141, ДЗ 1, Векторные пространства

Задачи

Задача 1. Пусть пространство $V = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n\}$. Покажите, что любой набор многочленов $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$, что $\deg p_i(x) = i$, является базисом V.

Задача 2. Рассмотрим множество векторов $\cos^i x \sin^j x$, что $i, j \geq 0$ и $i + j \leq 3$. Найдите максимальную линейно независимую систему и выразите все остальные векторы через эту систему.

Задача 3. Покажите, что множество векторов $\cos^k(x)$ линейно независимы $k \geq 0$.

Задача 4. Выяснить, являются ли вектора линейно зависимыми и если да, то найти хотя бы одну их нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Линейная алгебра. Алгоритм Гаусса

Последняя тема в этом семестре – это линейная алгебра. И первое, что мы с вами обсудили – это решение системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса. Прежде всего – что же такое система линейных уравнений?

Определение. Пусть R – кольцо. Тогда системой m линейных уравнений от n неизвестных называется набор условий

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где $a_{ij}, b_i \in R$.

Нас в основном пока будет интересовать случай $R = K$ – поле. Совершенно понятно, что система линейных уравнений определяется однозначно числами a_{ij} и b_i. Эти числа удобно организовывать в матрицы.

Определение. Матрица размера $m \times n$ над полем K – это набор чисел проиндексированных двумя числами a_{ij} $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$. Множество всех матриц размера $m \times n$ над полем K обозначается как $M_{m\times n}(K)$. Обычно матрицы я буду обозначать заглавными буквами, например A. Тот факт, что матрица A имеет размер $m \times n$ будем записывать как $A \in M_{m\times n}(K)$.

Определение. Матрица системы линейных уравнений называется матрица $A \in M_{m\times n}$, заполненная коэффициентами этой системы – то есть числами a_{ij}. Матрица размера $m \times n + 1$ содержащая дополнительно столбец $b_1, \ldots, b_m$ называется расширенной матрицей системы. Мы будем отчёркивать столбец b, чтобы выделить его особую роль и будем обозначать расширенную матрицу системы как $(A|b)$.

От каждой системы нас прежде всего интересует множество её решений. Поэтому логично ввести определение:

Определение. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Теперь опишем три типа преобразований, которые переводят систему в эквивалентную.

Определение. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

Элементарным преобразованием первого типа над этой системой линейных уравнений называется следующая операция. Рассмотрим уравнения с номерами i и j, где $i \neq j$и элемент $\lambda \in K$. Тогда прибавим i-ое уравнение к j-ому с коэффициентом λ и поместим результат на место j-го уравнения.

Определение. Элементарным преобразованием второго типа называется преобразование меняющее местами i-ое и j-ое уравнения местами. Элементарным преобразованием третьего типа называется преобразование, домножающие i-ое уравнение на коэффициент $\lambda \in K^*$.

Нам будет удобно вместо системы линейных уравнений работать с её упрощённой записью – матрицей этой системы. Поэтому логично перевести понятия элементарных преобразований на язык матриц.

Определение. Элементарным преобразованием строк первого типа над матрицей A называется прибавление к j-ой строчке матрицы A её i строки с некоторым коэффициентом λ. Элементарным преобразованием второго типа называется перестановка i-ой и j-ой строк в матрице A. Преобразованием третьего типа называется домножение i-ой строчки на обратимый элемент $\lambda \in K^*$.

Обсудим метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Он заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований перевести систему уравнений в эквивалентную, так, чтобы её вид был как можно более простым. Сформулируем это.

Определение. Будем говорить, что матрица A имеет ступенчатый вид, если каждая новая строчка начинается с большего количества нулей, чем предыдущая. Говоря строго, для i-ой строки номер столбца в котором стоит первый ненулевой элемент строки строго больше, чем аналогичный номер у $i-1$ строки, если только строка не целиком состоит из нулей.

Вот такая матрица находится в ступенчатом виде.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} i_1 & & i_2 & & i_k \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1i_1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{2i_2} & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{ki_k} & * \end{pmatrix} \end{array}.$$

Здесь $i_1, \dots, i_k$ номера столбцов, где стоят первые ненулевые элементы в строках от 1 до k. После k-го номера все строки нулевые. Утверждение, которое стоит за методом Гаусса можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1. Любую матрицу над полем K можно перевести элементарными преобразованиями к ступенчатому виду. Более того, можно считать, что для каждой строки первый её ненулевой элемент равен 1 и в столбце над ним стоят нули.

Предъявим индукционный алгоритм для получения ступенчатого вида:
Случай 1: Элемент $a_{11} \neq 0$. Тогда прибавим ко всем остальным строкам первую с коэффициентами $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Получится матрица у которой в перво столбце стоят нули, кроме первой позиции. Вычеркнем первый столбик и первую строчку и продолжим по индукции.
Случай 2: Элемент $a_{11} = 0$, но в i-ой строчке стоит ненулевой элемент. Поменяем строку с номером i с первой строкой и продолжим, как в случае 1.
Случай 3: Весь первый столбец нулевой. Тогда вычеркнем первый столбец и продолжим по индукции.

Указанные преобразования очевидно приводят матрицу к ступенчатому виду. Способ добиться нулей над первыми не нулевыми элементами называется обратным ходом метода Гаусса. Прежде всего заработаем единицы в первых ненулевых элементах строк a_i поделив на a_i^{-1}.

Затем посмотрим на последнюю ненулевую строку – скажем строку k, первый столбец с ненулевым элементом в которой имеет номер j_k, и прибавим её ко всем строкам выше с коэффициентом $-a_{lj_k}$ для l-ой строки. После чего перейдём к следующей строке.

Приступим к решению системы линейных уравнений. Приведём расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Рассмотрим последнюю ненулевую строчку. Если её ненулевой элемент находится в самом последнем отчёркнутом столбце, то решений нет, потому, что эта строчка соответствует уравнению $0x_1 + \dots + 0x_n = b_1 \neq 0$, которое, как ни крути, решений не имеет.

Если же такого не происходит, то разделим переменные на два класса – зависимые и независимые. Зависимыми (главными) называются те переменные, в чьём столбце есть первый ненулевой элемент какой-то строки. Независимыми (свободными) будем называть все остальные.

Пусть зависимые переменные это $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$. Тогда выбрав любые значения для $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ из оставшихся уравнений мы однозначно восстановим значения всех остальных переменных. Более того, значения остальных переменных представляются в виде значений многочленов первой степени от $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$. Так выглядит стандартное описание всех решений линейного уравнения, которое выдаёт метод Гаусса.

Замечание. Метод Гаусса подразумевает работу со строчками в определённой порядке, в частности перестановка строк делается только в экстренных случаях. Но в принципе никто не запрещает для удобства переставлять строчки и прибавлять их друг к другу в произвольном порядке – лишь бы вид системы в конце позволял проанализировать множество решений.

Упражнение 1. *Решить систему линейных уравнений над* $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$$

Упражнение 2. *Решить систему уравнений в комплексных числах*

$$\begin{cases} x_1 x_2^2 x_3^3 = 2 \\ x_1^2 x_2^3 x_3^4 = 4 \\ x_1^2 x_2 x_3 = 2 \end{cases}$$

Упражнение 3. *Найдите такие натуральные числа* $k_1, \dots, k_4$ *не всё делящиеся на три, что* $a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4} = f^3$, *где* $a =$

2. Векторные пространства. Примеры. Линейная зависимость. Базис

Определение (Векторное пространство)**.** Векторным пространством над полем K называется множество V вместе с отображениями $+\colon V \times V \to V$ и $\cdot\colon K \times V \to V$. удовлетворяющие свойствам:
1) $V, +$ является абелевой группой
2) $\forall v \in V$ верно, что $1 \cdot v = v$
3) $\forall v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in K$ верно, что $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
4) $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda \in K$ верно, что $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
5) $\forall v \in V$ $\forall \lambda, \mu \in K$ верно, что $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$.

Примеры:
0) Само поле K вместе со сложением и умножением.
1) Пространство столбцов K^n. Умножение и сложение покомпонентное.
2) Обобщая. Пространство матриц $M_{m \times n}(K)$.
3) Пусть X – множество. Рассмотрим множество всех функций из K в X , то есть K^X. Это векторное пространство над полем K с поточечным сложением и умножением.
4) Рассмотрим множество непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0, 1]$. Это векторное пространство над $\mathbb{R}$.
5) Рассмотрим множество последовательностей над полем K, удовлетворяющих заданному линейному рекуррентному соотношению $a_k x_{n+k} + \dots + a_0 x_n = 0$. Это векторное пространство над K.
6) Рассмотрим множества всех многочленов $K[x_1, \dots, x_n]$, всех рациональных функций $K(x_1, \dots, x_n)$, рядов $K[[x]]$. Это векторные пространства относительно естественного сложения и умножения на элементы K.
7) Пусть A – абелева группа, такая, что любой её элемент имеет порядок p, для фиксированного простого числа p. Тогда на A существует и единственна структура векторного пространства над $\mathbb{Z}/p$.
8) Пусть L – расширение поля K. Тогда L является векторным пространством над K.

Определение (Подпространство)**.** Пусть V – векторное пространство над полем K. Подмножество $U \subseteq V$ называется подпространством V, если
1) U – подгруппа V.
2) $\forall \lambda \in K$, $\forall u \in U$ верно, что $\lambda u \in U$.
По другому говоря, операции на V можно сузить на U, с тем, чтобы U стало векторным пространством относительно этих операций.

Примеры:
1) Рассмотрим множество столбцов из K^n, у которых первая координата равно 0. Это подпространство в пространстве столбцов.
2) Рассмотрим множество многочленов, которые делятся на данный многочлен $p(x)K[x]$. Это подпространство в $K[x]$.
3) Рассмотрим множество непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, принимающих значение 0 в точках $0, \frac{1}{2}, 1$. Это подпространство в $C[0, 1]$.
4) Рассмотрим множество многочленов степени не выше n от одной переменной

$$K[x_1, \dots, x_k]_{\leq n} = \{f \in K[x_1, \dots, x_k] \mid \deg f \leq n\}.$$

Это подпространство в $K[x_1, \ldots, x_n]$.
5) Пусть $A \in M_{n\times m}(K)$. Тогда множество решений однородной системы уравнений $Ax = 0$ $W = \{x \in K^m \mid Ax = 0\}$ является подпространством K^m.

Определение. Линейной комбинацией векторов $v_1, \ldots, v_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, называется элемент $v \in V$

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Если хотя бы один из элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ не равен 0, то говорят, что линейная комбинация нетривиальна.

Определение (Линейная зависимость)**.** Набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется линейно зависимым, если 0 является нетривиальной линейной комбинацией $v_1, \ldots, v_n$, то есть существуют $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ не все равные 0, что

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Определение (Линейная независимость)**.** Набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется линейно независимым, если он не является линейно зависимым, то есть если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ такие, что

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \text{ то } \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Примеры:
0) Набор из одного нуля линейно зависим.
1) Пусть v_1 и v_2 два вектора из V. Они линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны.
2) Рассмотрим пространство K^n и набор столбцов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это линейно независимая система векторов.
3) Аналогично в пространстве матриц $M_{m\times n}(K)$ имеется набор матриц e_{ij} вида

$$e_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4) Все мономы x^α в кольце $K[x_1, \ldots, x_n]$ линейно независимы
5) Набор $\frac{1}{x-\lambda}$ для различных $\lambda \in K$ линейно независим в $K(t)$.
6) Любой поднабор линейно независимого набора линейно независим.

Упражнение 4. *Пусть пространство $V = \{f \in K[x] \mid \deg f \leq n\}$ и даны различные элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Покажите, что набор многочленов $p_i(x) = \prod_{j\neq i}(x - \lambda_j)$ линейно независим.*

Доказательство. Решение Пусть есть такие коэффициенты μ_i, что $\sum_{i=1}^n \mu_i p_i(x) = 0$. Покажем, что все они равны 0. Для этого подставим вместо x элемент λ_i. Тогда все слагаемые кроме одного обнулятся. Получаем

$$\mu_i \prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j) = 0.$$

Коэффициент при μ_i не равен 0. Значит $\mu_i = 0$, что и требовалось. □

Упражнение 5. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различные вещественные числа. Покажите, что множество векторов $e^{\lambda_i x}$ линейно независимо как элементы в пространстве непрерывных функций на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Решение Пусть $\sum \mu_i e^{\lambda_i x} = 0$ и λ_i упорядочены по возрастанию. Поделим на $e^{\lambda_n x}$. Тогда при $x \to \infty$ сумма

$$0 = \sum \mu_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x}$$

стремится к μ_n. Но тогда μ_n равно 0. Аналогично все предыдущие μ_i. □

Упражнение 6. *Покажите, что множество векторов* $\cos nx$ *и* $\sin nx$ *по всем натуральным* n *линейно независимы (рассматривая их как элементы пространства непрерывных функций на отрезке* $[0, 2\pi]$*).*

Определение. Пусть X подмножество векторного пространства V. Тогда подпространство, порожденное X – это наименьшее подпространство, содержащее X. Обозначается оно $\langle X\rangle$. Это подпространство так же называют линейной оболочкой X.

Лемма 1. Пусть $X \subseteq V$. Тогда линейная оболочка $\langle X\rangle$ существует и описывается как множество всех линейных комбинаций элементов из X.

$$\langle X\rangle = \{v \in V \mid \exists x_1, \dots, x_n \in X, \text{ и } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \text{ что } v = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\}$$

Определение. Будем говорить, что набор $v_\alpha \in V$ $\alpha \in I$ является порождающим для V, если $\langle\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}\rangle = V$. Иными словами, для любого $v \in V$ существуют $v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_n}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $v = \sum \lambda_i v_{\alpha_i}$.

Определение (Базис)**.** Набор векторов v_α, $\alpha \in I$ называется базисом пространства V, если он является порождающей и линейно независимой системой векторов в V.

Примеры:
1) Набор векторов $e_i \in K^n$ является базисом. Этот базис называют стандартным.
2) Набор e_{ij} является базисом $M_{m\times n}(K)$.
3) Мономы x^α являются базисом $K[x_1, \dots, x_n]$.
4) Элементы $1, x, \dots, x^n, \dots$ и $\frac{1}{(x-\lambda)^n}$ по всем $\lambda \in \mathbb{C}$ являются базисом в $\mathbb{C}(x)$.

Теорема 2. Любую линейно независимую систему в векторном пространстве V можно дополнить до базиса V при помощи векторов из любой порождающей системы для V.

Теорема 3. Любые два базиса векторного пространства V равномощны.

Определение (Размерность)**.** Пусть V – конечно-порождённое пространство. Размерностью V называется количество элементов в базисе V.

Обсудим какие практические задачи стоят за этими теоремами и как эти задачи решать. Первая задача состоит в том, как по произвольному набору векторов в векторном пространстве V сказать, что он линейно независим. А именно, пусть дан набор векторов $u_1, \dots, u_k \in V$ и базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V. Пусть нам известно разложение векторов v_i через базис e. То есть даны числа μ_{ji}, что

$$v_j = \sum_{i=0}^{n} \mu_{ji} e_i.$$

Выбор базиса и знание такого разложения позволяют свести вычисления к модельному случаю пространства столбцов $\mathbb{K}^n$.

Точнее, соотношение линейной зависимости для векторов $0 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k$ равносильно соотношению для их координатных столбцов в базисе $e_1, \dots, e_n$, которые мы обозначим как $[u_i]$. Составим из $[u_i]$ матрицу A размера $k \times n$. Нахождение линейной зависимость, таким образом, равносильно решению системы $A\lambda = 0$.

Приведём матрицу A методом Гаусса к ступенчатому виду A'. Решения системы остались прежними, то есть столбцы A линейно независимы тогда и только тогда, когда соответствующие столбцы для A' независимы. Но независимые столбцы для A', через которые выражаются остальные, легко найти. А именно, если матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} i_1 & & i_2 & & i_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \end{array},$$

то столбцы с номерами главных(зависимых) переменных $i_1, \dots, i_r$ линейно независимы и порождают всё пространство столбцов. Следовательно, и исходные вектора $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ независимы и порождают всё пространство U.

Упражнение 7. *Выяснить, являются ли вектора* $v_1 = (4, -5, 2, 6), v_2 = (2, -2, 1, 3), v_3 = (6, -3, 3, 9), v_4 = (4, -1, 5, 6)$ *линейно зависимыми.*

Решение. Составим матрицу из этих столбцов и приведём её к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что v_1, v_2, v_4 линейно независимы и третий вектор выражается через первый и второй как

$$v_3 = 9v_2 - 3v_1$$

□

Перейдём к следующей задаче. Пусть дан вектор $v \in V$ и набор $u_1, \dots, u_k \in V$, для которого, как и для v известно разложение через базис e. Как узнать, можно ли представить v в виде линейной комбинации u_i?

Для ответа на этот вопрос заметим, что задача опять свелась к модельному пространству K^n. Для ответа на вопрос необходимо и достаточно понять возможно ли равенство

$$\lambda_1[u_1] + \dots + \lambda_k[u_k] = [v].$$

Это равенство эквивалентно системе линейных уравнений $A\lambda = [v]$ для матрицы A, составленной из столбцов $[u_i]$, решить которую не составляет труда.

Последний вопрос посвящён тому, как проверить, что набор u_i порождает V. Прежде всего мы понимаем, что если $k \neq n$, то это невозможно. Далее, если $k = n$, то u_i порождают V тогда и только тогда, когда u_i линейно независимы. Впрочем, можно предложить и другой критерий – u_i порождают V тогда и только тогда, когда через них выражаются базисные вектора e_j.

Стоит заметить, что разный выбор базиса приводит к довольно разным координатным столбцам. Попробуем решить задачу:

Упражнение 8. *Найдите базис пространства $\mathbb{R}^3$, в котором векторы x, y, z имеют заданные координатные столбцы $[x], [y], [z]$.*

$$x = (9, 2, 0)^\top, y = (6, 3, 4)^\top, z = (3, 1, 2)^\top$$
$$[x] = (1, 2, 1)^T, [y] = (1, -1, 2)^T, [z] = (-2, -1, 3)^T$$

Для этого запишем в матрицу A столбцы x, y, z, а в матрицу B столбцы $[x], [y], [z]$. Тогда я хочу найти такую невырожденную матрицу X, что $A = BX$. Столбцы матрицы X и будут подходящим базисом в $\mathbb{R}^3$.

Если матрица B обратима, то матрицу X можно найти как $B^{-1}A$. Однако удобнее находить решение другим способом. А именно, заметим, что при применении элементарных преобразований строк одновременно к матрицам A и B множество решений этой системы не меняется.

С другой стороны, если матрица B равна единице, то решение будет единственным возможным $X = A$, если A невырождена.

Записав, таким образом матрицу $(A|B)$ и приведя её к виду $(C|E)$ мы получим, что матрица C и есть решение (если она невырождена).

Заметим так же, что эту задачу можно решить приведя элементарными преобразованиями столбцов матрицу

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix} \text{ к виду } \begin{pmatrix} C \\ \hline E \end{pmatrix}.$$

В случае вырожденных матриц A и B ситуация немного усложняется.