Содержание

1 Введение

1.1 Литература

Учебник Бибиков "Обыкновенные дифферинциальные уравнения"
Филиппов - задачи
"Методы интегрирования"
Каддинктон Ливенгсон "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
Яругии

1.2 Введение

$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$
x - неизвестная переменная
$y = y(x)$ - неизвестная функция лалалалалалала

Опр
Порядок уравнения - порядок старшей производной

Кроме того, $x = \frac{dx}{dt}$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$

1.3 Применение

1) механика
2) электротехника
3) физика: $\dot{Q} = kQ$, $Q = Q_0 e^{kt}$
4) упр. движением
5) биология, экология
Пример из биологии:
x - хищник
y - жертва

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + cxy \\ \dot{y} = by - dxy \end{cases}$$

$$a, b, c, d > 0,\ x, y > 0$$

2 Дифферинциальные уравнения первого порядка

2.1 Введение

(1) $\dot{x} = X(t, x)$
$X(t, x) \in C(G)$, G - обл, $G \subset \mathbb{R}^2$
Но чаще будем $\in C(D)$ $D \subset \mathbb{R}^2$

Опр

Решение (1) - функция $x = \varphi(t)$, $t \in < a, b >$: $\dot{\varphi}(t) \equiv X(t, \varphi(t))$ *на <a,b>*

1) $\forall t \in < a, b >$ $(t, \varphi(t)) \in D$
2) $\varphi(t)$ - дифф на $< a, b >$
3) $\varphi(t)$ - непр. дифф. (X- непр на D)

Опр

(2) Задача Коши - задача нахождения решения (1) $x = \varphi(t)$: $\varphi(t_0) = x_0$ $((t_0, x_0) \in D)$

Геометрический смысл уравнения первого порядка - уравнение 1 задаёт поле направлений на множестве G

Опр

График решения называется интегральной кривой

В каждой точке задано направление, которое совпадает с касательной в этой точке к интегральной кривой

$\dot{\varphi}(t)|_{t=t_0} = X(t_0, x_0)$

2.2 Метод изоклин

Опр

Изоклина - это кривая, на которой поле направлений постоянно

Уравнение изоклин $X(t, x) = c$, где $c = const$

$\dot{x} = -\frac{t}{x}$ $(x = \varphi(t))$
$-\frac{t}{x} = tg\alpha$
$x = -\frac{1}{c}t$, $c \neq 0$

$c=1$ $(\alpha=\frac{\pi}{4})$ $x=-t$ - уравнение изоклин
$c=-1$ $(\alpha=-\frac{\pi}{4})$ $x=t$
Решение задачи Коши (1, 1) - это $x=\sqrt{2-t^2}$
Решение задачи Коши (1,-1) - это $x=-\sqrt{2-t^2}$

2.3 Теорема Пеано

(1) $\dot{x}=X(t,x)$, $X\in C(D)$
$D=\{(t,x): |t-t_0|\leqslant ... \leqslant |x-x_0|\leqslant b\}$
(2) (t_0,x_0)
По теореме Вейерштрасса $\exists M: \ |X(t,x)|\leqslant M \ \forall (t,x)\in D$
$h=min(a,\frac{b}{M})$

(Пеано) $\exists$ реш. задачи К. (1), (2) $x=\varphi(t)$ опр-е на $[t_0-h, \ t_0+h]$ - отрезок Пеано

Опр

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t\in[c,d]$

1) $\varphi_k(t)$ - равномерно ограничена на $[c,d]$, если $\exists N: \ |\varphi_k(t)|\leqslant N \ \forall k\in \mathbb{N}, \ \forall t\in[c,d]$

2) $\varphi_k(t)$ - равностепенно непр на [c,d], если $\forall \mathcal{E}>0 \ \exists \delta>0: \forall t_1,t_2\in [c,d] \ |t_1-t_2|<\delta \to |\varphi_k(t_1)-\varphi_k(t_2)|<\mathcal{E} \ \forall k\in\mathbb{N}$

(Арцелло - Асколи) $\varphi_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, равномерно огр. и равностепенно непр на $[c,d]\to\exists$ подпосл $\varphi_{kj}(t): \varphi_{kj}(t) \underset{j\to+\infty}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$

2019-09-12

Док-во

$$P=[t_0,t+h]$$

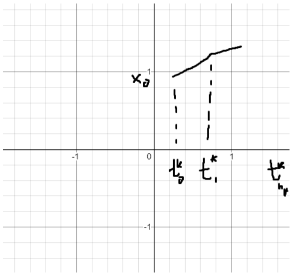
$$d_k: t_0=t_0^k<t_1^k<...<t_j^k<...<t_{nk}^k=t_0+h$$

$$rank \ d_k=\lambda_k=\max_{0\leqslant j\leqslant n_k-1}(t_{j+1}^k-t_j^k)$$

$$(3) \quad \lambda \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_k(t_0)=x_0 \\ \varphi_k(t)=\varphi_k(t_j^k)+X(t_j^k,\varphi_k(t_j^k))(t-t_j^k) \end{cases} \text{ - \textit{ломанные Эйлера}}$$

$$t_j^k\leqslant t\leqslant t_{j+1}^k$$



<u>Лемма</u> (1)

Определим $\varphi_k(t)$ *и*

$$|\varphi_k(t) - x_0| \leqslant M(t - t_0) \quad \forall t \in P \quad (5)$$

<u>Замечание</u>

$$(5) \Rightarrow t \in P \Rightarrow 0 \leqslant t - t_0 \leqslant h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| \leqslant M \cdot h \leqslant M \cdot \frac{b}{M} = b \quad (6)$$

<u>Док-во</u> (лемма 1)

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0) \cdot (t - t_0)$$

$$\Rightarrow |\varphi_k(t) - x_0| = |\underset{\leqslant M}{X(t_0, x_0)}|(t - t_0) \leqslant M(t - t_0)$$

И.П.: Пусть (5) *- выполняется* $\forall t \in [t_0^k, t_j^k]$

$$\Rightarrow |\varphi_k(t_j^k) - x_0| \leqslant M(t_j^k - t_0) \leqslant b \Rightarrow (t_j^k, \varphi_k(t_j^k)) \in D$$

$$t_j^k \leqslant t < t_{j+1}^k$$

По (4) имеем: $|\varphi_k(t)| \leqslant |\varphi_k(t) - x_0| = \underset{\text{инд. предп}}{|\varphi_k(t_j^k) - x_0|} + |X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))|(t - t_j^k) \leqslant$

$$\leqslant M(t_j^k - t_0) + M(t - t_j^k) = M(t - t_0)$$

<u>Опр</u>

$$(7) \quad \begin{cases} \psi_k(t) = X(t_j^K, \varphi_k(t^k)), \quad t_j^k \leqslant t \leqslant t_{j+1}^k \qquad j = 0, ..., n_k - 1 \\ \varphi_k(t_{nk}^k) = X(t_{nk}^k, \varphi_k(t_{nk}^k)) \end{cases}$$

<u>Лемма</u> (2)

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau) d\tau \qquad (8)$$

<u>Док-во</u>

Б.И.: $j = 0 \quad t \in [t_0^k, t_1^k]$

$$\varphi_k(t) = x_0 + X(t_0, x_0)(t - t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{X(t_0, x_0)}_{=\psi_k(t)} d\tau$$

$$\textit{Пусть } [t \in [t_0^k, t_j^k] \Rightarrow \varphi_k(t_j^k) = x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau) d\tau$$

И.П.: $t \in [t_j^k, t_{j+1}^k]$

$$\Rightarrow \varphi_k(t) = \varphi(t_j^k) + X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k))(t - t_j^k) =$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t_j^k} \psi_k(\tau) d\tau + \int_{t_j^k}^{t} X(t_j^k, \varphi_k(t_j^k)) d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_k(\tau) d\tau$$

<u>Лемма</u> (3)

$\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ - *равномерно огр., равностепенно непр. для* $t \in P$

<u>Док-во</u>

По пункту (6) $|\varphi_k(t)| \leqslant |\varphi_k(t) - x_0| + |x_0| \leqslant b + |x_0| \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\mathcal{E} > 0 \quad \delta$

$|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta \quad (\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in P)$

$$|\varphi_k(\bar{t}) - \varphi_k(\bar{\bar{t}})| = |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} \psi_k(\tau) d\tau| \leqslant |\int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} |\psi_k(t)| d\tau| \leqslant$$

$\leqslant M\delta = \mathcal{E}$

$\exists$ подпослед. $\{\varphi_k(t)\}_1^{\infty} \quad t \in P$

(9) $\quad \varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$ (тут должны быть k_m, но мы их не будем писать)

$\varphi(t)$ - непр и $|\varphi(t) - x_0| \leqslant b$

Лемма **(4)**

$$(10) \quad \psi_k(t) \underset{k\to+\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} X(t,\varphi(t))$$

Док-во **(лемма 4)**

$X(t,x) \in C(D) \Rightarrow X(t,x)$ *- равном непр. на* D

$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\bar{t},\overline{x}), (\bar{\bar{t}},\overline{\overline{x}}) \in D$

$|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| < \delta, \quad |\overline{x} - \overline{\overline{x}}| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |X(\bar{t},\overline{x}) - X(\bar{\bar{t}},\overline{\overline{x}})| < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

фикс $\mathcal{E} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$

$$(12) \quad |X(t,\varphi(t)) - \psi_k(t)| \leqslant |X(t,\varphi(t)) \underset{(1)}{-} X(t,\varphi_k(t))| + |X(t,\varphi_k(\underset{(2)}{t}) - \varphi_k(t)|$$

из $(9) \quad \Rightarrow \exists k_1 : \forall k > k_1 \quad |\varphi_k(t) - \varphi(t)| < \delta \quad \forall t \in P$

$\Rightarrow \underbrace{|...|}_{(1)} < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$

$t = t^k_{nk} \Rightarrow \underbrace{|...|}_{(2)} = 0$ *по (7)*

textЕсли $[t \neq t^k_{nk} \to \exists j \in \{0,1,...,n_k-1\} : t \in [t^k_j, t^k_{j+1})$

И тогда $\underbrace{|...|}_{2} = |X(t,\varphi_k(t)) - X(t^k_j, \varphi_k(t^k_j))|$

$\exists k_2 : \forall k > k_2 \quad \lambda_k < \min(\delta, \dfrac{\delta}{M}) \quad$ (из (3))

$\Rightarrow (t - t^k_j) < (t^k_{j+1} - t^k_j) \leqslant \lambda_k < \delta$

$$|\varphi_k(t) - \varphi_k(t^k_j)| \leqslant |\int_{t^k_j}^t \underset{\leqslant M}{|\psi_k(t)|} \leqslant M \underset{\leqslant \lambda_k}{(t - t^k_j)} < M\frac{\delta}{M} = \delta$$

$\Rightarrow |\underbrace{...}_{(2)}| < \dfrac{\mathcal{E}}{2}$ по (11)

$$\Rightarrow \forall k > \max(K_1,k_2) \qquad |X(t,\varphi(t)) - \psi_k(t)| < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E} \text{ по } (12)$$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \qquad (13)$$

Т.к. дифференцируема справа, то дифференцируема слева

$t = t_0 : \varphi(t_0) = x_0$

Дифф. (13): $\dot{\varphi}(t) = X(t, \varphi(t))$

$\Rightarrow \varphi(t)$ - реш. задачи Коши $(1), (2) \quad t \in P$

2019-09-19

Напоминание

D *- мн-во*

1. $\dot{x} = X(t, x)$
2. $(t_0, x_0) \in D$

Опр

$x = \varphi(t)$ *- реш. задачи Коши* $(1), (2), \quad t \in <a, b>$

единств. на $<a, b>$ *, если*

$\forall$ *другое реш.* $x = \psi(t)$ *З.К.* $(1), (2) \quad t \in <a, b>$

$\varphi(t) \equiv \varphi(t)$ *на* $<a, b>$

Теорема

В усл. теоремы Пеано, если решение $x = \varphi(t)$ *- единств. на* P

$(P = [t_0, t_0 + h])$, *то посл. ломанная Эйлера*

$$\varphi_k(t) \underset{k \to +\infty}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \varphi(t)$$

Док-во (От противного)

$$\exists \mathcal{E} > 0 : \forall k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists k > k_0, \exists t \in P : |\varphi_k(t) - \varphi(t)| \geqslant \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \exists \{k_j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \{t_j\}_{j=1}^{\infty} : k_{j+1} > k_j \text{ и } |\varphi_{k_j}(t_j) - \varphi(t_j)| \geqslant \mathcal{E} \quad (14)$$

$\{\varphi_{k_j}(t)\}_{j=1}^{\infty}$ *- посл. Л.Э.* $\Rightarrow$ *п/послед* $\{\varphi_{k_{jm}}(t)\}_{m=1}^{\infty}$:

$$\varphi_{k_{jm}}(t) \underset{m \to +\infty}{\overset{P}{\rightrightarrows}} \psi(t)$$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \exists k_{j_0} : \forall k_{jm} > k_{j0} \quad |\varphi_{k_{jm}} - \psi(t)| < \mathcal{E} \quad (15)$$

$$k_{jm} > k_{j_0}$$

$$|\varphi(t_{jm}) - \psi(t_{jm})| \geqslant |\underbrace{\varphi(t_{jm}) - \varphi_{kjm}(t_{jm})}_{\geqslant \mathcal{E}}| - |\underbrace{\varphi_{kjm}(t_{jm}) - \psi(t_{jm})}_{< \mathcal{E}}| > 0$$

$\Rightarrow \varphi(t_{jm}) \neq \psi(t_{jm})$ *- против. с единственностью* $\varphi(t)$ *на* P

Теорема **(Пеано)**

$$X \in C(G), \quad \underbrace{G}_{обл} \subset \mathbb{R}^2$$

1. $\dot{x} = X(t, x)$
2. $(t_0, x_0) \in G$

$\Rightarrow \exists h > 0: \ \textit{на } [t_0 - h, t_0 + h] \ \textit{опред. решение з. } K \ (1), (2)$

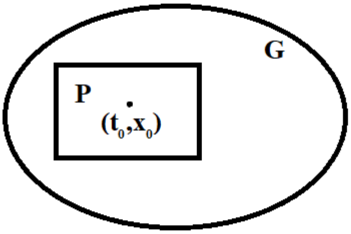
$x = \varphi(t)$

Док-во

$\forall (t_0, x_0) \in G \quad \exists a > 0, b > 0:$

$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\} \subset G$

$\Rightarrow h = \min(a, \dfrac{b}{M}), \ \textit{где } M: \quad |X(t, x)| \leqslant M \ \textit{на } D$



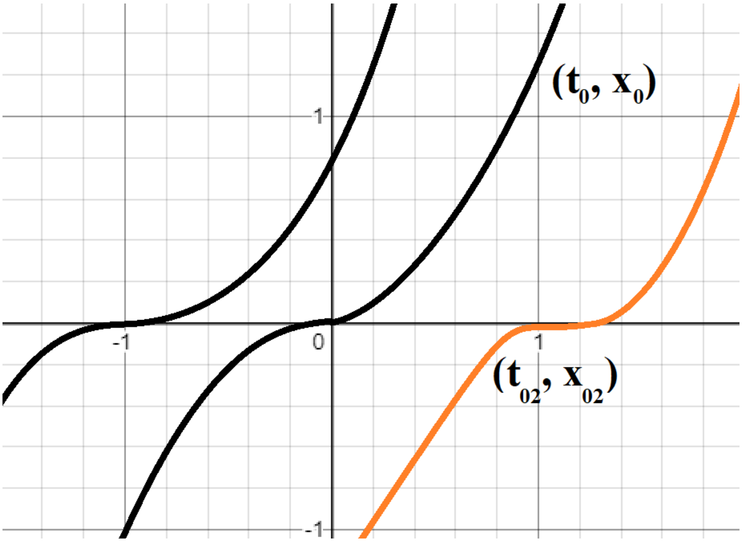
Теорема **(единственности)**

$\dot{x} = \sqrt[3]{x^2} \qquad x \equiv 0$ - *реш*

$$x = \left(\frac{t + c}{3}\right)^3$$

$\exists \Delta > 0: \ \textit{реш } x = \varphi(t) : x_{01} = \varphi(t_{01})$ - *единств. на* $[t_{01} - \Delta, t_{01} + \Delta]$

$\forall \Delta > 0 \quad$ *через т.* (t_{02}, x_{02}) *проходит беск. много решений*



Опр **(1)**

$$(1) \quad \dot{x} = X(t,x) \quad X \in C(G) \quad \underbrace{G}_{обл} \subset \mathbb{R}^2$$

$(t_0, x_0) \in G$ - *точка единств. для* (1), *если*

$\exists \Delta > 0:$ *реш* $(1) x = \varphi(t) \quad (x_0 = \varphi(t_0))$

опред и единственно на $[t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$ *вместо отрезка можно взять интервал*

Опр **(1')**

$(t_0, x_0) \in G$ - *точка единств* (1), *если*

$\exists \Delta > 0 : \forall \delta : 0 < \delta \leqslant \Delta$ *реш*

$x = \varphi(t)$ - *опред и ед-гл на* $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$(x_0 = \varphi(t_0))$

Теорема

$\exists\ x = \varphi(t)$ - *реш. з. К* $(1)(2)$, *опред. при* $t \in < a, b >$

$\forall t \in (a,b) \quad (t, \varphi(t))$ - *точка ед-ти*

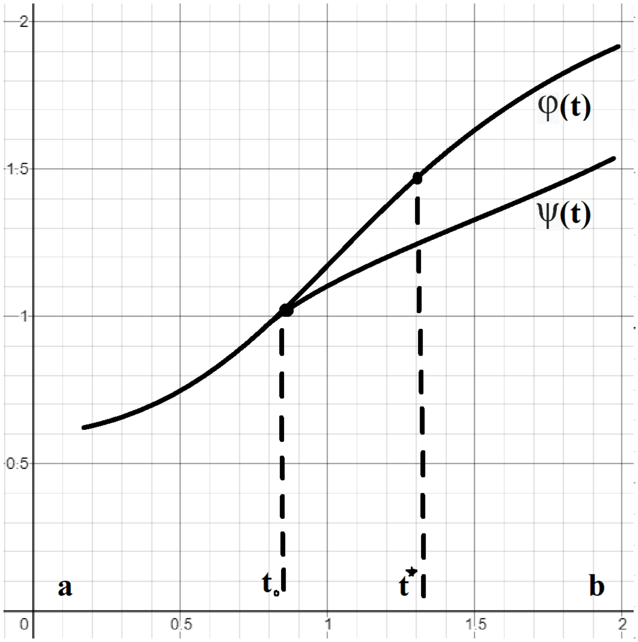
$\Rightarrow$ *реш* $x = \varphi(t)$ - *ед-но на* $< a, b >$

Док-во

$\urcorner \ \exists x = \psi(t)$ - *другое. реш. З.К.* $(1),(2) \quad t \in <a,b>$

$\exists t^* \in (a,b) : \varphi(t^*) \neq \psi(t^*) \quad t^* \neq t_0 \quad$ (*т.к* $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$)

НУО $t^* > t_0$



$u(t) = \varphi(t) - \psi(t)$

$O = \{t \in [t_0, t^*] : u(t) = 0\}$

$O \neq \varnothing \quad (t_0 \in O)$

O - *замкн и огр*

$\exists t_1 \in [t_0, t^*) : \quad t_1 = \max O \quad (t_1 \in O)$

$\Rightarrow \varphi(t_1) = \psi(t_1) \quad \varphi(t) \neq \psi(t) \quad \forall t \in (t_1, t^*]$

Ставим З.К $(t_1, \varphi(t_1) \quad \exists h > 0 :$

На $[t_1 - h, t_1 + h]$ *опред. реш.* $x = \widetilde{\varphi}(t) : \quad x_1 = \widetilde{\varphi}(t_1)$

$\exists \Delta > 0 : \quad \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

(t_1, x_1) - *точка ед-ти* $\Rightarrow \exists \Delta < \min(h, t_1 - a, t^* - t_1)$

$\Rightarrow$ *на* $[t_1 - \Delta, t_1 + \Delta] \quad \widetilde{\varphi} \equiv \varphi(t) \equiv \psi(t)$

противореч с опред t_1

<u>Лемма</u> (Гронуолла)

$$u(t) \geqslant 0,\ \textit{опред}\ t \in <a,b>, \quad u(t)\ \text{-}\ \textit{непр на}\ <a,b>$$

$$\exists t_0 \in (a,b), \quad c \geqslant 0, \quad L > 0:$$

$$u(t) \leqslant c + L\left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau\right| \quad \forall t \in <a,b> \quad (3)$$

$$\Rightarrow u(t) \leqslant c \cdot e^{L|t-t_0|}$$

<u>Док-во</u>

$$\textit{НУО}\ t \geqslant t_0$$

$$(3') \quad u(t) \leqslant \underbrace{c + L\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau}_{v(t)} \overset{?}{\Rightarrow} (4') \quad u(t) \leqslant c \cdot e^{L(t-t_0)}$$

$$u(t) \leqslant v(t)$$

$$\frac{d}{dt}(v(t)\cdot e^{-Lt}) = \underbrace{\dot{v}(t)}_{L\cdot u(t)}\, e^{-Lt} + v(t)(-L)e^{-Lt} =$$

$$L\cdot e^{-Lt}(u(t) - v(t)) \leqslant 0$$

$$v(t)e^{-Lt}\ \text{-}\ \textit{убыв.} \Rightarrow$$

$$v(t)e^{-Lt} \leqslant v(t_0)e^{-Lt_0} \Rightarrow$$

$$U(t) \leqslant v(t) \leqslant \underbrace{v(t_0)}_{=c}\cdot e^{L(t-t_0)} = c\cdot e^{L(t-t_0)}$$

<u>Следствие</u>

$$\textit{Если}\ c = 0,\ \textit{то}\ u(t) \equiv 0\ \textit{на}\ <a,b>$$