2019-10-14

Теорема

Угол медлу кривыми

$$\cos\alpha = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv + 1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\sqrt{...}}$$

Док-во

Найдем, как вычисляется угол между кривыми

$$\begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}$$

Нужно найти угол между $\overline{r}_t'(u_1(t), v_1(t))$ и $\overline{r}_t'(u_2(t), v_2(t))$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{r}_t'(u_1(t), v_1(t)) * \overline{r}_t'(u_2(t), v_2(t))}{|\overline{r}_t'(u_1(t), v_1(t))||\overline{r}_t'(u_2(t), v_2(t))|}$$

$$r_t'(u_1(t), v_1(t)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv_1}{dt}; ...\right)$$

$$\frac{d\overline{r}}{dt}(u_i(t), v_i(t)) = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u}u_i' + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}v_i'$$

$$\frac{dr}{dt}(u_1(t), v_1(t))\frac{dr}{dt}(u_2(t), v_2(t)) = \left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}u_1' + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}v_1'\right)\left(\frac{\partial \overline{r}}{\partial u}u_2' + \frac{\partial \overline{r}}{\partial v}v_2'\right) = Eu_1'u_2' + F(u_1'$$

$$\cos\alpha = \frac{Eu_1'u_2' + F(u_1'v_2' + u_2'v_1') + Gv + 1'v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu_1'v_1' + Gv_1'^2}\sqrt{...}}$$

Опр

Поверхности Φ_1 и Φ_2 называются изометричными, если $\exists$ параметризации $\overline{r}_1$ у Φ_1 и $\overline{r}_2$ у Φ_2 $r_1, r_2 : D \to \mathbb{R}^3$ и $\forall$ кривой D длины $|r_1(l)| = |r_2(l)|$

Опр

Внутренняя метрика поверхности $(A, B) = inf\{$длина кривой на поверхности, с

Теорема

Если у Φ_1 и Φ_2 совпадают коэффициенты I кв. формы, то они изометричны

Док-во

Уже доказали, потому что форма вычисления длины кривой одинаковая на обеих поверхностях

Замечание

Если поверхности изометричны, то $\exists D$ и параметризации $\overline{r}_1, \overline{r}_2 : D \to \mathbb{R}^3$, r_i - параметризация поверхности Φ_i такие что E, F, G совпадают для $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$

Док-во

f - изометрия

Кривая в D: $\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = v_0 & v' = 0 \end{cases}$

$$l_1 = \int_a^b \sqrt{E_1 1} dt$$

$$l_2 = \int_a^b \sqrt{E_2 1} dt$$

т.к. $l_1 = l_2 \Rightarrow E_1 = E_2$

Аналогично $G_1 = G_2$ ($\begin{cases} u = u_0 \\ v = t \end{cases}$)

$$\begin{cases} u = t + u_0, & u' = 1 \\ v = t + v_0, & v' = 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \sqrt{E_1 + 2F_1 + G} dt = \int_a^b \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2} dt$$

$$E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2 \Rightarrow F_1 = F_2$$

Следствие

I кв. форма определяет внутреннюю геометрию

Пример

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\begin{cases} x = R \cos\varphi \cos\psi \\ y = R \sin\varphi \cos\psi \\ z = R \sin\psi \end{cases}$$

$$\overline{r} = (R\cos\varphi\cos\psi,\ R\sin\varphi\cos\psi,\ R\sin\psi)$$
$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\cos\psi,\ R\cos\varphi\cos\psi,\ 0)$$
$$r'_\psi = (R\cos\varphi\sin\psi,\ -R\sin\varphi\sin\psi,\ R\cos\psi)$$
$$E = r'^2_\varphi = R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi = R^2\cos^2\psi$$
$$F = R^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi\sin\psi - R^2\cos\varphi\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi + 0 = 0$$
$$G = R^2$$

Пример **(параметризация поверхности вращения)**

$$\begin{cases} x = f(t)\cos\varphi \\ y = f(t)\sin\varphi \\ z = g(t) \end{cases}$$

Упр

У любой поверхности вращения $F = 0$, E не зависит от φ, G тоже

Теорема

$$|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

Док-во

$$\overline{r}_u \times \overline{r}_v = (\overline{x}_u,\ \overline{y}_u,\ \overline{z}_u) \times (\overline{x}_v,\ \overline{y}_v,\ \overline{z}_v) = (y_u z_v - z_u y_v,\ z_u x_v - x_u z_v,\ x_u y_v - y_u x_v)$$
$$|\overline{r}_n \times \overline{r}_v| = \sqrt{(y_u z_v - z_n y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2} =$$
$$= \sqrt{(y_u^2 \underbrace{z_v^2 + z_n^2}_{=A} y_v^2) - 2(y_u z_v z_u y_v + z_u \underbrace{x_u}_{=B} z_v x_u + x_u x_v y_u y_v)}$$
$$EG - F^2 = (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(z_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 =$$
$$= (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) + (A) - (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) - 2(B)$$

Следствие

$$EG - F^2 > 0$$

Теорема

Площадь поверхности $S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} du dv$