

Практика по дифференциальным уравнениям, 3 сем (преподаватель Звягинцева Т. Е.) Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [вконтакте](#)

Содержание

1	Введение	2
2	Геометрические уравнения	5
3	Однородные уравнения	7
4	Метод вариации произвольной переменной	9
4.1	Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	13

1 Введение

Разрешимо в квадратурах=разрешимо в интегралах

$y(x)$ - неизв. функция

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

(1) $y' = f(x, y)$ - дифференциальное уравнение 1-го порядка

Пример

$$y' = y, \text{ решение } y = ce^x$$

Опр

Задача Коши: найти решение $y = \phi(x) : \phi(x_0) = y_0$ ((2) (x_0, y_0))

Считаем, что $f(x, y) \in C(G)$

И пока что предполагаем, что $df(x, y) \in C(G)$ (решение существует),
 $dy \in C(G)$ (решение единственное)

$(x_0, y_0) \in G$ $y = \phi(x)$ - решение (1) $\Rightarrow \phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$ ($y_0 = \phi(x_0)$)

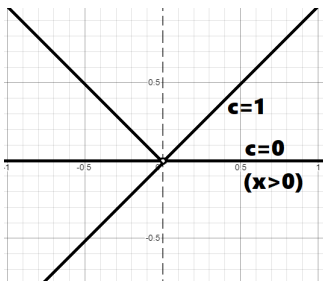
В каждой точке области G определено направление касательной к кривой, проходящей через эту точку

Опр

Кривые, в которых направление поля постоянно называются изоклины

Пример (стоим изоклины)

$$y' = \frac{y}{x}$$



$x \neq 0, \quad \frac{y}{x} = c (= \operatorname{tg} \alpha)$ - уравнение изоклин

$$(y' = f(x, y) \Rightarrow y' = c \Rightarrow f(x, y) = c)$$

$$\Rightarrow y = cx$$

При $c = 0$ ($\operatorname{ctg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$) $\Rightarrow y = 0$

При $c = 1$ ($\operatorname{ctg} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$) $\Rightarrow y = x$

3. Коши для $(-1, 1)$: $y = -x$, $x < 0$

Пример (больше изоклин)

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{y}{x} = c - \text{уравнение изоклин}$$

$$\Rightarrow c = 0 \quad (\operatorname{tg} \alpha = 0) \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow c = 1 \quad (\alpha = \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3} \quad (\alpha = \frac{\pi}{3}) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x$$

Пример (16, дополнительно)

Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнений:

$$a) \quad y' = y - x^2$$

$$b) \quad y' = f(x, y)$$

Решение

Условие перегиба графика $y = f(x)$ - это $y'' = 0$

$$a) \quad y' = y - x^2$$

$$y'' = y' - 2x = (y - x^2) - 2x = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x$$

b) Возьмем полный дифференциал от обеих частей равенства:

$$dy' = df(x, y) \Rightarrow dy' = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y'' = f'_x + f'_y y' = 0 \Rightarrow f'_x + f'_y y' = 0$$

Пример (замена переменной спасёт)

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

$$\text{Пусть } z = 4x + 2y - 1 \Rightarrow z' = 4 + 2y' \Rightarrow \frac{z' - 4}{2} = \sqrt{z}$$

$$\frac{z'}{2} = \sqrt{z} + 2 \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z} + 2} = 2dx$$

(дорешать)

Пример (не пугаться замен)

$$y' = \cos(y - x)$$

$$y - x = z \Rightarrow z' = y' - 1$$

$$z' = \cos z - 1$$

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$

$$\cos z = 1$$

$$z = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + 2\pi k$$

Пример (асимптота)

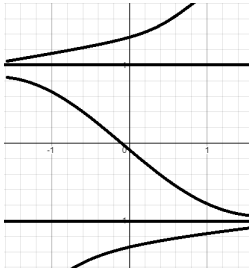
$$y' = y^2 - 1, \quad y \equiv 1, \quad y \equiv -1$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow y^2 > 1$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow y^2 < 1$$

$$y'' = 2yy'$$

$$y'' = 2yy(y^2 - 1)$$

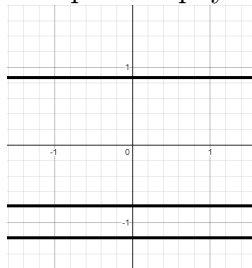
Пример (теоретическая задача)

Доказатать, что решение ограничено сверху или снизу

$$Y' = P_n(y), \quad n = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N}$$

У многочлена нечетной степени всегда есть вещественный корень, y_j - корень, $j = 1, \dots, k$, $y = y_j$ - реш. Значит остальные решения не пересекают на графике это \Rightarrow те которые снизу, ограничены сверху, те

которые сверху ограничены снизу



Пример (24, дополнительно)

Составить диф. уравнение для семейства линий $y = ax^2 + be^x$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = 2ax + be^x \\ y' = 2a + be^x \end{cases}$$

Нетрудно найти:

$$a = \frac{y' - y''}{2(x - 1)}$$

Подставляя во второе уравнение:

$$b = \frac{y''x - y'}{e^x(x - 1)}$$

После подстановки в исходное:

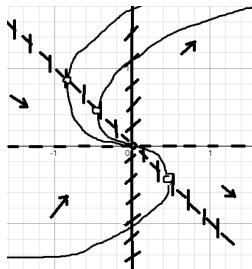
$$y''x(x - 2) - y'(x^2 - 2) + 2(x - 1)y = 0$$

2 Геометрические уравнения

Пример

$$y' = \frac{y}{x + y}$$

$$y \neq x$$



$$y \equiv 0 - \text{реш}$$

$$y + x > 0 \equiv y > -x$$

$$y > 0$$

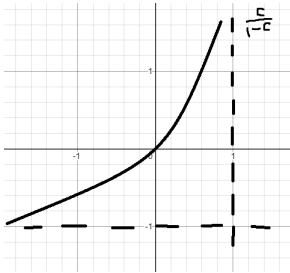
$$\frac{y}{z + y} = c - \text{ур-ие изоклин}$$

$$c = 1 \quad y = x + y$$

$$y = cx + cy$$

$$y(1 - c) = cx$$

$$y = \frac{c}{1 - c}x, \quad c \neq 1$$

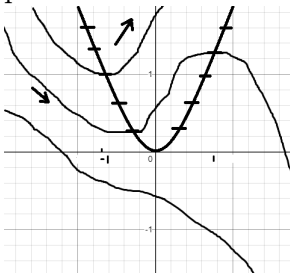


(упр.) Подставить точки

Пример

$$y' = y - x^2 \Rightarrow y = x^2 + c$$

Сократится тогда, когда уравнение второй степени $y = x^2 + ax + b$, подставим: $2x + a = ax + b \Rightarrow a = 2 \quad b = 2$, значит $y = x^2 + 2x + 2$ - решение



$$y'' = y' - 2x = y - x^2 - 2x, \quad y = x^2 + 2x$$

Пример

Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2 .

◀ Как видим из рис. 1, площадь указанного треугольника равна $S = \frac{1}{2}|NK|y$. Поскольку $\lg \alpha = y'$ (это вытекает из геометрического смысла производной), то $S = \frac{y^2}{2y'}$, $y' > 0$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y^2}{2} = a^2 y'.$$

Считая $y \neq 0$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{2 dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}.$$

Отсюда находим $-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C$, или

$$y = -\frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

Если $y' < 0$ (см. рис. 2), то $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$. Интегрируя это уравнение, получаем

$$y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}.$$

Наконец, обозначив $Ca^2 = -\tilde{C}$, оба ответа объединяем в один:

$$y = \frac{2a^2}{\tilde{C} \pm x}.$$

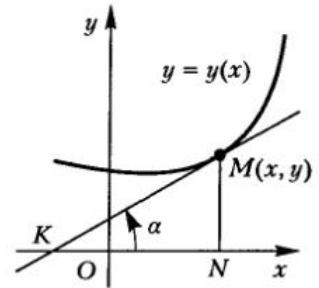


Рис. 1

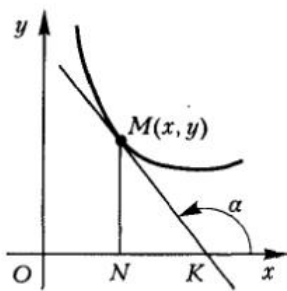


Рис. 2

3 Однородные уравнения

Опр

$M(x, y)$ - однород. ур-ие степени k , если $\forall \lambda > 0 \ M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k M(x, y)$

Опр

Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - однородное, если M, N - однородные одинаковой степени k

Опр

Уравнение $y' = f(x, y)$ - однородное, если $f(x, y)$ - однородное степени 0

Пример (однородное уравнение)

$$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Замена $y = tx$

То есть мы подставляем сперва $y = ay$, $x = ax$ и если a сокращаются, то уравнение однородное и можно сделать замену $y = tx$

$$y' = t'x + t$$

$$dy = tdx + xdt$$

$$t'x = \operatorname{tg} t$$

Дз: 73, 76, 80, 84, 107, 109, 110, 101-112 (выбрать любую), 113

Пример (пересекающиеся прямые)

$(2x - 4 + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$, чтобы сделать его однородным сделаем замену из системы (они не 0)

$$\begin{cases} 2x - 4 + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \tilde{x} + 1 \\ y = \tilde{y} + 2 \end{cases}$$

$$(2\tilde{x} - 4\tilde{y})d\tilde{x} + (\tilde{x} + \tilde{y})d\tilde{y} = 0$$

$$\tilde{y} = t\tilde{x} \Rightarrow d\tilde{y} = \tilde{x}dt + t d\tilde{x}$$

И так далее

Пример (параллельные прямые)

$$(2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 3)dy = 0$$

$$2x + y + 1 = z \Rightarrow 4x + 2y - 3 = 2z - 5$$

$$2dx + dy = dz \Rightarrow dy = dz - 2dx$$

$$zdx - (2z - 5)(dz - 2dx) = 0$$

Решаем уравнение для $\frac{dz}{dx}$ и возвращаемся к прежним переменным

Пример (страшное выражение)

$$2xdy + (\underbrace{x^2y^4} + \underbrace{1})ydx = 0$$

Степени должны быть равны при замене $y = z^m$, если это однородное, то есть $2 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}}, \text{ если } y > 0$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{z}}, \text{ если } y < 0$$

Но при такой замене теряем решение $y \equiv 0$

При замене y_0 на $-y_0$ получается то же самое

$$x = \frac{t}{y^2} \Rightarrow \frac{y^2 dt - 2y t dy}{y^4}$$

$$\Rightarrow 2tdy + (t^2 + 1)(ydt - 2tdy) = 0$$

ДЗ: 119, 120, 124, 127, 131, 132, 135 (любой из а-в)

Теорема

$$y' = p(x)y + q(x) \quad p(x), q(x) \in C(a, b)$$

$$\Rightarrow \exists! \text{ реш. з. Коши } (x_0, y_0) : x_0 \in (a, b) \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Замечание

1. $y' = p(x)y + q(x)$ - лин. неоднородное ($q(x) \not\equiv 0$)

2. $y' = p(x)y$ - лин. однородное

Если y_1, y_2 - реш (2), $y_{1,2} \not\equiv 0 \Rightarrow \exists c = \text{const} : y_2 = cy_1$

Док-во

$$y_1' = p(x)y_1$$

$$y_2' = p(x)y_2$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{py_2 - py_2}{y_1} = 0$$

Действительно, y_1, y_2 отличаются на константу

Решение однор. $y = cy_1 \quad \forall$ частн. решение $y_1 \not\equiv 0$

ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, Я ОТВЛЕКСЯ НА ОБДУМЫВАНИЕ ПРОШЛОГО ДОК-ВА

4 Метод вариации произвольной переменной

1) Решаем однородное

2) Варьируем const

Найдем общее решение л.о.у.:

$$\text{I) } \frac{dy}{y} = p(x)dx$$

$$\ln |y| = \int p(x)dx + \ln |c|$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

$$\text{II)} \quad c' e^{\int p(x) dx} + c e^{\int p(x) dx} p(x) = p(x) c e^{\int p(x) dx} + q(x)$$

$$x' = q(x) e^{-\int p(x) dx} \Rightarrow c(x) = \int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + \tilde{c}$$

$$y = e^{\int p(x) dx} \left(\int q(x) e^{-\int p(x) dx} dx + \tilde{c} \right)$$

$$\text{3. К. } (x_0, y_0) \quad y = e^{\int_{x_0}^x p(\tau) d\tau} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(\tau) e^{-\int_{x_0}^{\tau} p(s) ds} d\tau \right)$$

Пример

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y$$

I) Решим сперва такое уравнение: $(2x + 1)y' = 2y$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x + 1} \Rightarrow \ln |y| = \ln |x + 1| + \ln |c|$$

$$y = c(2x + 1)$$

II) $(2x + 1)(2c + (2x + 1)c') = 4x + 2c(2x + 1)$

$$c' \frac{4x}{(2x + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} c &= \int \frac{4x}{(2x + 1)^2} dx = \int \frac{u - 1}{u^2} du = \\ &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du = \ln |u| + \frac{1}{u} + \tilde{c} = \ln |2x + 1| + \frac{1}{2x + 1} + \tilde{c} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } y = \left(\ln |2x + 1| + \frac{1}{2x + 1} + \tilde{c} \right) (2x + 1)$$

$$\underbrace{y}_{\text{общее н.}} = \underbrace{(2x + 1) \ln |2x + 1| + 1}_{\text{частное н.}} + \underbrace{\tilde{c}(2x + 1)}_{\text{общее о.}}$$

Теорема (Бернулли)

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \text{особое реш. } y \equiv 0$$

Варьируем константу! Не делаем как в Филиппове

Пример

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$y' = -2y \Rightarrow y = ce^{-2x} - \text{подставим}$$

$$c' = c^2 e^{-x} - \text{нужно разделить переменные}$$

$$\int \frac{dc}{c^2} = \int e^{-x} dx \Rightarrow \frac{1}{c} = e^{-x} + \tilde{c} \Rightarrow c = \frac{1}{e^{-x} + \tilde{c}}$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{1}{e^{-x} + \tilde{c}} e^{-2x}, \quad y \equiv 0$$

ДЗ: 136-160 (найти интересные), 146/148, 161-164, 178, 173/174

Пример (162)

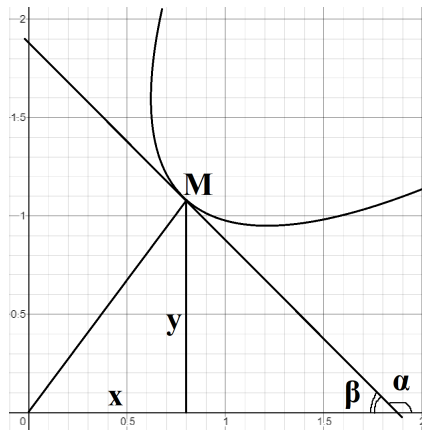
$$(x+1)(yy' - 1) = y^2$$

$$y^2 = z \Rightarrow 2yy' = z'$$

$$(x+1)\left(\frac{z'}{z} - 1\right) = z$$

Пример (174, геометрическая задача)

Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2



$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha = -y'$$

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{y}{y'}\right)y = a^2$$

$$xy - 2a^2 = y^2 \frac{dx}{dy}$$

Пример (178, мат. анализ наносит ответный удар)

Найти то решение дифференциального уравнения

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

которое остается ограниченным при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Решение

$$y = C \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$$

Следует, что

Замечание (Риккати)

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (1)$$

В общем случае не интегрируется в квадратурах.

$$y = y_1(x) - \text{реш (1)} \Rightarrow \text{замена } y = z + y_1$$

$$z' + y_1' = a(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) + b(z + y_1) + c$$

$$z' + \cancel{y_1'} = a(z^2 + 2zy_1 + y_1^2) + bz + \cancel{ay_1^2 + by_1} + c$$

$$z' = (2ay_1 + b)z + az^2 - \text{уравнение Бернулли}$$

Пример

Как подбирать? $y' + y^2 = x^2 + 2$

Попробуем подобрать степень x для y : $a^2x^{2n} + \dots = x^2 - 2x$

$$a = 1, \quad n = 1$$

$$y = x + c, \quad -1 + x^2 + 2xc + c^2 = x^2 - 2x \Rightarrow c = 1$$

$$y = x - 1 \Rightarrow -1 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x$$

Пример (ещё пример)

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2}$$

$$y = \frac{a}{x} \Rightarrow -\frac{a}{x^2} + \frac{2a^2}{x^2} = \frac{6}{x^2}$$

$$2a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Пример (171)

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$$

$$y = e^x + z \Rightarrow z' = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 \stackrel{z \neq 0}{\Rightarrow} z = -\frac{1}{x+C}$$

Но при $z = 0$ получаем решение $y = e^x$

Ответ: $y = e^x - \frac{1}{x+C}$, $y = e^x$

4.1 Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Опр

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - уравнение в полных дифф, если $M, N \in C^1(G)$

$$\exists u(x, y) : du = \underbrace{M}_{\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x} dx + \underbrace{N}_{\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y} dy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = u''_{xy} = u''_{yx} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Пример (187)

Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его:

$$\underbrace{(2 - 9xy^2)x}_{M} dx + \underbrace{(4y^2 - 6x^3)y}_{N} dy = 0$$

$$M'_y = -18x^2y \quad N'_x = -19x^2y$$

$$M = u'_x \Rightarrow u = \int (2x - 9x^2y^2)dx + \varphi(y) = x^2 - 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$u'_y = -6x^3y + \varphi'(y) = N = 4y^3 - 6x^3y$$

$$\varphi'(y) = 4y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^4$$

$$u(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + y^4$$

Ответ: $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$, т.к. $du = 0 \Rightarrow u = c$

Для сравнения:

$$\underbrace{2xdx}_{d(x^2)} - \underbrace{9x^2y^2dx - 6x^3ydy}_{-3(y^2 \underbrace{3x^2dx}_{d(yx^3)} + x^3 \underbrace{2ydy}_{d(y^2)})} + \underbrace{4y^3dy}_{d(y^4)} = 0$$

Дифференциал произведения $d(x^3y^2)$

Пример (193)

Проверить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, и решить его:

$$\underbrace{3x^2dx}_{d(x^3)}(1 + \ln y) = \underbrace{2ydy}_{-d(y^2)} - x^3 \underbrace{\frac{1}{y}dy}_{d(\ln y)}$$

Опр

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - уравнение в полных дифф (1)

$\mu = \mu(x, y)$ - инт. мн-ль (1), если $(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$ - ур. в полных лиф.

Пример (195, фокус) Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$$

$$(x^2 + y^2)dx + \underbrace{xdx + ydy}_{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)} = 0$$

$$dx + \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\text{Значит } \mu = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$dx + \frac{1}{2}d\ln(x^2 + y^2) = 0$$

$$\text{Ответ: } x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = c$$

Пример (196, фокус) Решить уравнение, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных:

$$(x^2 + y^2 + x)dx - xdy = 0$$

$$(x^2 + y^2)dx + ydx - xdy = 0 \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dyx - ydx}{x^2}$$

$$(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2)dx - \underbrace{\frac{xdy - ydx}{x^2}}_{d\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\mu = \frac{1}{x^2(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2)} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

ДЗ: 167-170 (интересные), 188-194 (интересные), 196, 201, 203