Содержание

1 Введение

1.1 Литература

Учебник Бибиков "Обыкновенные дифферинциальные уравнения"
Филиппов - задачи
"Методы интегрирования"
Каддинктон Ливенгсон "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
Яругии

1.2 Введение

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
x - неизвестная переменная
$y = y(x)$ - неизвестная функция лалалалалалала

Опр

Порядок уравнения - порядок старшей производной

Кроме того, $x = \frac{dx}{dt}$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$

1.3 Применение

1) механика
2) электротехника
3) физика: $\dot{Q} = kQ$, $Q = Q_0 e^{kt}$
4) упр. движением
5) биология, экология

Пример из биологии:
x - хищник
y - жертва

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + cxy \\ \dot{y} = by - dxy \end{cases}$$

$$a, b, c, d > 0, \ x, y > 0$$

2 Дифферинциальные уравнения первого порядка

2.1 Введение

(1) $\dot{x} = X(t,x)$
$X(t,x) \in C(G)$, G - обл, $G \subset \mathbb{R}^2$
Но чаще будем $\in C(D)$ $D \subset \mathbb{R}^2$

Опр

Решение (1) - функция $x = \varphi(t)$, $t \in < a,b >$: $\dot{\varphi}(t) \equiv X(t,\varphi(t))$ на <a,b>

1) $\forall t \in < a,b >$ $(t,\varphi(t)) \in D$
2) $\varphi(t)$ - дифф на $< a,b >$
3) $\varphi(t)$ - непр. дифф. (X- непр на D)

Опр

(2) Задача Коши - задача нахождения решения (1) $x = \varphi(t)$: $\varphi(t_0) = x_0$ $((t_0, x_0) \in D)$

Геометрический смысл уравнения первого порядка - уравнение 1 задаёт поле направлений на множестве G

Опр

График решения называется интегральной кривой

В каждой точке задано направление, которое совпадает с касательной в этой точке к интегральной кривой
$\dot{\varphi}(t)|_{t=t_0} = X(t_0, x_0)$

2.2 Метод изоклин

Опр

Изоклина - это кривая, на которой поле направлений постоянно

Уравнение изоклин $X(t,x) = c$, где $c = const$

$\dot{x} = -\frac{t}{x}$ $(x = \varphi(t))$

$-\frac{t}{x} = tg\alpha$
$x = -\frac{1}{c}t$, $c \neq 0$
$c = 1$ $(\alpha = \frac{\pi}{4})$ $x = -t$ - уравнение изоклин
$c = -1$ $(\alpha = -\frac{\pi}{4})$ $x = t$
Решение задачи Коши (1, 1) - это $x = \sqrt{2 - t^2}$
Решение задачи Коши (1,-1) - это $x = -\sqrt{2 - t^2}$

2.3 Теорема Пеано

(1) $\dot{x} = X(t, x)$, $X \in C(D)$
$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant ... \leqslant |x - x_0| \leqslant b\}$
(2) (t_0, x_0)
По теореме Вейерштрасса $\exists M :\ |X(t, x)| \leqslant M\ \forall (t, x) \in D$
$h = min(a, \frac{b}{M})$

(Пеано) $\exists$ реш. задачи К. (1), (2) $x = \varphi(t)$ опр-е на $[t_0 - h,\ t_0 + h]$ - отрезок Пеано

Опр

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in [c, d]$

1) $\varphi_k(t)$ - равномерно ограничена на $[c, d]$, если $\exists N :\ |\varphi_k(t)| \leqslant N$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [c, d]$

2) $\varphi_k(t)$ - равностепенно непр на [c,d], если $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall t_1, t_2 \in [c, d]\ |t_1 - t_2| < \delta \to |\varphi_k(t_1) - \varphi_k(t_2)| < \mathcal{E}\ \forall k \in \mathbb{N}$

(Арцелло - Асколи) $\varphi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, равномерно огр. и равностепенно непр на $[c, d] \to \exists$ подпосл $\varphi_{kj}(t) : \varphi_{kj}(t) \underset{j \to +\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$

2019-09-12

Док-во

$$P = [t_0, t + h]$$

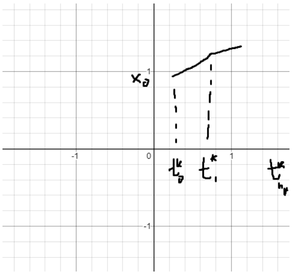
$$d_k : t_0 = t_0^k < t_1^k < ... < t_j^k < ... < t_{nk}^k = t_0 + h$$

$$\text{rank } d_k = \lambda_k = \max_{0 \leqslant j \leqslant n_k - 1} (t_{j+1}^k - t_j^k)$$

$$(3) \quad \lambda \underset{k \to +\infty}{\to} 0$$

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_k(t_0) = x_0 \\ \varphi_k(t) = \varphi_k(t_j^k) + X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))(t - t_j^k) \end{cases} \text{ - ломанные Эйлера}$$

$t_j^k \leqslant t \leqslant t_{j+1}^k$



<u>Лемма</u> (1)

Определим $\varphi_k(t)$ и

$|\varphi_k(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0) \quad \forall t \in P \quad (5)$

<u>Замечание</u>

$(5) \Rightarrow t \in P \Rightarrow 0 \leqslant t - t_0 \leqslant h \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| \leqslant M \cdot h \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b \quad (6)$$

<u>Док-во</u> (лемма 1)

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0) \cdot (t - t_0)$

$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| = |\underset{\leqslant M}{X(t_0, x_0)}|(t - t_0) \leqslant M(t - t_0)$

И.П.: Пусть (5) - выполняется $\forall t \in [t_0^k, t_j^k]$

$\Rightarrow |\varphi_k(t_j^k) - x_0| \leqslant M(t_j^k - t_0) \leqslant b \Rightarrow (t_j^k, \varphi_k(t_j^k)) \in D$

$t_j^k \leqslant t < t_{j+1}^k$

По (4) имеем: $|\varphi_k(t)| \leqslant |\varphi_k(t) - x_0| \underset{\text{инд. предп}}{=} |\varphi_k(t_j^k) - x_0| + |X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))|(t - t_j^k) \leqslant$

$\leqslant M(t_j^k - t_0) + M(t - t_j^k) = M(t - t_0)$

<u>Опр</u>

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_k(t) = X(t_j^K, \varphi_k(t^k)), \quad t_j^k \leqslant t \leqslant t_{j+1}^k \qquad j = 0, ..., n_k - 1 \\ \varphi_k(t_{nk}^k) = X(t_{nk}^k, \varphi_k(t_{nk}^k)) \end{cases}$$

Лемма (2)

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau)d\tau \qquad (8)$$

Док-во

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0)(t - t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{X(t_0, x_0)}_{=\psi_k(t)} d\tau$$

Пусть $[t \in [t_0^k, t_j^k] \Rightarrow \varphi_k(t_j^k) = x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau)d\tau$

И.П.: $t \in [t_j^k, t_{j+1}^k]$

$$\Rightarrow \varphi_k(t) = \varphi(t_j^k) + X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))(t - t_j^k) =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau)d\tau + \int_{t_j^k}^{t} X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau)d\tau$$

Лемма (3)

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ - равномерно огр., равностепенно непр. для $t \in P$

Док-во

По пункту (6) $|\varphi_k(t)| \leqslant |\varphi_k(t) - x_0| + |x_0| \leqslant b + |x_0| \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{E} > 0 \quad \delta$

$|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta \quad (\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in P)$

$$|\varphi_k(\bar{t}) - \varphi_k(\bar{\bar{t}})| = |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} \psi_k(\tau)d\tau| \leqslant |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} |\psi_k(t)|d\tau| \leqslant$$

$\leqslant M\delta = \mathcal{E}$

$\exists$ подпослед. $\{\varphi_k(t)\}_1^{\infty} \quad t \in P$

(9) $\varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$ (тут должны быть k_m, но мы их не будем писать)

$\varphi(t)$ - непр и $|\varphi(t) - x_0| \leqslant b$

<u>Лемма</u> (4)

$$(10)\quad \psi_k(t) \underset{k\to+\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} X(t,\varphi(t))$$

<u>Док-во</u> (лемма 4)

$X(t,x)\in C(D) \Rightarrow X(t,x)$ - равном непр. на D

$\Rightarrow \forall\mathcal{E}>0\exists\delta>0 : \forall(\bar t,\bar x),(\bar{\bar t},\bar{\bar x})\in D$

$|\bar t-\bar{\bar t}|<\delta,\quad |\bar x-\bar{\bar x}|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |X(\bar t,\bar x)-X(\bar{\bar t},\bar{\bar x})|<\dfrac{\mathcal{E}}{2}$

фикс $\mathcal{E}>0\Rightarrow\exists\delta>0$

$$(12)\quad |X(t,\varphi(t))-\psi_k(t)|\leqslant|X(t,\varphi(t))\underset{(1)}{-}X(t,\varphi_k(t))|+|X(t,\varphi_k\underset{(2)}{(t)}-\varphi_k(t)|$$

из (9) $\quad\Rightarrow\exists k_1:\forall k>k_1\quad|\varphi_k(t)-\varphi(t)|<\delta\quad\forall t\in P$

$\Rightarrow \underbrace{|...|}_{(1)}<\dfrac{\mathcal{E}}{2}$

$t=t^k_{nk}\Rightarrow\underbrace{|...|}_{(2)}=0$ по (7)

Если $[t\neq t^k_{nk}\to\exists j\in\{0,1,...,n_k-1\}:t\in[t^k_j,t^k_{j+1})$

И тогда $\underbrace{|...|}_{2}=|X(t,\varphi_k(t))-X(t^k_j,\varphi_k(t^k_j))|$

$\exists k_2:\forall k>k_2\quad\lambda_k<\min(\delta,\dfrac{\delta}{M})\quad$ (из (3))

$\Rightarrow(t-t^k_j)<(t^k_{j+1}-t^k_j)\leqslant\lambda_k<\delta$

$|\varphi_k(t)-\varphi_k(t^k_j)|\leqslant|\displaystyle\int_{t^k_j}^t\underset{\leqslant M}{|\psi_k(t)|}\leqslant M\underset{\leqslant\lambda_k}{(t-t^k_j)}<M\frac{\delta}{M}=\delta$

$\Rightarrow|\underbrace{...}_{(2)}|<\dfrac{\mathcal{E}}{2}$ по (11)

$\Rightarrow\forall k>\max(K_1,k_2)\qquad|X(t,\varphi(t))-\psi_k(t)|<\dfrac{\mathcal{E}}{2}+\dfrac{\mathcal{E}}{2}=\mathcal{E}$ по (12)

$\varphi(t)=x_0+\displaystyle\int_{t_0}^tX(\tau,\varphi(\tau))d\tau\qquad(13)$

Т.к. дифференцируема справа, то дифференцируема слева

$t = t_0 : \varphi(t_0) = x_0$

Дифф. (13): $\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$\Rightarrow \varphi(t)$ - реш. задачи Коши $(1), (2) \quad t \in P$

2019-09-19

Напоминание

D - мн-во

1. $\dot{x} = X(t, x)$

2. $(t_0, x_0) \in D$

Опр

$x = \varphi(t)$ - реш. задачи Коши $(1), (2), \quad t \in < a, b >$

единств. на $< a, b >$, если
$\forall$ другое реш. $x = \psi(t)$ З.К. $(1), (2) \quad t \in < a, b >$
$\varphi(t) \equiv \varphi(t)$ на $< a, b >$

Теорема

В усл. теоремы Пеано, если решение $x = \varphi(t)$ - единств. на P

$(P = [t_0, t_0 + h]),$ то посл. ломанная Эйлера

$\varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$

Док-во (От противного)

$\exists \mathcal{E} > 0 : \forall k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists k > k_0, \exists t \in P : |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \geqslant \mathcal{E}$

$\Rightarrow \exists \{k_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \{t_j\}_{j=1}^{\infty} : k_{j+1} > k_j$ и $|\varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_j)| \geqslant \mathcal{E} \quad (14)$
$\{\varphi_{k_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$ - посл. Л.Э. $\Rightarrow$ п/послед $\{\varphi_{k_{jm}}(t)\}_{m=1}^{\infty}$:

$\varphi_{k_{jm}}(t) \underset{m \to +\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \psi(t)$

$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists k_{j_0} : \forall k_{jm} > k_{j0} \quad |\varphi_{k_{jm}} - \psi(t)| < \mathcal{E} \quad (15)$

$k_{jm} > k_{j_0}$

$|\varphi(t_{jm}) - \psi(t_{jm})| \geqslant |\underbrace{\varphi(t_{jm}) - \varphi_{kjm}(t_{jm})}_{\geqslant \mathcal{E}}| - |\underbrace{\varphi_{kjm}(t_{jm}) - \psi(t_{jm})}_{< \mathcal{E}}| > 0$

$\Rightarrow \varphi(t_{jm}) \neq \psi(t_{jm})$ - против. с единственностью $\varphi(t)$ на P

Теорема (Пеано)

$$X \in C(G), \quad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^2$$

1. $\dot{x} = X(t, x)$
2. $(t_0, x_0) \in G$

$\Rightarrow \exists h > 0 :$ на $[t_0 - h, t_0 + h]$ опред. решение з. К $(1), (2)$

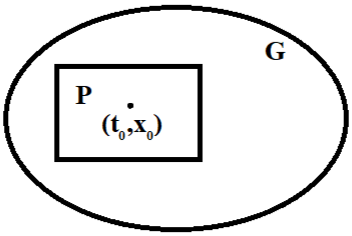
$x = \varphi(t)$

Док-во

$\forall (t_0, x_0) \in G \quad \exists a > 0, b > 0 :$

$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\} \subset G$

$\Rightarrow h = \min(a, \dfrac{b}{M})$, где $M : \quad |X(t, x)| \leqslant M$ на D



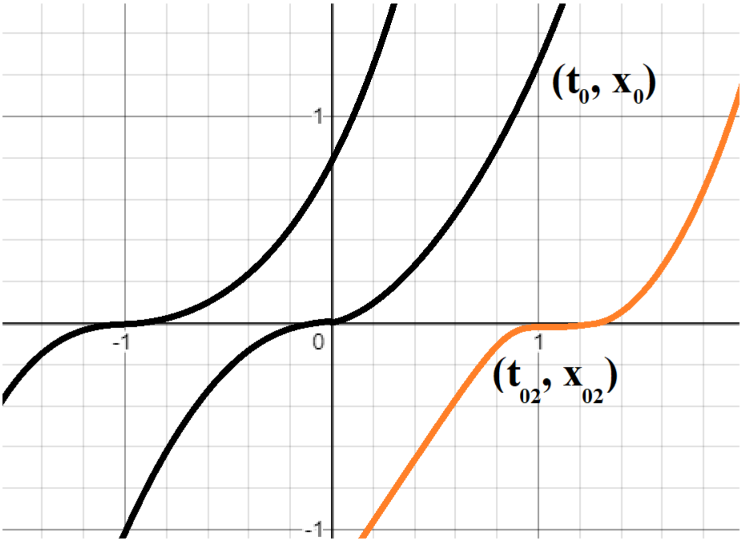
Теорема (единственности)

$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2} \qquad x \equiv 0$ - реш

$$x = \left(\frac{t + c}{3}\right)^3$$

$\exists \Delta > 0 :$ реш $x = \varphi(t) : x_{01} = \varphi(t_{01})$ - единств. на $[t_{01} - \Delta, t_{01} + \Delta]$

$\forall \Delta > 0 \quad$ через т. (t_{02}, x_{02}) проходит беск. много решений



Опр (1)

$$(1) \quad \dot{x} = X(t, x) \quad X \in C(G) \quad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^2$$

$(t_0, x_0) \in G$ - точка единств. для (1), если

$\exists \Delta > 0:$ реш $(1) x = \varphi(t) \quad (x_0 = \varphi(t_0))$

опред и единственно на $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ вместо отрезка можно взять интервал

Опр (1')

$(t_0, x_0) \in G$ - точка единств (1), если

$\exists \Delta > 0 : \forall \delta : 0 < \delta \leqslant \Delta$ реш

$x = \varphi(t)$ - опред и ед-гл на $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$(x_0 = \varphi(t_0))$

Теорема

$\exists\ x = \varphi(t)$ - реш. з. К (1)(2), опред. при $t \in < a, b >$

$\forall t \in (a, b) \quad (t, \varphi(t))$ - точка ед-ти

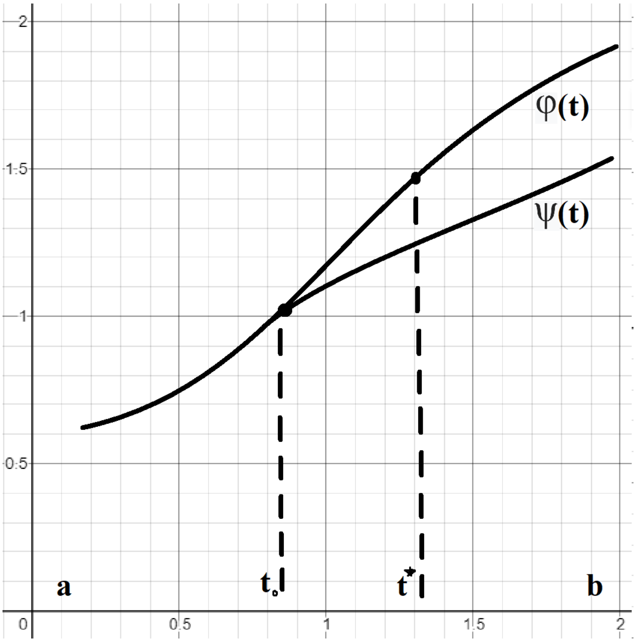
$\Rightarrow$ реш $x = \varphi(t)$ - ед-но на $< a, b >$

Док-во

$\urcorner\ \exists x = \psi(t)$ - другое. реш. З.К. $(1),(2) \quad t \in< a,b >$

$\exists t^* \in (a,b) : \varphi(t^*) \neq \psi(t^*) \quad t^* \neq t_0 \quad$ (т.к $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$)

НУО $t^* > t_0$



$u(t) = \varphi(t) - \psi(t)$

$O = \{t \in [t_0, t^*] : u(t) = 0\}$

$O \neq \varnothing \quad (t_0 \in O)$

O - замкн и огр

$\exists t_1 \in [t_0, t^*) : \quad t_1 = \max O \quad (t_1 \in O)$

$\Rightarrow \varphi(t_1) = \psi(t_1) \quad \varphi(t) \neq \psi(t) \quad \forall t \in (t_1, t^*]$

Ставим З.К $(t_1, \varphi(t_1) \quad \exists h > 0 :$

На $[t_1 - h, t_1 + h]$ опред. реш. $x = \widetilde{\varphi}(t) : \quad x_1 = \widetilde{\varphi}(t_1)$

$\exists \Delta > 0 : \quad \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

(t_1, x_1) - точка ед-ти $\Rightarrow \exists \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

$\Rightarrow$ на $[t_1 - \Delta, t_1 + \Delta] \quad \widetilde{\varphi} \equiv \varphi(t) \equiv \psi(t)$

противореч с опред t_1

Лемма **(Гронуолла)**

$$u(t) \geqslant 0, \text{ опред } t \in <a, b>, \quad u(t) \text{ - непр на } <a, b>$$

$$\exists t_0 \in (a, b), \quad c \geqslant 0, \quad L > 0 :$$

$$u(t) \leqslant c + L \left| \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \right| \quad \forall t \in <a, b> \quad (3)$$

$$\Rightarrow u(t) \leqslant c \cdot e^{L|t-t_0|}$$

Док-во

НУО $t \geqslant t_0$

$$(3') \quad u(t) \leqslant \underbrace{c + L \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau}_{v(t)} \overset{?}{\Rightarrow} (4') \quad u(t) \leqslant c \cdot e^{L(t-t_0)}$$

$$u(t) \leqslant v(t)$$

$$\frac{d}{dt}(v(t) \cdot e^{-Lt}) = \underbrace{\dot{v}(t)}_{L \cdot u(t)} e^{-Lt} + v(t)(-L)e^{-Lt} =$$

$$L \cdot e^{-Lt}(u(t) - v(t)) \leqslant 0$$

$$v(t)e^{-Lt} \text{ - убыв. } \Rightarrow$$

$$v(t)e^{-Lt} \leqslant v(t_0)e^{-Lt_0} \Rightarrow$$

$$U(t) \leqslant v(t) \leqslant \underbrace{v(t_0)}_{=c} \cdot e^{L(t-t_0)} = c \cdot e^{L(t-t_0)}$$

Следствие

Если $c = 0$, то $u(t) \equiv 0$ на $<a, b>$

../../../template/template

Напоминание

$$(1) \quad \dot{x} = X(t, x), \qquad X(t, x) \in C(G) \quad \underbrace{G}_{\text{Обл}} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(2) \quad (t_0, x_0) \in G$$

Теорема

$$\exists \underbrace{V}_{\text{окр}}(t_0, x_0) \subset G: \quad \frac{\partial X}{\partial x} \in C(V(t_0, x_0))$$

$\Rightarrow (t_0, x_0)$ - точка ед-ти

Следствие

$$X \in C(G), \quad \frac{\partial X}{\partial x} \in C(G) \Rightarrow G \text{ - обл ед-ти}$$

Док-во

1. $\exists a > 0, b > 0:$

$$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\} \subset V(t_0, x_0) \subset G$$

$$\Rightarrow \exists M : |X(t, x)| \leqslant M \quad \forall (t, x) \in D$$

$$\exists L : \left|\frac{\partial X}{\partial x}(t, x)\right| \leqslant L \quad \forall (t, x) \in D$$

$$h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$\Rightarrow \exists \text{Реш}(1), (2) \quad x = \varphi(t), \quad x \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

$\underline{\Delta = h}$

$\exists x = \psi(t)$ - реш(1)2(0

Докажем: оно определено на $[t_0 - h, t_0 + h]$ т.е

$$|\psi(t) - x_0| \leqslant b \quad \forall t : |t - t_0| \leqslant h$$

от прот. $\rceil \exists t^* : \begin{cases} |t^* - t_0| \leqslant h \\ |\psi(t^*) - x_0| > b \end{cases}$

$t^* \neq t_0 \quad (\psi(t_0) = x_0) \quad$ НУО $t^* > t_0$

$v(t) = |\psi(t) - x_0| - b$ - непр

$$\left.\begin{aligned} &v(t_0) = -b < 0 \\ &v(t^*) > 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \exists t_1 : t_0 < t_1 < t^* : \quad v(t_1) = 0$$

$O = \{t \in [t_0, t^*] : v(t) = 0\} \quad O \neq \varnothing \quad O$ - замк. огр

$\Rightarrow \exists \min O = t_2 \quad$ (мб $t_1 = t_2$)

$$\forall t \in [t_0, t_2) \quad v(t) < 0 \quad v(t_2) = 0 \quad t_0 < t_2 < t^*$$

$\Rightarrow$ на $[t_0, t_2]$ $\quad |\psi(t) - x_0| \leqslant b$

$\dot{\psi}(t) = X(t, \psi(t)), \quad \psi(t_0) = x_0$

инт на $[t_0, t_2]$

$$|\psi(t_2) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t_2} X(t, \psi(t)) dt \right| \leqslant \int_{t_0}^{t_2} \left| \underbrace{X(t, \psi(t))}_{\leqslant M} \right| dt$$

$\leqslant M \cdot (t_2 - t_0) < M(t^* - t_0) \leqslant Mh \leqslant b$

Получим $|\psi(t_2) - x_0| < b$ - противореч: $t_2 \in O$

2. $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ рисунок 1

$$f(s) = X(t, s\varphi(t) + (1 - S)\varphi(t)), \quad s \in [0, 1]$$

$$|s\varphi(t) + (1-s)\psi(t) - x_0| \leqslant |s\varphi(t) - sx_0| + |(1-s)\psi(t) - (1-s)x_0| =$$

$$= s \left| \underbrace{\varphi(t) - x_0}_{\leqslant b} \right| + (1-s) \left| \underbrace{\psi(t) - x_0}_{\leqslant b} \right| \leqslant b(s + (1-s)) = b \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(s)$ опред. при $|t - t_0| \leqslant h$

$|X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))| = |f(1) - f(0)| = \qquad \exists \theta \in (0, 1)$

$$= |f'(\theta)| = \left| \frac{\partial X}{\partial x} \bigg|_{x = s\varphi(t) + (1-s)\psi(t)} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \bigg|_{s=\theta} \right| =$$

$$= \left| \underbrace{\frac{\partial X}{\partial x} \bigg|_{\dots}}_{\leqslant L} \right| \cdot |\varphi(t) - \psi(t)|$$

Итог: $|X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))| \leqslant L\, |\varphi(t) - \psi(t)| \quad (5)$

3. $\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$$\dot{\psi}(t, \psi(t))$$

$$\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi(t)} = X(t, \varphi(t)) - X(t, \psi(t))$$

Инт. $[t_0, t]$

$$\varphi(t) - x_0 - (\psi(t) - x_0) = \int_{t_0}^{t} (X(\tau, \varphi(\tau)) - X(\tau, \psi(\tau))) d\tau$$

$$\Rightarrow |\varphi(t)-\psi(t)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |X(t,\varphi(\tau)-X(\tau,\psi(\tau))|\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \cdot \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(t\tau)-\psi(\tau)|\,d\tau\right| \overset{\text{Л.Г.}}{\Rightarrow} \varphi(t)=\psi(t) \quad \forall t : |t-t_0| \leqslant h$$

$$(u(t)=|\varphi(t)-\psi(t)| : u(t) \leqslant L \quad \left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau\right|)$$

3 Уравнения в симметричной форме

Опр

(1) $\quad M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ - ур. 1 порядка в симм. форме

$M,N \in C(G) \qquad \underbrace{G}_{\text{обл}} \subset \mathbb{R}^2$

Опр

ф-я $y=\varphi(x) \quad x \in <a,b>$

(или ф-я $x=\psi(y) \quad y \in <c,d>$)

наз. реш. (1), если подст в (1) получ. тождество

Если $y=\varphi(x)$ - реш (1) $\quad x \in <a,b>$

$M(x,\varphi(x))dx+N(x,\varphi(x))\varphi'(x)dx=0$

$y=\varphi(x) \quad x \in <a,b>$ - реш.(1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (2) $\quad M(x,\varphi(x))+N(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на $<a,b>$

$\Rightarrow y=\varphi(x)$ удовл. ур-нию $\qquad$ если $N(x,\varphi(x)) \neq 0$ на $<a,b>$

(3) $\qquad y'=-\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$

аналог: $x=\psi(y) \quad y \in <c,d>$ - реш (1) $\Leftrightarrow$

$M(\psi(y),y)\psi'(y)+N(\psi(y),y) \equiv 0$ на $<c,d> \quad (2')$

и $x=\psi(y)$ уд. ур-нию $\qquad$ (если $M(\psi(y),y) \neq 0$ на $<c,d>$)

$(3') \qquad x'=-\dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$

$(x_0,y_0) \in G$

если $N(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists <a,b>$: $x_0 \in (a,b) \quad \exists$реш $y=\varphi(x) \quad$ (3) (и реш (1))

если $M(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists <c,d>$: $y_0 \in (c,d) \quad \exists$реш $x=\psi(y) \quad (3')$ (и реш (1))

если $M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ - особая точка

Замечание

Если $\varphi(x)$ - реш, $\varphi(x)^-1 =$

Опр

$u(x,y) \in C^1 \quad (u : G \in \mathbb{R})$ интеграл (1), если

1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \quad \forall$ обык. точки из $G \quad (x,y)$

2) $(4) \to N(x,y)\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} - M(x,y)\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \equiv 0$ в G

$(N\dfrac{\partial u}{\partial x} - M\dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv 0)$

Теорема (1)

$y = \varphi(x)$ - реш.(1) $\quad x \in < a, b >$

$(x, \varphi(x))$ - обыкн. точка для $\forall x \in < a, b >$

$u(x,y)$ - интеграл (1) в G

$\Rightarrow u(x, \varphi(x)) = const \quad x \in < a, b >$

Док-во

$y = \varphi(x)$ - реш (1) $\quad x \in < a, b > \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(x) = -\dfrac{M(x,\varphi(x))}{M(x,\varphi(x))} \qquad N(x,\varphi(x)) \neq 0$

(если N(...) $=$ 0, то $\overset{(2)}{\Rightarrow} M(...) = 0$ - против. усл)

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x)) = \frac{\partial u(...)}{\partial x} + \frac{\partial u(...)}{\partial y} \cdot \varphi'(x) =$$

$$= \frac{\partial u(...)}{\partial x} + \frac{\partial u(...)}{\partial y}(-\frac{M(...)}{N(...)}) = \frac{1}{N(...)}(N(...)\frac{\partial u(...)}{\partial x} - M(...)\frac{\partial u(...)}{\partial y})$$

Теорема (1')

$x = \psi(y)$ - реш (1) $\quad y \in < c, d > ...$

../../../template/template
[2019-10-03]

Напоминание

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1) \qquad M, N \in C(G)$$

$y = \varphi(x)$ - реш (1), $x \in (a,b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M(x,\varphi(x)) + N(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a,b)

Опр

$$u(x,y) \in C^1(G)$$

Интл (1), если

1. хоть одна из $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ не 0 в $\forall$ обыкн. точке G
2. $N \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ в G $\qquad$ (4)

$$(5) \qquad u(x,y) = u(x_0,y_0) \qquad (x_0,y_0) \in G$$

u - инт-л (1) в G

Теорема (2)

$$N(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$$

рав-во (5) разрешимо отн y: его решение

$y = \varphi(x)$ опред на (a,b) $\quad x_0 \in (a,b) \quad \varphi(x_0) = y_0$

$y = \varphi(x)$ непр дифф на (a,b) и явля реш ур (1)

Док-во

$N(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow N(x,y) \neq 0$ в нек. окр-ти $V(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0 (\text{ из (4): если } \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = 0, \text{ то } \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = 0)$$

Противореч. с тем, что (x_0, y_0) - обыкн

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \neq 0 \text{ в нек. окр } \widetilde{V}(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \text{ теорема о неявн. функции } \quad \exists y = \varphi(x) \text{ - реш } (5) : y_0 = \varphi(x_0)$$

$$\varphi(x) \text{ - непр дифф} \qquad x \in (a,b) \quad (x_0 \in (a,b))$$

$$u(x, \varphi(x)) = u(x_0, y_0) \text{ на } (a,b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}}{\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}}$$

$$\text{в } (2)\ M(...) + N(...)\left(-\frac{\frac{\partial u(...)}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}(...)}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}(...)}[N(...)\frac{\partial u}{\partial x}(...) - M(...)\frac{\partial u(...)}{\partial y}] \equiv 0 \text{ в } G$$

Теорема (2)

Следствие

(x_0, y_0) - обыкн точка G, то рав-во (5)

разреши. отн y или отн x и его реш - реш (1)

$(M \neq 0$ или $N \neq 0)$

Опр

равн-во $u(x,y) = c$ - общ. инт-л (1)

Пример

$$xdx + ydy = 0$$

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)} = c$$

4 Уравнения в полных дифф.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

Опр

(1) - ур в полных дифф, если

$$\exists u(x,y): \quad du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (2)$$

$$((1): du = 0)$$

Теорема (1)

(1) - ур в полных дифф $\Rightarrow u(x,y)$ - инт-л (1)

Док-во

1. $u(x,y)$ - непр дифф.
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = N \qquad (3)$
3. $N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} = N \cdot M - M \cdot N \equiv 0$

Теорема

если $\exists \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x} \in C(G) \quad (1)$ - ур. в полных дифф

то $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ в $G \qquad (4)$

Док-во

(1) - ур в п. дифф $\Rightarrow \exists u(x,y) \quad (2),(3)$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$G = \{(x,y): \ a < x < b, c < y < d\}$$

(м.б $a = -\infty, \ c = -\infty \qquad b = +\infty, \ d = +\infty$)

Теорема (3)

$$\exists \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(G)$$

И вып (4) $\Rightarrow$ (1) - ур. в п. д.

Док-во

$$(x_0, y_0), (x, y) \in G$$

$$\forall t \in [x_0, x] \quad (t, y) \in G$$

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial x} = M(t,y) \text{ - инт от } x_0 \text{ до } x$$

$$u(x,y) - u(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt \qquad (5)$$

$$\forall t \in [y_0, y] \quad (x_0, y) \in G$$

$$\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial y} = N(x_0,t) \text{ - инт от } y_0 \text{ до } y$$

$$u(x_0,y) - \underbrace{u(x_0,y_0)}_{\text{НУО }=0} = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt \qquad (6)$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt \qquad (7)$$

Проверяем, что это та функция, которая нужна

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + N(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt + N(x_0,y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt + N(x_0,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + N(x_0,y)$$

Замечание (1)

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt \qquad (7')$$

Утв

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad \text{Вып (4)} \quad G \text{ - односвяз.}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_\Gamma M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (8) \text{ - криволин. инт}$$

Γ - любая кривая, соед $(x_0, y_0), (x, y)$

Условие (4) гарантирует нам, что криволин. интеграл не зависит от кривой интегрирования

Замечание (2)

Прямоугольность области G не требуется по-существу, нужна только односвязность (отсутсвие дырок или возможность стянуть любой путь в точку)

Опр

$$(1) \qquad \mu = \mu(x,y) \in C(G) \qquad \mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in G$$

μ - интегр мн-ль для (1), если

$$(9) \quad (\mu M)dx + (\mu N)dy = 0 \text{ - ур. в п. д}$$

$$\exists M, N, \mu \in C^1(G) \quad (G \text{ - односвяз})$$

$$(9) \text{ - ур в п.д.} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (1)$$

Частный случай 1

$$\underline{\mu = \mu(x)}$$

$$\text{из (10):} \frac{d\mu}{dx} N = \mu(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (11)$$

$$N = f(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(x)dx$$

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

Частный случай 2

$$\underline{\mu = \mu(y)}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \qquad (12)$$

$$M = g(y)$$

../../../template/template
2019-10-10

Напоминание

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

$$\mu = \mu(x) \qquad \frac{1}{\mu}\mu' = \frac{1}{N}(M'_y - N'_x) \qquad (11)$$

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt + \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt \qquad (7')$$

Пример (важнейший)

$$(13) \qquad y' = p(x)y + g(x) \qquad p(x), g(x) \in C(a,b)$$

$$(13') \qquad (p(x)y + g(x))dx - dy = 0 \qquad (x \not\equiv const)$$

$$\frac{1}{N}(M'_y - N'_x) = -1 \cdot (p(x) - 0) = -p(x)$$

$$\exists \mu = \mu(x) : \frac{d\mu}{\mu} = -p(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$$

$$e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}(p(x)y + g(x))dx - e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}dy = 0 \qquad (14)$$

Применяем к этому формулу $7'$
полагаем для простоты $y_0 = 0$

$$u(x,y) = -\int_0^y e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}dt + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \cdot g(t)dt$$

$$\underline{u(x,y) = -c}$$

$$-ye^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}g(t)dt = -c$$

$$y = c \cdot e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} p(s)ds}g(t)dt \qquad (15)$$

З. Коши $(x_0, y_0) \qquad (x_0 \in (a,b))$

$\Rightarrow$ (15), где $c = y_0$

$$(15') \qquad y = ce^{\int p(x)} + e^{\int p(x)dx} \int e^{-\int p(x)dx}g(x)dx$$

5 Системы дифф. уравнений

Опр

Система дифф уравнений, разрешенная относительно старших производных

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1^{(m_1)} = X_1(t, x_1, \dot{x_1}, ..., x_1^{(m_1-1)}, ..., x_k, \dot{x_k}, ..., x_k^{(m_k-1)}) \\ x_2^{(m_2)} = X_2(...) \\ ... \\ x_k^{(m_k)} = X_k(...) \end{cases}$$

$$n = \sum_{j=1}^{k} m_j$$

Опр

Реш (1): $x_1 = \varphi_1(t), ..., x_k = \varphi_k(t) \qquad t \in (a, b)$

$\underset{j=1,...,k}{X_j \in C(D)} \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Подставили и получили тождество

Опр (Частный случай)

1. $k = 1$

$$x^{(n)} = X(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, ..., x^{(n-1)}) \qquad (2)$$

2. $\underset{j=1,...,k}{m_j = 1}$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = X_1(t, x_1, ..., x_n) \\ ... \\ \dot{x_n} = X_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Система в нормальной форме или нормальная система

В (2) замена

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \\ ... \\ x^{(n-1)} = x_n \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 \\ ... \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = X(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (5)$$

$$\text{в (3)} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$(3') \qquad \dot{x} = X(t, x)$$

$(3')$ - система, записанная в векторной форме

Замечание

Будем рассматривать только системы в нормальной форме

З. Коши

для (1) : при $t = t_0$:

$$\begin{cases} x_1 - x_{1_0}, \dot{x_1} = \dot{x}_{1_0}, ..., x_1^{(m_1-1)} = x_{1_0}^{(m_1-1)} \\ x_2 = x_{2_0}, ..., x_2^{(m_2-1)} = x_{2_0}^{(m_2-1)} \\ x_k = x_{k_0}, ..., x_k^{(m_k-1)} = x_{k_0}^{(m_k-1)} \end{cases}$$

для (2) : при $t = t_0 \quad x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0, ..., x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)}$

для (3) : $t = t_0 : x_1 = x_{1_0}, x_2 = x_{2_0}, ..., x_n = x_{n_0}$

Замечание

сист (5) и ур (2)

$$\text{реш} \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(t), \quad t \in (a, b) \end{cases} \qquad \text{реш } x = \varphi(t) \quad t \in (a, b)$$

Решения разные, но мы называем (5) и (2) эквивалентными

$$\varphi_1(t) = \varphi(t)$$

$$\varphi_2(t) = \dot{\varphi}(5)$$

...

$$\varphi_n(t) = \varphi^{(n-1)}(t)$$

Опр

Договоримся с обозначениями

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ - вектор}$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \text{ - норма}$$

$$a^{(k)} = a^{\{k\}} \text{ - послед. векторов}$$

$$a^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} a \Leftrightarrow a_j^{(k)} \underset{\substack{k\to+\infty \\ \forall j=1,...,n}}{\to} a \Leftrightarrow \left|a^{(k)} - a\right| \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

$$f(x_1, ..., x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_m) \\ ... \\ f_n(x_1, ..., x_m) \end{pmatrix} \text{ вектор-функция}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$u(t) \text{ - непр на } [a,b] \Rightarrow \int_a^b u(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b u_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b u_n(t)dt \end{pmatrix}$$

$$\left|\int_a^b u(t)dt\right| \leqslant \left|\int_a^b |u(t)|\, dt\right|, \text{ если } b \geqslant a \quad \text{здесь норма } |.|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{(k)} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$a^{(k)} = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ ... \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Признак Вейерштрасса работает.

$$\exists \text{ сх ряд } \sum_{k=1}^{\infty} b_k : \left|a^{(k)}(t)\right| \leqslant b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)}(t) \text{сх равн и абс} \quad \forall t \in \Omega$$

Опр

$$(1) \qquad \dot{x} = X(t,x) \qquad X \in C(D), D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ ... \\ X_2 \end{pmatrix}$$

З.Коши (2) $\quad (t_0, x_0)$ Смысл геометрический и механический полностью совпадают с одномерным случаем
геом - поле направлений
мех - мгновенная скорость в точке и во времени

реш (1) ф-я $x = \varphi(t) \quad t \in (a,b)$ подст тожд в (1)

Теорема (Пеано)

$$D = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$$

$$X(t,x) \in C(D)$$

$$\Rightarrow \exists M :\ |X(t,x)| \leqslant M \quad h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$\Rightarrow \exists \text{ реш } (1)\ x = \varphi(t) \qquad t \in [t_0 - h, t_0 + h]$$

$(x_0 = \varphi(t_0))$ доказывается аналогично одномерному сл.

6 Условие Липшеца