Практика по матану, 3 сем

(преподаватель Роткевич А. С.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 Функции от нескольких переменных

1.1 02.09.2019

1.1.1 Основные определения

Опр

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика, если

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$
   (X, ρ) - метрическое пространство

Примеры

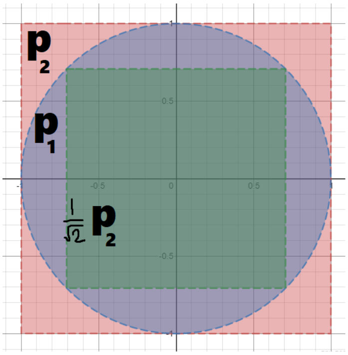
1. $\mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |x - y|$
2. $x \neq \varnothing$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
3. $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$,
   где $x = (x_1, ..., x_n)$ $y = (y_1, ..., y_n)$

Опр

$\rho_1, \rho_2 : X * X \to \mathbb{R}$ - метрики, тогда ρ_1, ρ_2 - эквивалентны, если
(они задают одну топологию) $c_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant c_2\rho_1(x, y)$ для $c_1, c_2 > 0$ - const

Пример

$\mathbb{R}^2$ $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{2\rho_2^2(x, y)}$
$\rho_2(x, y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ (упр.)
$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \rho_1(x, y)$
Пусть $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + ...|x - n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$
Если $p \to \infty$ $\rho_3 \to \rho_2$
$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$ - пространство Лебега конечномерное
(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны (ρ_1, ρ_2, ρ_3)



Опр

$\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика,

Открытым шаром в X относительно метрики ρ называется мн-во $B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$

Замкнутым шаром называется $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leqslant r\}$

Сферой называется $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

Упр

Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

Пример

$l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}\ 1 \leqslant p < \infty$

$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$

l^p - пр-во Лебега (последовательностей)

Пример

$C[0, 1]$ - пр-во непр. функций

$\rho(f, g) = \max\limits_{[0,1]} |f - g|$ - полна (любая фундаментальная последовательность сходится)

$\rho_p(f, g) = (\int\limits_0^1 |f - g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ - не полная

Опр

(X, ρ) - метр. пр-во, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $a \in X$ $x_k \to a$ в пр-ве X по метрике ρ, если $\rho(x_n, a) \underset{k\to\infty}{\to} 0$

Примеры

$\mathbb{R}^2$ $M_k = (x_k, y_k)$ $P = (a, b)$ $M_k \to P$ в евкл. метрике, т.е. $\rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \underset{k\to\infty}{\to} 0 x_k \to a,\ y_k \to b$

Замечание

Есть ρ_1, ρ_2 - экв. метрики, то $\rho_1(x_k, a) \to 0 \rho_2(x_k, a) \to 0$

Упр

$x_k \to a,\ x_k \to b \Rightarrow a = b$

$(\rho(a,b) \leqslant \rho(a,x_k) + \rho(x_k,b) \to 0 \Rightarrow \rho(a,b) \to 0 \Rightarrow a = b)$

Опр

$E \subset X$, (X,ρ) - метр. пр-во, то $a \in X$ - т. сгущ. E, если

$\forall \mathcal{E}\ \exists x \in E : \rho(a,x) < \mathcal{E}$

Опр

$f : E \to Y\ (X,\rho)$, (Y,d) - метр. пр-ва $(E \subset X)$, a - т. сгущ. E, $A \in Y$,

тогда A - предел отображения f в точке a, если

$f(x) \to A$ при $x \in E \setminus \{a\} \to a$

(или $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \rho(x,a) < \delta$ и $x \in E \subset \{a\}$, то $d(f(x), A) < \mathcal{E}$)

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to A\ x \to a$

Замечание

$A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_{\mathcal{E}}(A)$

1.2 05.09.2019

1.2.1 Примеры для $\mathbb{R}^2$

Будем в $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Опр

$f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ - точка сгущения, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F$, если

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x, a) < \delta,\ x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < \mathcal{E}$

В $\mathbb{R}^2$ работают:

арифм. действия, теор. о двух миллиционерах, критерий Коши:

Опр

$f : E \to \mathbb{R}$, частный случай $\exists \lim\limits_{x \to a} f \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 :$

$|f(x) - f(y)| < \mathcal{E}\ 0 < \rho(x, a), \rho(y, a) < \delta$ (упр)

Упр

$\exists \lim\limits_{x \to a} f \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \to a\ (\rho(x_n, a) \to 0)\ \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ - предел функции в т. (x_0, y_0)

Пример

$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$, т.к.$|f(x, y)| \leqslant |x| + |y| \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\to} 0$, $\nexists \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to y} f(x, y)$

Пример

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ - не существует, так как $\lim f(x, x) = 1$, $f(x, 2x) = 0$

Пример

Построить $f(x, y)$ т.ч. $\forall a, b\ \exists \lim\limits_{t \to 0} f(at, bt) = A$, но $\nexists \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$

$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a} t \to 0$, но при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ предел - единица

Замечание

Если $\gamma(t) \underset{t \to t_0}{a} \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $\exists \lim\limits_{t \to t_0} f(\gamma(t))$

Замечание

Если $\forall \gamma : \gamma(t) \to a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim f(\gamma(t))$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} f$

Замечание

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ - не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть $= \lim\limits_{x\to x_0}\overline{f}(x)$

$\overline{f}(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \neq$(не обязательно) $\neq f(x,y_0)$

Опр

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y) = A$, если

$\forall\mathcal{E}>0\ \exists M>0 : \forall x,y : \max(x,y)>M\ |f(x,y)-A|<\mathcal{E}$

Пример

$f=\frac{y}{x}tg(\frac{x}{x+y})$ - не имеет предела, $f(x,x)=tg(\frac{1}{2})$, $f(x,x^2)=xtg(\frac{1}{1+x})\to 0$

1.3 09.09.2019

1.3.1 Ещё больше определений

Опр

1. $A = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y)$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0 \; \exists M > 0 : x > M \; y > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \mathcal{E}$

2. $A = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x, y)$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0 \; \exists M > 0 : |x| > M \; |y| > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \mathcal{E}$

3. $A = \lim\limits_{P \to \infty} f(P) \; P \in \mathbb{R}^2$, если

   $\forall \mathcal{E} > 0 \; \exists M > 0 : \rho(0, P) > M \Rightarrow |f(x, y) - A| < \mathcal{E}$

Замечание

Демидович по первым двум определениям

Опр

Для конечного предела: $A = \lim\limits_{x \to a \;\; y \to +\infty} f(x, y)$, если

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists M > 0 \quad \delta > 0 : y > M \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \mathcal{E}$

1.3.2 Ещё больше примеров

Пример

$\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (\frac{xy}{x^2 + y^2})^{x^2}$

Решение

Заметим, что $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leqslant x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leqslant (x - y)^2$ для x $\neq y$

Значит дробь стремится к 0

Пример

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (\frac{xy}{x^2 + y^2})^{x^2}$

Решение

При $x = y$ предел $\frac{1}{2}$

При $x = y^2$ предел 0

Пример

$$f = \sin(\frac{\pi y^2}{x^2+3y^2})$$

Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f$

Решение

Первый не имеет предела ($x = y$, $x = \sqrt{y}$). Второй $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Третий 0

Пример

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{sin(y-x^2)}{y-x^2}$$

Решение

$z = y - x^2$, $z \to 0 \Rightarrow x, y \to 0$

$|z| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$

Пример

$f = \dfrac{1-\sqrt[3]{sin^4 x + cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, найти $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} f$

Решение

$1 - \sqrt[3]{t} \underset{t\to1}{} \dfrac{1-t}{3}$ (т.к. $1-\sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1+\sqrt[5]{t}+\sqrt[3]{t^2}}$)

Значит $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} f = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} \frac{1}{3}\dfrac{1-(sin^4 x + cos^4 y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} \dfrac{2sin^2 y - sin^4 y - sin^4 x}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Заменим по Тейлору: $= \lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to0}} \dfrac{2y^2 + \overline{o}(y^3) - x^4 + \overline{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Попробуем оценить по модулю $|\dfrac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}|$, заметим что $y^2 \leqslant x^2+y^2$,

$x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$ (для $x^2+y^2 < 1$),

чтобы избавиться от $\overline{o}$ оценим так:

$\overline{o} + y^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, $\overline{o} + x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2+y^2$

Тогда $|\dfrac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leqslant 2\dfrac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} \to 0$

1.4 12.09.2019

1.4.1 Некоторые особенные примеры

<u>Пример</u>

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}((1+x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{1}{1+xy}} = e$$

<u>Пример</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & ,x^2+2^2\neq 0\\ a & ,else \end{cases}$$

1) $a=?$, т.ч. f - непр

2) $a=?$, f - непрю на прямых, проходящих через 0

<u>Решение</u>

1) $a = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$

<u>Замечание</u>

$x^ny^m \leqslant (\sqrt{x^2+y^2})^{n+m}$ и $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

1.4.2 Частные производные. Определения

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

<u>Опр</u>

f - диф. в точке P_0, если $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, т.ч.

$f(x_0, +\delta x, y_0+\delta y, z+\delta z = f(x_0, y_0, z_0)+A\delta x+B\delta y+C\delta z+\overline{o}(\sqrt{(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2})$

Пусть $h = (\delta x, \delta y, \delta z)^T$

$$f(P_0+h) = f(P_0) = \begin{pmatrix} A\\ B\\ C \end{pmatrix}^T h + \overline{o}(|h|)$$

$df(x,y,z) = Adx + Bdy + Cdz$

Дифференциал сопоставляет $(dx, dy, dz) \to Adx + Bdy + Cdz$

<u>Опр</u>

Частной произв. по перем. x в т. (x_0, y_0, z_0) называется предел (если $\exists$)

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t, y_0, t_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)$$

1.4.3 Частные производные. Примеры

Утв

f - дифф. $\Rightarrow \exists$ част. пр. и $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ B = \frac{\partial f}{\partial x},\ C = \frac{\partial f}{\partial x}$

Производные старшего порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \neq \text{(не всегда)}\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Частные производные сложной функции

$$w = f(x, y, z),\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.\ (u, v) \to (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$w = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$
$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Пример

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\frac{\partial \chi}{\partial v})\frac{\partial \varphi}{\partial u} + ...$$

Пример

$$F = f(x, xy, xyz) = f(u, v, w)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}1 + \frac{\partial f}{\partial v}y + \frac{\partial f}{\partial w}yz$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v} + uz\frac{\partial}{\partial w}$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v})y + \frac{\partial f}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(y)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial w})yz + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial}{\partial x}(yz)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + yz\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + (yz)^2\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + zy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y^2 z\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}$$

Пример

Дано $u = x^y$, найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{d^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x)x^y, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \ln^2(x)x^y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + y\ln(x)x^{y-1}$$

1.5 16.09.2019

Пример

Выяснить, есть ли производная у $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$

Решение

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}, \quad x^3+y^3 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3+0^3}-\sqrt[3]{o^3+0^3}}{t} = 1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}$ не $\exists$

Пусть $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ - диф. в точке $(0,0) \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = 0 + x + y + \overline{o}(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\sqrt[3]{(0+\delta x)^3+(0+\delta y)^3} = \underset{=0}{f(x,y)} + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\delta x + \underset{=1}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\delta y + \overline{o}(\sqrt{\delta x^2+\delta y^2})$$

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = x + y + \overline{o}(\sqrt{x^2+y^2}), \quad x,y\to 0$$

$x_n = y_n \quad \sqrt[3]{2}x = 2x + \overline{o}(x)$

$\sqrt[3]{2} - 2 = \overline{o}(1)$?!!

То есть из существования ч.п. не следует дифференцируемость

Теорема

Если существуют ч.п. и они непр. в рассм. точке $\Rightarrow$ ф-ия диф. в этой точке

Пример

$f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0 \Rightarrow$ f - непр. в 0

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2} - 2x^2y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})|_{(0,0)} = \lim_{t\to 0}(\frac{-\frac{t^3}{t^2}-0}{t}) = -1$$

Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y}) = 1$

Теорема

Если $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ $\exists$ в окр. точки, непр. в этой точке $\Rightarrow$ в этой точке $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

1.5.1 Дифференцирование неявных функций

Опр

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $F(x_1, ..., x_n; y)$, $F(x_1^0, ..., x_n^0; y^0) = 0$

$y = f(x_1, ..., x_n)$ - ф-ия задана неявно уравнением $F(x_1, ..., x_n; y) = 0$ в откр. точке $(x_1^0, ..., x_n^0, y^0)$, если $(x = (x_1, ..., x_n))$:

1. $\underset{=}{F}(x, f(x)) = 0$ (в окр. x^0)
2. $f(x^0) = y^0$

Теорема (о неявном отображении)

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x^0, y^0) = 0,$ F - непр. диф. в окр (x^0, y^0),

$F'_y(x^0, y^0) \neq 0,$ тогда:

1. $\exists y = f(x_1, ..., x_n)$ зад. неявно ур. $F(x, y) = 0$
2. f диф. в окр. x^0
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x_0} = -\dfrac{\partial F}{\partial x_0} / \dfrac{\partial F}{\partial y}$ в окр. x^0

1.6 19.09.2019

1.6.1 Неявные функции наносят ответный удар

Пример

$$F(x,y) = ye^y + x + x^2 = 0$$

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n + \overline{o}(x^n),\ \text{при } x \to 0$$

$$x_0 = 0 \quad y(0) =? \quad ye^y = 0 \quad y = 0$$

$$F'y = e^y + ye^y|_{(0,0)} = 1 \neq 0$$

$$y'(0) = -\frac{F'_x}{F'_y}|_{(0,0)} = -\frac{1+2x}{1} = -1 \text{ т.о. неявное отображение}$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}}$$

$$y(x) = 0 - x + \overline{o}(x)$$

Что теперь делать? Способ 1:

$$y''(x) = (y'(x))' = (-\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))})' = (-\frac{1+2x}{(y(x)+1)e^{y(x)}})'$$

$$= -\frac{2}{(y(x)+1)e^{y(x)}} + \frac{1+2x}{((y(x)+1)e^{y(x)}}(y(x)+2)e^{y(x)}y'(x) \underset{\substack{x=0\\y=0}}{=} -2-4 = -6$$

Наш ряд Тэйлора:

$$y(x) = -x - 3x^2 + \overline{o}(x^2)$$

Способ 2 (метод неопр. коэффициентов)

$$y(x) = -x + ax^2 + bx^3 + \overline{o}(x^3)$$

$$F(x,y(x)) = 0 \text{ в опр x=0}$$

$$(-x + ax^2 + bx^3 + \overline{o}(x^3))e^{-x+ax^2+bx^3+\overline{o}(x^3)} + x + x^2 = 0$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \overline{o}(t^3), \quad t \to 0$$

$$t = y(x)$$

$$(-x+ax^2+bx^3)[1+(-x+ax^2+bx^3)+\frac{(-x+ax^2+bx^3)^2}{2}+$$
$$+\frac{(-x+ax^2+bx^3)^3}{6}+o(x^2)]+x+x^2=0$$

$$F(x,y)=ye^y+x+x^2=0$$

$$(-x+ax^2+bx^3+\overline{o}(x^3))(1-x+(a+\frac{1}{2})x^2+(b-a-\frac{1}{6})x^3+\overline{o}(x^3))+x+x^2=0$$

$$\overline{o}(x^3)-x+x^2(1+a)+x^3(b-a-a-\frac{1}{2})+x+x^2=0$$

$$\overline{o}(x^3)+(a+2)x2+(b-2a-\frac{1}{2})x^3=0$$

$$\begin{cases} a+2=0 \\ b-2a-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \quad \text{система должна быть диагональной}$$

$$a=-2 \quad b=-\frac{7}{2}$$

Пример

$$\cos(xy)+\sin x+e^{y+x}=2$$

Проверить условие т.о неявной ф-ии и найти разл y(x) по Тейллору до $\overline{o}(x^3)$

$$x=0, \quad F(0,y)=0\to y(0)$$

1. $1+e^y=2,\ y=0,\ F(0,0)=0,\ y(0)=0$
2. $F'_y=-x\sin(xy)+e^{y+x}|_{(0,0)}=1\neq 0$
   $F'_x=-y\sin(xy)+\cos(x)+e^{y+x}|_{(0,0)}=2$
   $y'(0)=-2$

Методом неявных коэффициентов

$$y(x)=-2x+ax^2+bx^3+\overline{o}(x^3)$$

$$\cos(-2x^2+ax^3+bx^4+\overline{o}(x^4))+\sin x+e^{-x+ax^2+bx^3+\overline{o}(x^3)}=...$$

1.7 23.09.2019

$$F(u;x,y)=0$$

$$\begin{array}{rcl} F(u_0;x_0,y_0) & = & 0 \\ F'_u(u_0;x_0,y_0) & \neq & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \exists \text{ неявная ф-ия } u(x,y) \\ u(x_0,y_0)=u_0 \\ F(u(x,y),x,y)=0 \\ u'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y} \\ u'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_u} \end{array}$$

Ф-ла Тейлора для функциийи от неск. перем.

$$u: E\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x\in E \to u(x)$$

$$T_R(x,x^0)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{\partial^\alpha u(x^0)}{\partial x^\alpha}\frac{(x-x^0)^\alpha}{\alpha!}=\sum_{j=0}^{k}\frac{d^j u(x^0)[x-x^0]}{j!}$$

α - мультииндекс, $\quad \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_k), \quad \alpha_j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n, \quad \alpha!=\alpha_1!...\alpha_n!$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}}, \quad (x-x_0)^\alpha=(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}...(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}$$

Теорема

$$u\in C^k \overset{\text{в окр. } x^0}{\Rightarrow}$$

Пример

$$u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+u'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+$$

$$+u''_{xx}\frac{(x-x_0)^2}{2!}+u''_{xy}\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{1!}+u''_{yy}\frac{(y-y_0)^2}{2!}+\frac{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x-x^0)^3}{3!}+$$

$$+\frac{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}(x-x^0)^2(y-y^0)}{2!1!}+...+\overline{o}(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})^3$$

1.7.1 Дифференциалы высших порядков

Пример

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \to u(x, y)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} dx + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} dy = du[dx, dy]$$

$du : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (dx, dy) \to du[dx, dy]$ - дифференциал первого порядка

$$d^2u = d(du) = d(\frac{\partial u}{\partial x})dx + d(\frac{\partial u}{\partial y})dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

$$\underbrace{d_d^k}_{=dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}}(d^{k-1}u) = \sum_{j=0}^{k} C_j^k \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j} dx^j dy^{k-j}} = d^k u[dx, dy], \quad u \in C^k$$

Понятно, что можно дальше обобщать, но делать мы это, конечно, не будем

Пример

$$f = x^y = e^{y \ln x}, \quad d^2 f \text{ в точке } (2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x}\frac{y}{x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \ln x$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \ln x}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - e^{y \ln x}\frac{y}{x^2} \overset{(2,1)}{=} 0$$

$$f''_{yy} = e^{y \ln x} \ln^2 \overset{(2,1)}{=} ln^2 2$$

$$f''_{xy} = e^{y \ln x}\frac{y}{x} \ln x + e^{y \ln x}\frac{1}{x} \overset{(2,1)}{=} \ln 2 + 1$$

Тогда наш ответ:

$$d^2u|_{(2,1)} = 2(\ln 2 + 1)dxdy + 2\ln^2 2dy^2$$

Пример

Найти $d^3 f$ для $f = x^4 + xy^2 + yz^2 + zx^2$

Как понять, что такое $d^3 f$ от отрех переменных?

$$d^3u = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z})^3 u$$

$$d^3 \overset{(0,1,2)}{=} 3 * 2dx^2dz + 3 * 2dydz^2 + 3 * 2dx^2dy$$

1.8 26.09.2019

1.8.1 Ничего интересного

1.9 03.10.2019

1.9.1 Ф-ла Тейлора для неявной функции

Пример

$$F(x,y;u) = u^3 + 3yu - 4x = 0, \quad u(x,y) \text{ в окр. } (1,1)$$

Задача. Написать ф. Тейлора для $u(x,y)$ с точность. до $\underline{o}(\underbrace{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}_{\varphi})^n$

$$(x,y) = (1,1) \qquad u^3+3u-4 = 0 \Rightarrow (u^2+u+4)(u-1) = 0 \Rightarrow u(1,1) = 1$$

Проверим, что $F'_u(1,1;1) \neq 0$, $3u^2+3y \neq 0$

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{2}{3} \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

$$u(x,y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \overline{o}(\varphi) \quad n = 1$$

Способ 1 ($n = 2, 3, ...$)

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{4}{3u^2+3y} \quad u''_{xx} = \frac{4*6uu'_x}{(3u^2+3y^2)^2} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9}$$

$$u''_{xy} = \frac{4(6uu'_y+3)}{(3u^2+3y^2)^2} = 0 \quad u''_{yy} = \left(-\frac{3u}{3u^2+3y}\right)'_y = -\frac{u'_y(u^2+y)-(2uu'+1)u}{(u^2+y)^2} = \frac{1}{4}$$

$$u(x,y) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}(-\frac{4}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2)^2 + \overline{o}(\varphi^2)$$

Способ 2 (более высокие степени, метод неопр. коэф.)

$$u^3(x,y) = (1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)+a(x-1)^2+b(x-1)(y-1)+c(y-1)^2+\overline{o}(\varphi^2))^3$$

$$t = x-1 \qquad s = y-1$$

$$0 = u^3+3yu-4x = \overline{o}(\varphi^2) + 1 + 3*1^2\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + at^2 + bts + cs^2\right) +$$

$$+3\left(\left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \frac{s^2}{4} - \frac{2}{3}ts\right) + 3(s+1)u - 4(t+1) =$$

$$\left((s+1)u = s + \frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s + s\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}s\right) + at^2 + bts + cs^2 + \overline{o}(\varphi^2)\right)$$

$$= \overline{o}(\varphi^2) + \cancel{(1+3-4)} + t\cancel{\left(3\frac{2}{3} + 3\frac{2}{3} - 4\right)} + s\cancel{\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} + t^2 \underbrace{\left(3a + 3\frac{4}{9} + 3a\right)}_{=0} +$$

$$+ts\underbrace{\left(3b - 2 + 3\left(\frac{2}{3} + b\right)\right)}_{=0} + s^2\underbrace{\left(3c + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 3c\right)}_{=0}$$

Приравняли к 0, т.к. у найденного выше $u(x,y)$ эти коэф. $= 0$

$$\Rightarrow a = -\frac{2}{9} \quad b = 0 \quad c = \frac{1}{8}$$

ДЗ: 3127-3186 (10 задач)

1.10 07.10.2019

1.10.1 Готовимся к к.р.

Пример

$$ue^{x+u} + y\cos(x+y) = 0 \quad (x_0, y_0) \quad o(\varphi^2) \quad o(\varphi^3) \quad \varphi = \sqrt{x^2+y^2}$$

Решение

Решил у доски

Замечание

Можно подставлять $(0, y)$, $(x, 0)$, (x, x)

Пример

$$u\cos(x-u) + e^u \sin(x+u) = 0$$

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + c_6 x^6 + \overline{x^6} \quad x_0 = 0 \quad u(0) = 0$$

$$F'_u = \cos(x-u) + u\sin(x-u) + 2ue^{u^2}\sin(x+u) + e^{u^2}\cos(x+u) \overset{(0,0)}{=} 2$$

$$c_1 = u'_x(0) = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что $F(-x, -u) = -F(x, u)$

$$\Rightarrow F(x, yu) = 0 \Rightarrow F(-x, -u) = 0$$

$$\text{u - нечетна} \Rightarrow c_{2n} = 0$$

$$u(x) = -\frac{x}{2} + c_3 x^3 + c_4 x^5 + o(x^6)$$

$$\left(-\frac{x}{2} + c_3 x^3 + c_5 x^5 + o(x^6)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{3x}{2} - c_3 x^3\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{3x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right) +$$

$$+ \left(1 + \left|-\frac{x}{2} + c_3 x^3\right| + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^5)\right)$$

$$\left(\frac{x}{2} + c_3 x^3 + c_5 x^5 + o(x^6)\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} + c_3 x^3\right)^2 = 0$$

Замечание

1. Если $F(-x, u) = F(x, u)$ или $F(-x, u) = -F(x, u) \Rightarrow$ u - четна
2. Если $F(-x, -u) = F(x, u)$ или $F(-x, -u) = -F(x, u) \Rightarrow$ u - нечетна

1.11 14.10.2019

1.11.1 Замена переменных в дифференциальных выражениях

Замена перем. в выражениях с полными производными

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, ...)$$

$$\begin{matrix} (x, y) \to & (u, v) \\ y(x) & u(v) \end{matrix} \quad y'_x, y''_{xx}, .. \text{ нужно выразить через } u'_v, u''_{vv}$$

$$\exists x = f(u, v) \quad y = g(u, v)$$

$$y(x) = y(f(u, v)) = y(f(u(v), v)) = g(u(v), v)$$

Дифференцируем по v: $\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial g}{\partial v} = y'_x \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right) \quad (*)$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial g}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}}$$

Другой способ воспринимать: $\quad y = y(x)$

Продифференцируем ещё раз $(*)$ по v:

$$\text{u}''_{vv}\frac{\partial y}{\partial u} + u'_v\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}u'_v + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} =$$

$$= y''_{xx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}u'_v + \frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + y'_x\left(u''_{vv}\frac{\partial f}{\partial u} + (u'_v)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + u'_v\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

Второй способ:

$$x = f(u(v), v) \quad y'_x = h(u(v), \underbrace{u'_v(v)}_{w}, v) \leftarrow *$$

$$y''_{xx} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial h}{\partial w}u''_{vv} + \dfrac{\partial h}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_v + \dfrac{\partial f}{\partial v}}$$

Пример

Подставить в дифференциальное уравнение выражения

$$y^4y'' + xyy' - 2y^2 = 0 \quad y(x) \to u(t)$$

$$x = e^t \quad y = ue^{2t}$$

Решение

Проблема в том, что мы не знаем, что такое y', т.к. в диф. ур-ии производная по x

$$x = f(u,t) = e^t \quad y = g(u,t) = ue^{2t}$$

$$u(t)e^{2t} = y = y(e^t)$$

$$u_t' e^{2t} + 2ue^{2t} = y_x' e^t \Rightarrow y_x'(e^t) = y_x'|_{x=e^t} = (u_t' + 2u)e^t$$

$$y_{xx}'' \cancel{e^t} = ((u_t' + 2u) + (u_{tt}'' + 2u_t'))\,\cancel{e^t}$$

Пример

$$y'y''' - 3(y'')^2 = x$$

$$y(x) \to x(y)$$

Решение

$$x = u \quad y = t \quad u(t)$$

$$(x, y) \to (u, t)$$

$$t = y(u(t)) \Rightarrow 1 = y'u' \Rightarrow y' = \frac{1}{u'}$$

$$y'' = \frac{u''}{(u')^3}$$

$$y''' = \frac{u'''(u')^3 - 3(u'')^2(u')^2}{(u'^7)} = \frac{u'''}{(u')^4} - 3\frac{(u'')^2}{(u')^5}$$

Подставляя, получаем:

$$-\frac{x_{yyy}'''}{(x_y')^5} = x$$

ДЗ: 3431-3449

1.12 17.10.2019

1.12.1 Я не знаю название этой темы

1. Замена независимой переменной

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} ...)$$

$$z(x, y)$$

$$x = f(u, v)$$

$$y = g(u, v)$$

$$z = z(x, y) = z(f(u, v),\ g(u, v))$$

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} = ... \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = ... \end{matrix}$$

Нужно учитывать Якобиан $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$ - без этого нет решения системы

Вторые производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{cases}$$

Пример

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 f}{\partial u^2}$$

2. Замена переменных и функций

$$(x,y,z(x,y)) \to (u,v,w(u,v))$$

$$x = f(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = h(u,v,w)$$

$$\Rightarrow h(u,v,w(u,v)) = z(x,y) = z(f(u,v,w(u,v)),\ g(u,v,w(u,v)))$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial u} + \dfrac{\partial h}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial u}\right) \\ \\ \dfrac{\partial h}{\partial v} + \dfrac{\partial h}{\partial v}\dfrac{\partial w}{\partial v} = ... \end{cases}$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial x} = ..., \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ...$$

Пример

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$(x,y,z(x,y)) \to (r,\varphi,z(r,\varphi))$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} z(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$ad - bc = 1$$

Наша зависимость:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + (... + ...)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

Упр

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

3. Новые переменные выражены через старые

$$(x, y, z(x, y)) \to (u, v, w(u, v))$$

$$u = p(x, y, z)$$

$$v = q(x, y, z)$$

$$w = r(x, y, z)$$

$$\Rightarrow r(x, y, z(x, y)) = w = w(u, v) = w(p(x, y, z(x, y)),\ q(x, y, z(x, y)))$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\to \frac{\partial z}{\partial x} = F(\frac{\partial w}{\partial n},\ \frac{\partial w}{\partial v}, x, y, z)$$

Проблема в том, что он выражен через страые переменные, а нужно как-то выражать через новые (u, v, w)

Можно попробовать через $\begin{matrix} u = p(x, y, z) & & x = f(u, v, w) \\ v = q(x, y, z) & \to & y = g(u, v, w) \\ w = r(x, y, z) & & z = h(u, v, w) \end{matrix}$

Пример

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}$$

$$u = \frac{x}{y} \qquad v = x \qquad w = xz - y$$

$$xz(x, y) - y = w(u, v) = w(\frac{x}{y},\ x)$$

Выражение через старые переменные тут лучше, потому что нам нужно считать меньше производных

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = \frac{\partial w}{\partial u}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{2x}{y^3}$$

$$y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\frac{x}{y^4}+\cancel{\frac{\partial w}{\partial u}\frac{2}{y^3}}\right)+2\left(\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}}\right)=\cancel{\frac{2}{x}}$$

$$\cancel{\frac{x}{y^3}}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0 \leftarrow \text{Ура, не зависит от x,y}$$

$$x = v$$

Альтернативный вариант был $\quad\rightarrow\quad$ $$y=\frac{v}{u}$$

$$z=\frac{w+\frac{v}{u}}{v}$$

1.13 21.10.2019

1.13.1 Продолжаем делать примеры

Пример (3475)

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

$$x,\ y,\ z(x,y)\to u,\ v,\ w(u,v)$$

$$u=x,\quad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\quad w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$$

Решение

Выразим старые переменные через новые:

$$x=u,\quad y=\frac{u}{uv+1},\quad z=\frac{u}{uw+1}$$

Можем составить тождество:

$$\frac{u}{uw+1}=z(x,\ y)=z(u,\ \frac{u}{uv+1})$$

Продифференцируем ЛЧ:

$$\Rightarrow\left(\frac{u}{uw+1}\right)'_u=\frac{(uw+1)-(w+uw'_u)u'}{(uw+1)^2}=\frac{1-uw'_uu'}{(uw+1)^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{u}{uw+1}\right)'_v=\frac{-u^2w'_v}{(uw+1)^2}$$

Теперь продифференцируем ПЧ и составим систему:

$$\begin{cases} z\left(u,\ \dfrac{u}{uv+1}\right)'_u=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{1(\cancel{uv}+1)-\cancel{vu}}{(uv+1)^2}\right)=\dfrac{1-uw'_uu'}{(uw+1)^2} \\ z\left(u,\ \dfrac{u}{uv+1}\right)'_v=\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{-u^2}{(uv+1)^2}\right)=\dfrac{1-uw'_uu'}{(uw+1)^2}\end{cases}$$

Мы нашли то что хотели:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{w'_v(uv+1)^2}{(uw+1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-u^2w'_u}{(uw+1)^2}-\frac{w'_v(vu+1)^2}{(uw+1)^2}\frac{1}{(uv+1)^2}$$

Пример

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = xy - z$$

Решение

Составим тождество

$$xy - z = w(x + y,\ x - y) = w(u, v)$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial w}{\partial u_1} + \frac{\partial w}{\partial v} = y - z'_x$$

$$w'_x = (xy - z)'_x = y - z'_x$$

Дифференцируем по y:

$$\frac{\partial w}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial w}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{=-1} = \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} = x - z'_y$$

$$w'_y = (xy - z)'_y = x - z'_y$$

$$z'_x = y - \underbrace{\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}}_{w(u,v)=h(x+y,\ x-y)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} - \frac{\partial}{\partial x}\big(h(\underbrace{x+y}_{u},\ \underbrace{x-y}_{v})\big) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v} = \underbrace{-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}_{\text{из начальных уравнений}}$$

$$z'_y = x + \frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y}\big(h_1(x+y,\ x-y)\big) = \frac{\partial h_1}{\partial u} - \frac{\partial h_1}{\partial v} = 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

1.14 24.10.2019

1.14.1 Экстремумы

Теорема (необходимое условие лок. экстремума)

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x^0 \text{ - внутр. точка D, f - диф. в } x^0$$

$$\text{в } x^0 \text{ лок. экстр. } \Rightarrow \forall j \quad \frac{\partial f}{\partial x_0}(x^0) = 0$$

Опр

x^0 - страционарная, если $\forall g \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_0}(x^0) = 0$

Пример

$$f = x^3 \quad f'(0) = 0, \text{ но } x_0 = 0 \text{ - не экстр. точка}$$

Утв

Достаточное условие лок. экстремума: Пусть $f \in C^2$, x^0 - страционарная точка, тогда:

1. $d^2 f$ - строго пол. определен $\Rightarrow$ в x^0 лок. мин.
2. $d^2 f$ - отриц. опр. $\Rightarrow$ лок. макс.
3. $\exists e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n : \left.\begin{matrix} d^2 f(x^0)[e_1] > 0 \\ d^2 f(x^0)[e_2] < 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ в x^0 нет экстр.

$$d^2 f = \sum_{i,j=0}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}_{a_{ij}} dx_i dx_j = dx^T A dx$$

$$dx = \begin{matrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{matrix} \quad A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2_{i,j=1}$$

Опр

Кв. форма пол. определена $\Leftrightarrow$ она принимает пол. значения на вект $\neq 0$
Кв. форма отр. определена $\Leftrightarrow$ -//- отр. знач.

$$f(x) = f(x^0) + d^2 f(x^0)[x - x^0] + \overline{o}(|x - x^0|^2)$$

Теорема (критерий Сильвестра)

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j$$

Кв. форма пол. опр. $\Leftrightarrow A_1 > 0,\ A_2 > 0,\ ...,\ A_n > 0$
Кв. форма отр. опр. $\Leftrightarrow A_1 < 0,\ A_2 < 0,\ ...,\ A_n < 0$

$$A_k = \det((a_{ij})_{i,j=1}^{k}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & & & \\ ... & & & \\ a_{k1} & & & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Пример (n=2)

$$\begin{array}{lccc} f: & \mathbb{R}^2 & \Rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & f(x,y) \end{array} \qquad (x_0,\ y_0) \text{ - стац.}$$

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & d'_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

x^0 - лок. мин $\Leftrightarrow A > 0$ и $AC - B^2 > 0$
x^0 - лок. макс $\Leftrightarrow A < 0$ и $AC - B^2 < 0$
Если $AC - B^2 > 0 \underset{\text{упр.}}{\Rightarrow}$ нет экстр.

Пример

$$f = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 2x - y - 2 & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & -x + 2y + 1 & = & 0 \end{array}\right| \Rightarrow (1,0) \text{ - стац. точка}$$

$$d^2 f = 2dx^2 - \underbrace{2dxdy}_{2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} + 2dy^{@}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 2 > 0$$

$$AC - B^2 = 5 > 0$$

$$\Rightarrow (1,\ 0) \text{ - лок. экстр.}$$