2019-09-17

Утверждение

$|G| = p$, *простое*

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}} \qquad g \in G, g \neq e$

$ord\ g = p$

$\Rightarrow G = \{e = g^0, g^1, ..., g^{p-1}\}$

Утверждение

H, G - *группы,* $\quad g \in G$

$\varphi : G \to H$ - *изоморфизм*

$\Rightarrow \ ord\ g = \ ord\ \varphi(g)$

$ord\ g = n \qquad g^n = e$

$\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e) = e \qquad \varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$

$\varphi(g)^n \overset{?}{\Rightarrow} e \Rightarrow m \geq n$

$m \in \mathbb{N}$

$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = e = \varphi(e) \quad \Rightarrow g^m = e \Rightarrow m \geq n$

Определение

$H < G$

H - *нормальная подгруппа, если* $\forall h \in H, g \in G$

$g^{-1}hg \in H$ - *сопряжение элемента* h *с помощью элемента* g

рисунок 1

$H \lhd G$

Утверждение

$H \lhd G \Leftrightarrow$ - *разбиение на л. и п. классы смежности по* H *совпадают*

$\forall g \quad gH = Hg$

__Док-во__

$$\Rightarrow h \in H \qquad gh \in gH$$

$$gh = \underbrace{(g^{-1})^{-1}hg^{-1}}_{\in H}g = h_1 g$$

$$\Leftarrow g \in G, h \in H$$

$$g^{-1}hg = h_1$$

$$hg \in Hg = gH \Rightarrow gh_1, h_1 \in H$$

$$H \lhd G$$

$$g_1H * g_2H \overset{def}{=} g_1g_2H$$

$$\widetilde{g_1}H = g_1H$$

$$\widetilde{g_2}H = g_2H \overset{?}{\Rightarrow} \widetilde{g_1}\widetilde{g_2}H = g_1g_2H$$

$$g_2^{-1}h_1g_2 = h_3 \in H$$

$$\widetilde{g_1}\widetilde{g_2}h = g_1h_1g_2h_2h = g_1g_2(\underset{=h_3}{g_2^{-1}h_1g_2})h_2h$$

$$\widetilde{g_1}H = g_1H \Rightarrow \widetilde{g_1} = g_1h_1$$

$$\widetilde{g_2}H = g_2H \Rightarrow \widetilde{g_2} = g_2h_2$$

$$eH = H$$

$$1) \quad eH * gH = (eg)H = gH$$

$$2) \quad (g_1H * g_2H) * g_3H \overset{?}{=} g_1H * (g_2H * g_3H)$$

$$(g_1g_2)H * g_3H = (g_1g_2)g_3H$$

$$3) \quad gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH$$

$$G_{/H}$$

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \,\vdots\, h$$

$$G = \mathbb{Z}$$

$$H = h\mathbb{Z} \quad g_1 - g_2 \in n\mathbb{Z}$$

$$[a] + [b] = [a + b]$$

Пример

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \text{ - \textit{коммутатор}}$$

$$g, h \in G$$
$$K(G) = \{[g_1,h_1], ..., [g_n,h_n], g_i, h_i \in G\} \text{ - \textit{коммутант}}$$

Док-во

Коммутант - подгруппа

$$K(G) < G$$

$$[e,e] = e$$
$$[g_1,h_1]...[g_n,h_n]$$
$$[g,h]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h,g]$$
$$([g_1,h_1]...[g_n,h_n])^{-1} = [h_1,g_1]...[g_n,h_n]$$
$$g^{-1}[g_1,h_1]...[g_n,h_n]g =$$
$$= (g^{-1}[g_1,h_1]g)(g^{-1}[g_2,h_2]g)...(g^{-1}[g_n,h_n]g)$$
$$g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}g =$$
$$= (g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}(gh_1^{-1})h_1g^{-1})h_1^{-1}g$$
$$[g^{-1}g_1,h_1] \qquad [h_1,g^{-1}]$$

Утверждение

$$G_{/K(G)} \text{ - \textit{комм}}$$

Док-во

$$g_1, g_2 \in G \qquad g_1K(G)g_2K(G) \stackrel{?}{=} g_2K(G)g_1K(G)$$

$$g_1g_2K(G) = g_1g_2K(G) \qquad g_2K(G)g_1K(G) = g_2g_1K(G)$$
$$[g_1,g_2] = g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in K(G)$$

Утверждение

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{mn},\ \textit{если}\ (m,n)=1$$

$$[a]_{nm} \to ([a]_n, [a]_m)$$

$$[a]_{nm} = [a']_{mn} \Rightarrow [a]_n = [a']_n, [a']_m = [a']_m$$

$$\forall b,c \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} [x]_n = [b]_n \\ [x]_m = [c]_m \end{cases}$$

$$\begin{matrix} [a]_n = [b]_n \\ [a]_m = [b]_m \end{matrix} \Rightarrow [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

$$\begin{matrix} a \equiv b(n) \\ a \equiv b(m) \end{matrix} \Rightarrow a \equiv b(mn)$$

Определение

$\varphi : G \to H$ - *гомоморфизм*

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

изоморфизм = гомоморфизм + биективность

$\varphi \in Hom(G,H)$ - *множество гомоморфизмов*

Примеры

1) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$

$z \to |z|$

2) $GL_n(K) \to K^*$

$A \to \det A$

3) $S_n \to \{\pm 1\}$

$$\sigma \to \begin{cases} +1, & \textit{если } \sigma \textit{ - четн.} \\ -1, & \textit{если } \sigma \textit{ - неч.} \end{cases}$$

4) $a \in G \quad G \to G$

$g \to a^{-1}ga$

$(a^{-1}ga)(a^{-1}g_1a) = a^{-1}g_g1a$