[2019-10-03]

Напоминание

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1) \qquad M,N \in C(G)$$

$y = \varphi(x)$ - реш (1), $x \in (a,b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M(x,\varphi(x)) + N(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на (a,b)

Опр

$u(x,y) \in C^1(G)$

Интл (1), если

1. хоть одна из $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ не 0 в $\forall$ обыкн. точке G
2. $N \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ в $G \qquad (4)$

$(5) \qquad u(x,y) = u(x_0,y_0) \qquad (x_0,y_0) \in G$

u - инт-л (1) в G

Теорема (2)

$N(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow$

рав-во (5) разрешимо отн y: его решение

$y = \varphi(x)$ опред на $(a,b) \quad x_0 \in (a,b) \quad \varphi(x_0) = y_0$

$y = \varphi(x)$ непр дифф на (a,b) и явля реш ур (1)

Док-во

$N(x_0,y_0) \neq 0 \Rightarrow N(x,y) \neq 0$ в нек. окр-ти $V(x_0,y_0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0 (\text{ из (4): если } \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = 0, \text{ то } \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = 0)$$

Противореч. с тем, что (x_0,y_0) - обыкн

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \neq 0 \text{ в нек. окр } \widetilde{V}(x_0,y_0)$$

$\Rightarrow$ теорема о неявн. функции $\quad \exists y = \varphi(x)$ - реш (5) : $y_0 = \varphi(x_0)$

$\varphi(x)$ - непр дифф $\qquad x \in (a, b) \quad (x_0 \in (a, b))$

$u(x, \varphi(x)) = u(x_0, y_0)$ на (a, b)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial x}}{\frac{\partial u(x,\varphi(x))}{\partial y}}$$

в (2) $M(...) + N(...) \left(-\frac{\frac{\partial u(...)}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}(...)}\right) =$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}(...)}[N(...)\frac{\partial u}{\partial x}(...) - M(...)\frac{\partial u(...)}{\partial y}] \equiv 0 \text{ в } G$$

Теорема (2)

Следствие

(x_0, y_0) - обыкн точка G, то рав-во (5)

разреши. отн y или отн x и его реш - реш (1)

$(M \neq 0$ или $N \neq 0)$

Опр

равн-во $u(x, y) = c$ - общ. инт-л (1)

Пример

$xdx + ydy = 0$

$\underbrace{x^2 + y^2}_{u(x,y)} = c$

1 Уравнения в полных дифф.

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$

Опр

(1) - ур в полных дифф, если

$\exists u(x, y) : \quad du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \qquad (2)$

$((1) : du = 0)$

Теорема (1)

(1) - ур в полных дифф $\Rightarrow u(x, y)$ - инт-л (1)

Док-во

1. $u(x, y)$ - непр дифф.
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = N \qquad (3)$
3. $N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y} = N \cdot M - M \cdot N \equiv 0$

Теорема

$$\text{если } \exists \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(G) \quad (1) \text{ - ур. в полных дифф}$$

$$\text{то } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ в } G \qquad (4)$$

Док-во

$$(1) \text{ - ур в п. дифф} \Rightarrow \exists u(x, y) \quad (2), (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$G = \{(x, y) : \; a < x < b, c < y < d\}$$

$$(\text{м.б } a = -\infty, \; c = -\infty \qquad b = +\infty, \; d = +\infty)$$

Теорема (3)

$$\exists \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \in C(G)$$

И вып (4) $\Rightarrow$ (1) - ур. в п. д.

Док-во

$$(x_0, y_0), (x, y) \in G$$

$$\forall t \in [x_0, x] \quad (t, y) \in G$$

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial x} = M(t, y) \text{ - инт от } x_0 \text{ до } x$$

$$u(x,y) - u(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt \qquad (5)$$

$$\forall t \in [y_0, y] \quad (x_0, y) \in G$$

$$\frac{\partial u(x_0,t)}{\partial y} = N(x_0,t) \text{ - инт от } y_0 \text{ до } y$$

$$u(x_0,y) - \underbrace{u(x_0,y_0)}_{\text{НУО }=0} = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt \qquad (6)$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt \qquad (7)$$

Проверяем, что это та функция, которая нужна

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + N(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt + N(x_0,y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt + N(x_0,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + N(x_0,y)$$

Замечание (1)

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt \qquad (7')$$

Утв

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad \text{Вып (4)} \quad G \text{ - односвяз.}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_{\Gamma} M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad \text{(8) - криволин. инт}$$

Γ - любая кривая, соед $(x_0,y_0),(x,y)$

Условие (4) гарантирует нам, что криволин. интеграл не зависит от кривой интегрирования

Замечание (2)

Прямоугольность области G не требуется по-существу, нужна только односвязность (отсутсвие дырок или возможность стянуть любой путь в точку)

Опр

$$(1) \qquad \mu = \mu(x,y) \in C(G) \qquad \mu(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in G$$

μ - интегр мн-ль для (1), если

$$(9) \quad (\mu M)dx + (\mu N)dy = 0 \text{ - ур. в п. д}$$

$$\exists M, N, \mu \in C^1(G) \quad (G \text{ - односвяз})$$

$$(9) \text{ - ур в п.д.} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (1)$$

Частный случай 1

$\underline{\mu = \mu(x)}$

$$\text{из (10):} \frac{d\mu}{dx} N = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (11)$$

$$N = f(x)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = f(x)dx$$

$$\mu = e^{\int f(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}$$

Частный случай 2

$\underline{\mu = \mu(y)}$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \qquad (12)$$

$$M = g(y)$$