

# Практика по геометрии

(преподаватель Амрани И. М.)  
Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [ВКонтакте](#)

## Содержание

0.1	(03.09.2019) Кривые и поверхности . . . . .	2
0.2	(10.09.2019) Задачи на кривые . . . . .	3
0.3	(17.09.2019) Поверхности . . . . .	7
0.4	(24.10.2019) Первая фундаментальная форма . . . . .	8
0.5	(01.10.2019) Ещё задача на $I(F)$ . . . . .	10
0.6	(01.10.2019) Вторая фундаментальная форма . . . . .	11
0.7	(08.10.2019) Практика совместно с 242 . . . . .	16
0.8	(15.10.2019) Практика совместно с 242 x2 . . . . .	18
0.9	(22.10.2019) Завершаем тему . . . . .	21
0.10	(29.10.2019) Кривые и поверхности . . . . .	23

## 0.1 (03.09.2019) Кривые и поверхности

### Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^2, \quad \text{т.ч.} \quad |\gamma(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Д-ть, что } \gamma'(t) \perp \gamma''(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

### Док-во

$$|\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} = 1 \Leftrightarrow \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1$$

$$(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle)' = (1)' \Rightarrow 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$$

Вообще очевидно, но если нет, то:

$$(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle)' = \left( \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i^2 \right)' = \sum_{i=1}^3 2\dot{\gamma}_i \ddot{\gamma}_i = 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle$$

### Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^3, \quad |\gamma'| = 1, \quad \gamma'' \neq 0$$

$$T(t) = \gamma'(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t), \quad N(t) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$$

1. Д-ть, что  $\{T(t), N(t), B(t)\}$  - ОНБ
2. Найти координаты  $\frac{dT}{dt}, \frac{dN}{dt}, \frac{dB}{dt}$  в базисе  $\{T, N, B\}$

### Решение

1. Очевидно,  $B(t) = \underset{=1}{T} \cdot \underset{=1}{N} \sin \angle(T, N)$

$$T \perp N \text{ (по пред. задаче), } B \perp N, \quad B \perp T \text{ (по опр. вект. произв.)}$$

2. По определению "взятием производной" получаем:

$$\frac{dT}{dt} = 0T + |\ddot{\gamma}|N + 0B$$

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \frac{dN}{dt}, T \rangle + \langle N, \frac{dT}{dt} \rangle = 0$$

$$\text{Аналогично } 0 = \langle \frac{dT}{dt}, B \rangle = - \langle \frac{dB}{dt}, T \rangle$$

$$|\ddot{\gamma}| = \langle \frac{dN}{dt}, T \rangle = - \langle N, \frac{dT}{dt} \rangle$$

$$\frac{dN}{dt} = -|\ddot{\gamma}|T + 0N + \tau(t)B$$

$$\frac{dB}{dt} = 0T - \tau(t)N + 0B$$

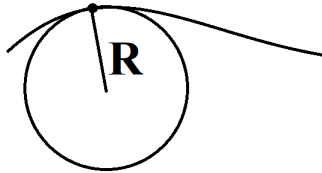
## 0.2 (10.09.2019) Задачи на кривые

Мы хотим найти  $\tau$  через  $\dot{\gamma}$ ,  $\ddot{\gamma}$ ,  $\dddot{\gamma}$

### Замечание

На плоскости в каждой точке гладкой кривой есть окружность, которая наилучшим образом приближает кривую

$$R = \frac{1}{|\ddot{\gamma}|}, \quad |\ddot{\gamma}| := \kappa - \text{кривизна}$$



### Решение (продолжение)

$$\tau = \langle \frac{dN}{dt}, B \rangle$$

$$\frac{dN}{dt} = \left( \frac{\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|} \right)' = \frac{\dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \frac{dN}{dt}, B \rangle &= \langle \frac{\ddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2}, \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|} \rangle = \\ &= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} \langle \ddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \rangle \underset{\text{см. на N}}{=} \\ &= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} \langle \ddot{\gamma}|\ddot{\gamma}|, \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \rangle = \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^2} \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \rangle = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2} \end{aligned}$$

### Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4 \cos(t), 5 - 5 \sin(t), -3 \cos(t))$$

1. Найти  $\kappa$  и  $\tau$
2. Понять, что из себя представляет линия

## Решение

1. Предыдущую задачу мы не можем просто так применить, потому что  $|\dot{\gamma}| = 5 \neq 1$ , но мы можем перепараметризовать:

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4 \cos(\frac{t}{5}), 5 - 5 \sin(\frac{t}{5}), -3 \cos(\frac{t}{5}))$$

$$\dot{\tilde{\gamma}} = (-\frac{4}{5} \sin(\frac{t}{5}), -\cos(\frac{t}{5}), \frac{3}{5} \sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow |\dot{\tilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\tilde{\gamma}} = (-\frac{4}{25} \cos(\frac{t}{5}), \frac{1}{5} \sin(\frac{t}{5}), \frac{3}{25} \cos(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \kappa = |\ddot{\tilde{\gamma}}| = \frac{1}{25}$$

$$\ddot{\tilde{\gamma}} = (\frac{4}{125} \sin(\frac{t}{5}), \frac{1}{25} \cos(\frac{t}{5}), -\frac{3}{125} \sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2} = 25(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0$$

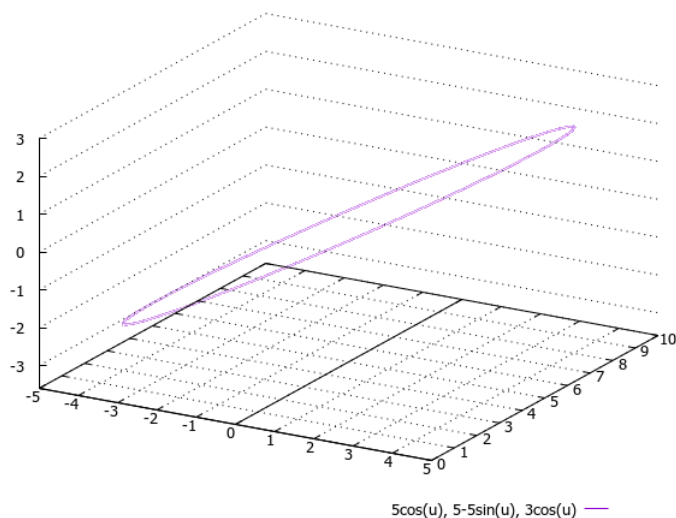
2. Наша линия находится на плоскости:

$$3x + 0y + 4z$$

И лежит на сфере:

$$x^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 25$$

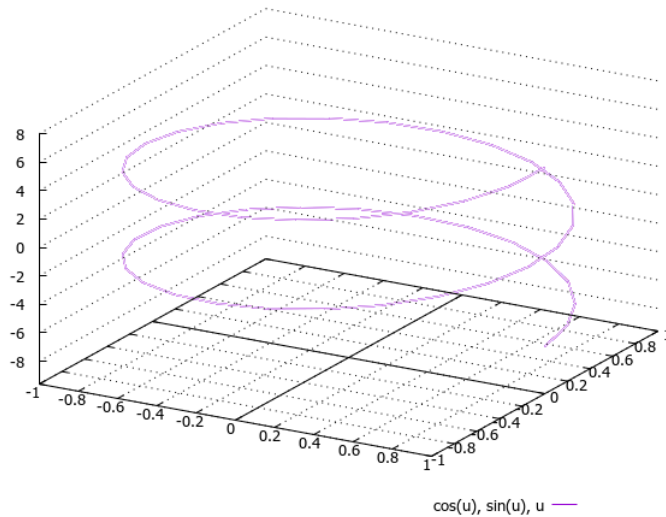
Значит она представляет из себя окружность, потому что есть разные точки



## Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$$

1. Построить график



2. Найти  $\kappa$  и  $\tau$

## Решение

Аналогично  $t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{2}}$

$$\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left( \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\tilde{\dot{\gamma}} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow |\tilde{\dot{\gamma}}| = 1$$

$$\tilde{\ddot{\gamma}} = \left( -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

$$\Rightarrow \kappa = |\tilde{\ddot{\gamma}}| = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\ddot{\gamma}} = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), 0 \right)$$

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}$$

### 0.3 (17.09.2019) Поверхности

#### Пример

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r(t), 0, z(t))$ , где  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Найти параметризацию поверхности вращения вокруг  $OZ$

#### Док-во

Из геометрических соображений:  $(r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, z(t))$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$

Более строго:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos \alpha \\ r(t) \sin \alpha \\ z(t) \end{pmatrix}$$

#### Опр

Гладкая двумерная поверхность:

$$F : U_{t,s}^{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

т.ч.  $\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}$  - непрерывные функции

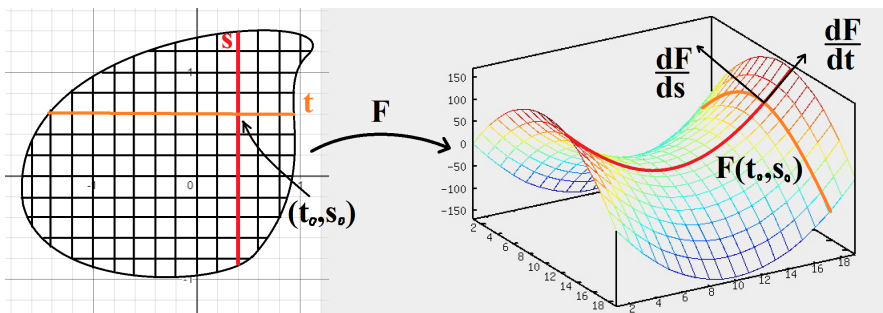
#### Опр

Гладкая регулярная поверхность:

$$F : U_{t,s}^{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

т.ч.  $\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}$  - линейно независимы

"регулярная = скорость не обнуляется"



## 0.4 (24.10.2019) Первая фундаментальная форма

### Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle \end{pmatrix} = \\ = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle = \\ = \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|^2 \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 - \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|^2 \cos^2 t = \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right|^2 \left| \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 = \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right|^2 \end{aligned}$$

### Замечание

$$A(S) = \sum A(\square)$$

$$A(\square) \approx \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s} \right| \Delta t \Delta s$$

$$I(F) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$A(S) = \iint \left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial v} \right| dt ds = \iint \sqrt{\det I(F)} dt ds$$

### Пример

$$F : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, \varphi) \rightarrow (\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, \sin \theta)$$

1. Доказать, что образ F находится на сфере радиуса 1
2. Найти S сферы через I(F)



## Док-во

1. Видно из параметрического уравнения сферы что это сфера, а также понятен радиус и её центр

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos \theta, \end{cases}$$

где  $\theta \in [0, \pi]$  и  $\phi \in [0, 2\pi)$  (у нас будет сдвиг на угол)

2. Найдем переменные для  $I(F)$ :

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = \cos^2 \theta$$

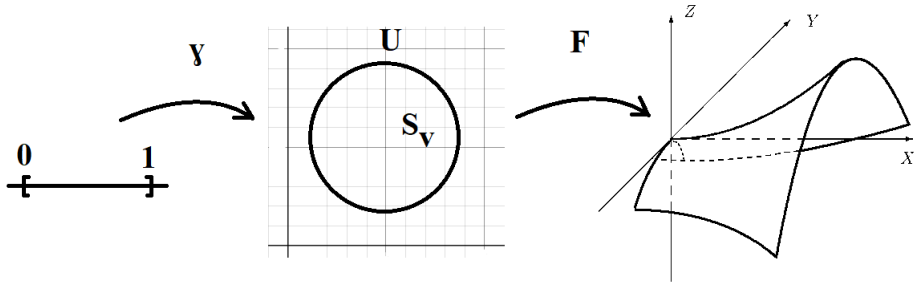
$$\Rightarrow I(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint \sqrt{\det I(F)} d\theta d\varphi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\cos \theta| d\theta d\varphi = \int_0^\pi 4 d\varphi = 4\pi$$

## 0.5 (01.10.2019) Ещё задача на $I(F)$

### Пример

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $C^1$  регулярная



Найти длину  $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$  через  $\gamma$  и  $I(F)$

### Решение

$$l(F \circ \gamma) := \int_0^1 |F \circ \gamma(t)'| dt$$

$$\begin{aligned} \frac{d(F \circ \gamma(t))}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{\text{вектор}} \overbrace{\dot{\gamma}_1(t)}^{\text{скаляр}} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t) = \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t), \frac{\partial F}{\partial x} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma}_2(t) \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle \dot{\gamma}_1^2(t) + 2 \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle \dot{\gamma}_1(t) \dot{\gamma}_2(t) + \left\langle \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle \dot{\gamma}_2^2(t) = \\ &= (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) I(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow l(F \circ \gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) I(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}} dt \end{aligned}$$

## 0.6 (01.10.2019) Вторая фундаментальная форма

### Опр

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad C^2 \text{ регулярная}$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} \right| \neq 0$$

$$n := \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y}}{\left| \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y} \right|} - \text{перп. обоим и по модулю 1}$$

$$L = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, n \right\rangle, \quad M = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, n \right\rangle, \quad N = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, n \right\rangle$$

$$\Pi(F) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

### Замечание

$\Pi(F)$  говорит, какая ПВП лучше всего приближает в данной точке

### Пример

Пусть есть сфера радиуса  $r$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos \theta, \end{cases}$$

где  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\phi \in [0, 2\pi)$

Найти  $\Pi(F)$ ,  $I(F)$  и  $\frac{\det(\Pi)}{\det(I)}$

### Решение

Посчитаем  $I(F)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-r \cos \theta \sin \varphi, r \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle &= r^2, & \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle &= 0, & \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle &= r^2 \cos^2 \theta \\
\Rightarrow I(F) &= \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Посчитаем  $\Pi(F)$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = (-r \cos \varphi \cos \theta, -r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi} = (r \sin \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, 0)$$

**Напоминание** В правом ортонормированном базисе:

Если два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  представлены координатами

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

то их векторное произведение имеет координаты

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать мнемонический определитель:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-r^2 \cos^2 \theta \cos \varphi, -r^2 \cos^2 \theta \sin \varphi, -r^2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|} = (-\cos \theta \cos \varphi, -\cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta)$$

$$L = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \bar{n} \right\rangle = r$$

$$M = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi}, \bar{n} \right\rangle = 0$$

$$N = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \bar{n} \right\rangle = r \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \Pi(F) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det \Pi(F)}{\det I(F)} = \frac{1}{r^2} - \text{кривизна Гаусса}$$

### Пример

Пусть  $\gamma : t \rightarrow (t - \text{th}(t), 0, \frac{1}{\text{ch}(t)})$ ,  $t > 0$

1. Найти S поверхности, полученной вращением  $\gamma$  вокруг  $OZ$
2. Найти  $\Pi(F)$ ,  $I(F)$  и  $K = \frac{\det(\Pi)}{\det(I)}$

### Решение

Была задача  $(r(t), 0, z(t)) \Rightarrow (r(t) \cos \varphi, r(t) \sin \varphi, z(t))$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \left( (t - \text{th}(t)) \cos \varphi, (t - \text{th}(t)) \sin \varphi, \frac{1}{\text{ch}(t)} \right), \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left( \left( 1 - \frac{1}{\text{ch}^2(t)} \right) \cos \varphi, \left( 1 - \frac{1}{\text{ch}^2(t)} \right) \sin \varphi, \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = \left( \text{th}^2(t) \cos \varphi, \text{th}^2(t) \sin \varphi, \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}^2(t)} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-(t - \text{th}(t)) \sin \varphi, (t - \text{th}(t)) \cos \varphi, 0)$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \text{th}^4(t) + \frac{\text{sh}^2(t)}{\text{ch}^4(t)} = \text{th}^4 \left( 1 + \frac{1}{\text{sh}^2} \right) = \text{th}^2(t), \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\rangle = (t - \text{th}(t))^2$$

$$\Rightarrow I(F) = \begin{pmatrix} \text{th}^2(t) & 0 \\ 0 & (t - \text{th}(t))^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A(S) &= \iint \sqrt{\det I(F)} dt d\varphi = \iint \sqrt{(t - \operatorname{th}(t))^2 \operatorname{th}^2(t)} dt d\varphi = \\
&= \iint |(t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}(t)| dt d\varphi = \iint (t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}(t) dt d\varphi
\end{aligned}$$

- ???

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \\
&\left( (\operatorname{th}^2(t) \sin \varphi) (0) - \left( \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right) ((t - \operatorname{th}(t)) \cos \varphi), \right. \\
&\left( \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right) ((\operatorname{th}(t) - t) \sin \varphi) - (\operatorname{th}^2(t) \cos \varphi) (0), \\
&\left. (\operatorname{th}^2(t) \cos \varphi) ((t - \operatorname{th}(t)) \cos \varphi) - (\operatorname{th}^2(t) \sin \varphi) ((\operatorname{th}(t) - t) \sin \varphi) \right) = \\
&= \left( - \left( \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right) (t - \operatorname{th}(t)) \cos \varphi, \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right) (\operatorname{th}(t) - t) \sin \varphi, (t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}^2(t) \right) = \\
&\left| \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{\left( \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right)^2 ((t - \operatorname{th}(t)))^2 + ((t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}^2(t))^2} = \\
&= |t - \operatorname{th}(t)| \operatorname{th}^2(t) \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sh}^2(t)} + 1} = |(t - \operatorname{th}(t)) \operatorname{th}(t)| \operatorname{th}^2(t) = \operatorname{th}^3(t)(t - \operatorname{th}(t)) \\
n &= \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial F}{\partial \theta} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|} = \left( - \left( \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \right) \frac{1}{\operatorname{th}^2(t)} \cos \varphi, - \left( \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \right) \frac{1}{\operatorname{th}^2(t)} \sin \varphi, \frac{1}{\operatorname{th}(t)} \right) \\
&\frac{\partial F}{\partial t} = \left( \operatorname{th}^2(t) \cos \varphi, \operatorname{th}^2(t) \sin \varphi, \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} \right) \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \left( 2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \operatorname{th}(t) \cos \varphi, 2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \operatorname{th}(t) \sin \varphi, \frac{\operatorname{ch}^3(t) - 2 \operatorname{sh}^2(t) \operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^4(t)} \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \bar{n} \rangle = ?$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi} = (?, ?, ?)$$

$$\Rightarrow M = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi}, \bar{n} \rangle = ?$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-(t - \operatorname{th}(t)) \sin \varphi, (t - \operatorname{th}(t)) \cos \varphi, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = (?, ?, ?)$$

$$\Rightarrow N = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \bar{n} \rangle = ?$$

$$\Rightarrow \Pi(F) = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det \Pi(F)}{\det I(F)} = ? - \text{кривизна Гаусса}$$

## 0.7 (08.10.2019) Практика совместно с 242

### Пример (стереографическая проекция)

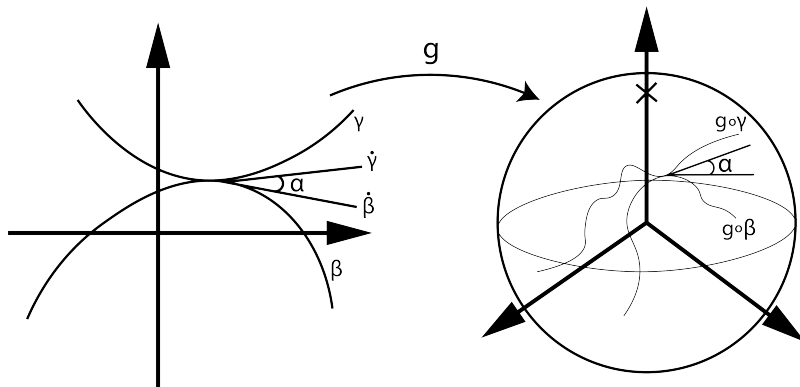
$$f : S^2 - \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

$$\text{где } S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

1. Найдите  $f^{-1} = g : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$  (полюс)
2. Доказать, что  $g$  сохраняет углы
3. Найдите  $I(F)$  (п.ф.ф.)  $g$

\*здесь должен быть рисунок, но его нет, как и смысла\*

### Решение



1. Надо найти  $g : f \circ g = \text{id}$  и  $g \circ f = \text{id}$

$$a = \frac{x}{1-z}, \quad b = \frac{y}{1-z}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Найдем из уравнений  $x, y, z$ :

$$z = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}, \quad x = \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \quad y = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}$$

2. Вспомним, что

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\beta} \rangle}{|\dot{\gamma}| |\dot{\beta}|}, \quad \cos(\theta) = \frac{\langle \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\beta}} \rangle}{|\dot{\tilde{\gamma}}| |\dot{\tilde{\beta}}|}$$



$$\tilde{\gamma} = g \circ \gamma \quad \tilde{\beta} = g \circ \beta$$

$$\tilde{\gamma} = \left( \frac{2\gamma_1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 1}, \frac{2\gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 1}, \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 1} \right)$$

Аналогично другие. Можно было бы посчитать всё и подставить

$$\frac{d}{dt}\tilde{\gamma} = \frac{\partial g}{\partial a}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial b}\dot{\gamma}_2$$

Обозначим  $\star = a^2 + b^2 + 1$

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \left( \frac{2\star - 4a^2}{\star^2}, \frac{2\star - 4b^2}{\star^2}, \frac{4b}{\star^2} \right)$$

$$I(F) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial g}{\partial a}, \frac{\partial g}{\partial a} \right\rangle^{\rho} & \left\langle \frac{\partial g}{\partial b}, \frac{\partial g}{\partial a} \right\rangle^0 \\ \left\langle \frac{\partial g}{\partial a}, \frac{\partial g}{\partial b} \right\rangle_0 & \left\langle \frac{\partial g}{\partial b}, \frac{\partial g}{\partial b} \right\rangle^{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

То есть на самом деле:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\beta}} \rangle}{|\dot{\tilde{\gamma}}||\dot{\tilde{\beta}}|} = \frac{\langle \dot{\gamma}, I\dot{\beta} \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\gamma}, I\dot{\gamma} \rangle} \sqrt{\langle \dot{\beta}, I\dot{\beta} \rangle}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= \left\langle \frac{\partial g}{\partial a}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial b}\dot{\gamma}_2, \frac{\partial g}{\partial a}\dot{\gamma}_1 + \frac{\partial g}{\partial b}\dot{\gamma}_2 \right\rangle \\ \langle \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma} \rangle &= \left\langle \frac{\partial g}{\partial a}, \frac{\partial g}{\partial a} \right\rangle \dot{\gamma}_1^2 + 2 \left\langle \frac{\partial g}{\partial a}, \frac{\partial g}{\partial b} \right\rangle \dot{\gamma}_1 \dot{\gamma}_2 + \left\langle \frac{\partial g}{\partial b}, \frac{\partial g}{\partial b} \right\rangle \dot{\gamma}_2^2 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix}, I \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \frac{\rho \langle \dot{\gamma}, \dot{\beta} \rangle}{\sqrt{\rho}|\dot{\gamma}|\sqrt{\rho}|\dot{\beta}|} &= \frac{\rho \langle \dot{\gamma}, \dot{\beta} \rangle}{\rho|\dot{\gamma}||\dot{\beta}|} = \frac{\langle \dot{\gamma}, \dot{\beta} \rangle}{|\dot{\gamma}||\dot{\beta}|} = \cos \alpha \end{aligned}$$

3. см. выше

## 0.8 (15.10.2019) Практика совместно с 242 х2

### Пример

$$f : \mathbb{R}_+^* \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u, v \mapsto \left( \frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, u - \operatorname{th} u \right)$$

1. Найдите  $I(F)$
2. Найдите  $\Pi(F)$
3. Найдите кривизну Гаусса
4. Найдите площадь поверхности

### Решение

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left( -\frac{\cos v \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}, -\frac{\sin v \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}, \overbrace{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}}^{\operatorname{th}^2 u} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left( -\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, \frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, 0 \right)$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle = \operatorname{th}^2$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}$$

$$\Rightarrow I(F) = \begin{pmatrix} \operatorname{th}^2 u & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial u} = \left( -\cos v \frac{\operatorname{th}^2 u}{\operatorname{ch} u}, \sin v \frac{\operatorname{th}^2 u}{\operatorname{ch} u}, -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^3 u} \right)$$

$$\left| \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial u} \right| = \frac{\operatorname{th} u}{\operatorname{ch} u}$$

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial u}}{\left| \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial F}{\partial u} \right|} = \left( -\operatorname{th} u \cos v, -\operatorname{th} u \sin v, -\frac{1}{\operatorname{ch} u} \right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} &= \left( -\frac{\cos v}{\operatorname{ch} u}, -\frac{\sin v}{\operatorname{ch} u}, 0 \right) \\ L &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, \bar{n} \right\rangle = -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} &= \left( \quad, \quad, 0 \right) \\ M &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}, \bar{n} \right\rangle = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} &= \left( -\cos v \frac{1 - \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch}^3 u}, -\sin v \right) \\ N &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \bar{n} \right\rangle = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \\ \Rightarrow \Pi(F) &= \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} u & 0 \\ 0 & \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$A(S) = 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} du dv = 2 \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} du = 4\pi$$

### Пример

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))$$

При каких условиях на  $I(F)$   $F$  "сохраняет расстояние" (доказать)

### Решение

$$l(\gamma) \stackrel{?}{=} l(F \circ \gamma) = \int_0^1 \|(F \circ \gamma)\| dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{\frac{1}{2}} dt \stackrel{\forall \gamma}{=} \int_0^1 \langle \dot{\gamma}, I(F) \dot{\gamma} \rangle dt$$

$$\text{т.к. } \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \langle \dot{\gamma}, I(F) \dot{\gamma} \rangle \quad \forall \gamma$$

$$I(F) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \text{ортогональная}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = b \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - cb = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{т.к. } a, d > 0 \Rightarrow I(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Пример

Сделаем цилиндр из плоскости с сохранением расстояния

$$u, v \xrightarrow{F} (\cos v, \sin v, u)$$

$$I(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 0.9 (22.10.2019) Завершаем тему

### Пример

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi$  - регулярная поверхность

Такая что  $\forall u \in \mathbb{R}^2$  (отк)

Площадь:  $\mathcal{A}(\varphi(u)) = \mathcal{A}(u)$

1. Доказать, что  $\det(I(\varphi)) = 1$
2. Доказать, что  $\varphi$  сохраняет углы и площади  $\Leftrightarrow \varphi$  сохраняет расстояние

### Док-во

1.  $\iint_U \sqrt{\det I(\varphi)} du dv = \mathcal{A}(u) = \iint_u du dv \quad \forall u \in \mathbb{R}^2 \text{ отк.}$

$$\iint_u (\sqrt{\det I(\varphi)} - 1) du dv = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^2$$

Но  $\varphi \in C^1 \Rightarrow \sqrt{\det I(\varphi)} - 1$  непр.

Предположим, что  $\sqrt{\det I(\varphi)} - 1 \neq 0 \Rightarrow \exists (u_0, v_0)$  т.ч.  $\sqrt{\det I(\varphi)}_{(u_0, v_0)} - 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \exists V \ni (u_0, v_0) \text{ т.ч. } \forall (u, v) \in V, \quad \sqrt{\det I(\varphi)} - 1 \neq 0$$

$$\forall (u, v) \in V \quad \sqrt{\det I(\varphi)} - 1 > 0$$

Тогда  $\iint_V \sqrt{\det I(\varphi)} - 1 > 0$  - противоречие

Значит, что  $\det I(\varphi) = 1$

2. ???

### Замечание

Есть такая теорема:

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow TOR \subset \mathbb{R}^3$$

$$\varphi \in C^1 \text{ т.ч. } I(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Опр

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$$

### Опр

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

### Пример

Доказать, что  $\mathbb{R}^4 \supseteq S^3 \cong SU(2)$

### Док-во

Мы можем перейти  $SU(2) \rightarrow S^3$ , расписав через  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$ . Получится подобное уравнение как в  $S^3$ , аналогично назад:

$$\varphi : S^3 \rightarrow SU(2) \subset \mathbb{R}^8$$

$$x, y, z, t \rightarrow \begin{pmatrix} x + iy & -z + it \\ z + it & x - iy \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^8$$

Непрерывная функция компактна, значит Хаусдорф

## 0.10 (29.10.2019) Кривые и поверхности

### Пример

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^2$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\}$$

Найти кривизну Гаусса

### Док-во

$$V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi} (x, y, f(x, y))$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} - \text{ЛН} \Rightarrow \text{поверхность регулярная}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

$$I(F) = \begin{pmatrix} 1 + f''_{xx} & f'_x f'_y \\ f'_x f'_y & 1 + f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$II(F) = \frac{1}{\sqrt{1 + f''_{xx} + f''_{yy}}} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det(II)}{\det(I)}$$

### Пример

$$f : V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x) = y\}$$

Найти кривизну  $\gamma$

## Напоминание

$$\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma \in C^2$$

$$t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = 1$$

$$\text{Тогда } \varkappa(t) = |\ddot{\gamma}(t)|$$

## Док-во