Практика по дифференциальным уравнениям, 3 сем

(преподаватель Звягинцева Т. Е.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Введение

Разрешимо в квадратурах=разрешимо в интеграллах
$y(x)$ - неизв. функция
$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
$y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$
(1) $y' = f(x, y)$ - дифференциальное уравнение 1-го порядка

Пример

$y' = y$, решение $y = ce^x$

Опр

Задача Коши: найти решение $y = \phi(x) : \phi(x_0) = y_0$ ((2) (x_0, y_0))

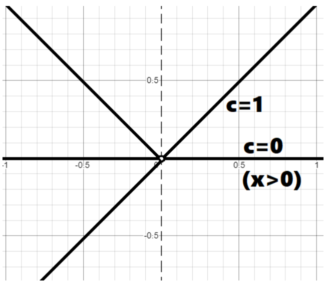
Считаем, что $f(x, y) \in C(G)$
И пока что предполагаем, что $df(x, y) \in C(G)$ (решение существует), $dy \in C(G)$ (решение единственное)
$(x_0, y_0) \in G$ $y = \phi(x)$ - решение (1) $\Rightarrow \phi'(x_0) = f(x_0, y_0)$ $(y_0 = \phi(x_0))$
В каждой точке области G определено направление касательной к кривой, проходящей через эту точку

Опр

Кривые, в которых направление поля постоянно называются изоклины

Пример

$$y' = \frac{y}{x}$$



$$x \neq 0, \quad \frac{y}{x} = c (= tg\alpha) \text{ - уравнение изоклин}$$

$$(y' = f(x, y) \Rightarrow y' = c \Rightarrow f(x, y) = c)$$

$$\Rightarrow y = cx$$

При $c = 0$ $(\operatorname{ctg}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0) \Rightarrow y = 0$

При $c = 1$ $(\operatorname{ctg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow y = x$

З. Коши для (-1,1): $y = -x,\ x < 0$

Пример

$y' = -\dfrac{y}{x} \Rightarrow -\dfrac{y}{x} = c$ - уравнение изоклин

$\Rightarrow c = 0$ $(tg\alpha = 0) \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow c = 1$ $(\alpha = \dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow y = -x$

$\Rightarrow c = \sqrt{3}$ $(\alpha = \dfrac{\pi}{3}) \Rightarrow y = -\sqrt{3}x$

Пример (16, дополнительно)

Написать уравнение геометрического места точек перегиба графиков решений уравнений:

a) $y' = y - x^2$

b) $y' = f(x, y)$

Решение

Условие перегиьа графика $y = f(x)$ - это $y'' = 0$
a) $y' = y - x^2$

$$y'' = y' - 2x = (y - x^2) - 2x = 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x$$

b) Возьмем полный лифференциал от обеих частей равенства:

$$dy' = df(x, y) \Rightarrow dy' = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f dy}{\partial y dx}$$

$$\Rightarrow y'' = f'_x + f'_y y' = 0 \Rightarrow f'_x + f'_y y' = 0$$

Пример

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

Пусть $z = 4x + 2y - 1 \Rightarrow z' = 4 + 2y' \Rightarrow \dfrac{z' - 4}{2} = \sqrt{z}$

$$\frac{z'}{2} = \sqrt{z} + 2 \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z} + 2} = 2dx$$

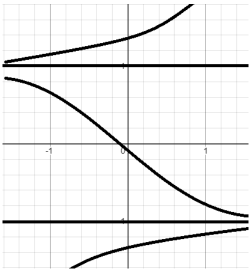
(дорешать)

Пример

$$y' = \cos(y - x)$$
$$y - x = z \Rightarrow z' = y' - 1$$
$$z' = \cos z - 1$$
$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$
$$\cos z = 1$$
$$z = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$y = x + 2\pi k$$

Пример

$$y' = y^2 - 1, \quad y \equiv 1, \; y \equiv -1$$
$$y' > 0 \Leftrightarrow y^2 > 1$$
$$y' < 0 \Leftrightarrow y^2 < 1$$
$$y'' = 2yy'$$
$$y'' = 2yy(y^2 - 1)$$

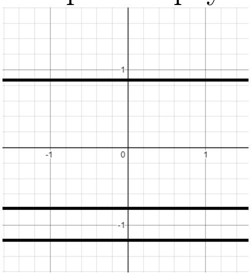


Пример

Доказатать, что решение ограничено сверху или снизу

$$Y' = P_n(y), \; n = 2m - 1, \; m \in \mathbb{N}$$

У многочлена нечетной степени всегда есть вещественный корень, y_j - корень, $j = 1, ..., k$, $y = y_j$ - реш. Значит остальные решения не пересекают на графике это $\Rightarrow$ те котороые снизу, ограничены сверху, те которые сверху ограничены снизу

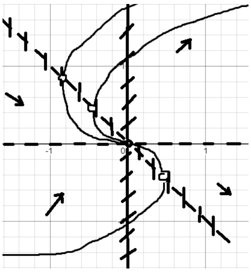


2 Геометрические уравнения

Пример

$$y' = \frac{y}{x+y}$$

$$y \neq x$$



$y \equiv 0$ - реш

$y + x > 0 \equiv y > -x$

$y > 0$

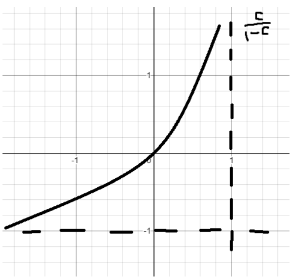
$\dfrac{y}{z+y} = c$ - ур-ие изоклин

$c = 1 \quad y = x + y$

$y = cx + cy$

$y(1-c) = cx$

$y = \dfrac{c}{1-c}x, \quad c \neq 1$

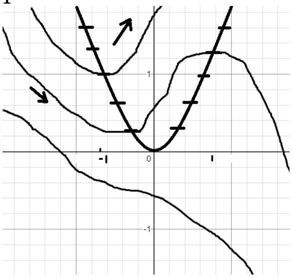


(упр.) Подставить точки

Пример

$$y' = y - x^2 \Rightarrow y = x^2 + c$$

Сократится тогда, когда уравнение второй степени $y = x^2 + ax + b$, подставим: $2x + a = ax + b \Rightarrow a = 2$ $b = 2$, значит $y = x^2 + 2x + 2$ - решение



$$y'' = y' - 2x = y - x^2 - 2x, \quad y = x^2 + 2x$$

Пример

Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

◀ Как видим из рис. 1, площадь указанного треугольника равна $S = \frac{1}{2}|NK|y$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (это вытекает из геометрического смысла производной), то $S = \frac{y^2}{2y'}$, $y' > 0$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y^2}{2} = a^2 y'.$$

Считая $y \neq 0$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{2\,dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}.$$

Отсюда находим $-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C$, или

$$y = -\frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

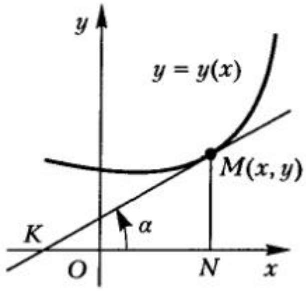


Рис. 1

Если $y' < 0$ (см. рис. 2), то $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$. Интегрируя это уравнение, получаем

$$y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}.$$

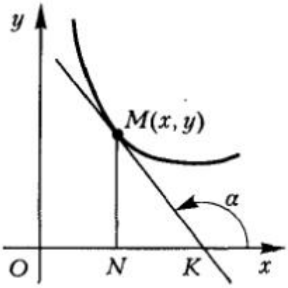


Рис. 2

Наконец, обозначив $Ca^2 = -\widetilde{C}$, оба ответа объединяем в один:

$$y = \frac{2a^2}{\widetilde{C} \pm x}. \blacktriangleright$$

3 Однородные уравнения

Опр

$M(x,y)$ - однор. ур-ие степени k, если $\forall \lambda > 0$ $M(\lambda x, \lambda y)\lambda^k M(x,y)$

Опр

Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ - однородное, если M, N - однородное одинаковой степени k

Опр

Уравнение $y' = f(x,y)$ - однородное, если $f(x,y)$ - однородное степени 0

Пример **(однородное уравнение)**

$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
Замена $y = tx$
То есть мы подставляем сперва $y = ay$, $x = ax$ и если a сокращаются, то уравнение однородное и можно сделать замену $y = tx$
$y' = t'x + t$
$dy = tdx + xdt$
$t'x = \operatorname{tg} t$

Дз: 73, 76, 80, 84, 107, 109, 110, 101-112 (выбрать любую), 113

Пример **(пересекающиеся прямые)**

$(2x-4+6)dx+(x+y-3)dy = 0$, чтобы сделать его однородным сделаем замену из системы (они не 0)

$$\begin{cases} 2x - 4 + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \widetilde{x} + 1 \\ y = \widetilde{y} + 2 \end{cases}$$

$(2\widetilde{x} - 4\widetilde{y})d\widetilde{x} + (\widetilde{x} + \widetilde{y})dy = 0$
$\widetilde{y} = t\widetilde{x} \Rightarrow d\widetilde{y} = \widetilde{x}dt + td\widetilde{x}$
И так далее

Пример **(параллельные прямые)**

$$(2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 3)dy = 0$$

$$2x + y + 1 = z \Rightarrow 4x + 2y - 3 = 2z - 5$$

$$2dx + dy = dz \Rightarrow dy = dz - 2dx$$

$$zdx - (2z - 5)(dz - 2dx) = 0$$

Решаем уравнение для $\dfrac{dz}{dx}$ и возващаемся к прежним переменным

Пример (страшное выражение)

$2xdy + (\underbrace{x^2y^4} + \underbrace{1})ydx = 0$
Степени должны быть равны при замене $y = z^m$, если это однородное, то есть $2 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{\sqrt{z}}$, если y>0
$y = -\frac{1}{\sqrt{z}}$, если y<0
Но при такой замене теряем решение $y \equiv 0$
При замене y_0 на $-y_0$ получается то же самое
$x = \frac{t}{y^2} \Rightarrow = \frac{y^2dt - 2ytdy}{y^4}$
$\Rightarrow 2tdy + (t^2 + 1)(ydt - 2tdy) = 0$

ДЗ: 119, 120, 124, 127, 131, 132, 135 (любой из а-в)

Теорема

$$y' = p(x)y + q(x) \quad p(x), q(x) \in C(a, b)$$

$$\Rightarrow \exists! \text{ реш. з. Коши } (x_0, y_0) : x_0 \in (a, b) \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

Замечание

1. $y' = p(x)y + q(x)$ - лин. неоднородное ($q(x) \not\equiv 0$)

2. $y' = p(x)y$ - лин. однородное

Если y_1, y_2 - реш (2), $y_{1,2} \not\equiv 0 \Rightarrow \exists c = \text{const} : y_2 = cy_1$

Док-во

$$y_1' = p(x)y_1$$

$$y_2' = p(x)y_2$$

$$(\frac{y_2}{y_1})' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{py_2 - py_2}{y_1} = 0$$

Действительно, y_1, y_2 отличаются на константу
Решение однор. $y = cy_1$ $\forall$частн. решение $y_1 \not\equiv 0$

ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, Я ОТВЛЕКСЯ НА ОБДУМЫВАНИЕ ПРОШЛОГО ДОК-ВА

4 Метод вариации произвольной переменной

1) Решаем однородное
2) Варьируем const
Найдем общее решение л.о.у.:

$$\text{I)} \quad \frac{dy}{y} = p(x)dx$$

$$\ln|y| = \int p(x)dx + \ln|c|$$

$$y = ce^{\int p(x)dx}$$

$$\text{II)} \quad c'e^{\int p(x)dx} + ce^{\int p(x)dx}p(x) = p(x)ce^{\int p(x)dx} + q(x)$$

$$x' = q(x)e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow c(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + \widetilde{c}$$

$$y = e^{\int p(x)dx}(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + \widetilde{c})$$

$$\text{З. К. } (x_0, y_0) \quad y = e^{\int_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(\tau)e^{-\int_{x_0}^{\tau} p(s)ds}d\tau)$$

Пример

$$(2x+1)y' = 4x + 2y$$

I) Решим сперва такое уравнение: $(2x+1)y' = 2y$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x+1} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + \ln|c|$$

$$y = c(2x+1)$$

II) $(2x+1)(2c + (2x+1)c') = 4x + 2c(2x+1)$

$$c'\frac{4x}{(2x+1)^2}$$

$$c = \int \frac{4x}{(2x+1)^2}dx = /u = 2x+1/ = \int \frac{u-1}{u^2}du =$$

$$= \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2})du = \ln|u| + \frac{1}{u} + \widetilde{c} = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + \widetilde{c}$$

Ответ: $y = (\ln|2x+1| + \dfrac{1}{2x+1} + \widetilde{c})(2x+1)$

$$\underbrace{y}_{\text{общее н.}} = \underbrace{(2x+1)\ln|2x+1| + 1}_{\text{частное н.}} + \underbrace{\widetilde{c}(2x+1)}_{\text{общее о.}}$$

Теорема (Бернулли)

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha} \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \text{особое реш. } y \equiv 0$$

Варьируем константу! Не делаем как в Филиппове

Пример

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$y' = -2y \Rightarrow y = ce^{-2x} \text{ - подставим}$$

$$c' = c^2 e^{-x} \text{ - нужно разделить переменные}$$

$$\int \frac{dc}{c^2} = \int e^{-x} dx \Rightarrow \frac{1}{c} = e^{-x} + \widetilde{c} \Rightarrow c = \frac{1}{e^{-x} + \widetilde{c}}$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{e^{-x} + \widetilde{e}} e^{-2x}, \quad y \equiv 0$

ДЗ: 136-160 (найти интересные), 146/148, 161-164, 178, 173/174

Пример (162)

$$(x+1)(yy' - 1) = y^2$$

$$y^2 = z \Rightarrow 2yy' = z'$$

$$(x+1)(\frac{z'}{z} - 1) = z$$