

2019-10-28

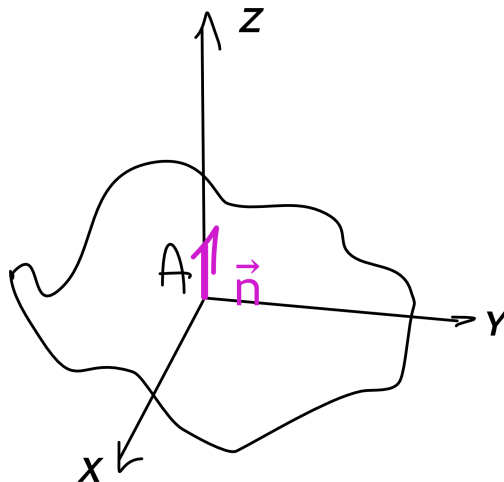
Напоминание

0.1 Соприкас. параболоид

«Введем нового героя»

Опр

A - точка на пов-ти



\Rightarrow в окр. A поверхность задается $z = f(x, y)$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = f(x_0, y_0) = 0$$

Разложим $z = f(x, y)$ по ф. Тейлора

$$z = f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y +$$

$$\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)xy + f_{yy}(x_0, y_0)y^2)$$

$$f_x(0, 0) = 0 \quad f_y(0, 0) = 0$$

$$r(v, u) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \quad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$$

r_u и r_v - лежат в кас. плоск, а это OXY

$$z = \frac{1}{2}(\underbrace{f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2}_{\text{пов-ть 2 порядка}}) + o(x^2 + y^2)$$

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$z = Ax^2 + Cy^2$ можем поворотом привести к этому

Это может быть:

- эллиптич. параболоид A, C - одного знака
- гипербол. параболоид A, C - разных знаков
- параболический цилиндр $A = 0, C \neq 0$ или наоборот
- плоскость $A = 0, C = 0$

Опр

Точка A наз. эллиптической, если соприкас. параболоид - эллипт.

A - гиперболическая, если соприкас параболоид - гиперб.

A - парабол., если соприкас параб - параб. цилиндр или плоскость

Опр

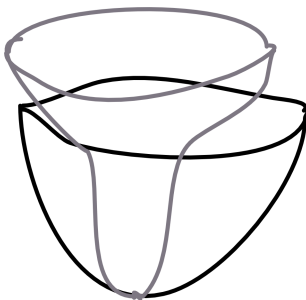
Точка A наз. точкой округления (омбилическая), если сопр. параб. - пар. вращения

Опр

Точка A - точка уплощения, если соприкас. параб - плоскость

Теорема

I и II формы в точке A у поверхности и параболоида совпадают



В параметризации
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Док-во

очевидно

Давайте поймем, от чего зависят E, F, G, \dots, M, V ?

от $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{r}_{uu}, \bar{r}_{uv}, \bar{r}_{vv}$

Следствие

Норм. кривизны у поверх-ти и соприкас. параб совпадают

Опр

Главные кривизны k_1 и k_2

\vec{a} - направление в кас. плоск

$\bar{k}_{\vec{a}}$ - нормальная кривизна

$k_{\vec{a}}$ - норм. кривизина в напр. \vec{a}

$$\bar{k}_{\vec{a}} = k_{\vec{a}} \bar{n}$$

$$k_1 = \min_{\vec{a}} k_{\vec{a}} \quad k_2 = \max_{\vec{a}} k_{\vec{a}}$$

Опр

\vec{a}_1 и \vec{a}_2 , соотв k_1 и k_2 наз. главными направлениями

Утв

$$\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \text{ (докажем позже)}$$

Опр

$K = k_1 \cdot k_2$ - гауссова кривизна

«Главный герой всего нашего курса»

Свойства

$$K > 0 \Leftrightarrow A - \text{эллипт типа}$$

$$K < 0 \Leftrightarrow A - \text{гиперб. типа}$$

$$K = 0 \Leftrightarrow A - \text{параб. типа}$$

Утв ("Блистательная теорема Гаусса")

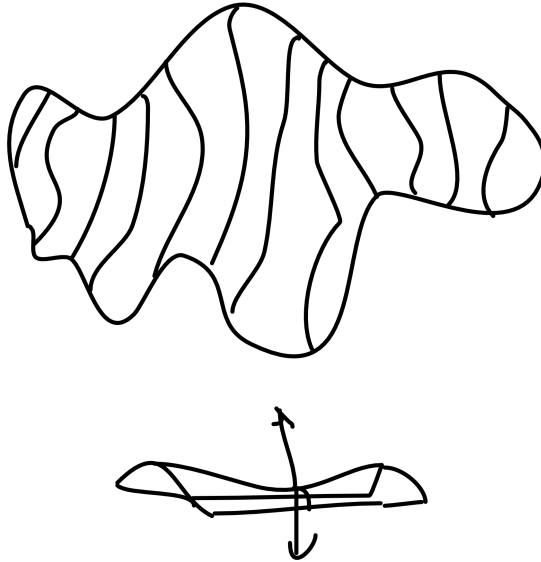
K - инвариант относительно изометрии пов-ти

Опр

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} - \text{средняя кривизна}$$

Смысл: В мыльных пленках (незамкн.) средняя кривизна = 0

Пример: мыльная плёнка



Теорема (Эйлера)

$$k_{\vec{a}} = k_1 \cos^2 \Theta + k_2 \sin^2 \Theta$$

где k_1, k_2 - гл. кривизны, Θ - угол между напр. \vec{a} и \vec{a}_1

Док-во

$$z = Ax^2 + Cy^2 - \text{сопр. парабол.}$$

$$\vec{a} = (\cos \Theta; \sin \Theta) - \text{направление}$$

$$\begin{cases} x = t \cos \Theta \\ y = t \sin \Theta \\ z = Ax^2 + Cy^2 = t^2(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{cases}$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{cases} \cos \Theta \\ \sin \Theta \\ 2t(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{cases}$$

$$r''(t) = \begin{cases} 0 \\ r(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{cases}$$

$$k = \frac{|r'(t_0) \times r''(t_0)|}{|r'(t_0)|^{3/2}}$$

$$t_0 = 0$$

$$r'(t_0) = \begin{pmatrix} \sin \Theta \\ \cos \Theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad |r'(t)| = 1$$

$$r''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta) \end{pmatrix}$$

$$|r''(t_0)| = 2 |A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta|$$

$$r'' \perp r'$$

$$\text{В данном случае } k = |r''(t_0)| = 2 |A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta|$$

$$k_{\vec{a}} = \pm k \quad (\text{от сонапр. с } \vec{n})$$

$$k_{\vec{a}} = 2(A \cos^2 \Theta + C \sin^2 \Theta)$$

Хотим теперь найти минимум и максимум этой штуки

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$z = Ax^2 + Cy^2$$

$$\frac{dk_{\vec{a}}}{d\Theta} =$$

Мы не хотим брать произв.

$$k_{\vec{a}} = 2(A \cos^2 \Theta + C(1 - \cos \Theta)) = 2C + \cos^2 \Theta (2A - 2C)$$

При $A = C$ A - точка округл.

$$\square A > C$$

$$\max k_{\vec{a}} \text{ достиг при } \Theta = 0 \quad (\text{или } \pi)$$

$$k_1 = 2C + 2A - 2C = 2A$$

$$\min k_{\vec{a}} \text{ при } \frac{\pi}{2} \quad (\text{или } -\frac{\pi}{2})$$

$$k_2 = 2C$$

Следствие (1)

Пов-ть задана ур-ем $z = f(x, y)$

$$f(0, 0) = 0 \quad f_x(0, 0) = 0 \quad f_y(0, 0) = 0 \quad f_{xy}(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = f_{xx}(0, 0) \quad k_2 = f_{yy}(0, 0)$$

(или наоборот мы рассматривали только $A > C$)

Следствие (2)

Главные напр \perp