## 1 Метрические пространства. Примеры.

**Опр**

X - мн-во (X $\neq \varnothing$)
$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ (метрика)

Пара $(X, \rho)$ назыв. метр. пр-вом, если:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. нер-во $\triangle$
   $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$

**Примеры**

1. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ со станд. $\rho$
2. На $\mathbb{R}^2$
   (a) $\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ - манхэттенская метрика
   (b) $\rho_\infty = max\,\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$
   (c) $\rho_p = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$
   (d) $\rho_2$ - евклидова метрика
3. X - город без односторонних дорог, $\rho(A, B)$ - min время, за которое можно добраться от A до B
4. X - мн-во

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases} \text{ - дискретная метрика}$$

**Упр**

Доказать, что это метрики

## 2 Открытые и замкнутые множества. Свойства

**Опр**

Открытый шар с центром в $x_0$ и радиусом $\mathcal{E}$ (окр. $x_0$):

$$B(x_0, \mathcal{E}) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < \mathcal{E}\}$$

**Опр**

$U \subset X, \quad U$ - открыто, если:

$$\forall x \in U \quad \exists \mathcal{E}\colon B(x, \mathcal{E}) \subset U$$

**Опр**

$Z \subset X \quad Z-$ замкнуто, если:

$X \setminus Z$ - открытое мн-во

**Теорема (св-ва откр. мн-в)**

1. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - семейство откр. мн-в

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha - \text{откр.}$$

2. $U_1, ..., U_n$ - откр.(конеч. число)

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i - \text{откр.}$$

3. $\varnothing, \ X-$ откр.

**Док-во**

1. $\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0\colon x \in U_{\alpha_0}$

$$U_{\alpha_0} - \text{откр.} \Rightarrow \exists \mathcal{E}\colon B(x, \mathcal{E}) \subset U_{\alpha_0}$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha - \text{откр.}$$

2. $\forall x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow \forall i \quad x \in U_i$

$$\exists \mathcal{E}_i\colon B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$\mathcal{E} = \min_{i=1,\ldots,n} \{\mathcal{E}_i\} \quad B(x, \mathcal{E}) \subset B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$B(x, \mathcal{E}) \ \subset \ \bigcap_{i=1}^{n} U_i \ \Rightarrow \ \bigcap_{i=1}^{n} U_i - \text{откр}$$

**Пример**

$$U_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$$

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \{0\}$ - объясняет, почему должно быть конечное число в пересечении

**Лемма**

$B(x_0, r)-$ открыто $\forall$ метр. пр-ва $X \quad \forall x_0 \quad \forall r > 0$

**Док-во**

$$x \in B(x_0, r) \Rightarrow \rho(x_0, x) = d < r$$

Возьмём $\mathcal{E} = \dfrac{r-d}{2}$

$B(x, \mathcal{E}) \subset B(x_0, r)$?

*/ Здесь очень внимательно надо смотреть на предположение,
$x_1$ лежит в предполагаемой области за пределами шарика $B(x_0, r)$ */

$$\urcorner\ \exists x_1 \in B(x, \mathcal{E}) \setminus B(x_0, r)$$

$$\rho(x_1, x) < \mathcal{E} = r - d$$

$$\rho(x_0, x) = d$$

$$\rho(x_1, x_0) \geqslant r$$

$$rho(x_1, x_0) \geqslant \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0)$$

$$\rho(x_1, x_0) \geqslant r \quad \text{и} \quad \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0) < r$$

противореч. нер-ву $\triangle$

**Теорема (св-ва замкнутых мн-в)**

1. $\{F_i\}_{i \in A}-$ замкн.

   $$\Rightarrow \bigcap_{i \in A} F_i - \text{замкн.}$$

2. $F_1, ..., F_n-$ замкн.

   $$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i - \text{замкн.}$$

3. $\varnothing$ и $X$ замкн.

Докажем 1:

$$F_i = X \setminus U_i, \quad U_i \text{ - откр.}$$

$$\bigcap F_i = \bigcap (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup U_i$$

## 3 Внутренность и вшеность множества.

**Опр**

X - метр. про-во, $A \subset X, \quad x_0 \in X$
$x_0$ - назыв. внутреней относ. A (в X), если:

$$\exists\, \mathcal{E} > 0 : B(x_0,\ \mathcal{E}) \subset A$$

**Опр**

$x_0$ - назыв. внешней относ. A, если $x_0$ - внутр. для $\overline{A} = X \setminus A$

$$\exists\, \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E})\ \cap\ A = \varnothing$$

**Опр**

Остальные точки - граничные
$x_0$ - граничная, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0\ B(x_0, \mathcal{E})\ \cap\ A \neq \varnothing \text{ и } B(x_0, \mathcal{E}) \not\subset A$$

$\operatorname{Int} A$ - внутренность A - мн-во внутр. точек
$\operatorname{Ex} A$ - внешность A - мн-во внешних точек
$\partial A = \operatorname{Fr} A$ - граница A - мн-во гр. точек

**Теорема**

Следующие определения эквивалентны:

1. $\operatorname{Int} A$ - мн-во внутр. т.
2. Наибольшее (по включению) откр. мн-во, содерж. в A
3. max (по включению) откр. мн-во, содерж. в A
4. $\operatorname{Int} A = \bigcup U_i, \quad U_i -$ откр. $\quad U_i \subset A$
5. $\operatorname{Int} A = (X \setminus \operatorname{Ex} A) \setminus \partial A$

**Док-во**

$(2) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (3)$ т.к объед. откр. - откр.
$(1) \Leftrightarrow (4)$ :
$(\Rightarrow)$ :

$$x_0 \in \text{ мн-во внутр. т. } \subset \bigcup U_i, \quad U_i\text{- откр.} \quad U_i \subset A$$

$$\exists\, \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E})\text{- откр.} \subset A \text{ (по определению } \operatorname{Int} A)$$

$(\Leftarrow):$

$$\exists\ i : x_0 \in U_i \subset A \quad x_0 \in \bigcup U_i$$

$$\exists\ \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U_i \subset A \Rightarrow x_0 \text{ - внутр. т. A}$$

**Теорема**

Следующие определения эквивалентны:

1. $\operatorname{Ex} A$ - мн-во внеш. т.
2. $\operatorname{Ex} A = \operatorname{Int}(X \setminus A)$
3. $\operatorname{Ex} A$ - max (по вкл.) откр. мн-во, не пересек. с A
4. $\operatorname{Ex} A = \bigcup U_i, \quad U_i - \text{откр.} \quad U_i \cap A = \varnothing$

Относительно внутр.

$$A \subset X \Rightarrow (A, \rho) - \text{метр. пр-во}$$
$$B \subset A \quad \operatorname{Int}_A B \neq \operatorname{Int}_X B$$

**Пример**

$$X = \mathbb{R}, \quad \rho - \text{станд.}$$

$$A = [0, 1] \quad B = [0, \frac{1}{2})$$

$$\operatorname{Int}_X B = (0, \frac{1}{2}) \quad \operatorname{Int}_A B = [0, \frac{1}{2})$$

## 4 Замыкание множества.

**Теорема**

Следующие определения эквивалентны:

1. $\operatorname{Cl} A = \{x \in X \mid \forall \mathcal{E} > 0 \quad B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \varnothing\}$
2. $\operatorname{Cl} A = IntA \cup \partial A$
3. $\operatorname{Cl} A = \cap F_i, \quad F_i -$ замк $\quad F_i \supset A$
4. $\operatorname{Cl} A = \min$ (по вкл.) замк. $\supset A$

**Док-во**

(3) $\Leftrightarrow$ (4) - пересеч. замкн. - замкн.
(1) $\Leftrightarrow$ (2) - очевидно
(1) $\Rightarrow$ (3) :

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad x : B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \varnothing$

$\sqsupset x \notin F$- замк. $\quad F \supset A \quad x \in X \setminus F$- откр.

$\exists\ \mathcal{E} > 0 :\ B(x, \mathcal{E})\ \subset\ X \setminus F\ \subset\ X \setminus A$

$\Rightarrow x$ - внеш. противореч.

(3) $\Leftarrow$ (1) :

$x \in \cap F_i$

$\sqsupset \exists \mathcal{E} > 0 : B(x, \mathcal{E}) \cap A = \varnothing$

$B(x, \mathcal{E})$ - откр. (по л.) замк - $F = X \setminus B(x, \mathcal{E}) \quad F \supset A$

$x \notin F$ - противореч.

**Замечание**

1. A - откр. $\Leftrightarrow A = IntA$
2. A - замк. $\Leftrightarrow A = ClA$
3. $\operatorname{Int} A \subset A \subset ClA$
   $\partial A = ClA \setminus IntA$

**Пример**

$X = \mathbb{R}; \quad A = \varnothing$
$\operatorname{Int} A = \varnothing \quad \operatorname{Ex} A = \varnothing \quad \partial A = \mathbb{R}$

**Пример**

Канторово мн-во - замк.

## 5 Топологические пространства. Примеры.

**Опр**

X - мн-во
$\Omega \subset 2^X = \{A \subset X\}$ - мн-во подмн-в X
$(X, \Omega)$ - назыв. топологическим пр-вом, если:

1. $\forall \{U_i\}_{i \in I} \in \Omega \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \Omega$
2. $U_1, U_2, ..., U_n \Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \in \Omega$
3. $\varnothing;\ X \in \Omega$

   $\Omega$ - топология на X
   $U \in \Omega$ - называется открытым мн-вом

**Опр**

$(X, \Omega)$ - топ. пр-во; $F \subset X$
F - называется замкнутым, если $X \setminus F \in \Omega$

**Теорема**

1. $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ - замкн., если $F_i -$ замкн.
2. $F_1 \cup F_2$ - замкн., если $F_1, F_2$ - замкн.
3. $\varnothing, X$ - замкн.

**Примеры**

1. $(X, \rho)$ - топ. пр-во
2. Дискр. пр-во: $\Omega = 2^X$
   Нетрудно заметить, что все его элементы открыты по определению (можно сравнить с мешком гороха, где каждая горошина сама по себе). Также они замкнуты
3. Антидискр. пр-во: $\Omega = \{\varnothing, X\}$
   (можно сравнить с запутанным клубком ниток)
   Замкнуты только $x$ и $\varnothing$

**Опр**

$(X, \Omega)$ - метризуемо, если $\exists$ метрика $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_X$
$\Omega =$ мн-во откр. подмн. в $\rho$
Антидискретное - не метризуемо, если $|\text{X}| > 1$

4. Стрелка
   $X = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+ = \{x \geqslant 0\}$
   $\Omega = \{(a, +\infty)\} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$

5. Связное двоеточие
   $X = \{a, b\}$
   $\Omega = \{\varnothing, X, \{a\}\}$

6. Топология конечных дополнений (Зариского)
   X - беск. мн-во
   Замкнутые конечные мн-ва и X
   $\Omega = \{A \mid X \setminus A$ конечно$\}$

**<u>Утв*</u>**

Вариации топологии Зарицкого:

(a) $\mathbb{C}^n = \{(z_1, ..., z_n) \mid z_i \in CC\}$
$F \subset \mathbb{C}^n$ - замкн., если $F$ является мн-вом решений системы:

$$\begin{cases} f_1(z_1, ..., z_n) = 0 \\ f_2(z_1, ..., z_n) = 0 \\ ... \\ f_k(z_1, ..., z_n) = 0 \end{cases}$$

$f_1, ..., f_k$ - мн-ны от $n$ переменных

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}_{f} = 0 \text{ - эллипс}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \text{ - в } \mathbb{C} \text{ непусто, поэтому используем их}$$

Любое пересечение замкнутых замкнуто?

$$F \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(z_1, ..., z_n) = 0 \\ f_2(z_1, ..., z_n) = 0 \\ ... \\ f_k(z_1, ..., z_n) = 0 \end{cases} \qquad G \longleftrightarrow \begin{cases} g_1(z_1, ..., z_n) = 0 \\ g_2(z_1, ..., z_n) = 0 \\ ... \\ g_k(z_1, ..., z_n) = 0 \end{cases}$$

$$F \cup G \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(z_1, ..., z_n) = 0 \\ f_2(z_1, ..., z_n) = 0 \\ ... \\ f_k(z_1, ..., z_n) = 0 \\ g_1(z_1, ..., z_n) = 0 \\ g_2(z_1, ..., z_n) = 0 \\ ... \\ g_k(z_1, ..., z_n) = 0 \end{cases}$$

**Теорема* (Гильберта о базисе)**

Мн-во решений бесконечной системы равносильно мн-ву решений конечной системы

*здесь когда-нибудь возможно будет алгебраическая формулировка с примером*

**Теорема* (Гильберта)**

Любой идеал можно представить как конечную систему мн-ов

*здесь когда-нибудь возможно будет дополнение*

**Теорема* (Гильберта о нулях)**

$K$ - алгебраически замкнутое поле $\Rightarrow$ замкнутые мн-ва в $K^n$ - идеалы в $K[x_1, ..., x_n]$ - биекция

## 6 База топологии. Критерий базы.

**Опр**

X - топ. пр-во; $A \subset X$
$\operatorname{Int} A = \cup U, \quad U \in \Omega \quad U \subset A$
$\operatorname{Cl} A = \cap F, \quad F-$ замк. $F \supset A$
$\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$

**Опр**

$x_0 \in X$
Окрестностью $x_0$ назыв. $\forall U \in \Omega : x_0 \in U$

**Опр**

$x_0$ назыв. внутренней т. А, если $\exists U_{x_0} \subset A$
$x_0$ назыв. внешей т. А, если $\exists U_{x_0} \cap A = \varnothing$
$x_0$ назыв. граничной, если $\forall U_{x_0} \quad (U_{x_0} \not\subset A)$ и $(U_{x_0} \cap A \neq \varnothing)$

**Опр**

$(X, \Omega)$ - топ. пр-во
$\mathcal{B} \subset \Omega \quad \mathcal{B}$ назыв. базой топологии, если:

$$\forall U \in \Omega \quad \exists \{V_i\} \in \mathcal{B} : \quad U = \bigcup_{i \in I} V_i$$

**Пример**

$X = \mathbb{R}^n$ или другое метр. пр-во
$\mathcal{B} = \{B(x_0, \mathcal{E}) | x_0 \in X, \mathcal{E} > 0\}$ - база топологии
$\forall U$ - откр. $\quad \forall x_0 \in U \quad \exists \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U$

$$\bigcup_{x_0 \in U} B(x_0, \mathcal{E}) = U$$

**Теорема (Критерий базы)**

X - мн-во $\mathcal{B}$ - нек. совокупность подмн-в X
$\mathcal{B}$ - база $\Omega \Leftrightarrow$

1. $\bigcup\limits_{U_i \in \mathcal{B}} U_i = X$

2. $\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} : x \in W; W \subset U \cap V$

**Док-во**

$(\Rightarrow)$ :

очевидно

$(\Leftarrow)$ :

$$\Omega = \{\bigcup_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{B}\}$$

1. $\bigcup\limits_{j \in J} ( \bigcup\limits_{i \in I_j} ) = \bigcup\limits_{i,j} U_i$

2. $(\bigcup\limits_{j} U_j) \cap (\bigcup\limits_{i} U_i) = \bigcup\limits_{i,j} (U_i \cap U_j) = \bigcup\limits_{i,j} ( \bigcup\limits_{x \in U_i \cap U_j} W_x)$

   $$x \in W_x \subset U_i \cap U_j$$

   $$\bigcup_{x \in U_i \cap U_j} W_x = U_i \cap U_j \quad W_x \in \mathcal{B}$$

3. $\varnothing = \bigcup\limits_{i \in \varnothing} U_i \quad X = \bigcup\limits_{U_i \in \mathcal{B}} U_i$

**Теорема (База окр. точки)**

X - мн-во, $\forall x \in X \quad \exists \mathcal{B}_x \subset 2^x$

1. $x \in U \quad \forall U \in \mathcal{B}_x$
2. $U, V \in \mathcal{B}_x \to \exists W \in \mathcal{B}_x : \quad W \subset U \cap V$
3. $y \in U \quad (U \in \mathcal{B}_x) \to \exists V \in \mathcal{B}_y : \quad V \subset U$ Т.е. $\mathcal{B}_x \neq \varnothing \to \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ – база нек. топологии

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 7 Топология произведения пространств.

<u>**Пример**</u> **(- конструкция)**

Даны $X, Y$ - топ. пр-ва
$(X, \Omega_X); \quad (Y, \Omega_Y)$

Введем базу топ. на $X \times Y$:

$$\mathcal{B} = \{U \times V| \quad U \in \Omega_X; \quad V \in \Omega_Y\}$$

Это топология:

$$\Omega_{X\times Y} = \{\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i \mid U_i \in \Omega_X; \quad V_i \in \Omega_Y\}$$

Для объединения - очевидно, для пересечения:

$$(\bigcup_{i\in I} U_i \times V_i) \cap (\bigcup_{j\in J} S_j \times T_j) = \bigcup_{i\in I\ j\in J} ((\underbrace{U_i \cap S_j)}_{\in\Omega_X} \times \underbrace{(V_i \cap T_j)}_{\in\Omega_Y} \in \Omega_{XXY}$$

## 8 Равносильные определения непрерывности.

**Опр**

$(X,\rho)$; $(Y,d)$ - метр. пр-ва $f: X \to Y$
f - назыв. непрерывна в т. $x_0$, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \text{если} \rho(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \mathcal{E}$$

f - непрерывна, если она непр. в каждой точке

**Теорема**

f - непр в $x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall U - \text{откр.} \subset Y : U \ni f(x_0) \quad \exists V \subset X - \text{откр.}: \quad x_0 \in V \text{ и } f(V) \subset U$$

**Док-во**

f - непр. в $x_0$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E})$$

$$\Rightarrow \forall U - \text{ откр.} \subset Y : \quad f(x_0) \in U \Rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 :$$

$$f(x_0) \in B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \Rightarrow \exists \delta > 0 :$$

$$f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \quad B(x_0,\delta) = V$$

$\leftarrow \forall$ обрывается

**Опр**

$X, Y$ - топологические пр-ва, $x_0 \in X$, $f : X \to Y$

f назыв. непр. в т. $x_0$, если $\forall$откр. $U \ni f(x_0)$:

$\exists$откр. $V$: $x_0 \in V$ и $f(V) \subset U$

**Теорема**

$X, Y$ - метрич. (тополог.), $f : X \to Y$. f - непр $\Leftrightarrow$

$$\forall U \text{откр. в } Y \quad \underset{\text{откр. в X}}{f^{-1}(U)} = \{x : f(x) \in U\}$$

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Пример***

*здесь когда-нибудь будет пример*

## 9 Прообраз топологии. Индуцированная топология.

**Опр**

Пусть заданы $(X, \Omega_1)$ и $(X, \Omega_2)$
Тогда $\Omega_1$ сильнее (тоньше) $\Omega_2$, если $\Omega_1 \supset \Omega_2$

Или: id : $(X, \Omega_1) \underset{\text{непр.}}{\to} (X, \Omega_2)$

**Утв**

$f : X \to Y$ - отобр. мн-в, $(Y, \Omega_Y)$ - топ. пр-во
Вопрос: можно ли ввести топологию на $X$, чтобы отображение стало непрерывным? Да можно, если $\Omega_X$ - дискретная
$\Omega_X$ - самая слабая топ.: f - непр.
$\forall U \in \Omega_Y \quad f^{-1}(U)$ должен быть открытым в X
Вопрос: не является ли совокупность $f^{-1}(U)$ уже топологией?

**Теорема**

$\{f^{-1}(U)\}$ - топология на X и она назыв. прообразом $\Omega_Y$

**Док-во**

1. $f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in I} U_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(U_i) \quad (*)$
2. $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$
3. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \qquad f^{-1}(Y) = X$

$$(*) : \quad f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \{x |\ f(x) \in \bigcup_{i \in I} U_i\} = \{x |\ \exists\ i \in I : f(x) \in U_i\}$$

**Опр**

$(X, \Omega_X)$ - топ. пр-во
$A \subset X$
$\Omega_A = \{U \cap A |\ U \in \Omega_X\}$ - индуцированная топология на A

## 10 Инициальная топология. Топология произведения как инициальная.

**Опр**

$\forall i \in I \quad f_i : X \to Y_i$
$(Y_i, \Omega_i)$ - топ. пр-во

$$\{f_{i1}^{-1}(U_1) \cap f_{i2}^{-1}(U_2) \cap ... \cap f_{ik}^{-1}(U_k) | \underset{j=1,...,k \in \mathbb{N}}{U_j \in \Omega_{ij}}\} \text{ - база нек. топологии}$$

$\Omega_X$ - соотв. топология (инициальная топология)

**Опр**

$\{f_i^{-1}(U)\}$ - предбаза топологии

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

**Теорема**

Топология произведения совпадает с инициальной

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Опр**

$$\prod_{i \in I} x_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} x_i \mid f(i) \in X_i\}$$

$$p_k : \prod_{i \in I} x_i \to X_k \quad k \in I$$

$$p_k(f) = f(k)$$

$$\Rightarrow \text{если } X_i\text{- топ.} \to \prod_{i \in I} X_i - \text{топ.}$$

*когда-нибудь билет будет понят и поправлен*

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

## 11 Финальная топология. Фактортопология. Приклеивание.

*когда-нибудь бидет будет поправлен*

**Опр**

$\forall i \in I \quad f_i : \; X_i \to Y$ - отобр.
$(X_i, \Omega_i)$
Хотим завести на Y топологию:
$\forall f_i$ - непр. Топ на Y самая сильная
$U \subset Y \quad \forall i \in I \quad f_i^{-1}(U) \in \Omega_i$
$\Omega_Y = \{U \mid \forall i \; f_i^{-1}(U) \in \Omega_i\}$
$\varnothing, Y \in \Omega_Y$
$f_i^{-1}(U_1 \cap U_2) = f_i^{-1}(U_1) \cap f_i^{-1}(U2)$

$$f_i^{-1}(\bigcup_{k \in K} U_k) = \bigcup_{k \in K} f_i^{-1}(U_k)$$

**Пример**

Приклеивание
$X, Y$ - пр-ва
$A \subset X \quad f : A \to Y$ - отобр.
Хотим получить $X \cup_f Y$ - приклеивание
$X \cup_f Y = X \cup Y / \sim \quad \forall a \; a \sim f(a)$
U - откр. в $X \cup_f Y$, если $U \cap X$ - откр. в X и
$U \cap Y$ - откр. в Y (если f - инъект.)

## 12 Гомеоморфизм.

**Опр**

$f : X \to Y$ - гомеоморфизм ($X \simeq Y$), если:

1. f - непр.
2. f - биекция
3. $f^{-1}$ - непр.

**Примеры**

1. $(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}) \simeq \mathbb{R} \qquad (f(x) = \operatorname{tg} x)$
2. Не гомеоморфизм (3 пункт):

$$[0,\ 2\pi) \xrightarrow{f} S' = \{z \in \sigma \mid |z| = 1\}$$

$$f(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad f \text{ - непр. и биект.}$$

**Предположение**

$\simeq$ - отношение эквив.

**Теорема**

Если $(X, \Omega_X) \simeq (Y, \Omega_Y)$, то:
$f_* : \Omega_X \to \Omega_Y$ - биекция, $f_*(U) = f(U)$

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 13 Связность топологического пространства и множества.

**Опр**

X называется несвязным, если $\exists$откр. $U_1, U_2 \neq \varnothing \in X$ :

$$X = U_1 \cap U_2, \qquad U_1 \cup U_2 = \varnothing$$

**Упр**

Написать определение связного, как не несвязного

**Опр**

$A \subset X$, $A$ называется связным, если $A$ связно как топол. пр-во с индуцированной топологией

$A$ несв., если $\exists$ открытые $U_1, U_2 \subset X$:

$$\begin{matrix} (U_1 \cup A) \cap (U_2 \cup A) = A \\ (U_1 \cup A) \cup (U_2 \cup A) = \varnothing \\ U_1 \cup A \neq \varnothing \\ U_2 \cup A \neq \varnothing \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} U_1 \cap U_2 \supset A \\ U_1 \cup U_2 \cup A = \varnothing \\ U_1 \cup A \neq \varnothing \\ U_2 \cup A \neq \varnothing \end{matrix}$$

## 14 Связность отрезка.

**Теорема**

$[0, 1]$ - связен

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 15 Связность замыкания. Связность объединения.

**Теорема**

$(X, \Omega)$ - топ. пр-во, $A \subset X$ - связно

$$\Rightarrow \forall B : \qquad A \subset B \subset ClA \qquad \Rightarrow B \text{ - связно}$$

**Следствие**

Если A - связ., то ClA - связ.

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Теорема**

$(X, \Omega)$ - топ. пр-во, $A, B \subset X$ - связны,

$$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \cup B \text{ - связно}$$

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 16 Связность и непрерывные отображения.

**Теорема**

$(X, \Omega_X),\ (Y, \Omega_Y)$ - топ. пр-ва, $f: X \to Y$ - непр.,

X - связно $\Rightarrow$ f(x) - связно

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Следствие**

Связность - топологическое св-во

**Примеры**

*здесь когда-нибудь будут примеры*

**Следствие**

X - связно $\Leftrightarrow$ $\nexists$ сюръект. непр. $f: X \to \{0, 1\}$

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 17 Связность произведения пространств

**Теорема***

$\{X_i\}_{i\in I}$ - топ. пр-во

$$\Rightarrow \forall i \quad X_i \text{ - св. } \Leftrightarrow \prod_{i\in I} X_i \text{ - связ.}$$

**Теорема**

X, Y - топ. пр-ва

$$X \times Y \text{ - связн.} \Leftrightarrow \text{X, Y - связн.}$$

**Замечание**

Любое конечное произведение связных топ. пр-в связно

**Теорема**

$$\prod_{i\in I} X_i \text{ - связно} \Leftrightarrow \forall i \in I \quad X_i \text{ - связно}$$

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 18 Компоненты Связности.

**Опр**

X - топ. пр-во
Компонентой связности т. $x_0 \in X$ назыв. наиб. по включению связное множество, ее содерж.

**Опр (другое определение)**

A - компонента связности $\Leftrightarrow$

1. A связно
2. $\forall B \underset{\neq}{\supset} A \Rightarrow B$ - несвязно

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

**Следствие**

Компоненты связности могут не быть открытыми

**Теорема**

1. $\forall x, y \in X \quad K_x = K_y$ или $K_x \cap K_y = \varnothing$
2. компоненты связности - замк.

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Опр***

X - топ. пр-во назыв. вполне несвязным, если $\forall x \in X : K_x = \{x\}$

## 19 Линейная связность

**Опр**

X - топ. пр-во, $f : [0, 1] \to X$ - непр.
f называется путем в X

$f(0)$ - начало пути

$f(1)$ - конец пути

**Опр**

X называется лин. связным, если $\forall$две точки X можно соединить путём

**Замечание**

Начало и конец пути меняются: $g(t) := f(1 - t)$

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

**Теорема**

X - топ. пр-во
X - лин. св. $\Rightarrow$ X - св.

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

**Опр**

Компоненты лин. связности - max лин. св. мн-ва

**Замечание**

*Компоненты лин. связности не всегда замкнуты*

**Теорема***

A, B - лин. св. $\quad A \cap B \neq \varnothing \to A \cup B$ - лин.св.

**Теорема***

X, Y - топ. пр-во; $\quad f : X \to Y$ - непр.
X - лин. св. $\to$ f(x) - лин. св.

## 20 Компактность. Примеры.

**Опр**

(X, Ω) - топ. пр-во
X - компакт, если из любого открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие
$\forall \{U_i\}_{i \in I}, \quad U_i \in \Omega$

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X \to \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists \{i_1, ..., i_n\}_{ij \in I} : \bigcup_{k=1}^{n} U_{ik} = X)$$

**Примеры**

1. Конечное топ. пр-во всегда компактно
2. Дискретное бесконечное множ. не комп.
3. Антидискр. мн-во комп.
4. Топология зарицкого - комп.
   (выберем окр. мн-во, оно покрывается конечным набором мн-в, для каждой из остальных также)
5. $X = \mathbb{R}$ с топологией стрелки - не компакт
   $(U_n = (-n, \ \infty))$
6. ($\mathbb{R}$, станд.) - не компакт
   $(U_n = (n, \ \infty))$
7. $[0, 1]$ - компакт

**Опр**

$(X, \Omega)$ - топ. пр-во
$A \subseteq X$ - компактно, если оно комп. в индуц. топ.

**Теорема**

X - комп. $A \subseteq X$ - замк. $\Rightarrow A$ - комп.

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 21 Простейшие свойства компактности.

**Теорема**

$f : X \to Y, \quad A \subset X$ - компакт $\Rightarrow f(A)$ - комп. в Y

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Следствие**

Компактность - топ. св-во

## 22 Компактность произведения пространств.

**Теорема** **(А.Н. Тихонов)**

$$\{X_i\}_{i\in I} \text{ - комп.} \Leftrightarrow \prod_{i\in I} X_i \text{ - комп.}$$

**Теорема**

X, Y - комп $\Leftrightarrow X \times Y$ - комп.

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 23 Компактность и хаусдорфовость

**Опр**

X называется хаусдорфовым, если:

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \quad \exists U_{x_1}, U_{x_2} : \quad U_{x_1} \cap U_{x_2} = \varnothing$$

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

**Теорема**

X - хаусдорф. A - комп $\in$ X $\Rightarrow A$ - замк.

**Док-во**

$X \setminus A$ - откр?

$$x_0 \in X \setminus A$$

$$\forall x_1 \in A \Rightarrow \exists U_{x_0} \ni x_0;\ V_{x_1} \ni x_1$$

$$U_{x_0} \cap V_{x_1} = \varnothing$$

$$\bigcup_{x_1 \in A} V_{x_1} \subset A \Rightarrow x_1, x_2, ..., x_k : \quad \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i} \supset A$$

$$U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^{k} U_{x_i} \text{ - искомая окр. } U_{x_0} \cap A = \varnothing$$

(Иначе $U_{x_0} \cap V_{x_i} \neq \varnothing, \quad U_{x_i} \cap V_{x_i} \neq \varnothing$)

**Теорема**

$f : X \to Y$ непр., биекция
X - комп.
Y - хаусдорф.
$\Rightarrow f$ - гомеоморф.

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 24 Лемма Лебега. Компактность отрезка.

**Теорема (Лемма Лебега)**

$X = [0,1] \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i \qquad \{U_i\}_{i\in I}$ - откр. покр. X

$$\Rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 : \forall x_0 \; \exists i \in I : B(x_0, \mathcal{E}) \subseteq U_i$$

($\mathcal{E}$ зависит от покр., называется числом Лебега)

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Следствие**

$[0,1]$ - компактен

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 25 Критерий компактности подмножеств евклидова пространства.

**Теорема**

$A \subset \mathbb{R}^n$

A - комп. $\Leftrightarrow A$ - замк и огр.

**Опр**

A - огр., если $\exists N : A \subset B(0, N)$

**Док-во**

$(\Rightarrow)$:

$A$ - замк. т.к. $\mathbb{R}^n$ - хаусдорф.

A - огр. $\{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$(\Leftarrow)$:

$A \subset [-N, N] \times [-N, N] \times ... \times [-N, N] = K$, т.к. огр K - компакт (каждый отрезок компактен, произведение комп. компактно)

A - замк. в K $\Rightarrow$ A - комп.

## 26 Теорема Вейерштрасса. Примеры.

**Теорема (Вейерштрасса)**

K - компакт., $f : K \to \mathbb{R}$ - непр.

$$\to \exists x_0 \in K : \quad \forall x \in K \quad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (x_0 - max)$$

**Док-во**

f(K) - комп. $\subset \mathbb{R} \ \to f(K)$ - замк. и огр $\to$
$\sup f(K) \in f(K)$ (замк.)
$\sup f(K) \neq \infty$ (огр.)
$\sup f(K) = f(x_0)$

## 27 Вторая аксиома счётности и сепарабельность.

**Опр**

X - обл. II А.С., если в X $\exists$ счетная база

**Опр**

X - назыв сепараб., если $\exists$ A $\subset$ X
|A| $\leqslant \aleph_0$ и $ClA = X$

**Опр**

A - всюду плотно, если ClA = X

**Теорема**

X - II А.С. $\to$ X - сепараб.

## 28 Теорема Линделёфа.

**Теорема**

X - II A.C. $\to$ из $\forall$ откр. покр. X можно извлечь не более чем счетное подпокрытие

## 29 Первая аксиома счётности.

**Опр**

База окр-тей точки
$\forall x \quad \exists \{U_{x_i}\}_{i \in I_x}$

1. $U_{x_i} \in \Omega; \quad x \in U_{x_i}$
2. $\forall U \in \Omega \ : \ x \in U \quad \exists U_{x_i} \ : \ x \in U_{x_i} \subset U$

**Опр**

Если $\exists$ база окр-тей:
$\forall x \ \{U_{x_i}\}_{i \in I_x}$ не более чем счетное $\to$ X удовл. I А.С.

## 30 Из компактности следует секвенциальная компактность (с первой АС).

## 31 Из секвенциальной компактности следует компкатность (со второй АС).

## 32 Полнота и вполне ограниченность метрических пространств.

**Опр**

Фунд. послед.
$\{X_n\}$ - фунд., если $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N : \rho(X_n, X_m) < \mathcal{E}$

**Опр**

X назыв. полным, если $\forall$ фунд. послед. сходится

**Опр**

$\{X_i\}_{i \in I}$ - $\mathcal{E}$-сеть, если $\forall x \quad \exists x_i : \rho(x, x_i) < \mathcal{E}$

**Опр**

X назыв. вполне огранич., если $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists$ конечная $\mathcal{E}$-сеть

## 33 Из полноты и вполне ограниченности следует компактность

**Теорема** **(равносильные)**

1. X - компактно
2. X - секцвенц. комп.
3. X - полн. и вполне огр.

## 34 Аксиомы отделимости.

**Теорема (Колмогорова)**

$$\forall x, y \in X : x \neq y \;\rightarrow\; \exists U \in \Omega$$

**Теорема (Тихонова)**

$$\forall x, y \in X : x \neq y \;\rightarrow\; \exists U \in \Omega$$

**Теорема (Хаусдорфа)**

$$\forall x, y \in X \quad \exists U_x, U_y :\; U_x \cap U_y = \varnothing$$

**Теорема (3)**

$\forall x \in X$ и замкнуто $F \subseteq X,\; x \notin F$
$\exists U_x$ и $U_F :\; U_x \cap U_F = \varnothing$

**Теорема (4)**

$F_1, F_2$ - замк. : $F_1 \cap F_2 = \varnothing$
$\exists U_{F_1}$ и $U_{F_2} :\; U_{F_1} \cap U_{F_2} = \varnothing$
$T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0$

## 35 Нормальность матрического пространства.

**Опр**

$(X, \Omega)$ - хаусдорф.
$X$ - нормально $\Leftrightarrow \forall F$ - замк., $\forall G \in \Omega \quad F \subseteq G \rightarrow \exists G' \in \Omega:$
$F \subseteq G' \subseteq ClG' \subseteq G$