2019-10-25

Задача (3)

$$(F)(\underset{1}{x},\ \underset{2}{x+y},\ \underset{3}{x+y+z}))'_x = 0$$

$$z = z(x,y) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ?$$

$$F'_1 \cdot (x)'_x + F'_2 \cdot (x+y)'_x + F'_3 \cdot (x+y+z)'_x = 0$$

$$F'_1 \cdot 1 + F'_2 \cdot 1 + F'_3 \cdot (1 + z'_x) = 0$$

$$F'_3 \cdot z'_x = -F'_1 - F'_2 - F'_3 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1$$

$$(F'_1(\underset{1}{x}, \underset{2}{x+y}, \underset{3}{x+y+z}))'_x = F''_{11} \cdot (x)'_x + F''_{12} \cdot (x+y)'_x + F''_{13} \cdot (x+y+z)'_x =$$

$$= F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x$$

$$(F'_3 \cdot z'_x)'_x = (F'_3)'_x \cdot z'_x + F'_x \cdot z''_{xx}$$

$$F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23} + F''_{23} \cdot z'_x + F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x +$$

$$+ (F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x) \cdot z'_x + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F''_{11} + 2F''_{12} + 2F''_{13} + F''_{22} + 2F''_{23} + F''_{33} + (2F''_{13} + 2F''_{23} + 3F''_{33}) \cdot z'_x + F''_{33} \cdot (z'_x)^2 + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F'_3 \cdot z''_{xx} = -F''_{11} - 2F''_{12} - ... - (2F''_{13} + 2F''_{23} + 2F''_{33}) \cdot (-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1) -$$

$$-F''_{33}(-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1)^2$$

z''_{xx} - из ур=я

$$z''_{xx} = -(\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3})'_x$$

Задача (4 Замена переменных в дифф. ур)

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z}, ...) = 0$$

$$z = z(x,y)$$

новые переменные u, v $\qquad$ $w(u,v)$ - новая функция

$$\begin{cases} x = f(u,v,w) y = g(u,v,w) \\ z = h(u,b,w) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}, \; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

через $u, v, w, \; \frac{\partial w}{\partial u}, \; \frac{\partial w}{\partial v}$

$$x'_u = f'_1 \cdot (u)'_u + f'_2 \cdot (v)'_u + f'_3(w)'_u = f'_1 + f'_3 \cdot w'_u$$

$$x'_v = f'_1 \cdot (u)'_v + f'_2 \cdot (v)'_v + f'_3 \cdot w'_v = f'_2 + f'_3 w'_v$$

$$y'_u = g'_1 + g'_3 w'_u$$

$$y'_v = g'_2 + g'_3 w'_v$$

$$z(x(u,v), y(u,v)) = h(u,v,w)$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u & = h'_1 + h'_3 w'_u \\ z'_x x'_v + z'_y y'_v & = h'_2 + h'_3 w'_v \end{cases}$$

$$z'_x = \Phi(y, v, w, w'_u, w'_v)$$

$$z'_y = \Psi(u, v, w, w'_u, w'_v)$$

Распишем как композицию

$$z'_x(x(u,v), y(u,v)) = \Phi(...)$$

$$z''_{xx} x'_u + z''_{xy} y'_u = (\Phi(...))'_u$$

$$z''_{xx} \cdot x'_v + z''_{xy} y'_v = (\Phi(...))'_v$$

Аналогично

$$z'_x(x(u,v), y(u,v)) = \Psi(...)$$

$$z''_{yx} x'_u + z''_{yy} y'_u = (\Psi(...))'_u$$

$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} y'_v = (\Psi(...))'_v$$

Задача (5)

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Ввести новые переменные

$\exists x$ - новая ф-я, y, z - новые нез. переменные

!Переобозначим, чтобы не запутаться

$$\begin{cases} x = w \qquad w(u,v) \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$x'_u = w'_u \qquad x'_v = w'_v$$

$$y'_u = 1 \qquad y'_v = 1$$

$$z(x(u,v), y(u,v)) = v$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$$

$$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot w'_u + z'_y \cdot 1 = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z'_y = -z'_x \cdot w'_x = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$(w - v) \cdot \frac{1}{w'_v} - u\frac{w'_u}{w'_v} = 0$$

$$w - v - u \cdot w'_u = 0$$

$$w'_u = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

Задача (6) Мы перепутали знак, осторожно !

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \qquad x \text{ - нез перем.} \quad y(x) \text{ - ф-я}$$

φ - новая нез перем $\qquad r(\varphi)$ - новая ф-я

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r\sin'\varphi$$

$$y(x(\varphi)) = r\sin\varphi$$

$$y'_x(x(\varphi)) \cdot x'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x \cdot (r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi) = r'_\varphi + r\cos\varphi$$

$$y'_x = \frac{r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$\frac{r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$(r'_\varphi \sin\varphi + r\cos\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) = (\cos\varphi - \sin\varphi) \cdot (r'_\varphi \cos\varphi - r\sin\varphi)$$

$$r'_\varphi \sin\varphi\cos\varphi + r'_\varphi \sin^2_\varphi - r\cos^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi =$$

$$r'_\varphi \cos^2\varphi + r'_\varphi \cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi - r\cos\varphi\sin\varphi$$

$$r'_\varphi(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

$$r'_\varphi = -r$$

Задача (7)

$$\begin{cases} x = w'_u \\ y = u \cdot w'_u - w \end{cases}$$

x - старая нез. $\quad$ $y(x)$ - ф-я $\quad$ u - новая $\quad$ $w(u)$ - ф-я

Найти $y'_x, \quad y''_{xx}, \quad y'''_{xxx}$

$$x'_u = w''_{uu}$$

$$y'_x \cdot x'_u = 1 \cdot w'_u + uw''_{uu} - w'_u$$

$$y'_x \cdot w''_{uu} = uw''_{uu}$$

$$y'_x = u$$

$$y'_x(x(u)) = u$$

$$y''_{xx} \cdot x'_u = 1$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{w''_u u}$$

$$y''_{xx}(x(u)) = \frac{1}{w''_{uu}}$$

$$y'''_{xxx} \cdot x'_u = -\frac{1}{(w''_{uu})^2} \cdot w'''_{uuu}$$

$$y'''_{xxx} = -\frac{w'''_{uuu}}{(w''_{uu})^3}$$

<u>Задача</u> (8 3502 - частный случай)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \qquad y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$

$z = w$ старая функция равна новой

$$x'_u = \frac{1\cdot(u^2+v^2) - 2u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_u = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$x'_v = \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_u = \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}$$

$$y'_v = \frac{-(u^2+v^2)+2v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}$$

$$z(x(u,v), y(u,v))$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = w'_u$$

Дз: 3388, 3395, 3404, 3502 закончить, 3433, 3471