0.1 28.10.2019

0.1.1 Экстремумы

Пример

Найти экстремумы

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$$

Решение

Найдем первые производные и приравняем к 0:

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \\ f'_y = 2y - 6 = 0 \\ f'_z = -2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \quad y = -3 \quad z = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow A_1 = \det\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2 \quad A_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \quad A_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8$$

$$\partial^2 f = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$$

$$d^2 f(e_1) > 0 \qquad (\overset{dx}{1},\ \overset{dy}{1},\ \overset{dz}{0})$$

$$d^2 f(e_2) < 0 \qquad (0,\ 0,\ 1)$$

$$d^2 f = (dx + dy)^2$$

$$f(x,\ -x)$$

Пример

$$f(x,\ y,\ z) = (x + 7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\begin{cases} f'_x = e^{-(\ )} + (x + 7z)(-2x)e^{-(\ )} = 0 \\ f'_y = (x + 7z)(-2y)e^{-(\ )} = 0 \\ f'_z = 7e^{-(\ )} + (x + 7z)(-2z)e^{-(\ )} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \pm\frac{1}{10}$$

Можно не дифференцировать всё, т.к. нас интересуют только слагаемые, которые мы обнуляем

$$f''_{xx} \overset{\text{в инт. точке}}{\sim} (-4x-14z)e^{-(\ )} \quad f''_{yy} \sim -2(x+7z)e^{(\ )} \quad f''_{zz} \sim (-28z-2x)e^{(\ )}$$

$$f''_{xy} \sim 0 \quad f''_{xz} = (-14x)e^{(\ )} \quad f''_{yz} = 0$$

Матрица для точки $x = \frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = \frac{1}{10}$:

$$\begin{pmatrix} -102 & 0 & -14 \\ 0 & -100 & 0 \\ -14 & 0 & -198 \end{pmatrix}$$

$$A_1 < 0 \quad A_2 > 0 \quad A_3 < 0 \Rightarrow \text{лок. max}$$

Матрица для точки $x = -\frac{1}{10} \quad y = 0 \quad z = -\frac{1}{10}$:

$$\begin{pmatrix} 102 & 0 & 14 \\ 0 & 100 & 0 \\ 14 & 0 & 198 \end{pmatrix}$$

$$A_1,\ A_2,\ A_3 > 0 \Rightarrow \text{лок. min}$$

Замечание

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow (fg)'(x_0) = fg'(x_0)$$

0.1.2 Условный экстремум

Теорема

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \varphi_1, ..., \varphi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad k < n$$

$$\text{Локальный экстр. f при условии} \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ ... \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases} \qquad x = (x_1, ..., x_n)$$

$$\nabla\varphi_1,\ \nabla\varphi_2,\ ...,\ \nabla\varphi_k \text{ - лин. незав.}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$L(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_k \varphi_j(x) \text{ - ф-ия Лагранжа}$$

$\lambda_1, ..., \lambda_k$ - мн-ли Лагранжа
Алгоритм:

1. Ищем стац. точки L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j} L(x) = 0, \quad j = 1...n \\ \varphi_i(x) = 0, \quad i = 1...k \text{ - система из } k+n \text{ уравнений} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ находим стац. точки (это точки, подозр. на экстр.)

2. Нужно проверить, что в стац. точках условия $\varphi_i = 0$ должны быть независимы в том смысле, что вектора $\nabla\varphi_1, ..., \nabla\varphi_k$ - лин. независимы или:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k$$

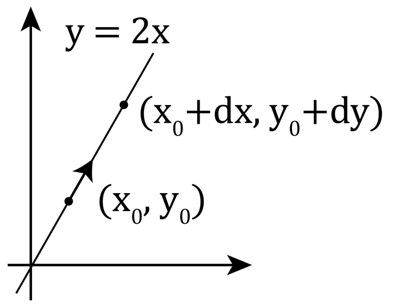
$k = 1$ означает $\nabla\varphi_1 \neq 0$

3. Исследуем d^2L в стац. точках

$d^2L > 0$ при усл., что $\overset{\text{усл. на } dx_1, ..., dx_n}{d\varphi_i = 0 \ j = 1...k}$ $\Rightarrow$ усл. лок. min
$d^2L < 0$ при усл., что $d\varphi_i = 0 \ j = 1...k \Rightarrow$ усл. лок. max

"Пример" $f = \frac{x^2 - y^2}{2}$

$$d^2L = dx^2 - dy^2]\varphi(x) = x + \frac{1}{2}y = 0$$



$$d\varphi = dx + \frac{dy}{2} = 0$$

$$d^2L = \left(\frac{dy}{2}\right)^2 - (dy)^2 = -\frac{3}{4}dy^2 < 0$$

Пример

$$\varphi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$
$$f(x) = x^3$$

Решение

Шаг 1:

$$L(x) = x^3 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 = x(2x + 2\lambda) \\ L'_y = 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \quad y^2 + z^2 = 1$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow y = z = 0 \qquad x = 1 \quad \lambda = -\frac{3}{2} \qquad x = -1 \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Шаг 2: $(x,\ y,\ z,\ lambda)$ - стац. точка

$$d^2L = (2\lambda + 6x)d^2x + 2\lambda dy^2 + 2\lambda z^2$$

Можем изучать при $0 = d(x^2+y^2+z^2-1) = \underset{\text{фикс}}{2x}\ dx + \underset{\text{фикс}}{2y}\ dy + \underset{\text{фикс}}{2z}\ dz \underset{\text{усл. на } (dx, dy, dz)}{=} 0$

Случай 2:

$$\lambda \neq 0 \qquad dx = \frac{ydy + zdz}{x} = 0 \qquad (y = z = 0)$$

$$d^2L = 2\lambda(dy^2 + dz^2)$$

$\lambda > 0$ - пол. опр $(-1,\ 0,\ 0)$, $\lambda < 0$ - отр. опр. $(1,\ 0,\ 0)$
$(-1,\ 0,\ 0)$ - лок. макс.
$(1,\ 0,\ 0)$ - лок. мин.
Случай 1:

$$x = 0 \quad \lambda = 0 \quad d^2L = 0 \text{ - метод не работает}$$

Но $f(x) = 0$ при $x = 0$ и $y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow$ нет лок. мин. и лок. макс.

Пример

$$u = xyz \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$L(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda_2(x + y + z)$$

$$\begin{cases} yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}xyz$$

$$\overset{1+2+3}{\Rightarrow} \lambda_2 = -\frac{1}{3}(yz + xz + xy)$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} (\underbrace{x + y + z}_{=0})^2 - 2(\underbrace{xy + xz + yz}_{=\frac{1}{2}}) = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} (z - 2\lambda_1)(y - x) = 0 \\ (x - 2\lambda_1)(z - y) = 0 \\ (y - 2\lambda_1)(x - z) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}};\ \pm\frac{1}{2\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{6}\right) \text{ и ещё ...}$$

Следующий шаг:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,\ \text{кроме} x = y = z$$

Следующий шаг:

$$d^2L = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2xdydz + 2ydxdz + 2zdxdy$$

Но нам известно:

$$\begin{cases} 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases}$$

Посмотрим на точку $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow dz = 0 \qquad dx = -dy \Rightarrow d^2L = (4\lambda_1 - 2z)dx^2 = \pm\sqrt{6}dx^2$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ - усл. лок. мин., $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ - усл. лок. макс.

Остальные аналогично