0.1 16.09.2019

Пример

Выяснить, есть ли производная у $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

Решение

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}, \quad x^3+y^3 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^3+0^3} - \sqrt[3]{o^3+0^3}}{t} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \text{ не } \exists$$

Пусть $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ - диф. в точке $(0,0) \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = 0 + x + y + \overline{o}(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\sqrt[3]{(0+\delta x)^3 + (0+\delta y)^3} = \underset{=0}{f(x,y)} + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\delta x + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\delta y + \overline{o}(\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2})$$

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = x + y + \overline{o}(\sqrt{x^2+y^2}), \quad x, y \to 0$$

$$x_n = y_n \quad \sqrt[3]{2}x = 2x + \overline{o}(x)$$

$$\sqrt[3]{2} - 2 = \overline{o}(1)?!!$$

То есть из существования ч.п. не следует дифференцируемость

Теорема

Если существуют ч.п. и они непр. в рассм. точке $\Rightarrow$ ф-ия диф. в этой точке

Пример

$f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0 \Rightarrow$ f - непр. в 0

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - 2x^2y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}(\frac{-\frac{t^3}{t^2} - 0}{t}) = -1$$

Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y}) = 1$

Теорема

Если $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $\exists$ в окр. точки, непр. в этой точке $\Rightarrow$ в этой точке $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

0.1.1 Дифференцирование неявных функций

<u>Опр</u>

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $F(x_1, ..., x_n; y)$, $F(x_1^0, ..., x_n^0; y^0) = 0$

$y = f(x_1, ..., x_n)$ - ф-ия задана неявно уравнением $F(x_1, ..., x_n; y) = 0$ в откр. точке $(x_1^0, ..., x_n^0, y^0)$, если $(x = (x_1, ..., x_n))$:

1. $\underset{=}{F}(x, f(x)) = 0$ (в окр. x^0)
2. $f(x^0) = y^0$

<u>Теорема</u> (о неявном отображении)

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x^0, y^0) = 0,\ \text{F - непр. диф. в окр } (x^0, y^0),$$

$$F'_y(x^0, y^0) \neq 0,\ \text{тогда:}$$

1. $\exists y = f(x_1, ..., x_n)$ зад. неявно ур. $F(x, y) = 0$
2. f диф. в окр. x^0
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x_0} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_0} / \dfrac{\partial F}{\partial y}$ в окр. x^0