2019-09-30

1 Дифференциальная геометрия поверхностей

1.1 Понятие поверхности

Пример (способы задания поверхностей)
1. $z = f(x, y)$ - явное задание
2. $F(x, y, z) = 0$ - неявное задание

Теорема (о неявной функции)

$$F(x,y,z) = 0, \quad F \text{ - непр. дифф.}, \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists f(x, y) : F(x, y, f(x, y)) = 0 \text{ в некоторой окр.}$$

Опр

$$D \subset \mathbb{R}^2, \quad \forall (u, v) \in D, \quad \overline{r} -$$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$\overline{r} = \overline{r}(u, v) \quad \overline{r} : D \to \mathbb{R}^3$$

Пример

$$z = f(x, y)$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Координат. линии поверхности:

$$u = u_0 \quad \overline{r}(u, v) \text{ - кривая}$$

$$\overline{r}(u, v) \text{ - другое семейство}$$

Замечание

Линии перпендикулярны

Опр

Перепараметризация биекция

Опр

Параметризация называется регулярной, если

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \text{ и } \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \text{ не перпендикулярны ни в одной точке}$$

$$(\Leftrightarrow \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \neq 0)$$

Опр

Кривая лежит на поверхности, если все её точки лежат на поверхности

$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \overline{r} = (x(u(t), v(t)),\ y(...)...)$$

Опр

Вектор называется касательным, если он является касательным к кривой на поверхности

Теорема

Если поверхность регулярная $\Rightarrow$ касательные векторы образуют плоскость

Опр

Касательная плоскость - плоскость из касательных векторов

Док-во

Базис: $\frac{\partial r}{\partial u} A$ и $\frac{\partial r}{\partial v} A$

$\begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases}$

$\begin{cases} u^2 = u_0 \\ v = t \end{cases} \quad \overline{r}(t) = (x(t_0, v_0),\ y(t_0, v_0),\ z(t_0, v_0))$

$$\overline{r'}(t) = (x'(t_0, v_0),\ y'(t_0, v_0),\ z'(t_0, v_0)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} ...\right)$$

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

$$\frac{dr}{dt}\Big|_A = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\right)\frac{du}{dt} + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\Big| + a$$

Наоборот $\alpha \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}\Big|_A + \beta \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}\Big|_A$ - вектор

$\begin{cases} u(t) = \alpha t \\ v(t) = \beta t \end{cases}$

Как задать касательную плоскость в координатах?

Пусть $\overline{n}$ - нормаль к плоскости

$$\overline{n} = (A,\ B,\ C)$$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\overline{n} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$$

$$\overline{r} = (x,\ y,\ z)$$

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\overline{n} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ - уравнение касательной плоскости}$$

Утв

В неявном виде

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right) \text{ - перп. плоскости}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla F \circ \underset{\text{касат. вектор}}{(x', y', z')} = 0$$

$$\nabla F \perp \text{касат. вектору (любому)} \Rightarrow \nabla F \text{ - норм пов-ть}$$

<u>Утв</u>

Уравнение касательной плокости:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0)$$

1.3 Первая квадратичная плоскость

Длина кривой на поверхности

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

$\overline{r}$ - пов-ть

$$r = (x, y, z) = (x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t)),\ z(u(t), v(t)))$$

$$\text{Длина кривой} = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d}{dt}\overline{r}(u(t), v(t)) \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v',\ \frac{\partial y}{\partial u}u' + \frac{\partial y}{\partial v}v',\ \frac{\partial z}{\partial u}u\right.\right.$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}$$

<u>Опр</u>

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt \text{ - первая квадратичная форма}$$