Пример

Докажите неприводимость над $\mathbb{Q}$ многочлена $x^5 + 4x^4 - 2x^2 - 3x + 1$

Док-во

Перейдем к Z. Привожимость над $\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ приводимости над $\mathbb{Q}$
Предположим, что f - приводимый
В доказательстве редукционного критерия (билет 33) у Всемирнова мы доказали, что если многочлен приводим над $\mathbb{Z}$ то он приводим над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p - простое. И раскладывается в произведение таких же степеней, что и в $\mathbb{Z}$. Значит если он разложился по-разному по двум разным модулям он неприводим.

Попробуем $\mod 2$:

$$f \overset{\mod 2}{=} x^5 - x + 1, \qquad f(0) = 1 \quad f(1) = 1$$

Не делится на линейные. То есть $f = g \cdot h \quad \deg g = 2, \quad \deg h = 3$

Попробуем $\mod 5$:

$$f \overset{\mod 5}{=} x^5 - x^4 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(4) = 4^5 - 4^4 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 = 1024 - 256 + 48 + 8 + 1 = 4 - 1 + 3 + 3 + 1 = 0$$

Делится на линейный. То есть $\widetilde{f} = \widetilde{g} \cdot \widetilde{h} \quad \deg \widetilde{g} = 1, \quad \deg \widetilde{h} = 4$

Разложился по разным степеням, ч.т.д.