0.1 14.10.2019

0.1.1 Замена переменных в дифференциальных выражениях

Замена перем. в выражениях с полными производными

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, ...)$$

$$\begin{matrix} (x,y) \to & (u,v) \\ y(x) & u(v) \end{matrix} \quad y'_x, y''_{xx}, .. \text{ нужно выразить через } u'_v, u''_{vv}$$

$$\exists x = f(u, v) \quad y = g(u, v)$$

$$y(x) = y(f(u, v)) = y(f(u(v), v)) = g(u(v), v)$$

Дифференцируем по v: $\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial g}{\partial v} = y'_x \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right) \quad (*)$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}}$$

Другой способ воспринимать: $\qquad y = y(x)$

Продифференцируем ещё раз $(*)$ по v:

$$\text{u}''_{vv}\frac{\partial y}{\partial u} + u'_v\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}u'_v + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} =$$

$$= y''_{xx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}u'_v + \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + y'_x\left(u''_{vv}\frac{\partial f}{\partial u} + (u'_v)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u'_v\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

Второй способ:

$$x = f(u(v), v) \quad y'_x = h(u(v), \underbrace{u'_v(v)}_{w}, v) \leftarrow *$$

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial h}{\partial w}u''_{vv} + \dfrac{\partial h}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}}$$

<u>Пример</u>

Подставить в дифференциальное уравнение выражения

$$y^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0 \quad y(x) \to u(t)$$

$$x = e^t \quad y = ue^{2t}$$

Решение

Проблема в том, что мы не знаем, что такое y', т.к. в диф. ур-ии производная по x

$$x = f(u,t) = e^t \quad y = g(u,t) = ue^{2t}$$

$$u(t)e^{2t} = y = y(e^t)$$

$$u'_t e^{2t} + 2ue^{2t} = y'_x e^t \Rightarrow y'_x(e^t) = y'_x|_{x=e^t} = (u'_t + 2u)e^t$$

$$y''_{xx}\cancel{e^t} = ((u'_t + 2u) + (u''_{tt} + 2u'_t))\,\cancel{e^t}$$

Пример

$$y'y''' - 3(y'')^2 = x$$

$$y(x) \to x(y)$$

Решение

$$x = u \quad y = t \quad u(t)$$

$$(x,y) \to (u,t)$$

$$t = y(u(t)) \Rightarrow 1 = y'u' \Rightarrow y' = \frac{1}{u'}$$

$$y'' = \frac{u''}{(u')^3}$$

$$y''' = \frac{u'''(u')^3 - 3(u'')^2(u')^2}{(u'^7)} = \frac{u'''}{(u')^4} - 3\frac{(u'')^2}{(u')^5}$$

Подставляя, получаем:

$$-\frac{x'''_{yyy}}{(x'_y)^5} = x$$

ДЗ: 3431-3449