Содержание

1 Дифф. геом. кривых

Опр

1) Понятие кривой (рис 1)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *- вектор функция*

Образ f *назыв. кривой*

f *- праметризация кривой*

Способы задания кривых:

1. *параметрический* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
2. *явное задание*

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

(особенно хорошо на плоскости $y = f(x)$*)*

3. *неявное задание (на плоскости)*

$$F(x, y) = 0$$

$F(x, y) = 0$ *и* (x_0, y_0) *- подх,*

$z = F(x, y)$ *рис 2*

Пример

Окружность: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y = (+-)\sqrt{1 - x^2}$ *явное задание*

рис3

Теорема **(О неявной функции)**

$$F(x,y)=0$$

F - *дифф* $(\exists \frac{\partial F}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}$ - *непр в окр* $(x_0,y_0))$

$$F(x_0,y_0)=0$$

Если $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0 \to \exists f \quad \exists \mathcal{E}>0 : (x_0-\mathcal{E}, x_0+\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$

$$F(x,f(x))=0$$

Опр

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x,y_0)-F(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ - *аналогично*

$$y=f(x) \to \begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$$

Опр

$f:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ - *ветор. функция, то*

$$f(t)=(x(t);y(t);z(t))$$

$$\lim_{t\to t_0} f(t)=(x_0,y_0,z_0):$$

$\forall \mathcal{E}>0 \exists \delta>0$ *если*

$\rho(t,t_0)<\delta$, *то* $\rho(f(t),(x_0,y_0,z_0))<\mathcal{E}$

$$|t-t_0| \qquad \sqrt{((x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2+(z(t)-z_0)^2}$$

Теорема **(свойства пределов)**

$$\lim_{t\to t_0}(f(t)(+-)g(t) = \lim_{t\to t_0} f(t)(+-)\lim_{t\to t_0} g(t)$$

$\lim\limits_{t\to t_0}(f(t) \underset{\text{скал}}{\cdot} g(t)) = (\lim\limits_{t\to t_0} f(t), \lim\limits_{t\to t_0} g(t))$ *(,) - скалярное умножение*

$$\lim_{t\to t_0}(f(x)\times g(t)) = \lim_{t\to t_0} f(x) \times \lim_{t\to t_0} g(t)$$

<u>Док-во</u>

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = (\lim_{t\to t_0} x(t), \lim_{t\to t_0} y(t), \lim_{t\to t_0} z(0))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$eps > 0 \quad \textit{Выбереме такое } \delta : |x(t) - x_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$\textit{если } |t - t_0| < \delta \to \begin{matrix} |y(t) - y_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \\ |z(t) - z_0| < \dfrac{\mathcal{E}}{3} \end{matrix} \to \sqrt{...} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}} < \mathcal{E}$$

<u>Опр</u>

$$f'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t_0)}{t - t_0}$$

<u>Теорема</u> (свойства)

1.

$$(f(t)(+-)g(t))' = f'(t)(+-)y'(t)$$

2.

$$(cf(t))' = cf'(t)$$

3.

$$(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t); g'(t))$$

4.

$$(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$$

5.

$$(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$$

$$f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$(f(t) \times g(t))'|_{t=t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0)} =$$
$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x) \times g(x) - f(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0}{t - t_0}$$
$$= \lim_{t \to t_0} \frac{(f(t) - f(t_0)) \times g(t)}{t - t_0} + \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0 \times (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} =$$
$$= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)$$

Пример

Контрпример

Т. Лагранжа - неверна рис 4

$$\int_b^a \overrightarrow{f}(t)dt = (\int_a^b x(t)d(t), \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt)$$
$$\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{f}(t)$$
$$\overrightarrow{F}(b) - \overrightarrow{F}(a) = \int_a^b \overrightarrow{f}(t)dt$$
$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$
$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$\int_a^b f(t)dt = (\int_a^b x(t)dt, ...) = (X(b) - X(a), ...$$

Опр

Гладкая кривая - диффер. векторнозначная функция и ее образ тоже

Кривая называется регулярной, если $f'(t) \neq \overrightarrow{0}$

(Кривая называется бирегулярной, если $\exists f''(t)$ *и* $f''(t) \not\parallel f'(t)$*)*

рис 5

гладкая кривая = класс эквиалентности параметризаций

Опр

Параметризации $\overrightarrow{f}(t)$ *и* $\overrightarrow{g}(t)$ *эквивалентны*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$g : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

Если $\exists$ *биекция* $\tau : [a, b] \to [c, d]$

$$\tau(a) = c; \quad \tau(b) = d :$$

$$f(t) = g(\tau(t)) \qquad (\tau \text{ возрастает и гладкая})$$

Лемма

Эквив параметризаций - эквив.

Док-во

Рефл.

$\tau = id$

Симм.

$f(t) = g(\tau(t))$

$g(t) = f(\tau(t))$

Транз.

$f(t) = g(\sigma(t))$ $f(t) = h(\tau(b(t)))$

$\tau \circ \sigma$ *- перепарам.*

Лемма

$$\overrightarrow{f}(t) \text{ - вектор-функция/ регуляр.}$$

$$|\overrightarrow{f}(t)| = 1 \to f'(t) \perp f(t)$$

Док-во

$$(f(t); f(t)) = 1$$

$$0 = (f(t), f(t))' = 2(f'(t), f(t))$$

$$f(t) \neq 0$$

$$f'(t) \neq 0 \to f'(t) \perp f(t)$$

2019-09-16

<u>Теорема</u> (Ф-ма Тейлора)

$$\overrightarrow{t} = \overrightarrow{t_0} + \overrightarrow{f'}(t_))(t - t_0) + \frac{\overrightarrow{f''}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + ...$$

$$+\frac{\overrightarrow{f^{(m)}}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n$$

$$\overrightarrow{g}(t) = o(t - t_0)^n, \textit{ если}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{g}(t)}{(t - t_0)^n} = \overrightarrow{0}$$

<u>Опр</u> (Длина кривой) *рисунок 1*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$$

1. $\sup \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$

2. $\lim\limits_{\max\limits_{i=1,...n} |t_i - t_{i-1}| \to 0} ...$ *- длина кривой*

<u>Утв</u>

оба определения дают одно и то же

<u>Теорема</u>

$$S \textit{ - длина кривой } \Rightarrow$$

$$S = \int_a^b |\overrightarrow{f'}(t)| dt$$

<u>Опр</u>

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

<u>Замечание</u>

Если $|\overrightarrow{f'}(t)|$ *- интер.* $\to$ *кривая спрямляемая*

Пример

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad (0,1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во

$$\triangle_i t = t_i - t_{i-1}$$

$$\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

$$\triangle_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$$

$$|\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant |\int_a^b |f'(t)|dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|\triangle_i t| + |\sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)|\triangle t_i| - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = I + II$$

$$2 \leqslant \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \triangle t_i - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| =$$

$$= \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \triangle_i t$$

$f'(t)$ - *непр на* $[a,b] \Rightarrow$ *равномерно непр. на* $[a,b]$*(т. Кантора)*

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0,$ *если* $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E},$ *если* $|\sigma_i - \tau_i| < \delta$

$$II \leqslant \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \triangle_i t = \mathcal{E}(b-a) \underset{\mathcal{E}\to 0}{\to} 0$$

$$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leqslant ||f'(\tau_i)| - ||f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \triangle_i t$$

Опр

Параметризация $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *называется натуральной, если* $|f'(t)| = 1$

Теорема

Натуральная параметризация $\exists$ *и ед.*

Док-во

$$f(t) \quad f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$\tau : [c, d] \to [a, b] \text{ - } \textit{монотонная биекция}$$

$$(\tau' > 0)$$

$$f = \tau : [c, d] \to \mathbb{R}^3$$

Лемма

Длина кривой не зависит от параметризации

Док-во

$$\int_a^b |f'(t)| dt$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)| ds =$$

$$= \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)| dt$$

$$t = \tau(s)$$

Док-во (Т)

Существование

Хотим подобрать τ *:* $|f'(\tau(s))| = 1$

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)| ds$$

$$\sigma : [a, b] \to [0, S]$$

$$S \text{ - } \textit{длина кривой}$$

$$\sigma \text{ - } \textit{возрастающая и дифф.} \ (\sigma'(t) = |f'(t)|)$$

$$\sigma \text{ - } \textit{биекция} \ \Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$$

$$\int_0^t |(f\circ t)'(s)|ds = \int_0^t |f'(\tau(s))|\cdot t'(s)ds =$$

$$= \int_0^t |f'(\tau(s)|\frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|}ds = t$$

Единственность

$f(t)$ *и* $g(t)$ *- нат. параметризации*

$f, g : [0, s] \to \mathbb{R}^3$

$f - g$

$$\int_0^s |(f\circ g)(t)|dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)|dt \leqslant \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)||dt = 0$$

Примеры

1. $y = y(x)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)}dx$$

2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}dt$$

3. $r = r(\varphi)$

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = & r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi \\ y' = & r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

$$|\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 cos'2\varphi + r^2 sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

2 Ренер Френе

Опр

$$\overrightarrow{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\overrightarrow{v} = f'(t)$ *- если парам. натуральн.*

v *- касательный вектор*

Прямая, содерж в $\overrightarrow{v}$ *наз. касательной к* $\overrightarrow{f}(t)$ *в точке* t_0

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \overrightarrow{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \overrightarrow{g}(t)$$

$\overrightarrow{g}(t)$ *- ур-е касат. прямой*

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\overrightarrow{h} - \overrightarrow{f}(t_0)) = 0$$

Теорема

δ *- расстояние от* $f(t)$ *до касат. прямой*

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

Док-во