Практика по геометрии

(преподаватель Амрани И. М.)

Записал Костин П.А.

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вконтакте

Содержание

1 (03.09.2019) Кривые и поверхности

Пример

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^2,$ т.ч. $\quad |\gamma(t)| = 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$

Д-ть, что $\gamma'(t) \perp \gamma''(t) \; \forall t \in \mathbb{R}$

Док-во

$|\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{<\dot\gamma, \dot\gamma>} = 1 \Leftrightarrow <\dot\gamma, \dot\gamma> = 1$

$(<\dot\gamma, \dot\gamma>)' = (1)' \Rightarrow 2 <\dot\gamma, \ddot\gamma> = 0$

Вообще очевидно, но если нет, то:

$$(<\dot\gamma, \dot\gamma>)' = (\sum_{i=1}^{3} \dot\gamma_i^{\,2})' = \sum_{i=1}^{3} 2\dot\gamma_i \ddot\gamma_i = 2 <\dot\gamma, \ddot\gamma>$$

Пример

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in C^3, \quad |\gamma'| = 1, \quad \gamma'' \neq 0$

$T(t) = \gamma'(t), \quad B(t) = T(t) \times N(t), \quad N(t) = \dfrac{\gamma''(t)}{|\gamma''(t)|}$

1. Д-ть, что $\{T(t), N(t), B(t)\}$ - ОНБ
2. Найти координаты $\dfrac{dT}{dt}, \dfrac{dN}{dt}, \dfrac{dB}{dt}$ в базисе $\{T, N, B\}$

Решение

1. Очевидно, $B(t) = \underset{=1}{T} \cdot \underset{=1}{N} \sin\angle(T, N)$

   $T \perp N$ (по пред. задаче), $\quad B \perp N, \quad B \perp T$ (по опр. вект. произв.)

2. По определению "взятием производной" получаем:

   $\dfrac{dT}{dt} = 0T + |\ddot\gamma| N + 0B$

   $<N, T> = 0 \Rightarrow <\dfrac{dN}{dt}, T> + <N, \dfrac{dT}{dt}> = 0$

   Аналогично $0 = <\dfrac{dT}{dt}, B> = - <\dfrac{dB}{dt}, T>$

   $|\ddot\gamma| = <\dfrac{dN}{dt}, T> = - <N, \dfrac{dT}{dt}>$

   $\dfrac{dN}{dt} = -|\ddot\gamma| T + 0N + \tau(t) B$

   $\dfrac{dB}{dt} = 0T - \tau(t) N + 0B$

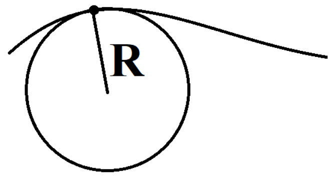
2 (10.09.2019) Задачи на кривые

Мы хотим найти τ через $\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}$

<u>Замечание</u>

На плоскоти в каждой точке гладкой кривой есть окружность, которая наилучшим образом приближает кривую

$$R = \frac{1}{|\ddot{\gamma}|}, \quad |\ddot{\gamma}| := æ \text{ - кривизна}$$



<u>Решение</u> (продолжение)

$$\tau =< \frac{dN}{dt},\ B >$$

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|}\right)' = \frac{\dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

$$\Rightarrow< \frac{dN}{dt},\ B >=< \frac{\dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|^2},\ \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{|\ddot{\gamma}|} >=$$

$$= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} < \dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}| - |\ddot{\gamma}|'\ddot{\gamma},\ \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} > \underset{\text{см. на N}}{=}$$

$$= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^3} < \dddot{\gamma}|\ddot{\gamma}|,\ \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} >= \frac{1}{|\ddot{\gamma}|^2} < \dddot{\gamma},\ \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} >= \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2}$$

<u>Пример</u>

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(t),\ 5 - 5\sin(t),\ -3\cos(t))$$

1. Найти æ и τ
2. Понять, что из себя представляет линия

Решение

1. Предыдущую задачу мы не можем просто так применить, потому что $|\dot{\gamma}| = 5 \neq 1$, но мы можем перепараметризовать:

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (4\cos(\frac{t}{5}),\ 5 - 5\sin(\frac{t}{5}),\ -3\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ -\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{5}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{4}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{5}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{3}{25}\cos(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{25}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{4}{125}\sin(\frac{t}{5}),\ \frac{1}{25}\cos(\frac{t}{5}),\ -\frac{3}{125}\sin(\frac{t}{5}))$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma})}{|\ddot{\gamma}|^2} = 25(\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma}) = 0$$

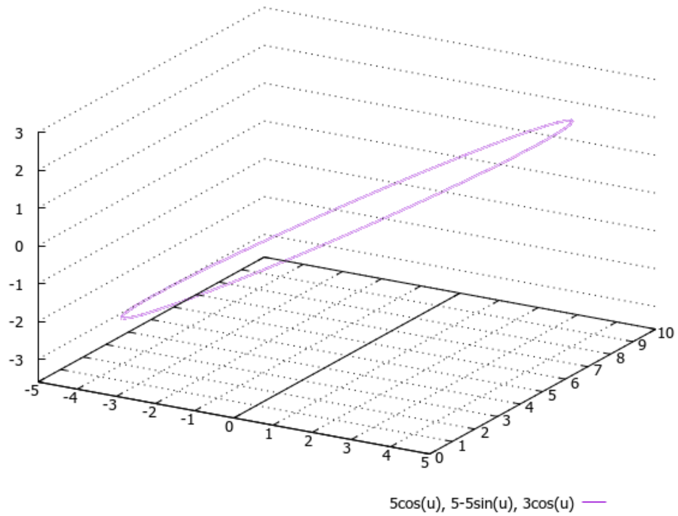
2. Наша линия находится на плоскости:

$$3x + 0y + 4z$$

И лежит на сфере:

$$x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 25$$

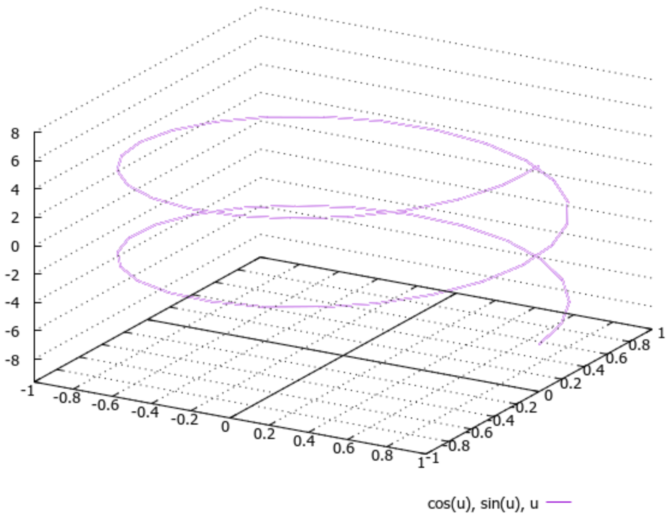
Значит она представляет из себя окружность, потому что есть разные точки



Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(t),\ \sin(t),\ t)$$

1. Построить график



2. Найти æ и τ

Решение

Аналогично $t \to \dfrac{t}{\sqrt{2}}$

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\Rightarrow |\dot{\widetilde{\gamma}}| = 1$$

$$\ddot{\widetilde{\gamma}} = (-\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\Rightarrow æ = |\ddot{\widetilde{\gamma}}| = \frac{1}{2}$$

$$\dddot{\widetilde{\gamma}} = (\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}),\ 0)$$

$$\tau = \frac{(\dot\gamma,\ \ddot\gamma,\ \dddot\gamma)}{|\ddot\gamma|^2}$$

$$(\dot\gamma,\ \ddot\gamma,\ \dddot\gamma) = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2}\sin(\frac{t}{\sqrt2}) & \frac{1}{\sqrt2}\cos(\frac{t}{\sqrt2}) & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{2}\cos(\frac{t}{\sqrt2}) & -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{\sqrt2}) & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt2}\sin(\frac{t}{\sqrt2}) & -\frac{1}{2\sqrt2}\cos(\frac{t}{\sqrt2}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}$$

3 (17.09.2019) Поверхности

Пример

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r(t),\ 0,\ z(t)),\ \text{где } r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Найти параметрищацию поверхности вращения вокруг OZ

Док-во

Из геометрических соображений: $(r(t)\cos\varphi,\ r(t)\sin\varphi,\ z(t)),\ \varphi \in [0,\ 2\pi]$
Более строго:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\alpha \\ r(t)\sin\alpha \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Опр

Гладкая двухмерная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

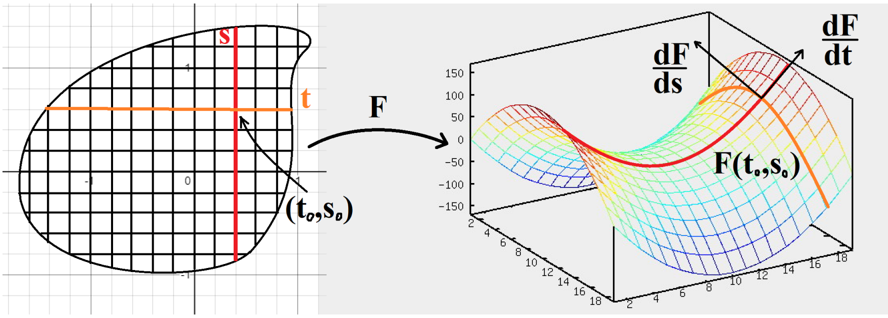
т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial S}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - непрерывные функции

Опр

Гладкая регулярная поверхность:

$$F : \underset{t,\ s}{\overset{\text{откр}}{U}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

т.ч. $\dfrac{\partial F}{\partial S}, \dfrac{\partial F}{\partial t}$ - линейно независимы
"регулярная = скорость не обнуляется"



4 (24.10.2019) Первая фундаментальная форма

Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\det \begin{pmatrix} < \dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial t} > & < \dfrac{\partial F}{\partial s}, \dfrac{\partial F}{\partial t} > \\ < \dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial s} > & < \dfrac{\partial F}{\partial s}, \dfrac{\partial F}{\partial s} > \end{pmatrix} =$$

$$=< \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial t} >< \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial s} > - < \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t} >< \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial s} >=$$

$$= \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 - \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \cos^2 t = \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right|^2 \left|\frac{\partial F}{\partial s}\right|^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right|^2$$

Замечание

$$A(S) = \sum A(\square)$$

$$A(\square) \approx \left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\right| \Delta t \Delta s$$

$$\mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} < \dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial t} > & < \dfrac{\partial F}{\partial s}, \dfrac{\partial F}{\partial t} > \\ < \dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial F}{\partial s} > & < \dfrac{\partial F}{\partial s}, \dfrac{\partial F}{\partial s} > \end{pmatrix}$$

$$A(S) = \iint \left|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial v}\right| dtds = \iint \sqrt{\det \mathrm{I}(F)} dtds$$

Пример

$$F : (0,\ 2\pi) \times (0,\ 2\pi) \to \mathbb{R}^3$$

$$(\theta,\ \varphi) \to (\cos\theta \sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ \sin\theta)$$

1. Доказать, что образ F находится на сфере радиуса 1
2. Найти S сферы через $\mathrm{I}(F)$

<u>Док-во</u>

1. Видно из параметрического уравнения сферы что это сфера, а также понятен радиус и её центр

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos\theta, \end{cases}$$

   где $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi)$ (у нас будет сдвиг на угол)

2. Найдем переменные для $\mathrm{I}(F)$:

$$< \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta = 1$$

$$< \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= \cos^2\theta$$

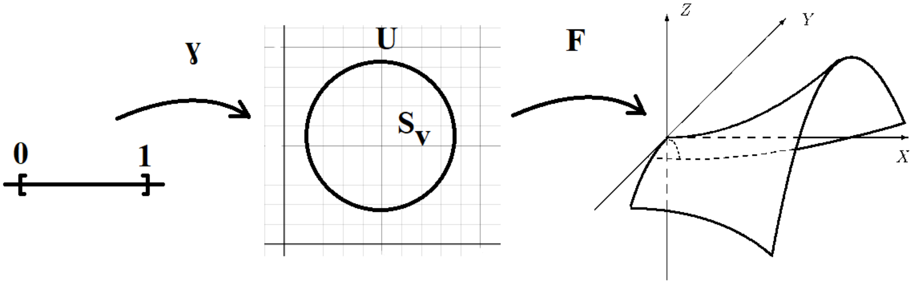
$$\Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint \sqrt{\det \mathrm{I}(F)} d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |\cos\theta| d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} 4 d\varphi = 4\pi$$

5 (01.10.2019) Ещё задача на $\mathbf{I}(F)$

Пример

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad C^1 \text{ регулярная}$$



Найти длину $\widetilde{\gamma} = F \circ \gamma$ через γ и $\mathrm{I}(F)$

Решение

$$l(F \circ \gamma) := \int_0^1 |F \circ \gamma(t)'| dt$$

$$\frac{d(F \circ \gamma(t))}{dt} = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{\text{вектор}} \overbrace{\dot{\gamma_1}(t)}^{\text{скаляр}} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{\gamma_2}(t) =$$

$$=< \frac{\partial F}{\partial x}\dot{\gamma_1}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{\gamma_2}(t),\ \frac{\partial F}{\partial x}\dot{\gamma_1}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{\gamma_2}(t) >=$$

$$=< \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x} > \dot{\gamma}_1^2(t) + 2 < \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} > \dot{\gamma_1}(t)\dot{\gamma_2}(t) + < \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y} > \dot{\gamma}_2^2(t) =$$

$$= (\dot{\gamma_1}, \dot{\gamma_2}) \mathrm{I}(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma_1} \\ \dot{\gamma_2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow l(F \circ \gamma) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{\gamma_1}, \dot{\gamma_2}) \mathrm{I}(F) \begin{pmatrix} \dot{\gamma_1} \\ \dot{\gamma_2} \end{pmatrix}} dt$$

6 (01.10.2019) Вторая фундаментальная форма

Опр

$$F : \underset{x,y}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad C^2 \text{ регулярная}$$

$$|\frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial F}{\partial y}| \neq 0$$

$$n := \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} \times \dfrac{\partial F}{\partial y}}{|\dfrac{\partial F}{\partial x} \times \dfrac{\partial F}{\partial y}|} \text{ - перп. обоим и по модулю 1}$$

$$L =< \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ n >, \quad M =< \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\ n >, \quad N =< \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ n >$$

$$\mathrm{II}(F) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

Замечание

$\mathrm{II}(F)$ говорит, какая ПВП лучше всего приближает в данной точке

Пример

Пусть есть сфера радиуса r:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \\ y = y_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \\ z = z_0 + R \cdot \cos\theta, \end{cases}$$

где $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ и $\phi \in [0,\ 2\pi)$

Найти $\mathrm{II}(F)$, $\mathrm{I}(F)$ и $\dfrac{\det(\mathrm{II})}{\det(\mathrm{I})}$

Решение

Посчитаем $\mathrm{I}(F)$:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (-r\sin\theta\cos\varphi,\ -r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-r\cos\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$< \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= r^2, \quad < \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= 0$$

$$< \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \theta} >= 0, \quad < \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} >= r^2 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{I}(F) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

Посчитаем $\mathrm{II}(F)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = (-r\cos\varphi\cos\theta,\ -r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi} = (r\sin\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = (-r\cos\theta\cos\varphi,\ -r\cos\theta\sin\varphi,\ 0)$$

<u>**Напоминание**</u> В правом ортонормированном базисе:

Если два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ представлены координатами

$$\overrightarrow{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z), \quad \overrightarrow{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z),$$

то их векторное произведение имеет координаты

$$[a,\ \overrightarrow{b}] = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать мнемонический определитель:

$$[a,\ \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$

$$\frac{\partial F}{\partial} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = (-r^2\cos^2\theta\cos\varphi,\ -r^2\cos^2\theta\sin\varphi,\ -r^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial F}{\partial} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|} = (-\cos\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$L =< \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2},\ \overline{n} >= r$$

$$M =< \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \varphi},\ \overline{n} >= 0$$

$$N =< \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2},\ \overline{n} >= r \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{II}(F) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det \mathrm{II}(F)}{\det \mathrm{I}(F)} = \frac{1}{r^2}$$ - кривизна Гаусса

Пример

Пусть $\gamma : t \to (t - \mathrm{th}(t),\ 0,\ \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}), \quad t > 0$

1. Найти S поверхности, полученной вращением γ вокруг OZ
2. Найти $\mathrm{II}(F)$, $\mathrm{I}(F)$ и $K = \frac{\det(\mathrm{II})}{\det(\mathrm{I})}$
3. Площадь S_F

Решение