2019-10-31

<u>Док-во</u>

$$\Theta \in < a, b > \quad \text{д-м } \varphi(\Theta) = \psi(\Theta)$$

От прот: пусть $\varphi(\Theta) \neq \psi(\Theta) \Rightarrow \Theta \neq t_0$

$(\varphi(t_0) = \psi(t_0) = x_0)$ НУО $\Theta > t_0$

$\Gamma_1 = \{(t, \varphi(t)) : t \in [t_0, \Theta]\}$

$\Gamma_2 = \{(t, \psi(t)) : t \in [t_0, \Theta]\}$

Γ_j - замк., огр. $(j = 1, 2)$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ - замк., огр.

$\Rightarrow X \in \mathrm{Lip}_x(\Gamma)$

$\exists L : \forall (t, \overline{x}), (t, \overline{\overline{x}}) \in \Gamma$

$\left|X(t, \overline{x}) - X(t, \overline{\overline{x}})\right| \leqslant L \left|\overline{x} - \overline{\overline{x}}\right| \qquad (\#))$

$\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{matrix}$ - реш. З.К. (1)(2) $\Rightarrow \begin{matrix} \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \\ \psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t X(\tau, \psi(\tau)) d\tau \end{matrix}$

$\forall t \in < a, b > \Rightarrow$ и $\forall t \in [t_0, \Theta]$

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant \int_{t_0}^t |X(\tau, \varphi(\tau)) - X(\tau, \psi(\tau))| \, d\tau \overset{(\#)}{\leqslant}$$

$$\leqslant L \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \, d\tau \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t) \qquad \forall t \in [t_0, \Theta]$$

$$u(\tau) \leqslant L \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \qquad (\text{Л. Гронуолла } c = 1)$$

Продолжение решений

<u>Пример</u> (1)

$$\dot{x} = x^2 + 1 \qquad \text{З.К.}(0, 0)$$

$$\frac{dx}{x^2 + 1} = dt$$

$\operatorname{arctg} x = t + c$

$x = \operatorname{tg} t$ реш З.К, опред на $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$

Пример (2)

$$\dot{x} = x^2 \qquad (0,1)$$

$$\frac{dx}{x^2} = dt$$

$$-\frac{1}{x} = t + c$$

$$x = -\frac{1}{t+c}$$

$$x = \frac{1}{1-t}$$

$$t \in (-\infty, 1)$$

Напоминание

$$(1) \qquad \dot{x} = X(t,x) \quad \begin{cases} X \in C(G) \\ X \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(G), \qquad \underset{\text{обл}}{G} \subset \mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$$

$x = \varphi(t)$ - реш (1), $\quad t \in (a,b)$

Опр

реш $x = \varphi(t), \quad t \in (a,b)$ продолжимо вправо за b

если $\exists$ реш (1) $\quad x = u(t)$, опред при $t \in (a, \bar{b}) \quad \bar{b} > b$,

такое, что $u(t) \equiv \varphi(t)$ на (a,b)

$u(t)$ называется продолжением решения $\varphi(t)$

Аналогично определяется продолжимость решения влево за a

Теорема

реш $x = \varphi(t) \quad (t \in (a,b))$ - продолжимо вправо за b

$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{t \to b-} \varphi(t) = \xi, \;$ и $(b, \xi) \in G$

Док-во

$\Rightarrow)\quad \exists$ реш $x = u(t) \qquad t \in (a, \bar{b})$

$\bar{b} > b, \quad u(t) \equiv \varphi(t) \quad$ на (a, b)

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to b-} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to b} u(t) = u(b), \quad (b, u(b)) \in G$

$\Leftarrow)\quad \varphi(b) = \xi$ - по непр

З.Коши $(b, \xi) \in G$

$\exists h > 0:$ на $[b-h, b+h]$ опред. решение (1) $\quad x = w(t): \quad w(b) = \xi$

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (a, b] \\ w(t), & t \in [b-h, b+h] \end{cases} \text{ - продолжение } \varphi(t)$$

Определено корректно, т.к. $\varphi(t) \equiv w(t)$ на $[b-h, b]$ (почему? А потому что они решают одну задачу Коши)

Максимальный промежуток задания решения

Теорема (2)

(1) $\quad \dot{x} = X(t, x)$

$x = \varphi(t)$ - реш (1), $\quad t \in (a, b) \quad$ (м.б $b = +\infty$)

$\Rightarrow \exists \beta \geqslant b : \exists$ реш (1) $x = u(t) : \varphi(t) \equiv u(t)$ на (a, b)

опред на (a, β) и не продолжимо вправо за β

Док-во

$b = +\infty \Rightarrow \beta = +\infty \Rightarrow$ все д-но

$\varphi(t)$ - не продолжимо вправо за $b \Rightarrow \beta = b \Rightarrow$ все доказано

Осталось: $b < +\infty$ и $\varphi(t)$ - продолжимо вправо за b

$B = \{\bar{b} : u(t)$ - продолжение $\varphi(t)$, опред на $(a, \bar{b})\}$

$\bar{b} \in B \quad$ и $\quad b < \Theta < \bar{b} \Rightarrow \Theta \in B$

$\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in B, \quad \bar{b}_1 < \bar{b}_2 \qquad u_{\bar{b}_1}, u_{\bar{b}_2}$ - соотв. прод-я $\varphi(t)$

$\Rightarrow u_{\bar{b}_1} \equiv u_{\bar{b}_2}$ на $(a, \bar{b}_1)$

$\beta = \sup B$

если $\beta = +\infty \Rightarrow$ все доказано

если $\beta < +\infty$

$\exists$ продолжение $\varphi(t)$ на (a, β), т.е. $u_\beta(t)$ - реш (1) опред на (a, β)

$(u_\beta(t) \equiv \varphi(t)$ на $(a, b))$

$t \in [b, \beta) \Rightarrow \exists \bar{b} \in B:$ опред-но $u_{\bar{b}}(t)$

Докажем, что $u_\beta(t)$ не продолжимо ща β вправо

$$\urcorner\exists \widetilde{\beta} > \beta : U_\beta(t) \text{ - продолжимо до } \widetilde{\beta} \Rightarrow \widetilde{\beta} \in B$$

Противоречит супремуму

Теорема **(2')**

Аналогично влево

Следствие

$\forall$ реш (1) $\quad x = \varphi(t),$ опред на (a, b)

$$\exists \begin{cases} \alpha \leqslant a \\ \beta \geqslant b \end{cases} : \quad \exists \text{ реш } (1) \quad x = w(t) : \quad w(t) \equiv \varphi(t) \text{ на } (a, b)$$

$w(t)$ опред на (α, β) и не продолжимо ни вправо за β ни влево за α

Док-во

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in (a, \beta) \qquad (\beta \text{ из } T_2) \\ v(t), & t \in (\alpha, b) \qquad (\alpha \text{ из } T_2') \end{cases}$$

$(u(t) \equiv v(t) \equiv \varphi(t)$ на $(a, b))$

Опр

промежуток (α, β) называется максимальным промежутком задания

Теперь мы рассматриваем решения с макс. промежутком задания.