2019-10-02

Напоминание

$$f \in C^m(U) \text{ тогда}$$

$$f(p+h) - T_m(f,p,h) = o(\|h\|^m) \quad h \to 0$$

Док-во

По ф-ле Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$f(p+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x_{i1} \dots \partial x_{ik}} h_{i1} \cdot \dots \cdot h_{ik} + R_m$$

$$(p+\xi h) h_{i1} \cdot h_{im} =$$

$$f \in C^m(U) \Rightarrow \frac{\partial^m f}{\partial x_{i1} \dots \partial x_{im} \text{ - непр в } U}$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_,=1}^{n} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i1} \dots \partial x_{im}}(p) + \alpha(h) \right) \cdot h_1 \dots h_m =$$

$$\frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i1} \dots \partial x_{im}}(p) \cdot h_1 \dots h_m + \frac{1}{m!} \sum_{i1,\dots,i_m=1}^{n} \alpha(h) \cdot h_{i1} \dots h_{im}$$

$$\frac{|R_m|}{\|h\|^m} \leqslant C \cdot \alpha(h) \to 0 \quad h \to 0$$

$$\frac{|h_{i1} \dots h_{im}|}{\|\|} \leqslant$$

т.е $R_n = o(\|h\|)$

Теорема (достаточные условие экстремума)

$$U \subset \mathbb{R}^n \quad f : \underset{\text{откр}}{U} \to \mathbb{R}^1 \quad a \in U$$

$$f \in C^2(U) \qquad a \text{ - критическая}$$

1. $d_a^2 f$ - полож. опр. кв. ф $\Rightarrow a$ - строгий лок. min
2. $d_a^2 f$ - отр. опр $\Rightarrow a$ - стр. max

3. $d_a^2 f$ - неопр $\Rightarrow$ в т. a нет экстрем

<u>**Док-во**</u>

$$p = a$$

$$f(p+h) = f(p) + \underset{=0}{d_p} f(h) + \frac{1}{2} d_p^2 f(h) + \frac{1}{2}\alpha(h)\cdot\|h\|^2 \qquad \alpha(h)\to 0$$

$$2(f(p+h) - f(p)) = d_p^2 f(h) + \alpha(h)\cdot\|h\|^2$$

$d_p^2 f$ на $S = \{h : \|h\| = 1\}$

Случай 1: $\exists \quad \underset{\text{непр как ф от h}}{d_p^2 f(h)} \quad > 0 \quad \forall h \neq 0$

$$m = \min_{h\in S} d_p^2 f(h) = d_p^2 f(\xi) \quad \xi \in S$$

$$M = \max_{h\in S} d_p^2 f(h) = d_p^2 f(\mu) \quad \mu \in S$$

$$d_p^2 f(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{h_i}{\|h\|}\frac{h_j}{\|h\|}\right)\cdot\|h\|^2 =$$

$$= \|h\|^2 d_p^2 f\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geqslant m\cdot\|h\|^2$$

Т.к. $\alpha(h)\to 0$ то

$$\exists \delta > 0 : \forall \|h\| < \delta \quad |\alpha(h)| < \frac{m}{2}$$

$$2(f(p+h) - f(p)) = d_p^2 f(h) + \alpha(h)\|h\|^2 = \|h\|^2\left(d_p^2 f\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\right) \geqslant \frac{m}{2}\cdot\|h\|^2 > 0 \quad \forall h$$

$$|\alpha| < \frac{m}{2}$$

т.е $f(p+h) > f(p)$

$\forall \|h\| < \delta$

т.о p - т. стр. лок min Случай 2: Аналогично
Случай 3:
$\exists m = \min_{\|h\|=1} d_p^2 f(h) = d_p^2 f(\xi) < 0$

$$M = \max_{\|h\|=1} d_p^2 f(h) = d_p^2 f(\mu) > 0$$

$$?\exists t : f(p+t\xi) < f(p)$$

$$f(p+t\mu) > f(p)$$

$$f(p-\underset{h}{t\cdot\xi}) - f(p) = t^2(d_p^2 f(\xi) + \alpha(h))$$

$$\exists\delta > 0 : \|h\| < \delta \Rightarrow |\alpha(h)| < \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow |t| < \delta \quad f(p+t\xi) - f(p) < 0 \quad \forall t \neq 0$$

Аналогично $\exists\widetilde{\delta} : \|h\| < \widetilde{\delta} \Rightarrow |\alpha(h)| < \frac{m}{2}$

$$f(p+t\mu) - f(p) > 0 \quad \forall h \neq 0$$

Пример

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad x > 0 \quad y > 0$$

$(x,y) = (1,1)$ - крит. точка

$$\begin{cases} f'_x = y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ f'_y = x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

$$f''_{xx} = \frac{2}{x^3} \quad f''_{xy} = 1 \quad f''_{yy} = \frac{2}{y^3}$$

$$d^2_{(1,1)}f(h) = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2$$

$$d^2_{(1,1)}f(h) > 0 \quad \forall h \neq 0$$

т.о $(1,1)$ - т. лок min

Теорема (Об обратном отображении)

A - лин отобр. $\quad A \in Ł(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Если A - обратмое отобр $\Rightarrow$?

$$m = n \quad \ker A = 0$$

$$\det A \neq 0 \quad A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$$

$f : U \to \mathbb{R}^m \qquad U \subset \mathbb{R}^n$ предпол., что f - диф на U

f - обратимо и f^{-1} - тоже диф-мо $\quad f^{-1} : f(U) \to U$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$d_x(f^{-1} \circ f) = d_{f(x)}f^{-1}\underset{A}{d_x f} = E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow n = m$$

$$f : \underset{\subset\mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^n$$

Теорема **(Об обратном отобр.)**

$$\exists \underset{\text{откр}}{U} \subset \mathbb{R}^n \quad f \in C^1(U) \quad a \in U$$

$d_a f$ - обратим. Тогда $\exists U_a \subset U$ (окр. т. a)

1. $f\big|_{U_a}$ - инъекция
2. $f(U_a)$ - откр. $\quad V = f(U_a)$
3. $f^{-1} \in C^1 \quad (V \to U_a)$
4. $d_{f(a)} f^{-1} \circ d_a f = E_n$

Пример

$n = 1$

$f(x) = x^2$

$a = -2$

$d_a f(h) = 2a \cdot h = -4h$ - обратим

$(d_0 f(h) = 0 \cdot h = 0$ - необр)

$\exists U_a = (-3; -1) : f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Лемма **(1 об операторе, близком к обратимому)**

$GL(n)$ - группа обратимых операторов

$\exists\ A \in GL(n)$

$B \in Ł(\mathbb{R}^n)$

$$\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Тогда

1. $B \in GL(n)$
2. отобр $A \to A^{-1}$ - непр (в операторной норме)

Док-во

$\alpha = \|A^{-1}\| \quad \beta = \|B - A\|$

$\|Ax\| = \|(A + B - B)x\| \leqslant \|Bx\| + \|(A - B)x\|$

$\|Bx\| \geqslant \|Ax\| - \|(A - B)x\|$

$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leqslant \underset{\text{норма оп.}}{\|A^{-1}\|} \underset{\text{норма вект}}{\|Ax\|} \Rightarrow \|Ax\| \geqslant \frac{1}{\alpha}\|x\|$

$\|Bx\| \geqslant \|Ax\| - \|(A - B)x\| \geqslant \frac{1}{\alpha}\|x\| - \beta\|x\| = (\frac{1}{\alpha} - \beta)\|x\| \quad (*)$

$\|Bx\| > 0$

т.е. инъекция $\Rightarrow B \in GL(n)$

$\|A^{-1} - B^{-1}\|$

$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$

$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| \cdot \|B^{-1}\|$

Из (1) $\Rightarrow \|Bx\| \geqslant (\alpha^{-1} - \beta) \cdot \|\underset{=B^{-1}(y)}{x}\|$

$\|By\| \geqslant (\frac{1}{\alpha} - \beta)\|B^{-1}y\|$

$\|B^{-1}y\| \leqslant \frac{\|y\|}{a - \beta} \qquad \frac{1}{\alpha} = a$

$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a - \beta}$

$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a} \cdot \beta \cdot \frac{1}{a - \beta}$

$\Phi(A) = A^{-1}$

Φ - непр в т. A

$\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \forall B : \|B - A\| < \delta \Rightarrow \|A^{-1} - B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a} \frac{\beta}{(a - \beta)} < \mathcal{E}$

a - фиксир

$\beta \to 0$

<u>Лемма</u> (2 об оценке приращ диф-мого отображения)

$U \subset \mathbb{R}^n$

$f : U \to \mathbb{R}^m \qquad f$ - диф на U

$\exists\ [a, b] \subset U$

Тогда $\exists\ \Theta \in (0, 1)$:

$c = a + \Theta(b - a)$

$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|d_c f\| \cdot \|b - a\|$

<u>Док-во</u>

$\varphi(t) = (f(a + t(b - a));\ f(b) - f(a))$ - скал. произв в $\mathbb{R}^n$

$t \in [0, 1] \quad \varphi : [, 1] \to \mathbb{R}$

Т. Лагранжа для функции φ

$\exists\ \Theta \in (0, 1)$:

$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\Theta) \cdot (1 - 0)$

$= \|f(b) - f(a)\|^2$

$|\varphi'(\Theta)| = |(d_c f(b - a);\ f(b) - f(a))| \overset{\text{КБШ}}{\leqslant}$

$c = a + \Theta(b - a)$

$\leqslant \|d_c f(b - a)\| \cdot \|f(b) - f(a)\| \leqslant \|d_c f\| \cdot \|b - a\| \cdot \|f(b) - f(a)\|$

$\Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leqslant \|d_c f\| \cdot \|b - a\|$

Договоримся использовать

$A = d_a f$

$$\lambda = \frac{1}{4\|A^{-1}\|}$$

<u>Лемма</u> (3)

Пусть $f \in C^1(U \to \mathbb{R}^n) \quad \underset{\text{откр}}{U} \subset \mathbb{R}^n \quad a \in U$

и $d_a f$ - обратим. Тогда $\exists U_a$:

1. $\forall x \in U_a \quad d_x f$- обр.

2. $\forall x,\ x+h \in U_a$

$$\|f(x+h)-f(x)-d_af(h)\| \leqslant 2\lambda\|h\| \quad (a)$$

$$\|f(x+h)-f(x)\| \geqslant 2\lambda\|h\| \quad (b)$$

<u>**Док-во**</u>

Т.к $f \in C^1(U) \Leftrightarrow df$ как отобр из U в $\text{Ł}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - непр

$\mathcal{E} = 2\lambda \Rightarrow \exists B_a : \forall x \in B_a \quad \|d_af - d_xf\| < 2\lambda$

По лемме об операторе близком к обратимому

$$(A \text{ - обр и } \|A-B\| \leqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow B \text{ - обр})$$

$$\|d_af - d_xf\| < 2\lambda < 4\lambda = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \Rightarrow d_xf \text{ - обратим}$$

$F(u) = f(u) - d_af(u)$

$\forall c \in B_a$

$\|d_cF\| = \|d_cf - d_af\| < 2\lambda \quad \forall c \in B_a$

$(a) \quad \|f(x+h)-f(x)-d_af(h)\| = \|F(x+h)-F(x)\| \leqslant (\text{л } 2)$

$\leqslant \|d_{x+\Theta h}F\| \cdot \|h\| < 2\lambda\|h\|$

$(b) \quad \|h\| = \|A^{-1}Ah\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|Ah\|$

$$\|Ah\| \geqslant \frac{\|h\|}{\|A^{-1}\|} = 4\lambda\|h\|$$

$\|Ah\| \leqslant \|f(x+h)-f(x)-Ah\| + \|f(x+h)-f(x)\|$

$$\|f(x+h)-f(x)\| \geqslant \|Ah\| - \|f(x+h)-f(x)-Ah\| \geqslant 4\lambda\|h\| - 2\lambda\|h\| = 2\lambda\|h\| \quad (b)$$

<u>**Док-во**</u> **(Теоремы об обратном отобр)**

1) B_a - из леммы 3 $\qquad U_a = B_a$

Уже знаем, что $\forall x \in B_a \quad \|d_xf - d_af\| < 2\lambda$

Из л.3 $\|f(x+h)-f(x)\| \geqslant 2\lambda \cdot \|h\| > 0 \qquad \forall h \neq 0$

т.е. f - инъекция

(пункт 1 доказан)

2) Докажем, что $f(B_a)$ - откр.

$V = f(B_a)$

Зафиксируем $y_0 \in V$

$y_0 = f(x_0) \quad x_o \in B_a$

$\exists r > 0 : \quad \overline{B(x_0, r)} \subset B_a \subset U$

Цель: $B(y_0, \lambda_r) \subset f(B(x_0, r))$

Рассмотрим $y \in B(y_0, \lambda_r)$

$\Phi(x) = \|f(x) - y\|^2 \qquad x \in \overline{B(x_0, r)}$

$\Phi(x_0) = \|\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} - y\|^2 < (\lambda r)^2$

Φ - непр на $\overline{B(x_0, r)}$

$\exists x_{\min} \in B(x_0, r) :$

$\min\limits_{B(x,r)} \Phi(x) = \Phi(x_{\min})$

Предпол, что $x_{\min} \in \partial B(x_0, r) \qquad (\|x_{\min} - x_0\| = r)$

$\sqrt{\Phi(X)} = \|f(x) - y\| > \underline{\|f(x) - y\| + \|f(x_0) - y\|} - \lambda r \geqslant$

$\|f(x) - f(x_0)\| - \lambda r \overset{\text{по л3(2в)}}{\geqslant} 2\lambda \|x - x_0\| - \lambda r$

При $x = x_{\min} \in \partial B(x_0, r)$

$\sqrt{\Phi(x_{\min})} > 2\lambda \cdot r - \lambda r = \lambda r \geqslant \sqrt{\Phi(x_0)}$

Противоречие ($\Phi(x_{\min})$ - не минимально)

$\Rightarrow x_{\min} \in B(x_0, r)$

$d_{x_{\min}} \Phi(h) = 2()$

$\Phi(x) = (f(x) - y; f(x) - y)$

$d_{x_{\min}} \Phi(h) = 2(d_{x_{\min}} f h; f(x_{\min}) - y) = 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$

т.к. $d_{x_{\min}} f$ - обратим $\Rightarrow d_{x_{\min}} f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$f(x_{\min}) - y \in (\mathbb{R}^n)^{\perp}$

т.о. $\exists x_{\min} \in B(x_0, r) \to f(x_{\min}) = y$

$\Rightarrow y \in f(B(x_0, r))$

3) $f\big|_{b_a}$ - биекция $\quad B_a \to V \Rightarrow \exists \underbrace{f^{-1}}_{=g} : V \to B_a$

$y, y + k \in V$

$y = f(x) \qquad x = g(y)$

$y + k = f(x + h) \quad x + h = g(y + k)$

Докажем непр на V $\quad \|\underbrace{g(y + k) - g(y)}_{=h}\| = \|h\| \leqslant \dfrac{1}{2\lambda}\|\underbrace{k}_{=f(x+h)-f(x)}\| \Rightarrow g$ - непр

$d_x f = A$

$k = f(x + h) - f(x) = Ah + \alpha(h)\|h\| \quad h \to 0$

$A^{-1}k = h + A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$

$g(y + k) - g(y) - A^{-1}k = -A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)$

$\|A^{-1}(\alpha(h)\|h\|)\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot |\alpha| \, \|h\| \leqslant$

$\leqslant \mathcal{E}\|A^{-1}\| \, |h| \leqslant \mathcal{E}\|A^{-1}\|\dfrac{1}{2\lambda}\|k\|$

т.о. $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{\|A^{-1}\|(\alpha\|h\|)}{\|k\|}$