2019-10-10

<u>Напоминание</u>

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

$$\mu = \mu(x) \qquad \frac{1}{\mu}\mu' = \frac{1}{N}(M'_y - N'_x) \qquad (11)$$

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt \qquad (7')$$

<u>Пример</u> (важнейший)

$$(13) \qquad y' = p(x)y + g(x) \qquad p(x), g(x) \in C(a,b)$$

$$(13') \qquad (p(x)y + g(x))dx - dy = 0 \qquad (x \not\equiv const)$$

$$\frac{1}{N}(M'_y - N'_x) = -1 \cdot (p(x) - 0) = -p(x)$$

$$\exists \mu = \mu(x) : \frac{d\mu}{\mu} = -p(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

$$e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}(p(x)y + g(x))dx - e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}dy = 0 \qquad (14)$$

Применяем к этому формулу $7'$
полагаем для простоты $y_0 = 0$

$$u(x,y) = -\int_0^y e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}dt + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \cdot g(t)dt$$

$$\underline{u(x,y) = -c}$$

$$-ye^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} g(t)dt = -c$$

$$y = c \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds} g(t)dt \qquad (15)$$

З. Коши $(x_0, y_0) \qquad (x_0 \in (a,b))$

$\Rightarrow$ (15), где $c = y_0$

$$(15') \qquad y = ce^{\int p(x)} + e^{\int p(x)dx} \int e^{-\int p(x)dx} g(x)dx$$

1 Системы дифф. уравнений

Опр

Система дифф уравнений, разрешенная относительно старших производных

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1^{(m_1)} = X_1(t, x_1, \dot{x_1}, ..., x_1^{(m_1-1)}, ..., x_k, \dot{x_k}, ..., x_k^{(m_k-1)}) \\ x_2^{(m_2)} = X_2(...) \\ ... \\ x_k^{(m_k)} = X_k(...) \end{cases}$$

$$n = \sum_{j=1}^{k} m_j$$

Опр

Реш (1): $x_1 = \varphi_1(t), ..., x_k = \varphi_k(t) \qquad t \in (a, b)$

$\underset{j=1,...,k}{X_j} \in C(D) \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Подставили и получили тождество

Опр (Частный случай)

1. $k = 1$

$$x^{(n)} = X(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n-1)}) \qquad (2)$$

2. $\underset{j=1,...,k}{m_j} = 1$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = X_1(t, x_1, ..., x_n) \\ ... \\ \dot{x_n} = X_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Система в нормальной форме или нормальная система

В (2) замена

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \\ ... \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ ... \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = X(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (5)$$

$$\text{в (3)} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$(3') \qquad \dot{x} = X(t, x)$$

$(3')$ - система, записанная в векторной форме

Замечание

Будем рассматривать только системы в нормальной форме

З. Коши

для $(1):$ при $t = t_0:$

$$\begin{cases} x_1 - x_{1_0}, \dot{x_1} = \dot{x}_{1_0}, ..., x_1^{(m_1-1)} = x_{1_0}^{(m_1-1)} \\ x_2 = x_{2_0}, ..., x_2^{(m_2-1)} = x_{2_0}^{(m_2-1)} \\ x_k = x_{k_0}, ..., x_k^{(m_k-1)} = x_{k_0}^{(m_k-1)} \end{cases}$$

для $(2):$ при $t = t_0 \quad x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0, ..., x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}$

для $(3): t = t_0: x_1 = x_{1_0}, x_2 = x_{2_0}, ..., x_n = x_{n_0}$

Замечание

сист (5) и ур (2)

$$\text{реш} \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(t), \quad t \in (a, b) \end{cases} \qquad \text{реш } x = \varphi(t) \quad t \in (a, b)$$

Решения разные, но мы называем (5) и (2) эквивалентными

$$\varphi_1(t) = \varphi(t)$$

$$\varphi_2(t) = \dot{\varphi}(5)$$

$$...$$

$$\varphi_n(t) = \varphi^{(n-1)}(t)$$

Опр

Договоримся с обозначениями

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ - вектор}$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \text{ - норма}$$

$$a^{(k)} = a^{\{k\}} \text{ - послед. векторов}$$

$$a^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} a \Leftrightarrow a_j^{(k)} \underset{\substack{k\to+\infty \\ \forall j=1,...,n}}{\to} a \Leftrightarrow \left|a^{(k)} - a\right| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

$$f(x_1, ..., x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_m) \\ ... \\ f_n(x_1, ..., x_m) \end{pmatrix} \text{ вектор-функция}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$u(t) \text{ - непр на } [a, b] \Rightarrow \int_a^b u(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b u_n(t)dt \end{pmatrix}$$

$$\left|\int_a^b u(t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^b |u(t)|\, dt\right|, \text{ если } b \geqslant a \quad \text{ здесь норма } |.|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$a^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ ... \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Признак Вейерштрасса работает.

$$\exists \text{ сх ряд } \sum_{k=1}^{\infty} b_k : \left|a^{(k)}(t)\right| \leqslant b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(t) \text{сх равн и абс} \quad \forall t \in \Omega$$

Опр

$$(1) \qquad \dot{x} = X(t,x) \qquad X \in C(D), D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ ... \\ X_2 \end{pmatrix}$$

З.Коши (2) $\quad (t_0, x_0)$ Смысл геометрический и механический полностью совпадают с одномерным случаем
геом - поле направлений
мех - мгновенная скорость в точке и во времени

реш (1) ф-я $x = \varphi(t) \quad t \in (a,b)$ подст тожд в (1)

Теорема (Пеано)

$$D = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a, \ |x - x_0| \leqslant b\}$$

$$X(t,x) \in C(D)$$

$$\Rightarrow \exists M : \ |X(t,x)| \leqslant M \quad h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$\Rightarrow \exists \text{ реш } (1) \ x = \varphi(t) \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

$(x_0 = \varphi(t_0))$ доказывается аналогично одномерному сл.

2 Условие Липшеца