1 Некоторые определения из теории множеств. Прямое произведение, разбиение множеств. Мощность объединения

Опр

Пустое множество ($\varnothing$) - мно-во, которому $\notin$ ни один элемент

Опр

Число элементов мн-ва А - мощность $|A|$

Опр

Множество чисел от k до l обозначается $k : l$

Опр

Мн-во А - подмн-во мн-ва В ($A \subset B$), если каждый элемент из А принадлежит В

Опр

С - объединение А и В ($A \cap B$), если оно состоит из всех элементов А и В ($C = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$)

Опр

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ - объединение и пересечение конечного числа мн-в

$$(\bigcap_{i \in I} A_i, \quad \bigcup_{i \in I} A_i) \text{ - аналогично}$$

Опр

Если пересечение мн-в пусто, то они называются дизъюнктивными

Опр

Мн-во С называется разностью мн-в А и В ($C = A \setminus B$), если оно состоит из всех эл-в, принадлежащих А и не принадлежащих В

Опр

$A \triangle B = A \setminus B \cap B \setminus A$ - симметрическая разность

Опр

Мн-во упорядоченных пар (i, j), где $i \in A$, $j \in B$ называется прямым произведением мн-в А и В

$$A \times B = \{(i, j) | i \in A, \quad j \in B\}$$

Замечание

Мощность прямого произведения $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Аналогично произведение $\forall$ конечного числа множеств

Опр

Пусть $A_1, ..., A_k$ - ненулевые и попарно дизъюнктивные, $M = A_1 \cap ... \cap A_k$ и мн-во $\{A_1, ..., A_k\}$ называется разбиением M
(если они попарно не дизъюнктивные, то это покрытие)

Опр

Разбиение A мн-ва M называется измельчением B, если $\forall A_i \in A$ содержится в некотором $B_i \in B$

Опр

Пусть A, B - размельчения мн-ва M, разбиение C называется произведением A и B, если оно является из измельчением, причем самым крупным $C = A \cdot B$

Теорема

Произведение двух разбиений существует

Док-во

Предъявим разбиение, которое будет пересечением $A = \{A_1, ..., A_k\}$ и $B = \{B_1, ..., B_l\}$, точнее $D_{ij} = A_i \cup B_j, \quad i \leqslant k, \quad j \leqslant l$ и $\mathcal{P} = \cup D_{ij}$ (т.е. без пустых строк). Покажем, что тогда оно самое крупное.

Пусть $\exists F = \{F_1, ..., F_t\}$ - измельчение A и B, тогда $\forall F_k \quad \exists A_{i_k},\ B_{i_k} :$ $F_k A_{i_k},\ B_{i_k} \Rightarrow F_k \subset (A_{i_k} \cup B_{i_k}) = D_{i_k j_k} \Rightarrow$ мельче F

2 Вектора из нулей и единиц

Пусть мн-во B состоит из двух элементов которые отождествляются с 0 и 1, т.е. $B = 0 : 1$

Произведение m экземпляров такого мн-ва обозначим за $B^m = (0 : 1)^m$, состоит из 2^m эл-ов

Опр

Вектор из нулей и единиц - упорядоченный набор из фиксированного числа нулей и единиц, т.е. эл-т мн-ва B^m

Упорядоченный набор из чисел обычно называется вектором, m - размерностью вектора, каждый отдельный элемент набора - компонента вектора

Замечание

Модели, в которых используются наборы из 0 и 1:

1. Геометрическая интерпретация

   Точкой в m-мерном пространстве является m-мерный вектор, каждая его компонента - одна из декартовых координат точки. Набор из 0 и 1, рассматриваемый как точка в пространстве, определяет вершину куба, построенного на ортах (единичных отрезках) координатных вероятностей

2. Логичнская интерпретация

   Операции над векторами выполняются покомпонентно, т.е. независимо над соотв. компонентами векторов-операндов

Пример

x	0	0	0	1	1
y	1	1	1	0	1
$x \wedge y$	0	0	0	0	1
$x \vee y$	1	1	1	1	1
$x \equiv y$	0	0	0	0	1
$x \not\equiv y$	1	1	1	1	0

3. Двоичное представление (натуральные числа)

   Число представляется в виде суммы степеней 2

4. Состояние памяти компьютера

5. Сообщение, передаваемое по каналу связи

6. Можно задавать подмножества мн-ва $1 : n$

3 Алгоритм перебора 0-1 векторов. Коды Грея

Опр

Код Грея — такое упорядочение k-ичных (обычно двоичных) векторов, что соседние вектора отличаются только в одном разряде

Алгоритм

it - номер итерации, k_{it} - номер обновляемой компоненты

x_4	x_3	x_2	x_1	it	k_{it}
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	2
0	0	1	1	2	1
0	0	1	0	3	3
0	1	1	0	4	1
0	1	1	1	5	2
0	1	0	1	6	1
0	1	0	0	7	4
	...			...	

Суть алгоритма: зафиксируем нулевое значение у m-й компоненты и переберем все наборы длины $m-1$ для ост. компонент. Перебрав их меняем значение m-й компоненты на 1 и перебинаем набор длины $m-1$ в обратном порядке

Замечание

Явная формула для проверки $G_i = i \oplus (\lfloor i/2 \rfloor)$

4 Перебор элементов прямого произведения множеств

ВНИМАНИЕ! ВЫ ВСТУПАЕТЕ НА ЗЕМЛЮ ТУПОГО ПЕРЕПИСЫВАНИЯ ИЗ ТУПОГО ПЕРЕПИСЫВАНИЯ!!!

$$M(1:k) = M_1 \times M_2 \times ... \times M_k$$

$$|M_1 \times M_2 \times ... \times M_k| = \prod_{i \in 1:k} m_i, \text{ где } m_i = |M_i|$$

Пусть каждое M_i состоит из целых чисел от 0 до $m_i - 1$, тогда каждый элемент $M(1:k)$ - последовательность неотрицательных чисел $r_1, ..., r_k$, причем $r_i < m_i$

$$\mathrm{num}(r_1, ..., r_k) = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot (\prod_{j=1}^{i-1} m_j) = r_1 + r_2 m_1 + ... + r_k m_1 \cdot ... \cdot m_{k-1}$$

5 Размещения, сочетания, перестановки без повторений

Опр

Перестановка из n без повторений - упорядоченный набор из n неповторяющихся элементов, каждый из которых берется из диапазона $1 : n$

$$|P_k| = n!$$

Опр

Размещение - упорядоченный набор из k неповторяющихся элементов из диапазона $1 : n$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-k+1)$$

Опр

Сочетание - набор из k неповторяющихся элементов из диапазона $1 : n$ (порядок не важен)

$$|C_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

6 Размещения, сочетания, перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями:
Последовательность длины n, составленных из k разных символов, i-ый из которых повторяется n_i раз $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$

<u>Пример</u> (aabc)

Перестановки: $abac$, $baac$, $aabc$, $aacb$, $abca$, $baca$, $acba$, $acab$, $bcaa$, $cbaa$, $caba$, ca
Число перестановок с повторениями длины из k разных элементов взятых соответственно по $n_1, ..., n_k$ раз каждый обозначается

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

7 Два алгоритма перебора перестановок. Нумерация перестановок

$$|P_k| = k! = |T_k|$$

P_k - мн-во всех перестановок
T_k - произведение k любых таких множеств M_i, каждый из которых представляет собой мн-во чисел от 0 до $i-1$

$$T_k = \{0\} \times \{0,1\} \times ... \times \{0,1,...,k-1\}$$

Построим взаимно однозначное соответствие между P_k и T_k. Возьмем перестановку $(t_1,...,t_k)$ следующим образом: для любого $i \in 1:k$ найдем число значений, меньше r_i среди $r_{i+1},...,r_k$ - это число мы и примем в качестве t_i
В соответсвии с таким определеничем чисел t_i в мн-ве T_k будет соответственно ??? значения m_i не возраст., а убывающая до единицы

Пример **(4,8,1,5,7,2,3,6)**

i	1	2	3	4	5	6	7	8
r_i	4	8	1	5	7	2	3	6
t_i	3	6	0	2	3	0	0	0
m_i	8	7	6	5	4	3	2	1

По $(t_1,...,t_k)$ легко восстановить исходную перестановку. Для этого меняя i от 1 до k нужно нужно проверить мн-во значений S_i, которые могут быть в перестановке на i месте. Для $i=1$ $S_1 = 1:8$, $t_1 = 3 \Rightarrow r_1 = 4$, далее $S_2 = 1:3 \cap 5:8$, $t_2 = 6 \Rightarrow r_2 = 8$. Если использовать это отображение при переборе, то перестановки будут перебираться в лексикографическом порядке

Опр

$(r_1,...,r_k)$ предшествует $(R_1,...,R_k)$, если начала перестановок совпадают до индекса d, а дальше $r_d < R_d$

Утв

Из этого перестановки перебираются в лексикографическом порядке, можно вывести правило получения следующего:

1. В $(r_1,...,r_k)$ найти наибольший суффикс $(r_t,...,r_k)$, в котором $r_t > ... > r_k$ $(r_{i-1} < r_t)$

2. Выбрать $(r_t, ..., r_k)$ элемент следующий по велечине после r_{t-1}, поставить после в возр. порядке

num	t_k				p_k			
0	0	0	0	0	1	2	3	4
1	0	0	1	0	1	2	4	3
2	0	1	0	0	1	3	2	4
3	0	1	1	0	1	3	4	2
4	0	2	0	0	1	4	2	3
5	0	2	1	0	1	4	3	2

Ещё один алгоритм (непонятно)

8 Задача о минимуме скалярного произведения

Пусть заданы числа $x_1, ..., x_m$ и $y_1, ..., y_m$. Составим пары (x, y), включив каждое x_i и y_i ровно в одну пару. Затем перемножим числа каждой пары и сложим полученное произведение. Требуется найти min такое разбиение чисел на пары S

Теорема

$$\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \qquad x_1 \geqslant x_2 ... \geqslant x_n$$

$$\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \qquad y_1 \leqslant y_2 ... \leqslant y_n$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \to \min$$

Док-во

Покажем, что если найдутся пары чисел $(x_i,\ y_i)$ и $(x_j,\ y_j)$: $x_i < x_j$, $y_i < y_j$, то S можно уменьшить, заменив парами $(x_i,\ y_j)$ и $(x_j,\ y_i)$
Действительно,

9 Числа Фибоначчи. Теорема о представлении

Опр

Последовательность чисел Фибоначчи F:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n > 1$$

Утв

$$\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ - сходится}$$

Следствие

$$\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Лемма

При $n > 1$ выполнено $\varphi^{n+2} = v^{n+1} + v^n$

Док-во

Лемма

При $k > 2$ выполнено:

$$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + ... + F_1$$

$$F_{2k+1} = 1 + F_{2k} + F_{2k-2} + ... + F_0$$

Док-во (по индукции)

$(k = 3)$:

$$F_6 = 8 = 5 + 2 + 1$$

$$F_7 = 13 = 1 + 8 + 3 + 1 + 0$$

$(k \to k + 1)$:

$$F_{2(k+1)} = F_{2k+2} = F2k + 1 + F_{2k} = F_{2k+1} + F_{2k-1} + ... + F_1 =???$$

Теорема

Любое натуральное число можно однозначно представить в виде суммы чисел Фибоначчи

$$s = F_{i_0} + F_{i_1} + ... + F_{i+r}, \text{ где } i_{k-1} + 1 < i_k, \quad k \in 1 : r \quad i_0 = 0$$

Док-во

Покажем, что такое представление $\exists \forall s$. Пусть

10 Перебор сочетаний. Нумерация сочетаний

11 Бином Ньютона и его комбинаторное использование

12 Свойства биномиальных коэффициентов

13 Основные определения теории вероятностей

14 Условные вероятности и формула Байеса

15 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

16 Схема Бернулли

17 Случайные числа. Схема Уолкера

18 Двоичный поиск и неравенство Крафта

19 Энтропия. 2 леммы

20 Теорема об энтропии

21 Операции над строками переменной длины

22 Поиск образца в строке (Карпа-Рабина, Бойера-Мура)

23 Суффиксное дерево

24 Задача о максимальном совпадении двух строк

25 Код Шеннона-Фано. Алгоритм Хаффмена. 3 леммы

26 Сжатие информации по методу Зива-Лемпеля

27 Метод Барроуза-Уилера

28 Избыточное кодирование. Коды Хэмминга

29 Шифрование с открытым ключом

30 Сортировки (5 методов)

31 Информационный поиск и организация информации

32 Хеширование

33 АВЛ-деревья

34 B-деревья

35 Биномиальные кучи

36 Основные определения теории графов

37 Построение транзитивного замыкания

38 Обходы графа в ширину и глубину. Топологическая сортировка

39 Связность. Компоненты связности и сильной связности

40 Алгоритм поиска контура и построение диаграммы порядка

41 Теорема о связном подграфе

42 Деревья. Теорема о шести эквивалентных определениях дерева

43 Задача о кратчайшем остовном дереве. Алгоритм Прима

44 Алгоритм Краскала

45 Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры

46 Алгоритм Левита

47 Задача о кратчайшем дереве путей

48 Сетевой график и критические пути. Нахождение резервов работ

49 Задача о максимальном паросочетании в графе. Алгоритм построения

50 Теорема Кенига

51 Алгоритм построения контролирующего множества

52 Задача о назначениях. Венгерский метод

53 Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ

54 Метод динамического программирования. Задача линейного раскроя

55 Приближенные методы решения дискретных задач. Жадные алгоритмы

56 Алгоритмы с гарантированной оценкой точности. Алгоритм Эйлера

57 Жадные алгоритмы. Задача о системе различных представителей

58 Приближенные методы решения дискретных задач

59 Конечные автоматы

60 Числа Фибоначчи. Производящие функции

61 Числа Каталана

62 ?Алгоритм Кристофидеса (возможно будет)