2019-10-29

Теорема

$$L \text{ - самосопр. } \Rightarrow \exists e_1, ..., e_n \text{ - ортнорм. базис из с.в. } L$$

$$Lv = \lambda v$$

$$(u, v) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} (Lu, v) = 0$$

$$(Lu, v) = (u, L^* v) = (u, Lv) = (u, \lambda v) = \lambda(u, v) = 0$$

Тут мы должны задать вопрос.

Опр

$$A \text{ - эрмитова матрица}$$

$$\Rightarrow M \text{ - унитарная}$$

$$D \text{ - } \underset{\in \mathbb{R}}{\text{диагональная}} \ : A = MDM^{-1}$$

Теорема

$$A \text{ - эрмитов матрица}$$

Тогда условия равносильны

1. $\underset{x \neq 0}{\forall x \in \mathbb{C}^n} \qquad \underset{\in \mathbb{R}}{x^* A x} > 0 \qquad (x^* A x)^* = x^* A^* x = x^* A x$
2. Все с.ч. $A > 0$
3. Все гл. миноры $A > 0$ (критерий Сильвестра)
4. $\exists P$ - обратимое: $A = P^* P$

Если хотя бы одно из них выполняется, то матрица A - положительно опред.

Док-во

$$4 \to 1$$

$$A = P^* P$$

$$x^* A x = x^* P^* P x = (Px)^* (Px) = < Px, Px >$$

$$< a, b > = \sum a_i \overline{b}_i \quad \text{Стандартное эрмитово скал. произв. в } \mathbb{C}$$

$$2 \to 4$$

$$A = MDM^{-1} \quad M \text{ - унит} \quad D \text{ - диаг. } (\in \mathbb{R})$$

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \qquad A = (D^{\frac{1}{2}} M^*)^* (D^{\frac{1}{2}} M^*)$$

$$M \text{ - унитар } \Rightarrow M D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} M^* = MDM^{-1} = A$$

$$1 \to 2$$

$$Ax = \lambda x$$

$$\underbrace{x^* A x}_{>0} = x^* \lambda x = \lambda x^* x = \lambda \underbrace{< x, x >}_{>0}$$

$$1 \to 3$$

Нужно доказать, что все главные миноры больше 0

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A' & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = x'^* A' x' > 0 \quad \forall x' \neq 0$$

$$\Rightarrow A' \text{ уд первому условию, а еще 4 условию}$$

$$A' = P * P$$

$$\det A' = \det P^* \cdot \det P = \overline{\det P} \cdot \det P = |\det P|^2 > 0 \qquad \text{т.к. P обратим}$$

$$3 \to 2$$

Индукция по размеру A
Когда матрица 1×1 очев.
Инд. переход : $n \to n+1$
Пусть λ - с.ч A , $\quad \lambda < 0 \Rightarrow \exists \mu < 0$

$$Ax = \lambda x \qquad Ay = \mu y, \quad < x, y >= 0$$

Если λ и μ различные.
Если с.ч. различны, то им соотв. ортогон. с.в $\Rightarrow$ у эрмит. матр. ортогон с.в соотв. различным с.ч .

У эрмитовой матрицы существует онб из с.в - столбцов. В этом базисе будет два вектора, лежащие в одном подпр-ве.

Что такое собственное под-во?

Если λ и μ совпадают, то есть два неколл. с.в., мы можем их ортогонализировать

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \underbrace{\alpha x + \beta y}_{=u} = (u', 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$u'^* A' u' = u^* A u = |\alpha|^2 x^* A x + |\beta|^2 y^* A y =$ подставили u которое сверху

$$= |\alpha|^2 \underset{<0}{\lambda} \cdot \|x\|^2 + |\beta|^2 \underset{<0}{\mu} \|y\|^2 < 0$$

$$u'^* A' u' < 0$$

Если бы для матрицы A' выполнялось 3 условие, то должно было бы выполняться 2 условие, а 1 не выполняется, это значит, что 3 условие не вып. Все главные миноры A' - это в частности главные миноры A. А 3 выполняется для A. Мы получили противоречие.

Замечание

Все то же самое, можно доказать для симм. матрицы.
Пусть след. усл равносильны... для симм. матрицы над $\mathbb{R}$
Только тут будет P над $\mathbb{R}$

КАЖЕТСЯ, ТУТ ЧТО-ТО НЕ ТАК, ЭТО УЖЕ БЫЛО

Теорема

A - эрмит. матрица

тогда след. условия равносильны

1. $\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \underset{\in\mathbb{R}}{x^* A x} \geqslant 0$
2. Все с.ч. $A \geqslant 0$
3. Все гл. миноры $A \geqslant 0$
4. $\exists P : \qquad A = P^* P$

Такая матрица называется положительно полуопред.

Док-во

Доказать дома

Опр (Singular value decompostition SVD)

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists \underset{m\times m}{U}, \underset{n\times n}{V} \text{ - унитарные}, \quad S \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

S - диаг. насколько это возможно для прямоуг. матрицы, с неотр числами на диаг.

$$A = USV^*$$

Поворот, растяжение, поворот

Док-во

$$m \leqslant n$$

$$A^*A \text{ - эрмитова} \qquad (A^*A)^* = A^*A \text{ - proof}$$

$$x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) \geqslant 0$$

Значит эта матрица положительно полуопред.

$$\exists V \text{ - унитарная:} \quad V^*A^*AV = D' \text{ - диаг} \quad V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

т.к. эта матрица положительно полуопред., то у этой матрицы на диаг будут стоять неотр. с.ч. Переставим с.ч так, что сначала идут положительные, а потом нули

$$D' = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D \in M_k(\mathbb{R}) \quad m \geqslant n \geqslant k$$

$$V = (\underset{k \text{ столб}}{V_1} \quad \underset{n-k \text{ столб.}}{V_2}) \quad V_1 \in M_{n,k}(\mathbb{C}) \quad V_2 \in M_{n,n-k}(\mathbb{C})$$

$$D' = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix} A^*A \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*A^*AV_1 & V_1^*A^*AV_2 \\ V_2^*A^*AV_1 & V_2^*A^*AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*A^*AV_1 = D \\ V_2^*A^*AV_2 = 0 \Rightarrow AV_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*V_1 & V_1^*V_2 \\ V_2^*V_1 & V_2^*V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} V_1^*V_1 = E_k \\ V_2^*V_2 = E_{n-k} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} = V_1V_1^* + V_2V_2^* = E_n$$

$$U_1 \overset{\text{det}}{=} AV_1D^{-\frac{1}{2}} \in M_{m,k}(\mathbb{C})$$

$$U_1D^{\frac{1}{2}}V_1^* = AV_1D^{-\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}V_1^* = A - AV_2V_2^* = A$$