

# 1 Метрические пространства. Примеры.

## Опр

$X$  - мн-во ( $X \neq \emptyset$ )

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  (метрика)

Пара  $(X, \rho)$  назыв. метр. пр-вом, если:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$  и  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. нер-во  $\triangle$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

## Примеры

1.  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  со станд.  $\rho$

2. На  $\mathbb{R}^2$

(a)  $\rho_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  - манхэттенская метрика

(b)  $\rho_\infty = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

(c)  $\rho_p = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$

(d)  $\rho_2$  - евклидова метрика

3.  $X$  - город без односторонних дорог,  $\rho(A, B)$  - min время, за которое можно добраться от А до В

4.  $X$  - мн-во

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases} \text{ - дискретная метрика}$$

## Упр

Доказать, что это метрики

## 2 Открытые и замкнутые множества. Свойства

### Опр

Открытый шар с центром в  $x_0$  и радиусом  $\mathcal{E}$  (окр.  $x_0$ ):

$$B(x_0, \mathcal{E}) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < \mathcal{E}\}$$

### Опр

$U \subset X$ ,  $U$  - открыто, если:

$$\forall x \in U \quad \exists \mathcal{E}: B(x, \mathcal{E}) \subset U$$

### Опр

$Z \subset X$   $Z$  - замкнуто, если:

$$X \setminus Z - \text{открытое мн-во}$$

### Теорема (св-ва откр. мн-в)

1.  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  - семейство откр. мн-в

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha - \text{откр.}$$

2.  $U_1, \dots, U_n$  - откр. (конеч. число)

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i - \text{откр.}$$

3.  $\emptyset, X$  - откр.

### Док-во

1.  $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in U_{\alpha_0}$

$$U_{\alpha_0} - \text{откр.} \Rightarrow \exists \mathcal{E}: B(x, \mathcal{E}) \subset U_{\alpha_0}$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha - \text{откр.}$$

2.  $\forall x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \forall i \quad x \in U_i$

$$\exists \mathcal{E}_i: B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$\mathcal{E} = \min_{i=1, \dots, n} \{\mathcal{E}_i\} \quad B(x, \mathcal{E}) \subset B(x, \mathcal{E}_i) \subset U_i$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i - \text{откр.}$$

### Пример

$$U_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{0\}$  - объясняет, почему должно быть конечное число в пересечении

### Лемма

$B(x_0, r)$  - открыто  $\forall$  метр. пр-ва  $X \quad \forall x_0 \quad \forall r > 0$

### Док-во

$$x \in B(x_0, r) \Rightarrow \rho(x_0, x) = d < r$$

$$\text{Возьмём } \mathcal{E} = \frac{r - d}{2}$$

$$B(x, \mathcal{E}) \subset B(x_0, r)?$$

\*/ Здесь очень внимательно надо смотреть на предположение,  $x_1$  лежит в предполагаемой области за пределами шарика  $B(x_0, r)$  \*/

$$\supset \exists x_1 \in B(x, \mathcal{E}) \setminus B(x_0, r)$$

$$\rho(x_1, x) < \mathcal{E} = r - d$$

$$\rho(x_0, x) = d$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq r$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0)$$

$$\rho(x_1, x_0) \geq r \quad \text{и} \quad \rho(x_1, x) + \rho(x, x_0) < r$$

противореч. нер-ву  $\Delta$

### Теорема (св-ва замкнутых мн-в)

1.  $\{F_i\}_{i \in A}$  - замкн.

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in A} F_i - \text{замкн.}$$

2.  $F_1, \dots, F_n$  - замкн.

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i - \text{замкн.}$$

3.  $\emptyset$  и  $X$  замкн.

Докажем 1:

$$F_i = X \setminus U_i, \quad U_i - \text{откр.}$$

$$\bigcap F_i = \bigcap (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup U_i$$

### 3 Внутренность и внешность множества.

#### Опр

$X$  - метр. про-во,  $A \subset X$ ,  $x_0 \in X$   
 $x_0$  - назыв. внутренней относ.  $A$  (в  $X$ ), если:

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \subset A$$

#### Опр

$x_0$  - назыв. внешней относ.  $A$ , если  $x_0$  - внутр. для  $\bar{A} = X \setminus A$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \cap A = \emptyset$$

#### Опр

Остальные точки - граничные

$x_0$  - граничная, если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \ B(x_0, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset \text{ и } B(x_0, \mathcal{E}) \not\subset A$$

$\text{Int } A$  - внутренность  $A$  - мн-во внутр. точек

$\text{Ex } A$  - внешность  $A$  - мн-во внешних точек

$\partial A = \text{Fr } A$  - граница  $A$  - мн-во гр. точек

#### Теорема

Следующие определения эквививалентны:

1.  $\text{Int } A$  - мн-во внутр. т.
2. Наибольшее (по включению) откp. мн-во, содерж. в  $A$
3.  $\max$  (по включению) откp. мн-во, содерж. в  $A$
4.  $\text{Int } A = \bigcup U_i$ ,  $U_i$  - откp.  $U_i \subset A$
5.  $\text{Int } A = (X \setminus \text{Ex } A) \setminus \partial A$

#### Док-во

(2)  $\Leftrightarrow$  (4)  $\Leftrightarrow$  (3) т.к объедин. откp. - откp.

(1)  $\Leftrightarrow$  (4) :

( $\Rightarrow$ ) :

$$x_0 \in \text{мн-во внутр. т.} \subset \bigcup U_i, \quad U_i \text{- откp.} \quad U_i \subset A$$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x_0, \mathcal{E}) \text{- откp.} \subset A \text{ (по определению } \text{Int } A)$$

$(\Leftarrow) :$

$$\exists i : x_0 \in U_i \subset A \quad x_0 \in \bigcup U_i$$

$$\exists \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U_i \subset A \Rightarrow x_0 - \text{внутр. т. } A$$

### Теорема

Следующие определения эквививалентны:

1.  $\text{Ex } A$  - мн-во внеш. т.
2.  $\text{Ex } A = \text{Int}(X \setminus A)$
3.  $\text{Ex } A$  - max (по вкл.) откp. мн-во, не пересек. с  $A$
4.  $\text{Ex } A = \bigcup U_i, \quad U_i - \text{откр.} \quad U_i \cap A = \emptyset$

Относительно внутр.

$$A \subset X \Rightarrow (A, \rho) - \text{метр. пр-во}$$

$$B \subset A \quad \text{Int}_A B \neq \text{Int}_X B$$

### Пример

$$X = \mathbb{R}, \quad \rho - \text{станд.}$$

$$A = [0, 1] \quad B = [0, \frac{1}{2})$$

$$\text{Int}_X B = (0, \frac{1}{2}) \quad \text{Int}_A B = [0, \frac{1}{2})$$

## 4 Замыкание множества.

### Теорема

Следующие определения эквививалентны:

1.  $\text{Cl } A = \{x \in X \mid \forall \mathcal{E} > 0 \quad B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset\}$
2.  $\text{Cl } A = \text{Int } A \cup \partial A$
3.  $\text{Cl } A = \bigcap F_i, \quad F_i - \text{замк} \quad F_i \supset A$
4.  $\text{Cl } A = \min (\text{по вкл.}) \text{ замк. } \supset A$

### Док-во

(3)  $\Leftrightarrow$  (4) - пересеч. замкн. - замкн.

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) - очевидно

(1)  $\Rightarrow$  (3) :

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad x : B(x, \mathcal{E}) \cap A \neq \emptyset$$

$$\square x \notin F\text{- замк.} \quad F \supset A \quad x \in X \setminus F\text{- откр.}$$

$$\exists \mathcal{E} > 0 : B(x, \mathcal{E}) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$$

$$\Rightarrow x - \text{внеш.} \quad \text{противореч.}$$

(3)  $\Leftarrow$  (1) :

$$x \in \bigcap F_i$$

$$\square \exists \mathcal{E} > 0 : B(x, \mathcal{E}) \cap A = \emptyset$$

$$B(x, \mathcal{E}) - \text{откр. (по л.)} \quad \text{замк} - F = X \setminus B(x, \mathcal{E}) \quad F \supset A$$

$$x \notin F - \text{противореч.}$$

### Замечание

1.  $A - \text{откр.} \Leftrightarrow A = \text{Int } A$

2.  $A - \text{замк.} \Leftrightarrow A = \text{Cl } A$

3.  $\text{Int } A \subset A \subset \text{Cl } A$   
 $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$

### Пример

$$X = \mathbb{R}; \quad A = \emptyset$$

$$\text{Int } A = \emptyset \quad \text{Ex } A = \emptyset \quad \partial A = \mathbb{R}$$

### Пример

Канторово мн-во - замк.

## 5 Топологические пространства. Примеры.

### Опр

$X$  - мн-во

$\Omega \subset 2^X = \{A \subset X\}$  - мн-во подмн-в  $X$

$(X, \Omega)$  - назыв. топологическим пр-вом, если:

1.  $\forall \{U_i\}_{i \in I} \in \Omega \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \Omega$
2.  $U_1, U_2, \dots, U_n \Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \Omega$
3.  $\emptyset; X \in \Omega$

$\Omega$  - топология на  $X$

$U \in \Omega$  - называется открытым мн-вом

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во;  $F \subset X$

$F$  - называется замкнутым, если  $X \setminus F \in \Omega$

### Теорема

1.  $\bigcap_{i \in I} F_i$  - замкн., если  $F_i$  - замкн.
2.  $F_1 \cup F_2$  - замкн., если  $F_1, F_2$  - замкн.
3.  $\emptyset, X$  - замкн.

### Примеры

1.  $(X, \rho)$  - топ. пр-во
2. Дискр. пр-во:  $\Omega = 2^X$   
Нетрудно заметить, что все его элементы открыты по определению (можно сравнить с мешком гороха, где каждая горошина сама по себе). Также они замкнуты
3. Антидискр. пр-во:  $\Omega = \{\emptyset, X\}$   
(можно сравнить с запутанным клубком ниток)  
Замкнуты только  $x$  и  $\emptyset$

### Опр

$(X, \Omega)$  - метризуемо, если  $\exists$  метрика  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_X$

$\Omega$  - мн-во откр. подмн. в  $\rho$

Антидискретное - не метризуемо, если  $|X| > 1$

4. Стрелка

$$X = \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{R}_+ = \{x \geq 0\}$$

$$\Omega = \{(a, +\infty)\} \cup \{\emptyset\} \cup \{X\}$$

5. Связное двоеточие

$$X = \{a, b\}$$

$$\Omega = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

6. Топология конечных дополнений (Зариского)

$$X - \text{беск. мн-во}$$

$$\text{Замкнутые конечные мн-ва и } X$$

$$\Omega = \{A \mid X \setminus A \text{ конечно}\}$$

УТВ\*

Вариации топологии Зарицкого:

- (a)  $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}\}$   
 $F \subset \mathbb{C}^n$  - замкн., если  $F$  является мн-вом решений системы:

$$\begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ f_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

$f_1, \dots, f_k$  - мн-ны от  $n$  переменных

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}_f = 0 - \text{эллипс}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 - \text{в } \mathbb{C} \text{ не пусто, поэтому используем их}$$

Любое пересечение замкнутых замкнуто?

$$F \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ f_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases} \quad G \longleftrightarrow \begin{cases} g_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ g_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ g_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$



$$F \cup G \longleftrightarrow \begin{cases} f_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ f_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ f_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ g_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ g_2(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \dots \\ g_k(z_1, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

### Теорема\* (Гильберта о базисе)

Мн-во решений бесконечной системы равносильно мн-ву решений конечной системы

\*здесь когда-нибудь возможно будет алгебраическая формулировка с примером\*

### Теорема\* (Гильберта)

Любой идеал можно представить как конечную систему мн-ов

\*здесь когда-нибудь возможно будет дополнение\*

### Теорема\* (Гильберта о нулях)

$K$  - алгебраически замкнутое поле  $\Rightarrow$  замкнутые мн-ва в  $K^n$   
- идеалы в  $K[x_1, \dots, x_n]$  - биекция

## 6 База топологии. Критерий базы.

### Опр

$X$  - топ. пр-во;  $A \subset X$   
 $\text{Int } A = \cup U, \quad U \in \Omega \quad U \subset A$   
 $\text{Cl } A = \cap F, \quad F - \text{ замк. } F \supset A$   
 $\partial A = \text{Cl } A \setminus \text{Int } A$

### Опр

$x_0 \in X$   
Окрестностью  $x_0$  назыв.  $\forall U \in \Omega : x_0 \in U$

### Опр

$x_0$  назыв. внутренней т.  $A$ , если  $\exists U_{x_0} \subset A$   
 $x_0$  назыв. внешней т.  $A$ , если  $\exists U_{x_0} \cap A = \emptyset$   
 $x_0$  назыв. граничной, если  $\forall U_{x_0} \quad (U_{x_0} \not\subset A)$  и  $(U_{x_0} \cap A \neq \emptyset)$

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во  
 $\mathcal{B} \subset \Omega$   $\mathcal{B}$  назыв. базой топологии, если:

$$\forall U \in \Omega \quad \exists \{V_i\} \in \mathcal{B} : \quad U = \bigcup_{i \in I} V_i$$

### Пример

$X = \mathbb{R}^n$  или другое метр. пр-во  
 $\mathcal{B} = \{B(x_0, \mathcal{E}) | x_0 \in X, \mathcal{E} > 0\}$  - база топологии  
 $\forall U$  - откp.  $\forall x_0 \in U \quad \exists \mathcal{E} : B(x_0, \mathcal{E}) \subset U$

$$\bigcup_{x_0 \in U} B(x_0, \mathcal{E}) = U$$

### Теорема (Критерий базы)

$X$  - мн-во  $\mathcal{B}$  - нек. совокупность подмн-в  $X$   
 $\mathcal{B}$  - база  $\Omega \Leftrightarrow$

1.  $\bigcup_{U_i \in \mathcal{B}} U_i = X$
2.  $\forall U, V \in \mathcal{B} \quad \forall x \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} : x \in W; W \subset U \cap V$

### Док-во

$(\Rightarrow) :$

очевидно

$(\Leftarrow) :$

$$\Omega = \{\bigcup_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{B}\}$$

$$1. \bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I_j} U_i) = \bigcup_{i,j} U_i$$

$$2. (\bigcup_j U_j) \cap (\bigcup_i U_i) = \bigcup_{i,j} (U_i \cap U_j) = \bigcup_{i,j} (\bigcup_{x \in U_i \cap U_j} W_x)$$

$$x \in W_x \subset U_i \cap U_j$$

$$\bigcup_{x \in U_i \cap U_j} W_x = U_i \cap U_j \quad W_x \in \mathcal{B}$$

$$3. \emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i \quad X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{B}} U_i$$

### Теорема (База окр. точки)

$X$  - мн-во,  $\forall x \in X \quad \exists \mathcal{B}_x \subset 2^X$

$$1. x \in U \quad \forall U \in \mathcal{B}_x$$

$$2. U, V \in \mathcal{B}_x \rightarrow \exists W \in \mathcal{B}_x : W \subset U \cap V$$

$$3. y \in U \quad (U \in \mathcal{B}_x) \rightarrow \exists V \in \mathcal{B}_y : V \subset U \text{ T.e. } \mathcal{B}_x \neq \emptyset \rightarrow \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x - \text{база нек. топологии}$$

### Док-во

\*здесь когда-нибудь будет док-во\*

## 7 Топология произведения пространств.

### Пример (- конструкция)

Даны  $X, Y$  - топ. пр-ва  
 $(X, \Omega_X); (Y, \Omega_Y)$

Введем базу топ. на  $X \times Y$ :

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \Omega_X; V \in \Omega_Y\}$$

Это топология:

$$\Omega_{X \times Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \mid U_i \in \Omega_X; V_i \in \Omega_Y \right\}$$

Для объединения - очевидно, для пересечения:

$$\left( \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} S_j \times T_j \right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} \underbrace{(U_i \cap S_j)}_{\in \Omega_X} \times \underbrace{(V_i \cap T_j)}_{\in \Omega_Y} \in \Omega_{X \times Y}$$

## 8 Равносильные определения непрерывности.

### Опр

$(X, \rho); (Y, d)$  - метр. пр-ва  $f : X \rightarrow Y$

$f$  - назыв. непрерывна в т.  $x_0$ , если:

$$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \text{если } \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \mathcal{E}$$

$f$  - непрерывна, если она непр. в каждой точке

### Теорема

$f$  - непр в  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall U - \text{откр.} \subset Y : U \ni f(x_0) \quad \exists V \subset X - \text{откр.} : \quad x_0 \in V \text{ и } f(V) \subset U$$

### Док-во

$f$  - непр. в  $x_0$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E})$$

$$\Rightarrow \forall U - \text{откр.} \subset Y : \quad f(x_0) \in U \Rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 :$$

$$f(x_0) \in B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \Rightarrow \exists \delta > 0 :$$

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \mathcal{E}) \subset U \quad B(x_0, \delta) = V$$

$\leftarrow \forall$  обрывается

### Опр

$X, Y$  - топологические пр-ва,  $x_0 \in X, f : X \rightarrow Y$

$f$  назыв. непр. в т.  $x_0$ , если  $\forall \text{откр. } U \ni f(x_0) :$

$$\exists \text{откр. } V : x_0 \in V \text{ и } f(V) \subset U$$

### Теорема

$X, Y$  - метрич. (тополог.),  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  - непр  $\Leftrightarrow$

$$\forall U \text{откр. в } Y \quad \underset{\text{откр. в } X}{f^{-1}(U)} = \{x : f(x) \in U\}$$

### Док-во

\*здесь когда-нибудь будет док-во\*

## 9 Прообраз топологии. Индуцированная топология.

### Опр

$f : X \rightarrow Y$  - отображ. мн-в

$(Y, \Omega_Y)$  - топ. пр-во

$\Omega_X$  - самая слабая топ.

$f$  - непр.

$\forall U \in \Omega_Y \quad f^{-1}(U)$  должен быть открытым в  $X$

### Теорема

$\{f^{-1}(U)\}$  - топология на  $X$  и она назыв. прообразом  $\Omega_Y$

### Док-во

$$1. \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \quad (*)$$

$$2. \quad f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$$

$$3. \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad f^{-1}(Y) = X$$

$$(*) : \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \{x \mid f(x) \in \bigcup_{i \in I} U_i\} = \{x \mid \exists i \in I : f(x) \in U_i\}$$

### Опр

$(X, \Omega_X)$  - топ. пр-во

$A \subset X$

$\Omega_A = \{U \cap A \mid U \in \Omega_X\}$  - индуцированная топология на  $A$

## 10 Инициальная топология. Топология произведения как инициальная.

### Опр

$\forall i \in I \quad f_i : X \rightarrow Y_i$   
 $(Y_i, \Omega_i)$  - топ. пр-во

$\{f_{i1}^{-1}(U_1) \cap f_{i2}^{-1}(U_2) \cap \dots \cap f_{ik}^{-1}(U_k) \mid U_j \in \Omega_{ij}\}_{j=1, \dots, k \in \mathbb{N}}$  - база нек. топологии

$\Omega_X$  - соотв. топология (инициальная топология)

### Опр

$\{f_i^{-1}(U)\}$  - предбаза топологии

### Теорема

Топология произведения совпадает с инициальной

### Опр

$$\prod_{i \in I} x_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \mid f(i) \in x_i\}$$

$$p_k : \prod_{i \in I} x_i \rightarrow x_k \quad k \in I$$

$$p_k(f) = f(k) \rightarrow \text{если } x_i - \text{ топ.} \rightarrow \prod_{i \in I} x_i - \text{ топ.}$$

## 11 Финальная топология. Фактортопология. Приклеивание.

### Опр

$\forall i \in I \quad f_i : X_i \rightarrow Y$  - отображ.

$(X_i, \Omega_i)$

Хотим завести на  $Y$  топологию:

$\forall f_i$  - непрер. Топ на  $Y$  самая сильная

$U \subset Y \quad \forall i \in I \quad f_i^{-1}(U) \in \Omega_i$

$\Omega_Y = \{U \mid \forall i \quad f_i^{-1}(U) \in \Omega_i\}$

$\emptyset, Y \in \Omega_Y$

$f_i^{-1}(U_1 \cap U_2) = f_i^{-1}(U_1) \cap f_i^{-1}(U_2)$

$$f_i^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} U_k\right) = \bigcup_{k \in K} f_i^{-1}(U_k)$$

### Пример

Приклеивание

$X, Y$  - пр-ва

$A \subset X \quad f : A \rightarrow Y$  - отображ.

Хотим получить  $X \cup_f Y$  - приклеивание

$X \cup_f Y = X \cup Y / \sim \quad \forall a \in A \quad a \sim f(a)$

$U$  - откр. в  $X \cup_f Y$ , если  $U \cap X$  - откр. в  $X$  и

$U \cap Y$  - откр. в  $Y$  (если  $f$  - инъект.)



## 12 Гомеоморфизм.

### Опр

$f : X \rightarrow Y$  - гомеоморфизм, если

1.  $f$  - непр.
2.  $f$  - биекция
3.  $f^{-1}$  - непр.

### Предположение

$\simeq$  - отношение эквив.

### Теорема

Если  $(X, \Omega_X) \simeq (Y, \Omega_Y)$ , то

$f_* : \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$  - биекция

$$f_*(U) = f(U)$$

## 13 Связность топологического пространства и множества.

## 14 Связность отрезка.

## 15 Связность замыкания. Связность объединения.

### Теорема

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$A \subseteq X$  - связно

$A \subseteq B \subseteq ClA$

$\rightarrow B$  - связно

### Теорема

Если  $A$  - связ., то  $ClA$  - связ.

### Теорема

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$A, B \subseteq X$  - связны

$A \cap B \neq \emptyset$

$\rightarrow A \cup B$  - связно

## 16 Связность и непрерывные отображения.

### Теорема

$(X, \Omega_X), (Y, \Omega_Y)$  - топ. пр-ва

$f : X \rightarrow Y$  - непр.

$X$  - СВЯЗНО  $\rightarrow f(X)$  - СВЯЗНО

## 17 Связность произведения пространств

### Теорема

$X, Y$  - топ. пр-ва

$X \times Y$  - связн.  $\Leftrightarrow X, Y$  - связн.

### Замечание

Любое конечное произведение связных топ. пр-в связно

### Теорема

$\prod_{i \in I} X_i$  - связно  $\Leftrightarrow \forall i \in I \quad X_i$  - связно

## 18 Компоненты Связности.

### Опр

$X$  - топ. пр-во

Компонентой связности т.  $x_0 \in X$  назыв. наиб. по включению связное множество, ее содерж.

$$K_{x_0} = \cup \{M \in 2^X \mid x_0 \in M - \text{связ.}\}$$

### Теорема

1.  $\forall x, y \in X \quad K_x = K_y$  или  $K_x \cap K_y = \emptyset$
2. компоненты связности - замк.
3. Для любого связ. мн-ва  $\exists$  компонента связности, в которой оно целиком содержится  
 $\forall M \subseteq X \quad (M - \text{связ.} \rightarrow \exists x \in X : M \subseteq K_x)$
4.  $\forall x, y, z \in X \quad (x, y \in K_z \Leftrightarrow \exists M - \text{связ.} : x, y \in M \text{ и } z \in M)$

### Опр

$X$  - топ. пр-во назыв. вполне несвязным, если  $\forall x \in X : K_x = \{x\}$

## 19 Линейная связность

### Опр

Линейно связное пр-во - топ. пр-во, в котором любые две точки можно соединить непр. кривой

$(X, \Omega)$  - лин. св., если  $\exists f :$

$f : [0, 1] \rightarrow X$  (пути в  $X$ ) |  $f(0) = x$  (нач. пути);  $f(1) = y$  (кон. пути),

$\forall x, y \in X$

### Теорема

$X$  - топ. пр-во

$X$  - лин.св.  $\rightarrow X$  - св.

### Теорема

$A, B$  - лин. св.  $A \cap B \neq \emptyset \rightarrow A \cup B$  - лин.св.

### Теорема

$X, Y$  - топ. пр-во;  $f : X \rightarrow Y$  - непр.

$X$  - лин. св.  $\rightarrow f(X)$  - лин. св.



## 20 Компактность. Примеры.

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$X$  - компакт, если из любого открытого покрытия  $X$  можно выбрать конечное подпокрытие

$$\forall \{U_i\}_{i \in I}, \quad U_i \in \Omega$$

$$\left( \bigcup_{i \in I} U_i = X \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists \{i_1, \dots, i_n\}_{i_j \in I} : \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X \right)$$

### Опр

$(X, \Omega)$  - топ. пр-во

$A \subseteq X$  - комп., если оно комп. в индуц. топ.

### Теорема

1. конечное топ. пр-во всегда компактно
2. дискретное бесконечное множ. не комп.
3. антидискр. множ. комп.
4.  $[0, 1]$  - компакт.

### Теорема

$X$  - комп.  $A \subseteq X$  - замк.  $\rightarrow A$  - комп.

### Теорема

$X$  - комп  $f : X \rightarrow Y \rightarrow f(x)$  - комп.

### Следствие

Комп. - топ. св-во

## 21 Простейшие свойства компактности.

## 22 Компактность произведения пространств.

### Теорема

$X, Y$  - комп  $\Leftrightarrow X \times Y$  - комп.

### Теорема

$\{X_i\}_{i \in I}$  - комп.  $\Leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i$  - комп.

## 23 Компактность и хаусдорфовость

### Опр

$X$  назыв хаусдорфф., если

$$\forall x_1 \neq x_2 \in X \quad \exists U_{x_1}, U_{x_2} : \quad U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$$

### Теорема (1)

$X$  - хаусдорфф.  $A$  - комп  $\in X \rightarrow A$  - замк.

### Теорема

$f : X \rightarrow Y$  непр., биекция

$X$  - комп.

$Y$  - хаусдорфф.

$\rightarrow f$  - гомеоморф.

### Док-во (1)

$X \setminus A$  - откp?

$x_0 \in X \setminus A$

$\forall x_1 \in A \rightarrow \exists U_{x_0} \ni x_0; \quad V_{x_1} \ni x_1$

$U_{x_0} \cap V_{x_1} = \emptyset$

$$\bigcup_{x_1 \in A} V_{x_1} \subset A \rightarrow x_1, x_2, \dots, x_k : \quad \bigcup_{i=1}^k V_{x_i} \supset A$$

$$U_{x_0} = \bigcap_{i=1}^k U_{x_i} \text{ - искомая окр. } U_{x_0} \cap A = \emptyset$$

(Иначе  $U_{x_0} \cap V_{x_i} \neq \emptyset, \quad U_{x_i} \cap V_{x_i} \neq \emptyset$ )

## 24 Лемма Лебега. Компактность отрезка.

### Теорема (Лемма Лебега)

$$X = [0, 1] \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad \{U_i\}_{i \in I} - \text{откр. покр. } X$$

$$\rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 : \forall x_0 \exists i \in I : B(x_0, \mathcal{E}) \subseteq U_i$$

( $\mathcal{E}$  зависит от покр.  $\mathcal{E}$  - число Лебега)

### Следствие

Отрезок - комп.

## 25 Критерий компактности подмножеств евклидова пространства.

### Теорема

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$A$  - комп.  $\Leftrightarrow A$  - замк и огр.

### Опр

$A$  - огр., если  $\exists N : A \subset B(0, N)$

### Док-во

$\rightarrow A$  - замк. т.к.  $\mathbb{R}^n$  - хаусдорф.

$A$  - огр.  $\{B(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\leftarrow A \subset [-N, N] \times [-N, N] \times \dots \times [-N, N] = K$  т.к. огр.

$K$  - комп.

$A$  - замк. в  $K \rightarrow A$  - комп.

## 26 Теорема Вейерштрасса. Примеры.

### Теорема (Вейерштрасса)

$K$  - компакт.

$f : K \rightarrow \mathbb{R}$  - непр.  $\rightarrow \exists x_0 \in K :$

$\forall x \in K \quad f(x) \leq f(x_0) \quad (x_0 - \max)$

### Док-во

$f(K)$  - комп.  $\subset \mathbb{R} \rightarrow f(K)$  - замк. и огр  $\rightarrow$

$\sup f(K) \in f(K)$  (замк.)

$\sup f(K) \neq \infty$  (огр.)

$\sup f(K) = f(x_0)$

## 27 Вторая аксиома счётности и сепарабельность.

### Опр

$X$  - обл. II А.С., если в  $X$   $\exists$  счетная база

### Опр

$X$  - назыв сепараб., если  $\exists A \subset X$   
 $|A| \leq \aleph_0$  и  $ClA = X$

### Опр

$A$  - всюду плотно, если  $ClA = X$

### Теорема

$X$  - II А.С.  $\rightarrow X$  - сепараб.



## 28 Теорема Линделёфа.

### Теорема

$X$  - П А.С.  $\rightarrow$  из  $\forall$  откр. покр.  $X$  можно извлечь не более чем счетное подпокрытие

## 29 Первая аксиома счётности.

### Опр

База окр-тей точки

$$\forall x \quad \exists \{U_{x_i}\}_{i \in I_x}$$

$$1. \quad U_{x_i} \in \Omega; \quad x \in U_{x_i}$$

$$2. \quad \forall U \in \Omega : x \in U \quad \exists U_{x_i} : x \in U_{x_i} \subset U$$

### Опр

Если  $\exists$  база окр-тей:

$$\forall x \quad \{\{U_{x_i}\}_{i \in I_x} \text{ не более чем счетное} \rightarrow X \text{ удовл. I А.С.}$$

30 Из компактности следует секвенциальная компактность  
(с первой АС).

31 Из секвенциальной компактности следует компактность  
(со второй АС).

## 32 Полнота и вполне ограниченность метрических пространств.

### Опр

Фунд. послед.

$\{X_n\}$  - фунд., если  $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists N : \forall n, m > N : \rho(X_n, X_m) < \mathcal{E}$

### Опр

$X$  назыв. полным, если  $\forall$  фунд. послед. сходится

### Опр

$\{X_i\}_{i \in I}$  -  $\mathcal{E}$ -сеть, если  $\forall x \quad \exists x_i : \rho(x, x_i) < \mathcal{E}$

### Опр

$X$  назыв. вполне огранич., если  $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists$  конечная  $\mathcal{E}$ -сеть

### 33 Из полноты и вполне ограниченности следует компактность

#### Теорема (равносильные)

1.  $X$  - компактно
2.  $X$  - секвенц. комп.
3.  $X$  - полн. и вполне огр.

### 34 Аксиомы отделимости.

#### Теорема (Колмогорова)

$$\forall x, y \in X : x \neq y \rightarrow \exists U \in \Omega$$

#### Теорема (Тихонова)

$$\forall x, y \in X : x \neq y \rightarrow \exists U \in \Omega$$

#### Теорема (Хаусдорфа)

$$\forall x, y \in X \quad \exists U_x, U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$$

#### Теорема (3)

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \text{ и замкнуто } F \subseteq X, \quad x \notin F \\ &\exists U_x \text{ и } U_F : U_x \cap U_F = \emptyset \end{aligned}$$

#### Теорема (4)

$$\begin{aligned} &F_1, F_2 - \text{ замк. } : F_1 \cap F_2 = \emptyset \\ &\exists U_{F_1} \text{ и } U_{F_2} : U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset \\ &T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0 \end{aligned}$$

### 35 Нормальность матрического пространства.

Опр

$(X, \Omega)$  - хаусдорф.

$X$  - нормально  $\Leftrightarrow \forall F$  - замк.,  $\forall G \in \Omega \quad F \subseteq G \rightarrow \exists G' \in \Omega :$

$F \subseteq G' \subseteq ClG' \subseteq G$