Санкт-Петербургский
государственный
университет

Практика по алгебре

3 семестр, преподаватель Демченко О. В.

Записал Костин П.А.[1]

[1] Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах вконтакте (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

1 Теория групп

1.1 Жордановы формы

03.09.2019

Утв

Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $U \in GL_n(\mathbb{C}) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) : |U| \neq 0\}$
Сопряжение матрицы A с помощью U: $A \longmapsto U^-1AU$

Теорема (Жордана, матрич. форма)

$\forall A \exists U : U^{-1}AU = J$
Пусть $U^{-1}AU = J$, $V^{-1}AV = I$ - совпадают с точностью до перестановки жардановых блоков

Пример

$A_1 \in M_n(K)$, $A_2 \in M_m(K)$
$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$
С помощью какой матрицы можно поулчить сопряжением другую

Теорема (Жордана, операт. форма)

Пусть $L \in \mathscr{L}(V)$ (оператор на V), V - конечномерное пр-во над $\mathbb{C}$. Тогда $\exists\{e_1, ..., e_n\}$ (жарданов базис) - базис V. $[L]_e = J$
Единственность: если есть два базиса, то матрицы можно получить перестановкой

———— тут не хватает чего-то

10.09.2019

1.2 Собственные вектора

17.09.2019

1.3 Жордановы матрицы

Пример

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$X^2 = A = C^{-1}JC$$

Пример $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $Y^2 = J$, $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & ? \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$, ? - из уравнения

Как найти J и C?
1) Находим все ссобственные числа матрицы A
Если все с.ч. равны, то J без единичек

Если одно собственное число а) диагонализируема $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

б) блоки 2 и 1 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Пример

Найдём, сколько собственных вектор-столбцов

Первая матрица: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = \lambda x_1 \\ \lambda x_2 = \lambda x_2 \\ \lambda x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$x_1, x_2, x_3 \in R$ - три л.н. переменные

Для второго решение: $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ - 2 собственных вектор-столбца

Пример

Пусть у нас матрица 4*4, 2 собственных л.н. столбца (два блока)

Утв

G,H - изоморфны, G - комм. $\Rightarrow$ H - комм.

Док-во

$\exists \varphi : G \to H : \varphi$ - биекция и $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$, кроме того, $g_1 g_2 = g_2 g_1$ $\forall g_1, g_2 \in G$, применим φ к последнему выражению

$h_1 h_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2)\varphi(g_1) = h_2 h_1$

$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Дз: G,H - изоморфны, G - цикл. $\Rightarrow$ H - цикл.

Решение

Грппа G - цикл $\Leftrightarrow \exists g \in G : \forall g' \in G \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

G - цикл., $G \cong H \Rightarrow \exists \varphi : G \to H$

$$\forall h' \in H \quad \exists g' \in G : h' = \varphi(g') = \varphi(g^k) = \varphi(\underbrace{g...g}_{k}) = \underbrace{\varphi(g)...\varphi(g)}_{k} = \underbrace{h...h}_{k} = h^k$$

Чтобы доказать, что две группы не изоморфны, можно доказать что у одной из них свойство выполняется, а у другой нет

Пример

1. $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$, D_3 - коммуннитативность
2. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - цикличность
3. $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - дз
4. $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ - порядки элементов
5. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - цикличность?

24.09.2019

Пример

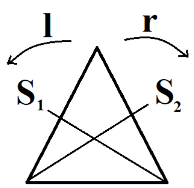
$$A \in M_n(\mathbb{C}), \quad A = C^{-1}JC, \quad C \in_n (\mathbb{C})$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

1) находим все с.ч.
2) для каждого с.ч. находим л.н. уравнение
3) решаем систему линейных уравнений
...ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, СМ. ТЕТРАДЬ

Пример

$$D_3 = \{e, l, r, s_1, s_2, s_3\}$$



$$H_1 = \{e, r, l\}$$

$$H_2 = \{e, s_1\}$$

1) Разбить по подгруппам, по левым и правым классам. Какая нормальная, какая нет?
2) Найти g,G. Чтобы произведение не лежало в H_2

Дз: $D_4 = \{...\}$, $H_1 = \{e, s_2\}$, $H_2 = \{e, r^2\}$
Дз: $K(D_3)$ - найти коммутант для D_3

01.10.2019

1.4 Комутаторы и комутанты

Пример

Дз (прошлое): $G = D_4$

$$H = \{e, r^2\}$$

$$H \triangleleft G$$

$$G/_H$$

Дз (новое):

1. Чему изоморфно $G/_H$? $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$
2. $|G| = 4 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{lcc} G & \cong & \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \\ G & \cong & \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \end{array}\right.$

Пример (я не знаю, что это было)

Пример

1. $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^* \quad (z \mapsto |z|)$
2. $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \quad (z \mapsto z^4)$

   Что получается при применении основной теоремы о гомоморфизме? (найти ядро образ, факторизовать, д-ть, что изморфна образу)

Решение

1. $\mathbb{C}^*/_{\{Z \in \mathbb{C}:\ |z|=1\}} \cong \mathbb{R}^*_{>0}$
2. ДЗ

Пример

ДЗ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/_{\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):\ \det A = \pm 1\}} \cong ?$

Как это сделать? Нужно найти $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to H$ - гомоморфизм: $\operatorname{Ker}\varphi = \{A \in_n (\mathbb{R}) :\ \det A = \pm 1\}$

Решение

$$\varphi(A) = |\det A|$$

$$\varphi(A) = (\det A)^2$$

ДЗ: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/_{\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}):\ \det A = \pm 1,\ \pm i\}} \cong ?$

1.5 Действие группы на множество

Пример

$$D_4$$

Написать разбиение этого множества из 16 эл-ов на орбиты. Сколько орбит?

Решение A

15.10.2019

1.6 Комутаторы и комутанты

Пример

Грани кубика красят в три цвета, сколькими способами это можно сделать?

Док-во Группа - группа всех самосовмещений куба, сохраняющих ориентацию, она действует на множестве всех раскрасок фиксированного куба. Орбита - множество всех раскрасок фиксированного куба, которые можно получить его поворотом. Элементы G:

1. e - 1 шт.
2. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных граней на 90 градусов - 6 шт.
3. ... на 180 - 3 шт.
4. Поворот отн. диагонали на 120 градусов - 8 шт.
5. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных рёбер на 180 градусов - 6 шт.

$\Rightarrow |G| = 24$

Число орбит $= \dfrac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} |M^g|$

$M^g = \{m \in M : gm = m\}$

$$= \frac{1}{24}\left(\underset{1.}{3^6} + \overset{\text{4 одн. цв.}}{\underset{2.}{6 \cdot 3^3}} + \overset{\text{2 пр. одн. цв.}}{\underset{3.}{3 \cdot 3^4}} + \overset{\text{3 одн. цв.}}{\underset{4.}{8 \cdot 3^2}} + \overset{\text{2 одн. цв.}}{\underset{5.}{6 \cdot 3^3}}\right) = 57$$

ДЗ 1: Аналогично, но красим в два цвета рёбра
ДЗ 2 (а): Есть ожерелье из 8 бусинок. Сколькими способами можно составить ожерелье из рубинов и алмазов
ДЗ 2 (б): если ограничение: должно быть 3 белых шарик и 5 черных

2 Евклидовы и унитарные пространства

2.1 Евклидовы пространства

Пример

$\mathbb{R}[x]_3$. Является ли это евклидовым пространством?

1. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
2. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + 2f(2)g(2)$
3. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) + 3f(3)f(3)$
4. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) - f(3)f(3)$

Док-во

1. Не является, потому что для $f = x^2 - x$

   $(f, f) = 0$ - не работает

2. не является
3. является
4.

Пример

Составить матрицу Грамма для в

Базис: $e_1 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad e_4 = x^3$

$(x^2 - 1,\ x - 1)$

Док-во

а

22.10.2019

ДЗ: ожирелье из 8 бусин: 4б, 4ч

Пример

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f,g) = \int_0^1 fg dx$$

Провести ортоганализацию Грамма-Шмидта в базисе $1, x, x^2, x^3$

Решение

$$e_1 = 1 \text{ - готово}$$

$$e_2 = x + \lambda \cdot 1 \quad (e_2,\ 1) = 0$$

Значит $\int\limits_0^1 (x+\lambda)\cdot 1 = \frac{x^2}{2} + \lambda x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

Должно быть $(e_2,\ e_2) = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 (x^2 - 2x\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = 12x - 6$$

$$e_3 = x^2 + \lambda e_1 + \mu e_2 \quad (e_3,\ e_2) = 0 \quad (e_3,\ e_1) = 0$$

Значит $\int\limits_0^1$

ДЗ: Найти $e_3,\ e_4$

Пример

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f,g) = \int_0^1 fg dx$$

В $V =< 1,\ x >$ найти $\mathrm{pr}_V\, x^3$

Решение

По прошлой задаче $e_1 = 1,\ e_2 = 12x - 6$

Значит $\mathrm{pr}_V\, x^3 = (x^3,\ 1)\cdot 1 + (x^3,\ 12x-6)\cdot(12x-6) =$

$= \int\limits_0^1 x^3 + (\int\limits_0^1 12x^4 - 6x^3)(12x-6) = \frac{1}{4} + (\frac{12}{5} + \frac{3}{2})(12x-6) =$

ДЗ: Проверить, что $u - pr_V u \perp v$

Пример

$$U = \mathbb{R}[x]_2, \quad (f, g) = \int_0^1 fgdx$$

В $V =< 1,\ x >$, $Lf = f'$ найти L^*

Решение

ДЗ: досчитать

Пример

Был пример $V = M_n(\mathbb{R})$, там $(A, B) = \operatorname{Tr} AB^T$ Найти в $V = M_n(\mathbb{C})$

Решение

$$\text{Проверим } (A, B) = \operatorname{Tr} A\overline{B}^T$$

$$\operatorname{Tr} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{c_1} & \overline{d_1} \end{pmatrix}$$

$$Tr\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \lambda Tr \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix}$$

ДЗ: на дом

29.10.2019

ДЗ: Есть 2 оси и два угла. Нужно сделать повороты и найти итоговый поворот и понять, вокруг какой оси. Подсказка: в д-ве мы предъявляем ось, значит мы должны найти собственный вектор с с.ч. 1, т.е. нужно найти матрицу с базисом, например, в качестве осей. А можно выбрать базис для первого, потом для второго. А можно для обоих сразу. Пишем матрицу повортов и должны матрицы привести к одному базису. Когда найдем собственный вектор, берем ортоганальное дополнение. Смотрим, на какой угол поворачивает матрица. И нужно не забыть если это не стандартный базис, вернуть в стандартный базис.

05.11.2019 ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО

Задача

$$V = M_2(\mathbb{R})$$

$$(A, B) = \operatorname{Tr} AB^T$$

$$LA = A^T$$

Выяснить, про оператор L:

1. Самосопряженный?

2. Ортогональный....?

Решение

1. L - самосопр. $\Leftrightarrow < LA, B >=< A, LB >$

$$< LA, B >= \operatorname{Tr}(A^T B^T)$$

$$< A, LB >= \operatorname{Tr}(AB)$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$(A^T B^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^T b_{kj}^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{in} b_{nj}$$

$$\operatorname{Tr}(A^T B^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ik}$$

$\Rightarrow L$ - самосопр.

2. L - ортогон. т.и. т.т, когда $\|A\| = \|LA\|$

$$\|A\|^2 =< A, A >= \operatorname{Tr}(AA^T) = \operatorname{Tr}(A^T A) =< LA, LA >= \|LA\|^2$$

Выбрать произвольный ОНБ, считаем матрицу оператора (симм, ортог). Ищем базис из с.в.
ДЗ: ....
У самосопр. и ортог. оператора, есть базис, состоящий из собственных векторов. В нем матрица будет диагональная. На диагонали вещественные числа, по модулю равные ± 1

Задача

Напишите не диагональную матрицу 2*2, которая положительно определена

Решение

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \overset{\forall x \neq 0}{>} 0$$

Задача

Напишите не диагональную матрицу 2*2, которая положительно полуопределена, не положительно определена. Убедиться в этом по всем критериям

Решение

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

ДЗ: Найти ту матрицу P из док-ва

12.11.2019

2.2 Квадратичные формы

<u>Задача</u>

Написать положительно определенную матрицу от двух переменных с отрицательными коэффициентами

<u>Решение</u>

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & -y^2 \\ -y^2 & x^2 \end{pmatrix}$$

Удовлетворяет критерию Сильвестра

<u>Задача</u>

Преобразовать к каноническому виду ортоганальным прелбразованием $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

<u>Напоминание</u>

$$S(x) = \sum_{b_{ij}=b_{ji}} a_{ij}x_ix_j$$

$$b_{ij} = \left[\begin{array}{ll} a_{ij}, & i = j \\ \frac{a_{ij}}{2}, & i > j \\ \frac{a_{ji}}{2}, & j > i \end{array}\right.$$

<u>Решение</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ - не пол. опр. по критерию Сильвестра}$$

Найдем собственные числа этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 4$$

Подставим в какноническую форму:

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2$$

Чтобы найти соответствующее линейное преобразование, нужно найти собственные вектора:

$$\begin{cases} (2-1)x + -2y = 0 \\ -2x + (1-1)y - 2z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (, ,)$$

$$\begin{cases} (2+2)x + -2y = 0 \\ -2x + (1+2)y - 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (, ,)$$

$$\begin{cases} (2-4)x + -2y = 0 \\ -2x + (1-4)y - 2z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (, ,)$$

26.11.2019

2.3 Обсуждаем кр и приближаем точки прямой

Задача

На плоскости даны три точки. Найти прямую, проходящую через $(0, 0)$, приближающую их наилучшим образом

Решение

...

26.11.2019

2.4 Приближение афинным подпространством набором точек

Замечание

Наши точки задают матрицу $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ В прошлый раз мы нашли прямую. Спроецируем точки на прямую, получим матрицу с ЛЗ строчками

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{pmatrix}$$

Теперь наоброт, у нас есть матрица ранга 1, которая приближает исходную матрицу. Можно ли по ней построить прямую?

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \end{pmatrix}$$

Так как ранг матрицы 1, то строчки ЛЗ
Точки лежат на прямой, лежащей на 1

Задача

У нас есть три точки на плоскости. Есть прямая проходящая через 0, приближающая их наилучшим образом. Тогда матрица, составленная из проекций этих точек будет наилучшим приближением исходной матрицы будет наилучшим приближением исходной матрицы среди матриц ранга 1.

Норма должна удовлетворять:

1. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|\alpha\|$
2. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$
3. $\|A\| \geqslant 0$

$$\|A\| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = 0$$

1. Наша норма - операторная $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$
2. $\|A\| = \max |a_{ij}|$
3. $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2}$

4. $\|A\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$

5. $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$

Решение: мы хотим в задаче про пл-ть:

$$\sum_{i,j} a_{ij}^2 \to \min \ \Leftrightarrow \ \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \to \min$$

А в задаче про ранг матрицы мы $\|A - \hat{A}\|$,