> (Комплексный логарифм)

$$e^w = z$$

$$w = u + iv$$

$$e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = |z| \cdot e^{i\text{Arg z}}$$

$$\begin{cases} e^u = |z| \\ v = \text{Arg } z \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \ln\limits_{\mathbb{R}} |z| \\ v = \arg z + 2\pi k \end{cases}$$

$$w = \ln\limits_{\mathbb{R}} |z| + i(\arg z + 2\pi k) = \ln\limits_{\mathbb{R}} |z| + i\text{Arg } z$$

$$\ln z = \ln\limits_{\mathbb{R}} |z| + i\arg z$$

Если $x > 0$, то $\arg x = 0$

$$\ln x = \ln\limits_{\mathbb{R}} x + i0$$

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i\text{Arg } z$$

$$\text{Ln } z = \ln z + 2\pi k i$$

$$a, b \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$$

$$a^b = e^{(\text{Ln a})b}$$

$$i^i = e^{(\text{Ln } i)i}$$

$$\text{Ln } i = \ln |i| + i\text{Arg } i = 0 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

<u>Опр</u> (Обратные тригонометрические функции)

$$\cos w = z$$

$$e^{iw} + e^{-iw} = 2z$$

$$e^{iw} = t \qquad t^2 - 2t \cdot z + 1 = 0$$

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} = e^{iw}$$

$$iw = \text{Ln } (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\arccos z = -i \cdot \text{Ln } (z = \sqrt{z^2 - 1}) \stackrel{*}{=}$$

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z - \sqrt{z^2 - 1}}$$

$$\stackrel{*}{=} i\text{Ln } (z - \sqrt{z^2 - 1})$$

Пример

Решим уравнение $\sin z = i$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i^2 = -2$$

$$e^{iz} = t$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t = -1 + \underset{\mathbb{C}}{\sqrt{1+1}} = \pm\underset{\mathbb{R}}{\sqrt{2}} - 1 \qquad \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$iz = \mathrm{Ln}(\pm\sqrt{2} - 1)$$

$$\left[\begin{array}{l} iz = \ln(\sqrt{2} - 1) + i(2\pi k) \\ iz = \ln(-\sqrt{2} - 1) + i(\pi + 2\pi k) = \end{array}\right.$$

$$= \ln(-\frac{1}{\sqrt{2}-1}) + i(\pi + 2\pi k) = -\ln(\sqrt{2} - 1) + i2\pi k$$

0.1 Комплексное дифференциирование

Опр

$\Omega \subset \mathbb{C} \qquad \Omega$ - область, если

1. Ω - откр.
2. $\forall a, b \in \Omega$ можно соед. ломанной (Ω - связно)

Опр

$f : \Omega \to \mathbb{C} \qquad z_0 \in \mathbb{C}$

f - ди-ма ($\mathbb{C}$ - диф-ма) в т. z_0, если

$$\exists A \in \mathbb{C} : \quad f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(|z - z_0|) \qquad z \to z_0$$

$$A = \underset{\text{произв } f}{f'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$z - z_0 = \Delta z$$

Предел не зависит от того, как $z \to 0$

Пример (1)

$$f(z) = \overline{z} \qquad z_0 = 0$$

$$f'(0) =? \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z} - 0}{\Delta z} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Если $\Delta z = \Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = 1$

Если $\Delta z = i\Delta y \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = -1$

Пример (2)

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^n + n\Delta z z_0^{n-1} + C_n^2 \Delta z^2 z_0^{n-2} + ... + \Delta z^n - z_0^n}{\Delta z} = n \cdot z_0^{n-1}$$

Теорема (Основные правила диф-я)

1. $(f+g) = f' + g'$
2. $(const \cdot f)' = const \cdot f'$
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4. $[f(g(z))]' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

Утв

Если f - диф-ма в т z_0, то она непр в z_0

Док-во

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad z \to z_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) \to f(z_0) \quad z \to z_0$$

Опр

$$\underset{\text{Область}}{\Omega \subset \mathbb{C}} \qquad z = x + iy \in \mathbb{C} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}$$

$$f : \Omega \to \mathbb{C} \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$z \to (x,y) \to u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$$
$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$
$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$v : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

Теорема (условие Коши-Римана (Эйлера - Даламбера))

$\Omega \subset \mathbb{C}$ - область

$f : \Omega \to \mathbb{C} \qquad f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

Следующие условия равносильны

1. f - диф-ма ($\mathbb{C}$) в т. $z_0 \in \Omega$
2. u, v - диф-мы в т. $(x_0, y_0) \quad z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Док-во

$(1 \Rightarrow 2)$ предпол, что f - диф-ма в т. $z_0 \qquad \Delta z = z - z_0$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\cdot\Delta z + o(|\Delta z|) \qquad f(z) = u + iv$$
$$f'(z_0) = A = a + ib \qquad z = \Delta x + i\Delta y$$
$$o(|\Delta z|) = h(\Delta z)\cdot|\Delta z| = (\alpha(\Delta x, \Delta y) + i\beta(\Delta x, \Delta y))\,|\Delta z|$$

$$u(x,y) + iv(x,y) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha(\Delta x,\Delta y) + i\beta(\delta x, \delta y))\,|\Delta z|$$

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + a\cdot\Delta x - b\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$u(x,y) = v(x_0,y_0) + b\cdot\Delta x - a\Delta y + \beta(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\alpha, \beta \to 0 \qquad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$$

т.о u, v - дифф-мы в т. (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = a \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -b$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = v \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = - & \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Условие К-Р, Э-Д

$(2 \Rightarrow 1)$ Пусть $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ диф-мы (x_0, y_0)

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\left|\Delta z\right| \qquad \Delta z \to 0$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\left|\Delta z\right|$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -b \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = f(z_0) + a\Delta x - b\Delta y + ib\Delta x + ia\Delta y + (\alpha + i\beta)\left|\Delta z\right|$$

$$\Delta z \to 0$$

$$f(z) = f(z_0) + (a + ib)\Delta x + i(a + ib)\Delta y + \mathcal{E}(\Delta z)\left|\Delta z\right|$$

$$(a + ib)\Delta z$$

Замечание

$$f'(z_0) = a + ib = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = v'_y - iu'_y = u'x - iu'_y =$$

$$= v'_y + iv'_x$$

Теорема

$$\underset{\text{область}}{\Omega \subset \mathbb{C}} \qquad f : \Omega \to \mathbb{C}$$

Предположим, что f - диф-ма $\forall z \in \Omega$ и $f'(z) \in C(\Omega)$, тогда

1. Если $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega \Rightarrow f = const$

2. Если $\operatorname{Re} f(z) \equiv const \quad \forall z \in \Omega \Rightarrow f(z) \equiv const \quad \forall z \in \Omega$

$$(\operatorname{Im} f = const \Rightarrow f = const)$$

3. Если $|f(z)| \equiv const \Rightarrow f(z) \equiv const$

4. Если $\arg f(z) \equiv const \Rightarrow f(z) \equiv const$

<u>Напоминание</u> (лемма(т. о среднем))

$$f : U \to \mathbb{R}$$

ч.пр f опр. $V_{x_0} \subset U \quad x \in V_{x_0}$

$$\exists c^1, c^2 : \quad f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(c^1)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(c^2)\Delta y$$

<u>Док-во</u>

$$1) \quad f'(z) = 0 = u'_x + iu'_y = v'_y + iv'_x$$

$$\begin{cases} u'_x \equiv 0 \\ u'_y \equiv 0 \\ v'_x \equiv 0 \\ v'_y \equiv 0 \end{cases} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

По лемме $f(z_2) = f(z_1) \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega$

$$2) \quad \operatorname{Re} f = u(x,y) = const$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \forall (x,y) \in \Omega \Rightarrow (+\text{ К-Р}) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

По лемме $v = const$ в $\Omega \Rightarrow f(z) = const$

$$3) \quad |f| = const \Rightarrow |f|^2 = u^2 + v^2 = const$$

$$\begin{cases} 2u \cdot u'_x + 2vv'_x = 0 \\ 2u \cdot u'_y + 2vv'_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u \cdot u'x - v \cdot u'_y = 0 \\ u \cdot u'y + v \cdot u'_x = 0 \end{cases}$$

Определитель системы л. ур

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = y^2 + v^2 \neq 0$$

Если $u^2 + v^2 \neq 0 \Rightarrow u'_x = 0, u'_y = 0 \Rightarrow u \equiv const \Rightarrow v \equiv const$

$$4) \quad \arg f(z) \equiv const \quad \forall z \in \Omega$$

Введем функцию $k = \dfrac{u}{v} \Rightarrow k = const$

дифф $\forall z \in \Omega \quad (1 + ik)f = (1 + ik)(u + iv) = u + iku + iv - u$

$\operatorname{Re}((1 + ik)f) = 0 \Rightarrow (1 + ik)f \equiv const$