

Содержание

1	Теория групп	2
	Простейшие св-ва групп	2
	Теорема Лагранжа	4
	Циклическая группа	5
	Изоморфные группы	6
	Нормальная подгруппа	8
	Гомоморфизм	11
	1.1 Действие группы на множестве	14
2	Евклидовы и унитарные пр-ва	17
3	Квадратичные формы над \mathbb{R}	41
	3.1 Применение сингулярного разложения	42

1 Теория групп

2019-09-17

Опр

G - мн-во, $*$: $G * G \rightarrow G$, $(g_1, g_2) \rightarrow (g_1 * g_2) (g_1 g_2)$

$$1. (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$$

$$2. \exists e \in G : eg = ge = g \quad \forall g \in G$$

$$3. \forall g \in G \quad \exists \tilde{g} \in G : g\tilde{g} = g\tilde{g} = e$$

$$4. g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

Примеры

$$1. (\mathbb{Z}, +) - \text{группа}$$

$$2. (\mathbb{Z}, \bullet) - \text{не группа}$$

$$3. (R, +) - \text{группа кольца}$$

$$4. (R^*, \bullet)$$

$$5. \text{Группа самосовмещения } D_n, \text{ например } D_4 - \text{квадрат, композиция} \\ - \text{группа, } |D_n| = 2n$$

$$6. GL_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| \neq 0\}, \text{ умножение} - \text{группа}$$

$$7. \mathbb{Z}n\mathbb{Z} - \text{частный случай п.3,4}$$

Теорема (простейшие св-ва групп)

$$1. e - \text{единственный, } e, e' - \text{нейтральные: } e = ee' = e'$$

$$2. \tilde{g} - \text{единственный}$$

$$\text{Пусть } \tilde{g}, \hat{g} - \text{обратные, тогда } \tilde{g}g = g\tilde{g} = e = \hat{g}g = g\hat{g}$$

$$\hat{g} = e\hat{g} = (\tilde{g}g)\hat{g} = \tilde{g}(g\hat{g}) = \tilde{g}e = \tilde{g}$$

$$3. (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

$$\text{Это верно, если } (ab)(b^{-1}a^{-1}) = (b^{-1}a^{-1})(ab) = e, \text{ докажем первое:}$$

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = ((ab)b^{-1})a^{-1} = (a(bb^{-1}))a^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e$$

$$4. (g^{-1})^{-1} = g$$

Опр

$$g \in G \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ тогда } g = \begin{cases} \overbrace{g \dots g}^n, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_n, & n < 0 \end{cases}$$

Теорема (св-ва)

1. $g^{n+m} = g^n g^m$
2. $(g^n)^m = g^{nm}$

Опр

$g \in G, n \in \mathbb{N}$ - порядок g ($\text{ord} g = n$), если:

1. $g^n = e$
2. $g^m = e \rightarrow m \geq n$

Примеры

1. $D_4 \text{ ord(поворот } 90^\circ) = 4$
 $D_4 \text{ ord(поворот } 180^\circ) = 2$
2. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \text{ ord}(\bar{1}) = 6$
 $\text{ord}(\bar{2}) = 3$

Утв

$$g^m = e \quad \text{ord}(g) = n \rightarrow m : n \quad (n > 0)$$

Док-во

$$m = nq + r, \quad 0 \leq r < n \quad e = g^m = g^{nq+r} = (g^n)^q g^r = g^r \rightarrow r = 0$$

Опр

$H \subset G$ называется подгруппой G ($H < G$) (и сама является группой), если:

1. $g_1, g_2 \in H \rightarrow g_1 g_2 \in H$
2. $e \in H$
3. $g \in H \rightarrow g^{-1} \in H$

Примеры

1. $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

2. D_4 3. $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| = 1\}, SL_n(K) < GL_n(K)$

Мультипликативная запись	Аддитивная запись
$g_1 g_2$	$g_1 + g_2$
e	0
g^{-1}	$-g$
g^n	ng

Опр $H < G, g_1, g_2 \in G$, тогда $g_1 \sim g_2$, если:

1. $g_1 = g_2 h, h \in H$ (левое)
2. $g_2 = h g_1, h \in H$ (правое)

Док-во (эквивалентность)

1. (симметричность) $g_1 = g_2 h \xrightarrow{*h^{-1}} g_2 = g_1 h^{-1}$
2. (рефлексивность) $g = ge$
3. (транзитивность) $g_1 = g_2 h, g_2 = g_3 h \rightarrow g_1 = g_3(h_2 h_1)$, где $h_2 h_1 \in H$

Опр $[a] = \{b : ab\}$ классы эквивалентности**Опр**

$[g] = gH = \{gh, h \in H\}$ (левый класс смежности)
 $gh \sim g \rightarrow gh \in [g]$
 $g_1 \in [g] \rightarrow g_1 \sim g \rightarrow g_1 = gh$

Утв $[e] = H$

Установим биекцию:

 $[g] = gh \leftarrow H$
 $gh \leftarrow h$
Очевидно, сюръекция, почему инъекция? $gh_1 = gh_2 \xrightarrow{*g^{-1}} h_1 = h$ **Теорема (Лагранжа)** $H < G, |G| < \infty$, тогда $|G| : |H|$ (уже доказали!)

2019-09-10

Следствие (теорема Эйлера)

Напоминание

 $n, a \in \mathbb{N}, (a, n) = 1$, тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ Док-воРассмотрим $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ $|G| = \varphi(n)$ $\bar{a} \in G, \text{ord} \bar{a} = k$ $\varphi(n) : k \Rightarrow \varphi(n) = kl$ $\bar{a} = \bar{1}$ $\bar{a}^{\varphi(n)} = \bar{1}$ Опр G - циклическая группа, если $\exists g \in G : \forall g' \in G : \exists k \in \mathbb{Z} : g' = g^k$ Такой g называется образующимОпр \mathbb{Z} (образующий - единица и минус единица)Замечание

Любая циклическая группа - коммутативна

Док-во

$$g'g'' = g''g' = g^k g^l = g^l g^k$$

Пусть G, H - группы, рассмотрим $G \times H = \{(g, h) : g \in G, h \in H\}$ Введем операцию $(g, h) * (g', h') \stackrel{\text{def}}{=} (g *_G g', h *_H h')$

Докажем, что это группа.

Доказательство ассоциативности: $((g, h)(g', h'))(g'', h'') \stackrel{?}{=} (g, h)((g', h')(g'', h''))$

$$(gg', hh')(g'', h'') \stackrel{?}{=} (g, h)(g'g'', h'h'')$$

$$((gg')g'', (hh')h'') \stackrel{?}{=} (g(g'g''), h(h'h'')) - \text{очевидно}$$

Нейтральный элемент:

$$\text{Рассмотрим } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$$

Опр

Конечная группа порядка n является циклической тогда и только тогда, когда она содержит элемент порядка n ($|G| = n$, G - циклическая $\Leftrightarrow \exists g \in G : \text{ord} g = n$)

Рассмотрим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ - циклическая

$((\bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}))$

Рассмотрим $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ - не циклическая

Опр

$\varphi : G \rightarrow H$ - биекция и $\varphi(g_1, g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$, тогда φ - изоморфизм

Примеры

1. $D_3 \rightarrow S_3$

2. $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \leftarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\left(\frac{2\pi a}{n} + i \sin \frac{2\pi a}{n} = \varphi \bar{a} \bar{a}\right)$$

$$\bar{a} = \bar{b} \rightarrow \varphi(\bar{a}) = \varphi(\bar{b})$$

$$\varphi(\bar{a} + \bar{b}) \stackrel{?}{=} \varphi(\bar{a})\varphi(\bar{b})$$

$$\cos \frac{2\pi(a+b)}{n} + i \sin \frac{2\pi(a+b)}{n} = (\cos \frac{2\pi a}{n} + i \sin \frac{2\pi a}{n})$$

Опр

Две группы называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм

Утв

Изоморфизм - отношение эквивалентности

Док-во

т.к. композиция изоморфизмов - изоморфизм $G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\psi} H$

$$(\psi \circ \varphi)(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1 g_2)) = \psi(\varphi(g_1)\varphi(g_2)) = \psi(\varphi(g_1))\psi(\varphi(g_2)) = (\psi \circ \varphi)(g_1) \circ (\psi \circ \varphi)(g_2)$$

Рефлексивность - тождественное отображение - изоморфизм

Транзитивность: $G \xrightarrow{\varphi} H, H \xrightarrow{\varphi^{-1}} G$

Теорема

G - циклическая группа

1) $|G| = n \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

2) $|G| = \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}$

Док-во

1) g - обр. G , значит $G = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ (среди них нет одинаковых),

построим изоморфизм в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\varphi(g^k) = \bar{k}$

Проверим, что $\varphi(g^k g^l) = \varphi(g^k) + \varphi(g^l) = \bar{k} + \bar{l}$

Левая часть: $\varphi(g^{k+l}) = \overline{(k+l) \bmod n} = \bar{k} + \bar{l}$

2) $G = \{..., g^{-1}, e, g, g^2, ...\}$ (тоже нет совпадающих элементов, иначе $g^k = g^l$, при $k > l$, тогда $g^{k-l} = e$, но тогда конечное число элементов, потому что оно заикликивается через каждые $k-l$ элементов), построим отображение в \mathbb{Z} .

$\varphi(g^n) = n$ -, очевидно, биекция. И нужно доказать, что $\varphi(g^n g^k) = \varphi(g^n) + \varphi(g^k) = n + k$

2019-09-17

УТВ

$$|G| = p, \text{ простое}$$

$$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad g \in G, g \neq e$$

$$\text{ord } g = p$$

$$\Rightarrow G = \{e = g^0, g^1, \dots, g^{p-1}\}$$

УТВ

$$H, G - \text{ группы, } g \in G$$

$$\varphi : G \rightarrow H - \text{ изоморфизм}$$

$$\Rightarrow \text{ord } g = \text{ord } \varphi(g)$$

$$\text{ord } g = n \quad g^n = e$$

$$\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e) = e \quad \varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$$

$$\varphi(g)^n \stackrel{?}{\Rightarrow} e \Rightarrow m \geq n$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = e = \varphi(e) \Rightarrow g^m = e \Rightarrow m \geq n$$

Опр

$$H < G$$

$$H - \text{ нормальная подгруппа, если } \forall h \in H, g \in G$$

$$g^{-1}hg \in H - \text{ сопряжение элемента } h \text{ с помощью элемента } g$$

рисунок 1

$$H \triangleleft G$$

УТВ

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow - \text{ разбиение на л. и п. классы смежности по } H \text{ совпадают}$$

$$\forall g \quad gH = Hg$$

Док-во

$$\Rightarrow h \in H \quad gh \in gH$$

$$gh = \underbrace{(g^{-1})^{-1}hg^{-1}}_{\in H} g = h_1g$$

$$\Leftarrow g \in G, h \in H$$

$$g^{-1}hg = h_1$$

$$hg \in Hg = gH \Rightarrow gh_1, h_1 \in H$$

$$H \triangleleft G$$

$$g_1H * g_2H \stackrel{def}{=} g_1g_2H$$

$$\tilde{g}_1H = g_1H$$

$$\tilde{g}_2H = g_2H \stackrel{?}{\Rightarrow} \tilde{g}_1\tilde{g}_2H = g_1g_2H$$

$$g_2^{-1}h_1g_2 = h_3 \in H$$

$$\tilde{g}_1\tilde{g}_2h = g_1h_1g_2h_2h = g_1g_2(\underbrace{g_2^{-1}h_1g_2}_{=h_3})h_2h$$

$$\tilde{g}_1H = g_1H \Rightarrow \tilde{g}_1 = g_1h_1$$

$$\tilde{g}_2H = g_2H \Rightarrow \tilde{g}_2 = g_2h_2$$

$$eH = H$$

$$1) \quad eH * gH = (eg)H = gH$$

$$2) \quad (g_1H * g_2H) * g_3H \stackrel{?}{=} g_1H * (g_2H * g_3H)$$

$$(g_1g_2)H * g_3H = (g_1g_2)g_3H$$

$$3) \quad gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH$$

$$G/H$$

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in H$$

$$G = \mathbb{Z}$$

$$H = h\mathbb{Z} \quad g_1 - g_2 \in n\mathbb{Z}$$

$$[a] + [b] = [a + b]$$

Пример

$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ - коммутатор

$g, h \in G$

$K(G) = \{[g_1, h_1], \dots, [g_n, h_n], g_i, h_i \in G\}$ - коммутант

Док-во

Коммутант - подгруппа

$$K(G) < G$$

$$[e, e] = e$$

$$[g_1, h_1] \dots [g_n, h_n]$$

$$[g, h]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h, g]$$

$$([g_1, h_1] \dots [g_n, h_n])^{-1} = [h_1, g_1] \dots [h_n, g_n]$$

$$g^{-1}[g_1, h_1] \dots [g_n, h_n]g =$$

$$= (g^{-1}[g_1, h_1]g)(g^{-1}[g_2, h_2]g) \dots (g^{-1}[g_n, h_n]g)$$

$$g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}g =$$

$$= (g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}(gh_1^{-1})h_1g^{-1})h_1^{-1}g$$

$$[g^{-1}g_1, h_1] \quad [h_1, g^{-1}]$$

УТВ

$$G/K(G) \text{ - КОММ}$$

Док-во

$$g_1, g_2 \in G \quad g_1K(G)g_2K(G) \stackrel{?}{=} g_2K(G)g_1K(G)$$

$$g_1g_2K(G) = g_1g_2K(G) \quad g_2K(G)g_1K(G) = g_2g_1K(G)$$

$$[g_1, g_2] = g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in K(G)$$

УТВ

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{mn}, \text{ если } (m, n) = 1$$

$$[a]_{nm} \rightarrow ([a]_n, [a]_m)$$

$$[a]_{nm} = [a']_{mn} \Rightarrow [a]_n = [a']_n, [a']_m = [a']_m$$

$$\forall b, c \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} [x]_n = [b]_n \\ [x]_m = [c]_m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [a]_n &= [b]_n \\ [a]_m &= [b]_m \end{aligned} \Rightarrow [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

$$\begin{aligned} a &\equiv b(n) \\ a &\equiv b(m) \end{aligned} \Rightarrow a \equiv b(mn)$$

Опр

$\varphi : G \rightarrow H$ - гомоморфизм

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$$

изоморфизм = гомоморфизм + биективность

$\varphi \in \text{Hom}(G, H)$ - множество гомоморфизмов

Примеры

$$1) \quad \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$z \rightarrow |z|$$

$$2) \quad GL_n(K) \rightarrow K^*$$

$$A \rightarrow \det A$$

$$3) \quad S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$\sigma \rightarrow \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma - \text{четн.} \\ -1, & \text{если } \sigma - \text{неч.} \end{cases}$$

$$4) \quad a \in G \quad G \rightarrow G$$

$$g \rightarrow a^{-1}ga$$

$$(a^{-1}ga)(a^{-1}g_1a) = a^{-1}g_g1a$$

../../template/template

2019-09-24

Напоминание

$G/K(G)$ - коммутативна

УТВ

$H \triangleleft G \quad G/H$ - комм

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad (g_1 H)(g_2 H) = (g_2 H)(g_1 H)$$

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 \in H \Rightarrow K(G) \subset H$$

Свойства (гомоморфизма)

$f \in \text{Hom}(G, H)$

$$1. f(e_G) = e_H \quad f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e)$$

$$2. f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

$$f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e$$

3. Композиция гомоморфизмов

Опр

$f \in \text{Hom}(G, H)$

$$\text{Ker } f = \{g \in G : f(g) = e\} \subset G$$

$$\text{Im } f = \{f(g) : g \in G\} \subset H$$

УТВ

Ker и Im - подгруппы G

Док-во

$$1. f(g_1) = f(g_2) = e \Rightarrow f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = e \cdot e = e$$

$$2. f(e) = e$$

$$3. f(g) = e \Rightarrow f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = e^{-1} = e$$

$$1. f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1 g_2)$$

$$2. e = f(e)$$

$$3. f(g)^{-1} = f(g^{-1})$$

УТВ

Ker - нормальная подгруппа G

Док-во

$$Ker f \triangleleft G?$$

$$g \in G \quad a \in Ker f$$

$$f(g^{-1}ag) = f(g)^{-1} \underbrace{f(a)}_{=e} f(g) = e$$

УТВ (основная теорема о гомоморфизме)

$$G/Ker f \cong Im f$$

Док-во

Докажем, что это корректное отображение:

$$Ker f = K$$

$$\varphi(gK) \stackrel{def}{=} f(g) \quad \varphi : G/Ker f \rightarrow Im f$$

$$gK = g'K \stackrel{?}{\Rightarrow} f(g) = f(g')$$

$$g' = g \cdot a, \quad a \in K \quad f(g') = f(g) \cdot \underbrace{f(a)}_{=e} = f(g)$$

Докажем, что φ - гомоморфизм:

$$f(g_1)f(g_2) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K) \stackrel{?}{=} \varphi(g_1Kg_2K) = \varphi((g_1g_2)K) = f(g_1g_2)$$

$$\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K) \stackrel{?}{\Rightarrow} g_1K = g_2K$$

Докажем, что это биекция. Что сюръекция - очевидно

$$f(g_1) = f(g_2) \quad \Rightarrow g_1g_2^{-1} \in K$$

$$\underbrace{f(g_1)f(g_2)^{-1}}_{=f(g_1)f(g_2^{-1})} = e$$

Напоминание

$SL_N(K)$ - квадратные матрицы с $\det = 1$

Опр

$$\det : GL_n(K) \rightarrow K^*$$

Но это отображение - сюръекция, а значит:

$$GL_n(K)/SL_n(K) \cong K^*$$

$$SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| = 1\}$$

Пример (1)

$$S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$S_n/A_n \cong \{\pm 1\} (\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Пример (2)

$$G \times H \rightarrow G$$

$$(g_1 h) \rightarrow g$$

$$G \times H /_{e \times H} \cong G$$

1.1 Действие группы на множествеОпр

M - множество

G - группа

$$G \times M \rightarrow M$$

$$(g, m) \rightarrow gm$$

$$1. \ g_1(g_2 m) = (g_1 g_2) m \quad \forall g_1 g_2 \in G, \quad m \in M$$

$$2. \ em = m \quad \forall m \in M$$

Если задано такое отображение, то говорим, что группа G действует на множестве M

Пример (1)

$$A = k^n \quad (A, v) \rightarrow A_v$$

$$G = GL_n(K)$$

$$A(B_v) = (AB)_v$$

$$E_v = v$$

Пример (2)

$M = \{\text{количество раскрасок вершин квадрата в два цвета}\}$

$$G = D_4$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \text{ч} & \text{ч} & \text{б} \\ \text{б} & \text{ч} & \text{ч} & \text{ч} \end{array} =$$

$$M = G$$

$$gm = gm$$

Опр

$$m \in M$$

$$\text{Stab } m = \{g \in G : gm = m\} - \text{стабилизация}$$

$$\text{Orb } m = \{gm, g \in G\} - \text{орбита}$$

УТВ

$$\text{Stab } m < G$$

Док-во

Доказательство того, что стабилизатор - подгруппа:

$$1. \quad g_1, g_2 \in \text{Stab } m$$

$$(g_1 g_2)m = g_1(\underbrace{g_2 m}_{=m}) = g_1 m = m$$

$$2. \quad e \cdot m = m$$

$$3. \quad gm = m \stackrel{?}{\Rightarrow} g^{-1}m = m$$

$$gm = m$$

$$\underbrace{g^{-1}gm}_{=(g^{-1}g)m=em=m} = g^{-1}m$$

УТВ

$$m_1, m_2 \in M$$

$$m_1 \sim m_2, \text{ если } \exists g \in G : gm_1 = m_2$$

$\Rightarrow \sim$ - отношение эквив

Док-во

$$(\text{рефл.}) \quad gm_1 = m_2 \Rightarrow g^{-1}m_2 = m_1 \quad g^{-1} \in G$$

$$(\text{симм.}) \quad em = m, \quad e \in G$$

$$(\text{тран.}) \quad \left. \begin{array}{l} gm_1 = m_2 \\ g'm_2 = m_3 \end{array} \right| \Rightarrow (g'g)m_1 = g'(gm_1) = g'm_2 = m_3$$

УТВ

$$|Orb \ m| \cdot |Stab \ m| = |G|$$

Док-во

$$Stab \ m = H$$

$$\{gH, \ g \in G\} \rightarrow Orb \ m$$

$$gH \rightarrow gm$$

Хотим доказать, что это корректно

$$gH = g'H \stackrel{?}{\Rightarrow} gm = g'm$$

$$g' = ga, \quad g \in H$$

$$g'm = (ga)m = g(am) = gm$$

Хотим доказать биективность. Сюръективность - очев. Инъективность:

$$gm = g'm \Rightarrow gH = g'H$$

$$m = em = (g^{-1}g')m = g^{-1}(gm) = g^{-1}(g'm) = (g^{-1}g')m$$

$$\Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow gH = g'H$$

Лемма (Бернсайд)

$$\text{Кол-во орбит} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m\}$$

../../template/template

2019-10-01

Напоминание

$$\text{Кол-во орбит} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m^2\}$$

Док-во

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |M^g| &= |\{(g, m) \in G \times M : gm = m\}| = \\ &= \sum_{m \in M} |\text{Stab } m| = |G| \sum_{m \in M} \frac{1}{|\text{Orb } m|} = |G| \cdot \text{Кол-во орбит} \end{aligned}$$

2 Евклидовы и унитарные пр-ва

Опр

V - в.п. над \mathbb{R}

Введем отображение

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v)$$

Свойства этого отображения

1. Симметричность

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in V$$

2. Линейность

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad u, v \in V$$

$$(u + u', v) = (u, v) + (u', v) \quad u, u', v \in V$$

3. $(u, v) \geq 0 \quad \forall u \in V$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Такое пр-во V с введенным на нем таким отображением мы называем Евклидовым пр-вом, а отображение скалярным.

Напоминание

$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^n$ - квадр. матрица

$$Tr C = \sum_{i=1}^n c_{ii} \text{ - след (Trace)}$$

(Сумма элементов главной диагонали)

Примеры

1. Школьные вектора

2. \mathbb{R}^n

$$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_n$ конечномерное пр-во

$$(f, g) = \int_a^b f g dx$$

4. $V = M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) = Tr AB^T$$

(См. след в напоминании)

Опр

$e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис V

$$a_{ij} = (e_i, e_j)$$

$\Gamma_e = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ - матрица Грама

Свойства (матрицы Грама)

1. Матрица невырожд

2. e, f - базисы

$$\Gamma_f = M_{e \rightarrow f}^T \Gamma_e M_{e \rightarrow f}$$

$$3. \Gamma_e = \{a_{ij}\}$$

$$u = \sum \lambda_i e_i$$

$$v = \sum \mu_j e_j$$

$$(u, v) = \left(\sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j e_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j)$$

$$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e [v]_e$$

Док-во

$$1. \quad \neg |\Gamma_e| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ не все } 0 :$$

$$\sum \lambda_i (e_i, e_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum \lambda_i e_i, e_j \right) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum_i \lambda_i e_i, \sum_j \lambda_j e_j \right) = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_i e_i = 0$$

противоречие

$$2. \quad \neg M_{e \rightarrow f} = \{a_{ik}\} \quad f_k = \sum a_{ik} e_i$$

$$f_l = \sum a_{jl} e_j$$

$$(f_k, f_l) = \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} (e_i, e_j)$$

$$a_{ik} (e_i, e_j) a_{je}$$

$$\text{Напоминание: } X, Y - \text{матр} \quad X \times Y = Z \quad z_{ij} = \sum x_{is} y_{sj}$$

Опр

V - в.п. над \mathbb{R}

$$V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$v \rightarrow \|v\|$ - норма

$$1. \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V$$

2. Нер-во треугольника

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$3. \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Если такое отобр. существует, то оно называется нормой

УТВ

(u, v) - ск. пр-ве

$$\Rightarrow \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

Пример

\mathbb{R}^n

$$\|x\| = \max |x_i|$$

$$\|x\| = \sum_i |x_i|$$

Теорема (Нер-во Коши - Буняковского)

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Док-во

$$\varphi(t) = \|u + tv\|^2 = (u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + 2(u, v)t + t^2\|v\|^2$$

$$D = 4(u, v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$(u + v, u + v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$$

$$(u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$$

$$2(u, v) \leq 2\|u\|\|v\|$$

УТВ (Теорема Пифагора)

$$\text{Если } u \perp v \Rightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Док-во

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u, v)$$

Опр (Ортогональное дополнение)

V - евкл. пр-во

$$U \subset V \quad U^\perp = \{v \in V : (v, u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

Множество всех векторов, которые ортогональны всем векторам из U

Такое мн-во называется ортогональным дополнением

УТВ

U^\perp - под-пр V

Док-во

$$\begin{aligned} (v, u) = 0 \quad \forall u \\ (v', u) = 0 \quad \forall u \end{aligned} \Rightarrow (v + v', u) = 0 \quad \forall u$$

$$(v, u) = 0 \quad \forall u$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\lambda v, u) = 0 \quad \forall u$$

Тогда U^\perp дей-во линейное под-прво V

Свойства

$$V = U \oplus U^\perp$$

$$u \in U \cap U^\perp$$

$$u \in U \quad u \in U^\perp$$

$$(u, u) = 0$$

Док-во

e_1, \dots, e_n - базис U дополняем до базиса V

$e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ - базис V

$$v \in U^\perp \quad v = \sum \lambda_i e_i + \sum \mu_j f_j$$

$$v \in U^\perp \Leftrightarrow (v, e_k) = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

$$(v, e_k) = \sum \lambda_i (e_i, e_k) + \sum \mu_j (f_j, e_k) = 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

это матрица

$$\begin{array}{c|c|c} & \mathbf{n} & \mathbf{m} \\ \hline \mathbf{n} & \Gamma_e & C \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_e x + C_y = 0$$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \Gamma_e x + C_y = 0\}$ - размерность этого m

$$(x, y) \rightarrow y$$

$$\Gamma_e x + C_y = 0$$

$$x = -\Gamma_e^{-1} e_y$$

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

../../template/template

2019-10-15

Свойство

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Док-во

$$\left. \begin{array}{l} \dim U^\perp + \dim U = \dim V \\ \dim(U^\perp)^\perp + \dim U^\perp = \dim V \end{array} \right| \Rightarrow \dim(U^\perp)^\perp = \dim U$$

$$U \subset (U^\perp)^\perp$$

$$(U^\perp)^\perp = \{v \in V\}$$

Опр

$$U < V, \quad v \in V$$

$$U \oplus U^\perp = V$$

$$\Rightarrow \exists! u \in U, w \in U^\perp : v = u + w$$

и называется ортогональной проекцией

$$\text{Обозначение: } \text{pr}_U v \stackrel{\text{def}}{=} u$$

$$v = \text{pr}_U v + w \Rightarrow (v, u) = (\text{pr}_U v, u)$$

Свойства (орт. проекции)

$$1. \text{pr}_U(v + v') = \text{pr}_U v + \text{pr}_U v'$$

$$v = u + w, \quad u \in U, w \in U^\perp$$

$$v' = u' + w', \quad u \in U, w' \in U^\perp$$

$$v + v' = \underbrace{(u + u')}_{\in U} + \underbrace{(w + w')}_{\in U^\perp}$$

$$2. \|v - \text{pr}_U v\| \leq \|v - u\| \quad \forall u \in U$$

$$\|v - u\|^2 = \|v - \underbrace{\text{pr}_U v}_{\in U^\perp}\|^2 + \|\underbrace{\text{pr}_U v - u}_{\in U}\|^2$$

Опр

e_1, \dots, e_n - базис V

Базис называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ - ортогональный базис

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта:

e_1, \dots, e_n - базис

Хотим ортонормированный $f_1, \dots, f_n : \langle f_1, \dots, f_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle \quad \forall 1 \leq k \leq n$:

Строим по индукции:

Б.И. $k=1$:

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

И.П. $k-1 \rightarrow k$:

$$f_k = e_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i$$

$$(f_k, f_j) \stackrel{?}{=} 0 \quad 1 \leq j \leq k-1$$

$$(f_k, f_j) = (e_k, f_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (f_i, f_j) \stackrel{= \lambda_j}{=}$$

$$\lambda_j = -(e_k, f_j) \quad \forall 1 \leq j \leq k-1$$

Ортонормируем f_k , чтобы $(f_k, f_k) = 1$

УТВ

Если e_1, \dots, e_n - ОНБ U

$$\text{pr}_U v = \sum_{i=1}^n (v, e_i) e_i$$

Док-во

Хотим доказать $v - \sum_{i=1}^n (v, e_i) e_i \in U^\perp$

Достаточно доказать, что вектор ортогонален любому

$$(v - \sum_{i=1}^n (v, e_i) e_i) e_j = (v, e_i) - \sum_{i=1}^n (v, e_i) (e_i, e_j)$$

$1 \leq j \leq n$

Пример

$$\mathbb{R}^n$$

$$(x; y) = \sum x_i y_i$$

$$e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$$

Пример

$$T_n = \{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx\}$$

$$(f; g) = \int_0^{2\pi} f g dx$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx_{k=1, \dots, n}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx_{k=1, \dots, n} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{pr}_{T_n} f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \right) \cdot \cos kx + \\ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \right) \cdot \sin kx \end{aligned}$$

Опр

$A \in M_n(K)$ назыв. ортогональной, если

$$A^T A = E$$

$O_n(K)$ - множество орт. матриц

УТВ

$O_n(K)$ - группа по умножению

Док-во

$$\left. \begin{array}{l} A^T A = E \\ B^T B = E \end{array} \right| \Rightarrow (AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_E B = B^T B = E$$

$$A^T A = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} \stackrel{?}{=} E$$

$$(A^T)^T A^{-1} = AA^{-1} = E$$

УТВ

$$L \in \mathcal{L}(V)$$

1. $(L_v, L_{v'}) = (v, v') \quad \forall v, v' \in V$
2. $\|L_v\| = \|v\| \quad \forall v \in V$
3. $[L]_e \in O_n(\mathbb{R})$, если e - ортонорм. базис

Док-во

$$2 \rightarrow 1$$

$$(v, v') = \frac{1}{2}(\|v + v'\|^2 - \|v\|^2 - \|v'\|^2)$$

$$3 \rightarrow 2$$

$$[L_v]_e = [L]_e[v]_e$$

$$\begin{aligned} \|L_v\|^2 &= (L_v, L_v) = [L_v]_e^T \Gamma_e [L_v]_e = [L_v]_e^T [L_v]_e = \\ &= [v]_e^T \underbrace{[L]_e^t [L]_e}_{=E} [v]_e = [v]_e^T [v]_e = [v]_e^T \Gamma_e [v]_e = (v, v) = \|v\|^2 \end{aligned}$$

$$1 \rightarrow 3$$

$$\mathcal{E}_i^T [L]_e^T [L]_e \mathcal{E}_j$$

$$\mathcal{E}_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$$

$$\mathcal{E}_i^T A \mathcal{E}_j = a_{ij}$$

$$\mathcal{E}_i = [e_i]_e$$

$$\mathcal{E}_j = [e_j]_e$$

$$[e_i]^T [L]_e^T [L]_e [e_j]_e = [L_{e_i}]_j^T [L_{e_j}]_e = [L_{e_i}]_e^T \Gamma_e [L_{e_j}]_e = (L_{e_i}, L_{e_j}) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

../../template/template

2019-10-22

Опр (унитарного пространства)

U - в.п. над \mathbb{C}

$$U \times U \rightarrow ()$$

1. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w) \quad \forall u, v, w \in U$
 $(\lambda v, w) = \lambda(v, w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad v, w \in U$
2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
3. $(u, u) \geq 0$
4. $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Пример

$$(x, y) = \sum x_i y_i \quad \Bigg| \quad (x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$$

e_1, \dots, e_n - базис

$\Gamma_e = \{(e_i, e_j)\}_{i,j}$ - матрица грамма

$$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e \overline{[v]_e}$$

$$\Gamma_f = M_{e \rightarrow f}^T \Gamma_e \overline{M_{e \rightarrow f}}$$

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

$$\|tu + v\|^2 = t^2 \|u\|^2 + t((u, v) + (v, u)) + \|v\|^2$$

$$\quad \quad \quad = 2 \operatorname{Re}(u, v)$$

$$\operatorname{Re}(u, v) \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

$$(u, v) = |(u, v)| \cdot z \Rightarrow |z| = 0$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}u, v\right) \leq \left\|\frac{1}{z}u\right\|^2 \|v\|^2 = \|u\| \|v\|$$

$$\text{Напоминание: } \|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} (u, u)} = |\lambda| \|u\|$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} (u, v) = \operatorname{Re} |(u, v)| = |(u, v)|$$

Доказали КБШ

Опр

V - в.п. над K

$$V^* = \mathcal{L}(V, k)$$

Пример

$v \in V$ - евклидово пр-во (унитарное)

$$\varphi_v(w) = (w, v) \quad \varphi_v : V \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Хотим доказать: $\varphi \in V^* \Rightarrow \exists! v \in V : \varphi = \varphi_v$

Док-во

e_1, \dots, e_n - ОНБ V

$$v = \sum \lambda_i e_i$$

Нужно $\forall w \in V \quad (w, v) = \varphi(w)$, т.к. φ - линейный функционал

$$\Leftrightarrow \forall j \quad (e_j, v) = \varphi(e_j)$$

$$(e_j, \sum \lambda_i e_i) = \sum_i \bar{\lambda}_i (e_j, e_i)$$

Опр

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$A^* = \bar{A}^T$ - сопряженная матрица

Свойства

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

УТВ

V - унитарное пр-во, $L \in \mathcal{L}(V)$, $u \in V$

$$\varphi_n(v) = (Lv, u) \in V^*$$

$$\Rightarrow (Lv, u) = (v, w_u)$$

$$\exists! w_u \in V : (v, u) = (v, w_u)$$

$$u \rightarrow w_u$$

Утверждается, что отображение линейно

Док-во

$$\begin{aligned} (Lv, u) = (v, w_u) \quad \Bigg| \quad (Lv, u+u') = (Lv, u) + (Lv, u') = \\ (Lv, u') = (v, w_{u'}) \quad \Bigg| = (u, w_u) + (v, w_{u'}) = (v, w_u + w_{u'}) = (v, w_{u+u'}) \end{aligned}$$

$$(Lv, \lambda u) = \bar{\lambda}(Lv, u) = \bar{\lambda}(v, w_u) = (v, \lambda w_u)_{=w_{\lambda u}}$$

$$L^*u = w_u \quad (Lv, u) = (v, L^*u)$$

Опр

L^* - эрмитов сопряженный оператор

Свойства

$$1. L^{**} = L$$

$$(L^*v, u) = (v, L^{**}u)$$

$$(L^*v, u) = \overline{(u, L^*v)} = \overline{(Lu, v)} = (v, Lu)$$

$$\Rightarrow L^{**}u = Lu \quad \forall u \in V$$

Почему так? $(v, w) = (v, w') \quad \forall v \Rightarrow w = w'$

$$(v, w - w') = 0$$

$$v = w - w'$$

$$\|w - w'\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow w - w' = 0$$

$$2. (\lambda L)^* = \bar{\lambda}L^*$$

$$(\lambda L)v, u) = (v, (\lambda L)^*u)$$

$$(\lambda L)v, u) = (\lambda \cdot Lv, u) = \lambda(Lv, u) = \lambda(v, L^*u) = (v, \bar{\lambda}L^*u)$$

3. $(L + L')^* = L^* + L'^*$ аналогично

4. $(LNv, u) = (v, (LN)^*u)$

$(LNv, u) = (v, N^*L^*u)$ и то же, что делали раньше

5. $[L]_e^* = [L^*]_e$, если e - ОНБ

$$Le_i = \sum a_{li}e_l \quad [L]_e = \{a_{ij}\}$$

$$Le_j = \sum b_{kj}e_k \quad [L]_e = \{b_{kj}\}$$

$$(Le_i, e_j) = (e_i, L^*e_j) \\ = a_{ij} \qquad \qquad \qquad = \bar{b}_{ij}$$

Опр

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

A - унитарная, если $A^*A = E$

$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : (\text{то что сверху})\}$$

Док-во (что это группа по умножению)

$$\left. \begin{array}{l} A^*A = E \\ B^*B = E \end{array} \right| \Rightarrow (AB)^*AB = B^* \underbrace{A^*A}_{=E} B = E$$

$$(A^{-1})^*A^{-1} \stackrel{?}{=} E$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1})^* = A$$

$$\Leftrightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

Докажем, что любая унитарная матрица обратима и модуль определителя равен единице

$$A^*A = E$$

$$\overline{\det A} \cdot \det A = 1$$

$$|\det A|^2 = 1$$

УТВ

$$L \in \mathcal{L}(V)$$

Следующие условия равносильны:

1. $\|Lv\| = \|v\| \quad \forall v$
2. $(Lv, Lu) = (v, u) \quad \forall v, u$
3. $[L]_e \in U_n, \quad e - \text{ортонорм.}$
4. $L^*L = \text{id}_V$

И оператор, удовлетворяющий этим условиям называется "унитарным" (в евклидовом случае называется "ортогональным")

Док-во

(4 \Rightarrow 2):

$$(v, L^*Lu) = (Lv, Lu) \\ =_{(v,u)}$$

(2 \Rightarrow 4):

$$(v, L^*Lu) = (Lv, Lu) = (v, u)$$

По заклинию $L^*L = \text{id}_V$

УТВ

1. $|\det L| = 1$
2. Если L - унитарный, $Lv = \lambda v \xRightarrow{v \neq 0} |\lambda| = 1$
3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow (u, v) = 0$

Док-во

1 и 2:

$$\|v\| = \|Lv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

3:

$$(u, L^*v) = (u, \bar{\lambda}v) = \lambda(u, v)$$

$$(u, L^*v) = (Lu, v) = (\mu u, v) = \mu(u, v)$$

Хотим доказать: $Lv = \lambda v \Rightarrow L^*v = \bar{\lambda}v$

$$v = L^*Lv = L^*(\lambda v) = \lambda L^*v$$

Делим на λ и туда переносится $\bar{\lambda}$

../../template/template

2019-3-29

Опр

L - орт. оператор на плоскости, $\det L = 1$, тогда L - поворот

e - ортнорм. базис, $[L]_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

$$a = \cos \varphi, \quad c = \sin \varphi$$

$$b = \sin \varphi, \quad d = \cos \psi$$

$$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi = 0$$

$= \sin(\varphi + \psi)$

$$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi = 0$$

$= \cos(\varphi + \psi)$

$$\Rightarrow \varphi + \psi = 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Опр

Если e - ортогональный оператор на пл-ти, $\det L = -1$

S - какая-то осевая симметрия

Тогда:

$$1. \quad L = S \circ R_\psi$$

$$2. \quad L = R_\varphi \circ S$$

Рассмотрим $S^{-1} \circ L$ - ортогональный оператор с определителем 1, значит по предыдущему определению $S^{-1} \circ L = R_\varphi$

Утв

В трехмерном пространстве с определителем 1 является поворотом относительно некоторой оси (теорема Эйлера)

Следствие: берем две прямые. Поворачиваем сначала относительно одной, потом относительно другой. И их композицией будет поворот

Док-во (теоремы Эйлера)

L - орт. оператор в пр-ве

$$\det L = 1$$

$$\chi_L(t) \in \mathbb{R}[x], \quad \deg \chi_i = 3$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - корни

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

Два варианта:

$$1. \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

$$2. \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 = \overline{\lambda_3}$$

В 1 случае одно из λ равно 1, пусть λ_1

Во 2 случае $\lambda_1 = 1$ т.к. $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \lambda_3 = \lambda_1 \underbrace{|\lambda_3|^2}_{=1} = \lambda_1$

С.в. остается неподвижным при повороте. Ось тоже. Значит собственный вектор при повороте и есть ось

Осталось д-ть, что ортогональное дополнение есть вращение. Тогда докажем, что наш исходный оператор - вращение относительно оси

$$\exists Lv = v$$

$$v^\perp$$

Докажем, что эта плоскость - инвариантное подпространство. Нужно доказать:

$$(u, v) = 0 \rightarrow (Lu, v) = 0$$

То есть результат будет тоже из ортогонального дополнения

$$(Lu, v) = (Lu, Lv) = (u, v) = 0 \text{ ч.т.д.}$$

Так как инвариантное подпространство, можем сузить L . Оно является плоскостью. Т.к. L - орт. оператор, значит он сохраняет расстояние. Т.к. S тоже сохраняет расстояние, значит L является ортогональным оператором на плоскости. Осталось убедиться, что модуль равен 1. Если исходный оператор сохраняет расстояние, то и его сужение сохраняет

ориентацию. Другой способ: построим матрицу L в базисе: V , {два ортогональных вектора на плоскости}, матрица L будет такой:

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Вместо ? будет матрица сужения. Мы должны доказать, что это матрица поворота. Определитель большой матрицы равен определителю маленькой, но т.к. большая 1, то и он 1.

По предыдущим рассуждениям - это поворот. То есть у нас есть пространство с осью, на которую оператор действует тождественно, а на другое он действует как поворот.

УТВ

Если L - ортогональный оператор в пр-ве с определителем -1 равен композиции поворота, относительно оси и симметрии, то это поворот.

Док-во

Аналогично

Теорема

Унитарный оператор имеет ортонормированный базис из с.в.

Док-во

Индукция по размерности пр-ва.

Пусть одномерное пр-во ($n = 1$) - очевидно, т.к. оператор-вектор v

$$Lv = u, \quad \|u\| = \|v\| \Rightarrow u = \lambda v, \quad |\lambda| = 1$$

Значит $Lv = \lambda v$ - подходит, когда ортонормируем v - с.в. L с каким-то λ

$$Lv = \lambda v$$

$$\langle v, v \rangle = 1$$

Хотим доказать, что подпространство инвариантно относительно действия L :

$$(v, u) = 0 \Rightarrow (v, Lu) = 0$$

$$(v, Lu) = (L^*v, u) \stackrel{(*)}{=} (\bar{\lambda}v, u) = \bar{\lambda}(v, u) = 0$$

(*) т.к. мы доказывали, что у собственного оператора. Если v - вектор унитарного оператора с с.ч. λ

Раз исходный оператор унитарный, то сужение тоже унитарно. Значит мы можем применить индукционное предположение у сужению. На этом ортогональном дополнении у оператора есть базис ортогональных векторов. Добавим к нему ортонормированный вектор v . Очевидно, получим ортонормированный базис из собственных векторов всего пр-ва

Переформулируем на языке матриц

Теорема

U - унитарная матрица, тогда:

$$U = MDM^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1, \quad M - \text{унитарная}$$

Док-во

$$\mathbb{C}^n \quad Lz = Uz \quad [L]_e = U$$

e - есть базис \mathbb{C}^n

$$[L^*L]_e = [L^*]_e[L]_e = [L]_e^*[L]_e = U^*U = E$$

(*) Из какого-то рассуждения получается

$\Rightarrow L$ - унитарный оператор

По теореме, которую доказали ранее, f - ортонормированный базис \mathbb{C}^n из с.в. L

$$D = [L]_f = M_{e \rightarrow f}^{-1} [L]_e M_{e \rightarrow f} = U$$

(*) У D - на диагонали с.ч., по модулю равные 1

Хотим д-ть: у нас есть два ОНБ, тогда матрица перехода между ними будет унитарна

$$M_{e \rightarrow f} = \{a_{ij}\}$$

$$f_j = \sum a_{ij} e_i$$

$$\delta_{jk} = (f_j, f_k) = \left(\sum_i a_{ij} e_{ij}, \sum_l a_{lk} \bar{a}_{lk} e_l \right) = \sum_{i,l} a_{ij} \bar{a}_{lk} (e_i, e_l) \sum a_{ij} \bar{a}_{lk}$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$ - эрмитова, если $A^* = A$

$L \in \mathcal{L}(V)$ - самосопряженный, если $L^* = L$

Свойства

1. L - самосопряженный, тогда $[L]_e$ - эрмитова, если e - ортонормированный

$$[L]_e^* = [L^*]_e = [L]_e$$

2. L - самосопряженный, тогда с.ч. $\in \mathbb{R}$

$$\exists Lv = \lambda v, \quad v \neq 0$$

$$\lambda(u, v) = (Lv, v) = (v, Lv) = (v, \lambda v) = \bar{\lambda}(v, v)$$

3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow (u, v) = 0$

$$\lambda(v, u) = (Lv, u) = (v, Lu) = (v, \mu u) = \mu(v, u)$$

../../template/template

2019-10-29

Теорема

L - самосопр. $\Rightarrow \exists e_1, \dots, e_n$ - ортнорм. базис из с.в. L

$$Lv = \lambda v$$

$$(u, v) = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} (Lu, v) = 0$$

$$(Lu, v) = (u, L^*v) = (u, Lv) = (u, \lambda v) = \lambda(u, v) = 0$$

Тут мы должны задать вопрос.

Опр

A - эрмитова матрица

$\Rightarrow M$ - унитарная

D - диагональная : $A = MDM^{-1}$
 $\in \mathbb{R}$

Теорема

A - эрмитов матрица

Тогда условия равносильны

1. $\forall x \in \mathbb{C}^n \quad x^*Ax > 0 \quad (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$
 $x \neq 0$ $\in \mathbb{R}$
2. Все с.ч. $A > 0$
3. Все гл. миноры $A > 0$ (критерий Сильвестра)
4. $\exists P$ - обратимое: $A = P^*P$

Если хотя бы одно из них выполняется, то матрица A - положительно опред.

Док-во

$$4 \rightarrow 1$$

$$A = P^*P$$

$$x^*Ax = x^*P^*Px = (Px)^*(Px) = \langle Px, Px \rangle$$

$$\langle a, b \rangle = \sum a_i \bar{b}_i \quad \text{Стандартное эрмитово скал. произв. в } \mathbb{C}$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$A = MDM^{-1} \quad M - \text{унит} \quad D - \text{диаг. } (\in \mathbb{R})$$

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \quad A = (D^{\frac{1}{2}} M^*)^* (D^{\frac{1}{2}} M^*)$$

$$M - \text{унитар} \Rightarrow MD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} M^* = MDM^{-1} = A$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$Ax = \lambda x$$

$$x^*_{>0} Ax = x^* \lambda x = \lambda x^* x = \lambda \langle x, x \rangle_{>0}$$

$$1 \rightarrow 3$$

Нужно доказать, что все главные миноры больше 0

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = x'^* A' x' > 0 \quad \forall x' \neq 0$$

$\Rightarrow A'$ уд. первому условию, а еще 4 условию

$$A' = P^* P$$

$$\det A' = \det P^* \cdot \det P = \overline{\det P} \cdot \det P = |\det P|^2 > 0 \quad \text{т.к. } P \text{ обратим}$$

$$3 \rightarrow 2$$

Индукция по размеру A

Когда матрица 1×1 очев.

Инд. переход: $n \rightarrow n + 1$

Пусть λ - с.ч. A , $\lambda < 0 \Rightarrow \exists \mu < 0$

$$Ax = \lambda x \quad Ay = \mu y, \quad \langle x, y \rangle = 0$$

Если λ и μ различные.

Если с.ч. различны, то им соотв. ортогон. с.в. \Rightarrow у эрмит. матр. ортогон. с.в. соотв. различным с.ч.

У эрмитовой матрицы существует онб из с.в. - столбцов. В этом базисе будет два вектора, лежащие в одном подпр-ве.

Что такое собственное под-во?

Если λ и μ совпадают, то есть два неколл. с.в., мы можем их ортогонализировать

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \underset{=u}{\alpha x + \beta y} = (u', 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u'^* A' u' &= u^* A u = |\alpha|^2 x^* A x + |\beta|^2 y^* A y = \quad \text{подставили } u \text{ которое сверху} \\ &= |\alpha|^2 \underset{<0}{\lambda} \cdot \|x\|^2 + |\beta|^2 \underset{<0}{\mu} \|y\|^2 < 0 \end{aligned}$$

$$u'^* A' u' < 0$$

Если бы для матрицы A' выполнялось 3 условие, то должно было бы выполняться 2 условие, а 1 не выполняется, это значит, что 3 условие не вып. Все главные миноры A' - это в частности главные миноры A . А 3 выполняется для A . Мы получили противоречие.

Замечание

Все то же самое, можно доказать для симм. матрицы.

Пусть след. усл равносильны... для симм. матрицы над \mathbb{R}

Только тут будет P над \mathbb{R}

Теорема

A - эрмит. матрица

тогда след. условия равносильны

1. $\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \underset{\in \mathbb{R}}{x^* A x} \geq 0$
2. Все с.ч. $A \geq 0$
3. Все гл. миноры $A \geq 0$
4. $\exists P : \quad A = P^* P$

Такая матрица называется положительно полуопред.

Док-во

Доказать дома

Опр (Singular value decomposition SVD)

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists \begin{matrix} U \\ m \times m \end{matrix}, \begin{matrix} V \\ n \times n \end{matrix} - \text{унитарные}, \quad S \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

S - диаг. насколько это возможно для прямоугол. матрицы, с неотр числами на диаг.

$$A = USV^*$$

Поворот, растяжение, поворот

Док-во

$$m \leq n$$

$$A^*A - \text{эрмитова} \quad (A^*A)^* = A^*A - \text{proof}$$

$$x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) \geq 0$$

Значит эта матрица положительно полуопред.

$$\exists V - \text{унитарная:} \quad V^*A^*AV = D' - \text{диаг} \quad V \in GL_n(\mathbb{C})$$

т.к. эта матрица положительно полуопред., то у этой матрицы на диаг будут стоять неотр. с.ч. Переставим с.ч так, что сначала идут положительные, а потом нули

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D \in M_k(\mathbb{R}) \quad m \geq n \geq k$$

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} V_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}) \\ k \text{ столб} \end{matrix} \quad \begin{matrix} V_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C}) \\ n-k \text{ столб.} \end{matrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix} A^*A \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*A^*AV_1 & V_1^*A^*AV_2 \\ V_2^*A^*AV_1 & V_2^*A^*AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*A^*AV_1 = D \\ V_2^*A^*AV_2 = 0 \Rightarrow AV_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*V_1 & V_1^*V_2 \\ V_2^*V_1 & V_2^*V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*V_1 = E_k \\ V_2^*V_2 = E_{n-k} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} = V_1V_1^* + V_2V_2^* = E_n$$

$$U_1 \stackrel{\det}{=} AV_1D^{-\frac{1}{2}} \in M_{m,k}(\mathbb{C})$$

$$U_1D^{\frac{1}{2}}V_1^* = AV_1D^{-\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}V_1^* = A - AV_2V_2^* = A$$

../../template/template

2019-11-05 Продолжение док-ва:

Док-во

$$U_1^* U_1 \stackrel{def}{=} D^{-\frac{1}{2}} \underbrace{V_1^* A^* A V_1}_{=D} D^{-\frac{1}{2}} = E_k$$

Осталось из U_1 и $V_1 \Rightarrow U_1$ содержит k ортогональных столбцов. Раз они ортогональны, можно дополнить до ортогонального базиса в \mathbb{C}^n и получаем:

$$U = (U_1 U_2) \in M_n(\mathbb{C})$$

Эта матрица ортонормирована из-за ортог. столбцов.

$$S := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m_1 n}(\mathbb{C})$$

$$(U_1 U_2) S (V_1 V_2)^* = U_1 F^{\frac{1}{2}} V_1^* = A$$

Матрица S нужного размера. Матрица U_1 - квадратная и унитарная. С V_1 тоже все ок

Замечание

Такая же теорема верна в \mathbb{R} . Только если тут унитарные матрицы, то там ортогональные

3 Квадратичные формы над \mathbb{R}

Опр

$x = (x_1, \dots, x_n)$, тогда:

$S(x) = \sum_{i \geq j} a_{ij} x_i x_j$ - квадратичная форма

Замечание

$$S(x) = \sum_{b_{ij}=b_{ji}} a_{ij} x_i x_j$$

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i = j \\ \frac{a_{ij}}{2}, & i > j \\ \frac{a_{ji}}{2}, & j > i \end{cases}$$

$B = (b_{ij})$ - матрица ...?

$$S(x) = x^T B x$$

$$x = M y$$

$$S(x) = y^T M^T B M y$$

Опр

S - положительно определена, если:

1. $\forall x \quad S(x) \geq 0$
2. $S(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Замечание

Эквивалентно тому, что матрица S - положительно определена. В частности это значит, что верен критерий Сильвестра

Опр

$$S(x) = a_1 x^2 + \dots + a_n x_n^2 - \text{канонический вид}$$

Теорема

Любую матрицу можно привести к каноническому виду с помощью элементарного преобразования

Док-во

Любая самосопряженная матрица представляется в виде: унитарная матрица * диагональная * унитарная сопряженная к первой. В \mathbb{R} формулируется так: любая симметрическая матрица: ортогональная * симметричная * ортогональная в минус 1. То есть получили то что нам нужно

3.1 Применение сингулярного разложения

$$Ax = b$$

У A столбцов мало, строк много

Хотим решить приближенно, то есть чтобы $\|Ax - b\| \rightarrow \min$

Опр

х, который минимизирует разность называется решением методом наименьших квадратов (МНК)

Теорема

$$A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

1. x^* - решение МНК $\Leftrightarrow A^T A x^* = A^T b$
2. $A^T A \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{rk } A = m$

Док-во

1. x^* - решением МНК $\overset{\text{Лада записала}}{\Leftrightarrow}$

Ax^* - проекция b на линейную оболочку столбцов A

$$Ax^* = \text{pr}_L v$$

$$b - \text{pr}_L b \perp L \Rightarrow A^T(b - \text{pr}_L b) = 0$$

Почему $v \perp L \Rightarrow A^T v = 0$?

$$\forall e: (Ae, v) = 0 \\ = (e, A^T v)$$

Какой вектор ортогонален произвольному? Только нулевой. Мы в док-ве воспользовались $(Ax, y) = (x, A^T y)$ (просто расписать)

$$A^T b = A^T Ax^*$$

$$A^T Ax^* = A^T b$$

$$A^T(Ax^* - b) = 0 \Rightarrow Ax^* - b \perp L \text{ (аналогично)}$$

$$\Rightarrow b = \underset{\in L}{Ax^*} - (\in \in L^\perp Ax^* - b)$$

2. $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T Ax = 0$. В (\Rightarrow) - очевидно.

$$\text{Пусть } A^T Ax = 0 \Rightarrow x^T A^T Ax = 0 \Rightarrow (Ax)^* Ax \Leftrightarrow Ax = 0$$

Будем говорить в этом случае (немного некорректно), что x лежит в ядре матрицы A . Теперь к пункту 2.

(\Rightarrow) :

$$A^T A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Ker } A^T A = \{0\} \Rightarrow \text{Ker } A = \{0\}$$

Значит Ax - не имеет решения кроме нулевого. Но это ЛК столбцов матрицы. Значит столбцы матрицы A - ЛН. Значит она имеет

полный ранг. Ч.т.д.

(\Leftarrow):

Ранг равен $m \Rightarrow$ столбцы ЛН $\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

Но знаем, что ядро у матриц в $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T Ax = 0$ равны нулю
 $\Rightarrow A^T A$ - обратимо

Теорема

$$A = UDV^T \quad A \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \quad D \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

Док-во

D - как бы диагональна. А все диагональные элементы вещ. неотриц. числа, приведем её так:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D^+ \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A^+ = VD^+U^T$$

x^* - решение МНК $Ax = b \Leftrightarrow x^* = A^+b$

$$A^T Ax^* = A^T b$$

$$A^T AA^+b \stackrel{?}{=} A^+b$$

$$VD^T U^T U D V^T U D^+ U^T b \stackrel{?}{=} VD^T U^T b$$

$$V \underbrace{D^T D D^+}_{=D^T} U^T b$$

Опр

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

Свойства

$$1. \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$$

$$2. \|A + B\| \geq \|A\| + \|B\|$$

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A + B)y\| \leq \sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| + \sup_{\|z_2\|=1} \|Bz_2\|$$

Пусть \sup достигается в z_1, z_2

$$\|Az_1\| \geq \|Ay\|$$

$$\|Az_2\| \geq \|Ay\|$$

Подробное док-во: (убедили д-ть)

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A + B)y\| = M$$

$$\sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| = m_1$$

$$\sup_{\|z_2\|=1} \|Az_2\| = m_2$$

$$M \leq m_1 + m_2$$

$$\forall z : \|z\| = 1 \quad \|Az\| \leq m_1$$

$$\|Bz\| \leq m_2 \Rightarrow \|(A + B)z\| \leq \|Az\| + \|Bz\| \leq m_1 + m_2$$

$$3. \|UA\| = \|AV\| \|A\|, \text{ если } U, V - \text{ ортогон. матрицы (очевидно)}$$

$$\|UA\| = \sup_{\|y\|=1} \|UAy\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|$$

$$4. \|A\| = \sigma_1(A) - \text{наибольшее сингулярное число. Как его получить?}$$

Взяли сингулярное разложение $A = UDV^T$. На диагонали D выбираем наибольшее сингулярное число