

# 1 Метрические пространства. Примеры.

## Опр

$X$  - мн-во ( $X \neq \emptyset$ )

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (метрика)

Пара  $(X, \rho)$  назыв. метр. пр-вом, если:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$  и  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. нер-во  $\triangle$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

## Примеры

1.  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  со станд.  $\rho$

2. На  $\mathbb{R}^2$

(a)  $\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  - манхэттенская метрика

(b)  $\rho_\infty = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

(c)  $\rho_p = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$

(d)  $\rho_2$  - евклидова метрика

3.  $X$  - город без односторонних дорог,  $\rho(A, B)$  - min время, за которое можно добраться от  $A$  до  $B$

4.  $X$  - мн-во

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases} \text{ - дискретная метрика}$$

## Упр

Доказать, что это метрики

## 2 Открытые и замкнутые множества. Свойства

### Опр

Открытый шар с центром в  $x_0$  и радиусом  $\mathcal{E}$  (окр.  $x_0$ ):

$$B(x_0, \mathcal{E}) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < \mathcal{E}\}$$

### Опр

$U \subset X$ ,  $U$  - открыто, если:

$$\forall x \in U \quad \exists \mathcal{E}: B(x, \mathcal{E}) \subset U$$

### Опр

$Z \subset X$   $Z$  - замкнуто, если:

$$X \setminus Z \text{ - открытое мн-во}$$

### Теорема (св-ва откр. мн-в)

1.  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  - семейство откр. мн-в

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ - откр.}$$

2.  $U_1, \dots, U_n$  - откр. (конеч. число)

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \text{ - откр.}$$

3.  $\emptyset, X$  - откр.

### Док-во

1.  $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in U_{\alpha_0}$

$$U_{\alpha_0} \text{ - откр.} \Rightarrow \exists \mathcal{E}: B(x, \mathcal{E}) \subset U_{\alpha_0}$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ - откр.}$$

2.  $\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \forall i \quad x \in U_i$

$$\exists \mathcal{E}_i: B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$\mathcal{E} = \min_{i=1, \dots, n} \{\mathcal{E}_i\} \quad B(x, \mathcal{E}) \subset B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \text{ - откр.}$$

### Пример

$$U_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{0\}$  - объясняет, почему должно быть конечное число в пересеч.

### Лемма

$B(x_0, r)$  - открыто  $\forall$  метр. пр-ва  $X \quad \forall x_0 \quad \forall r > 0$

### Док-во

$$x \in B(x_0, r) \Rightarrow \rho(x_0, x) = d < r$$

$$\text{Возьмём } \mathcal{E} = \frac{r - d}{2}$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset B(x_0, r)?$$

\*/ Здесь очень внимательно надо смотреть на предположение,  $x_1$  лежит в предполагаемой области за пределами шарика  $B(x_0, r)$  \*/

$$\supset \exists x_1 \in B(x, \mathcal{E}) \setminus B(x_0, r)$$

$$\rho(x_1, x) < \mathcal{E} = r - d$$

$$\rho(x_0, x) = d$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq r$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0)$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq r \quad \text{и} \quad \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0) < r$$

противореч. нер-ву  $\Delta$

### Теорема (св-ва замк. мн-в)

1.  $\{F_i\}_{i \in A}$  - замкн.

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in A} F_i - \text{замк.}$$

2.  $F_1, \dots, F_n$  - замк.

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i - \text{замк.}$$

3.  $\emptyset$  и  $X$  замк.

$$F_i = X \setminus U_i, \quad U_i - \text{откр.}$$

$$\bigcap F_i = \bigcap (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup U_i$$

### 3 Внутренность и внешность множества.

#### Опр

$X$  - метр. про-во,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$

$x_0$  - назыв. внутренней относительно  $A$  (в  $X$ ), если:

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \subset A$$

#### Опр

$x_0$  - назыв. внешней, если  $x_0$  - внутр. для  $\overline{A} = X \setminus A$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \cap A = \emptyset$$

#### Опр

Остальные точки - граничные

$x_0$  - граничная, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad B(x_0, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset \text{ и } B(x_0, \mathcal{E}) \not\subset A$$

$A$  - внутренность  $A$  - мн-во внутр. точек

$A$  - внешность  $A$  - мн-во внешних точек

$\partial A = A$  - граница  $A$  - мн-во гр. точек

#### Теорема

Следующие описания Int эквививалентны

1.  $A$  - мн-во внутр. т.
2. Наибольшее (по включению) откp. мн-во, содерж. в  $A$
3. max (по включению) откp. мн-во, содерж. в  $A$
4.  $A = \bigcup U_i$ ,  $U_i$  - откp.  $U_i \subset A$
5.  $A = (X \setminus A) \setminus \partial A$

#### Док-во

(2)  $\Leftrightarrow$  (4)  $\Leftrightarrow$  (3) т.к объедин. откp. - откp.

(1)  $\Leftrightarrow$  (4) :

( $\Rightarrow$ ) :

$$x_0 \in \text{мн-во внутр. т.} \subset \bigcup U_i, \quad U_i \text{- откp.} \quad U_i \subset A$$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \text{- откp.} \subset A \text{ (по определению } A)$$

$(\Leftarrow) :$

$$\exists i : x_0 \in U_i \subset A \quad x_0 \in \bigcup U_i$$

$$\exists \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U_i \subset A \Rightarrow x_0 - \text{внутр. т. } A$$

**Теорема (равносильные определения внешности)**

1.  $A$  - мн-во внеш. т.

$$2. A = (X \setminus A)$$

3.  $A$  - макс (по вкл.) откр. мн-во, не пересек. с  $A$

$$4. A = \bigcup U_i, \quad U_i - \text{откр.} \quad U_i \cap A = \emptyset$$

Относительно внутр.

$$A \subset X \Rightarrow (A, \rho) - \text{метр. пр-во}$$

$$B \subset A \quad {}_A B \neq_X B$$

**Пример**

$$X = \mathbb{R}, \quad \rho - \text{станд.}$$

$$A = [0, 1] \quad B = [0, \frac{1}{2})$$

$${}_X B = (0, \frac{1}{2}) \quad {}_A B = [0, \frac{1}{2})$$

## 4 Замыкание множества.

### Теорема

Следующие определения замыкания  $A$  эквивалентны:

1.  $ClA = \{x \in X \mid \forall \mathcal{E} > 0 \quad B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset\}$
2.  $ClA = IntA \cup \partial A$
3.  $ClA = \cap F_i, \quad F_i - \text{замк} \quad F_i \supset A$
4.  $ClA = \min(\text{по вкл.}) \text{ замк. } \supset A$

### Док-во

(3)  $\Leftrightarrow$  (4) - пересеч. замкн. - замкн.

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) - очевидно

(1)  $\Rightarrow$  (3) :

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad x : B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\square x \notin F - \text{замк.} \quad F \supset A \quad x \in X \setminus F - \text{откр.}$$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x, \mathcal{E}) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$$

$$\Rightarrow x - \text{внеш.} \quad \text{противореч.}$$

(3)  $\Leftarrow$  (1) :

$$x \in \cap F_i$$

$$\square \exists \mathcal{E} > 0 : B(x, \mathcal{E}) \cap A = \emptyset$$

$$B(x, \mathcal{E}) - \text{откр. (по л.)} \quad \text{замк} - F = X \setminus B(x, \mathcal{E}) \quad F \supset A$$

$$x \notin F - \text{противореч.}$$

### Замечание

1.  $A - \text{откр.} \Leftrightarrow A = IntA$

2.  $A - \text{замк.} \Leftrightarrow A = ClA$

3.  $IntA \subset A \subset ClA$   
 $\partial A = ClA \setminus IntA$

### Пример

$$X = \mathbb{R}; \quad A = \emptyset$$

$$IntA = \emptyset \quad ExA = \emptyset \quad \partial A = \mathbb{R}$$

### Пример

Кантор. мн-во - замк.

## 5 Топологические пространства. Примеры.

### Опр

$X$  - мн-во

$\Omega \subset 2^X = \{A \subset X\}$  - мн-во подмн.  $X$

$(X, \Omega)$  - назыв. тополог. пр-вом, если

1.

$$\forall \{U_i\}_{i \in I} \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$$

2.  $U_1, U_2, \dots, U_n \Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \Omega$

3.  $\emptyset; X \in \Omega$

$\Omega$  - тополог. на  $X$

$U \in \Omega$  - назыв. открытым мн-вом

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во;  $F \subset X$

$F$  - назыв. замк., если  $X \setminus F \in \Omega$

### Теорема

1.

$$\bigcap_{i \in I} F_i \text{ - замк, если } F_i \text{ - замк}$$

2.  $F_1 \cup F_2$  - замк ( $F_1, F_2$  - замк.)

3.  $\emptyset, X$  - замк.

### Примеры

1.  $(X, \rho)$  - топ. пр-во

2. дискр. пр-во:  $\Omega = 2^X$

3. антидискр. пр-во:  $\Omega = \{\emptyset, X\}$

### Опр

$(X, \Omega)$  - метризуемо, если  $\exists$  метрика  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_X$

$\Omega$  = мн-во откр. подмн. в  $\rho$

Антидискр. - не метризуемо, если  $|X| > 1$

4. Стрелка

$$X = \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$$
$$\Omega = \{(a, +\infty)\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$$

5. Связное двоеточие

$$X = \{a, b\}$$
$$\Omega = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

6. Топология конечных дополнений (Зариского)

$X$  - беск. мн-во

Замкнутые конечные мн-ва и  $X$

$$\Omega = \{A \mid X \setminus A \text{ конечно}\}$$



## 6 База топологии. Критерий базы.

### Опр

$X$  - топ. пр-во;  $A \subset X$   
 $Int A = \cup U, \quad U \in \Omega \quad U \subset A$   
 $Cl A = \cap F, \quad F - \text{замк. } F \supset A$   
 $\partial A = Cl A \setminus Int A$

### Опр

$x_0 \in X$   
окр.  $x_0$  назыв.  $\forall U \in \Omega : x_0 \in U$

### Опр

$x_0$  назыв. внутр. т.  $A$ , если  $\exists U_{x_0} \subset A$   
 $x_0$  назыв. внеш. т.  $A$ , если  $\exists U_{x_0} \cap A = \emptyset$   
 $x_0$  назыв. граничной, если  $\forall U_{x_0} \quad (U_{x_0} \not\subset A)$  и  $(U_{x_0} \cap A \neq \emptyset)$

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во  
 $\mathcal{B} \subset \Omega$   $\mathcal{B}$  назыв. базой топологии, если

$$\forall U \in \Omega \quad \exists \{V_i\} \in \mathcal{B} : \quad U = \bigcup_{i \in I} V_i$$

### Пример

$X = \mathbb{R}^n$  или другое метр. пр-во  
 $\mathcal{B} = \{B(x_0, \mathcal{E}) | x_0 \in X, \mathcal{E} > 0\}$  - база топологии  
 $\forall U$  - откр.  $\forall x_0 \in U \quad \exists \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U$

$$\bigcup_{x_0 \in U} B(x_0, \mathcal{E}) = U$$

### Теорема (Критерий базы)

$X$  - мн-во  $\mathcal{B}$  - нек. совокупность подмн-в  $X$   
 $\mathcal{B}$  - база  $\Omega \Leftrightarrow$

1.

$$\bigcup_{U_i \in \mathcal{B}} U_i = X$$

2.  $\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} : x \in W; W \subset U \cap V$

## Док-во

→ очев

$$\leftarrow \Omega = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{B} \right\}$$

1.

$$\bigcup_{j \in J} \left( \bigcup_{i \in I_j} U_i \right) = \bigcup_{i,j} U_i$$

2.

$$\left( \bigcup_j U_j \right) \cap \left( \bigcup_i U_i \right) = \bigcup_{i,j} (U_i \cap U_j) = \bigcup_{i,j} \left( \bigcup_{x \in U_i \cap U_j} W_x \right)$$

$$x \in W_x \subset U_i \cap U_j$$

$$\bigcup_{x \in U_i \cap U_j} W_x = U_i \cap U_j \quad W_x \in \mathcal{B}$$

3.

$$\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i \quad X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{B}} U_i$$

## Теорема (База окр. точки)

$X$  - мн-во  $\forall x \in X \quad \exists \mathcal{B}_x \subset 2^X$

1.  $x \in U \quad \forall U \in \mathcal{B}_x$

2.  $U, V \in \mathcal{B}_x \rightarrow \exists W \in \mathcal{B}_x : \quad W \subset U \cap V$

3.  $y \in U \quad (U \in \mathcal{B}_x) \rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_y : \quad V \subset U$

0.

$$\mathcal{B}_x \neq \emptyset \rightarrow \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x - \text{база нек. топологии}$$

## 7 Топология произведения пространств.

### Пример (- конструкция)

$X, Y$  - топ. пр-ва

$(X, \Omega_X); (Y, \Omega_Y)$

Введем базу топ. на  $X \times Y$

$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \Omega_X; V \in \Omega_Y\}$

$$\Omega_{X \times Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \mid U_i \in \Omega_X; V_i \in \Omega_Y \right\}$$

$$\left( \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} S_j \times T_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} ((U_i \cap S_j) \times (V_i \cap T_j))$$

$$(U_i \cap S_j) \in \Omega_X \quad (V_i \cap T_j) \in \Omega_Y$$

## 8 Равносильные определения непрерывности.

### Опр

$(X, \rho); (Y, d)$  - метр. пр-ва  $f : X \rightarrow Y$

$f$  - назыв. непр. в т.  $x_0$ , если

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 :$

Если  $\rho(x, x_0) < \delta \rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \mathcal{E}$

$f$  - непр, если она непр. в каждой точке

### Теорема

$f$  - непр в  $x_0 \Leftrightarrow \forall U - \text{откр.} \subset Y : U \ni f(x_0)$

$\exists V - \text{откр.} \subset X \quad x_0 \in V \text{ и } f(V) \subset U$

### Док-во

$f$  - непр. в  $x_0 \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$

$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E})$

$\rightarrow \forall U - \text{откр.} \subset Y : f(x_0) \in U \rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 :$

$f(x_0) \in B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \rightarrow \exists \delta > 0$

$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \quad B(x_0, \delta) = V$

$\leftarrow \forall$  обрывается

## 9 Прообраз топологии. Индуцированная топология.

### Опр

$f : X \rightarrow Y$  - отображ. мн-в

$(Y, \Omega_Y)$  - топ. пр-во

$\Omega_X$  - самая слабая топ.

$f$  - непр.

$\forall U \in \Omega_Y \quad f^{-1}(U)$  должен быть открытым в  $X$

### Теорема

$\{f^{-1}(U)\}$  - топология на  $X$  и она назыв. прообразом  $\Omega_Y$

### Док-во

$$1. \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \quad (*)$$

$$2. \quad f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$$

$$3. \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad f^{-1}(Y) = X$$

$$(*) : \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \{x \mid f(x) \in \bigcup_{i \in I} U_i\} = \{x \mid \exists i \in I : f(x) \in U_i\}$$

### Опр

$(X, \Omega_X)$  - топ. пр-во

$A \subset X$

$\Omega_A = \{U \cap A \mid U \in \Omega_X\}$  - индуцированная топология на  $A$

## 10 Инициальная топология. Топология произведения как инициальная.

### Опр

$\forall i \in I \quad f_i : X \rightarrow Y_i$   
 $(Y_i, \Omega_i)$  - топ. пр-во

$\{f_{i1}^{-1}(U_1) \cap f_{i2}^{-1}(U_2) \cap \dots \cap f_{ik}^{-1}(U_k) \mid U_j \in \Omega_{ij}\}_{j=1, \dots, k \in \mathbb{N}}$  - база нек. топологии

$\Omega_X$  - соотв. топология (инициальная топология)

### Опр

$\{f_i^{-1}(U)\}$  - предбаза топологии

### Теорема

Топология произведения совпадает с инициальной

### Опр

$$\prod_{i \in I} x_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \mid f(i) \in x_i\}$$

$$p_k : \prod_{i \in I} x_i \rightarrow x_k \quad k \in I$$

$$p_k(f) = f(k) \rightarrow \text{если } x_i - \text{ топ.} \rightarrow \prod_{i \in I} x_i - \text{ топ.}$$

## 11 Финальная топология. Фактортопология. Приклеивание.

### Опр

$\forall i \in I \quad f_i : X_i \rightarrow Y$  - отображ.

$(X_i, \Omega_i)$

Хотим завести на  $Y$  топологию:

$\forall f_i$  - непрер. Топ на  $Y$  самая сильная

$U \subset Y \quad \forall i \in I \quad f_i^{-1}(U) \in \Omega_i$

$\Omega_Y = \{U \mid \forall i \quad f_i^{-1}(U) \in \Omega_i\}$

$\emptyset, Y \in \Omega_Y$

$f_i^{-1}(U_1 \cap U_2) = f_i^{-1}(U_1) \cap f_i^{-1}(U_2)$

$$f_i^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} U_k\right) = \bigcup_{k \in K} f_i^{-1}(U_k)$$

### Пример

Приклеивание

$X, Y$  - пр-ва

$A \subset X \quad f : A \rightarrow Y$  - отображ.

Хотим получить  $X \cup_f Y$  - приклеивание

$X \cup_f Y = X \cup Y / \sim \quad \forall a \in A \quad a \sim f(a)$

$U$  - откр. в  $X \cup_f Y$ , если  $U \cap X$  - откр. в  $X$  и

$U \cap Y$  - откр. в  $Y$  (если  $f$  - инъект.)

## 12 Гомеоморфизм.

### Опр

$f : X \rightarrow Y$  - гомеоморфизм, если

1.  $f$  - непр.
2.  $f$  - биекция
3.  $f^{-1}$  - непр.

### Предположение

$\simeq$  - отношение эквив.

### Теорема

Если  $(X, \Omega_X) \simeq (Y, \Omega_Y)$ , то

$f_* : \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$  - биекция

$$f_*(U) = f(U)$$



## 13 Связность топологического пространства и множества.

## 14 Связность отрезка.

## 15 Связность замыкания. Связность объединения.

### Теорема

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$A \subseteq X$  - связно

$A \subseteq B \subseteq ClA$

$\rightarrow B$  - связно

### Теорема

Если  $A$  - связ., то  $ClA$  - связ.

### Теорема

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$A, B \subseteq X$  - связны

$A \cap B \neq \emptyset$

$\rightarrow A \cup B$  - связно

## 16 Связность и непрерывные отображения.

### Теорема

$(X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$  - топ. пр-ва

$f : X \rightarrow Y$  - непр.

$X$  - СВЯЗНО  $\rightarrow f(X)$  - СВЯЗНО

## 17 Связность произведения пространств

### Теорема

$X, Y$  - топ. пр-ва

$X \times Y$  - связн.  $\Leftrightarrow X, Y$  - связн.

### Замечание

Любое конечное произведение связных топ. пр-в связно

### Теорема

$\prod_{i \in I} X_i$  - связно  $\Leftrightarrow \forall i \in I \quad X_i$  - связно

## 18 Компоненты Связности.

### Опр

$X$  - топ. пр-во

Компонентой связности т.  $x_0 \in X$  назыв. наиб. по включению связное множество, ее содерж.

$$K_{x_0} = \cup \{M \in 2^X \mid x_0 \in M - \text{связ.}\}$$

### Теорема

1.  $\forall x, y \in X \quad K_x = K_y$  или  $K_x \cap K_y = \emptyset$
2. компоненты связности - замк.
3. Для любого связ. мн-ва  $\exists$  компонента связности, в которой оно целиком содержится  
 $\forall M \subseteq X \quad (M - \text{связ.} \rightarrow \exists x \in X : M \subseteq K_x)$
4.  $\forall x, y, z \in X \quad (x, y \in K_z \Leftrightarrow \exists M - \text{связ.} : x, y \in M \text{ и } z \in M)$

### Опр

$X$  - топ. пр-во назыв. вполне несвязным, если  $\forall x \in X : K_x = \{x\}$

## 19 Линейная связность

### Опр

Линейно связное пр-во - топ. пр-во, в котором любые две точки можно соединить непр. кривой

$(X, \Omega)$  - лин. св., если  $\exists f :$

$f : [0, 1] \rightarrow X$  (пути в  $X$ ) |  $f(0) = x$  (нач. пути);  $f(1) = y$  (кон. пути),

$\forall x, y \in X$

### Теорема

$X$  - топ. пр-во

$X$  - лин.св.  $\rightarrow X$  - св.

### Теорема

$A, B$  - лин. св.  $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow A \cup B$  - лин.св.

### Теорема

$X, Y$  - топ. пр-во;  $f : X \rightarrow Y$  - непр.

$X$  - лин. св.  $\rightarrow f(X)$  - лин. св.

## 20 Компактность. Примеры.

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$X$  - компакт, если из любого открытого покрытия  $X$  можно выбрать конечное подпокрытие

$$\forall \{U_i\}_{i \in I}, \quad U_i \in \Omega$$

$$\left( \bigcup_{i \in I} U_i = X \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists \{i_1, \dots, i_n\}_{i_j \in I} : \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X \right)$$

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$A \subseteq X$  - комп., если оно комп. в индуц. топ.

### Теорема

1. конечное топ. пр-во всегда компактно
2. дискретное бесконечное множ. не комп.
3. антидискр. множ. комп.
4.  $[0, 1]$  - компакт.

### Теорема

$X$  - комп.  $A \subseteq X$  - замк.  $\rightarrow A$  - комп.

### Теорема

$X$  - комп  $f : X \rightarrow Y \rightarrow f(x)$  - комп.

### Следствие

Комп. - топ. св-во



## 21 Простейшие свойства компактности.

## 22 Компактность произведения пространств.

### Теорема

$X, Y$  - комп  $\Leftrightarrow X \times Y$  - комп.

### Теорема

$\{X_i\}_{i \in I}$  - комп.  $\Leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i$  - комп.

## 23 Компактность и хаусдорфовость

### Опр

$X$  назыв хаусдорфф., если

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \quad \exists U_{x_1}, U_{x_2} : \quad U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$$

### Теорема (1)

$X$  - хаусдорфф.  $A$  - комп  $\in X \rightarrow A$  - замк.

### Теорема

$f : X \rightarrow Y$  непр., биекция

$X$  - комп.

$Y$  - хаусдорфф.

$\rightarrow f$  - гомеоморф.

### Док-во (1)

$X \setminus A$  - откp?

$x_0 \in X \setminus A$

$\forall x_1 \in A \rightarrow \exists U_{x_0} \ni x_0; \quad V_{x_1} \ni x_1$

$U_{x_0} \cap V_{x_1} = \emptyset$

$$\bigcup_{x_1 \in A} V_{x_1} \subset A \rightarrow x_1, x_2, \dots, x_k : \quad \bigcup_{i=1}^k V_{x_i} \supset A$$

$$U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^k U_{x_i} \text{ - искомая окр. } U_{x_0} \cap A = \emptyset$$

(Иначе  $U_{x_0} \cap V_{x_i} \neq \emptyset, \quad U_{x_i} \cap V_{x_i} \neq \emptyset$ )

## 24 Лемма Лебега. Компактность отрезка.

### Теорема (Лемма Лебега)

$$X = [0, 1] \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad \{U_i\}_{i \in I} - \text{откр. покр. } X$$

$$\rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 : \forall x_0 \exists i \in I : B(x_0, \mathcal{E}) \subseteq U_i$$

( $\mathcal{E}$  зависит от покр.  $\mathcal{E}$  - число Лебега)

### Следствие

Отрезок - комп.

## 25 Критерий компактности подмножеств евклидова пространства.

### Теорема

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$A$  - комп.  $\Leftrightarrow A$  - замк и огр.

### Опр

$A$  - огр., если  $\exists N : A \subset B(0, N)$

### Док-во

$\rightarrow A$  - замк. т.к.  $\mathbb{R}^n$  - хаусдорф.

$A$  - огр.  $\{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\leftarrow A \subset [-N, N] \times [-N, N] \times \dots \times [-N, N] = K$  т.к. огр.

$K$  - комп.

$A$  - замк. в  $K \rightarrow A$  - комп.

## 26 Теорема Вейерштрасса. Примеры.

### Теорема (Вейерштрасса)

$K$  - компакт.

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$  - непр.  $\rightarrow \exists x_0 \in K :$

$\forall x \in K \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (x_0 - \max)$

### Док-во

$f(K)$  - комп.  $\subset \mathbb{R} \rightarrow f(K)$  - замк. и огр  $\rightarrow$

$\sup f(K) \in f(K)$  (замк.)

$\sup f(K) \neq \infty$  (огр.)

$\sup f(K) = f(x_0)$

## 27 Вторая аксиома счётности и сепарабельность.

### Опр

$X$  - обл. II А.С., если в  $X$   $\exists$  счетная база

### Опр

$X$  - назыв сепараб., если  $\exists A \subset X$   
 $|A| \leq \aleph_0$  и  $ClA = X$

### Опр

$A$  - всюду плотно, если  $ClA = X$

### Теорема

$X$  - II А.С.  $\rightarrow X$  - сепараб.

## 28 Теорема Линделёфа.

### Теорема

$X$  - П А.С.  $\rightarrow$  из  $\forall$  откр. покр.  $X$  можно извлечь не более чем счетное подпокрытие



## 29 Первая аксиома счётности.

### Опр

База окр-тей точки

$$\forall x \quad \exists \{U_{x_i}\}_{i \in I_x}$$

$$1. \quad U_{x_i} \in \Omega; \quad x \in U_{x_i}$$

$$2. \quad \forall U \in \Omega : x \in U \quad \exists U_{x_i} : x \in U_{x_i} \subset U$$

### Опр

Если  $\exists$  база окр-тей:

$$\forall x \quad \{\{U_{x_i}\}_{i \in I_x} \text{ не более чем счетное} \rightarrow X \text{ удовл. I А.С.}$$

30 Из компактности следует секвенциальная компактность  
(с первой АС).

31 Из секвенциальной компактности следует компактность  
(со второй АС).

## 32 Полнота и вполне ограниченность метрических пространств.

### Опр

Фунд. послед.

$\{X_n\}$  - фунд., если  $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N : \rho(X_n, X_m) < \mathcal{E}$

### Опр

$X$  назыв. полным, если  $\forall$  фунд. послед. сходится

### Опр

$\{X_i\}_{i \in I}$  -  $\mathcal{E}$ -сеть, если  $\forall x \quad \exists x_i : \rho(x, x_i) < \mathcal{E}$

### Опр

$X$  назыв. вполне огранич., если  $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists$  конечная  $\mathcal{E}$ -сеть

### 33 Из полноты и вполне ограниченности следует компактность

#### Теорема (равносильные)

1.  $X$  - компактно
2.  $X$  - секвенц. комп.
3.  $X$  - полн. и вполне огр.

Теорема (Колмогорова)

$$\forall x, y \in X : x \neq y \rightarrow \exists U \in \Omega$$

Теорема (Тихонова)

$$\forall x, y \in X : x \neq y \rightarrow \exists U \in \Omega$$

Теорема (Хаусдорфа)

$$\forall x, y \in X \quad \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$$

Теорема (3)

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \text{ и замкнуто } F \subseteq X, \quad x \notin F \\ &\exists U_x \text{ и } U_F : U_x \cap U_F = \emptyset \end{aligned}$$

Теорема (4)

$$\begin{aligned} &F_1, F_2 - \text{ замк. } : F_1 \cap F_2 = \emptyset \\ &\exists U_{F_1} \text{ и } U_{F_2} : U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset \\ &T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0 \end{aligned}$$

### 35 Нормальность матрического пространства.

Опр

$(X, \Omega)$  - хаусдорф.

$X$  - нормально  $\Leftrightarrow \forall F$  - замк.,  $\forall G \in \Omega \quad F \subseteq G \rightarrow \exists G' \in \Omega :$

$F \subseteq G' \subseteq ClG' \subseteq G$