ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО

0.1 18.11.2019

0.1.1 Функции комплексных переменных

Опр

$$f : D \to \mathbb{C} \qquad D \subset \mathbb{C}$$

f (компл.) диф. в z_0, если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \qquad D \subset \mathbb{R}^2$

$|z| = \sqrt{x^2 + z^2}$

$f(z) = f(x, y)$

Замечание

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диф. (вещ.) в (x_0, y_0), если:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underset{\in M_2(\P)}{A} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) =$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}) =$$

$$= f(z_0) + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) (z - z_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \overline{(z - z_0)} \right) + o(|z - z_0|)$$

$$\overline{z - z_0} = x - x_0 - i(y - y_0)$$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} + \overline{o}(1)$$

Если f - вещ. диф., то:

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \exists$ (т.е. f - компл. диф.)

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} + i \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ - уравнение Коши-Римана

$\Leftrightarrow f = u + iv \qquad u'_x = v'_y \qquad v'_x = -u'_y$

Пример

$$f(x,y) = (y,x)$$

$$f(z) = \overline{z}i = i(x - iy) = y + ix$$

Замечание

f - компл. диф в $z_0 \Leftrightarrow$

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + \overline{o}(|z - z_0|)$$

$$c = f'(z_0)$$

Обозн

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f'_{\overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

f - вещ. диф $\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0)\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + o(z - x_0)$

Если f вещ диф $\Rightarrow$ f компл. диф. $\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$

Опр

f - голоморфна (аналитична) в D, если f компл. диф. в D (регулярная)

Задача

Выяснить, в каких точках компл. дифференцируема $f(z) = x^2y^2$ $(z = x + iy)$

Решение

f - вещ. дифф. $\Rightarrow xy^2 + ix^2y^2 = 0$, тогда комп. диф.
f - диф при x или y равными 0

Задача

$$f(z) = \underbrace{2xy}_{u} - i(\underbrace{x^2 - y^2}_{-v})$$

Решение

Снова вещ. диф-мы, потому что мнимые и вещ. части - многочлены

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_x = 2y = v'_y \\ u'_y = 2x = -v'_x \end{cases} \quad \Rightarrow \text{f диф на } \mathbb{C}$$

<u>Упр</u>

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad |z| < R \qquad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$$

$$\Rightarrow f \text{ гол. в } |z| < R \text{ и } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$$