Лекции по алгебре
(читает Роткевич А. С.)

Данный документ неидеальный, прошу сообщать о найденных недочетах в вк

Содержание

1. Функции от нескольких переменных

1.1. 02.09.2019.

Опр. $\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика, если

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

   (X, ρ) - метрическое пространство

Примеры.

1) $\mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |x - y|$
2) $x \neq \varnothing$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$
3) $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$, где $x = (x_1, ..., x_n)$ $y = (y_1, ..., y_n)$

Опр. $\rho_1, \rho_2 : X * X \to \mathbb{R}$ - метрики, тогда ρ_1, ρ_2 - эквивалентны, если (они задают одну топологию) ${}_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant c_2\rho_1(x, y)$ для $c_1, c_2 > 0$ - const

Пример. $\mathbb{R}^2$ $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leqslant \sqrt{2\rho_2^2(x, y)}$

$\rho_2(x, y) = max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ (упр.)

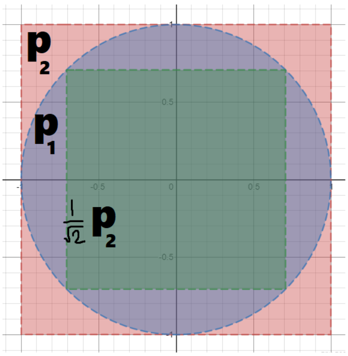
$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \rho_1(x, y)$

Пусть $\rho_3(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + ...|x - n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$

Если $p \to \infty$ $\rho_3 \to \rho_2$

$l_n^p = (\mathbb{R}^n, \rho_3)$ - пространство Лебега конечномерное

(упр.) Д-ть, что все метрики эквивалентны (ρ_1, ρ_2, ρ_3)



Опр. $\rho : X * X \to \mathbb{R}$ - метрика,

Открытым шаром в X относительно метрики ρ называется мн-во $B_r(x) = B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$

Замкнутым шаром называется $\overline{B}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leqslant r\}$

Сферой называется $S_r(x) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

Упр. Замкнутый шар - не всегда замыкание шара (см. дискретную метрику)

Пример. $l^p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ $1 \leqslant p < \infty$

$\rho(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$

l^p - пр-во Лебега (последовательностей)

Пример. $C[0, 1]$ - пр-во непр. функций

$\rho(f, g) = \max\limits_{[0,1]} |f - g|$ - полна (любая фундаментальная последовательность сходится)

$\rho_p(f, g) = (\int\limits_0^1 |f - g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ - не полная

Опр. (X, ρ) - метр. пр-во, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $a \in X$ $x_k \to a$ в пр-ве X по метрике ρ, если $\rho(x_n, a) \underset{k\to\infty}{\to} 0$

Примеры. $\mathbb{R}^2$ $M_k = (x_k, y_k)$ $P = (a, b)$ $M_k \to P$ в евкл. метрике, т.е. $\rho(M_k, P) = \sqrt{(x_k - a)^2 + (y_k - b)^2} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow x_k \to a,\ y_k \to b$

Замечание. Есть ρ_1, ρ_2 - экв. метрики, то $\rho_1(x_k, a) \to 0 \Leftrightarrow \rho_2(x_k, a) \to 0$

Упр. $x_k \to a,\ x_k \to b \Rightarrow a = b$

$(\rho(a, b) \leqslant \rho(a, x_k) + \rho(x_k, b) \to 0 \Rightarrow \rho(a, b) \to 0 \Rightarrow a = b)$

Опр. $E \subset X$, (X, ρ) - метр. пр-во, $a \in X$ - т. сгущ. E, если $\forall \mathcal{E}\ \exists x \in E : \rho(a, x) < \mathcal{E}$

Опр. $f : E \to Y$ (X, ρ), (Y, d) - метр. пр-ва $(E \subset X)$, a - т. сгущ. E, $A \in Y$, тогда A - предел отображения f в т. a, если $f(x) \to A$ при $x \in E \setminus \{a\} \to a$
(или $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : \rho(x, a) < \delta$ и $x \in E \subset \{a\}$, то $d(f(x), A) < \mathcal{E})$
Обозначение: $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $f(x) \to A$ $x \to a$

Замечание. $A = \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_{\mathcal{E}}(A)$

1.2. 05.09.2019. Будем в $\mathbb{R}^2$, $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Опр. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ - точка сгущения, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$, если $\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < \rho(x,a) < \delta,\ x \in E \Rightarrow |f(x) - A| < \mathcal{E}$

Работают: арифм. действия, теор. о двух миллиционерах, критерий Коши:

Опр. $f : E \to \mathbb{R}$, частный случай $\exists \lim\limits_{x\to a} f \Leftrightarrow \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \mathcal{E}$ $0 < \rho(x,a), \rho(y,a) < \delta$ (упр)

Упр. $\exists \lim\limits_{x\to a} f \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : x_n \neq a \quad x_n \to a\ (\rho(x_n,a)\to 0)\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ - предел функции в т. (x_0,y_0)

Пример. $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$, т.к.$|f(x,y)| \leqslant |x| + |y| \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\to} 0$, $\nexists \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to y} f(x,y)$

Пример.
$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ - не существует, так как $\lim f(x,x) = 1$, $f(x,2x) = 0$

Пример. Построить $f(x,y)$ т.ч. $\forall a,b\ \exists \lim\limits_{t\to 0} f(at,bt) = A$, но $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$

$f = \frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a}t \to 0$, но при $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{n}$ предел - единица

Замечание. Если $\gamma(t) \underset{t\to t_0}{a} \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\exists \lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma(t))$

Замечание. Если $\forall \gamma : \gamma(t) \to a \in \mathbb{R}^2$ и $\exists \lim f(\gamma(t))$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} f$

Замечание. $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ - не предел по кривой (из-за необязательного равенства предела и значения в пределе). Более формально: пусть $= \lim\limits_{x\to x_0} \overline{f}(x)$

$\overline{f}(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \neq$(не обязательно) $\neq f(x,y_0)$

Опр.
$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y) = A$, если $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : \forall x,y : \max(x,y) > M\ |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

Пример.
$f = \frac{y}{x}tg(\frac{x}{x+y})$ - не имеет предела, $f(x,x) = tg(\frac{1}{2})$, $f(x,x^2) = xtg(\frac{1}{1+x}) \to 0$

1.3. 09.09.2019.

Опр.

1) $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, если $\forall\mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : x > M\ y > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

2) $A = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f(x,y)$, если $\forall\mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : |x| > M\ |y| > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

3) $A = \lim\limits_{P\to\infty} f(P)\ P \in \mathbb{R}^2$, если $\forall\mathcal{E} > 0\ \exists M > 0 : \rho(0,P) > M \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

Замечание. Демидович по первым двум определениям

Опр. Для конечного предела: $A = \lim\limits_{x\to a\ y\to+\infty} f(x,y)$, если $\forall\mathcal{E} > 0 \quad \exists M > 0 \quad \delta > 0 : y > M \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \mathcal{E}$

Пример. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

Решение.
$\frac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2xy \leqslant x^2 + y^2 \Rightarrow 0 \leqslant (x-y)^2$ для $x \neq y$
Значит дробь стремится к 0

Пример. $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

Решение. При $x = y$ предел $\frac{1}{2}$
При $x = y^2$ предел 0

Пример. $f = sin(\frac{\pi y^2}{x^2+3y^2})$
Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} f$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f$, $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f$

Решение. Первый не имеет предела ($x = y$, $x = \sqrt{y}$). Второй $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Третий 0

Пример. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \frac{sin(y-x^2)}{y-x^2}$

Решение. $z = y - x^2$, $z \to 0 \Rightarrow x, y \to 0$
$|z| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$

Пример. $f = \frac{1-\sqrt[3]{sin^4 x + cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f$

Решение. $1 - \sqrt[3]{t} \underset{t\to 1}{} \frac{1-t}{3}$ (т.к. $1 - \sqrt[3]{t} = \frac{1-t}{1+\sqrt[5]{t}+\sqrt[3]{t^2}}$)

Значит $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{3}\frac{1-(sin^4 x + cos^4 y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2sin^2 y - sin^4 y - sin^4 x}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Заменим по Тейлору: $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2y^2 + \overline{o}(y^3) - x^4 + \overline{o}(x^6)}{3\sqrt{x^2+y^2}}$

Попробуем оценить по модулю $|\frac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}|$, заметим что $y^2 \leqslant x^2 + y^2$, $x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2 + y^2$ (для $x^2 + y^2 < 1$), чтобы избавиться от $\overline{o}$ оценим так: $\overline{o} + y^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, $\overline{o} + x^4 \leqslant 2(x^2+y^2) \leqslant x^2 + y^2$

Тогда $|\frac{2y^2-x^4}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leqslant 2\frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} \to 0$