# 1 Теорема о комплексной дифференцируемости степенного ряда. Следствие: единственность разложения в степенной ряд.

**Теорема** (о комплексной дифференцируемости степенного ряда)

*здесь когда-нибудь будет теорема*

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Следствие** (1)

*здесь когда-нибудь будет следствие*

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Следствие** (2)

*здесь когда-нибудь будет следствие*

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Следствие** (3)

*здесь когда-нибудь будет следствие*

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Утв**

*здесь когда-нибудь будет утверждение*

## 2 Ряд Тейлора. Примеры ($e^x, \sin x, \ln(1+x), e^{-\frac{1}{x^2}}$).

*здесь когда-нибудь будет полный билет*

**Опр**

$$f \in C^{\infty}(U_{x_0}) \qquad U_{x_0} \text{ - окр } x_0$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ назыв. Рядом Тейлора ф-и в т } x_0$$

**Примеры**

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{k!}$

2. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

3. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$

**Теорема* (формула Стирлинга)** *здесь когда-нибудь будет теорема*

## 3 Биномиальный ряд $(1+x)^\alpha$

*здесь когда-нибудь будет полный билет*

**Опр**

$$(1+x)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Запишем (формально) ряд Тейлора для $(1+x)^\alpha$ в т. $x_0 = 0$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!} = C_\alpha^k$$

Найдем интервал сходимость $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_\alpha^k z^k \quad z \in \mathbb{C}$ (по Даламберу)

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_\alpha^{k+1} z^{k+1}}{c_\alpha^k z^k} \right| = \lim_{k\to\infty}$$

## 4 Признак Абеля-Дирихле для равномерной сходимости функциональных рядов (доказательство одного).

**Теорема**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)b_k(t) \qquad \begin{aligned} a_k &: E \to \mathbb{C} \\ b_k &: E \to \mathbb{R} \\ E &\subset \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$b_k(t) - \text{ монот по } k \quad \forall t$$

$$\text{т.е} \quad b_{k+1}(t) \leqslant b_k(t) \quad \forall t (\text{ или наоборот})$$

Абель

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ - сход р/м на $E$
2. $|b_k(t)| \leqslant M \qquad \forall k, \quad \forall t \in E$

Дирихле

1. $\left|\sum\limits_{k=0}^{N} a_k(t)\right| \leqslant M \quad \forall N, \forall t \in E$
2. $b_k(t) \rightrightarrows 0$

Тогда $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k(t)b_k(t)$ - сход равномерно на $E$

**Лемма**

*здесь когда-нибудь будет лемма*

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Док-во (теоремы)**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

## 5 Теорема Абеля. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

**Теорема**

$$hint: \quad z \in [0, w] \Leftrightarrow z = t \cdot w \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

$$\text{Пусть } \sum c_k z^k \text{ сход при } z = w \in \mathbb{C}$$

$$\text{Тогда } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ - сход р-но на } [0, w]$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in C[0, w]$$

**Док-во**

$$f(t, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k w^k \qquad t \in [0, 1]$$

$$\sum c_k w^k \text{ - сход (равн по t, т.к. не зависит от t)}$$

$$t^k \text{ - убывает}$$

$$\left| t^k \right| \leqslant 1 \qquad \forall t \in [0, 1] \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{ по пр. Абеля-Дирихле ряд сход. равномерно}$$

**Пример**

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \qquad \forall x: \ -1 < x < 1$$

при $x = 1$ $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ - гармонич. знакочеред, он сход, т.о.

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k \text{ - сх. при } x = 1 \Rightarrow \text{ по т. Абеля}$$

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \in C[0, 1]$$

В частности $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = f(1)$

$$\text{если } x \in (0, 1), \text{ то } f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = \ln(1 + x)$$

$$\lim_{x \to 1-} \ln(1+x) = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... = \ln 2$$

## 6 Интеграл комплекснозначной функции. Скалярное произведение и норма в пространстве $C(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, в пространстве $R([a;b])$. Ортогональность. Пример: $e_k(x) = e^{2\pi ikx}$.

**Опр**

$$f : [a,b] \to \mathbb{C}$$

$$f(x) = u(x) + iv(x)$$

$$u(x) = \operatorname{Re} f(X)$$

$$v(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

$$f \text{ - инт. по Риману} \quad f \in R_{\mathbb{C}}[a,b], \text{ если}$$

$$u, v \in R[a,b]$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

**Свойства**

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

3. $\displaystyle\int_a^b kf = k\int_a^b f \quad (k \in \mathbb{C})$

4. $\displaystyle\int_a^b \overline{f} = \int_a^b u - iv = \overline{\int_a^b f}$ (комплексное сопряжение)

5. $F' = f$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

6. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

**Док-во**

*здесь когда-нибудь будет док-во*

**Опр (Периодич. функции)**

$$f(x+t) = f(x) \qquad \forall x$$

Будем считать, что $T = 1$

Периодич. функции с пер. 1 образуют линейное пр-во

$$f, g \text{ - период. } T = 1$$

$$\Rightarrow f + k \cdot g \text{ - тоже период.} T = 1$$

$$\text{Если } f \text{ - периодич. } T = 1, \text{ то}$$

$$\int_0^1 f = \int_c^{c+1} f \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$0 < c < 1$$

$$\int_0^1 f = \int_0^c f + \int_c^1 f = \int_0^c f(t+1)dt + \int_c^1 f = \int_1^{c+1} f(s)ds + \int_c^1 f$$

**Опр**

Рассмотрим пр-во функций с пер $T = 1$ и $\in R_{\mathbb{C}}[0,1] \Leftrightarrow R_{\mathbb{C}}[0,1]$ Введем на этом пр-ве структуру евклидова пр-ва

$$< f, g >= \int_0^1 f \cdot \overline{g} \text{ - скал. произведение}$$

*здесь когда-нибудь будет корректное опредление (полное)*

**Опр (Норма в лин. пр-ве X со скал. произв.)**

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$$

1. $\|x\| \geqslant 0$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2. $\forall k \quad \|kx\| = \|k\| \cdot \|x\|$

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

**Опр**

$$f \perp g \quad (f \text{ ортогонально } g) \quad \Leftrightarrow \quad < f, g >= 0$$

**Пример**

$$a) e_n = e^{2\pi i n x} \qquad x \in [0,1] \qquad \|e_n\| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\|e_n\|^2 = \int_0^1 e_n \overline{e_n} = \int_0^1 e^{2\pi i n x} \cdot e^{-2\pi i n x} = 1$$

$$\overline{e^{i\varphi}} = \cos\varphi + \overline{i \sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}$$

$$b) < e_n, e_m >= \int_0^1 e^{2\pi i n x} \cdot e^{-2\pi i m x} = \int_0^1 e^{2\pi i x(n-m)} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} = \delta_{nm} \text{ - с. Крон.}$$

т.о. $\quad e_n \perp e_m \qquad \forall n \neq m$

## 7 Свойства скалярного произведения и нормы (теорема Пифагора, неравенство Коши-Буняковского-Шварца, неравенство треугольника).

*здесь когда-нибудь будет исправлено на опрееление (или лучше перенесено в прошлый билет с ссылкой на него тут)*

**Свойства**

$$< ... >: X \times X \to \mathbb{C}$$

1. $\forall x, y \in X \quad < x, y >= \overline{< y, x >}$
2. $\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall y \in X$
$$< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y >$$
3. $\forall k \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in X$
$$< kx, y > = \ k < x, y >$$
$$< x, ky > = \ \overline{k} < x, y >$$
4. $< x, x > \geqslant 0$ причем $< x, x > = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$
Но для $f \in R_{\mathbb{C}}[0,1]$ необязательно из $\quad < f, f > = \ 0$ следует, что $f = 0$

**Свойства**

1. $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \underbrace{< f, g > + < g, f >}_{2\operatorname{Re}< f, g >} + \|g\|^2 =$
$$= \|f\|^2 + 2\operatorname{Re} < f, g > + \|g\|^2$$
2. По т. Пифагора, если $f \perp g \ \Rightarrow$
$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$
3. $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$
4. нер-во КБШ
$$|< f, g >| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$
5. Н-во треугольника
$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

**Док-во (КБШ)**

$$(*) \, |< f, g >| = \left| \int f\overline{g} \right| \leqslant \int |f| \, |g|$$

$$0 \leqslant \int (|f| + \lambda \, |g|)^2 = \underbrace{\|f\|^2 + 2\lambda \int |f| \, |g| + \lambda^2 \|g\|^2}_{\text{кв. трехчлен отн } \lambda} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$D \leqslant 0$$

$$\frac{D}{4} = (\int |f|\,|g|)^2 - \|f\|^2\|g\|^2 \leqslant 0 \Rightarrow \int |f|\,|g| \leqslant \|f\|\|g\| \quad (**)$$

$$(*) \text{ и } (**) \Rightarrow |< f, g >| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

**Док-во (Нер-во треуг-ка)**

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re} < f, g > + \|g\|^2 \leqslant \|f\|^2 + 2\,|< f, g >| + \|g\|^2 \overset{\text{КБШ}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2 \Rightarrow \|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$$

*здесь когда-нибудь будет исправлено на определение*???

**Теорема (Аксиомы нормы)**

$$X - \text{лин. пр-во} \qquad \|...\| : X \to [0, +\infty)$$

1. $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
2. $\|kx\| = \|k\| \cdot \|x\| \qquad \forall k \in \mathbb{C}, \quad \forall x \in X$
3. $\forall x, y \in X \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

## 8 Коэффициенты Фурье функции по ортогональной системе $e_k$. Ряд Фурье. Пример: тригонометрический полином.

**Опр** Тригонометрическим многочленом степени $N$ назовем:

$$T_n = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k(\cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx))$$

Как найти $c_k$, если известен $T_n(x)$ ?

$$T_n = \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k \quad \Big| \cdot < ..., e_m >$$

$$< T_n, e_m > = c_m \cdot < \underbrace{e_m, e_m}_{=1} > \quad (\text{т.к.} < e_k, e_m >= \delta_{km})$$

$$c_m =< T_N, e_m >= \int_0^1 T_N \overline{e}_m$$

$\exists f, g$ - тригоном. полиномы, коэфф. в разложении по $e_k$ будем обозначать $\hat{f}(k) \in \mathbb{C}$

$$\text{т.е. } f = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k, \quad \hat{f}(k) =< f, e_k >$$

$$g = \sum_{k=-N}^{N} \hat{g}(k) e_k, \qquad \hat{g}(k) =< g, e_k >$$

$$< f, g >=< (\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k), (\sum_{j=-N}^{N} \hat{g}(j) e_j) >=$$

$$= \sum_{k,j=-N}^{N} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}}(j) < \underbrace{e_k, e_j}_{=\delta_{kj}} >= \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) \overline{\hat{g}}(k)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \qquad \hat{f}(k) =< f, e_k >$$

**Опр**

$$\hat{f}(k) =< f, e_k >= \int_0^1 f \cdot \overline{e}_k \text{ - коэфф. Фурье функции } f$$

по ортог. системе функций $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$

**Опр**

$$\text{Ряд Фурье функции } f: \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e_k(x)$$

**Пример**

*здесь когда-нибудь будет пример*

## 9 Свойства коэффициентов Фурье (коэффициенты Фурье сдвига, производной).

**<u>Свойства</u>**

1. $f_a(t) = f(t+a) \quad \Rightarrow \hat{f}_a(k) = \int_0^1 f(t+a)e^{-2\pi ikt}dt =$

$$= \int_a^{1+a} f(x) \cdot e^{-2\pi ik(x-a)}dx = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi ikx} \cdot e^{e\pi ika} =$$

$$= e^{2\pi ika}\hat{f}(k)$$

2. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$

$$\hat{f'}(k) = \int_0^1 f'(t) \cdot e^{-2\pi ikt}dt =$$

Интегрируем по частям

$$= \underbrace{f(t)e^{-2\pi ikt}}_{=0 \text{ т.к. } T=1}\Big|_0^1 + 2\pi ik \underbrace{\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}dt}_{\hat{f}(k)}$$

$$\hat{f'}(k) = 2\pi ik\hat{f}(k)$$

3. Коэф. Фурье фещ. функции

$$f \in R[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t) \cdot e^{-2\pi ikt}dt$$

$$\hat{f}(-k) = \int_0^1 f(t) \cdot e^{2\pi kt}dt$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$$

4. Коэфф. Ферье четной функции

$$f \text{ - четная}$$

$$\hat{f}(k) = \int_{-k}^k f(t)e^{-2\pi ikt}dt = \int_{-k}^k \underbrace{f \cdot \cos 2\pi kt}_{\text{четная}} - i\int_{-k}^k \underbrace{f \cdot \sin 2\pi kt}_{\text{нечетная } =0} =$$

$$= \int_{-k}^k f\cos 2\pi kt = \hat{f}(-k) \text{ поскольку четная}$$

Если $f$ - вещ и четная $\Rightarrow \quad \hat{f}(k) = \hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) \in \mathbb{R}$$

## 10 Неравенство Бесселя. Лемма Римана-Лебега (light).

**Опр** (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \leqslant \int_0^1 |f|^2 = \|f\|^2$$

**Лемма**

$$f \in R[0,1], \quad S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e_k$$
$$f - S_N(f) \perp S_N(f)$$

**Док-во**

$$< f, S_N(f) >= \int_0^1 f(t) \cdot \overline{\sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) \cdot e_k(t) dt} = \sum_{k=-N}^{N} \overline{\hat{f}(k)} \int_0^1 f(t) \cdot \overline{e_k} dt = \sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{f}(k)\right|^2 =$$
$$=< S_N(f), S_N(f) > = \|S_N(f)\|^2$$

$$< f, S_N(f) > \ = \ < S_N(f), S_N(f) >$$
$$\Leftrightarrow < f - S_N(f), S_N(f) > \ = 0$$

**Следствие**

т.к. $f - S_N(f) \perp S_N(f)$, то $\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2$

**Док-во** (нер-ва Бесселя)

$$\sum_{k=-N}^{N} \left|\hat{f}(k)^2\right| = \|S_N(f)\|^2 \leqslant \|f\|^2 = \int_0^1 |f|^2$$

предельный переход в нер-ве $(N \to \infty)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \leqslant \int_0^1 |f|^2$$

**Следствие** (Лемма Римана-Лебега)

$$f \in R_{\mathbb{C}}[0,1] \Rightarrow \hat{f}(k) \to 0 \quad k \to +\infty \quad k \to -\infty$$

**Док-во**

Необходимо усл. сх-ти ряда и нер-во Бесселя.
В нер-ве Бесселя ряд возрастает и ограничен сверху, значит он сходится.

$$\Rightarrow \hat{f}(k) \to 0$$