

Практика по геометрии

(преподаватель Амрани И. М.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в [вконтакте](#)

Содержание

1	Дифференциальная геометрия	2
1.1	(03.09.2019) Кривые и поверхности	2
1.2	(01.10.2019) Первая и вторая фундаментальные формы .	3

1 Дифференциальная геометрия

1.1 (03.09.2019) Кривые и поверхности

Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^2, \text{ т.ч. } |\gamma(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Д-ть, что } \gamma'(t) \perp \gamma''(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Док-во

$$|\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} = 1 \Leftrightarrow \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1$$

$$(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle)' = (1)' \Rightarrow 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$$

Вообще очевидно, но если нет, то:

$$(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle)' = \left(\sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i^2 \right)' = \sum_{i=1}^3 2\dot{\gamma}_i \ddot{\gamma}_i = 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle$$

Пример

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^3, \quad |\gamma'| = 1, \quad \gamma'' \neq 0$$

$$T(t) = \gamma'(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t), \quad N(t) = \frac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$$

1. Д-ть, что $\{T(t), N(t), B(t)\}$ - ОНБ
2. Найти координаты $\frac{dT}{dt}, \frac{dN}{dt}, \frac{dB}{dt}$ в базисе $\{T, N, B\}$

Док-во

1. Очевидно, $B(t) = \underset{=1}{T} \cdot \underset{=1}{N} \sin \angle(T, N)$

$$T \perp N \text{ (по пред. задаче), } B \perp N, \quad B \perp T \text{ (по опр. вект. произв.)}$$

2. По определению "взятием производной" получаем:

$$\frac{dT}{dt} = 0T + |\ddot{\gamma}|N + 0B$$

$$\langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \frac{dT}{dt}, T \rangle + \langle N, \frac{dT}{dt} \rangle = 0$$

$$\text{Аналогично } 0 = \left\langle \frac{dT}{dt}, B \right\rangle = - \left\langle \frac{dB}{dt}, T \right\rangle$$

$$|\ddot{\gamma}| = \left\langle \frac{dN}{dt}, T \right\rangle = - \left\langle N, \frac{dT}{dt} \right\rangle$$

$$\frac{dN}{dt} = -|\ddot{\gamma}|T + 0N + \varphi(t)B$$

$$\frac{dB}{dt} = 0T - \varphi(t)N + 0B$$

1.2 (01.10.2019) Первая и вторая фундаментальные формы

F