

## Напоминание

$$(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c} + \alpha \vec{a})$$

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

## Док-во

$g(s)$  - нат. парам.

$$g'(s) = \vec{v} \quad |\vec{v}| = 1$$

$$g''(s) = v' = k \vec{n}$$

$$g'''(s) = kn' = k(-k \vec{v} + \varkappa \vec{b}) = -k^2 \vec{v} + \varkappa k \vec{b}$$

$$(g', g'', g''') = (\vec{v}; k \vec{n}; -k^2 \vec{v} + \varkappa k \vec{b}) = (v; kn; \varkappa kb) = \varkappa k^2$$

$$\varkappa = \frac{(g', g'', g''')}{k^2} \text{ в нат парам.}$$

## Док-во

$f(t)$  - парам  $(\forall)$

$$S = \psi(t) = \int_a^t |f'(\tau)| d\tau \quad g(s) - \text{нат. парам}$$

$$\psi'(t) = |f'(t)|$$

$$g(S) = g(\psi(t)) = f(t)$$

$$f'(t) = g'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = g'(s) \cdot |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(\psi(t))(\psi'(t))^2 + g'(\psi(t))\psi''(t) = g''(s) \cdot |f'(t)|^2 + g'(s) \cdot \psi''(t)$$

$$f'''(t) = g'''(\psi(t))(\psi'(t))^3 + g''(\psi(t)) \cdot 3\psi'(t)\psi''(t) + g'(\psi(t)) \cdot \psi'''(t)$$

$$(f', f'', f''') = (\vec{f}'(s) \cdot |f'(t)|; \vec{g}''(s) |f'(t)|^2, g'''(s) \cdot |f'(t)|^3) = \\ = (g', g'', g''') \cdot |f'(t)|^6$$

$$\varkappa = \frac{(g', g'', g''')}{k^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f'(t)|^6} \cdot \frac{|f'(t)|^6}{|f' \times f''|^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

## Пример

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$y = f(x) \quad \vec{f} = (x; f(x); 0) \quad \vec{f}' = (1; f'(x); 0) \quad f''(0; f''(x); 0)$$

$$f''' = (0; f'''(x); 0)$$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$f' \times f'' = (0; 0; f''(x))$$

$$\kappa = 0$$

## 0.1 Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми

рисунок 1 (вектора)

## Опр

Соприкас плоскость :  $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

Нормальная плоскость кривой :  $\langle n, b \rangle$

Спрямяющая плоскость :  $\langle v, b \rangle$

## Теорема

$\vec{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t))$  ур-е нормали плоск.

$$\vec{v} \parallel f'(t) = (f'_1, f'_2, f'_3) \quad f'_1(t_0) \cdot (x - f_1(t_0)) + f'_2(t_0) \cdot (y - f_2(t_0)) + f'_3(t_0) \cdot (z - f_3(t_0)) = 0$$

$$f' \times f'' \parallel b$$

$$(f'_1, f'_2, f'_3) \times (f''_1, f''_2, f''_3) = (f'_2 f''_3 - f'_3 f''_2; f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3; f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1)$$

Соприкас плоск.

$$\begin{vmatrix} f'_1(t_0) & f'_2(t_0) & f'_3(t_0) \\ f''_1(t_0) & f''_2(t_0) & f''_3(t_0) \\ x - f_1(t_0) & y - f_2(t_0) & z - f_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$(f'(t_0) \times f''(t_0)) \times f'(t_0) \parallel \vec{n}$$

Ур-е спрям. плоск - УПР

---

**Теорема** рисунок 2 (кривая с точкой и плоск)

$\delta$  - расст. от  $f(t)$  до соприкас. плоскости

Если плоскость явл. соприкас., то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|^2} = 0$$

Плоскость с таким соотношением ед.

**Док-во**

a)  $f(t_0) = (0, 0, 0)$

b)  $OX \parallel \vec{v}(t_0)$

c)  $OY \parallel \vec{n}(t_0)$

d)  $t_0 = 0$

e)  $t$  - нат. параметр

б, в  $\Rightarrow OZ \parallel \vec{b}(t_0)$

$$f(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \Rightarrow \delta = |f_3(t)s|$$

Соприкас  $z = 0$

$$\vec{v} \parallel f' = (f'_1, f'_2, f'_3) \parallel OX \Rightarrow f'_2(0) = 0, \quad f'_3(0) = 0 \quad f'_1(0) \neq 0$$

$$\vec{n} \parallel f'' = (f''_1, f''_2, f''_3) \parallel OY \Rightarrow f''_1(0) = 0; \quad f''_3(0) = 0$$

$$\text{Хотим } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f_3(t)|}{|f(t)|^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_3(t)}{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'_3(t)}{2f_1(t)f'_1(t) + 2f_2(t)f'_2(t) + 2f_3(t)f'_3(t)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f''_3(t)}{f_1'^2(t) + f_1(t)f''_1(t) + f_2(t)f''_2(t) + f_3'^2(t) + f_3(t)f''_3(t)} \end{aligned}$$

---

## 0.2 Дополнение 2: натур. ур-я кривой

### Теорема

$g_1(s)$  и  $g_2(s)$  - нат. парам. двух кривых

$k_1(s)$     $k_2(s)$   
 $\varkappa_1(s)$     $\varkappa_2(s)$  - кривизны и кручения

Если  $k_1(s) = k_2(s)$   
 $\varkappa_1(s) = \varkappa_2(s) \Rightarrow$  кривые наклад. при движении пр-ва

### Док-во

$v_1(s), n_1(s), b_1(s)$  - базис Френе I кривой

$v_2(s), n_2(s), b_2(s)$  - базис Френе II кривой

Считаем  $v_1(s_0) = v_2(s_0)$

$$n_1(s_0) = n_2(s_0)$$

$$b_1(s_0) = b_2(s_0)$$

$$h(s) = \vec{v}_1(s) \vec{v}_2(s) + \vec{n}_1(s) \vec{n}_2(s) + \vec{b}_1(s) \vec{b}_2(s) \quad h(s_0) = 3$$

$$h'(s) = v_1'v_2 + v_1v_2' + n_1'n_2 + n_1n_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' =$$

$$= \underline{k_1n_1v_2 + k_2v_1n_2} + (-k_1v_1 + \varkappa_1b_1)n_2 + \underline{\underline{n_1(-k_2v_2 + \varkappa_2b_2)}} - \varkappa_1n_1b_2 - \varkappa_2b_1n_2 = 0$$

$$\Rightarrow h(s_0) \equiv 3$$

$$\Rightarrow v_1 \equiv v_2 \quad n_1 \equiv n_2 \quad b_1 \equiv b_2$$