2019-09-16

Теорема **(Ф-ма Тейлора)**

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{t_0} + \overrightarrow{f'}(t_0)(t - t_0) + \frac{\overrightarrow{f''}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + ...$$

$$+\frac{\overrightarrow{f^{(n)}}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n$$

$$\overrightarrow{g}(t) = o(t - t_0)^n, \text{ если}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{g}(t)}{(t - t_0)^n} = \overrightarrow{0}$$

Опр **(Длина кривой)** рисунок 1 Пусть есть кривая $\overrightarrow{f}(t)$, $t \in [a, b]$

$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$

а) $\sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$

б) $\lim\limits_{\max\limits_{i=1..n} |t_i - t_{i-1}| \to 0} ...$

-длина кривой

Утв

Оба определения эквивалентны

Теорема

$$S \text{ - длина кривой } \Rightarrow S = \int_a^b |\overrightarrow{f'}(t)| dt$$

Опр

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

Замечание

Если $|\overrightarrow{f'}(t)|$ - интегр. $\Rightarrow$ кривая спрямляемая

Пример

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad (0, 1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во $\triangle_i t = t_i - t_{i-1}$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\triangle_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$

$$|\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant |\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle_i t| +$$
$$+ |\sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \triangle t_i| - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{II} \leqslant \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \triangle t_i - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \triangle_i t$$

$$f'(t) \text{ - непр на } [a,b] \Rightarrow \text{ равномерно непр. на } [a,b] \text{(т. Кантора)}$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0, \text{ если } |\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$$

$$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}, \text{ если } |\sigma_i - \tau_i| < \delta$$

$$\mathrm{II} \leqslant \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \triangle_i t = \mathcal{E}(b-a) \underset{\mathcal{E} \to 0}{\to} 0$$

$$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leqslant ||f'(\tau_i)| - ||f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \triangle_i t$$

Опр

Параметризация $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ называется натуральной, если $|f'(t)| = 1$

Теорема

Натуральная параметризация $\exists$ и ед.

Лемма

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\tau : [c,d] \to [a,b]$ - монотонная биекция ($\tau' > 0$), тогда $f \circ \tau : [c,d] \to \mathbb{R}^3$

Длина кривой (f) не зависит от перепараметризации ($f \circ \tau$)

Док-во

$$\int_a^b |f'(t)|dt \stackrel{?}{=} \int_c^d |(f \circ \tau)(s)|ds$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)|ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)|ds = \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)|dt$$

$$t = \tau(s)$$

Док-во (Т)

Существование

Хотим подобрать $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)|ds$$

$$\sigma : [a,b] \to [0,S]$$

$$S \text{ - длина кривой}$$

$$\sigma \text{ - возрастающая и дифф. } (\sigma'(t) = |f'(t)|)$$

$$\sigma \text{ - биекция } \Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$$

$$\int_0^t |(f \circ t)'(s)|ds = \int_0^t |f'(\tau(s))| \cdot t'(s)ds =$$

$$= \int_0^t |f'(\tau(s)|\frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|}ds = t$$

Единственность

$$f(t) \text{ и } g(t) \text{ - нат. параметризации}$$

$$f, g : [0,s] \to \mathbb{R}^3$$

$$f - g$$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)|dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)|dt \leqslant \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)||dt = 0$$

Примеры

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)}dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = & r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y' = & r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$$\left|\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 cos'2\varphi + r^2 sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

0.4 Репер Френе

Опр

$$\overrightarrow{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$$\overrightarrow{v} = f'(t) \text{ - если парам. натуральн.}$$

v - касательный вектор

Опр Прямая, содерж в $\overrightarrow{v}$ наз. касательной к $\overrightarrow{f}(t)$ в точке t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \overrightarrow{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \overrightarrow{g}(t)$$

$\overrightarrow{g}(t)$ - ур-е касат. прямой

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\overrightarrow{h} - \overrightarrow{f}(t_0)) = 0$$

Теорема

δ - расстояние от $f(t)$ до касат. прямой

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством