



Санкт-Петербургский
государственный
университет
www.spbu.ru

Практика по алгебре

3 семестр, преподаватель Демченко О. В.
Записал Костин П.А.¹

¹Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах [вконтакте](#) (можно присылать скрины неточностей с указанием билетов)

Содержание

1	Теория групп	3
1.1	Жордановы формы, 03.09.2019	3
1.2	Собственные вектора, 10.09.2019	3
1.3	Жордановы матрицы, 17.09.2019	3
1.4	В ожидании кр..., 24.09.2019	5
1.5	Коммутаторы и комутанты, 01.10.2019	6
1.5.1	Действие группы на множество	7
1.6	Коммутаторы и комутанты, 15.10.2019	7
1.6.1	Евклидовы пространства	8
1.7	..., 22.10.2019	9
1.8	..., 29.10.2019	10
1.9	..., 05.11.2019	10

1 Теория групп

1.1 Жордановы формы, 03.09.2019

УТВ

Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$, $U \in GL_n(\mathbb{C}) = \{U \in M_n(\mathbb{C}) : |U| \neq 0\}$

Сопряжение матрицы A с помощью U : $A \mapsto U^{-1}AU$

Теорема (Жордана, матрич. форма)

$$\forall A \exists U : U^{-1}AU = J$$

Пусть $U^{-1}AU = J$, $V^{-1}AV = I$ - совпадают с точностью до перестановки жордановых блоков

Пример

$$A_1 \in M_n(K), A_2 \in M_m(K)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

С помощью какой матрицы можно получить сопряжением другую

Теорема (Жордана, операт. форма)

Пусть $L \in \mathcal{L}(V)$ (оператор на V), V - конечномерное пр-во над \mathbb{C} . Тогда $\exists \{e_1, \dots, e_n\}$ (жорданов базис) - базис V . $[L]_e = J$

Единственность: если есть два базиса, то матрицы можно получить перестановкой

———— тут не хватает чего-то

1.2 Собственные вектора, 10.09.2019

———— что-то пропущено

1.3 Жордановы матрицы, 17.09.2019

Пример

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$X^2 = A = C^{-1}JC$$

Пример $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $Y^2 = J$, $Y = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & ? \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$, ? - из уравнения

Как найти J и C?

1) Находим все собственные числа матрицы A

Если все с.ч. равны, то J без единичек

Если одно собственное число λ диагонализируема $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

б) блоки 2 и 1 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Пример

Найдём, сколько собственных вектор-столбцов

$$\text{Первая матрица: } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = \lambda x_1 \\ \lambda x_2 = \lambda x_2 \\ \lambda x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$x_1, x_2, x_3 \in R$ - три л.н. переменные

Для второго решение: $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ - 2 собственных вектор-столбца

Пример

Пусть у нас матрица 4×4 , 2 собственных л.н. столбца (два блока)

Утв

G, H - изоморфны, G - комм. $\Rightarrow H$ - комм.

Док-во

$\exists \varphi : G \rightarrow H : \varphi$ - биекция и $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2)$, кроме того, $g_1 g_2 = g_2 g_1$

$\forall g_1, g_2 \in G$, применим φ к последнему выражению

$$h_1 h_2 = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2 g_1) = \varphi(g_2) \varphi(g_1) = h_2 h_1$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Дз: G, H - изоморфны, G - цикл. $\Rightarrow H$ - цикл.

Решение

Группа G - цикл $\Leftrightarrow \exists g \in G : \forall g' \in G \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

$$G \text{ - цикл.}, G \cong H \Rightarrow \exists \varphi : G \rightarrow H$$

$$\forall h' \in H \quad \exists g' \in G : h' = \varphi(g') = \varphi(g^k) = \underbrace{\varphi(g \dots g)}_k = \underbrace{\varphi(g) \dots \varphi(g)}_k = \underbrace{h \dots h}_k = h^k$$

Чтобы доказать, что две группы не изоморфны, можно доказать что у одной из них свойство выполняется, а у другой нет

Пример

1. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, D_3 - коммутативность
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - цикличность
3. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - дз
4. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - порядки элементов
5. \mathbb{Z} , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ - цикличность?

1.4 В ожидании кр..., 24.09.2019

Пример

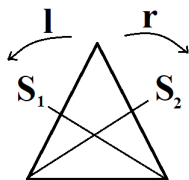
$$A \in M_n(\mathbb{C}), \quad A = C^{-1}JC, \quad C \in_n(\mathbb{C})$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

- 1) находим все с.ч.
 - 2) для каждого с.ч. находим л.н. уравнение
 - 3) решаем систему линейных уравнений
- ...ЗДЕСЬ ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО, СМ. ТЕТРАДЬ

Пример

$$D_3 = \{e, l, r, s_1, s_2, s_3\}$$



$$H_1 = \{e, r, l\}$$

$$H_2 = \{e, s_1\}$$

- 1) Разбить по подгруппам, по левым и правым классам. Какая нормальная, какая нет?
- 2) Найти g, G . Чтобы произведение не лежало в H_2

$$\text{Дз: } D_4 = \{\dots\}, H_1 = \{e, s_2\}, H_2 = \{e, r^2\}$$

Дз: $K(D_3)$ - найти коммутант для D_3

1.5 Коммутаторы и комутанты, 01.10.2019

Пример

Дз (прошное): $G = D_4$

$$H = \{e, r^2\}$$

$$H \triangleleft G$$

$$G/H$$

Дз (новое):

1. Чему изоморфно G/H ? $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$2. |G| = 4 \Rightarrow \begin{cases} G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$$

Пример (я не знаю, что это было)

Пример

$$1. \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \quad (z \mapsto |z|)$$

$$2. \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad (z \mapsto z^4)$$

Что получается при применении основной теоремы о гомоморфизме?
(найти ядро образ, факторизовать, д-ть, что изморфна образу)

Решение

$$1. \mathbb{C}^*/\{z \in \mathbb{C}: |z|=1\} \cong \mathbb{R}_{>0}^*$$

2. ДЗ

Пример

$$\text{Дз: } \text{GL}_n(\mathbb{R})/\{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}): \det A = \pm 1\} \cong ?$$

Как это сделать? Нужно найти $\varphi: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow H$ - гомоморфизм:
 $\text{Ker } \varphi = \{A \in_n(\mathbb{R}) : \det A = \pm 1\}$

Решение

$$\varphi(A) = |\det A|$$

$$\varphi(A) = (\det A)^2$$

$$\text{ДЗ: } \text{GL}_n(\mathbb{R}) / \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A = \pm 1, \pm i\} \cong ?$$

1.5.1 Действие группы на множество**Пример**

$$D_4$$

Написать разбиение этого множества из 16 эл-ов на орбиты. Сколько орбит?

Решение А**1.6 Комутаторы и комутанты, 15.10.2019****Пример**

Грани кубика красят в три цвета, сколькими способами это можно сделать?

Док-во Группа - группа всех самосовмещений куба, сохраняющих ориентацию, она действует на множестве всех раскрасок фиксированного куба. Орбита - множество всех раскрасок фиксированного куба, которые можно получить его поворотом. Элементы G:

1. е - 1 шт.
2. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных граней на 90 градусов - 6 шт.
3. ... на 180 - 3 шт.
4. Поворот отн. диагонали на 120 градусов - 8 шт.
5. Поворот отн. оси, соединяющей центры противоположных рёбер на 180 градусов - 6 шт.

$$\Rightarrow |G| = 24$$

$$\text{Число орбит} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M^g|$$

$$M^g = \{m \in M : gm = m\}$$

$$= \frac{1}{24} \left(\underset{1.}{3^6} + \underset{2.}{\overset{4 \text{ одн. цв.}}{6 \cdot 3^3}} + \underset{3.}{\overset{2 \text{ пр. одн. цв.}}{3 \cdot 3^4}} + \underset{4.}{\overset{3 \text{ одн. цв.}}{8 \cdot 3^2}} + \underset{5.}{\overset{2 \text{ одн. цв.}}{6 \cdot 3^3}} \right) = 57$$

ДЗ 1: Аналогично, но красим в два цвета рёбра

ДЗ 2 (а): Есть ожерелье из 8 бусинок. Сколькими способами можно составить ожерелье из рубинов и алмазов

ДЗ 2 (б): если ограничение: должно быть 3 белых шарик и 5 черных

1.6.1 Евклидовы пространства

Пример

$\mathbb{R}[x]_3$. Является ли это евклидовым пространством?

1. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
2. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + 2f(2)g(2)$
3. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) + 3f(3)g(3)$
4. $(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2) - f(3)g(3)$

Док-во

1. Не является, потому что для $f = x^2 - x$

$$(f, f) = 0 \text{ - не работает}$$

2. не является
3. является
- 4.

Пример

Составить матрицу Грамма для в

$$\text{Базис: } e_1 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2, \quad e_4 = x^3$$

$$(x^2 - 1, x - 1)$$

Док-во

а

1.7 ..., 22.10.2019

ДЗ: ожирелье из 8 бусин: 4б, 4ч

Пример

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f, g) = \int_0^1 f g dx$$

Провести ортогонализацию Грамма-Шмидта в базисе $1, x, x^2, x^3$ **Решение**

$$e_1 = 1 - \text{готово}$$

$$e_2 = x + \lambda \cdot 1 \quad (e_2, 1) = 0$$

$$\text{Значит } \int_0^1 (x + \lambda) \cdot 1 = \frac{x^2}{2} + \lambda x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Должно быть } (e_2, e_2) = 1 \Rightarrow \int_0^1 (x^2 - 2x \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{12}} = 12x - 6$$

$$e_3 = x^2 + \lambda e_1 + \mu e_2 \quad (e_3, e_2) = 0 \quad (e_3, e_1) = 0$$

$$\text{Значит } \int_0^1$$

ДЗ: Найти e_3, e_4 **Пример**

$$\mathbb{R}[x]_3, \quad (f, g) = \int_0^1 f g dx$$

В $V = \langle 1, x \rangle$ найти $\text{pr}_V x^3$ **Решение**По прошлой задаче $e_1 = 1, e_2 = 12x - 6$

$$\text{Значит } \text{pr}_V x^3 = (x^3, 1) \cdot 1 + (x^3, 12x - 6) \cdot (12x - 6) =$$

$$= \int_0^1 x^3 + \left(\int_0^1 12x^4 - 6x^3 \right) (12x - 6) = \frac{1}{4} + \left(\frac{12}{5} + \frac{3}{2} \right) (12x - 6) =$$

ДЗ: Проверить, что $u - \text{pr}_V u \perp v$

Пример

$$U = \mathbb{R}[x]_2, \quad (f, g) = \int_0^1 f g dx$$

В $V = \langle 1, x \rangle$, $Lf = f'$ найти L^*

Решение

ДЗ: досчитать

Пример

Был пример $V = M_n(\mathbb{R})$, там $(A, B) = \text{Tr } AB^T$ Найти в $V = M_n(\mathbb{C})$

Решение

Проверим $(A, B) = \text{Tr } A\overline{B}^T$

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \text{Tr} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \overline{c_1} & \overline{d_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = \lambda \text{Tr} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a_2} & \overline{b_2} \\ \overline{c_2} & \overline{d_2} \end{pmatrix}$$

ДЗ: на дом

1.8 ..., 29.10.2019

ДЗ: Есть 2 оси и два угла. Нужно сделать повороты и найти итоговый поворот и понять, вокруг какой оси. Подсказка: в д-ве мы предъявляем ось, значит мы должны найти собственный вектор с с.ч. 1, т.е. нужно найти матрицу с базисом, например, в качестве осей. А можно выбрать базис для первого, потом для второго. А можно для обоих сразу. Пишем матрицу поворотов и должны матрицы привести к одному базису. Когда найдем собственный вектор, берем ортогональное дополнение. Смотрим, на какой угол поворачивает матрица. И нужно не забыть если это не стандартный базис, вернуть в стандартный базис.

1.9 ..., 05.11.2019

ЧТО-ТО ПРОПУЩЕНО

Задача

$$V = M_2(\mathbb{R})$$

$$(A, B) = \text{Tr } AB^T$$

$$LA = A^T$$

Выяснить, про оператор L:

1. Самосопряженный?
2. Ортогональный....?

Решение

1. L - самосопр. $\Leftrightarrow \langle LA, B \rangle = \langle A, LB \rangle$

$$\langle LA, B \rangle = \text{Tr}(A^T B^T)$$

$$\langle A, LB \rangle = \text{Tr}(AB)$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$(A^T B^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^T b_{kj}^T = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{in} b_{nj}$$

$$\text{Tr}(A^T B^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ik} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik}$$

$\Rightarrow L$ - самосопр.

2. L - ортогон. т.и. т.т, когда $\|A\| = \|LA\|$

$$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \text{Tr}(AA^T) = \text{Tr}(A^T A) = \langle LA, LA \rangle = \|LA\|^2$$

Выбрать произвольный ОНБ, считаем матрицу оператора (симм, ортог). Ищем базис из с.в.

ДЗ:

У самосопр. и ортог. оператора, есть базис, состоящий из собственных векторов. В нем матрица будет диагональная. На диагонали вещественные числа, по модулю равные ± 1

Задача

Напишите не диагональную матрицу 2×2 , которая положительно определена

Решение

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \stackrel{\forall x \neq 0}{>} 0$$

Задача

Напишите не диагональную матрицу 2×2 , которая положительно полуопределена, не положительно определена. Убедиться в этом по всем критериям

Решение

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

ДЗ: Найти ту матрицу P из док-ва