# Содержание

**1 Дифф. геом. кривых** 2
Теорема о неявной функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
Свойства пределов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
Гладка кривая, регулярная кривая . . . . . . . . . . . . . . . . 4

**Ф-ма Тейлора** 6
Длина кривой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
Т. о длине кривой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**2 Репер Френе** 9

**3 Вектор кривизны** 13

**4 Формула Френе** 15

**5 Вычисление кривизны кручения** 16
5.1 Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми . . . . . . . . . 18
5.2 Дополнение 2: натур. ур-я кривой . . . . . . . . . . . . . . 20

Дифф. геометрия кривых (в $\mathbb{R}^3$) и поверхностей (в $\mathbb{R}^3$) 2019-09-09

# 1 Дифф. геом. кривых

**Опр**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция. Образ f называется кривой, а f - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
2. Явное задание кривой $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

   (особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$)
3. Неявное задание кривой (на плоскости) $F(x, y) = 0$

**Пример**

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ явное задание

рис3

**Теорема (о неявной функции)**

$F(x, y) = 0$

$F$ - дифф ($\exists \dfrac{\partial F}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ - непр в окр $(x_0, y_0)$), $\quad F(x_0, y_0) = 0$

Если $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \ \exists \mathcal{E} > 0 \ \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$

$F(x, f(x)) = 0$

**Напоминание**

$$\frac{dF}{dx}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$y = f(x) \to \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию? $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - вектор-функция, тогда
$\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$

$$\forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : \text{ если } \rho(t, t_0) < \delta, \text{ то } \rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$$
$$(\rho(t, t_0) = |t - t_0|, \quad f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2})$$

**Теорема** **(свойства пределов)**

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) \pm g(t)) = \lim_{t \to t_0} f(t) \pm \lim_{t \to t_0} g(t)$$

$$\lim_{t \to t_0} (f(t) \underset{\text{скал}}{\cdot} g(t)) = (\lim_{t \to t_0} f(t), \lim_{t \to t_0} g(t)) \text{ - скалярное умножение}$$

$$\lim_{t \to t_0} (f(x) \times g(t)) = \lim_{t \to t_0} f(x) \times \lim_{t \to t_0} g(t)$$

**Док-во**

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = (\lim_{t \to t_0} x(t), \lim_{t \to t_0} y(t), \lim_{t \to t_0} z(0))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Пусть $\mathcal{E} > 0$, выберем $\delta : |x(t) - x_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3}$

если $|t - t_0| < \delta$

$$\Rightarrow \begin{matrix} |y(t) - y_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \\ |z(t) - z_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \end{matrix} \Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$$

**Опр**

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t_0)}{t - t_0}$$

**Теорема** **(свойства)**

1. $(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm y'(t)$

2. $(cf(t))' = cf'(t)$
3. $(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t); g'(t))$
4. $(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$
5. $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

Доказывается через $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Докажем ВП: $(f(t) \times g(t))'|_{t=t_0} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0)} =$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x) \times g(x) - f(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(f(t) - f(t_0)) \times g(t)}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0 \times (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} =$$

$$= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)$$

**Пример**

Контрпример
Т. Лагранжа - неверна рис 4

$$\int_b^a \overrightarrow{f}(t)dt = (\int_a^b x(t)d(t), \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt)$$

$$\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{f}(t)$$

$$\overrightarrow{F}(b) - \overrightarrow{F}(a) = \int_a^b \overrightarrow{f}(t)dt$$

$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b x(t)dt, ....) = (X(b) - X(a), ....$$

**Опр**

Гладкая кривая - образ вектороднозначнойя функция

**Опр**

Кривая называется регулярной, если существует производная и $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$

**Опр**

Кривая называется бирегулярной, если существует вторая производная и $f''(t) \nparallel f'(t)$

**Опр**

Параметризации $\overrightarrow{f}(t)$ и $\overrightarrow{g}(t)$ эквивалентны

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$g : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

Если $\exists$ биекция $\tau : [a, b] \to [c, d]$

$$\tau(a) = c; \quad \tau(b) = d :$$

$$f(t) = g(\tau(t)) \qquad (\tau \text{ возрастает и гладкая})$$

**Лемма**

Эквив параметризаций - эквививалентность

**Док-во**

Докажем, что экв. параметризаций - отношение эквивалентности:

1. (рефл.) $\tau = id$
2. (симм.) $f(t) = g(\tau(t))$, $g(t) = f(\tau(t))$
3. (тран.) $f(t) = g(b(t))$, $g(t) = h(\tau(t))$, $f(t) = h(\tau(b(t)))$

**Лемма**

$\overrightarrow{f}(t)$ - вектор-функция/ регуляр.

$|\overrightarrow{f}(t)| = 1 \to f'(t) \perp f(t)$

**Док-во**

$$(f(t); f(t)) = 1$$

$$0 = (f(t), f(t))' = 2(f'(t), f(t))$$

$$f(t) \neq 0$$

$$f'(t) \neq 0 \to f'(t) \perp f(t)$$

2019-09-16

**Теорема (Ф-ма Тейлора)**

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{t_0} + \overrightarrow{f'}(t_0)(t-t_0) + \frac{\overrightarrow{f''}(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + ...$$

$$+\frac{\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + o(t-t_0)^n$$

$\overrightarrow{g}(t) = o(t-t_0)^n$, если

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{g}(t)}{(t-t_0)^n} = \overrightarrow{0}$$

**Опр (Длина кривой)** рисунок 1 Пусть есть кривая $\overrightarrow{f}(t)$, $t \in [a,b]$

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

а) $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$

б) $\lim\limits_{\max\limits_{i=1..n} |t_i - t_{i-1}| \to 0} ...$

-длина кривой

**Утв**

Оба определения эквивалентны

**Теорема**

$$S \text{ - длина кривой } \Rightarrow S = \int_a^b |\overrightarrow{f'}(t)| dt$$

**Опр**

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

**Замечание**

Если $|\overrightarrow{f'}(t)|$ - интегр. $\Rightarrow$ кривая спрямляемая

**Пример**

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad (0,1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

**Док-во** $\triangle_i t = t_i - t_{i-1}$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\triangle_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$

$$|\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant |\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle_i t| + \\ + |\sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle t_i| - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II} \leqslant \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \triangle t_i - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \triangle_i t$$

$f'(t)$ - непр на $[a,b] \Rightarrow$ равномерно непр. на $[a,b]$(т. Кантора)

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$, если $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$, если $|\sigma_i - \tau_i| < \delta$

$$\mathrm{II} \leqslant \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \triangle_i t = \mathcal{E}(b-a) \underset{\mathcal{E}\to 0}{\to} 0$$

$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leqslant ||f'(\tau_i)| - ||f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$

$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \triangle_i t$

**Опр**

Параметризация $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

**Теорема**

Натуральная параметризация $\exists$ и ед.

**Лемма**

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\tau : [c,d] \to [a,b]$ - монотонная биекция ($\tau' > 0$), тогда $f \circ \tau : [c,d] \to \mathbb{R}^3$
Длина кривой (f) не зависит от перепараметризации ($f \circ \tau$)

**Док-во**

$$\int_a^b |f'(t)|dt \stackrel{?}{=} \int_c^d |(f \circ \tau)(s)|ds$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)|ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)|ds = \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)|dt$$

$t = \tau(s)$

**Док-во (T)**

Существование

Хотим подобрать $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)| ds$$

$$\sigma : [a, b] \to [0, S]$$

$S$ - длина кривой

$\sigma$ - возрастающая и дифф. $(\sigma'(t) = |f'(t)|)$

$\sigma$ - биекция $\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$

$$\int_0^t |(f \circ t)'(s)| ds = \int_0^t |f'(\tau(s))| \cdot t'(s) ds =$$

$$= \int_0^t |f'(\tau(s)| \frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|} ds = t$$

Единственность

$f(t)$ и $g(t)$ - нат. параметризации

$$f, g : [0, s] \to \mathbb{R}^3$$

$$f - g$$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)| dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)| dt \leqslant \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)|| dt = 0$$

**Примеры**

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)} dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = & r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y' = & r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$$\left|\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 cos'2\varphi + r^2 sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

# 2 Репер Френе

**Опр**

$$\overrightarrow{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\overrightarrow{v} = f'(t)$ - если парам. натуральн.

$v$ - касательный вектор

**Опр** Прямая, содерж в $\overrightarrow{v}$ наз. касательной к $\overrightarrow{f}(t)$ в точке $t_0$

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \overrightarrow{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \overrightarrow{g}(t)$$

$\overrightarrow{g}(t)$ - ур-е касат. прямой

Нормальная плоскость

$f'(t_0) \cdot (\overrightarrow{h} - \overrightarrow{f}(t_0)) = 0$

**Теорема**

$\delta$ - расстояние от $f(t)$ до касат. прямой

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

2019-09-23

**Напоминание**

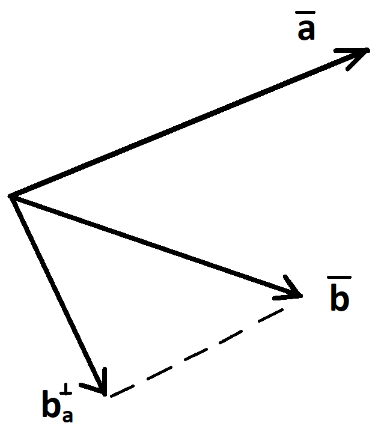
$$\left|\sum |f(t_i) - f(t_{i-1)}|\right| - \sum ||f(t_i) - f(t_{i-1})| - |f'(\tau_i)\Delta t_i|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)|\, dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(\tau_i)|\, dt \right| =$$

$$\sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'(t_i)|\, dt < \sum \mathcal{E}\Delta_i t = \mathcal{E}(b-a)$$

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$ если $f_i - f_{i-1} < \delta$

$\Rightarrow |f'(t) - f'(\tau_i)| < \mathcal{E}$

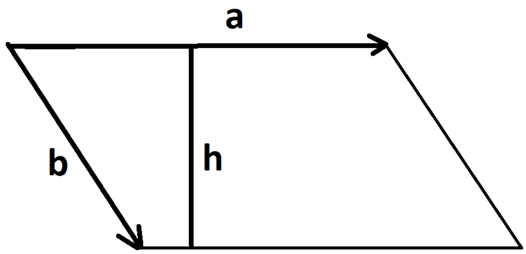



**Лемма**

$$\overrightarrow{b} = \Pi\text{p}_a b + b\frac{1}{a}$$

$$\overrightarrow{\Pi\text{p}_a b} = \frac{(a,b)}{|a|^2}\overrightarrow{a}$$

$$\left|b\frac{1}{a}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|}{|a|}$$



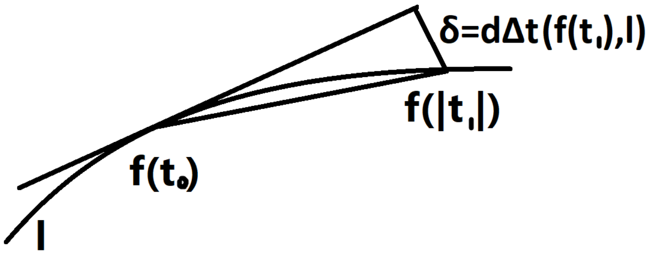

**Док-во**

$$h = \frac{S}{|a|}$$

$$\frac{(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a}}{|a|^2} = b\frac{1}{a}$$

$(a, b, a \times b)$ - прав. тройка

$(a \times b, a, b)$ - прав. тройка




**Теорема**

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\delta}{|f(t_1) - f(t_0)|} = 0$$

$\overrightarrow{f}'(t_0) \Rightarrow$ по лемме

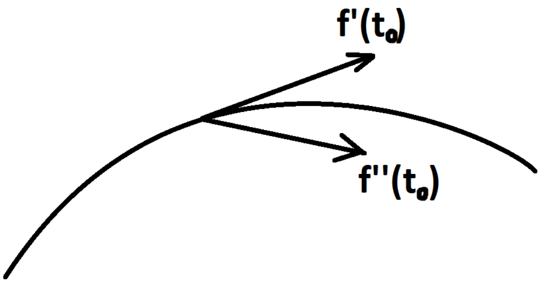
$$\delta = \frac{|f'(t_0) \times (f(t_1) - f(t_0))|}{|f'(t_0)|}$$

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\delta}{\underbrace{f(t_1) - f(t_0)}_{\overrightarrow{a}(t_0)}} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{|f'(t_0) \times \overrightarrow{a}(t_1)|}{|f'(t_0)| \cdot |a(t_1)|}$$

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\left| f'(t_0) \times \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} \right|}{\left| f'(t_0) \cdot \left| \frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0} \right| \right|} = \frac{f'(t_0) \times f'(t_0)}{|f'(t_0)|^2} = 0$$

$\Leftarrow$ очев

# 3 Вектор кривизны




**<u>Опр</u>**

$g(\varphi(t)) = g(s) = f(t) \qquad s = \varphi(t)$

$\overrightarrow{f'}(t) = (g(\varphi_i t_i))' = \overrightarrow{g'} \cdot \varphi'(t)$

$\overrightarrow{v}(t_0) = \dfrac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} \qquad \overrightarrow{n} : |n| = 1; \quad \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$

$n \in < f', f'' > \quad \overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{f}''$ в одной полуплоскости $f'(t)$

$\overrightarrow{v}'(t) \perp \overrightarrow{v}(t)$

$\overrightarrow{v}'(t) = k \cdot \overrightarrow{n}$

$|n| = 1 \quad k(t)$ - <u>кривизна кривой</u> $\quad k(t) \geqslant 0$ в точке $t$

$\overrightarrow{n}$ - вектор главной нормали

$\overrightarrow{v}$ - касат. вект

**<u>Утв</u>**

$f(t)$ - натуральная парам.

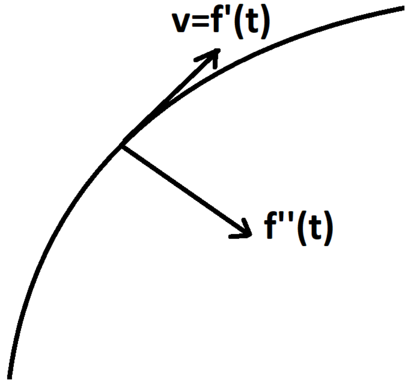
$|f'(t)| = 1 \Rightarrow v = f'(t)$

$f''(t) = k\overrightarrow{n}$

$$\overrightarrow{n} = \frac{f''(t)}{|f''(t)|}$$

$$k = |f''(t)|$$

рисунок 5 (центростр. ускорение)




$f(t)$ - любая параметризация, $g(s)$ - натур. парам.

$f(t) = g(\varphi(t)) \qquad s = \varphi(t)$ - нат. парам

$$s = \underbrace{\int_a^t (f'(\tau))d\tau}_{=\varphi(t)}$$

$$f'(t) = g'(s) \cdot \varphi'(t)$$

$$f''(t) = (g'(\varphi(t)))' \cdot \varphi'(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) =$$

$$= \underbrace{g''(s) \cdot \varphi'^2(t)}_{\perp \overrightarrow{v}} + \underbrace{g'(s)\varphi''(t)}_{\| g'(s) = v}$$

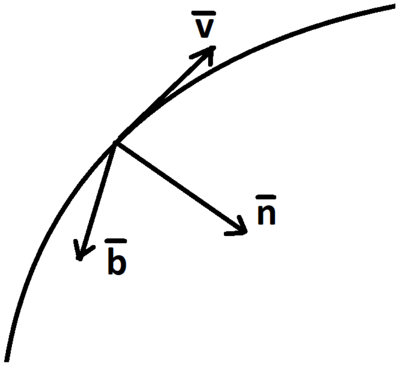
**Теорема**

Плоск. на вект $f'(t)$ и $f''(t)$ не зависит от параметризации

**Опр**

Эта плоскость (на вект. $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{n}$) наз. соприкасающейся плоск.

# 4 Формула Френе




**Опр**

$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{n}$ - вектор бинормали

$(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$ - базис Френе

Трехвекторник Френе или ренер Френе

$\overrightarrow{v}' = k \cdot \overrightarrow{n}$

$b' \perp b$

$b' = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{n})' = \underbrace{\overrightarrow{v}' \times \overrightarrow{n}}_{=0} + \overrightarrow{v} \times n' \perp \overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{v}' = k\overrightarrow{n}$

$\Rightarrow b' \parallel \overrightarrow{n} \Rightarrow b' = -æ \cdot \overrightarrow{n}$ - капа

æ наз. кручением кривой

**Теорема**

$æ = 0 \Leftrightarrow$ Кривая плоская

Кривая плоская $\Leftrightarrow$ она лежит в плоск $< v, n > \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ нормаль к $< v, n >$ постоянна $\Leftrightarrow b = const \Leftrightarrow b' = 0 \Leftrightarrow æ = 0$

$$n' = (\overrightarrow{b} \times v)' = b' \times v + b \times v' = -æ\, n \times v + k \cdot b \times n =$$

$$æ \cdot \overrightarrow{b} - k\overrightarrow{v}$$

$$v' = kn$$

$$n' = -kv + æb$$

$$b' = -æn$$

| | v | n | b |
|---|---|---|---|
| v' | 0 | k | 0 |
| n' | -k | 0 | æ |
| b' | 0 | -æ | 0 |

# 5 Вычисление кривизны кручения

**Теорема**

$$k = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|t'(t)|^3}$$

**Док-во**

$$g(s) \text{ - нат. парам } f(t) = g(\varphi(t)) \quad s = \varphi(t) \quad \varphi(t) = \int_a^t |f'(\tau)|\, d\tau$$

$$g'(s) = \overrightarrow{v} \quad g''(s) = k\overrightarrow{n} \qquad \varphi'(t) = |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(s) \cdot \varphi^2(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) = k \cdot \overrightarrow{n} \cdot |f'(t)|^2 + v \cdot \varphi''(t)$$

$$f''(t) \times f'(t) = k\,|f'(t)|^2 \cdot \overrightarrow{n} \times f'(t) + 0 = \qquad v'(t) = |f'(t)|\, \overrightarrow{v}$$

$$k \cdot \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v}\, |f'(t)|^3$$

$$|f''(t) \times f'(t)| = k\,|f'(t)|^3$$

$$k = \frac{|f''(t) \times f'(t)|}{|f'(t)|^3}$$

2019-09-30 Вычисление кручения

**Напоминание**

$$(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b};\overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a};\overrightarrow{b};\overrightarrow{c}+\alpha\overrightarrow{a})$$

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

**Док-во**

$g(s)$ - нат. парам.

$$g'(s) = \overrightarrow{v} \qquad |\overrightarrow{v}| = 1$$

$$g''(s) = v' = k\overrightarrow{n}$$

$$g'''(s) = kn' = k(-k\overrightarrow{v} + æ\overrightarrow{b}) = -k^2\overrightarrow{v} + æk\overrightarrow{b}$$

$$(g', g'', g''') = (\overrightarrow{v}; k\overrightarrow{n}; -k^2\overrightarrow{v} + æk\overrightarrow{b}) = (v; kn; ækb) = æk^2$$

$$æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2} \text{ в нат парам.}$$

**Док-во**

$f(t)$ - парам $(\forall)$

$$S = \psi(t) = \int_a^t |f'(\tau)|\, d\tau \qquad g(s) \text{ - нат. парам}$$

$$\psi'(t) = |f'(t)|$$

$$g(S) = g(\psi(t)) = f(t)$$

$$f'(t) = g'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = g'(s) \cdot |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(\psi(t))(\psi(t))^2 + g'(\psi(t))\psi''(t) = g''(s) \cdot |f'(t)|^2 + g'(s) \cdot \psi''(t)$$

$$f'''(t) = g'''(\psi(t))(\psi'(t))^3 + g''(\psi(t)) \cdot 3\psi'(t)\psi''(t) + g'(\psi(t)) \cdot \psi'''(t)$$

$$(f', f'', f''') = (\overrightarrow{f'}(s) \cdot |f'(t)|;\ \overrightarrow{g}''(s)\,|f'(t)|^2, g'''(s) \cdot |f'(t)|^3) =$$

$$= (g', g'', g''') \cdot |f'(t)|^6$$

$$æ = \frac{(g', g'', g''')}{k^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f'(t)|^6} \cdot \frac{|f'(t)|^6}{|f' \times f''|^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

**Пример**

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$y = f(x) \qquad \overrightarrow{f} = (x; f(x); 0) \qquad \overrightarrow{f}'(1; f'(x); 0) \qquad f''(0; f''(x); 0)$$

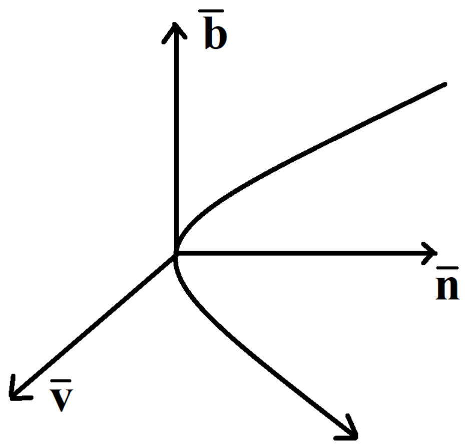
$$f''' = (0; f'''(x); 0)$$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$f' \times f'' = (0; 0; f''(x))$$

$$æ = 0$$

## 5.1 Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми




**Опр**

Соприкас плоскость : $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$
Нормальная плоскость кривой : $< n, b >$
Спрямляющая плоскость : $< v, b >$

**Теорема**

$$\overrightarrow{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \text{ ур-е нормали плоск.}$$

$$\overrightarrow{v} \parallel f'(t) = (f_1', f_2', f_3') \quad f_1'(t_0)\cdot(x - f_1(t_0)) + f_2'(t_0)\cdot(y - f_2(t_0)) + f_3'(t_0)\cdot(z - f_3(t_0)) = 0$$

$$f' \times f'' \parallel b$$

так как л.н.

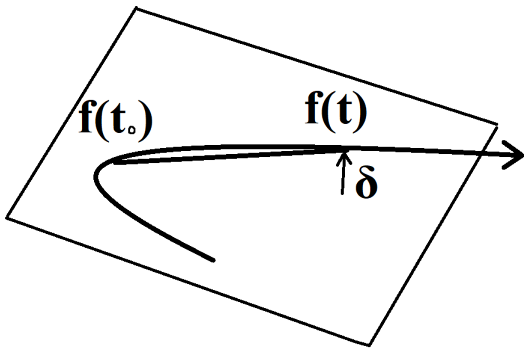
$$(f_1', f_2', f_3') \times (f_1'', f_2'', f_3'') = (f_2'f_3'' - f_3'f_2''; f_3'f_1'' - f_1'f_3''; f_1'f_2'' - f_2'f_1'')$$

Соприкас плоск.

$$\begin{vmatrix} f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & f_3'(t_0) \\ f_1''(t_0 & f_2''(t_0) & f_3''(t_0) \\ x - f_1(t_0) & y - f_2(t_0) & z - f_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$(f'(t_0) \times f''(t_0)) \times f'(t_0) \parallel \overrightarrow{n}$$

Ур-е спрям. плоск - УПР




**Теорема**

$\delta$ - расст. от $f(t)$ до соприкас. плоскости

Если плоскость явл. соприкас., то

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|^2} = 0$$

Плоскость с таким соотношением ед.

**Док-во** Условия достигаются за счет подходящей системы координат

$a)\quad f(t_0) = (0, 0, 0)$

$b)\quad OX \parallel \overrightarrow{v}(t_0)$

$c)\quad OY \parallel \overrightarrow{n}(t_0)$

$d)$ $\quad t_0 = 0$

$e)$ $\quad t$ - нат. параметр

б, в $\Rightarrow OZ \parallel \overrightarrow{b}(t_0)$

$$f(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \Rightarrow \delta = |f_3(t)s|$$

Соприкас $z = 0$

$$\overrightarrow{v} \parallel f' = (f_1', f_2', f_3') \parallel OX \Rightarrow f_2'(0) = 0, \quad f_3'(0) = 0 \quad f_1'(0) \neq 0$$

$$\overrightarrow{n} \parallel f'' = (f_1'', f_2'', f_3'') \parallel OY \Rightarrow f_1''(0) = 0; \quad f_3''(0) = 0$$

Следует из пунтка e)

$$\text{Хотим } \lim_{t\to 0} \frac{|f_3(t)|}{|f(t)|^2} = 0$$

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f_3(t)}{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2} = , \lim_{t\to 0} \frac{f_3'(t)}{2f_1(t)f_1'(t) + 2f_2(t)f_2'(t) + 2f_3(t)f_3'(t)}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{f_3''(t)}{f_1'^2(t) + f_1(t)f_1''(t) + f_2(t)f_2''(t) + f_3'^2(t) + f_3(t)f_3''(t)}$$

Все кроме первого слагаемого в знаменателе стремятся к 0, числитель тоже стремится к 0. Замечание. Можно было разложить $f_1, f_2, f_3$ по Тейлору. Можно зачеркнуть пункт д(е)) и $f_1''(0) = 0$

## 5.2 Дополнение 2: натур. ур-я кривой

**Теорема**

$g_1(s)$ и $g_2(s)$ - нат. парам. двух кривых

$$\begin{matrix} k_1(s) & k_2(s) \\ æ_1(s) & æ_2(s) \end{matrix} \text{ - кривизны и кручения}$$

$$\text{Если } \begin{matrix} k_1(s) = k_2(s) \\ æ_1(s) = æ_2(s) \end{matrix} \Rightarrow \text{ кривые наклад. при движении пр-ва}$$

**Док-во**

$v_1(s), n_1(s), b_1(s)$ - базис Френе I кривой

$v_2(s), n_2(s), b_2(s)$ - базис Френе II кривой

Считаем $\begin{aligned} v_1(s_0) &= v_2(s_0) \\ n_1(s_0) &= n_2(s_0) \\ b_1(s_0) &= b_2(s_0) \end{aligned}$

В данной точке базисы кривой одинаковы, а дальше возможно не совпадают. Почему не может?

$$h(s) = \overrightarrow{v}_1(s)\overrightarrow{v}_2(s) + \overrightarrow{n}_1(s)\overrightarrow{n}_2(s) + \overrightarrow{b}_1(s)\overrightarrow{b}_2(s) \quad h(s_0) = 3$$

$$h'(s) = v_1'v_2 + v_1v_2' + n_1'n_2 + n_1n_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' =$$

По формуле Френе

$$= \underline{\underline{k_1n_1v_2}} + \underline{k_2v_1n_2} + (\underline{-k_1v_1} + æ_1b_1)n_2 + \underline{\underline{n_1(-k_2v_2}} + æ_2b_2) - æ_1n_1b_2 - æ_2b_1n_2 = 0$$

$$\Rightarrow h(s_0) \equiv 3$$

$$\Rightarrow v_1 \equiv v_2 \quad n_1 \equiv n_2 \quad b_1 \equiv b_2$$