Лекции по геометрии, 3 сем

(преподаватель Солынин А. А.)
Записали Костин П.А., Щукин И.В.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей (в $\mathbb{R}^3$)

1.1 Дифференциальная геометрия кривых

1.1.1 Понятие кривой

Определение

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
2. Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ (особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)
3. Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x, y) = 0$

Пример

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Теорема (о неявной функции)

$F(x, y) = 0$, F - дифференцируема ($\exists \frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}$ - в окр. (x_0, y_0)). $F(x_0, y_0) = 0$

Если $\frac{dF}{dy}(x_0, y_0) \neq 0 \to \exists \mathcal{E} > 0\ \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + E) \subset \mathbb{R}\ F(x, f(x)) = 0$

Напоминание

$$\frac{dF}{dx}|_{(x_0,y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x,y_0) - F(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$y = f(x) \to \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$

$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0$: если $\rho(t, t_0) < \delta$, то $\rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$ ($\rho(t, t_0) = |t - t_0|$, $f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}$)

Св-ва пределов:

1. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t) \pm g(t)) = \lim f(t) + \lim g(t)$

2. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t); g(t)) = (\lim f(t); \lim g(t))$ - скалярное умножение

3. $\lim\limits_{t\to t_0}(f(t)xg(t)) = \lim f(t)x \lim g(t)$

Док-во

$\lim f(t) = (\lim x(t), \lim y(t), \lim z(t)),\ f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. *Пусть* $\mathcal{E} > 0$, *выберем* $\delta : |x(t) - x_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$, *аналогично* $|y(t) - y_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$ *и* $|z(t) - z_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$

Значит $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$

Определение

$f'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0)}{t - t_0}$

Свойство

1. $(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm y'(t)$

2. $(cf(t))' = cf'(t)$

3. $(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t), g'(t))$

4. $(f(t)xg(t))' = f'(t)xg(t) + f(t)xg'(t)$

5. $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

Доказывается через $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Докажем векторное произведение $(f(t)xg(t))'|_{t=t_0} = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)xg(t) - f(t_0)xg(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)xg(t) - f(t_0)xg(t) + f(t_0)xg(t) - f(t_0)xg(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{(f(t) - f(t_0))xg(t)}{t - t_0} + \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t_0)x(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = f'(t_0)xg(t_0) + f(t_0)xg'(t_0)$

Пример

Контрпример (т. Лагаранжа) - не всегда верна

Можно ли $\int\limits_a^b \overrightarrow{f}(t)dt = (\int\limits_a^b x(t)dt, \int\limits_a^b y(t)dt, \int\limits_a^b z(t)dt)$

$\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{f}(t)$

$\overrightarrow{F}(b) - \overrightarrow{F}(a) = \int\limits_a^b \overrightarrow{f}(t)dt$

$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$

$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$

$\int\limits_a^b f(t)dt = (\int\limits_a^b x(t)dt, ...) = (X(b) - X(a) + ...$ (по ф-ле Н-Л)

Определение

Гладкая кривая - образ вектороднозначнойя функция

Определение

Кривая называется регулярной, если
существует производная и $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$

Определение

Кривая называется бирегулярной, если
существует вторая производная и $f''(t) \not\parallel f'(t)$

Определение

Параметризации $\overrightarrow{f}(t)\overrightarrow{g}(t)$ $(f : [a, b] \to \mathbb{R}^3,\ g : [c, d] \to \mathbb{R}^3)$ *эквивалентны, если* $\exists$ *биекция* $\tau : [a, b] \to [c, d] : \tau(a) = c,\ \tau(b) = d,\ f(t) = g(\tau(t))$

Определение

Гладкая кривая - класс эквивалентности параметризации

Док-во

Докажем, что экв. параметризации - отношение эквивалентность:

1. *(рефл.)* $\tau = id$
2. *(симм.)* $f(t) = g(\tau(t)),\ g(t) = f(\tau(t))$
3. *(тран.)* $f(t) = g(b(t)),\ g(t) = h(\tau(t)),\ f(t) = h(\tau(b(t)))$

Лемма

$\overrightarrow{f}(t)$ *- вектор-функция (регулярная),* $|\overrightarrow{f}(t)| = 1 \to f'(t) \perp f(t)$

Док-во

$(f(t); f(t)) = 1 \to 0 = (f(t); f(t))' = 2(f'(t); f(t))$. $f(t) \neq 0$ *и*
$f'(t) \neq 0 \to f'(t) \perp f(t)$

Теорема

$$\overrightarrow{f}(t) - \overrightarrow{f}(t_0) + \overrightarrow{f}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\overrightarrow{f}''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + ... + \frac{\overrightarrow{f}^{(n)}}{n!}$$

$\overrightarrow{g}(t) = o(t - t_0)^n$, *если* $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\overrightarrow{g}(t)}{(t - t_0)^n} = \overrightarrow{0}$

1.1.2 Длина кривой

Определение

Пусть есть кривая $\overrightarrow{f}(t)$, $t \in [a, b]$

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

а) $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$

б) $\lim\limits_{\max\limits_{i=1..n} |t_i - t_{i-1}| \to 0} ...$

-длина кривой

Утверждение

Определения а) и б) эквивалентны

Определение

Прямая называется спрямляемой, если её длина конечна

Определение

Если $|\overrightarrow{f}(t)|$ *- интегр, то спрямляемая*

Пример

$y = \sin\frac{1}{x} \quad (0, 1]$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во

$\triangle_i t = t_i - t_{i-1}$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\triangle_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$

$$|\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant |\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^{n} |f'(\tau_i)| \triangle_i t| + \\ + |\sum_{i=1}^{n} |f'(\tau_i)| \triangle t_i| - \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = I + II$$

$$II \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||f'(\tau_i)| \triangle t_i - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^{n} ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \triangle_i t$$

$f'(t)$ *- непр на* $[a, b] \Rightarrow$ *равномерно непр. на* $[a, b]$*(т. Кантора)*

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$, *если* $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$$||f'(\tau_i)|-|f'(\sigma_i)||<\mathcal{E},\text{ если } |\sigma_i-\tau_i|<\delta$$

$$II\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\,\triangle_i\,t=\mathcal{E}(b-a)\underset{\mathcal{E}\to 0}{\to}0$$

$$||f'(\tau_i)|-|f(t_i)-f(t_{i-1})||\leqslant||f'(\tau_i)|-||f(t_i)|-|f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)|-|f(t_{i-1})|=|f(\sigma_i)|\triangle_i\,t$$

Определение

Параметризация $f:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ называется натуральной, если $|f'(t)|=1$

Лемма

Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, $\tau:[c,d]\to[a,b]$ - монотонная биекция ($\tau'>0$), тогда $f\circ\tau:[c,d]\to\mathbb{R}^3$
Длина кривой (f) не зависит от перепараметризации ($f\circ\tau$)

Док-во

$$\int_a^b|f'(t)|dt\overset{?}{=}\int_c^d|(f\circ\tau)(s)|ds$$

$$\int_c^d|(f\circ\tau)(s)|ds=\int_c^d|f'(\tau(s))\cdot\tau'(s)|ds=\int_c^d|f'(\tau(s))|\cdot\tau'(s)ds=\int_a^b|f'(t)|dt$$

$$t=\tau(s)$$

Теорема

Натуральная параметризация $\exists$ и единственная

Док-во

Существование
Хотим подобрать τ : $|f'(\tau(s))|=1$

$$\sigma(t)=\int_a^t|f'(s)|ds$$

$\sigma:[a,b]\to[0,S]$

S - *длина кривой*

σ - *возрастающая и дифф.* ($\sigma'(t)=|f'(t)|$)

σ - *биекция* $\Rightarrow\tau=\sigma^{-1}$

$$\int_0^t|(f\circ t)'(s)|ds=\int_0^t|f'(\tau(s))|\cdot t'(s)ds=$$

$$= \int_0^t |f'(\tau(s)| \frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|} ds = t$$

Единственность

$f(t)$ *и* $g(t)$ *- нат. параметризации*

$f, g : [0, s] \to \mathbb{R}^3$

$f - g$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)| dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)| dt \leqslant \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)|| dt = 0$$

Примеры

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)} dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = & r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y' = & r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} | = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 cos' 2\varphi + r^2 sin^2 \varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

1.1.3 Ренер Френе

Определение

$$\overrightarrow{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\overrightarrow{v} = f'(t)$ - *если параметризация натуральная*

v - *касательный вектор*

Определение

Прямая, содерж в $\overrightarrow{v}$ *наз. касательной к* $\overrightarrow{f}(t)$ *в точке* t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \overrightarrow{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \overrightarrow{g}(t)$$

$\overrightarrow{g}(t)$ - *ур-е касат. прямой*

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\overrightarrow{h} - \overrightarrow{f}(t_0)) = 0$$

Теорема

δ - *расстояние от* $f(t)$ *до касат. прямой*

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

Док-во