Практика по матану, 3 сем
(преподаватель Демченко О. В.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Теория групп

1.1 Жордановы формы, 03.09.2019

Утв

Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $U \in GL_n(\mathbb{C}) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) : |U| \neq 0\}$
Сопряжение матрицы A с помощью U: $A \longmapsto U^-1AU$

Теорема (Жордана, матрич. форма)

$\forall A \exists U : U^{-1}AU = J$
Пусть $U^{-1}AU = J$, $V^{-1}AV = I$ - совпадают с точностью до перестановки жардановых блоков

Пример

$A_1 \in M_n(K)$, $A_2 \in M_m(K)$
$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$
С помощью какой матрицы можно поулчить сопряжением другую

Теорема (Жордана, операт. форма)

Пусть $L \in \mathscr{L}(V)$ (оператор на V), V - конечномерное пр-во над $\mathbb{C}$. Тогда $\exists\{e_1, ..., e_n\}$ (жарданов базис) - базис V. $[L]_e = J$
Единственность: если есть два базиса, то матрицы можно получить перестановкой

——— тут не хватает чего-то

1.2 Собственные вектора, 10.09.2019

———- что-то пропущено

1.3 Жордановы матрицы, 17.09.2019

Пример

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$X^2 = A = C^{-1}JC$$

Пример $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $Y^2 = J$, $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & ? \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$, ? - из уравнения

Как найти J и C?
1) Находим все ссобственные числа матрицы A
Если все с.ч. равны, то J без единичек

Если одно собственное число а) диагонализируема $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

б) блоки 2 и 1 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Пример

Найдём, сколько собственных вектор-столбцов

Первая матрица: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = \lambda x_1 \\ \lambda x_2 = \lambda x_2 \\ \lambda x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$
$x_1, x_2, x_3 \in R$ - три л.н. переменные

Для второго решение: $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ - 2 собственных вектор-столбца

Пример

Пусть у нас матрица 4*4, 2 собственных л.н. столбца (два блока)

Утв

G,H - изоморфны, G - комм. $\Rightarrow$ H - комм.

Док-во

$\exists \varphi : G \to H : \varphi$ - биекция и $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$, кроме того, $g_1 g_2 = g_2 g_1$ $\forall g_1, g_2 \in G$, применим φ к последнему выражению

$h_1 h_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2)\varphi(g_1) = h_2 h_1$

$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
Дз: G,H - изоморфны, G - цикл. $\Rightarrow$ H - цикл.

Решение

Грппа G - цикл $\Leftrightarrow \exists g \in G : \forall g' \in G \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

G - цикл., $G \cong H \Rightarrow \exists \varphi : G \to H$

$$\forall h' \in H \quad \exists g' \in G : h' = \varphi(g') = \varphi(g^k) = \varphi(\underbrace{g...g}_{k}) = \underbrace{\varphi(g)...\varphi(g)}_{k} = \underbrace{h...h}_{k} = h^k$$

Чтобы доказать, что две группы не изоморфны, можно доказать что у одной из них свойство выполняется, а у другой нет

Пример

1. $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$, D_3 - коммуннитативность
2. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - цикличность
3. $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - дз
4. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - порядки элементов
5. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - цикличность?

1.4 В ожидании кр..., 24.09.2019

Пример

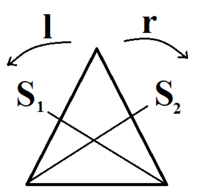
$$A \in M_n(\mathbb{C}), \quad A = C^{-1}JC, \quad C \in_n (\mathbb{C})$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

1) находим все с.ч.
2) для каждого с.ч. находим л.н. уравнение
3) решаем систему линейных уравнений
...ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, СМ. ТЕТРАДЬ

Пример

$$D_3 = \{e, l, r, s_1, s_2, s_3\}$$



$$H_1 = \{e, r, l\}$$

$$H_2 = \{e, s_1\}$$

1) Разбить по подгруппам, по левым и правым классам. Какая нормальная, какая нет?
2) Найти g,G. Чтобы произведение не лежало в H_2

Дз: $D_4 = \{...\}$, $H_1 = \{e, s_2\}$, $H_2 = \{e, r^2\}$
Дз: $K(D_3)$ - найти коммутант для D_3

1.5 Комутаторы и комутанты, 01.10.2019

Пример

Дз (прошлое): $G = D_4$

$$H = \{e, r^2\}$$

$$H \lhd G$$

$$G/_H$$

Дз (новое):

1. Чему изоморфно $G/_H$? $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$
2. $|G| = 4 \ \Rightarrow \left[\begin{array}{lcc} G & \cong & \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \\ G & \cong & \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \end{array}\right.$

Пример (я не знаю, что это было)

Пример

1. $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^* \quad (z \mapsto |z|)$
2. $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad (z \mapsto z^4)$

Что получается при применении основной теоремы о гомоморфизме? (найти ядро образ, факторизовать, д-ть, что изморфна образу)

Решение

1. $\mathbb{C}^*/_{\{Z \in \mathbb{C}:\ |z|=1\}} \cong \mathbb{R}^*_{>0}$
2. ДЗ

Пример

ДЗ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/_{\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):\ \det A = \pm 1\}} \cong ?$

Как это сделать? Нужно найти $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to H$ - гомоморфизм: $\operatorname{Ker} \varphi = \{A \in_n (\mathbb{R}) :\ \det A = \pm 1\}$

Решение

$$\varphi(A) = |\det A|$$

$$\varphi(A) = (\det A)^2$$

ДЗ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/_{\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):\ \det A = \pm 1,\ \pm i\}} \cong ?$

1.5.1 Действие группы на множество

Пример

$$D_4$$

Написать разбиение этого множества из 16 эл-ов на орбиты. Сколько орбит?

Решение А

1.6 Комутаторы и комутанты, 15.10.2019

Пример

Грани кубика красят в три цвета, сколькими способами это можно сделать?

Док-во Группа - группа всех самосовмещений куба, сохраняющих ориентацию, она действует на множестве всех раскрасок фиксированного куба. Орбита - множество всех раскрасок фиксированного куба, которые можно получить его поворотом. Элементы G:

1. e - 1 шт.
2. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных граней на 90 градусов - 6 шт.
3. ... на 180 - 3 шт.
4. Поворот отн. диагонали на 120 градусов - 8 шт.
5. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных рёбер на 180 градусов - 6 шт.

$\Rightarrow |G| = 24$

Число орбит $= \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$

$M^g = \{m \in M : gm = m\}$

$$= \frac{1}{24}\left(\underset{1.}{3^6} + \overset{4 \text{ одн. цв.}}{\underset{2.}{6 \cdot 3^3}} + \overset{2 \text{ пр. одн. цв.}}{\underset{3.}{3 \cdot 3^4}} + \overset{3 \text{ одн. цв.}}{\underset{4.}{8 \cdot 3^2}} + \overset{2 \text{ одн. цв.}}{\underset{5.}{6 \cdot 3^3}}\right) = 57$$

ДЗ 1: Аналогично, но красим в два цвета рёбра

ДЗ 2 (а): Есть ожерелье из 8 бусинок. Сколькими способами можно составить ожерелье из рубинов и алмазов

ДЗ 2 (б): если ограничение: должно быть 3 белых шарик и 5 черных

1.6.1 Евклидовы пространства

Пример

$\mathbb{R}[x]_3$. Является ли это евклидовым пространством?

1. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
2. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + 2f(2)g(2)$
3. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) + 3f(3)f(3)$
4. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) - f(3)f(3)$

Док-во

1. Не является, потому что для $f = x^2 - x$

   $(f, f) = 0$ - не работает

2. не является
3. является
4.

Пример

Составить матрицу Грамма для в

Базис: $e_1 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad e_4 = x^3$

$(x^2 - 1,\ x - 1)$

Док-во

а

1.7 ..., 22.10.2019

ДЗ: ожирелье из 8 бусин: 4б, 4ч

Пример

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f,g) = \int_0^1 fg dx$$

Провести ортоганализацию Грамма-Шмидта в базисе $1, x, x^2, x^3$

Решение

$$e_1 = 1 \text{ - готово}$$

$$e_2 = x + \lambda \cdot 1 \quad (e_2,\ 1) = 0$$

Значит $\int\limits_0^1 (x+\lambda) \cdot 1 = \frac{x^2}{2} + \lambda x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

Должно быть $(e_2,\ e_2) = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 (x^2 - 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = 12x - 6$$

$$e_3 = x^2 + \lambda e_1 + \mu e_2 \quad (e_3,\ e_2) = 0 \quad (e_3,\ e_1) = 0$$

Значит $\int\limits_0^1$

ДЗ: Найти $e_3,\ e_4$

Пример

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f,g) = \int_0^1 fg dx$$

В $V =< 1,\ x >$ найти $\operatorname{pr}_V x^3$

Решение

По прошлой задаче $e_1 = 1,\ e_2 = 12x - 6$

Значит $\operatorname{pr}_V x^3 = (x^3,\ 1) \cdot 1 + (x^3,\ 12x - 6) \cdot (12x - 6) =$

$= \int\limits_0^1 x^3 + (\int\limits_0^1 12x^4 - 6x^3)(12x - 6) = \frac{1}{4} + (\frac{12}{5} + \frac{3}{2})(12x - 6) =$

ДЗ: Проверить, что $u - pr_V u \perp v$

Пример

$$U = \mathbb{R}[x]_2, \quad (f, g) = \int_0^1 fgdx$$

В $V =< 1,\ x >$, $Lf = f'$ найти L^*

Решение

ДЗ: досчитать

Пример

Был пример $V = M_n(\mathbb{R})$, там $(A, B) = \operatorname{Tr} AB^T$ Найти в $V = M_n(\mathbb{C})$

Решение

$$\text{Проверим } (A, B) = \operatorname{Tr} A\overline{B}^T$$

$$\operatorname{Tr} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{c_1} & \overline{d_1} \end{pmatrix}$$

$$Tr\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \lambda Tr \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix}$$

ДЗ: на дом

1.8 ..., 29.10.2019

ДЗ: Есть 2 оси и два угла. Нужно сделать повороты и найти итоговый поворот и понять, вокруг какой оси. Подсказка: в д-ве мы предъявляем ось, значит мы должны найти собственный вектор с с.ч. 1, т.е. нужно найти матрицу с базисом, например, в качестве осей. А можно выбрать базис для первого, потом для второго. А можно для обоих сразу. Пишем матрицу повортов и должны матрицы привести к одному базису. Когда найдем собственный вектор, берем ортоганальное дополнение. Смотрим, на какой угол поворачивает матрица. И нужно не забыть если это не стандартный базис, вернуть в стандартный базис.

1.9 ..., 05.11.2019

ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО

<u>Задача</u>

$$V = M_2(\mathbb{R})$$

$$(A, B) = \operatorname{Tr} AB^T$$

$$LA = A^T$$

Выяснить, про оператор L:

1. Самосопряженный?

2. Ортогональный....?

<u>Решение</u>

1. L - самосопр. $\Leftrightarrow < LA, B >=< A, LB >$

$$< LA, B >= \operatorname{Tr}(A^T B^T)$$

$$< A, LB >= \operatorname{Tr}(AB)$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$(A^T B^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^T b_{kj}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{in} b_{nj}$$

$$\operatorname{Tr}(A^T B^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ik}$$

$\Rightarrow L$ - самосопр.

2. L - ортогон. т.и. т.т, когда $\|A\| = \|LA\|$

$$\|A\|^2 =< A, A >= \operatorname{Tr}(AA^T) = \operatorname{Tr}(A^T A) =< LA, LA >= \|LA\|^2$$

Выбрать произвольный ОНБ, считаем матрицу оператора (симм, ортог). Ищем базис из с.в.
ДЗ: ....
У самосопр. и ортог. оператора, есть базис, состоящий из собственных векторов. В нем матрица будет диагональная. На диагонали вещественные числа, по модулю равные ± 1

Задача

Напишите не диагональную матрицу 2*2, которая положительно определена

Решение

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2+x_1x_2+x_1x_2+2x_2^2 = x_1^2+x_2^2+(x_1+x_2)^2 \overset{\forall x \neq 0}{>} 0$$

Задача

Напишите не диагональную матрицу 2*2, которая положительно полуопределена, не положительно определена. Убедиться в этом по всем критериям

Решение

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

ДЗ: Найти ту матрицу P из док-ва