1 Некоторые определения из теории множеств. Прямое произведение, разбиение множеств. Мощность объединения

Опр

Пустое множество ($\varnothing$) - мно-во, которому $\notin$ ни один элемент

Опр

Число элементов мн-ва А - мощность $|A|$

Опр

Множество чисел от k до l обозначается $k : l$

Опр

Мн-во А - подмн-во мн-ва В ($A \subset B$), если каждый элемент из А принадлежит В

Опр

С - объединение А и В ($A \cap B$), если оно состоит из всех элементов А и В ($C = \{x|x \in A$ и $x \in B\}$)

Опр

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ - объединение и пересечение конечного числа мн-в

$$(\bigcap_{i \in I} A_i, \quad \bigcup_{i \in I} A_i) \text{ - аналогично}$$

Опр

Если пересечение мн-в пусто, то они называются дизъюнктивными

Опр

Мн-во С называется разностью мн-в А и В ($C = A \backslash B$), если оно состоит из всех эл-в, принадлежащих А и не принадлежащих В

Опр

$A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A$ - симметрическая разность

Опр

Мн-во упорядоченных пар (i, j), где $i \in A$, $j \in B$ называется прямым произведением мн-в А и В

$$A \times B = \{(i, j) \mid i \in A, \quad j \in B\}$$

Замечание

Мощность прямого произведения $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Аналогично произведение $\forall$ конечного числа множеств

Опр

Пусть $A_1, ..., A_k$ - ненулевые и попарно дизъюнктивные, $M = A_1 \cap ... \cap A_k$ и мн-во $\{A_1, ..., A_k\}$ называется разбиением M
(если они попарно не дизъюнктивные, то это покрытие)

Опр

Разбиение A мн-ва M называется измельчением B, если $\forall A_i \in A$ содержится в некотором $B_i \in B$

Опр

Пусть A, B - размельчения мн-ва M, разбиение C называется произведением A и B, если оно является из измельчением, причем самым крупным $C = A \cdot B$

Теорема

Произведение двух разбиений существует

Док-во

Предъявим разбиение, которое будет пересечением $A = \{A_1, ..., A_k\}$ и $B = \{B_1, ..., B_l\}$, точнее $D_{ij} = A_i \cup B_j, \quad i \leqslant k, \quad j \leqslant l$ и $\mathcal{P} = \cup D_{ij}$ (т.е. без пустых строк). Покажем, что тогда оно самое крупное.

Пусть $\exists F = \{F_1, ..., F_t\}$ - измельчение A и B, тогда $\forall F_k \quad \exists A_{i_k},\ B_{i_k}$: $F_k A_{i_k},\ B_{i_k} \Rightarrow F_k \subset (A_{i_k} \cup B_{i_k}) = D_{i_k j_k} \Rightarrow$ мельче F