2019-09-18

Напоминание

$$f : U \to \mathbb{R}^m, \quad a \in U, \quad f \text{ - диф в та} \Rightarrow$$

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

$$Mat\ (d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Якобиан - определитель матр. Якоби

Пример

$$f_1(\rho, \phi)$$

$$f(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi; \rho \sin \phi)$$

$$f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$J = d_{(\rho,\phi)} f = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\det(J) = \rho$$

Замеч

Но! из существования частной произв. (в общем случае) не следует диф-сть!

Пример

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

Частн. пр-ые в т. $(0, 0)$

$$f'_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x, 0) - f(0, 0)}{\triangle x} = 0$$

$$f'_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(0, \triangle y) - f(0, 0)}{\triangle y} = 0$$

Если бы f *- диф. в т.* $(0, 0)$, *то*

$$f(x, y) = f(0, 0) + (0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||f(x,y)-f(0,0)-(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}||}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

При $(x,y)=(t,t)$

$$\frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

частн. произв. $\exists$ *во всех т., но* f *разрывна в* $(0,0)$

3)

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1\cdot x_2 \\ x_1+2x_2 \end{pmatrix}$$

$$a=(1,-1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2$$

$$Mat(d_a f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$h = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ - *приращение*

$$d_n f(h) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$$

Опр

Пусть $m=1$

$f: U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad f$ - *диф. в* a

$d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ - *лин. ф*

$$Mat(d_a f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} ... \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

∇ - *"набла"*

Градиент f *в т.* a *(*f *диф в т.* a*)*

$$grad_a f = \nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})(a)$$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot h_k$$

<u>Теор</u> (Диф-ние композиции)

$$f : U \to \mathbb{R}^m; \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$$

$$g : V \to \mathbb{R}^k \qquad\qquad U, V \text{ - откр.}$$

f - *диф. в т.* $a \in U$

g - *диф. в т.* $f(a) = b$

Тогда $h = g \circ f$ - *диф. в т.* a, *причем*

$$d_a h = d_{f(a)} g \circ d_a f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$$

<u>Док-во</u>

$$A = d_a f; \quad B = d_b g \qquad f(x) = f(a) + A(x-a) + o||x-a|| \quad x \to a$$

$$r_f(x) = f(x) - f(a) - A(x-a) = o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$r_g(y) = g(y) - g(b) - B(y-b) = o||y-b|| \quad (y \to b)$$

...

$$r_h(x) = h(x) - h(a) - BA(x-a)? =?o||x-a|| \quad (x \to a)$$

$$g(f(a)) = h(a)$$

Хотим показать, что

$$r_h(x) = o(||x-a||) \quad x \to a$$

$$r_h(x) = \underbrace{g(f(x)) - g(b) - B(f(x)-b)}_{=r_g(f(x))} + B(f(x)-b) - BA(x-a) =$$

$$= r_g(f(x)) + B(\underbrace{f(x) - f(a) - A(x-a)}_{=r_f(x)})$$

$$r_h(x) = r_g(f(x)) + B(r_f(x)) \qquad ||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

$$||r_h(x)|| \leq ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)||$$

Пусть $\mathcal{E} > 0$

1. *(Из дф-сти g)* $\exists \delta > 0:$

$$\forall y : ||y-b|| < \delta \Rightarrow$$

$$r_g(y) < \mathcal{E} \cdot ||y-b||$$

2. $\exists \alpha:$

   (a) *(Из диф-сти f в т. a)*

   $$||r_f(x)|| < \mathcal{E}||x-a|| \forall x : ||x-a|| < \alpha$$

   (b) $\forall x : ||x-a|| < \alpha$

   $$||f(x)-f(a)|| < \delta \text{ (т.к. } f \text{ непр в т. } a) \qquad f(a) = b$$

Возьмем $x : ||x-a|| < \alpha \overset{2б}{\Rightarrow} ||f(x)-b|| < \delta \overset{(1)}{\Rightarrow} ||r_g(f(x))|| < \mathcal{E} \cdot ||f(x)-b||$

$$||f(x)-b|| = ||r_j(x) + A(x-a)|| \leq ||r_f(x)|| + ||A|| \cdot ||x-a|| \underset{2a}{<}$$

$$< \mathcal{E} \cdot ||x-a|| + ||A|| \cdot ||x-a||$$

$$||r_h(x)|| \leq ||r_g(f(x))|| + ||B|| \cdot ||r_f(x)|| < \mathcal{E}(\mathcal{E}||x-a|| + ||A|| \cdot ||x-a||) + ||B|| \cdot \mathcal{E}||x-a|| =$$

$$= (\mathcal{E}^2 + ||A||\mathcal{E} + ||B||\mathcal{E}) \cdot ||x-a||$$

Частные производные композиции (в усл. теоремы)

Теор

$$\frac{\partial (g \circ g)_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

$d_a g \circ f = d_{f(a)} g \circ d_a f \qquad$ *комп.* $\leftrightarrow$ *пр-ие матриц*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \dots & & \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial g_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

След (2)

$$U \subset \mathbb{R}^n$$

$f, g : U \to \mathbb{R}$ - *диф в т. a*

Тогда $d_a(fmulg) = f(a) \cdot d_a g + g(a) d_a f$

<u>Док-во</u>

1. *Пусть* $f = g \quad d_a f^2$

$$\phi(t) = t^2 \qquad d_t\phi(h) = 2t \cdot h$$

$$d_a f^2 = d_a \phi \circ f = d_{f(a)}\phi \circ d_a f$$
$$= 2f(a) \cdot d_a f$$

2. $d_a(f \cdot g) = d_a(\frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]) =$

$$= \frac{1}{4}[2(f(a)+g(a))d_a(f+g) - 2(f(a)-g(a))d_a(f-g)]$$

$$f(a)d_a g + g(a)d_a f$$

<u>След</u> (3)

$$f, g : U \to \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^m$$

f, g - диф. в т. $a \in U$

$(f; g)$ - ск. пр-ие:

Тогда $d_a(f, g) = (f(a); d_a g) + (d_a f; g(a))$

<u>Опр</u>

Вернемся к градиенту

$$f : U \to \mathbb{R}^1 \quad U \subset \mathbb{R}^n \qquad f \text{ - диф. в т } a \in U$$

$$d_a f(h) = (\nabla_a f; h)$$
$$\nabla_a f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$$

<u>Свойство</u> (геометрич. св-ва градиента)

1. *f возрастает в напр. h в т. a, если $(\nabla_a f; h) > 0$ и убывает, если $(\nabla_a f; h) < 0$ рисунок 1*

$$f(a + t \cdot h) = f(a) + (\nabla_a f; th) + o(||th||) \qquad o(||t - h||) = o(t)$$

Пусть $t > 0$

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \frac{t \cdot (\nabla_a f, h)}{t} + \frac{o(t)}{t} > 0$$

начиная с нек. числа $(\forall 0 < t < \delta)$

$$\overset{0<t<\delta}{\Rightarrow} f(a+th) > f(a)$$

2. *(Экстремальное св-во градиента)*
   Если $\nabla_a f \neq 0$, то направление наибольшего возрастания f совпадает с направлением градиента

$$||e|| = 1$$

$$|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = |d_a f(e)| = |(\overrightarrow{\nabla}_a f; \overrightarrow{e})| \leq$$
$$\leq ||\nabla_a f|| \cdot \underbrace{||e||}_{=1} = ||\nabla_a f||$$

   Если $e = \frac{\nabla_a f}{||\nabla_a f||}$ то $|\frac{\partial f}{\partial e}(a)| = ||\nabla_a f||$

3. $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad$ *f - диф в т. $a \in U$* $\qquad U \subset \mathbb{R}^n$
   Если a - т. локального экстремума $f \Rightarrow$

$$\overrightarrow{\nabla}_a f = \overrightarrow{0}$$

4. *Пусть $\Gamma_a = \{x \in U : f(x) - f(a)\}$*

   Тогда $\nabla_a f \perp \Gamma_a$

   Т.е. $\forall$ Гладкой кривой $\quad \gamma : [-1, 1] \to \Gamma_a$,

   проход. через т. a $\qquad (\gamma(0) = a)$

$$\gamma(t)' = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$ *- касат. вектор к Γ_a в т. a*

   Говорят, что $\overrightarrow{v}$ - ортог. Γ_a в т. a

   Если $\overrightarrow{v} \perp \gamma'(0)$ $\quad \forall$ гладкой кривой $\gamma : \gamma(0) = a$

Пример

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla_{(x,y,z)} f = (2x; 2y; 2z) = 2(x, y, z)$$

Опр

$f : U \to \mathbb{R}$; $\quad a \in U$ *- т. лок. макс. (минимума)*

Если $\exists V_a : \forall x \in V_a$

$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a))$

<u>Пример</u> (К свойствам)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$a(1, 1, 1)$$
$$\Gamma_a = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$$
$$\nabla_a f = 2(a1, a2, a3) = (2, 2, 2)$$

<u>Док-во</u>

$$\Gamma_a = \{x \in U \quad f(x) = f(a)\}$$

$$\gamma : [-1, 1] \to \Gamma_a \quad \gamma(0) = a$$
$$\underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{обычная ф-я 1 перем}} = f(a) \quad \forall t \in [-1, 1]$$
$$0 = d_0(\gamma(t)) = d_{\gamma(0)} f \circ d_0 \gamma = d_a f \circ \gamma'(0) =$$
$$= \nabla_a f \cdot \gamma'(0) \Rightarrow \nabla_a f \perp \gamma'(0)$$

Непрерывно дифференцируемые отображения

<u>Опр</u>

$$f : U \to \mathbb{R}^m \quad U \subset \mathbb{R}^n \quad a \in U$$

f - непр. диф в т. a, если

1. *Все частные производные определены в некоторой окрестности т. a*
2. *Непр. в т. a*

Говорят, что f - непр. диф. на U, если она непр. диф. в каждой точке

$$f \in C^1(U)$$

<u>Лемма</u> (т. о среднем)

$f : U \to \mathbb{R} \quad a \in U \subset \mathbb{R}^n,$ *Все частные пр-е определены в* $V_a \subset U$

$$\sqsupset h : a + h \in V_a$$

Тогда $\exists c^1, c^2, ..., c^k :$

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) \cdot h_k$$

Док-во *Рисунок 2 (куб и система коорд.)*

$$F_k(t) = f(a^{k-1} + t \cdot h_k e_k)$$

a^{k-1} - *т. ребра* $(a^{k-1}; a^k) \qquad o \le t \le 1$

$$F_k'(t) = f'_{x_k}(\underbrace{a^{k-1} + t \cdot h_k \cdot e_k}_{=a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_{k-1}+h_{k-1}, a_k+th_k})$$

По т. Лагранжа $\exists \xi^k \in (0,1)$

$$F_k(1) - F_k(0) = F_k'(\xi^k)(1-0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a^{k-1} + \xi^k h_k e_k)$$

$$c^k \in V_a$$

$$f(\underbrace{a+h}_{=a^n}) - f(\underbrace{a}_{=a^0}) = \sum_{l=1}^{n} f(a^k) - f(a^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F_k(1) - F_k(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_k) h_k$$

Теор (О непр. диф. отобр. в точке)

$$f : U \to \mathbb{R}^n \qquad U \in \mathbb{R}^n \quad a \in U$$

f - *непр. диф в т.* a

Тогда

1. f - *непр в* V_a
2. f - *диф в т.* a

Док-во (для m = 1)

f - *непр. диф. в т.* $a \Rightarrow$ *все частные произв. непр в* V_a

рисунок 3 (шарик)

$$\overline{B(x,\delta)} \subset V_a \qquad \forall x \in V_a$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{ - огр на } B(a,\delta)$$

$$\Rightarrow \exists\ M > 0 : |\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)| < M \qquad \forall x \in B(a,\delta)$$

$$|f(x+h) - f(x)| \overset{\text{Лемма}}{\Rightarrow} |\sum_{k+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k) h_k| \leq$$

$$\leq \sum |\frac{\partial f}{\partial x_k}(c^k)||h_k| < M \cdot \sum_{k=1}^{n} |h_k| \leq M \cdot n||h_k||$$

$x + h \in B(x, \delta)$

$||h|| \to 0 \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \to 0$

т.е. f - *непр*