1 Замечания из конспектов, которые не вошли в билеты

1.1 Множества меры ноль

<u>Опр</u>

$E \subset \mathbb{R}$, говорят, что E - мн-во меры ноль, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ \ \underset{\substack{\text{не более чем сч.} \\ \text{набор откр. инт.}}}{\exists I_j = (\alpha_j, \beta_j)} : E \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \ \ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \mathcal{E} \ (|I_j| = \beta_j - \alpha_j)$$

<u>Примеры</u>

1) $\forall$ Конечное множество - мн-во меры ноль

$$E = \{x_1, ..., x_n\}$$

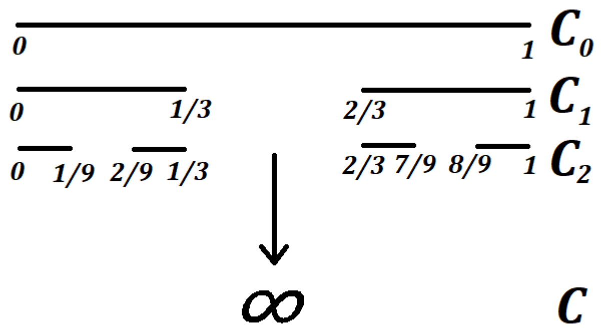
, $I_j := (x_j - \dfrac{\mathcal{E}}{4n}, x_j + \dfrac{\mathcal{E}}{4n})$, $\sum\limits_{j=1}^{n} |I_j| = \dfrac{\mathcal{E}}{2}$2) $A = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ - счётное $\Rightarrow$ имеет меру 0.

Как покрыть $\mathbb{N}$? $|I_j| = \dfrac{\mathcal{E}}{2^{j+1}}$ - геом. прогрессия

3) Несчетное множество меры ноль:

Канторовское мн-во (Канторовский компакт), построение:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$



Определим $C_{\frac{1}{3^p}}$ как множество отрезков, получинных для $\mathcal{E} = \dfrac{1}{3^p}$ для крайних точек каждого отрезка из C_p (они их покроют "вплотную"и по краям будет немного лишнего). На каждом шаге p у нас 2^p отрезков

$$\Rightarrow |C_{\frac{1}{3^p}}| = 5\frac{2^{p-1}}{3^p} \underset{p \to \infty}{\to} 0$$

1.2 Критерий Лебега интегрируемости функции

Теорема

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, тогда:

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow f$ имеет ограниченное мн-во точек разрыва и меру 0

Примеры

1) Функция Дирихле $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\mathcal{D} \notin R[0, 1]$. Проверим по критерию Лебега. Множество точек разрыва - $\mathbb{R}$, но оно не множество меры 0 (слишком много точек).

2) Функция Римана $\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ - несократимая дробь} \end{cases}$

Оказывается, она интегрируема по Риману на любом отрезке. Рассмотрим [0,1]:

а) $\forall a \in \mathbb{Q}$ - точка разрыва Φ:

$\Phi(a) > 0$ по определению. С другой стороны как угодно близко найдётся иррациональная точка, в которой функция принимает значение 0.

б) $\forall a \notin \mathbb{Q}$ - непрерывна:

Для произвольного $\mathcal{E} > 0$ рассмотрим множество $M = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \mathcal{E}\}$.

Никакая иррациональная точка не лежит в M, поскольку в иррациональных точках функция f обращается в ноль.

Если $x \in M$, тогда x есть рациональное число вида $x = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, дробь $\frac{m}{n}$ несократима, и тогда $f(x) = \frac{1}{n} \geq \mathcal{E}$ и, следовательно, $n \leq \frac{1}{\mathcal{E}}$. Из ограничения на n следует, что пересечение множества M и любого ограниченного интервала состоит из конечного числа точек.

Пусть α - произвольное иррациональное число. По определению $f(\alpha) = 0$. Мы можем выбрать окрестность точки α так, чтобы в ней не содержалась ни одна точка множества M. Если же $x \notin M$, то $f(x) < \mathcal{E}$. Таким образом, мы нашли интервал, который требуется в определении непрерывности.