2019-09-24

Напоминание

$$G/K(G) \text{ - коммутативна}$$

Утв

$$H \triangleleft G \quad G/_H \text{ - комм}$$

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad (g_1H)(g_2H) = (g_2H)(g_1H)$$
$$[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in H \Rightarrow K(G) \subset H$$

Свойства (гомоморфизма)

$$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$$

1. $f(e_G) = e_H \qquad f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e)$
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

$$f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e$$

3. Композиция гомоморфизмов

Опр

$$f \in \mathrm{Hom}(G, H)$$

$$Kerf = \{g \in G : \ f(g) = e\} \subset G$$
$$\mathrm{Im}\, f = \{f(g) : \ g \in G\} \subset H$$

Утв

Ker и Im - подгруппы G

Док-во

1. $f(g_1) = f(g_2) = e \Rightarrow f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = e \cdot e = e$
2. $f(e) = e$
3. $f(g) = e \Rightarrow f(g^{-1}) = f(g)^{-1} = e^{-1} = e$

1. $f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1g_2)$
2. $e = f(e)$

3. $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$

Утв

Ker - нормальная подгруппа G

Док-во

$$Kerf \triangleleft G?$$

$$g \in G \qquad a \in Kerf$$

$$f(g^{-1}ag) = f(g)^{-1}\underbrace{f(a)}_{=e}f(g) = e$$

Утв (основная теорема о гомоморфизме)

$$G/_{Kerf} \cong \operatorname{Im} f$$

Док-во

Докажем, что это корректное отображение:

$$Kerf = K$$

$$\varphi(gK) \overset{def}{=} f(g) \qquad \varphi : G/_{Kerf} \to \operatorname{Im} f$$

$$gK = g'K \overset{?}{\Rightarrow} f(g) = f(g')$$

$$g' = g \cdot a, \quad a \in K \qquad f(g') = f(g) \cdot \underbrace{f(a)}_{=e} = f(g)$$

Докажем, что φ - гомоморфизм:

$$f(g_1)f(g_2) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K) \overset{?}{=} \varphi(g_1Kg_2K) = \varphi((g_1g_2)K) = f(g_1g_2)$$

$$\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K) \overset{?}{\Rightarrow} g_1K = g_2K$$

Докажем, что это биекция. Что сюръекция - очевидно

$$f(g_1) = f(g_2) \qquad \Rightarrow g_1g_2^{-1} \in K$$

$$\underbrace{f(g1)f(g_2)^{-1}}_{=f(g_1)f(g_2^{-1})} = e$$

Напоминание

$$SL_N(K) \text{ - квадратные матрицы с } \det = 1$$

<u>Опр</u>

$$\det : GL_n(K) \to K^*$$

Но это отображение - сюръекция, а значит:

$$GL_n(K)/_{SL_n(K)} \cong K^*$$

$$SL_n(K) = \{A \in M_n(K) : |A| = 1\}$$

<u>Пример</u> (1)

$$S_n \to \{\pm 1\}$$

$$S_n/_{A_n} \cong \{\pm 1\}(\cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})$$

<u>Пример</u> (2)

$$G \times H \to G$$

$$(g_1 h) \to g$$

$$G \times H/_{e \times H} \cong G$$

0.1 Действие группы на множестве

<u>Опр</u>

M - множество

G - группа

$$G \times M \to M$$

$$(g, m) \to gm$$

1. $g_1(g_2 m) = (g_1 g_2)m \quad \forall g_1 g_2 \in G, \quad m \in M$
2. $em = m \quad \forall m \in M$

Если задано такое отображение, то говорим, что группа G действует на множестве M

<u>Пример</u> (1)

$$A = k^n \qquad (A, v) \to A_v$$

$$G = GL_n(K)$$

$$A(B_v) = (AB)_v$$

$$E_v = v$$

Пример (2)

М = {количество раскрасок вершин квадрата в два цвета}

$G = D_4$

$\cdot \begin{matrix} ч & ч \\ б & ч \end{matrix} = \begin{matrix} ч & б \\ ч & ч \end{matrix}$

$M = G$

$gm = gm$

Опр

$m \in M$

$Stab\ m = \{g \in G : gm = m\}$ - стабилизация

$Orb\ m = \{gm,\ g \in G\}$ - орбита

Утв

$Stab\ m < G$

Док-во

Доказательство того, что стабилизатор - подгруппа:

1. $g_1, g_2 \in Stab\ m$

$$(g_1 g_2)m = g_1 \underbrace{(g_2 m)}_{=m} = g_1 m = m$$

2. $e \cdot m = m$
3. $gm = m \overset{?}{\Rightarrow} g^{-1}m = m$

$$gm = m$$

$$\underbrace{g^{-1}gm}_{=(g^{-1}g)m=em=m} = g^{-1}m$$

Утв

$m_1, m_2 \in M$

$m_1 \sim m_2$, если $\exists g \in G : gm_1 = m_2$

$\Rightarrow \sim$ - отношение эквив

Док-во

$$\text{(рефл.) } gm_1 = m_2 \Rightarrow g^{-1}m_2 = m_1 \quad g^{-1} \in G$$

$$\text{(симм.) } em = m, \quad e \in G$$

$$\text{(тран.) } \left.\begin{matrix} gm_1 = m_2 \\ g'm_2 = m_3 \end{matrix}\right| \Rightarrow (g'g)m_1 = g'(gm_1) = g'm_2 = m_3$$

Утв

$$|Orb\ m| \cdot |Stab\ m| = |G|$$

Док-во

$$Stab\ m = H$$

$$\{gH,\ g \in G\} \to Orb\ m$$

$$gH \to gm$$

Хотим доказать, что это корректно

$$gH = g'H \overset{?}{\Rightarrow} gm = g'm$$

$$g' = ga, \quad g \in H$$

$$g'm = (ga)m = g(am) = gm$$

Хотим доказать биективность. Сюръективность - очев. Инъективность:

$$gm = g'm \Rightarrow gH = g'H$$

$$m = em = (g^{-1}g')m = g^{-1}(gm) = g^{-1}(g'm) = (g^{-1}g')m$$

$$\Rightarrow g^{-1}g' \in H \Rightarrow gH = g'H$$

Лемма (Бернсайда)

$$\text{Кол-во орбит } = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m\}$$