Практика по матану, 3 сем

(преподаватель Роткевич А. С.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Функции от нескольких переменных

1.1 02.09.2019

1.1.1 Основные определения

Определение

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - *метрика, если*

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$
   (X, ρ) - *метрическое пространство*

Примеры

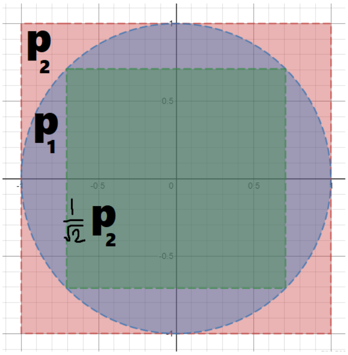
1. $\mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |x - y|$
2. $x \neq \varnothing$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
3. $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$,
   где $x = (x_1, ..., x_n)$ $y = (y_1, ..., y_n)$

Определение

$\rho_1, \rho_2 : X * X \to \mathbb{R}$ - *метрики, тогда* ρ_1, ρ_2 - *эквивалентны, если* *(они задают одну топологию)* $c_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant c_2\rho_1(x, y)$ *для* $c_1, c_2 > 0$ - const

Пример

$\mathbb{R}^2$ $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{2\rho_2^2(x, y)}$
$\rho_2(x, y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ *(упр.)*
$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \rho_1(x, y)$
Пусть $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + ...|x - n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$
Если $p \to \infty$ $\rho_3 \to \rho_2$
$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$ - *пространство Лебега конечномерное*
(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны (ρ_1, ρ_2, ρ_3)



Определение

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - *метрика,*

Открытым шаром в X *относительно метрики* ρ *называется мн-во* $B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$

Замкнутым шаром называется $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leqslant r\}$

Сферой называется $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

Упражнение

Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

Пример

$l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}\ 1 \leqslant p < \infty$

$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$

l^p - *пр-во Лебега (последовательностей)*

Пример

$C[0, 1]$ - *пр-во непр. функций*

$\rho(f, g) = \max\limits_{[0,1]} |f - g|$ - *полна (любая фундаментальная последовательность сходится)*

$\rho_p(f, g) = (\int\limits_0^1 |f - g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ - *не полная*

Определение

(X, ρ) - *метр. пр-во,* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $a \in X$ $x_k \to a$ *в пр-ве* X *по метрике* ρ, *если* $\rho(x_n, a) \underset{k \to \infty}{\to} 0$

Примеры

$\mathbb{R}^2$ $M_k = (x_k, y_k)$ $P = (a, b)$ $M_k \to P$ *в евкл. метрике, т.е.* $\rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \underset{k \to \infty}{\to} 0 \Leftrightarrow x_k \to a,\ y_k \to b$

Замечание

Есть ρ_1, ρ_2 *- экв. метрики, то* $\rho_1(x_k, a) \to 0 \Leftrightarrow \rho_2(x_k, a) \to 0$

Упражнение

$x_k \to a,\ x_k \to b \Rightarrow a = b$

$(\rho(a,b) \leqslant \rho(a, x_k) + \rho(x_k, b) \to 0 \Rightarrow \rho(a,b) \to 0 \Rightarrow a = b)$

Определение

$E \subset X$, (X, ρ) *- метр. пр-во, то* $a \in X$ *- т. сгущ.* E*, если*

$\forall \mathcal{E}\ \exists x \in E : \rho(a, x) < \mathcal{E}$

Определение

$f : E \to Y$ (X, ρ), (Y, d) *- метр. пр-ва* $(E \subset X)$, a *- т. сгущ.* E, $A \in Y$,

тогда A *- предел отображения* f *в точке* a*, если*

$f(x) \to A$ *при* $x \in E \setminus \{a\} \to a$

(или $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \rho(x, a) < \delta$ *и* $x \in E \subset \{a\}$*, то* $d(f(x), A) < \mathcal{E}$*)*

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ *или* $f(x) \to A$ $x \to a$

Замечание

$A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_{\mathcal{E}}(A)$

1.2 05.09.2019

1.2.1 Примеры для $\mathbb{R}^2$

Будем в $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ - точка сгущения, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$, если

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x, a) < \delta,\ x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < \mathcal{E}$

В $\mathbb{R}^2$ работают:

арифм. действия, теор. о двух миллиционерах, критерий Коши:

Определение

$f : E \to \mathbb{R}$, частный случай $\exists \lim\limits_{x\to a} f \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 :$

$|f(x) - f(y)| < \mathcal{E}\ \ 0 < \rho(x, a), \rho(y, a) < \delta$ (упр)

Упражнение

$\exists \lim\limits_{x\to a} f \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \to a\ (\rho(x_n, a) \to 0)\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ - предел функции в т. (x_0, y_0)

Пример

$f(x, y) = (x + y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$, т.к.$|f(x, y)| \leqslant |x| + |y| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\to} 0$, $\nexists \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to y} f(x, y)$

Пример

$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ - не существует, так как $\lim f(x, x) = 1$, $f(x, 2x) = 0$

Пример

Построить $f(x, y)$ т.ч. $\forall a, b\ \exists \lim\limits_{t\to 0} f(at, bt) = A$, но $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$

$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a}t \to 0$, но при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ предел - единица

Замечание

Если $\gamma(t) \underset{t\to t_0}{a} \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\exists \lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma(t))$

Замечание

Если $\forall \gamma : \gamma(t) \to a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim f(\gamma(t))$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} f$

Замечание

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ - *не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть* $= \lim\limits_{x\to x_0}\overline{f}(x)$

$$\overline{f}(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y) \neq \text{(не обязательно)} \neq f(x,y_0)$$

Определение

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y) = A$, *если*

$$\forall\mathcal{E}>0\ \exists M>0 : \forall x,y : \max(x,y)>M\ |f(x,y)-A|<\mathcal{E}$$

Пример

$f = \frac{y}{x}tg(\frac{x}{x+y})$ - *не имеет предела,* $f(x,x) = tg(\frac{1}{2}),\ f(x,x^2) = xtg(\frac{1}{1+x}) \to 0$

1.3 09.09.2019

1.3.1 Ещё больше определений

<u>Определение</u>

1. $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, *если*

   $\forall\mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : x > M\ y > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

2. $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, *если*

   $\forall\mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : |x| > M\ |y| > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

3. $A = \lim\limits_{P\to\infty} f(P)\ P \in \mathbb{R}^2$, *если*

   $\forall\mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : \rho(0,P) > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

<u>Замечание</u>

Демидович по первым двум определениям

<u>Определение</u>

Для конечного предела: $A = \lim\limits_{x\to a\ y\to+\infty} f(x,y)$, *если*

$$\forall\mathcal{E} > 0 \quad \exists M > 0 \quad \delta > 0 : y > M \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$$

1.3.2 Ещё больше упражнений

<u>Пример</u>

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

<u>Решение</u>

$\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leqslant x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leqslant (x-y)^2$ *для* $x \neq y$

Значит дробь стремится к 0

<u>Пример</u>

$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

<u>Решение</u>

При $x = y$ *предел* $\frac{1}{2}$

При $x = y^2$ *предел 0*

<u>Пример</u>

$f = sin(\frac{\pi y^2}{x^2+3y^2})$

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f$

Решение

Первый не имеет предела $(x = y,\ x = \sqrt{y})$. *Второй* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Третий 0*

Пример

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{sin(y-x^2)}{y-x^2}$$

Решение

$z = y - x^2,\ z \to 0 \Rightarrow x, y \to 0$

$|z| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$

Пример

$f = \frac{1-\sqrt[3]{sin^4 x + cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *найти* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f$

Решение

$1 - \sqrt[3]{t} \underset{t\to1}{} \frac{1-t}{3}$ *(т.к.* $1-\sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1+\sqrt[5]{t}+\sqrt[3]{t^2}}$*)*

Значит $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{1}{3}\frac{1-(sin^4 x+cos^4 y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{2sin^2 y - sin^4 y - sin^4 x}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Заменим по Тейлору: $= \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \frac{2y^2+\overline{o}(y^3)-x^4+\overline{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Попробуем оценить по модулю $|\frac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}|$, *заметим что* $y^2 \leqslant x^2+y^2$, $x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$ *(для* $x^2+y^2 < 1$*), чтобы избавиться от* $\overline{o}$ *оценим так:* $\overline{o} + y^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, $\overline{o} + x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$

Тогда $|\frac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leqslant 2\frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} \to 0$

1.4 12.09.2019

1.4.1 Некоторые особенные примеры

<u>Пример</u>

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}((1+x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{1+xy}} = e$

<u>Пример</u>

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & ,x^2+2^2\neq 0 \\ a & ,else \end{cases}$

1) a =?, т.ч. f - непр

2) a =?, f - непрю на прямых, проходящих через 0

<u>Решение</u>

1) $a = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$

<u>Замечание</u>

$x^n y^m \leqslant (\sqrt{x^2+y^2})^{n+m}$ *и* $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

1.4.2 Частные производные. Определения

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $P_0=(x_0,y_0,z_0)$

<u>Определение</u>

f - диф. в точке P_0*, если* $\exists A,B,C\in\mathbb{R}$*, т.ч.*

$f(x_0,+\delta x, y_0+\delta y, z+\delta z = f(x_0,y_0,z_0)+A\delta x+B\delta y+C\delta z+\overline{o}(\sqrt{(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2})$

Пусть $h=(\delta x,\delta y,\delta z)^T$

$f(P_0+h) = f(P_0) = \begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix}^T h + \overline{o}(|h|)$

$df(x,y,z) = Adx+Bdy+Cdz$

Дифференциал сопоставляет $(dx,dy,dz)\to Adx+Bdy+Cdz$

<u>Определение</u>

Частной произв. по перем. x в т. (x_0,y_0,z_0) *называется предел (если* $\exists$*)*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0,t_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = f'_x(x_0,y_0,z_0)$$

1.4.3 Частные производные. Примеры

__**Утверждение**__

f - дифф. $\Rightarrow \exists$ *част. пр. и* $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ B = \frac{\partial f}{\partial x},\ C = \frac{\partial f}{\partial x}$

Производные старшего порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \neq \text{(не всегда)}\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Частные производные сложной функции

$$w = f(x, y, z),\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.\ (u, v) \to (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$w = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$
$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

__**Пример**__

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial \chi}{\partial v})\frac{\partial \varphi}{\partial u} + ...$$

__**Пример**__

$$F = f(x, xy, xyz) = f(u, v, w)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}1 + \frac{\partial f}{\partial v}y + \frac{\partial f}{\partial w}yz$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v} + uz\frac{\partial}{\partial w}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v})y + \frac{\partial f}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial w})yz + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial}{\partial x}(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (yz)^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + zy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y^2 z\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}$$

Пример

Дано $u = x^y$, *найти* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{d^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x)x^y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \ln^2(x)x^y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y\ln(x)x^{y-1}$$