

# Практика по матану, 3 сем

(преподаватель Демченко О. В.)  
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [вконтакте](#)

## Содержание

<b>1</b>	<b>Теория групп</b>	<b>2</b>
1.1	Жордановы формы, 03.09.2019 . . . . .	2
1.2	Собственные вектора, 10.09.2019 . . . . .	2
1.3	Жордановы матрицы, 17.09.2019 . . . . .	2
1.4	В ожидании кр..., 24.09.2019 . . . . .	4
1.5	Комутаторы и комутанты, 01.10.2019 . . . . .	5
	1.5.1 Действие группы на множество . . . . .	6
1.6	Комутаторы и комутанты, 15.10.2019 . . . . .	6
	1.6.1 Евклидовы пространства . . . . .	7

# 1 Теория групп

## 1.1 Жордановы формы, 03.09.2019

### УТВ

Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $U \in GL_n(\mathbb{C}) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) : |U| \neq 0\}$   
 Сопряжение матрицы  $A$  с помощью  $U$ :  $A \mapsto U^{-1}AU$

### Теорема (Жордана, матрич. форма)

$$\forall A \exists U : U^{-1}AU = J$$

Пусть  $U^{-1}AU = J$ ,  $V^{-1}AV = I$  - совпадают с точностью до перестановки жордановых блоков

### Пример

$$A_1 \in M_n(K), A_2 \in M_m(K)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

С помощью какой матрицы можно получить сопряжением другую

### Теорема (Жордана, операт. форма)

Пусть  $L \in \mathcal{L}(V)$  (оператор на  $V$ ),  $V$  - конечномерное пр-во над  $\mathbb{C}$ . Тогда  $\exists \{e_1, \dots, e_n\}$  (жорданов базис) - базис  $V$ .  $[L]_e = J$

Единственность: если есть два базиса, то матрицы можно получить перестановкой

———— тут не хватает чего-то

## 1.2 Собственные вектора, 10.09.2019

———— что-то пропущено

## 1.3 Жордановы матрицы, 17.09.2019

### Пример

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$X^2 = A = C^{-1}JC$$

Пример  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $Y^2 = J$ ,  $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & ? \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$ , ? - из уравнения

Как найти J и C?

1) Находим все собственные числа матрицы A

Если все с.ч. равны, то J без единичек

Если одно собственное число  $\lambda$  диагонализируема  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

б) блоки 2 и 1  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

в)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

### Пример

Найдём, сколько собственных вектор-столбцов

$$\text{Первая матрица: } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = \lambda x_1 \\ \lambda x_2 = \lambda x_2 \\ \lambda x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$x_1, x_2, x_3 \in R$  - три л.н. переменные

Для второго решение:  $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$  - 2 собственных вектор-столбца

### Пример

Пусть у нас матрица  $4 \times 4$ , 2 собственных л.н. столбца (два блока)

### УТВ

$G, H$  - изоморфны,  $G$  - комм.  $\Rightarrow H$  - комм.

### Док-во

$\exists \varphi : G \rightarrow H : \varphi$  - биекция и  $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$ , кроме того,  $g_1 g_2 = g_2 g_1$

$\forall g_1, g_2 \in G$ , применим  $\varphi$  к последнему выражению

$$h_1 h_2 = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2) \varphi(g_1) = h_2 h_1$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Дз:  $G, H$  - изоморфны,  $G$  - цикл.  $\Rightarrow H$  - цикл.

### Решение

Группа  $G$  - цикл  $\Leftrightarrow \exists g \in G : \forall g' \in G \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

$$G \text{ - цикл.}, G \cong H \Rightarrow \exists \varphi : G \rightarrow H$$

$$\forall h' \in H \quad \exists g' \in G : h' = \varphi(g') = \varphi(g^k) = \underbrace{\varphi(g \dots g)}_k = \underbrace{\varphi(g) \dots \varphi(g)}_k = \underbrace{h \dots h}_k = h^k$$

Чтобы доказать, что две группы не изоморфны, можно доказать что у одной из них свойство выполняется, а у другой нет

### Пример

1.  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ,  $D_3$  - коммутативность
2.  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  - цикличность
3.  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  - дз
4.  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  - порядки элементов
5.  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  - цикличность?

## 1.4 В ожидании кр..., 24.09.2019

### Пример

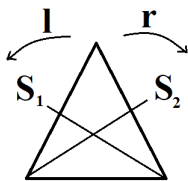
$$A \in M_n(\mathbb{C}), \quad A = C^{-1}JC, \quad C \in_n(\mathbb{C})$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

- 1) находим все с.ч.
  - 2) для каждого с.ч. находим л.н. уравнение
  - 3) решаем систему линейных уравнений
- ...ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, СМ. ТЕТРАДЬ

### Пример

$$D_3 = \{e, l, r, s_1, s_2, s_3\}$$



$$H_1 = \{e, r, l\}$$

$$H_2 = \{e, s_1\}$$

- 1) Разбить по подгруппам, по левым и правым классам. Какая нормальная, какая нет?
- 2) Найти  $g, G$ . Чтобы произведение не лежало в  $H_2$

$$\text{ДЗ: } D_4 = \{\dots\}, H_1 = \{e, s_2\}, H_2 = \{e, r^2\}$$

ДЗ:  $K(D_3)$  - найти коммутант для  $D_3$

## 1.5 Комутаторы и комутанты, 01.10.2019

### Пример

ДЗ (прошное):  $G = D_4$

$$H = \{e, r^2\}$$

$$H \triangleleft G$$

$$G/H$$

ДЗ (новое):

1. Чему изоморфно  $G/H$ ?  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$2. |G| = 4 \Rightarrow \begin{cases} G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$$

### Пример (я не знаю, что это было)

### Пример

$$1. \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \quad (z \mapsto |z|)$$

$$2. \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad (z \mapsto z^4)$$

Что получается при применении основной теоремы о гомоморфизме?  
(найти ядро образа, факторизовать, д-ть, что изоморфна образу)

### Решение

$$1. \mathbb{C}^* / \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\} \cong \mathbb{R}_{>0}^*$$

2. ДЗ

### Пример

$$\text{ДЗ: } \text{GL}_n(\mathbb{R}) / \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A = \pm 1\} \cong ?$$

Как это сделать? Нужно найти  $\varphi : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow H$  - гомоморфизм:  
 $\text{Ker } \varphi = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A = \pm 1\}$

**Решение**

$$\varphi(A) = |\det A|$$

$$\varphi(A) = (\det A)^2$$

$$\text{ДЗ: } \text{GL}_n(\mathbb{R}) / \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A = \pm 1, \pm i\} \cong ?$$

**1.5.1 Действие группы на множество****Пример**

$$D_4$$

Написать разбиение этого множества из 16 эл-ов на орбиты. Сколько орбит?

**Решение** А**1.6 Коммутаторы и комутанты, 15.10.2019****Пример**

Грани кубика красят в три цвета, сколькими способами это можно сделать?

**Док-во** Группа - группа всех самосовмещений куба, сохраняющих ориентацию, она действует на множестве всех раскрасок фиксированного куба. Орбита - множество всех раскрасок фиксированного куба, которые можно получить его поворотом. Элементы G:

1. е - 1 шт.
2. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных граней на 90 градусов - 6 шт.
3. ... на 180 - 3 шт.
4. Поворот отн. диагонали на 120 градусов - 8 шт.
5. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных рёбер на 180 градусов - 6 шт.

$$\Rightarrow |G| = 24$$

$$\text{Число орбит} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m\}$$

$$= \frac{1}{24} \left( \underset{1.}{3^6} + \underset{2.}{\overset{4 \text{ одн. цв.}}{6 \cdot 3^3}} + \underset{3.}{\overset{2 \text{ пр. одн. цв.}}{3 \cdot 3^4}} + \underset{4.}{\overset{3 \text{ одн. цв.}}{8 \cdot 3^2}} + \underset{5.}{\overset{2 \text{ одн. цв.}}{6 \cdot 3^3}} \right) = 57$$

ДЗ 1: Аналогично, но красим в два цвета рёбра

ДЗ 2 (а): Есть ожерелье из 8 бусинок. Сколькими способами можно составить ожерелье из рубинов и алмазов

ДЗ 2 (б): если ограничение: должно быть 3 белых шарик и 5 черных

### 1.6.1 Евклидовы пространства

#### Пример

$\mathbb{R}[x]_3$ . Является ли это евклидовым пространством?

1.  $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
2.  $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + 2f(2)g(2)$
3.  $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) + 3f(3)g(3)$
4.  $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) - f(3)g(3)$

#### Док-во

1. Не является, потому что для  $f = x^2 - x$

$$(f, f) = 0 \text{ - не работает}$$

2. не является
3. является
- 4.

#### Пример

Составить матрицу Грамма для в

$$\text{Базис: } e_1 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad e_4 = x^3$$

$$(x^2 - 1, x - 1)$$

#### Док-во

а

**1.7 ..., 22.10.2019**

ДЗ: ожирелье из 8 бусин: 4б, 4ч

**Пример**

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f, g) = \int_0^1 f g dx$$

Провести ортогонализацию Грамма-Шмидта в базисе  $1, x, x^2, x^3$ **Решение**

$$e_1 = 1 - \text{готово}$$

$$e_2 = x + \lambda \cdot 1 \quad (e_2, 1) = 0$$

$$\text{Значит } \int_0^1 (x + \lambda) \cdot 1 = \frac{x^2}{2} + \lambda x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Должно быть } (e_2, e_2) = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(x^2 - 2x \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = 12x - 6$$

$$e_3 = x^2 + \lambda e_1 + \mu e_2 \quad (e_3, e_2) = 0 \quad (e_3, e_1) = 0$$

$$\text{Значит } \int_0^1$$

ДЗ: Найти  $e_3, e_4$ **Пример**

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f, g) = \int_0^1 f g dx$$

В  $V = \langle 1, x \rangle$  найти  $\text{pr}_V x^3$ **Решение**По прошлой задаче  $e_1 = 1, e_2 = 12x - 6$ 

$$\text{Значит } \text{pr}_V x^3 = (x^3, 1) \cdot 1 + (x^3, 12x - 6) \cdot (12x - 6) =$$

$$= \int_0^1 x^3 + \left(\int_0^1 12x^4 - 6x^3\right)(12x - 6) = \frac{1}{4} + \left(\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\right)(12x - 6) =$$

ДЗ: Проверить, что  $u - \text{pr}_V u \perp v$



**Пример**

$$U = \mathbb{R}[x]_2, \quad (f, g) = \int_0^1 f g dx$$

В  $V = \langle 1, x \rangle$ ,  $Lf = f'$  найти  $L^*$

**Решение**

ДЗ: досчитать

**Пример**

Был пример  $V = M_n(\mathbb{R})$ , там  $(A, B) = \text{Tr } AB^T$  Найти в  $V = M_n(\mathbb{C})$

**Решение**

Проверим  $(A, B) = \text{Tr } A\overline{B}^T$

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \text{Tr} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{c_1} & \overline{d_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \lambda \text{Tr} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix}$$

ДЗ: на дом