1 Некоторые определения из теории множеств. Прямое произведение, разбиение множеств. Мощность объединения

Опр

Пустое множество ($\varnothing$) - мно-во, которому $\notin$ ни один элемент

Опр

Число элементов мн-ва А - мощность $|A|$

Опр

Множество чисел от k до l обозначается $k : l$

Опр

Мн-во А - подмн-во мн-ва В ($A \subset B$), если каждый элемент из А принадлежит В

Опр

С - объединение А и В ($A \cap B$), если оно состоит из всех элементов А и В ($C = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$)

Опр

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, \quad \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ - объединение и пересечение конечного числа мн-в

$$(\bigcap_{i \in I} A_i, \quad \bigcup_{i \in I} A_i) \text{ - аналогично}$$

Опр

Если пересечение мн-в пусто, то они называются дизъюнктивными

Опр

Мн-во С называется разностью мн-в А и В ($C = A \setminus B$), если оно состоит из всех эл-в, принадлежащих А и не принадлежащих В

Опр

$A \triangle B = A \setminus B \cap B \setminus A$ - симметрическая разность

Опр

Мн-во упорядоченных пар (i, j), где $i \in A$, $j \in B$ называется прямым произведением мн-в А и В

$$A \times B = \{(i, j) | i \in A, \quad j \in B\}$$

Замечание

Мощность прямого произведения $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Аналогично произведение $\forall$ конечного числа множеств

Опр

Пусть $A_1, ..., A_k$ - ненулевые и попарно дизъюнктивные, $M = A_1 \cap ... \cap A_k$ и мн-во $\{A_1, ..., A_k\}$ называется разбиением M
(если они попарно не дизъюнктивные, то это покрытие)

Опр

Разбиение A мн-ва M называется измельчением B, если $\forall A_i \in A$ содержится в некотором $B_i \in B$

Опр

Пусть A, B - размельчения мн-ва M, разбиение C называется произведением A и B, если оно является из измельчением, причем самым крупным $C = A \cdot B$

Теорема

Произведение двух разбиений существует

Док-во

Предъявим разбиение, которое будет пересечением $A = \{A_1, ..., A_k\}$ и $B = \{B_1, ..., B_l\}$, точнее $D_{ij} = A_i \cup B_j, \quad i \leqslant k, \quad j \leqslant l$ и $\mathcal{P} = \cup D_{ij}$ (т.е. без пустых строк). Покажем, что тогда оно самое крупное.

Пусть $\exists F = \{F_1, ..., F_t\}$ - измельчение A и B, тогда $\forall F_k \quad \exists A_{i_k},\ B_{i_k}$: $F_k A_{i_k},\ B_{i_k} \Rightarrow F_k \subset (A_{i_k} \cup B_{i_k}) = D_{i_k j_k} \Rightarrow$ мельче F

2 Вектора из нулей и единиц

Пусть мн-во B состоит из двух элементов которые отождествляются с 0 и 1, т.е. $B = 0 : 1$

Произведение m экзмемпляров такого мн-ва обозначим за $B^m = (0 : 1)^m$, состоит из 2^m эл-ов

Опр

Вектор из нулей и единиц - упорядоченный набор из фиксированного числа нулей и единиц, т.е. эл-т мн-ва B^m

Упорядоченный набор из чисел обычно называется вектором, m - размерностью вектора, каждый отдельный элемент набора - компонента вектора

Замечание

Модели, в которых используются наборы из 0 и 1:

1. Геометрическая интерпретация

   Точкой в m-мерном пространстве является m-мерный вектор, каждая его компонента - одна из декартовых координат точки. Набор из 0 и 1, рассматриваемый как точка в пространстве, определяет вершину куба, построенного на ортах (единичных отрезках) координатных вероятностей

2. Логичнская интерпретация

   Операции над векторами выполняются покомпонентно, т.е. независимо над соотв. компонентами векторов-операндов

Пример

x	0	0	0	1	1
y	1	1	1	0	1
$x \wedge y$	0	0	0	0	1
$x \vee y$	1	1	1	1	1
$x \equiv y$	0	0	0	0	1
$x \not\equiv y$	1	1	1	1	0

3. Двоичное представление (натуральные числа)

   Число представляется в виде суммы степеней 2

4. Состояние памяти компьютера

5. Сообщение, передаваемое по каналу связи

6. Можно задавать подмножества мн-ва $1 : n$

3 Алгоритм перебора 0-1 векторов. Коды Грея

Опр

Код Грея — такое упорядочение k-ичных (обычно двоичных) векторов, что соседние вектора отличаются только в одном разряде

Алгоритм

it - номер итерации, k_{it} - номер обновляемой компоненты

x_4	x_3	x_2	x_1	it	k_{it}
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	2
0	0	1	1	2	1
0	0	1	0	3	3
0	1	1	0	4	1
0	1	1	1	5	2
0	1	0	1	6	1
0	1	0	0	7	4
...				...	

Суть алгоритма: зафиксируем нулевое значение у m-й компоненты и переберем все наборы длины $m-1$ для ост. компонент. Перебрав их меняем значение m-й компоненты на 1 и перебинаем набор длины $m-1$ в обратном порядке

Замечание

Явная формула для проверки $G_i = i \oplus (\lfloor i/2 \rfloor)$

4 Перебор элементов прямого произведения множеств

ВНИМАНИЕ! ВЫ ВСТУПАЕТЕ НА ЗЕМЛЮ ТУПОГО ПЕРЕПИСЫВАНИЯ ИЗ ТУПОГО ПЕРЕПИСЫВАНИЯ!!!

$$M(1:k) = M_1 \times M_2 \times ... \times M_k$$

$$|M_1 \times M_2 \times ... \times M_k| = \prod_{i \in 1:k} m_i, \text{ где } m_i = |M_i|$$

Пусть каждое M_i состоит из целых чисел от 0 до $m_i - 1$, тогда каждый элемент $M(1:k)$ - последовательность неотрицательных чисел $r_1, ..., r_k$, причем $r_i < m_i$

$$\mathrm{num}(r_1, ..., r_k) = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot (\prod_{j=1}^{i-1} m_j) = r_1 + r_2 m_1 + ... + r_k m_1 \cdot ... \cdot m_{k-1}$$

5 Размещения, сочетания, перестановки без повторений

Опр

Перестановка из n без повторений - упорядоченный набор из n неповторяющихся элементов, каждый из которых берется из диапазона $1 : n$

$$|P_k| = n!$$

Опр

Размещение - упорядоченный набор из k неповторяющихся элементов из диапазона $1 : n$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-k+1)$$

Опр

Сочетание - набор из k неповторяющихся элементов из диапазона $1 : n$ (порядок не важен)

$$|C_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

6 Размещения, сочетания, перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями:
Последовательность длины n, составленных из k разных символов, i-ый из которых повторяется n_i раз $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$

Пример (aabc)

Перестановки: $abac$, $baac$, $aabc$, $aacb$, $abca$, $baca$, $acba$, $acab$, $bcaa$, $cbaa$, $caba$, cac
Число перестановок с повторениями длины из k разных элементов взятых соответственно по $n_1, ..., n_k$ раз каждый обозначается

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

7 Два алгоритма перебора перестановок. Нумерация перестановок

$$|P_k| = k! = |T_k|$$

P_k - мн-во всех перестановок
T_k - произведение k любых таких множеств M_i, каждый из которых представляет собой мн-во чисел от 0 до $i - 1$

$$T_k = \{0\} \times \{0, 1\} \times ... \times \{0, 1, ..., k - 1\}$$

Построим взаимно однозначное соответствие между P_k и T_k. Возьмем перестановку $(t_1, ..., t_k)$ следующим образом: для любого $i \in 1 : k$ найдем число значений, меньше r_i среди $r_{i+1}, ..., r_k$ - это число мы и примем в качестве t_i
В соответсвии с таким определеничем чисел t_i в мн-ве T_k будет соответственно ??? значения m_i не возраст., а убывающая до единицы

<u>Пример</u> (4, 8, 1, 5, 7, 2, 3, 6)

i	1	2	3	4	5	6	7	8
r_i	4	8	1	5	7	2	3	6
t_i	3	6	0	2	3	0	0	0
m_i	8	7	6	5	4	3	2	1

По $(t_1, ..., t_k)$ легко восстановить исходную перестановку. Для этого меняя i от 1 до k нужно нужно проверить мн-во значений S_i, которые могут быть в перестановке на i месте. Для $i = 1$ $S_1 = 1 : 8$, $t_1 = 3 \Rightarrow r_1 = 4$, далее $S_2 = 1 : 3 \cap 5 : 8$, $t_2 = 6 \Rightarrow r_2 = 8$. Если использовать это отображение при переборе, то перестановки будут перебираться в лексикографическом порядке

<u>Опр</u>

$(r_1, ..., r_k)$ предшествует $(R_1, ..., R_k)$, если начала перестановок совпадают до индекса d, а дальше $r_d < R_d$

<u>Утв</u>

Из этого перестановки перебираются в лексикографическом порядке, можно вывести правило получения следующего:

1. В $(r_1, ..., r_k)$ найти наибольший суффикс $(r_t, ..., r_k)$, в котором $r_t > ... > r_k$ $(r_{i-1} < r_t)$

2. Выбрать $(r_t, ..., r_k)$ элемент следующий по велечине после r_{t-1}, поставить после в возр. порядке

num	t_k				p_k			
0	0	0	0	0	1	2	3	4
1	0	0	1	0	1	2	4	3
2	0	1	0	0	1	3	2	4
3	0	1	1	0	1	3	4	2
4	0	2	0	0	1	4	2	3
5	0	2	1	0	1	4	3	2

Ещё один алгоритм

8 Задача о минимуме скалярного произведения

Пусть заданы числа $x_1, ..., x_m$ и $y_1, ..., y_m$. Составим пары (x, y), включив каждое x_i и y_i ровно в одну пару. Затем перемножим числа каждой пары и сложим полученное произведение. Требуется найти min такое разбиение чисел на пары S

<u>Теорема</u>

$$\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \qquad x_1 \geqslant x_2 ... \geqslant x_n$$

$$\overline{y} = (y_1, ..., y_n) \qquad y_1 \leqslant y_2 ... \leqslant y_n$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \to \min$$

<u>Док-во</u>

Покажем, что если найдутся пары чисел $(x_i,\ y_i)$ и $(x_j,\ y_j)$: $x_i < x_j$, $y_i < y_j$, то S можно уменьшить, заменив парами $(x_i,\ y_j)$ и $(x_j,\ y_i)$
Действительно,

9 Числа Фибоначчи. Теорема о представлении

Опр

Последовательность чисел Фибоначчи F:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n > 1$$

Утв

$$\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ - сходится}$$

Следствие

$$\varphi_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Лемма

При $n > 1$ выполнено $\varphi^{n+2} = v^{n+1} + v^n$

Док-во

Лемма

При $k > 2$ выполнено:

$$F_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k-3} + ... + F_1$$

$$F_{2k+1} = 1 + F_{2k} + F_{2k-2} + ... + F_0$$

Док-во (по индукции)

$(k = 3)$:

$$F_6 = 8 = 5 + 2 + 1$$

$$F_7 = 13 = 1 + 8 + 3 + 1 + 0$$

$(k \to k + 1)$:

$$F_{2(k+1)} = F_{2k+2} = F2k + 1 + F_{2k} = F_{2k+1} + F_{2k-1} + ... + F_1 =???$$

Теорема

Любое натуральное число можно однозначно представить в виде суммы чисел Фибоначчи

$$s = F_{i_0} + F_{i_1} + ... + F_{i+r},\ \text{где } i_{k-1} + 1 < i_k, \quad k \in 1:r \quad i_0 = 0$$

Док-во

Существование:

Пусть $j(s)$ - номер масимального числа Фиббоначи, не превосходящего s. Положим $s' = s - F_j(s)$. Из определения $j(s)$ следует, что $s' < F_{j(s)-1}$, иначе число Фиббоначи не было бы максимальным. Теперь мы получим искобое представление для s как представление s', дополненное слагаемым $F_{j(s)}$

Единственность:

Пусть есть ещё одно представление $s = F_{j_0} + ... + F_{j_q}$. Н.У.О. считаем, что $j_q < j(s)$. Если мы заменим F_{j_q} на $F_{j(q)-1}$, то правая часть разве что лишь увеличится. Аналогично заменим с возможным увеличением предпоследнее слагаемое на $F_{j(s)-3}$. ???

10 Перебор сочетаний. Нумерация сочетаний

Состояние вычислительного процесса. Массив $(x_1, ..., x_m)$ номеров, включенных в сочетание. Начальное состояние: принять $x_i = i \quad \forall i \in 1 : m$. Стандартный шаг: просматривать компоненты вектора x, начиная с x_m и искать первую компоненту, которую можно увеличить (нельзя $x_m = n$, $x_{m-1} = n - 1$ и т.д.). Если такой нет, то закончить процесс. В противном случае пусть k - наибольшее число, для которого $x_k < n - m + k$, тогда увеличиьть x на единицу, а для всех следующищъ за k-ый продолжаем, но ряд от значения x_k, т.е. $x_i = x_k + (i - k)$

num	Сочетание					k
1	1	2	3	4	5	5
2	1	2	3	4	6	5
3	1	2	3	4	7	5
4	1	2	3	5	6	4
5	1	2	3	5	7	5

Удобно использовать вектора из 0 и 1, чтобы перенумеровать. С каждым сочетанием из n по m можно связать вектор из n нулей и единицЮ в крирпрм единиц ровно m - числа, входящие в данное сочетание просто задают номера этих единиц

$$\mathrm{num}(b[1:n],\ m) = \begin{cases} \mathrm{num}(b[1:n],\ n) & b[n] = 0 \\ l_{n-1}^{m} + \mathrm{num}(b[1:n],\ m-1) & b[n] = 1 \end{cases}$$

Пример

$$\begin{aligned} &\mathrm{num}((0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1),\ 3) = \\ &\quad = C_6^3 + \mathrm{num}((0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),\ 2) = C_6^3 + C_3^2 + \mathrm{num}((0,\ 1,\ 0),\ 1) = \\ &\qquad = C_6^3 + C_3^2 + \mathrm{num}((0,\ 1),\ 1) = C_6^3 + C_3^2 + C_1^1 + \mathrm{num}((0),\ 0) = 24 \end{aligned}$$

11 Бином Ньютона и его комбинаторное использование

Треугольник Паскаля (в узлах C_n^k):

$$
\begin{array}{l|ccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=0 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\hline
n=6 & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6
\end{array}
$$

Опр

Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

Лемма

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$

Док-во (по индукции)

$$(\text{a+b})^n = a(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{1+(n-1)-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) a^k b^{n-k}$$

Следствие

$a=1, \quad b=1$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

$a=1, \quad b=-1$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$$

(благодаря $C_n^k = C_n^{n-k}$)

$a=1, \quad b=i$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k = (1+i)^n = (\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n = 2^{\frac{n}{2}} \cdot e^{in\frac{\pi}{4}}$$

12 Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$
3. $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$

13 Основные определения теории вероятностей

14 Условные вероятности и формула Байеса

15 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Опр

Случайная величина - числовая функция $\alpha : U \to \mathbb{R}$ на вероятностном пр-ве.

hint: U - мн-во событий

Опр

$$E(\alpha) = \sum_{u \in U} \alpha(u) \mathrm{Pr}(u) \text{ - мат. ожидание случайной величины } \alpha$$

$\mathrm{Pr}(u)$ - условная вероятность события u

Свойства

1. Если $\mathrm{Pr}(u) = 1 \Rightarrow E(\alpha) = \alpha(u)$
2. α, β - случ. вел. $E(\alpha + \beta) = E(\alpha) + E(\beta)$ (Линейность)
3. Если $\alpha = c\beta$, где $c = const$ $E(\alpha) = cE(\beta)$
4. $E(\alpha \cdot \beta) = E(\alpha) \cdot E(\beta)$ если α и β нез.

Док-во

Линейность $$E(\alpha + \beta) = \sum_{u \in U} (\alpha(u) + \beta(u)) \mathrm{Pr}(u) = \sum_{u \in U} \alpha(u) \mathrm{Pr}(u) +$$

$$+ \sum_{u \in U} \beta(u) \mathrm{Pr}(u) = E(\alpha) + E(\beta)$$

Опр

Мат. ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее мат. ожидания называется дисперсией этой случайно величины

$$D(\alpha) = E(\alpha - E(\alpha))^2$$

Дисперсия характеризует разброс случайной величины вокруг ее мат. ожидания

$$D(\alpha) = E(\alpha - E(\alpha))^2 = E(\alpha^2) - E(2\alpha E(\alpha)) + E(E^2(\alpha)) =$$

$$= E(\alpha^2) - 2E(\alpha)E(E(\alpha)) + E^2(\alpha) = E(\alpha^2) - E^2(\alpha)$$

<u>**Свойства**</u> **(Дисперсии)**

1. Дисперсия неотрицательна. Если $\Pr(u) = 1$, то $D(\alpha) = 0$
2. $\alpha = \beta + c, \qquad c = const, \qquad \Rightarrow D(\alpha) = D(\beta)$
3. $\alpha = c\beta, \qquad c = const, \qquad \Rightarrow D(\alpha) = c^2 D(\beta)$
4. α и β нез. с.в. $\Rightarrow D(\alpha + \beta) = D(\alpha) + D(\beta)$

<u>**Док-во**</u>

$$2) \qquad \alpha = \beta + c$$

$$E(\alpha) = \sum_{u \in U} \alpha(u)\Pr(u) = \sum_{u \in U} (\beta(u)+c)\Pr(u) = \sum_{u \in U} \beta(u)\Pr(u) + \sum_{u \in U} c\Pr(u) =$$

$$= E(\beta) + c$$

$$D(\alpha) = E(\alpha - E(\alpha))^2 = E(\beta + c - E(\beta) - c)^2 = D(\beta)$$

$$3) \qquad D(\alpha) = E(c\beta - E(c\beta))^2 = E(c\beta - cE(\beta))^2 = c^2 E(\beta - E(\beta))^2 = c^2 D(\beta)$$

$$4) \qquad D(\alpha + \beta) = E(\alpha + \beta - E(\alpha + \beta))^2 =$$

$$= E(\alpha - E(\alpha) + \beta - E(\beta))^2 = E(\alpha - E(\alpha))^2 + 2E((\alpha - E(\alpha)(\beta - E(\beta))))) +$$

$$+ E(\beta - E(\beta))^2 = D(\alpha) + D(\beta) + 2(E(\alpha\beta - \alpha E(\beta) - \beta E(\alpha) + E(\alpha)E(\beta))) =$$

$$= D(\alpha) + D(\beta) + 2(E(\alpha\beta) - E(\alpha)E(\beta)) - E(\beta)E(\alpha) + E(\alpha)E(\beta)) = D(\alpha) + D(\beta)$$

16 Схема Бернулли

Задача

Стрелок делает 5 выстрелов, какова вероятность того, что он попадет не меньше 4 раз?

p - вероятность попасть в мишень

$$P_5(A) = P_5(4) + P_5(5) = P_5(4) + p^5$$
$$P_5(A) = C_5^4 \cdot p^4(1-p) + p^5$$

hint: мы выбираем, когда стрелок промахнется из всех выстрелов

Опр

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \quad \text{формула Бернулли}$$

n - число попыток $\quad$ m - удачных событий

17 Случайные числа. Схема Уолкера

18 Двоичный поиск и неравенство Крафта

19 Энтропия. 2 леммы

20 Теорема об энтропии

21 Операции над строками переменной длины

22 Поиск образца в строке (Карпа-Рабина, Бойера-Мура)

23 Суффиксное дерево

24 Задача о максимальном совпадении двух строк

25 Код Шеннона-Фано. Алгоритм Хаффмена. 3 леммы

26 Сжатие информации по методу Зива-Лемпеля

27 Метод Барроуза-Уилера

28 Избыточное кодирование. Коды Хэмминга

29 Шифрование с открытым ключом

30 Сортировки (5 методов)

31 Информационный поиск и организация информации

32 Хеширование

33 АВЛ-деревья

Опр

АВЛ-дерево - сбалансированное по высоте двоичное дерево поиска, для каждой его вершины высота ее двух поддеревьев различается не более чем на 1

Теорема

АВЛ-дерево с n ключами имеет высоту

$$h = O(\log N)$$

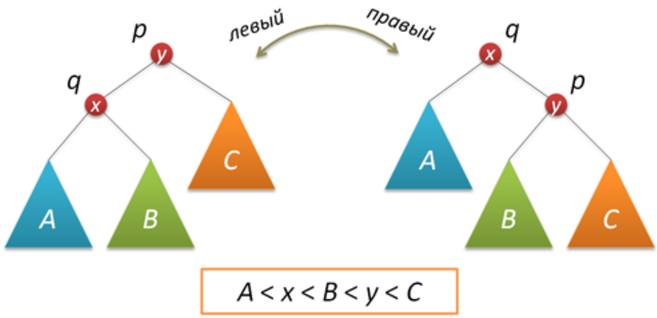
Опр

Баланс вершины - разница между высотами ее поддеревьев

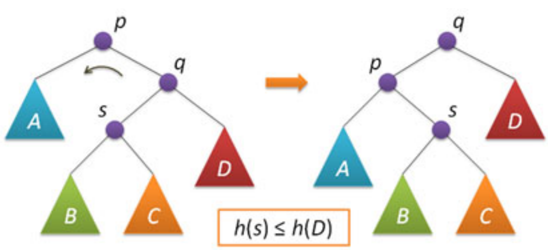
Опр (Балансировка)

Балансировка - операция, которая в случае разницы высот левого и правого поддеревьев $|h(L) - h(R)| = 2$, изменяет связи предок-потомок в поддереве данной вершины так, что разница становится $<= 1$, иначе ничего не меняет.
Восстановить баланс можно с помощью поворотов (всего их 4: левый простой, правый простой, левый большой, правый большой)
Простой поворот выполняется при условии $h(s) \leqslant h(D)$

Простой поворот вправо

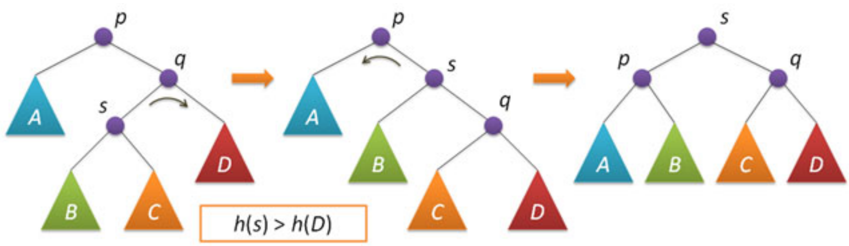


Применение простого поворота



Большой поворот выполняется при условии $h(s) > h(D)$ и сводится к двум простым поворотам

Большой поворот



hint: первым простым поворотом мы отменяем это условие

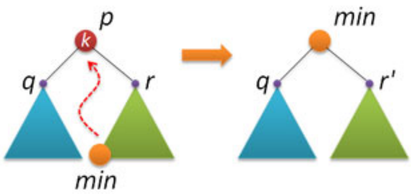
Опр (Добавление вершины)

Добавляем вершину как в бинарном дереве. Спускаемся вниз, как при поиске ключа t. Если мы стоим в вершине a и нам надо идти в поддерево, которого нет, то делаем ключ t листом, а вершину a его корнем.
Дальше поднимаемся вверх и пересчитываем баланс у вершин. Если мы поднялись в вершину i из левого поддерева, то баланс i - ой вершины увеличивается на 1, иначе уменьшается.
Если мы пришли в вершину и ее баланс $= 0$ после пересчета, то это значит, что высота поддерева с корнем в этой вершине не изменилась, можно остановить подъем.
Если баланс вершины после пересчета $= -2$ или 2, то нам необходимо сбалансировать это поддерево.

Добавление работает за $O(\log n)$, т.к. мы рассмотрим не больше, чем $O(h)$ вершин

Опр (Удаление ключа)

1. найдем удаляемый ключ p в дереве (если не нашли, то ничего не делаем)
2. в правом его поддереве найдем наименьший элемент min
3. поменяем местами поменяем местами p и min
4. удалим p
5. сбалансируем все, что выше p



При удалении возможна ситуация, когда вершина p не имеет правого поддерева, тогда по св-ву АЛВ-дерева либо эта вершина имеет слева единственный дочерний узел, либо она является листом. В обоих случаях мы просто удаляем p и возвращаем указатель на левое поддерево.

34 B-деревья

35 Биномиальные кучи

36 Основные определения теории графов

37 Построение транзитивного замыкания

38 Обходы графа в ширину и глубину. Топологическая сортировка

39 Связность. Компоненты связности и сильной связности

40 Алгоритм поиска контура и построение диаграммы порядка

41 Теорема о связном подграфе

42 Деревья. Теорема о шести эквивалентных определениях дерева

43 Задача о кратчайшем остовном дереве. Алгоритм Прима

44 Алгоритм Краскала

45 Задача о кратчайшем пути. Алгоритм Дейкстры

46 Алгоритм Левита

47 Задача о кратчайшем дереве путей

48 Сетевой график и критические пути. Нахождение резервов работ

49 Задача о максимальном паросочетании в графе. Алгоритм построения

50 Теорема Кенига

51 Алгоритм построения контролирующего множества

52 Задача о назначениях. Венгерский метод

53 Задача коммивояжера. Метод ветвей и границ

54 Метод динамического программирования. Задача линейного раскроя

55 Приближенные методы решения дискретных задач. Жадные алгоритмы

56 Алгоритмы с гарантированной оценкой точности. Алгоритм Эйлера

57 Жадные алгоритмы. Задача о системе различных представителей

58 Приближенные методы решения дискретных задач

59 Конечные автоматы

60 Числа Фибоначчи. Производящие функции

61 Числа Каталана

62 ?Алгоритм Кристофидеса (возможно будет)