Санкт-Петербургский государственный университет

Лекции по алгебре

3 семестр, преподаватель Демченко О. В.

Записали Костин П.А. и Щукин И.В.[1]

[1] Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах вконтакте (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

1 Теория групп

2019-09-17

Опр (группа)

G - мн-во, $* : G * G \to G,\ (g_1, g_2) \to (g_1 * g_2)\ (g_1 g_2)$

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$
2. $\exists e \in G : eg = ge = g \quad \forall g \in G$
3. $\forall g \in G \quad \exists \widetilde{g} \in G : g\widetilde{g} = g\widetilde{g} = e$
4. $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$

Примеры

1. $(\mathbb{Z}, +)$ - группа
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ - не группа
3. $(R, +)$ - группа кольца
4. $(R^*, \cdot)$
5. Группа самосовмещения D_n, например D_4 - квадрат, композиция - группа, $|D_n| = 2n$
6. $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| \neq 0\}$, умножение - группа
7. $\mathbb{Z}n\mathbb{Z}$ - частный случай п.3,4

Теорема (простейшие св-ва групп)

1. e - единственный, e, e' - нейтральные: $e = ee' = e'$
2. $\widetilde{g}$ - единственный

   Пусть $\widetilde{g}, \hat{g}$ - обратные, тогда $\widetilde{g}g = g\widetilde{g} = e = \hat{g}g = g\hat{g}$

   $\hat{g} = e\hat{g} = (\widetilde{g}g)\hat{g} = \widetilde{g}(g\hat{g}) = \widetilde{g}e = \widetilde{g}$
3. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

   Это верно, если $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (b^{-1}a^{-1})(ab) = e$, докажем первое:

   $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = ((ab)b^{-1})a^{-1} = (a(bb^{-1}))a^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e$
4. $(g^{-1})^{-1} = g$

Опр

$g \in G \quad n \in \mathbb{Z}$, тогда $g^n = \begin{cases} \overbrace{g...g}^{n}, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ \underbrace{g^{-1}...g^{-1}}_{n}, & n < 0 \end{cases}$

Теорема (св-ва степени)

1. $g^{n+m} = g^n g^m$
2. $(g^n)^m = g^{nm}$

Опр

$g \in G$, $n \in N$ - порядок g ($\operatorname{ord} g = n$), если:

1. $g^n = e$
2. $g^m = e \to m \geqslant n$

Примеры

1. D_4 ord(поворот 90°) = 4
   D_4 ord(поворот 180°) = 2
2. $(\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}, +)$
   $\operatorname{ord}(\overline{1}) = 6$
   $ord(\overline{2}) = 3$

Утв

$g^m = e \quad ord(g) = n \;\Rightarrow\; m \vdots n$ (n>0)

Док-во

$m = nq + r$, $0 \leqslant r < n$ $e = g^m = g^{nq+r} = (g^n)^q g^r = g^r \Rightarrow r = 0$

Опр

$H \subset G$ называется подгруппой G (H < G) (и сама является группой), если:

1. $g_1, g_2 \in H \Rightarrow g_1 g_2 \in H$
2. $e \in H$
3. $g \in H \Rightarrow g^{-1} \in H$

Примеры

1. $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$
2. D_4
3. $SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : \quad |A| = 1\}$, $SL_n(K) < GL_n(K)$

Мультипликативная запись	Аддитивная запись
$g_1 g_2$	$g_1 + g_2$
e	0
g^{-1}	$-g$
g^n	ng

Опр

$H < G$, $g_1, g_2 \in G$, тогда $g_1 \sim g_2$, если:

1. $g_1 = g_2 h$, $h \in H$ (левое)
2. $g_2 = h g_1$, $h \in H$ (правое)

Док-во (эквивалентность)

1. (симметричность) $g_1 = g_2 h \overset{*h^{-1}}{\Rightarrow} g_2 = g_1 h^{-1}$
2. (рефлексивность) $g = ge$
3. (транзитивнось) $g_1 = g_2 h$, $g_2 = g_3 h \Rightarrow g_1 = g_3(h_2 h_1)$, где $h_2 h_1 \in H$

Опр

$[a] = \{b : ab\}$ классы эквивалентности

Опр

$[g] = gH = \{gh, h \in H\}$ (левый класс смежности)
$gh \sim g \to gh \in [g]$
$g_1 \in [g] \to g_1 \sim g \to g_1 = gh$

Утв

$[e] = H$
Установим биекцию:
$[g] = gh \leftarrow H$
$gh \leftarrow h$
Очевидно, сюръекция, почему инъекция? $gh_1 = gh_2 \overset{*g^{-1}}{\to} h_1 = h$

Теорема (Лагранжа)

$H < G$, $|G| < \infty$, тогда $|G| \vdots |H|$ (уже доказали!)

2019-09-10

Следствие

G - кон. группа, $a \in G$, $\operatorname{ord} a = m$, $H = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$, тогда $|H| = m$

Док-во

$\{a^0 = e, a_1, ..., a^{m-1}\}$ - подмножество H
Докажем, что все остальные элементы тоже здесь есть
$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = mq + r$, $0 \leqslant m - 1$
$a^n = a^{mq+r} = (a^m)^q a^r = a^r$
$a^k = a^l$, $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant m - 1$, умножим на a^{-k}
$e = a^{l-k}$ $o \leqslant l - k \leqslant m - 1$ m - наименьшее $\mathbb{N}$ такое что $a^m = e$
$l - k = 0 \Rightarrow l = k$
Докажем, что $|H| = m$
$\Rightarrow |G| \vdots m = \operatorname{ord} a$, т.о. в группе порядок эл-та - делитель порядка группы

Напоминание

Следствие (теорема Эйлера)

$n, a \in \mathbb{N}$, $(a, n) = 1$, тогда $a^{\varphi(n)} \equiv 1(\mod n)$

Док-во

Рассмотрим $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})*$ $|G| = \varphi(n)$
$\overline{a} \in G$, $\operatorname{ord} \overline{a} = k$
$\varphi(n) \vdots k \Rightarrow \varphi(n) = kl$
$\overline{a} = \overline{1}$
$\overline{a}^{\varphi(n)} = \overline{1}$

Опр

G - циклическая группа, если $\exists g \in G : \forall g' \in G : \exists k \in \mathbb{Z} : g' = g^k$
Такой g называется образующим

Опр

$\mathbb{Z}$ (образующий - единица и минус единица)

Замечание

Любая циклическая группа - коммунитативна

Док-во

$g'g'' = g''g' = g^k g^l = g^l g^k$

Пусть G,H - группы, рассмотрим $G \times H = \{(g,h) : g \in G, h \in H\}$
Введем операцию $(g,h) * (g',h') \stackrel{def}{=} (g *_G g', h *_H h')$
Докажем, что это группа.
Доказательство ассоциативности: $((g,h)(g',h'))(g'',h'') \stackrel{?}{=} (g,h)((g',h')(g'',h'')$
$(gg',hh')(g'',h'') \stackrel{?}{=} (g,h)(g'g'',h'h'')$
$((gg')g'',(hh')h'') \stackrel{?}{=} (g(g',g''),h(h'h'')$ - очевидно
Нейтральный элемент:
Рассмотрим $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}$

Опр

Конечная группа порядка n является циклической тогда и только тогда, когда она содержит элемент порядка n ($|G| = n$, G - циклическая $\equiv \exists g \in G : ord g = n$)

Рассмотрим $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_3\mathbb{Z}$ - циклическая
$((\overline{1},\overline{1}),(\overline{0},\overline{2}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2}))$
Рассмотрим $\mathbb{Z}/_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_4\mathbb{Z}$ - не циклическая

Опр

$\varphi : G \to H$ - биекция и $\varphi(g_1,g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \quad \forall g_1,g_2 \in G$, тогда φ - изоморфизм

Примеры

1. $D_3 \to S_3$
2. $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\} \leftarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
   $(\frac{2\pi a}{n} + i \sin\frac{2\pi a}{n} = \varphi\overline{a a})$
   $\overline{a} = \overline{b} \to \varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{b})$
   $\varphi(\overline{a}+\overline{b}) \stackrel{?}{=} \varphi(\overline{a})\varphi(\overline{b})$
   $\cos\frac{2\pi(a+b)}{n} + i\sin\frac{2\pi(a+b)}{n} = (\cos\frac{2\pi a}{n} + i\sin\frac{2\pi a}{n})$

Опр

Две группы называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм

Утв

Изоморфизм - отношение эквивалентности

Док-во

т.к. композиция изоморфизмов - изоморфизм $G \overset{e}{\to} H \overset{\psi}{\to} H$
$(\psi \circ \varphi)(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1 g_2) = \psi(\varphi(g_1)\varphi(g_2)) = \psi(\varphi(g_1))\psi(\varphi(g_2)) = (\psi \circ \varphi)(g_1) \circ (\psi \circ \varphi)(g_2)$
Рефлексивность - тождественное отображение - изоморфизм
Транзитивность: $G \underset{\varphi}{\to} H$, $H \underset{\varphi^{-1}}{\to} G$

Теорема

G - циклическая группа
1) $|G| = n \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
2) $|G| = \infty \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}$

Док-во

1) g - обр. G, значит $G = \{e, g, g^2, ..., g^{n-1}\}$ (среди них нет одинаковых), построим изоморфизм в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\varphi(g^k) = \overline{k}$
Проверим, что $\varphi(g^k g^l) = \varphi(g^k) + \varphi(g^l) = \overline{k} + \overline{l}$
Левая часть: $\varphi(g^{k+l} = \overline{(k+l) \mod n} = \overline{k} + \overline{l}$
2) $G = \{..., g^{-1}, e, g, g^2, ...\}$ (тоже нет совпадающих элементов, иначе $g^k = g^l$, при $k > l$, тогда $g^{k-l} = e$, но тогда конечное число элементов, потому что оно зацикливается через каждые $k-l$ элементов), построим отображение в $\mathbb{Z}$.
$\varphi(g^n) = n$ -, очевидно, биекция. И нужно доказать, что $\varphi(g^n g^k) = \varphi(g^n) - \varphi(g^k) = n + k$

2019-09-17

Утв

$|G| = p$, p - простое $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Док-во

$g \in G$, $g \neq e$, $\operatorname{ord} g = p$
$\Rightarrow G = \{e = g^0, g, ..., g^{p-1}\}$

Утв

H, G - группы, $\varphi : G \to H$ - изоморфизм $\Rightarrow n = \operatorname{ord} g = \operatorname{ord} \varphi(g)$

Док-во

Пусть $g^n = e,\ \varphi(g^n) = \varphi(e) \stackrel{?}{=} e$

$$\varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$$

Теперь докажем, что меньшего нет

$$\varphi(g)^m = e,\ m \in \mathbb{N} \stackrel{?}{\Rightarrow} m \geqslant n$$

$$\varphi(g^m) = \varphi(g)^m = e = \varphi(e) \quad \Rightarrow g^m = e \Rightarrow m \geqslant n$$

Опр

$H < G$, тогда H - нормльная подгруппа, если $\forall h \in H, g \in G \Rightarrow g^{-1}hg \in H$ - сопряжение элемента h с помощью элемента g, обозначается: $H \triangleleft G$

Замечание

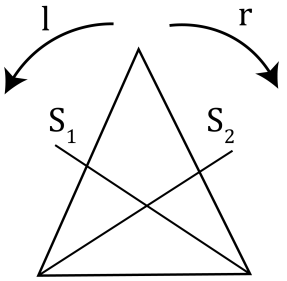
Элементы подгруппы при сопряжении переходят в элементы подгруппы

Замечание

Подгруппа любой коммунитативной группы нормальна

Пример

D_3 - 6 элементов, 3 поворота и 3 симметрии



$\{e, l, r\}$ - нормальная
$\{e, s_1\}$ - не нормальная

Утв

$H \lhd G \Leftrightarrow$ разбиение на Л и П кдассы смежности по Н совпадают

$$\forall g \quad gH = Hg$$

Док-во

Берем произвольный элемент из левого и правого и докажем, что совпадают. Берем слева:

$$h \in H \quad gh \in gH$$

$$gh = \underbrace{(g^{-1})^{-1} h g^{-1}}_{\in H} g = h_1 g$$

Теперь справа:

$$g \in G, \quad h \in H, \quad g^{-1} h g = h_1$$

$$hg \in Hg = gH \Rightarrow gh_1, h_1 \in H$$

Опр (умножение классов смежности)

$$H \lhd G$$

$$g_1 H * g_2 H \overset{\text{def}}{=} g_1 g_2 H$$

Док-во (коррекнтности)

Хотим проверить, что

$$\widetilde{g}_1 H = g_1 H, \quad \widetilde{g}_2 H = g_2 H \overset{?}{\Rightarrow} \widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 H = g_1 g_2 H$$

Аналогично прошлому доказательству

$$g_2^{-1} h_1 g_2 = h_3 \in H$$

$$\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 h = g_1 h_1 g_2 h_2 h = g_1 g_2 (\underbrace{g_2^{-1} h_1 g_2}_{=h_3}) h_2 h$$

$$\widetilde{g}_1 H = g_1 H \Rightarrow \widetilde{g}_1 = g_1 h_1$$

$$\widetilde{g}_2 H = g_2 H \Rightarrow \widetilde{g}_2 = g_2 h_2$$

Не использовали условие $g_2^{-1} h_1 g_2 = h_3 \in H$

$$\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 H = g_1 h_1 g_2 h_2 h = g_1 g_2 (\underbrace{g_2^{-1} h_1 g_2}_{=h_3}) h_2 h$$

Осталось доказать, что получается группа

1) Нейтральный элемент $eH = H, \quad eH * gH = (eg)H = gH$

2) Ассоциативность $(g_1H + g_2H) * g_3H \stackrel{?}{=} g_1H * (g_2H * g_3H)$

$(g_1g_2)H * g_3H = (g_1g_2)g_3H$

3) $gH * g^{-1}H = (gg^{-1})H = eH$

G/H

Была эквивалентность: $a \sim b \Leftrightarrow a - b \vdots h$

$G = \mathbb{Z}$

$H = h\mathbb{Z}, \quad g_1g_2^{-1} \in H$ - мульт. запись , $\quad g_1 - g_2 \in n\mathbb{Z}$ - адд. запись

$[a] + [b] = [a + b]$

Аддитивная группа кольца класса вычетов - это то же самое, что фактор группа группы $\mathbb{Z}$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$

Опр

Как в произвольной группе найти подгруппу?

$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$ - коммутатор элементов $h, g \in G$

Коммутант - множество прозведений всех возможных коммунтаторов

Обозначается $K(G) = \{[g_1, h_1]...[g_n, h_n], \ g_1, h_1 \in G\}$

Док-во (коммутант - подгруппа)

$K(G) < G$

Нейтральный элемент: $[e, e] = e$

Обратный элемент? $[g_1, h_1]...[g_n, h_n]$

Как его найти? $[g, h^{-1}]^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1} = [h, g]$

$([g_1, h_1]...[g_n, h_n])^{-1} = [g_1, h_1]...[g_n, h_n]$

Значит это подгруппа

Нормальная ли? $g^{-1}[g_1, h_1]...[g_n, h_n]g$

$g^{-1}[g_1, h_1]g(g^{-1}[g_2, h_2]g)...(g^{-1}[g_n, h_n]g)$

Нужно доказать, что сопряжение коммунтатора лежит в коммутанте

$g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}g = \underbrace{g^{-1}g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}}_{=[g^{-1}g_1, h_1]}\underbrace{h_1g^{-1}h_1^{-1}g}_{=[h_1, g^{-1}]}$

Утв

Фактор-группа $(G/K(G))$ по коммутанту - коммунитативна

Док-во

$$g_1, g_2 \in G \qquad g_1K(G)g_2K(G) \stackrel{?}{=} g_2K(G)g_1K(G)$$

$$g_1g_2K(G) = g_1g_2K(G) \qquad g_2K(G)g_1K(G) = g_2g_1K(G)$$

$$[g_1, g_2] = g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in K(G)$$

Утв

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{mn}$, если $(m, n) = 1$

Док-во

Нужно построить изоморфизм $[a]_{mn} \mapsto ([a]_n, [a]_m)$

$[a]_{mn} = [a']_{mn} \Rightarrow [a]_n = [a']_n$, $[a]_m = [a']_m$

Теперь нужно проверить биекцию

Сюръекция: $\forall b, c \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} [x]_n = [b]_n \\ [x]_m = [c]_m \end{cases}$, по КТО всё хорошо

Инъективность:

$$\begin{matrix} [a]_n = [b]_n \\ [a]_m = [b]_m \end{matrix} \Rightarrow [a]_{mn} = [b]_{mn}$$

На языке сравнений:

$$\begin{matrix} a \equiv b(n) \\ a \equiv b(m) \end{matrix} \Rightarrow a \equiv b(mn)$$

На самом деле достаточно было проверить одно

Опр

$\varphi : G \to H$ - гомоморфизм, если $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$

изоморфизм = гомоморфизм + биективность

$\varphi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ - множество гомоморфизмов

Примеры

1) $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$

$z \to |z|$

2) $GL_n(K) \to K^*$

$A \to \det A$

3) $S_n \to \{\pm 1\}$

$$\sigma \to \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ - четн.} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ - неч.} \end{cases}$$

4) $a \in G \quad G \to G$

$g \to a^{-1}ga$

$(a^{-1}ga)(a^{-1}g_1a) = a^{-1}g_1ga$

2019-09-24

Напоминание

$G/K(G)$ - коммутативна

Утв

$H \triangleleft G \quad G/_H$ - комм

$\forall g_1, g_2 \in G \quad (g_1H)(g_2H) = (g_2H)(g_1H)$

$[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in H \Rightarrow K(G) \subset H$

Свойства (гомоморфизма)

$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$

1. $f(e_G) = e_H \qquad f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e)$
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

   $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e$

3. Композиция гомоморфизмов

Опр

$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$

$\mathrm{Ker}\, f = \{g \in G : \ f(g) = e\} \subset G$

$\mathrm{Im}\, f = \{f(g) : \ g \in G\} \subset H$

Утв

Ker и Im - подгруппы G

Док-во

1. $f(g_1) = f(g_2) = e \Rightarrow f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = e \cdot e = e$
2. $f(e) = e$
3. $f(g) = e \Rightarrow f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = e^{-1} = e$

1. $f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1g_2)$

2. $e = f(e)$
3. $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

Утв

Ker - нормальная подгруппа G

Док-во

$\operatorname{Ker} f \triangleleft G$?

$g \in G \qquad a \in \operatorname{Ker} f$

$f(g^{-1}ag) = f(g)^{-1} \underbrace{f(a)}_{=e} f(g) = e$

Утв (основная теорема о гомоморфизме)

$G/_{\operatorname{Ker} f} \cong \operatorname{Im} f$

Док-во

Докажем, что это корректное отображение:

$\operatorname{Ker} f = K$

$\varphi(gK) \overset{def}{=} f(g) \qquad \varphi : G/_{\operatorname{Ker} f} \to \operatorname{Im} f$

$gK = g'K \overset{?}{\Rightarrow} f(g) = f(g')$

$g' = g \cdot a, \quad a \in K \qquad f(g') = f(g) \cdot \underbrace{f(a)}_{=e} = f(g)$

Докажем, что φ - гомоморфизм:

$f(g_1)f(g_2) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K) \overset{?}{=} \varphi(g_1Kg_2K) = \varphi((g_1g_2)K) = f(g_1g_2)$

$\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K) \overset{?}{\Rightarrow} g_1K = g_2K$

Докажем, что это биекция. Что сюръекция - очевидно

$f(g_1) = f(g_2) \qquad \Rightarrow g_1g_2^{-1} \in K$

$\underbrace{f(g1)f(g_2)^{-1}}_{=f(g_1)f(g_2^{-1})} = e$

Напоминание

$\mathrm{SL}_N(K)$ - квадратные матрицы с $\det = 1$

Опр

$\det : \mathrm{GL}_n(K) \to K^*$

Но это отображение - сюръекция, а значит:

$\mathrm{GL}_n(K)/_{\mathrm{SL}_n(K)} \cong K^*$

$\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| = 1\}$

Пример (1)

$S_n \to \{\pm 1\}$

$S_n/_{A_n} \cong \{\pm 1\} (\cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$

Пример (2)

$G \times H \to G$

$(g_1 h) \to g$

$G \times H/_{e \times H} \cong G$

1.12 Действие группы на множестве

Опр

M - множество , G - группа

$G \times M \to M$

$(g, m) \to gm$

1. $g_1(g_2 m) = (g_1 g_2)m \quad \forall g_1 g_2 \in G, \quad m \in M$
2. $em = m \quad \forall m \in M$

Если задано такое отображение, то говорим, что группа G действует на множестве M

Пример (1)

$A = k^n \qquad (A, v) \to A_v$

$G = \mathrm{GL}_n(K)$

$A(B_v) = (AB)_v$

$E_v = v$

Пример (2)

M = {количество раскрасок вершин квадрата в два цвета}

$G = D_4$

$$\begin{matrix} \text{ч} & \text{ч} \\ \text{б} & \text{ч} \end{matrix} \cdot = \begin{matrix} \text{ч} & \text{б} \\ \text{ч} & \text{ч} \end{matrix}$$

$M = G$

$gm = gm$

Опр

$m \in M$

Stab $m = \{g \in G : gm = m\}$ - стабилизация

Orb $m = \{gm,\ g \in G\}$ - орбита

Утв

Stab $m < G$

Док-во

Доказательство того, что стабилизатор - подгруппа:

1. $g_1, g_2 \in Stab\ m$

$$(g_1 g_2)m = g_1(\underbrace{g_2 m}_{=m}) = g_1 m = m$$

2. $e \cdot m = m$

3. $gm = m \overset{?}{\Rightarrow} g^{-1}m = m$

$$gm = m$$
$$\underbrace{g^{-1}gm}_{=(g^{-1}g)m=em=m} = g^{-1}m$$

Утв

$m_1, m_2 \in M$

$m_1 \sim m_2$, если $\exists g \in G : gm_1 = m_2$

$\Rightarrow \sim$ - отношение эквив

Док-во

(рефл.) $gm_1 = m_2 \Rightarrow g^{-1}m_2 = m_1 \quad g^{-1} \in G$

(симм.) $em = m, \quad e \in G$

(тран.) $\left.\begin{matrix} gm_1 = m_2 \\ g'm_2 = m_3 \end{matrix}\right| \Rightarrow (g'g)m_1 = g'(gm_1) = g'm_2 = m_3$

Утв

$|\text{Orb } m| \cdot |\text{Stab } m| = |G|$

Док-во

Stab $m = H$

$\{gH, \ g \in G\} \to Orb\ m$

$gH \to gm$

Хотим доказать, что это корректно

$gH = g'H \overset{?}{\Rightarrow} gm = g'm$

$g' = ga, \quad g \in H$

$g'm = (ga)m = g(am) = gm$

Хотим доказать биективность. Сюръективность - очев. Инъективность:

$gm = g'm \Rightarrow gH = g'H$

$m = em = (g^{-1}g')m = g^{-1}(gm) = g^{-1}(g'm) = (g^{-1}g')m$

$\Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow gH = g'H$

Лемма (Бернсайда)

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |M^g|$$

$M^g = \{m \in M : gm = m\}$

2019-10-01

Напоминание

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m^2\}$$

Док-во

$$\sum_{g\in G}|M^g| = |\{(g,m) \in G \times M : gm = m\}| =$$

$$= \sum_{m\in M}|Stab\ m| = |G|\sum_{m\in M}\frac{1}{|Orb\ m|} = |G| \cdot \text{Кол-во орбит}$$

2 Евклидовы и унитарные пр-ва

Опр

V - в.п. над $\mathbb{R}$

Введем отображение

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(u, v)$$

Свойства этого отображения

1. Симметричность

$$(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in V$$

2. Линейность

$$(\lambda u, v) = \lambda(u, v) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \quad u, v \in V$$

$$(u + u', v) = (u, v) + (u', v) \qquad u, u', v \in V$$

3. $(u, v) \geqslant 0 \qquad \forall u \in V$

$$(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Такое пр-во V с введенным на нем таким отображением мы называем Евклидовым пр-вом, а отображение скалярным.

Напоминание

$C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ - квадр. матрица

$Tr\ C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ - след (Trace)

(Сумма элементов главной диагонали)

Примеры

1. Школьные вектора
2. $\mathbb{R}^n$

$$((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

3. $V = \mathbb{R}[x]_n$ конечномерное пр-во

$$(f, g) = \int_a^b fg dx$$

4. $V = M_n(\mathbb{R})$

$$(A, B) = Tr\ AB^T$$

(См. след в напоминании)

Опр

$e = \{e_1, ..., e_n\}$ - базис V

$a_{ij} = (e_i, e_j)$

$\Gamma_e = \{a_{ij}{}_{i,j=1}^{n}\}$ - матрица Грама

Свойства (матрицы Грама)

1. Матрица невырожд
2. e, f - базисы

$$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e M_{e\to f}$$

3. $\Gamma_e = \{a_ij\}$

$$u = \sum \lambda_i e_i$$

$$v = \sum \mu_j e_j$$

$$(u,v) = (\sum \lambda_i e_i, \sum \mu_j e_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (e_i, e_j)$$

$$(u,v) = [u]_e^T \Gamma_e [v]_e$$

Док-во

1. $\exists\, |\Gamma_e| = 0 \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ не все 0 :

$$\sum \lambda_i (e_i, e_j) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum \lambda_i e_i,\ e_j\right) = 0 \quad \forall j$$

$$\left(\sum_i \lambda_i e_i,\ \sum_j \lambda_j e_j\right) = 0 \Leftrightarrow \sum \lambda_i e_i = 0$$

противоречие

2. $\exists M_{e\to f} = \{a_{ik}\} \qquad f_k = \sum a_{ik} e_i$

$$f_l = \sum a_{jl} e_j$$

$$(f_k, f_l) = \sum_{i,j} a_{ik} a_{jl} (e_i, e_j)$$

$$a_{ik} (e_i, e_j) a_{je}$$

Напоминание: X, Y- матр $\qquad X \times Y = Z \quad z_{ij} = \sum x_{is} y_{sj}$

Опр

V - в.п. над $\mathbb{R}$

$V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$

$v \to \|v\|$ - норма

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad v \in V$

2. Нер-во треугольника

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

3. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Если такое отобр. существует, то оно называется нормой

Утв

(u, v) - ск. пр-ве

$\Rightarrow \|u\| = \sqrt{(u,u)}$

Пример

$\mathbb{R}^n$

$\|x\| = \max |x_i|$

$\|x\| = \sum\limits_i |x_i|$

Теорема (Нер-во Коши - Буняковского)

$$|(u,v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$$

Док-во

$\varphi(t) = \|u + rv\|^2 = (u + tv, u + tv) = \|u\|^2 + 2(u,v)t + t^2\|v\|^2$

$D = 4(u,v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$

$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

$(u+v, u+v) \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$

$(u+v, u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u,v)$

$2(u,v) \leqslant 2\|u\|\|v\|$

Утв (Теорема Пифагора)

Если $u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Док-во

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u,v)$

Опр (Ортогональное дополнение)

V - евкл. пр-во

$U \subset V \qquad U^{\perp} = \{v \in V : (v,u) = 0 \quad \forall u \in U\}$

Множество всех векторов, которые ортогональны всем векторам из U
Такое мн-во называется ортогональным дополнением

Утв

$U^{\perp}$ - под-пр V

Док-во

$$\begin{matrix}(v,u) = 0 \quad \forall u \\ (v',u) = 0 \quad \forall u\end{matrix} \Rightarrow (v+v',u) = 0 \quad \forall u$$

$(v,u) = 0 \quad \forall u$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda v, u) = 0 \quad \forall u$

Тогда $U^{\perp}$ дей-во линейное под-прво V

Свойства

$V = U \oplus U^{\perp}$

$u \in U \cap U^{\perp}$

$u \in U \quad u \in U^{\perp}$

$(u,u) = 0$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - базис U дополняем до базиса V

$e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$ - базис V

$v \in U^{\perp} \quad v = \sum \lambda_i e_i + \sum \mu_j f_j$

$v \in U^{\perp} \Leftrightarrow (v, e_k) = 0 \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$

$(v, e_k) = \sum \lambda_i (e_i, e_k) + \sum \mu_j (f_j, e_k) = 0 \qquad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$

это матрица

	n	m
n	Γ_e	C

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \Gamma_e x + C_y = 0\}$ - размерность этого m

$(x, y) \to y$

$\Gamma_e x + C_y = 0$

$x = -\Gamma_e^{-1} e_y$

$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$

2019-10-15

Свойство

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Док-во

$$\left.\begin{aligned}\dim U^\perp + \dim U &= \dim V\\ \dim (U^\perp)^\perp + \dim U^\perp &= \dim V\end{aligned}\right| \Rightarrow \dim (U^\perp)^\perp = \dim U$$

$U \subset (U^\perp)^\perp$

$(U^\perp)^\perp = \{v \in V\}$

Опр

$U < V, \quad v \in V$

$U \oplus U^\perp = V$

$\Rightarrow \exists! u \in U,\ w \in U^\perp : v = u + w$

u называется ортогональной проекцией

Обозначение: $\operatorname{pr}_U v \overset{\text{def}}{=} u$

$v = \operatorname{pr}_U v + w \Rightarrow (v, u) = (\operatorname{pr}_U v, u)$

Свойства (орт. проекции)

1. $\operatorname{pr}_U(v + v') = \operatorname{pr}_U v + \operatorname{pr}_U v'$

   $v = u + w,\ u \in U, w \in U^\perp$

   $v' = u' + w',\ u \in U,\ w' \in U^\perp$

   $v + v' = \underset{\in U}{(u + u')} + \underset{\in U^\perp}{(w + w')}$

2. $\|v - \operatorname{pr}_U v\| \leqslant \|v - u\| \quad \forall u \in U$

   $$\|v - u\|^2 = \|\underset{\in U^\perp}{v - \operatorname{pr}_U v}\|^2 + \|\underset{\in U}{\operatorname{pr}_U v - u}\|^2$$

Опр

$e_1, ..., e_n$ - базис V

Базис называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{bmatrix} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{bmatrix}$$

Алгоритм

Процесс ортоганализации Грамма-Шмидта:

$e_1, ..., e_n$ - базис

Хотим ортонормированный $f_1, ..., f_n :< f_1, ..., f_k >=< e_1, ...e_k > \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant n$:
Строим по индуции:
Б.И. k=1:

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

И.П. $k - 1 \to k$:

$$f_k = e_k + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f_i$$

$$(f_k, f_j) \stackrel{?}{=} 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant k - 1$$

$$(f_k, f_j) = (e_k, f_j) + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \underbrace{(f_i, f_j)}_{=\lambda_j}$$

$$\lambda_j = -(e_k, f_j) \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant k - 1$$

Ортонормируем f_k, чтобы $(f_k, f_k) = 1$

Утв

Если $e_1, ..., e_n$ - ОНБ U

$$\mathrm{pr}_U v = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i) e_i$$

Док-во

Хотим доказать $v - \sum_{i=1}^{n}(v, e_i)e_i \in U^{\perp}$

Достаточно доказать, что вектор ортогонален любому

$$(v - \sum_{\substack{i=1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}^{n}(v, e_i)e_i)e_j = (v, e_i) - \sum_{i=1}^{n}(v, e_i)(e_i, e_j)$$

Пример

$\mathbb{R}^n$

$(x; y) = \sum x_i y_i$

$e_i = (0, 0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$

Пример

$$T_n = \{a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\}$$

$$(f; g) = \int_0^{2\pi} fgdx$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx_{k=1,...,n}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx_{k=1,...,n} \right\}$$

$$\mathrm{pr}_{T_n} f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)dx \right) \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)dx \right) \cdot \sin kx$$

Опр

$A \in M_n(K)$ назыв. ортогональной, если

$A^T A = E$

$O_n(K)$ - множество орт. матриц

Утв

$O_n(K)$ - группа по умножению

Док-во

$$\left.\begin{array}{l} A^TA = E \\ B^TB = E \end{array}\right| \Rightarrow (AB)^TAB = B^T\underbrace{A^TA}_{E}B = B^TB = E$$

$A^TA = E \Rightarrow A^{-1} = A^T$

$(A^{-1})^TA^{-1} \stackrel{?}{=} E$

$(A^T)^TA^{-1} = AA^{-1} = E$

Утв

$L \in \mathscr{L}(V)$ (пр-во лин. функционалов)

Следуюшие утверждения равносильны:

1. $(L_v, L_{v'}) = (v, v') \quad \forall v, v' \in V$
2. $\|L_v\| = \|v\| \qquad \forall v \in V$
3. $[L]_e \in O_n(\mathbb{R})$, если e - отронорм. базис

Док-во

$2 \to 1$

$$(v, v') = \frac{1}{2}(\|v + v'\| - \|v\|^2 - \|v'\|^2)$$

$3 \to 2$

$$[L_v]_e = [L]_e[v]_e$$

$$\|L_v\|^2 = (L_v, L_v) = [L_v]_e^T\Gamma_e[L_v]_e = [L_v]_e^T[L_v]_e =$$

$$= [v]_e^T\underbrace{[L]_e^t[L]_e}_{=E}[v]_e = [v]_e^T[v]_e = [v]_e^T\Gamma_e[v]_e = (v, v) = \|v\|^2$$

$1 \to 3$

$$\mathcal{E}_i^T[L]_e^T[L]_e\mathcal{E}_j$$

$$\mathcal{E}_i = (0, ..., \underset{i}{1}, ..., 0)$$

$$\mathcal{E}_i^TA\mathcal{E}_j = a_{ij}$$

$$\mathcal{E}_i = [e_i]_e$$

$$\mathcal{E}_j = [e_j]_e$$

$$[e_i]^T[L]_e^T[L]_e[e_j]_e = [L_{e_i}]_j^T[L_{e_j}]_e = [L_{e_i}]_e^T\Gamma_e[L_{e_j}]_e = (L_{e_i}, L_{e_j}) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

2019-10-22

Опр (унитарного пространства)

U - в.п. над $\mathbb{C}$

$U \times U \to ()$

1. $(u+v,\ w) = (u,\ w) + (v,\ w) \quad \forall u, v, w \in U$

   $(\lambda v,\ w) = \lambda(v, w) \quad \forall \lambda \in C, \quad v, w \in U$

2. $(u,\ v) = \overline{(v,\ u)}$
3. $(u,\ u) \geqslant 0$
4. $(u,\ u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Пример

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{R}^n & \mathrm{C}^n \\ (\mathrm{x,y}) = \sum x_i y_i & (\mathrm{x,y}) = \sum x_i \overline{y_i} \end{array}$$

$e_1, ..., e_n$ - базис

$\Gamma_e = \{(e_i,\ e_j)\}_{i,j}$ - матрица грамма

$(u, v) = [u]_e^T \Gamma_e \overline{[v]}_e$

$\Gamma_f = M_{e\to f}^T \Gamma_e \overline{M}_{e\to f}$

$|(u, v)| < \|u\| \cdot \|v\|, \quad \|u\| = \sqrt{(u,\ u)}$

$\|tu + v\|^2 = t^2\|u\| + t(\underbrace{(u,\ v) + (v,\ u)}_{=2\,\mathrm{Re}(u,v)}) + \|v\|^2$

$\mathrm{Re}(u, v) \leqslant \|u\|^2\|v\|^2$

$(u,\ v) = |(u,\ v)| \cdot z| \Rightarrow |z| = 0$

$\mathrm{Re}(\frac{1}{z}u,\ v) \leqslant \|\frac{1}{z}u\|^2\|v\|^2 = \|u\|\|v\|$

Напоминание: $\|\lambda u\| = \sqrt{(\lambda u,\ \lambda u)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(u, u)} = |\lambda|\,\|u\|$

$\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}(u,\ v) = \mathrm{Re}\,|(u, v)| = |(u,\ v)|$

Доказали КБШ

Опр

V - в.п. над K

$$V^* = \mathscr{L}(V,\ K)$$

Пример

$v \in V$ - евклидово пр-во (унитарное)

$\varphi_v(w) = (w,\ v) \quad \varphi_v : V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Хотим доказать: $\varphi \in V^* \Rightarrow \exists! v \in V : \varphi = \varphi_v$

Док-во

$e_1, ..., e_n$ - ОНБ V

$$v = \sum \lambda_i e_i$$

Нужно $\forall w \in V \quad (w,\ v) = \varphi(w)$, т.к. φ - линейный функционал

$\Leftrightarrow \forall j \quad (e_j,\ v) = \varphi(e_j)$

$$(e_j,\ \sum \lambda_i e_i) = \sum_i \overline{\lambda}_i (e_j,\ e_i)$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$A^* = \overline{A}^T$ - сопряженная матрица

Свойства

1. $A^{**} = A$
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A*$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Утв

V - унитарное пр-во, $L \in \mathscr{L}(V)$, $u \in V$

$$\varphi_n(v) = (Lv,\ u) \in V^*$$

$$\Rightarrow (Lv,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$\exists! w_u \in V: \quad (v,\ u) = (v,\ w_u)$$

$$u \to w_u$$

Утверждается, что отображение линейно

Док-во

$$\begin{array}{l|l} (\text{Lv, u}) = (\text{v, w}_u) & (\text{Lv, u+u'}) = (\text{Lv, u}) + (\text{Lv, u'}) = \\ (\text{Lv, u'}) = (\text{v, w}_{u'}) & = (\text{u w}_u) + (v,\ w_{u'}) = (v,\ w_u + w_{u'}) = (v,\ w_{u+u'}) \end{array}$$

$$(Lv,\ \lambda u) = \overline{\lambda}(Lv,\ u) = \overline{\lambda}(v,\ w_u) = (v,\ \underbrace{\lambda w_u}_{=w_{\lambda u}})$$

$$L^* u = w_u \quad (Lv,\ u) = (v,\ L^* u)$$

Опр

L^* - эрмитов сопряженный оператор

Свойства

1. $L^{**} = L$

$$(L^* v,\ u) = (v,\ L^{**} u)$$

$$(L^* v,\ u) = \overline{(u,\ L * v)} = \overline{(Lu,\ )} = (v,\ Lu)$$

$$\Rightarrow L^{**} u = Lu \quad \forall u \in V$$

Почему так? $(v,\ w) = (v,\ w') \quad \forall v \Rightarrow w = w'$

$$(v,\ w - w') = 0$$

$$v = w - w'$$

$$\|w - w'\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow w - w' = 0$$

2. $(\lambda L)^* = \overline{\lambda} L^*$

$$(\lambda L)v,\ u) = (v,\ (\lambda L)^* u)$$

$$(\lambda L)v,\ u) = (\lambda \cdot Lv,\ u) = \lambda(Lv,\ u) = \lambda(v,\ L^* u) = (v,\ \overline{\lambda} L^* u)$$

3. $(L + L')^* = L^* + L'^*$ аналогично

4. $(LNv,\ u) = (v,\ (LN)^* u)$

   $(LNv,\ u) = (v,\ N^* L^* u)$ и то же, что делали раньше

5. $[L]_e^* = [L^*]_e$, если e - ОНБ

   $Le_i = \sum a_{li} e_l \quad [L]_e = \{a_{ij}\}$

   $Le_j = \sum b_{kj} e_k \quad [L]_e = \{b_{kj}\}$

   $(\underset{=a_{ij}}{Le_i}, e_j) = (e_i,\ \underset{=\bar{b}_{ij}}{L^* e_j})$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$

A - унитаная, если $A^* A = E$

$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : (\text{то что сверху})\}$

Док-во (что это группа по умножению)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}^* A = R \\ \mathrm{B}^* B = E \end{array}\right| \Rightarrow (AB)^* AB = B^* \underbrace{A^* A}_{=E} B = E$$

$(A^{-1})^* A^{-1} \stackrel{?}{=} E$

$\Leftrightarrow (A^{-1})^* = A$

$\Leftrightarrow (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$

Докажем, что любая унитарная матрица обратима и модуль определителя равен единице

$A^* A = E$

$\overline{\det A} \cdot \det A = 1$

$|\det A|^2 = 1$

Утв

$$L \in \mathscr{L}(V)$$

Следующие условия равносильны:

1. $\|Lv\| = \|v\| \quad \forall v$
2. $(Lv,\ Lu) = (v, u) \quad \forall v, u$
3. $[L]_e \in U_n, \quad e$ - ортонорм.
4. $L^*L = \mathrm{id}_V$

И оператор, удовлетворяющий этим условиям называется "унитарным"(в евклидовом случае называется "ортогональным")

Док-во

$(4 \Rightarrow 2)$:

$$(v,\ \underbrace{L^*Lu}_{=(v,u)}) = (Lv,\ Lu)$$

$(2 \Rightarrow 4)$:

$$(v,\ L^*Lu) = (Lv,\ Lu) = (v,\ u)$$

По заклинанию $L^*L = \mathrm{id}_V$

Утв

1. $|\det L| = 1$
2. Если L - унитарный, $Lv = \lambda v \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda| = 1$
3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \quad \lambda \neq \mu | \Rightarrow (u,\ v) = 0$

Док-во

1 и 2:

$$\|v\| = \|Lv\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$

3:

$$(u,\ L^*v) = (u,\ \overline{\lambda}v) = \lambda(u,\ v)$$

$$(u,\ L^*v) = (Lu,\ v) = (\mu u,\ v) = \mu(u,\ v)$$

Хотим доказать: $Lv = \lambda v \Rightarrow L^*v = \overline{\lambda}v$

$$v = L^*Lv = L^*(\lambda v) = \lambda L^*v$$

Делим на λ и туда переносится $\overline{\lambda}$

2019-3-29

Опр

L - орт. оператор на плоскости, $\det L = 1$, тогда L - поворот

e - ортнорм. базис, $[L]_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$$

$a = \cos\varphi, \quad c = \sin\varphi$

$b = \sin\varphi, \quad d = \cos\psi$

$$\cos\varphi \sin\psi + \underbrace{\sin\varphi \cos\psi}_{=\sin(\varphi+\psi)} = 0$$

$$\cos\varphi \cos\psi - \underbrace{\sin\varphi \sin\psi}_{=\cos(\varphi+\psi)} = 0$$

$\Rightarrow \varphi + \psi = 0$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Опр

Если e - ортогональный оператор на пл-ти, $\det L = -1$
S - какая-то осевая симметрия
Тогда:

1. $L = S \circ R_\psi$
2. $L = R_\varphi \circ S$

Рассмотрим $S^{-1} \circ L$ - ортогональный оператор с определителем 1, значит по предыдущему определению $S^{-1} \circ L = R_\varphi$

Утв (теорема Эйлера)

В трехмерном пространстве с определителем 1 является поворотом относительно некоторой оси

Следствие: берем две прямые. Поворачиваем сначала относительно одной, потом относительно другой. И их композицией будет поврот

Док-во (теоремы Эйлера)

L - орт. оператор в пр-ве

$$\det L = 1$$

$$\chi_L(t) \in \mathbb{R}[x], \quad \deg \chi_i = 3$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - корни

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

Два варианта:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$
2. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$

В 1 случае одно из λ равно 1, пусть λ_1
Во 2 случае $\lambda_1 = 1$ т.к. $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\overline{\lambda_2}\lambda_3 = \lambda_1\underset{=1}{|\lambda_3|^2} = \lambda_1$
С.в. остается неподвижным при повороте. Ось тоже. Значит собственный вектор при повороте и есть ось
Осталось д-ть, что ортогональное дополнение есть вращение. Тогда докажем, что наш исходный оператор - вращение относительно оси

$$\exists Lv = v$$

$$v^\perp$$

Докажем, что эта плоскость - инвариантное подпространство. Нужно доказать:

$$(u, v) = 0 \to (Lu, v) = 0$$

То есть резульат будет тоже из ортогонального дополнения

$$(Lu, v) = (Lu, Lv) = (u, v) = 0 \text{ ч.т.д.}$$

Так как инвариантное подпространство, можем сузить L. Оно является плоскостью. Т.к. L - орт. оператор, значит он сохраняет расстояние. Т.к. S тоже сохраняет расстояние, значит L является ортоганальным оператором на плоскости. Осталось убедиться, что модуль равен 1. Если исходный оператор сохраняет расстояние, то и его сужение сохраняет

ориентацию. Другой способ: построим матрицу L в базисе: V, {два ортогональных вектора на плоскости}, матрица L будет такой:

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Вместо ? будет матрица сужения. Мы должны доказать, что это матрица поворота. Определитель большой матрицы равен определителю маленькой, но т.к. большая 1, то и он 1.

По предыдущим рассуждениям - это поврот. То есть у нас есть пространство с осью, на которую оператор действует тождественно, а на другое он действует как поврот.

Утв

Если L - ортогональный оператор в пре-ве с определитем -1 равен композиции поврота, относительно оси и симметрии, то это поворот.

Док-во

Аналогично

Теорема

Унитарный оператор имеет ортонормированный базис из с.в.

Док-во

Индукция по размерности пр-ва.
Пусть одномерное пр-во ($n = 1$) - очевидно, т.к. оператор-вектор v

$$Lv = u, \quad \|u\| = \|v\| \Rightarrow u = \lambda v, \quad |\lambda| = 1$$

Значит $Lv = \lambda v$ - подходит, когда ортонормируем
v - с.в. L с каким-то λ

$$Lv = \lambda v$$

$$< v >^{\perp}$$

Хотим доказать, что подпространство инвариантно относительно действия L:

$$(v,\ u) = 0 \Rightarrow (v,\ Lu) = 0$$

$$(v,\ Lu) = (L^* v,\ u) \overset{(*)}{=} (\overline{\lambda} v,\ u) = \overline{\lambda}(v, u) = 0$$

(∗) т.к. мы доказывали, что у собственного оператора. Если v - вектор унитарного оператора с с.ч. λ
Раз исходный оператор унитарный, то сужение тоже унитарно. Значит мы можем применить индукционное предположение у сужению. На этом ортогональном дополнении у оператора есть базис ортогональных векторов. Добавим к нему отнонормированный вектор v. Очевидно, получим ортонормированный базис из собственных векторов всего пр-ва

Переформулируем на языке матриц

Теорема

U - унитарная матрица, тогда:

$$U = MDM^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad |\lambda_i| = 1, \quad M \text{ - унитарная}$$

Док-во

$$\mathbb{C}^n \quad Lz = Uz \qquad [L]_e = U$$

e - есть базис $\mathbb{C}^n$

$$[L^*L]_e = [L^*]_e[L]_e = [L]_e^*[L]_e = U^*U = E$$

(∗) Из какого-то рассуждения получается
$\Rightarrow$ L - унитарный оператор
По теореме, которую доказали ранее, f - ортонормированный базис $\mathbb{C}^n$ из с.в. L

$$D = [L]_f = M_{e\to f}^{-1}\underbrace{[L]_e}_{=U}M_{e\to f}$$

(∗) У D - на диагонали с.ч., по модулю равные 1
Хотим д-ть: у нас есть два ОНБ, тогда матрица перехода между ними будет унитарна

$$M_{e\to f} = \{a_{ij}\}$$

$$f_j = \sum a_{ij}e_i$$

$$\delta_{jk} = (f_j,\ f_k) = \left(\sum_i a_{ij}e_{ij},\ \sum_l a_{ij}\overline{a}_{lk}e_l\right) = \sum_{i,l} a_{ij}\overline{a}_{lk}(e_i,\ e_l)\sum a_{ij}\overline{a}_{ik}$$

Опр

$A \in M_n(\mathbb{C})$ - эрмитова, если $A^* = A$
$L \in \mathscr{L}(V)$ - самосопряженный, если $L^* = L$

Свойства

1. L - самосопряженный, тогда $[L]_e$ - эрмитова, если e - ортонормированный

$$[L]_e^* = [L^*]_e = [L]_e$$

2. L - самосопряженный, тогда с.ч.$\in \mathbb{R}$

$$\exists Lv = \lambda v, \quad v \neq 0$$

$$\lambda(u,\ v) = (Lv,\ v) = (v,\ Lv) = (v,\ \lambda v) = \overline{\lambda}(v,\ v)$$

3. $Lv = \lambda v \quad Lu = \mu u \qquad \lambda \neq \mu \Rightarrow (u,\ v) = 0$

$$\lambda(v,\ u) = (Lv,\ u) = (v,\ Lu) = (v,\ \mu u) = \mu(v,\ u)$$

2019-10-29

Теорема

L - самосопр. $\Rightarrow \exists e_1, ..., e_n$ - ортнорм. базис из с.в. L

$Lv = \lambda v$

$(u, v) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} (Lu, v) = 0$

$(Lu, v) = (u, L^*v) = (u, Lv) = (u, \lambda v) = \lambda(u, v) = 0$

Тут мы должны задать вопрос.

Опр

A - эрмитова матрица

$\Rightarrow M$ - унитарная

D - диагональная $\underset{\in\mathbb{R}}{}$: $A = MDM^{-1}$

Теорема

A - эрмитов матрица

Тогда условия равносильны

1. $\forall x \underset{x\neq 0}{\in} \mathbb{C}^n \qquad \underset{\in\mathbb{R}}{x^*Ax} > 0 \qquad (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$
2. Все с.ч. $A > 0$
3. Все гл. миноры $A > 0$ (критерий Сильвестра)
4. $\exists P$ - обратимое: $A = P^*P$

Если хотя бы одно из них выполняется, то матрица A - положительно опред.

Док-во

$4 \to 1$

$A = P^*P$

$x^*Ax = x^*P^*Px = (Px)^*(Px) =< Px, Px >$

$< a, b >= \sum a_i\overline{b}_i$ Стандартное эрмитово скал. произв. в $\mathbb{C}$

$2 \to 4$

$A = MDM^{-1}$ M - унит D - диаг. ($\in \mathbb{R}$)

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \qquad A = (D^{\frac{1}{2}}M^*)^*(D^{\frac{1}{2}}M^*)$$

M - унитар $\Rightarrow MD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}M^* = MDM^{-1} = A$

$1 \to 2$

$Ax = \lambda x$

$$\underset{>0}{x^*Ax} = x^*\lambda x = \lambda x^* x = \lambda \underset{>0}{< x, x >}$$

$1 \to 3$

Нужно доказать, что все главные миноры больше 0

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = x'^* A' x' > 0 \quad \forall x' \neq 0$$

$\Rightarrow A'$ уд первому условию, а еще 4 условию

$A' = P * P$

$\det A' = \det P^* \cdot \det P = \overline{\det P} \cdot \det P = |\det P|^2 > 0$ т.к. P обратим

$3 \to 2$

Индукция по размеру A
Когда матрица 1×1 очев.
Инд. переход : $n \to n+1$
Пусть λ - с.ч A , $\lambda < 0 \Rightarrow \exists \mu < 0$

$$Ax = \lambda x \qquad Ay = \mu y, \quad < x, y >= 0$$

Если λ и μ различные.
Если с.ч. различны, то им соотв. ортогон. с.в $\Rightarrow$ у эрмит. матр. ортогон с.в соотв. различным с.ч .

У эрмитовой матрицы существует онб из с.в - столбцов. В этом базисе будет два вектора, лежащие в одном подпр-ве.

Что такое собственное под-во?

Если λ и μ совпадают, то есть два неколл. с.в., мы можем их ортогонализировать

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha x + \underset{=u}{\beta y} = (u', 0)$

$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$

$u'^* A' u' = u^* A u = |\alpha|^2 x^* A x + |\beta|^2 y^* A y =$ подставили u которое сверху

$= |\alpha|^2 \underset{<0}{\lambda} \cdot \|x\|^2 + |\beta|^2 \underset{<0}{\mu} \|y\|^2 < 0$

$u'^* A' u' < 0$

Если бы для матрицы A' выполнялось 3 условие, то должно было бы выполняться 2 условие, а 1 не выполняется, это значит, что 3 условие не вып. Все главные миноры A' - это в частности главные миноры A. А 3 выполняется для A. Мы получили противоречие.

Замечание

Все то же самое, можно доказать для симм. матрицы.
Пусть след. усл равносильны... для симм. матрицы над $\mathbb{R}$
Только тут будет P над $\mathbb{R}$

КАЖЕТСЯ, ТУТ ЧТО-ТО НЕ ТАК, ЭТО УЖЕ БЫЛО

Теорема

A - эрмит. матрица

тогда след. условия равносильны

1. $\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \underset{\in \mathbb{R}}{x^* A x} \geqslant 0$
2. Все с.ч. $A \geqslant 0$
3. Все гл. миноры $A \geqslant 0$
4. $\exists P : \qquad A = P^* P$

Такая матрица называется положительно полуопред.

Док-во

Доказать дома

Опр (Singular value decompostition SVD)

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists \underset{m\times m}{U}, \underset{n\times n}{V} \text{ - унитарные}, \quad S \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

S - диаг. насколько это возможно для прямоуг. матрицы, с неотр числами на диаг.

$$A = USV^*$$

Поворот, растяжение, поворот

Док-во

$m \leqslant n$

A^*A - эрмитова $\quad (A^*A)^* = A^*A$ - proof

$x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) \geqslant 0$

Значит эта матрица положительно полуопред.

$\exists V$ - унитарная: $\quad V^*A^*AV = D'$ - диаг $\quad V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

т.к. эта матрица положительно полуопред., то у этой матрицы на диаг будут стоять неотр. с.ч. Переставим с.ч так, что сначала идут положительные, а потом нули

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D \in M_k(\mathbb{R}) \quad m \geqslant n \geqslant k$$

$$V = (\underset{k \text{ столб}}{V_1} \quad \underset{n-k \text{ столб.}}{V_2}) \quad V_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}) \quad V_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$$

$$D' = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix} A^*A \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*A^*AV_1 & V_1^*A^*AV_2 \\ V_2^*A^*AV_1 & V_2^*A^*AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*A^*AV_1 = D \\ V_2^*A^*AV_2 = 0 \Rightarrow AV_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*V_1 & V_1^*V_2 \\ V_2^*V_1 & V_2^*V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*V_1 = E_k \\ V_2^*V_2 = E_{n-k} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} = V_1V_1^* + V_2V_2^* = E_n$$

$$U_1 \overset{\text{det}}{=} AV_1D^{-\frac{1}{2}} \in M_{m,k}(\mathbb{C})$$

$$U_1D^{\frac{1}{2}}V_1^* = AV_1D^{-\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}V_1^* = A - AV_2V_2^* = A$$

2019-11-05 Продолжение док-ва:

Док-во

$$U_1^* U_1 \overset{def}{=} D^{-\frac{1}{2}} \underbrace{V_1^* A^* A V_1}_{=D} D^{-\frac{1}{2}} = E_k$$

Осталось из U_1 и V_1.$\Rightarrow$ U_1 содержит k ортогональных столбцов. Раз они ортогональны, можно дополнить до ортогонального базиса в $\mathbb{C}^n$ и получаем:

$$U = (U_1 U_2) \in M_n(\mathbb{C})$$

Эта матрица ортонормирована из-за ортог. столбцов.

$$S := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{m_1 n}(\mathbb{C})$$

$$(U_1 U_2) S (V_1 V_2)^* = U_1 F^{\frac{1}{2}} V_1^* = A$$

Матрица S нужного размера. Матрица U_1 - квадратная и унитарная. С V_1 тоже все ок

Замечание

Такая же теорема верна в $\mathbb{R}$. Только если тут унитарные матрицы, то там ортоганальные

2.25 Квадратичные формы над $\mathbb{R}$

Опр

$x = (x_1, ..., x_n)$, тогда:

$S(x) = \sum\limits_{i \geqslant j} a_{ij} x_i x_j$ - квадратичная форма

Замечание

$$S(x) = \sum\limits_{b_{ij} = b_{ji}} a_{ij} x_i x_j$$

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij}, & i = j \\ \frac{a_{ij}}{2}, & i > j \\ \frac{a_{ji}}{2}, & j > i \end{bmatrix}$$

$B = (b_{ij})$ - матрица соответствующая

$S(x) = x^T Bx$

$x = My$

$S(x) = y^T M^T BMy$

Опр

S - положительно определена, если:

1. $\forall x \quad S(x) \geqslant 0$
2. $S(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Замечание

Эквивалентно тому, что матрица S - положительно определена. В частности это значит, что верен критерий Сильвестра

Опр

$S(x) = a_1 x^2 + ... + a_n x_n^2$ - канонический вид

Теорема

Любую матрицу можно привести к каноническому виду с помощью элементарного преопразования

Док-во

Любая самосопряженная матрица представляется в виде: унитарная матрица * диагональная * унитарная сопряженная к первой. В $\mathbb{R}$ формулируется так: любая симметрическая матрица: ортогональная * симметричная * ортоганальная в минус 1. То есть получили то что нам нужно

2.26 Применение сингулярного разложения

$Ax = b$

У A столбцов мало, строк много
Хотим решить приближенно, то есть чтобы $\|Ax - b\| \to \min$

Опр

x, который минимизирует разность называется решением методом наименьших квадратов (МНК)

Теорема

$A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

1. x^* - решение МНК $\Leftrightarrow A^T A x^* = A^T b$
2. $A^T A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = m$

Док-во

1. x^* - решением МНК $\overset{\text{Лада записала}}{\Leftrightarrow}$

   Ax^* - проекция b на линейную оболочку столбцов A

   $Ax^* = \operatorname{pr}_L v$

   $b - \operatorname{pr}_L b \perp L \Rightarrow A^T(b - \operatorname{pr}_L b) = 0$

   Почему $v \perp L \Rightarrow A^T v = 0$?
   $\forall e$: $(Ae, v) = 0$
   $=(e, A^T v)$
   Какой вектор ортогонален произвольному? Только нулевой. Мы в док-ве воспользовались $(Ax, y) = (x, A^T y)$ (просто расписать)

   $A^T b = A^T A x^*$

   $A^T A x^* = A^T b$

   $A^T(Ax^* - b) = 0 \;\Rightarrow\; Ax^* - b \perp L$ (аналогично)

   $\Rightarrow b = \underset{\in L}{Ax^*} - (\in \in L^{\perp} Ax^* - b)$

2. $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T A x = 0$. В $(\Rightarrow)$ - очевидно.
   Пусть $A^T A x = 0 \Rightarrow x^T A^T A x = 0 \Rightarrow (Ax)^* Ax \Leftrightarrow Ax = 0$
   Будем говорить в этом случае (немного некорректно), что x лежит в ядре матрицы A. Теперь к пункту 2.

   $(\Rightarrow)$:

   $A^T A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{Ker} A^T A = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

   Значит Ax - не имеет решения кроме нулевого. Но это ЛК столбцов матрицы. Значит столбцы матрицы A - ЛН. Значит она имеет полный ранг. Ч.т.д.

   $(\Leftarrow)$:
   Ранг равен m $\Rightarrow$ столбцы ЛН $\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
   Но знаем, что ядро у матриц в $Ax = 0 \Leftrightarrow A^T A x = 0$ равны нулю $\Rightarrow A^T A$ - обратимо

Теорема

$$A = UDV^T \qquad A \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \qquad D \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

Док-во

D - как бы диагональна. А все диагональные элементы вещ. неотриц. числа, приведем её так:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^+ \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A^+ = VD^+U^T$$

x^* - решение МНК $Ax = b \Leftrightarrow x^* = A^*b$

$$A^TAx^* = A^Tb$$

$$A^TAA^+b \stackrel{?}{=} A^+b$$

$$VD^T\cancel{U^T}U\cancel{DV^T}\cancel{V}D^+U^Tb \stackrel{?}{=} VD^TU^Tb$$

$$V\underbrace{D^TDD^+}_{=D^T}U^Tb$$

Опр

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$$

Свойства

1. $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$
2. $\|A + B\| \geqslant \|A\| + \|B\|$

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A+B)y\| \leqslant \sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| + \sup_{\|z_2\|=1} \|Bz_2\|$$

Пусть sup достигается в z_1, z_2

$$\|Az_1\| \geqslant \|Ay\|$$

$$\|Az_2\| \geqslant \|Ay\|$$

Подробное док-во: (убидили д-ть)

$$\sup_{\|y\|=1} \|(A+B)y\| = M$$

$$\sup_{\|z_1\|=1} \|Az_1\| = m_1$$

$$\sup_{\|z_2\|=1} \|Az_2\| = m_2$$

$M \leqslant m_1 + m_2$

$$\forall z : \|z\| = 1 \qquad \|Az\| \leqslant m_1$$

$$\|Bz\| \leqslant m_2 \Rightarrow \|(A+B)z\| \leqslant \|Az\| + \|Bz\| \leqslant m_1 + m_2$$

3. $\|UA\| = \|AV\|\|A\|$, если U,V - ортогон. матрицы (очевидно)

$$\|UA\| = \sup_{\|y\|=1} \|UAy\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|$$

4. $\|A\| = \sigma_1(A)$ - наибольшее сингулярное число. Как его получить? Взяли сингулярное разложение $A = UDV^T$. На диагонали D выбираем наибольшее сингулярное число

2019-11-12

Док-во

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{pmatrix}$$

$$A = UDV^T$$

$$\|A\| = \|D\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|D_x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{(\sigma_1 x_1)^2 + (\sigma_2 x_2)^2 + ... + (\sigma_k x_k)^2}}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}}$$

Задача

Необходимо сжать изображение. Мы хотим сделать так, чтобы фотография занимала меньше места на компьютере. Формально, мы ищем матрицу, которая близка к исходной.

Док-во

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad m \geqslant n$$

$$\hat{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad \|A - \hat{A}\| \to \min \qquad \operatorname{rk} \hat{A} \leqslant r$$

Мы можем измерить объем информации рангом матрицы и хранить ЛНЗ строки и линейные комбинации

$$A = UDV^T$$

$$U = (U_1 U_2)$$

$$V = (V_1 V_2)$$

$$U_1 \in M_{m,r}(\mathbb{R})$$

$$V_1 \in M_{n,r}(\mathbb{R})$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \qquad D_1 \in M_r(\mathbb{R})$$

$$\hat{A} = U_1 D_1 V_1^T$$

$$\hat{A} = U \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

$$\|A - \hat{A}\| = \|U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} V^T\| = \|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}\| = \sigma_{r+1}$$

$B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \overset{?}{\Rightarrow} \|A - B\| \geqslant \sigma_{r+1}$

$\operatorname{rk} B = r$

$\operatorname{rk} B = r \Rightarrow B = XY^T, \qquad X \in M_{m,r}(\mathbb{R}) \quad Y \in M_{n,r}(\mathbb{R})$

Матрица Y образована из ЛНЗ строк из B. Каждая строка B записывается как ЛК этих строчек. X - матрица коэфф.

$\mathcal{Y}$ - линейная оболочка столбцов $Y \quad (\text{в } \mathbb{R}^n)$

$\dim \mathcal{Y} \leqslant r$

Можно взять орт. дополнение

$\Rightarrow \dim \mathcal{Y}^\perp \geqslant n - r$

$\hat{\mathcal{V}}$ - линейнвя оболочка первых $r+1$ столбцов $V \qquad (\text{ в } \mathbb{R}^n)$

$\dim \hat{\mathcal{V}} = r + 1$

У них есть нетрив. пересеч. по формуле размерностей подрв-в

$\Rightarrow \exists\, w \in \hat{\mathcal{V}} \cap \mathcal{Y}^\perp \qquad w \neq 0$

$\|w\| = 1$

$w \in \mathcal{Y}^\perp \Rightarrow Y_w^T = 0$

$$w \in \hat{\mathcal{V}} \Rightarrow w = V \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

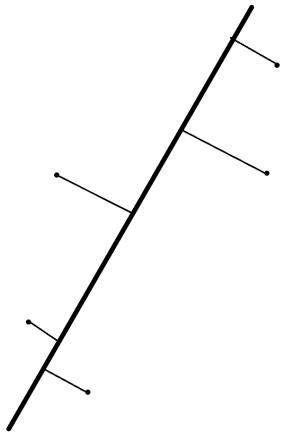
$$\|A-B\|^2 \geqslant \|(A-B)w\|^2 = \|Aw\|^2 = \|UDV^TV \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\|^2 = \|D \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\|^2$$

$= \sigma_1^2\gamma_1^2 + \ldots + \sigma_{r+1}^2\gamma_{r+1}^2 \geqslant \sigma_{r+1}^2$

$$1 = \|w\| = \|V \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \| = \sqrt{\gamma_1^2 + ... + \gamma_{r+1}^2}$$

Задача

В n - мерном пр-ве есть набор точек и нам нужно найти подпр-во заданной размерности, которое приближает этот набор точек. Что значит приближает? Это наилучшая аппроксимакция этих точек. Берем точки и их проекции. Складываем расстояния в квадрате для каждой точки.



прямая, которая аппроксимирует точки

Дисперсия - сумма квадратов отклонений от среднего значения (центр массы)

$x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$

$\dim L = k \qquad L = \underset{\text{ортнорм}}{< u_1, ..., u_k >}$

$$\mathrm{pr}_L\, x = \sum_{i=1}^{k} (u_i, x) u_i = \begin{pmatrix} u_1 & ... & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u_1, x) \\ \vdots \\ (u_k, x) \end{pmatrix}$$

$$U = (\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \end{pmatrix}) \in M_{n,k}(\mathbb{R}) =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_k^T \end{pmatrix} x = UU^T x$$

$$U^T U = I_k$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \|(I_n - UU^T)(x_i - u_0)\|^2$$

$$U \in M_{n,k}(\mathbb{R})$$

$$U^T U = I_k$$

$$u_0 \in \mathbb{R}^n$$

Любое подпр-во проходит через ноль, но мы хотим избавиться от этого ограничения. Мы можем перенести наше под-прво. u_0 - вектор сдвига. Или мы сдвигаем все точки на u_0.

Док-во (решение)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\overline{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \text{ - центр масс}$$

$$\widetilde{X} = X - \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \vdots \\ \overline{x} \end{pmatrix} \text{ центрированная матрица } \quad \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\widetilde{X}^T \widetilde{X} \in M_n(\mathbb{R})$$

У этой матрицы есть система из онорм с.в. А соотв. с.ч. вещ. неотр.
Упорядочим с.в. по величине с.ч.
Берем первые k с.в., где k - размер нужного подпр-ва
Нужно взять $u_0 = \overline{x}$

Теорема

Такая задача о минимизации имеет след. решение. Взять $u_0 = \overline{x}$
Взять в качестве U матрицу, сост из первых k веторов матрицы $\widetilde{X}^T \widetilde{X}$, упорядоч. по собс. числу

Лемма

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\|y_i - b\|^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\|y_1 - \overline{y}\|^2 + \|\overline{y} - b\|^2$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

Док-во

$$\frac{1}{m}\sum\|y_1-b\|^2 = \frac{1}{m}\sum\|(y_1-\overline{y})+(\overline{y}-b)\|^2 = \frac{1}{m}\sum\|y_1-\overline{y}\|^2+\|\overline{y}-b\|^2+$$

$$+\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_1 - \overline{y}, \overline{y} - b) =$$

$$= \frac{1}{m}\sum\|y_1 - \overline{y}\|^2 + \|\overline{y} - b\|^2 + \frac{2}{m}(\underbrace{\sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})}_{=0},\ \overline{y} - b)$$

2019-11-19

Док-во (теоремы)

Минимизация в $u_0 = \widetilde{x}$, задача свелась к:

$$\min_{U^TU=I_n} \sum_{i=1}^{m} \|(I - UU^T)(x_i - \overline{x})\|^2$$

$$\sum_{i=1}^{m} \|(I - UU^T)(x_i - \overline{x})\|^2 \overset{1}{=} \sum_{i=1}^{m} \|x_i - \overline{x}\|^2 - \sum_{i=1}^{m} \|U^T(x_i - \overline{x})\|^2 \overset{2}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \|x_i - \overline{x}\| - \mathrm{Tr}(U^T \widetilde{X}^T \widetilde{X} U)$$

Откуда взялись равенства? Объясним первое:

$$\|(I-UU^T)(x_i-\overline{x})\|^2 = \|x_i-\overline{x}\|^2 - 2(\underbrace{x_i - \overline{x},\ UU^T(x_i - \overline{x})}_{(*)}) + \|UU^T(x_i-\overline{x})\|^2$$

т.к. было: $(U^T a,\ b) = (a,\ Ub)$

$$\Rightarrow (*) = (U^T(x_i-\overline{x}),\ U^T(x_i-\overline{x})) \overset{\text{U -трансп.}}{=} (U^T(x_i-\overline{x}),\ U^TUU^T(x_i-\overline{x})) \overset{\text{лемма}}{=}$$

$$= \|UU^T(x_i - \overline{x})\|^2$$

Замечание: посмотрев на первое равенство, понимаем, что задача эквивалентна задаче про максимизации, которая стоит с минусом, а его можно записать как $\|UU^T(x_i - \overline{x})\|^2$.

Это и есть дисперсия (т.е. второй способ формулировки задачи: мы ищем пр-во, дисперсия проекций на которую максимальна)

Теперь объясним второй переход:

$$\sum_{i=1}^{m} \|U^T(x_i - \overline{x})\|^2 \overset{?}{=} \mathrm{Tr}(U^T \widetilde{X}^T \widetilde{X} U)$$

$$x_i - \overline{x} = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} \qquad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U^T = \{u_{\alpha\beta}\}$$

$$U^T\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \sum_\beta u_{1\beta}x_{i\beta} \\ \vdots \\ \sum_\beta u_{k\beta}x_{i\beta} \end{pmatrix}$$

$$\text{ЛЧ (в ?)} = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}(\sum_{\beta=1}^{n} u_{\alpha\beta}x_{i\beta})^2$$

Обозначим $U^T\widetilde{X}^T = A$, хотим найти $\operatorname{Tr} AA^T$, который равен сумме квадратов элементов этой матрицы:

$$A = \{a_{ij}\} \qquad (AA^T)_{ik} = \sum_j a_{ij}a_{kj} \Rightarrow \operatorname{Tr} AA^T = \sum_i\sum_j a_{ij}a_{ij}$$

То есть ПЧ = ЛЧ

Задача свелась к:

$$\max_{U^TU=I} Tr(U^T\widetilde{X}^T\widetilde{X}U)$$

Лемма

D - диагональная матрица, с упорядоченными по убыванию с.ч.:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \geqslant ... \geqslant \lambda_n$

Докажем, что $\max\limits_{\substack{W \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \\ W^TW = I}} \operatorname{Tr}(W^TDW)$ при $W = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix}$

Док-во

$$W^T = \{w_{ij}\} \qquad c_j = \sum_{i=1}^{k} w_{ij}^2$$

$$\operatorname{Tr}(W^TDW) = \sum_{i,j}\lambda_j W_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

Что мы знаем про c_j?

1. $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \overset{\text{т.к. столбцы ортонорм.}(W^TW=I)}{=} k$
   (сумма квадратов по строчкам равна сумме квадратов по столбцам, но все они равны 1, а их k штук)

2. $0 \leqslant c_j \leqslant 1$
   (у матрицы W столбцы ОНБ вектора, любой набор ОН может дополнен до ОНБ, тогда матрица будет ортоганальной, но у нее ОН строчки, в частности сумма квадратов элементов 1, значит у недополненной $\leqslant 1$)

Задача свелась к тому, чтобы д-ть:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$$

(в качестве c_j взять первые k единиц, остальные 0)

$$\lambda_1 + ... + \lambda_k - \lambda_1 c_1 - ... - \lambda_n c_n \overset{\text{по 1}}{=}$$
$$= \lambda_1 + ... + \lambda_k - \lambda_1 c_1 - ... - \lambda_k c_k - \lambda_{k+1}(k - c_1 - ... - c_k - c_{k+2} - ... - c_n) -$$
$$- \lambda_{k+2} c_{k+2} - ... - \lambda_n c_n =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_{k+1})(1 - c_1) + ... (\lambda_k - \lambda_{k+1})(1 - c_n) + (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+2}) c_{k+2} + ... (\lambda_{k+1} - \lambda_n) c_n \geqslant 0$$

$\widetilde{X}^T \widetilde{X} = S^T D S, \quad S \in Q_n(\mathbb{R}), \quad$ D - диаг

$$\max_{\substack{W \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \\ W^TW = I}} \operatorname{Tr}(U^T \widetilde{X}^T \widetilde{X} U) = \operatorname{Tr}(()^T D())$$

<u>Док-во</u> (продолжение д-ва теоремы)

$$\widetilde{X}^T \widetilde{X} = (S^T D S) S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = S^T D \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sigma_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_i S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

на i

$(S^T D S) S^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ - с.в. с с.ч. σ_i. U состоит их таких столбцов

Такое решение называется методом главных компонент (PCA)

3 Конечные поля