Пример

Экстремум кв. форму ны ед. сфере

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{n_1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad f(x) = (Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

При условии $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 1$$

Если в т. x^* - отн. экстремум, то

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \lambda \nabla \Phi(x^*) = 0 \\ \Phi(x^*) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f = 2Ax$$

$$\nabla \Phi = 2x$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} Ax^* = \lambda x^* \\ \sum x^{*2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda \text{ - с.ч.} \quad x^* \text{ - с.в соотв. } \lambda$$

$$\|x^*\| = 1$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ищем экстр. $f(x) = (Ax, x)$

$$\Rightarrow f(x^*) = (Ax^*, x^*) = (\lambda x^*, x^*) = \lambda \underbrace{(x^*, x^*)}_{=1} = \lambda$$

$\Rightarrow$ max и min знач. кв. ф. на ед. сфере равны

max и min с.ч. A

Опр

$$L \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \qquad (x, Ly) = (L^* x, y)$$

$$\text{Норма } L: \quad \|L\| = \max_{x \in S} \|L_x\|$$

$$f(x) = \|Lx\|^2_{x \in S} = (Lx, Lx) = (L^* Lx, x)$$

$$\|L\|^2 - \max \text{ с.ч. } (L^* L)$$

1 Теория функций компл. переменного

Напоминание

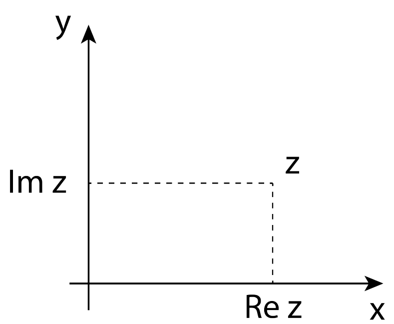
$$z = x + iy \in \mathbb{C} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$i^2 = -1$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\overline{z} = x - iy \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

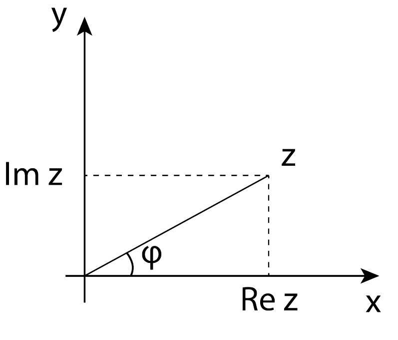


$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$k \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{z}{k} = \frac{x}{k} + i\frac{y}{k}$$

Сложение действует как на векторах, что с умножением?
Перейдем к полярной системе координат



$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

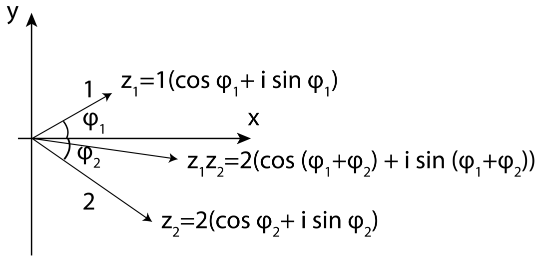
$$\operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$$

$$\operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$$

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$$

$$z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right) =$$
$$= |z_1|\,|z_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$



Теорема (Ф-ла Муавра)

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

Опр (н-во $\triangle$)

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Опр (н-во Коши)

$$z_j, w_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, ..., n$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j \cdot w_j\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$

Док-во

$$\overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} \qquad z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z \qquad z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$$

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j - \lambda\overline{w}_j|^2 = \sum |z_j|^2 + |\lambda|^2 \sum |w_j|^2 - 2\operatorname{Re}(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{\lambda} w_j)$$

$$\lambda = \frac{\sum z_j w_j}{\sum |w_j|^2}$$

$$0 \leqslant \sum |z_j|^2 + \frac{|\sum z_j w_j|^2}{(\sum |w_j|^2)^2} \cdot \sum |w_j|^2 - 2\operatorname{Re}\left[\frac{\sum \overline{z_j} \cdot \overline{w_j}}{\sum |w_j|^2} \sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right]$$

$$\text{hint: } [...] \leqslant \frac{|\sum z_j w_j|^2}{\sum |w_j|^2}$$

$$0 \leqslant \sum |z_j|^2 + \frac{|\sum z_j w_j|^2}{\sum |w_j|} - 2\frac{|\sum z_j w_j|^2}{\sum |w_j|^2}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2$$

Опр

Комплексная последовательность

$$c_n \in \mathbb{C}$$

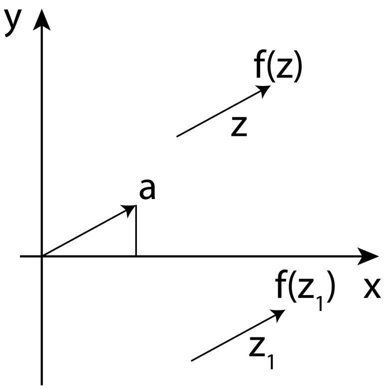
$$c_n = a_n + ib_n, a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

$$c_n \to c \in \mathbb{C} \Leftrightarrow |c_n - c| \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \to a \\ b_n \to b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ - сх. в себе}$$

при $n \to \infty$ т.е $\begin{matrix} \operatorname{Re} c_n \to \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c_n \to \operatorname{Im} c \end{matrix}$

Примеры **(функций к. п.)**

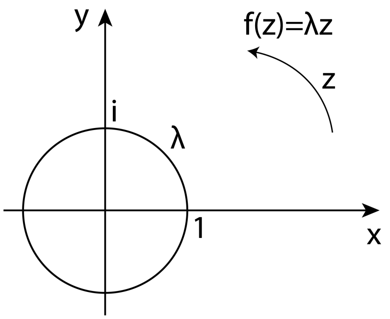
1. $\underset{\text{зафикс}}{a \in \mathbb{C}} \qquad f(z) = z + a \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
   парал. перенос вдоль вектора $\overline{a} = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} a)$



2. $\lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| = 1 \quad \lambda = \cos\Theta + i\sin\Theta \quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$f(z) = \lambda z = |z|(\cos(\varphi + \Theta) + i\sin(\varphi + \Theta))$$

Поворот вокруг O на угол Θ против часовой стрелки



3. $k \in [0, +\infty)$

$$f(z) = kz = k \cdot |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$|f(z)| = k|z|$$

Гомотетия с коэф. k

4. $f(z) = z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

$$z:\ |z| < 1 \qquad \Rightarrow z:\ |z| < 1$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

5. Инверсия (относительно ед. окружности)

   $$f(z) = \frac{1}{z} \qquad f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

   $$f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

   Какие точки останутся неподвижными? Их ровно две -1 и 1 $\left(z = \frac{1}{z}\right)$

6. Дробно-линейные отобр-я (преобр Мёбиуса)

   $$L(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (c,d) \neq (0,0)$$

   Если $c = 0,$ то L - афинное преобразование, т.е композиция гомотетий, поворотов и пар. переносов

   $$L : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}$$

   Если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0,$ то $L(z) = const$

   Доопр. инв. $f(z) = \dfrac{1}{z} \qquad f(0) = \infty \qquad f(\infty) = 0$

   L - доопределим

   $$L(-\frac{d}{c}) \qquad L(\infty) = \frac{a}{c}$$

   Тогда $L : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ - вз. однозн., если $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

   $$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

   $$czw + dw = az + b$$

   $$z(cw - a) = b - dw$$

   $$z = \frac{b - dw}{cw - a} \qquad \begin{vmatrix} -d & b \\ c & -a \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Сфера римана $\Leftrightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Утв

Если известно, что $L(z_1) = w_1 \qquad L(z_2) = w_2 \qquad L(z_3) = w_3$

$\Rightarrow$ можно восстановить дробно-лин. отобр L

$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \qquad w_1 \neq w_2 \neq w_3$

Опр

Обобщенная окр-ть = окр-ть или прямая

Утв (круговое св-во)

Дробно-лин отобр. переводит обощенные окр. в обобщ. окр.

Док-во

Дробно-лин. отобр - композиция

1. гомотетий
2. пар. переносов.
3. поворотов
4. инверсий

$1 - 3$ - переводят окр $\to$ окр $\qquad$ прямые $\to$ прямые

Надо разобраться, что делает инверсия с окр

$$\alpha \cdot |z|^2 + \beta \operatorname{Re} z + \gamma \operatorname{Im} z + \delta = 0$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$$

$\alpha = 0$ - прямые

$\alpha \neq 0$ - окружности

$$x^2 + y^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}y + \frac{\delta}{\alpha} = 0$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(y + \frac{\gamma}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{4\alpha^2} = 0$$

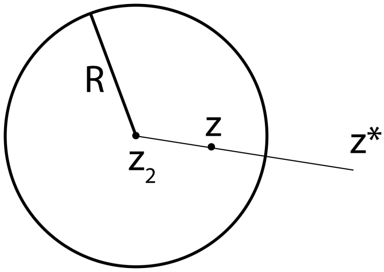
$$4\alpha\delta \leqslant \beta^2 + \gamma^2$$

$$z \to \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{|z|^2}$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{|z|^2} + \beta \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - \gamma \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} + \delta = 0$$

$$\alpha + \beta \operatorname{Re} z - \gamma \operatorname{Im} z + \delta \, |z|^2 = 0$$

$$4\alpha\delta \leqslant \beta^2 + \gamma^2$$

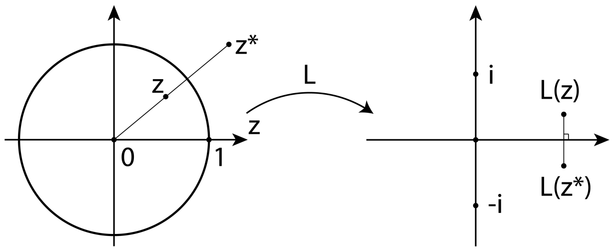


Опр (симметрия отн. окружности)

$$|z^* - z_0| \cdot |z - z_0| = R^2$$

z^* - симметрична z отн окр. $|z - z_0| = R$

Рассмотрим



$$z^* = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{z}{|z|}$$

$$L: \qquad L(y) = \frac{z+b}{cz+d}$$

$$L(0) = i \qquad L(0) = i = \frac{b}{d}$$

$$L(-1) = 0 \quad L(-1) = \frac{b-1}{d-c} = 0$$

$$L(1) = \infty \quad L(1) = \frac{1+b}{c+d} = \infty$$

$$b = 1 \qquad d = -i \qquad \frac{1+1}{c-i} = \infty \quad c = i$$

$$L(z) = \frac{z+1}{iz-i} = -i\frac{z+1}{z-1}$$

$$L(z) = -i\frac{z+1}{z-1}$$

$$L(z^*) = -i\frac{\frac{z}{|z|^2}+1}{\frac{z}{|z|^2}-1} = -i\frac{z+|z|^2}{z-|z|^2}$$

$$\overline{L(z)} = \overline{-i}\frac{(\overline{z}+1)^2 z}{(\overline{z}-1)^2 z} = i\frac{|z|^2+z}{|z|^2-z} = L(z^*)$$

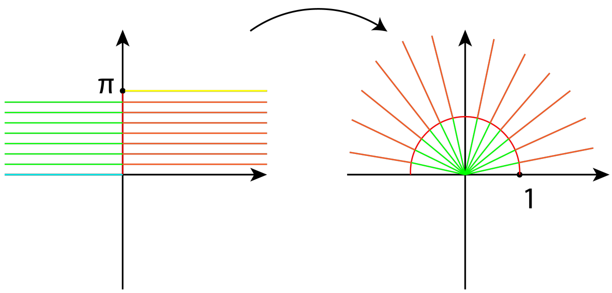
Пример

7) $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ (по ф. Эйлера)

$e^{iy} = \cos y + i\sin y$

$e^{i\pi} = -1$ Замечательная формула, которая связывает 3 числа

$(x, y) \xrightarrow{e^z} (e^x\cos y;\ e^x\sin y)$



$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 \leqslant x < \infty \end{cases} \xrightarrow{e^z} e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x \geqslant 1$$

$$\begin{pmatrix} x = 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi \end{pmatrix} \xrightarrow{e^z} e^0(\cos y + i\sin y)$$

$$\begin{cases} y = \pi \\ 0 \leqslant x < +\infty \end{cases} \xrightarrow{e^z} e^x\underbrace{(\cos\pi + i\sin\pi)}_{-1} = -e^x \leqslant -1$$

hint: "для понимания можно представлять это как веер"

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x(\cos(y+2\pi k) + i\sin(y+2\pi k)) =$$

$$= e^{x+i(y+2\pi k)} = e^{z+i\cdot 2\pi k}$$

Период e^z $\quad T = e\pi ki$