

Содержание

11.10.19 Условные экстремумы

$$u = f(x_1, \dots, x_n) \text{ при усл } \begin{cases} \Phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad m < n$$

1. Точка недифф-ти f или Φ_i

2. $\text{rk } \Phi' < m$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

3. $\mathcal{L} = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 \Phi_1(x_1, \dots, x_n) - \lambda_2 \Phi_2(x_1, \dots, x_n) - \dots - \lambda_m \Phi_m(x_1, \dots, x_n)$

Точка экстремума удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \Phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad m + n \text{ уравнений}$$

$m + n$ неизвестных $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$

Задача (1)

$$f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad a, b > 0 \text{ при усл. } x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{\Phi} = 0 \quad M$$

$$\Phi' = (2x \quad 2y) \quad 1 \text{ ур-е} \Rightarrow 1 \text{ строка в матрице}$$

$$\text{rk } \Phi' < 1 \Rightarrow \text{rk } \Phi' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \notin M$$

$$\forall (x, y) \in M \quad \text{rk } \Phi' = 1$$

$$\mathcal{L} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = \frac{1}{a} - 2\lambda \cdot x = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 & x = \frac{1}{2a\lambda} \\ \mathcal{L}'_y = \frac{1}{b} - 2\lambda \cdot y = 0 \Rightarrow & y = \frac{1}{2b\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4a^2\lambda^2} + \frac{1}{4b^2\lambda^2} = 1$$

$$\frac{b^2 + a^2}{4a^2b^2\lambda^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 4a^2b^2\lambda^2$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}$$

$$1. \begin{cases} x = \frac{1 \cdot 2ab}{2a\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda = + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \end{cases}$$

Выясним, что будет в этих точках

$$\mathcal{L}''_{x^2} = -2\lambda$$

$$\mathcal{L}''_{xy} = 0$$

$$\mathcal{L}''_{y^2} = -2\lambda$$

$$\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 2\lambda \quad \Delta_2 = 4\lambda^2$$

для 1. - + max
 2. + + min

Задача (2)

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a > b > c > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\Phi' = \left(\frac{2x}{a^2} \quad \frac{2y}{b^2} \quad \frac{2z}{c^2} \right)$$

$$\text{rk } \Phi' = 0 \Rightarrow \quad x = y = z = 0 \quad (0, 0, 0) \notin M$$

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 2x - \frac{2x\lambda}{a^2} = 0 \Rightarrow x(1 - \frac{\lambda}{a^2}) = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 2y - \frac{2y\lambda}{b^2} = 0 \Rightarrow y(1 - \frac{\lambda}{b^2}) = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 2z - \frac{2z\lambda}{c^2} = 0 \Rightarrow z(1 - \frac{\lambda}{c^2}) = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

$$1 - \frac{\lambda}{b^2} = 0 \Rightarrow \lambda = b^2$$

$$x = z = 0 \quad y = \pm b$$

$$1 - \frac{\lambda}{c^2} = 0 \Rightarrow \lambda = c^2$$

$$x = y = 0 \quad z = \pm c$$

$$1 - \frac{\lambda}{a^2} = 0$$

$$\lambda = a^2 \quad 1 - \frac{a^2}{b^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$$1 - \frac{a^2}{c^2} \neq 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda = a^2 \end{cases}$$

$$6 \text{ решений } (\pm a \ 0 \ 0 \ a^2) \quad (0 \ \pm b \ 0 \ b^2) \quad (0 \ 0 \ \pm c \ c^2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{2\lambda}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2\lambda}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{2\lambda}{c^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 - \frac{2\lambda}{a^2} = 2(1 - \frac{\lambda}{a^2})$$

$$\Delta_2 = 4(1 - \frac{\lambda}{a^2})(1 - \frac{\lambda}{b^2})$$

$$\Delta_3 = 8(1 - \frac{\lambda}{a^2})(1 - \frac{\lambda}{b^2})(1 - \frac{\lambda}{c^2})$$

$$1. \lambda = a^2 \quad 0, 0, 0$$

$$2. \lambda = b^2 \quad 1 - \frac{b^2}{a^2} > 0, 0, 0$$

$$3. \lambda = c^2 \quad 1 - \frac{c^2}{a^2} > 0, (1 - \frac{c^2}{a^2})(1 - \frac{c^2}{b^2}) > 0, 0$$

Но у нас 2 независимые переменные

$$d^2 \mathcal{L} = 2(1 - \frac{\lambda^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{\lambda}{b^2})(dy)^2 + 2(1 - \frac{\lambda}{c^2})(dz)^2$$

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0$$

- линейная однородная система относительно диф-лов

dx, dy, dz - зависимы между собой

В точке $(\pm a, 0, 0, a^2)$ - максимум

$$\frac{\pm 2a}{a^2}dx = 0 \Rightarrow dx \equiv 0$$

$$d^2 \mathcal{L} = 2(1 - \frac{a^2}{b^2})(dy)^2 + 2(1 - \frac{a^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{a^2}{b^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{a^2}{c^2}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2(1 - \frac{a^2}{b^2}) < 0 \\ \Delta_2 = 4(1 - \frac{a^2}{b^2})(1 - \frac{a^2}{c^2}) > 0 \\ - \quad + \quad \text{максимум} \end{array}$$

В точке $(0, \pm b, 0, b^2)$ нет экстремума

$$\pm \frac{2b}{b^2}dy = 0 \Rightarrow dy = 0$$

$$d^2 \mathcal{L} = 2(1 - \frac{b^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{b^2}{c^2})(dz)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{b^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{b^2}{c^2}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2(1 - \frac{b^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = 4(1 - \frac{b^2}{a^2})(1 - \frac{b^2}{c^2}) < 0 \\ + \quad - \quad \text{нет экстремума} \end{array}$$

В точке $(0, 0, \pm c, c^2)$ - минимум

$$\pm \frac{2c}{c^2}dz = 0 \Rightarrow dz = 0$$

$$d^2 \mathcal{L} = 2(1 - \frac{c^2}{a^2})(dx)^2 + 2(1 - \frac{c^2}{b^2})(dy)^2$$

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \frac{c^2}{a^2}) & 0 \\ 0 & 2(1 - \frac{c^2}{b^2}) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 2(1 - \frac{c^2}{a^2}) > 0 \\ \Delta_2 = 4(1 - \frac{c^2}{a^2})(1 - \frac{c^2}{b^2}) > 0 \\ + \quad + \quad \text{минимум} \end{array}$$

Задача (3)

$$u = xy + yz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad M$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rk } \Phi' < 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{противоречие с } x^2 + y^2 = 2$$

$$\forall (x, y) \in M \quad \text{rk } \Phi' = 2$$

$$\mathcal{L} = xy + yz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(y + z - 2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y - 2\lambda_1 x & = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x + z - 2\lambda_1 y - \lambda_2 & = 0 \\ \mathcal{L}'_z = y - \lambda_2 & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 2 \\ y + z & = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \neq 0 \quad \lambda_1 = \frac{y}{2x}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 - \text{противореч с } x^2 + y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + z - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = z \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x + 2 - y - \frac{y^2}{x} - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 - y \end{cases} \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ x^2 + 2(1-y)x - y^2 = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ 2 - 2y^2 + 2(1-y)x = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{y}{2x} \\ \lambda_2 = y \\ (1-y)(1+y) + x(1-y) = 0 \\ x^2 = 2 - y^2 \\ z = 2 - y \end{cases}$$

$$(1-y)(1+y+x) = 0$$

$$1. \quad y = 1$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$z = 2 - y = 1$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{2}$$

$$(1) \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$2. \quad 1 + y + x = 0$$

$$x = -1 - y$$

$$(-1 - y)^2 = 2 - y^2 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$y^2 + 2y + 1 = 2 - y^2 \quad z = 1 - \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{-2 + 1 \mp \sqrt{3}}{2}$$

$$2y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_1 = \dots \\ \lambda_2 = \dots \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ z = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ \lambda_1 = \dots \\ \lambda_2 = \dots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= -2\lambda_1 \\ \Delta_2 &= 4\lambda_1^2 - 1 \\ \Delta_3 &= -1 \begin{vmatrix} -2\lambda_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda_1 \end{aligned}$$

В (1) - 0 + экстр. нет?

В (2) + 0 - экстр. нет?

$$d^2\mathcal{L} = (-2\lambda_1)(dx)^2 + 2dxdy + (-2\lambda_1)(dy)^2 + 2dydz$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$$

В точке $(1, 1, 1)$

$$\begin{cases} dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx = -dy \\ dz = -dy \end{cases}$$

$$d^2\mathcal{L} = (-dy)^2 + 2(-dy)dy - (dy)^2 + 2dy(-dy) = (-6)(dy)^2$$

(-6) матрица из одного элемента

$$\Delta_1 < 0 \quad - \max$$

В точке $(1, 1, 1) \quad \lambda = -\frac{1}{2}$

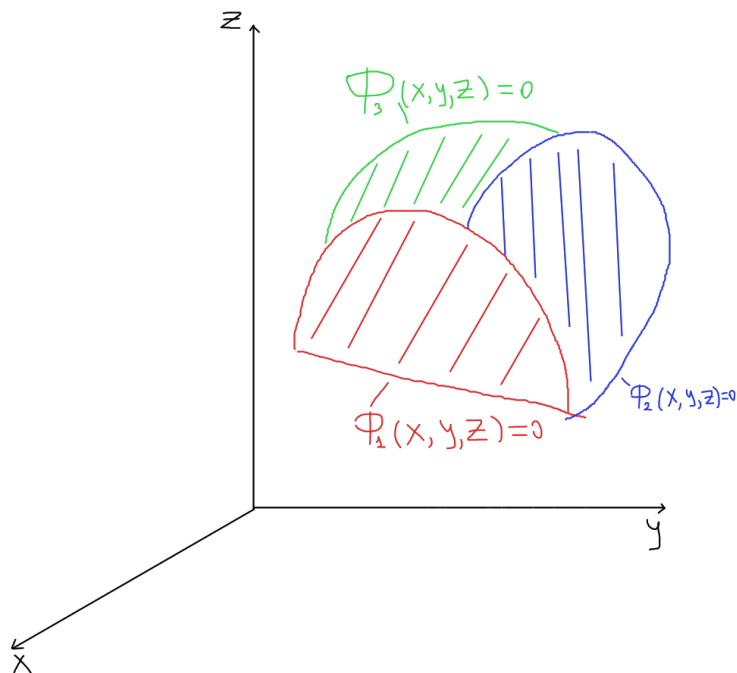
$$\begin{cases} -dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx = dy \\ dz = -dy \end{cases}$$

$$d^2\mathcal{L} = 1 \cdot (dy)^2 + 2dydy + 1 \cdot (dy)^2 + 2dy \cdot (-dy) = 2(dy)^2$$

$$(2) \quad \Delta_1 > 0 \quad \Rightarrow \min$$

$$(-1, 1, 1) \quad - \min$$

наиб. и наим. значения функций от нескольких перемен.



Опр

наиб и наим знач. ф. $u = f(x, y, z)$ на E

1. внутри $E \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$ - реш. системы

(только принадлежащие E . Решения могут лежать вне E)

Или точка недифф.

2. На участке $\Phi_1(x, y, z) = 0$

(а) точка недифф-ти

(б) $\text{rk } \Phi'_1 < 1$

(с) $\mathcal{L} = f - \lambda_1 \Phi_1$

«Не нужно считать 2 пр-дные и делать лишнее!»

3. На участке $\Phi_2(x, y, z) = 0$

Аналогично

4. На $\Phi_3(x, y, z) = 0$ Аналогично

5. на ребре

$$\begin{cases} \Phi_1 = 0 \\ \Phi_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Не дифф

(b) $\text{rk} \begin{pmatrix} \Phi'_1 \\ \Phi'_2 \end{pmatrix} < 2$

(c) $\mathcal{L} = f - \lambda_1 \Phi_1 - \lambda_2 \Phi_2$

6. на ребре

7. на ребре

8. в точках

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \\ \Phi_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Все точки проверяем на $\in E$

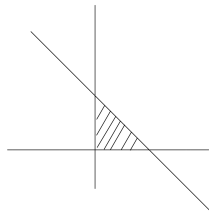
$f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2), \dots$ выбираем точку с наиб наим знач.

Задача (1)

$$z = x^2 - xy + y^2$$

на мн-ве $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$

1)

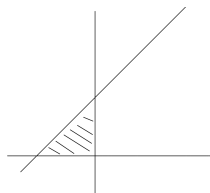


$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + y \leq 1$$

2)

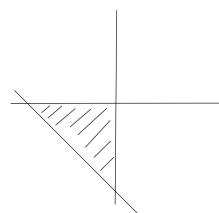


$$x < 0$$

$$y \geq 0$$

$$-x + y \leq 1$$

3)

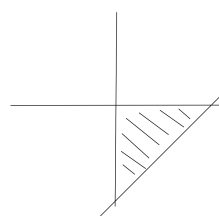


$$x < 0$$

$$y < 0$$

$$-x - y \leq 1$$

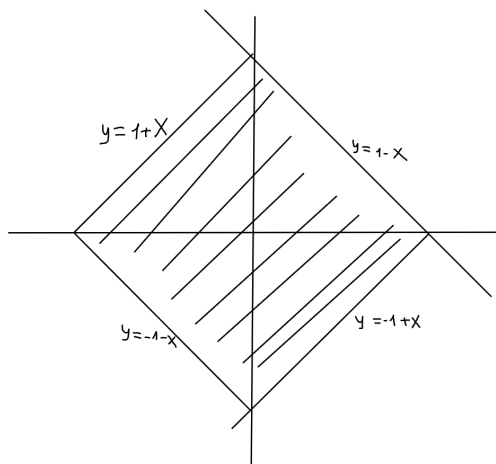
4)



$$x \geq 0$$

$$y < 0$$

$$x - y \leq 1$$



1)

$$z'_x = 2x - y = 0$$

$$z'_y = -x + 2y = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ 4x - x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ВХОДИТ В МНОЖЕСТВО}$$

2)

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ z = x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 3x^2 - 3x + 1 \end{cases}$$

$$z'_x = 6x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ВХОДИТ В МН-ВО}$$

3)

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = x^2 - x(x - 1) + (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$z'_x = 2x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Догадались о симметрии

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Входят в множество

4)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$z(0, 0) = 0 \leftarrow \min$$

$$z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$z(1, 0) = 1$$

$$z(-1, 0) = 1$$

$$z(0, 1) = 1$$

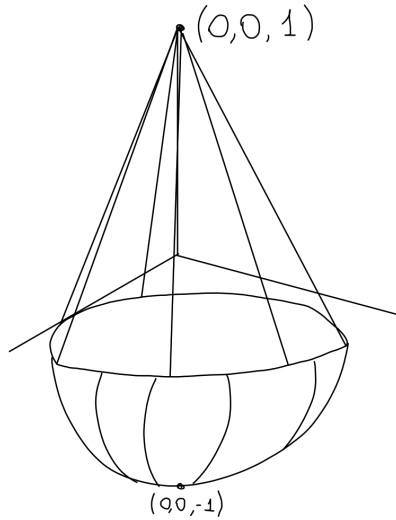
$$z(0, -1) = 1 \leftarrow \max$$

Задача (2 Найти max min)

$$u = x + y + 2z$$

на мн-ве $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2, \quad (z \leq 1), \quad z \geq x^2 + y^2\}$

$x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2$ - конус



1)

$$\begin{cases} u'_x = 1 & \neq 0 \\ u'_y = 1 & \neq 0 \\ u'_z = 2 & \neq 0 \end{cases}$$

Внутри точек нет

$$2) \quad \text{на } x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z - 1) \end{pmatrix} < 1$$

$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$ на пов-ти

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \in E$$

$$\begin{cases} \mathcal{L} = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - (z - 1)^2) \\ \mathcal{L}'_x = 1 - 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 1 - 2y\lambda = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 2 + 2\lambda(z - 1) = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$1 + 1 = 4 \quad \nexists$$

$$3) \text{ на } x^2 + y^2 - z - 1 = 0$$

$$\Phi' = (2x, \quad 2y, \quad -1)$$

$$\text{rk } \Phi' = 1$$

$$\mathcal{L} = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 - z - 1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1 - 2\lambda x = 0 & x = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \\ \mathcal{L}'_y = 1 - 2\lambda y = 0 & y = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{4} \\ \mathcal{L}'_z = 2 + \lambda = 0 & \lambda = -2 \\ x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - 1 = z \quad z = -\frac{14}{16} = -\frac{7}{8}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = -\frac{7}{8} \end{cases}$$

$$4)$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & -2(z-1) \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & -2(z-1) \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -2x + 4x(z-1) = 2x(-1+2z-2) = 2x(2z-3) = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2y & -2(z-1) \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = 2y(2z-3) = 0$$

$$x = 0$$

$$1) \ y = 0$$

$$z = -1$$

1 - ур не вып.

$$2) \ z = \frac{3}{2}$$

Но $z \leq 1$ не входит в E

5)

$$\mathcal{L} = x + y + 2z - \lambda_1(x^2 + y^2 - (z-1)^2) - \lambda_2(x^2 + y^2 - z - 1)$$

Закончить дома

Дз 3657 б

3663 а

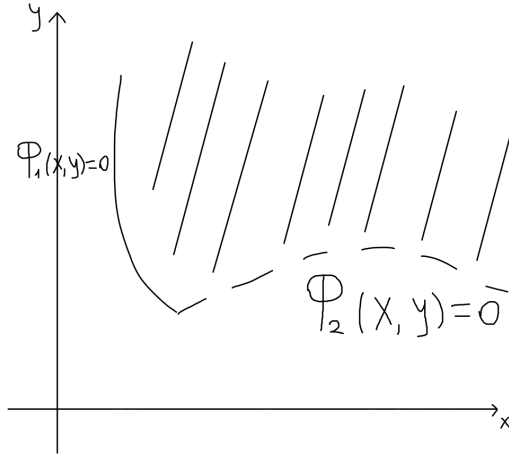
3668

18.10.19

Опр

$E \subset \mathbb{R}^2$ - не замк. и не огр f - непр

$$\exists \sup_{(x,y) \in E} f(x,y) \quad \inf_{(x,y) \in E} f(x,y)$$



$$\exists (x_n, y_n) \in E : f(x_n, y_n) \rightarrow \sup f$$

$$\exists \{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$$

$$x_{n_k} \rightarrow a, \quad y_{n_k} \rightarrow b$$

$$x_{n_k} \rightarrow a, \quad y_{n_k} \rightarrow \pm\infty$$

$$x_{n_k} \rightarrow +\infty, \quad y_{n_k} \rightarrow b$$

$$x_{n_k} \rightarrow \pm\infty, \quad y_{n_k} \rightarrow \pm\infty$$

$$x_{n_k} \rightarrow -\infty, \quad y_{n_k} \rightarrow b$$

Если $(a, b) \in E$, то $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(a, b)$

т.е $f(a, b) = \sup = \max$

Если $(a, b) \notin E$, то $(a, b) \in \text{Fr } E$
Граница

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \sup f$$

$$\begin{array}{ccc} f(x_{n_k}, y_{n_k}) & \rightarrow & \lim f(x, y) \\ x_{n_k} \rightarrow +\infty & & x \rightarrow +\infty \\ y_{n_k} \rightarrow b & & y \rightarrow b \end{array}$$

Подозр. точки

1. Внутри

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

2. На уч-ке $\Phi_1(x, y) = 0$

$$\text{rk } \Phi'_1 < 1$$

$$\text{или } \mathcal{L} = f - \lambda \Phi_1$$

3. На участке $\Phi_2(x, y) = 0$

$$\begin{array}{ccc} \lim f(x, y) & = & f(a, b) \\ x \rightarrow a & & \\ y \rightarrow b & & \end{array}$$

$$\mathcal{L} = f(a, b) - \lambda \Phi_2(a, b)$$

4. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y)$

$$\begin{array}{ccc} \lim f(x, y) & & \\ x \rightarrow +\infty & & \\ y \rightarrow b & & \end{array}$$

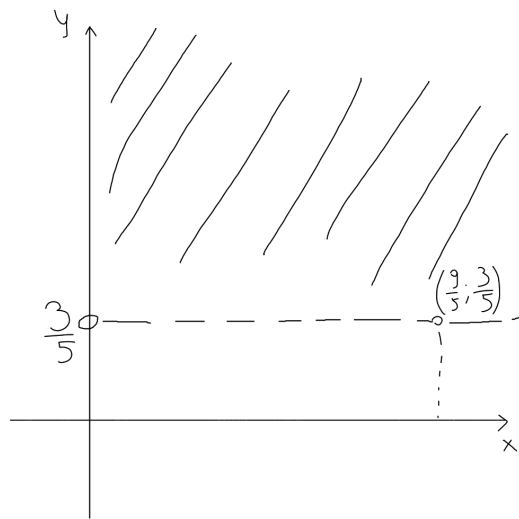
$$\begin{array}{ccc} \lim f(x, y) & & \\ x \rightarrow +\infty & & \\ y \rightarrow +\infty & & \end{array}$$

Если наиб - предел, то \sup не достигается, иначе достигается

Задача (1)

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x-2y}$$

$$\sup, \inf \text{ на множестве } E = \{(x, y) \mid x \geq 0, y > \frac{3}{5}\}$$



1) внутри

$$\begin{cases} f'_x = 2xe^{-x-2y} - (x^2 + y^2)e^{-x-2y} = 0 \\ f'_y = 2ye^{-x-2y} - 2(x^2 + y^2)e^{-x-2y} = 0 \end{cases}$$

$$e^{-x-2y} \neq 0$$

$$\begin{cases} 2x - (x^2 + y^2) = 0 \\ 2y - 2(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = x^2 + y^2 \\ y = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$y = 2x$$

$$2x = x^2 + 4x^2$$

$$5x^2 - 2x = 0$$

$$x(5x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \notin E \text{ и не явл. границей}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \in E$$

2) на участке $x = 0, \quad y > \frac{3}{5}$

Просто подставим $x = 0$ (можно без ф. Лагранжа)

$$f(0, y) = y^2 e^{-2y}$$

$$f' = 2ye^{-2y} - 2y^2 e^{-2y} = 0 \quad e^{-2y} \neq 0 \quad \text{делим}$$

$$2y - 2y^2 = 0$$

$$y(1 - y) = 0$$

$$y = 0 \notin E$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \in E$$

3) на участке границы $y = \frac{3}{5}, x \geq 0$

т.к непр на все плоск.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow \frac{3}{5}}} (x^2 + y^2)e^{-x-2y} &= (a^2 + \frac{9}{25})e^{-a-\frac{6}{5}} \quad a \geq 0 \\ & \end{aligned}$$

$$((a^2 + \frac{9}{25})e^{-\frac{6}{5}}e^{-a})' = e^{-\frac{6}{5}}(2ae^{-a} - (a^2 + \frac{9}{25})e^{-a}) = 0$$

$$2a - a^2 - \frac{9}{25} = 0$$

$$25a^2 - 50a + 9 = 0$$

$$d = 2500 - 900 = 400^2$$

$$a_{1,2} = \frac{50 \pm 40}{50} = \frac{9}{5}, \quad \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{9}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

4) угловые точки

$(0, \frac{3}{5})$ на границе, не берем

Значения:

$$f(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = (\frac{4}{25} + \frac{16}{25})e^{-\frac{2}{5}-\frac{8}{5}} = \frac{4}{5}e^{-2} \approx 0,108$$

$$f(0, 1) = (0 + 1)e^{-0-2} = e^{-2} \approx 0,135..$$

т.к. f -непр \Rightarrow предел = значению

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{25} \\ y \rightarrow \frac{1}{5}}} f(x, y) = \left(\frac{1}{25} + \frac{9}{25}\right)e^{-\frac{1}{5} - \frac{6}{5}} = \frac{2}{5}e^{-\frac{7}{5}} \approx 0,099..$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{9}{25} \\ y \rightarrow \frac{1}{5}}} f(x, y) = \left(\frac{81}{25} + \frac{9}{25}\right)e^{-\frac{9}{5} - \frac{6}{5}} = \frac{18}{5}e^{-3} \approx 0,1792$$

(т.к предел, то sup не достигается)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \frac{3}{5}}} f(x, y) = \left(0 + \frac{9}{25}\right)e^{-0 - \frac{6}{5}} = \frac{9}{25}e^{-\frac{6}{5}} \approx 0,1084...$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow b}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow b}} (x^2 e^{-x} e^{-2y} + y^2 e^{-x} e^{-2y}) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 e^{-x} e^{-2y} + y^2 e^{-2y} e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 e^{-x} e^{-2y} + y^2 e^{-2y} e^{-x}) = 0$$

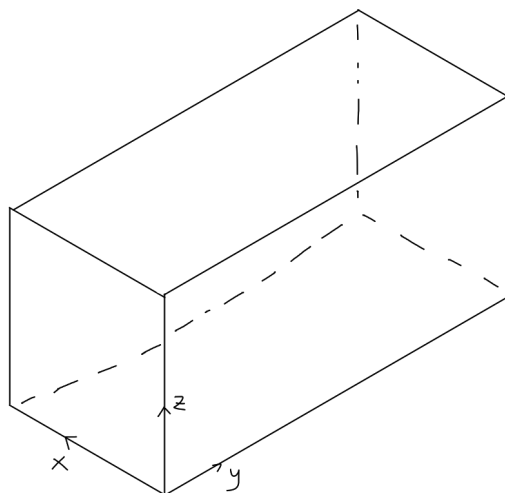
Наим - 0 - inf (не достиг., т.к. предел)

$$0 < (x^2 + y^2)e^{-x-2y} < \frac{18}{5}e^{-3}$$

$$(x, y) \in E$$

Задача (2)

При каких размерах открытая коробка постоянного объема имеет наим. поверхность?



1. постановка задачи

$$S = xy + 2xz + 2yz \quad x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0$$

$$V = xyz = \text{const}$$

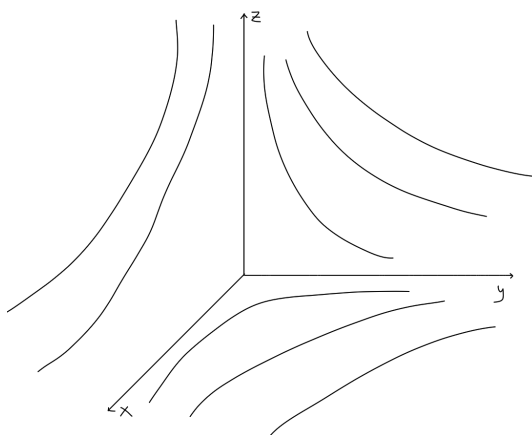
$$\Phi = xyz - V = 0$$

$$\Phi' = (yz, \quad xz, \quad xy)$$

$$\text{rk } \Phi' = 1$$

$$\mathcal{L} = xy + 2xz + 2yz - \lambda(xyz - V)$$

На этой пов-ти



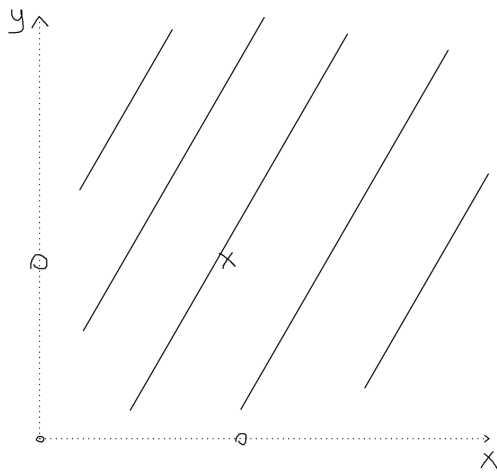
$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 0+ \\ z \rightarrow ?}} S = ?$$

2. постановка задачи

$$z = \frac{V}{xy}$$

$$S = xy + 2x \cdot \frac{V}{xy} + 2y \cdot \frac{V}{xy} = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$

Наим значение S в обл. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$



1) Внутри

$$\begin{cases} f'_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ f'_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{2V}{x^2}$$

$$x - \frac{2Vx^2}{4V^2} = 0$$

$$1 - \frac{x^3}{2V} = 0$$

$$x^3 = 2V$$

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

$$y = \frac{2V}{(2V)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{2V}$$

$$S(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = \sqrt[3]{4V^2} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{2V}{\sqrt[3]{2V}} = \sqrt[3]{4V^2} + 2\sqrt[3]{4V^2} = 3\sqrt[3]{4V^2}$$

2)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow 0+}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow a}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a > 0 \\ y \rightarrow +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow a > 0}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow +\infty}} (xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}) = +\infty$$

Наим. знач $3\sqrt[3]{4V^2}$

$$x = \sqrt[3]{2V}$$

$$y = \sqrt[3]{2V}$$

$$z = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}V}$$

2019-10-25

Неявные функции. Вычисл. их диф-лов, производных. Разложения неявных функций по ф-ле Тейлора

Напоминание

неявные ф-ии задаются системой ур-й

$$F_i \in C^1(G)$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

$m + n$ - перем. n - ур-ний

Теорема

Если сис-ма удовлетв-ся в точке $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ и в этой точке

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

То в окрестн. точки $(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ система однозн. разрешима и $f_k \in C^1(u(x_1^0, \dots, x_m^0))$

Если $F_i \in C^r(G) \Rightarrow f_k \in C^r(u(x_1^0, \dots, x_m^0))$

Вычислим диф-лы от каждого ур-я

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} dy_n = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} dy_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} dy_n = 0 \end{cases}$$

Линейная однородная система относительно dy_1, \dots, dy_n

\Rightarrow система однозначно разрешима (т.к.)

$$dy_1 = \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}_{\rightarrow} dx_1 + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial x_2}}_{\rightarrow} dx_2 + \dots + \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial x_m}}_{\rightarrow} dx_m +$$

...

$$dy_n = \dots dx_1 + \dots dx_2 + \dots + \dots dx_m$$

Задача (1)

$$F = z^3 - 3xyz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = z(x, y)$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$\text{Хотим найти } \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dots \quad (\text{В том числе в точке } (0, 1))$$

$$dF = -3yzdx - 3xzdy + (3z^2 - 3xy)dz = 0$$

$$3z_0^2 - 3x_0y_0 = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow dz = + \frac{yz}{z^2 - xy} dx + \frac{xz}{z^2 - xy} dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = + \frac{yz}{z^2 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = + \frac{xz}{z^2 - xy}$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 \Rightarrow z_0 = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 0$$

hint: Если нужны только в конкрет. точке, то проще подставить точку в ур-е

$$-3 \cdot 1 \cdot 1 dx - 3 \cdot 0 \cdot 1 dy + 3(1 - 0 \cdot 1) dz = 0$$

$$\Rightarrow dz = dx = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy$$

$$-yzdx - xzdy + (z^2 - xy)dz = 0$$

$$\text{hint: } d(P \cdot Q) = P \cdot dQ + Q \cdot dP$$

$$d(-yz)dx + (-yz)d^2x + d(-xz)dy + (-xz)d^2y + d(z^2 - xy)dz + (z^2 - xy)d^2z = 0$$

$$x, y - \text{ нез. перем. (т.к. } z - \text{ функция) } \Rightarrow d^2x, d^2y = 0$$

$$-dy \cdot z \cdot dx - y \cdot xz \cdot dx - dx \cdot z \cdot dy - x \cdot dz \cdot dy + (2zdz - ydx - xdy)dz + (z^2 - xy)d^2z = 0$$

d^2z через dx, dy

Если в конкретной точке: подставим точку $x = 0, y = 1, z = 1$

$$dz = dx \text{ (в этой точке)}$$

$$\begin{aligned} & -dy \cdot 1dx - 1 \cdot dx \cdot dx - dx \cdot 1 \cdot dy - 0 \cdot dx \cdot dy + \\ & + (2 \cdot 1dx - 1 \cdot dx - 0 \cdot dy)dx + (1^2 - 0 \cdot 1)d^2z = 0 \\ & -dy \cdot dx - (dx)^2 - dxdy + 2 \cdot (dx)^2 - (dx)^2 + d^2z = 0 \end{aligned}$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1) = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 1) = 0$$

Ф-ла Тейлора:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= z(0, 1) + \frac{1}{1!}dz + \frac{1}{2!}d^2z + O(\|h\|^3) = \\ &= 1 + dx + dxdy + O(\|h\|^3) \end{aligned}$$

Задача (2)

$$\begin{cases} x = u + \ln v \\ y = v + \ln u \\ z = 2u + v \end{cases} \quad x = 1, \quad y = 1 \Rightarrow u = 1, \quad v = 1, \quad z = 3$$

$u(x, y), \quad v(x, y), \quad z(x, y)$ - неявные функции

$$\begin{cases} x - u - \ln v = 0 \\ y - v + \ln u = 0 \\ z - 2u - v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & u & v & z \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{v} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{u} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{v} & 0 \\ \frac{1}{u} & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & -1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{uv} = 2 \neq 0$$

\Rightarrow условие теоремы выполнено

Найдем диф-лы

$$\left. \begin{aligned} dx &= du + \frac{1}{v}dv \\ dy &= dv - \frac{1}{u}du \\ dz &= 2du + dv \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{находим } du, dv, dz \text{ через } dx, dy$$

В точке $x = 1, \quad y = 1 \quad u = 1, \quad v = 1, \quad z = 3$

$$\left\{ \begin{aligned} dx &= du + dv \\ dy &= dv - du \\ dz &= 2du + dv \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} du &= \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy \\ dv &= \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy \\ dz &= \frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}dy \end{aligned} \right.$$

Вторые диф-лы

$$d^2x = 0 = d^2u + \left(-\frac{1}{v^2}\right)dv \cdot dv + \frac{1}{v}d^2v$$

$$d^2y = 0 = d^2v - \left(-\frac{1}{u^2}\right)du \cdot du - \frac{1}{u}d^2u$$

$$d^2z = 2d^2u + d^2v$$

В точке:

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= d^2u - \frac{1}{v^2}(dv)^2 + \frac{1}{v}d^2v = d^2u - (dv)^2 + d^2v \\ d^2v &+ (du)^2 - d^2u = 0 \\ d^2z &= 2d^2u + d^2v \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} d^2u + d^2v &= (dv)^2 = \left(\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 \\ d^2v - d^2u &= -(du)^2 = -\left(\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy\right)^2 \\ d^2z &= 2d^2u + d^2v \end{aligned} \right.$$

$$2d^2v = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} dx dy$$

$$2d^2u = 2 \cdot \frac{1}{4} (dx)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} (dy)^2$$

$$d^2v = \frac{1}{2} dx dy$$

$$d^2u = \frac{1}{4} (dx)^2 + \frac{1}{4} (dy)^2$$

$$d^2z = \frac{1}{2}(dx)^2 + \frac{1}{2}(dy)^2 + \frac{1}{2}dxdy$$

Ф-ла Тейлора:

$$z = 3 + \frac{3}{2}dx - \frac{1}{2}dy + \frac{1}{4}(dx)^2 + \frac{1}{4}(dy)^2 + \frac{1}{4}dxdy + O(\|h\|^3)$$

Задача (3)

$$(F)(x, x + y, x + y + z))'_x = 0$$

$$z = z(x, y) \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ?$$

$$F'_1 \cdot (x)'_x + F'_2 \cdot (x + y)'_x + F'_3 \cdot (x + y + z)'_x = 0$$

$$F'_1 \cdot 1 + F'_2 \cdot 1 + F'_3 \cdot (1 + z'_x) = 0$$

$$F'_3 \cdot z'_x = -F'_1 - F'_2 - F'_3 \Rightarrow z'_x = -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1$$

$$\begin{aligned} (F'_1(x, x + y, x + y + z))'_x &= F''_{11} \cdot (x)'_x + F''_{12} \cdot (x + y)'_x + F''_{13} \cdot (x + y + z)'_x = \\ &= F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x \end{aligned}$$

$$(F'_3 \cdot z'_x)'_x = (F'_3)'_x \cdot z'_x + F'_3 \cdot z''_{xx}$$

$$\begin{aligned} F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} + F''_{13} \cdot z'_x + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23} + F''_{23} \cdot z'_x + F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x + \\ + (F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} + F''_{33} \cdot z'_x) \cdot z'_x + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0 \end{aligned}$$

$$F''_{11} + 2F''_{12} + 2F''_{13} + F''_{22} + 2F''_{23} + F''_{33} + (2F''_{13} + 2F''_{23} + 3F''_{33}) \cdot z'_x + F''_{33} \cdot (z'_x)^2 + F'_3 \cdot z''_{xx} = 0$$

$$F'_3 \cdot z''_{xx} = -F''_{11} - 2F''_{12} - \dots - (2F''_{13} + 2F''_{23} + 2F''_{33}) \cdot \left(-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1\right) -$$

$$-F''_{33} \left(-\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3} - 1\right)^2$$

$$z''_{xx} - \text{из ур} = \text{я}$$

$$z''_{xx} = -\left(\frac{F'_1 + F'_2}{F'_3}\right)'_x$$

Опр (Замена переменных в дифф. ур)

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z}, \dots) = 0$$

$$z = z(x, y)$$

новые переменные u, v $w(u, v)$ - новая функция

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w) \\ z = h(u, v, w) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

через $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$

$$x'_u = f'_1 \cdot (u)'_u + f'_2 \cdot (v)'_u + f'_3(w)'_u = f'_1 + f'_3 \cdot w'_u$$

$$x'_v = f'_1 \cdot (u)'_v + f'_2 \cdot (v)'_v + f'_3 \cdot w'_v = f'_2 + f'_3 w'_v$$

$$y'_u = g'_1 + g'_3 w'_u$$

$$y'_v = g'_2 + g'_3 w'_v$$

$$z(x(u, v), y(u, v)) = h(u, v, w)$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u &= h'_1 + h'_3 w'_u \\ z'_x x'_v + z'_y y'_v &= h'_2 + h'_3 w'_v \end{cases}$$

$$z'_x = \Phi(y, v, w, w'_u, w'_v)$$

$$z'_y = \Psi(u, v, w, w'_u, w'_v)$$

Распишем как композицию

$$z'_x(x(u, v), y(u, v)) = \Phi(\dots)$$

$$z''_{xx} x'_u + z''_{xy} y'_u = (\Phi(\dots))'_u$$

$$z''_{xx} \cdot x'_v + z''_{xy} y'_v = (\Phi(\dots))'_v$$

Аналогично

$$z'_x(x(u, v), y(u, v)) = \Psi(\dots)$$

$$z''_{yx} x'_u + z''_{yy} y'_u = (\Psi(\dots))'_u$$

$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} y'_v = (\Psi(\dots))'_v$$

Задача (4)

$$(x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Ввести новые переменные

$\square x$ - новая ф-я, y, z - новые нез. переменные

!Переобозначим, чтобы не запутаться

$$\begin{cases} x = w & w(u, v) \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

$$x'_u = w'_u \quad x'_v = w'_v$$

$$y'_u = 1 \quad y'_v = 1$$

$$z(x(u, v), y(u, v)) = v$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$$

$$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$$

$$\begin{cases} z'_x \cdot w'_u + z'_y \cdot 1 = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z'_y = -z'_x \cdot w'_x = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$\Rightarrow z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$(w - v) \cdot \frac{1}{w'_v} - u \frac{w'_u}{w'_v} = 0$$

$$w - v - u \cdot w'_u = 0$$

$$w'_u = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{w}{u} - \frac{v}{u}$$

Задача (5) Мы перепутали знак, осторожно !

$$y'_x = \frac{x+y}{x-y} \quad x - \text{нез перемен.} \quad y(x) - \text{ф-я}$$

φ - новая нез перемен $r(\varphi)$ - новая ф-я

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$x'_\varphi = r'(\varphi) \cos \varphi - r \sin' \varphi$$

$$y(x(\varphi)) = r \sin \varphi$$

$$y'_x(x(\varphi)) \cdot x'_\varphi = r'(\varphi) \sin \varphi + r \cos \varphi$$

$$y'_x \cdot (r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi) = r'_\varphi + r \cos \varphi$$

$$y'_x = \frac{r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi}{r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$\frac{r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi}{r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{r \cos \varphi + r \sin \varphi}{r \cos \varphi - r \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}$$

$$(r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi)(\cos \varphi + \sin \varphi) = (\cos \varphi - \sin \varphi) \cdot (r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi)$$

$$r'_\varphi \sin \varphi \cos \varphi + r'_\varphi \sin^2 \varphi - r \cos^2 \varphi - r \cos \varphi \sin \varphi =$$

$$r'_\varphi \cos^2 \varphi + r'_\varphi \cos \varphi \sin \varphi - r \sin^2 \varphi - r \cos \varphi \sin \varphi$$

$$r'_\varphi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) = r (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$r'_\varphi = -r$$

Задача (6)

$$\begin{cases} x = w'_u \\ y = u \cdot w'_u - w \end{cases}$$

x - старая нез. $y(x)$ - ф-я

u - новая $w(u)$ - ф-я

Найти y'_x , y''_{xx} , y'''_{xxx}

$$x'_u = w''_{uu}$$

$$y'_x \cdot x'_u = 1 \cdot w'_u + u w''_{uu} - w'_u$$

$$y'_x \cdot w''_{uu} = u w''_{uu}$$

$$y'_x = u$$

$$y'_x(x(u)) = u$$

$$y''_{xx} \cdot x'_u = 1$$

$$y''_{xx} = \frac{1}{w''_{uu}}$$

$$y''_{xx}(x(u)) = \frac{1}{w''_{uu}}$$

$$y'''_{xxx} \cdot x'_u = -\frac{1}{(w''_{uu})^2} \cdot w'''_{uuu}$$

$$y'''_{xxx} = -\frac{w'''_{uuu}}{(w''_{uu})^3}$$

Задача (7 3502 - частный случай)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

$z = w$ старая функция равна новой

$$x'_u = \frac{1 \cdot (u^2 + v^2) - 2u^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$x'_u = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$x'_v = \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$y'_u = \frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$y'_v = \frac{-(u^2 + v^2) + 2v^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$z(x(u, v), y(u, v))$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = w'_u$$

Дз: 3388, 3395, 3404, 3502 закончить, 3433, 3471

2019-11-01

разбор дз от 2019-10-25

Задача (3404)

$$\begin{cases} u + v = x + y \\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

Найти du , dv , d^2u , d^2v

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

$$y \cdot \sin u = x \cdot \sin v$$

$$du + dv = dx + dy$$

$$\sin u \cdot dy + y \cdot \cos u \cdot du = \sin v \cdot dx + x \cos v \cdot dv$$

$$\begin{cases} du + dv = dx + dy \\ y \cos u \cdot du - x \cos v \cdot dv = \sin v \cdot dx - \sin u dy \end{cases}$$

Решаем по правилу Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y \cos u & -x \cos v \end{vmatrix} = -x \cos v - y \cos u$$

$$\Delta_{du} = \begin{vmatrix} dx + dy & 1 \\ \sin v \cdot dx - \sin u \cdot dy & -x \cos v \end{vmatrix} = -x \cos v \cdot dx - x \cdot \cos v \cdot dy -$$

$$- \sin v \cdot dx + \sin u \cdot dy$$

$$du = \frac{(-x \cos v + \sin v)dx + (-x \cos v + \sin u)dy}{-x \cos v - y \cos u}$$

$$\Delta_{dv} = \begin{vmatrix} 1 & dx + dy \\ y \cos u & \sin v \cdot dx - \sin u \cdot dy \end{vmatrix} = (\sin v - y \cos u)dx + (-\sin u - y \cos u)dy$$

$$dv = \frac{(\sin v - y \cos u)dx + (-\sin u - y \cos u)dy}{-x \cos v - y \cos u}$$

$$d^2u + d^2v = d^2x + d^2y \equiv 0 \quad (x, y - \text{нез. перем})$$

$$dy \cos u \cdot du - y \sin u \cdot du \cdot du + y \cos u \cdot d^2u - dx \cos v \cdot dv + x \sin v \cdot dv \cdot dv - x \cos v \cdot d^2v$$

$$= \cos v \cdot dv \cdot dx + \sin v \cdot d^2x - \cos u \cdot du \cdot dy - \sin u \cdot d^2y$$

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0 \\ y \cos u \cdot d^2u - x \cos v \cdot d^2v = -\cos u \cdot dy \cdot du + y \sin u \cdot (du)^2 + \cos v \cdot dx \cdot dv - \\ -x \sin v \cdot (dv)^2 + \cos v \cdot dv \cdot dx - \cos u \cdot du \cdot dy \end{cases}$$

Подставить du , dv через dx , dy

Задача (9)

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \quad y'_x, y''_{xx} \text{ через новые } w, t$$

x - новая ф-я

$t = xy$ - новая нез. переменная

$x = w$ - новая ф-я

$$y = \frac{t}{x} = \frac{t}{w}$$

$$\begin{cases} x = w \\ y = \frac{t}{w} \end{cases}$$

$$x'_t = w'_t$$

$$y(x(t)) = \frac{t}{w} = t \cdot w^{-1}$$

$$y'_x \cdot x'_t = w^{-1} + t \cdot (-1)w^{-2} \cdot w'_t = \frac{1}{w} - w^2$$

Подставим

$$y'_x \cdot w'_t = \frac{1}{w} - \frac{t \cdot w'_t}{w^2}$$

$$y'_x = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y'_x(x(t)) = \frac{1}{ww'_t} - \frac{t}{w^2}$$

$$y''_{xx} \cdot x'_t = -\frac{1}{w^2 \cdot (w'_t)^2} \cdot (w \cdot w'_t)'_t - 1 \cdot w^{-2} - t \cdot (-2)w^{-3} \cdot w'_t =$$

$$= -\frac{w'_t w'_t + w \cdot w''_{tt}}{w^2 \cdot (w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2t \cdot w'}{w^3}$$

$$y''_{xx} \cdot w'_t = -\frac{1}{w^2} - \frac{w''_{tt}}{w(w'_t)^2} - \frac{1}{w^2} + \frac{2tw'_t}{w^3}$$

$$y''_{xx} = -\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3}$$

$$-\frac{2}{w^2 \cdot w'_t} - \frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{2t}{w^3} + \frac{2}{w^2 w'_t} - \frac{2t}{w^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-\frac{w''_{tt}}{w \cdot (w'_t)^3} + \frac{t}{w} = 0$$

$$-w''_{tt} + t \cdot (w'_t)^3 = 0$$

$$w'_t = p$$

$$-p'_t + tp^3 = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = t \cdot p^3$$

Замена переменных 2 метод

Опр

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \dots) = 0$$

x, y - нез. $z(x, y)$ - ф-я

$$\begin{cases} u = f(x, y, z) \\ v = g(x, y, z) \\ w = h(x, y, z) \end{cases}$$

u, v - нез $w(u, v)$ - ф-я

Вычисляем производные по x, y

$$f(x, y, z(x, y))$$

$$u'_x = f'_1 \cdot (x)'_x + f'_2 \cdot (y)'_x + f'_3 \cdot z'_x = f'_1 + f'_3 \cdot z'_x$$

$$v'_x = g'_1 \cdot (x)'_x + g'_2 \cdot (y)'_x + g'_3 \cdot z'_x = g'_1 + g'_3 \cdot z'_x$$

$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$

Берем пр-дную от левой части как от композиции

$$w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = h'_1 \cdot (x)'_x + h'_2 \cdot (y)'_x + h'_3 \cdot z'_x = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

В последнее уравнение подставляем u'_x и v'_x

$$w'_u \cdot (f'_1 + f'_3 \cdot z'_x) + w'_v \cdot (g'_1 + g'_3 \cdot z'_x) = h'_1 + h'_3 \cdot z'_x$$

Получили линейное уравнение относительно z'_x

$$z'_x = \Phi(x, y, z, w'_u, w'_v)$$

Для нахождения z'_y берем производную от уравнения по y

$$u = f(\underset{1}{x}, \underset{2}{y}, \underset{3}{z}(x, y))$$

$$u'_y = f'_1 \cdot (x)'_y + f'_2 \cdot (y)'_y + f'_3 \cdot z'_y = f'_2 + f'_3 \cdot z'_y$$

$$v = g(x, y, z(x, y))$$

$$v'_y = g'_1 \cdot (x)'_y + g'_2 \cdot (y)'_y + g'_3 \cdot z'_y$$

$$w(u(x, y), v(x, y)) = h(x, y, z(x, y))$$

$$w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = h'_1 \cdot (x)'_y + h'_2 \cdot (y)'_y + h'_3 \cdot z'_y$$

Подставим и получим уравнение

$$w'_u \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w'_v \cdot (g'_2 + g'_3 \cdot z'_y) = h'_2 + h'_3 \cdot z'_y$$

лин. ур отн z'_y

$$z'_y = \psi(x, y, z, w'_u, w'_v)$$

$$z = z(x, y) \quad w'_u(u(x, y), v(x, y))$$

$$z''_{yy} = \psi'_1 \cdot (x)'_y + \psi'_2 \cdot (y)'_y + \psi'_3 \cdot z'_y + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_y + \psi'_5 \cdot (w'_v)'_y$$

$$(w'_u(u(x, y), v(x, y)))'_y = w''_{uu} \cdot u'_y + w''_{uv} \cdot v'_y =$$

Подставим

$$= w''_{u^2} \cdot (f'_2 + f'_3 \cdot z'_y) = w''_{uv} \cdot (g'_2 + g'_3 \cdot z'_y)$$

Подставим z'_y

$$(w'_v(u(x, y), v(x, y)))'_y = w''_{vu} \cdot u'_y + w''_{vv} \cdot v'_y$$

подставим u'_y, v'_y, z'_y

$$w''_{vu} = w''_{uv}$$

$$z''_{yx} = z''_{xy}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \psi'_1 \cdot (x)'_x + \psi'_2 \cdot (y)'_x + \psi'_3 \cdot z'_x + \psi'_4 \cdot (w'_u)'_x + \psi'_5 \cdot (w'_v)'_x$$

$$(w'_u(u(x, y), v(x, y)))'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x$$

Подставить z'_x

Замечание

Существует методичка на кафедре анализа по замене переменных

Задача (1)

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z \quad u = x^2 + y^2 \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad w = \ln z - (x+y)$$

Найти производные от всех ур-ний по x , потом от всех по y

$$w(u, v) = w(u(x, y), v(x, y))$$

$$u'_x = 2x$$

$$v'_x = -1 \cdot x^{-2}$$

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = \frac{1}{z} \cdot z'_x - 1$$

$$w'_u \cdot 2x + w'_v \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{z} \cdot z'_x - 1 \quad z \cdot (w'_u 2x + w'_v \frac{-1}{x^2}) + z = z'_x$$

Аналогично от всех по y

$$u'_y = 2y$$

$$v'_y = \frac{-1}{y^2}$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = \frac{1}{z} \cdot z'_y - 1$$

$$2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v = \frac{1}{z} \cdot z'_y - 1$$

$$z'_y = z \cdot (2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v) + z$$

Подставим производные в уравнение

$$y \cdot z \cdot (w'_v 2x + w'_v \frac{-1}{x^2}) + yz - xz(2yw'_u - \frac{1}{y^2}w'_v) - xz = yz - xz$$

$$z(2xyw'_u - \frac{y}{x^2}w'_v - 2yxw'_u + \frac{x}{y^2}w'_v) = 0$$

$$z \cdot w'_v \cdot (-\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}) = 0$$

Получили три варианта

$$z \equiv 0 - \text{реш. уравнения}$$

$w'_v = 0$ новый вид нашего уравнения

$$\frac{-y^3 + x^3}{x^2 y^2} = 0 \Leftrightarrow y = x \text{ особенность нашей замены, а не уравнения}$$

$$w'_v = 0 \Leftrightarrow w = \varphi(u) \quad (\text{произвольная функция}) \in C^1$$

$$\ln z - (x = y) = \varphi(x^2 + y^2)$$

$$\ln z = \varphi(x^2 + y^2) + x + y$$

$$z = e^{\varphi(x^2 + y^2) + x + y}$$

Если заменить z на $-z$ уравнение удовл.

$$z = c \cdot e^{\varphi(x^2 + y^2) + x + y} \text{ на самом деле решение выглядит так}$$

Задача (2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$$

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + z \\ w = z \quad \text{по умолч.} \end{cases}$$

$$w(u, v) = w(u(x, y), v(x, y))$$

$$u'_x = 1$$

$$v'_x = z'_x$$

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = z'_x$$

$$w'_u \cdot 1 + w'_v \cdot z'_x = z'_x$$

$$z'_x = \frac{w'_u}{1 - w'_v}$$

Я писал у доски

Можно было решать и первым способом

$$x = u$$

$$y = v - z = v - w$$

$$z = w$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v - w \\ z = w \end{cases}$$

Задача (3512)

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$\begin{cases} w = z^2 \\ \text{ПО УМОЛЧ} \\ u = x \\ v = y \end{cases}$$

$$z^2 = (z(x, y))^2$$

$$u'_x = 1$$

$$v'_x = 0$$

$$(w)'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = 2zz'_x$$

$$w'_u = 2zz'_x$$

$$z'_x = \frac{w'_u}{2z}$$

$$u'_y = 0$$

$$v'_y = 1$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = 2zz'_y$$

$$w'_v = 2zz'_y$$

$$z'_y = \frac{w'_v}{2z}$$

$$(z'_x)'_x = \frac{1}{2} \frac{(w'_u)'_x \cdot z - (z)'_x \cdot w'_u}{z^2}$$

$$(w'_u)'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu}$$

$$(z'_x)'_x = \frac{1}{2} \frac{w''_{uu} \cdot z - \frac{w'_u}{2z} \cdot w'_u}{z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2z^2 w'_{uu} - (w'_u)^2}{2z^3} \right)$$

$$(z'_y)'_y = \frac{1}{2} \left(\frac{2z^2 w'_{vv} - (w'_v)^2}{2z^3} \right)$$

$$z \left(\frac{2z^2 (w''_{uu} + w''_{vv}) - (w'_v)^2 - (w'_u)^2}{4z^3} \right) = \left(\frac{w'_u}{2z} \right)^2 + \left(\frac{w'_v}{2z} \right)^2$$

$$2z^2w''_{uu} + 2z^2w''_{vv} - 2(w'_u)^2 - 2(w'_v)^2 = 0$$

$$w(w''_{uu} + w''_{ww}) - (w'_u)^2 - (w'_v)^2 = 0$$

$$w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$$

Задача (3507)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} u = x + z \\ v = y + z \\ w = z \end{cases}$$

$$u'_x = 1 + z'_x$$

$$v'_x = z'_x$$

$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = z'_x$$

$$w'_u + w'_u z'_x + w'_v \cdot z'_x = z'_x$$

Линейное уравнение отн z'_x

$$z'_x = \frac{w'_u}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$u'_y = z'_y$$

$$v'_y = 1 + z'_y$$

$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = z'_y$$

$$z'_y = \frac{w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$(w'_u)'_x = w''_{uu} \cdot u'_x + w''_{uv} \cdot v'_x = w''_{uu}(1 + z'_x) + w''_{uv} \cdot z'_x$$

$$(w'_v)'_x = w''_{vu} \cdot u'_x + w''_{vv} \cdot v'_x = w''_{vu}(1 + z'_x) + w''_{vv} \cdot z'_x$$

$$z''_{xx} = \left(\frac{w'_u}{1 - (w'_u + w'_v)} \right)'_x = \frac{(w'_u)'_x(1 - (w'_u + w'_v)) - w'_u \cdot ((w'_u)'_x + (w'_v)'_x)}{(1 - (w'_u + w'_v))^2}$$

$$\frac{(w'_u(1 + z'_x) + w''_{vu}z'_x)(1 - (w'_u + w'_v)) + w'_u(w''_{uu} \cdot (1 + z'_x) + z'_x(w''_{vu} + w''_{vv}))}{(1 - (w'_u + w'_v)^2)} =$$

$$1 + z'_x = \frac{w'_u + 1 - w'_u - w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)} = \frac{1 - w'_v}{1 - (w'_u + w'_v)}$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{w''_{uu}(1 - w'_v) + w''_{vu} \cdot w'_u + \frac{w'_u \cdot w''_{uu} w'_{vu}(1 - w'_v)}{1 - (w'_u + w'_v)} + \frac{w'_u}{1 - (w'_u + w'_v)}(w''_{vu} + w''_{uu})}{=}$$

Закончить дома

Задача (3525)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

Доказать, что не меняется при любом распределении ролей между перем.

Будем делать первым методом

y, z - нез. перем x - ф-я

$$\begin{cases} x = w \\ y = u \\ z = v \end{cases}$$

u, v - нез. $w(u, v)$ - ф-я

$$x'_u = w'_u \quad y'_u = 1$$

$$x'_v = w'_v \quad y'_v = 0$$

$$z(x(u, v), y(u, v)) = v$$

$$z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = 0$$

$$z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v = 1$$

$$\begin{cases} z'_x w'_u + z'_y \cdot 1 = 0 \\ z'_x \cdot w'_v + z'_y \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$z'_x = \frac{1}{w'_v}$$

$$z'_y = -z'_x w'_u = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z'_x(x(u, v), y(u, v)) = \frac{1}{w'_v}$$

$$z''_{xx} \cdot x'_u + z''_{xy} \cdot y'_u = \left(\frac{1}{w'_v} \right)'_u = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} \cdot x'_v + z''_{xy} \cdot y'_v = \left(\frac{1}{w'_v} \right)'_v = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} w'_u + z''_{xy} \cdot 1 = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} \cdot w'_v + z''_{xy} \cdot 0 = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^2}$$

$$z''_{xx} = -\frac{w''_{vv}}{(w'_v)^3}$$

$$z''_{xy} = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} - z''_{xx} \cdot w'_u = -\frac{w''_{vu}}{(w'_v)^2} + \frac{w''_{vv} \cdot w'_u}{(w'_v)^3}$$

$$z'_y(x(u, v), y(u, v)) = -\frac{w'_u}{w'_v}$$

$$z''_{yx} \cdot x'_u + z''_{yy} = \left(-\frac{w'_u}{w'_v} \right)'_u$$

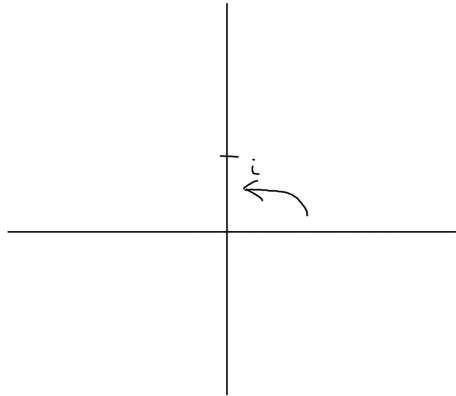
$$z''_{yx} \cdot x'_v + z''_{yy} \cdot y'_v = \left(-\frac{w'_u}{w'_v} \right)'_v$$

$$z''_{yx} \cdot w'_u + z''_{yy} \cdot 1 = \left(-\frac{w'_u}{w'_v} \right)'_u$$

$$z''_{yx} \cdot w'_v + z''_{yy} \cdot 0 = \left(-\frac{w'_u}{w'_v} \right)'_v$$

2019-11-08 ТФКП

Волковыский, Луку, Араманович сборник задач по ТФКП

Задача $\sqrt[3]{i}$ - все значения

Так будем обозначать все аргументы (с большой буквы)

$$\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} z}{n} \right)$$

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{|i|} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} \right)$$

$$= 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right)$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_3 = -i$$

Задача

$\sqrt{1-i}$ - все значения

$$\operatorname{Re}(1-i) = 1$$

$$\operatorname{Im}(1-i) = -1$$

$$|i-i| = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\sqrt{1-i} = \sqrt{|1-i|} \left(\cos \frac{\operatorname{Arg}(1-i)}{2} + i \sin \frac{\operatorname{Arg}(1-i)}{2} \right)$$

$$k=0 \quad z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \right)$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\sin^2\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$z_2 = -z_1 = -\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \right)$$

Опр (Формула Эйлера)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Опр

$$\operatorname{Ln} z = w = u + iv \Leftrightarrow e^{\underset{z \neq 0}{w}} = z \Leftrightarrow e^n (\cos v + i \sin v) = z$$

$$e^n = |z|$$

$$v = \operatorname{Arg} z$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \quad \text{комплексный лог.}$$

Опр

$$a > 0, b \in \mathbb{R}$$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

По аналогии

$$z_1 \neq 0 \Rightarrow z_1^{z_2} \stackrel{def}{=} e^{z_2 \cdot \operatorname{Ln} z_1}$$

Утв

Если $z_2 = n \in \mathbb{N}$, то

$$z_1^n = \underbrace{z_1 \cdot z_1 \dots z_1}_n$$

Если $z_2 = -n$, то

$$z_1^{-n} = \frac{1}{z_1 \cdot z_1 \cdot \dots \cdot z_1}$$

Если $n = \frac{p}{q}$, то

$$z_1^n =$$

Задача (1)

Посчитать все значения $e^{\frac{\pi i}{4}}$

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = e^0 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача (2)

Все значения

$$\operatorname{Ln}(1+i)$$

$$|1+i| = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right)$$

Задача (3)

$$1^{\sqrt{2}}$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(i2\pi k)} =$$

$$|1| = 1$$

$$Ln1 = i \cdot 2\pi k$$

$$\text{Arg } 1 = 0 + 2\pi k$$

$$= e^0(\cos 2\sqrt{2}\pi k + i \sin 2\sqrt{2}\pi k)$$

$$= \cos(2\sqrt{2}\pi k + i \sin 2\sqrt{2}\pi k)$$

$$k = 0 \quad 1$$

$$k = 1 \quad \cos(2\sqrt{2}\pi) + i \sin(2\sqrt{2}\pi)$$

Всюду плотно. Их бесконечно много и все на ед. окр.

Задача (4)

$$i^i - ?$$

$$i^i = e^{i \cdot Ln i} = e^{i \cdot i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$$

$$Ln i = \ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

точки расположены на луче

Задача (5)

$$(1+i)^{(1-i)}$$

$$e^{Ln(1+i)(1-i)} =$$

$$Ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

$$= e^{\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}$$

$$e^{\ln \sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)}$$

$$\sqrt{2} \cdot e^{-(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}(\cos(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i \sin(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k))$$

$$\sqrt{2} \cdot e^{-(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)}(\cos(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}))$$

Опр

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz) \quad \operatorname{sh} z = i \cdot \sin(iz)$$

Отсюда получаются все тождества тригонометрические

$$\cos z = \operatorname{ch}(-iz) = \operatorname{ch}(iz)$$

$$\sin z = \frac{1}{i} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{i}z\right) = (-i) \cdot \operatorname{sh}(-iz) = i \cdot \operatorname{sh}(iz)$$

Задача (6)

$$\text{Доказать } \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \\ &\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} \cdot \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(-z_1+z_2)} + e^{i(-z_1-z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(-z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(-z_1-z_2)}}{4i} \\ &= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{i(z_1-z_2)} - 2e^{i(-z_1+z_2)} + 2e^{i(-z_1-z_2)}}{4i} = \sin(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

Задача (7)

$\sin(x + iy)$ через гипербол. ф.

$$\sin(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} - e^{-ix} \cdot e^y}{2i}$$

Удобнее по-другому

$$\begin{aligned} \sin(x + iy) &= \sin(x) \cos(iy) + \sin(iy) \cos(x) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + \cos x \cdot i \operatorname{sh} y = \\ &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

Задача (8)

$$w = \arcsin z \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \sin w = z$$

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

$$e^{-iw} = \frac{1}{e^{iw}}$$

$$\frac{e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}}}{2i} = z$$

$$t = e^w \neq 0$$

$$t - \frac{1}{t} = 2iz \Leftrightarrow t^2 - 1 = 2izt$$

$$t^2 - 2iz - 1 = 0$$

$$D = (-2iz)^2 + 4 = 4 - 4z^2$$

$$t = \frac{2iz \pm \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \neq 0$$

$$iw = Ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

$$w = \frac{Ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})}{i} = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

Задача (9)

$$\arcsin 2 = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - 4}) = -iLn(2i \pm i\sqrt{3}) = -iLn(i(2 \pm \sqrt{3})) =$$

$$Arg = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

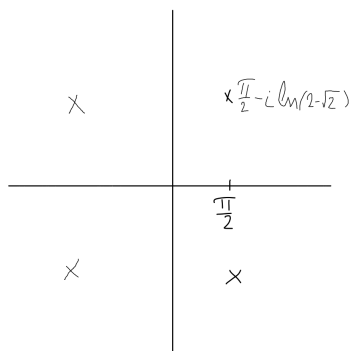
$$|..| = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$-i(\ln(2 + \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = -i \ln(2 + \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$= -i(\ln(2 - \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = -i \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$$



Задача (дз)

$$\cos(x + iy) \quad \operatorname{tg}(x + iy) \quad (-2)^{\sqrt{2}} \quad (3 - 4i)^{1+i}$$

Найти $\operatorname{arctg} z$ через Ln

Надо сразу перейти к двойному арг.

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}$$

$$\operatorname{arctg}(1 + 2i)$$