1 Асимптотика частичных сумм расходящегося ряда (случай гармонического ряда). Постоянная Эйлера.

$$\frac{1}{1+k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}+1} < \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} \Rightarrow 0 < \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Значит,

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\big) < \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\big) =$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - ... + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n-1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow S_n := \sum_{k=1}^{n} \big(\frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k})\big) \nearrow \text{ и ограничено сверху} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = -\ln 1 + \cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 3} - ... - \cancel{\ln(n)} + \ln(n+1) =$$

$$= \ln(n+1) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n)$$

Опр

$\gamma := \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n) = 0,5722...$ - постоянная Эйлера

2 Несобственные интегралы. Примеры. Несобственный интеграл в смысле главного значения. Критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов.

Опр (1)

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in R[a, b]$ $\forall b \in (a, +\infty)$.

Если $\exists \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f$, то говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f \text{ - сходится и равен } \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f$$

Опр (2)

$f : [a, \omega) \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $f \in R[a, b]$ $\forall b \in (a, +\infty)$.

Если $\exists \lim\limits_{b\to\omega_-} \int\limits_a^b f$, то говорят, что несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f \text{ - сх и равен } \lim_{b\to\omega_-} \int\limits_a^b f$$

Опр (3)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\forall a < b \in \mathbb{R} : f \in R[a, b]$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f := \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f + \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b f$,

Если оба предела $\exists$ и конечны, то говорят что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f$ - сходится

Опр (4)

Аналогично $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}$, если $f \in R[a, b]$ $\forall [a, b] \subset (\omega_1, \omega_2)$. $\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f = \int\limits_{\omega_1}^{c} f + \int\limits_{c}^{\omega_2}$

Пример

1. $\alpha = 1$, $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = +\infty$ - расх

2. $\alpha > 1$, $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = 0 - \dfrac{1}{1-\alpha}$ - сх

3. $\alpha < 1$, $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ - расх

Пример

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{a\to0_-} \int\limits_{-1}^{a} \frac{dx}{x} + \lim_{b\to0_+} \int\limits_{b}^{1} \frac{dx}{x} \text{ - расх по опр, т.к. оба предела расх}$$

Опр

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $\forall a<b\in\mathbb{R}: f\in R[a,b]$, тогда (V.P.) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f := \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f$

Пример

$$(V.P.)\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} x = \lim_{A\to+\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-A}^{A} = 0$$

$$(\text{Но } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b x \text{ - расх})$$

Теорема (критерий Больцано-Коши для несобственных интегралов)

$$f:[a,\omega)\to\mathbb{R},\quad -\infty<a<\omega\leqslant+\infty,\quad f\in R[a,b]\quad \forall b\in(a,+\infty),\ \text{тогда:}$$

$$\int\limits_a^{\omega} f \text{ - сх } \Leftrightarrow\quad \forall\mathcal{E}>0\ \exists B\in(a,\omega):\forall b_1,b_2\in(B,\omega)\ |\int\limits_{b_1}^{b_2}| < \mathcal{E}$$

Док-во

$$\int\limits_a^{\omega} f$$

- сх $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{b\to\omega}\int\limits_a^b f \Leftrightarrow$ (кр Коши для пределов ф.)

$$\forall\mathcal{E}>0\ \exists\delta>0:\forall b_1,b_2\in(\omega-\delta,\omega)\ |\int\limits_a^{b_1} f - \int\limits_a^{b_2} f| < \mathcal{E} \Rightarrow |\int\limits_{b_1}^{b_2} f| < \mathcal{E}$$

3 Свойства несобственных интегралов (линейность, аддитивность, монотонность, формула Ньютона-Лейбница).

<u>**Свойство**</u> **(1, линейность)**

$$\int\limits_a^\omega f_1, \int\limits_a^\omega f_2 \text{ - сх } \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad \int\limits_a^\omega (k_1 f_1 + k_2 f_2) = k_1 \int\limits_a^\omega f_1 + k_2 \int\limits_a^\omega f_2$$

<u>**Свойство**</u> **(2, монотонность)**

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f, g \in R[a, b], \quad \forall b \subset [a, \omega), \quad f(x) \leqslant g(x),$$
$$\forall x \in [a, \omega) \Rightarrow \int\limits_a^\omega f \leqslant \int\limits_a^\omega g$$

<u>**Лемма**</u>

$$f : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b], \ \forall b \in (a, \omega).$$
$$\text{Пусть } c \in (a, \omega), \text{ тогда } \int\limits_a^\omega f \text{ и } \int\limits_c^\omega f \text{ - сх или расх одновременно}$$

<u>**Док-во**</u>

$$\int\limits_a^\omega f$$

- сх $\Leftrightarrow \lim\limits_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b f = A \in \mathbb{R}$

$$\text{Тогда } \int\limits_c^\omega f = \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_c^b f = \lim_{b \to \omega_-} (\int\limits_a^b f - \int\limits_a^c f) = A - \int\limits_a^c f \in \mathbb{R} \Rightarrow \int\limits_c^\omega f \text{ - сх}$$

<u>**Свойство**</u> **(3, аддитивность)**

$$f : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in R[a, b] \ \forall b \subset [a, \omega)$$

$$\forall c \in [a, \omega) \Rightarrow \int\limits_a^\omega f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^\omega f, \text{ причем } \int\limits_a^\omega f \text{ и } \int\limits_c^\omega f \text{ - сх или расх одновременно}$$

<u>Свойство</u> (4, формула Н-Л)

Если F - первообразная f, то:

$$\int\limits_a^{\omega} f = \lim_{b\to\omega_-}(F(b) - F(a)) =: F\Big|_a^{\omega_-} = F(\omega_-) - F(a)$$

<u>Свойство</u> (5)

$$\text{Если } f \in R[a,\omega]\ (\omega \in \mathbb{R}),\ \text{то (несоб. инт)} \int\limits_a^{\omega} f = \int\limits_a^{\omega} f \text{(инт Римана)}$$

<u>Док-во</u>

$f \in R[a,\omega] \Rightarrow F(x) := \int\limits_a^x f \in C[a,\omega]$,

(несоб. инт) $\int\limits_a^{\omega} f = \lim\limits_{b\to\omega} \int\limits_a^b f (= F(b)$ (непр. в т $\omega)) = F(\omega) = \int\limits_a^{\omega} f$ (инт Римана)

4 Свойства несобственных интегралов (интегрирование по частям, замена переменной).

<u>Свойство</u> (интегрирование по частям)

Пусть $f, g \in C^1[a, \omega), \quad \exists \lim\limits_{x \to \omega_-} f(x)g(x) \in \mathbb{R},$ тогда:

$$\int\limits_a^\omega f'g \text{ и } \int\limits_a^\omega fg' \text{ - сх или расх одновременно, причем}$$

$$\int\limits_a^\omega fg' = fg|_a^\omega - \int\limits_a^\omega f'g(fg|_a^\omega = \lim_{x \to \omega_-}(f(x)g(x) - f(a)g(a))$$

<u>Свойство</u> (замена переменной)

Если $\int\limits_a^\omega f$ - сх, $\quad \varphi : [\alpha, \upsilon) \to [a, \omega), \quad \varphi \in C^1[\alpha, \upsilon), \quad \varphi$ - монот.,

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \lim_{t \to \upsilon} \varphi(t) = \omega, \text{ тогда } \int\limits_a^\omega f = \int\limits_\alpha^\upsilon (f \circ \varphi)\varphi'$$

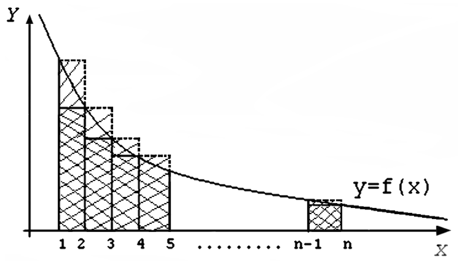
5 Интегральный признак Коши сходимости несобственных интегралов и рядов.

Теорема

Пусть $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f \in R[1, A]$ $\forall A > 1$, f - строго убывает (можно строго возрастает)

Тогда $\int\limits_1^\infty f$ и $\sum\limits_{n=1}^\infty f(n)$ - сх или расх одновременно, причем

$$\sum_{n=1}^\infty f(n+1) \leqslant \int_1^\infty f \leqslant \sum_{n=1}^\infty f(n)$$



Лемма

Если $f > 0$, $f \in [a, \omega] \to [0, +\infty)$, $f \in R[a, b]$ $\forall b \in (a, \omega)$

Тогда $\int\limits_a^\omega f$ - сх $\Leftrightarrow F(x) = \int\limits_a^x f$, $\exists M < \infty : F(x) \leqslant M$ $\forall x \in [a, \omega)$

Док-во

$(\Rightarrow)$ очевидно

$(\Leftarrow)$ почти очевидно, $f \geqslant 0 \Rightarrow F \nearrow$ и огр $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to\omega} F(x) = \int\limits_a^\omega f < +\infty$

Док-во

$f(n+1) \leqslant \int\limits_n^{n+1} f \leqslant f(n)$ (видно через суммы Дарбу) $| \sum\limits_{n=1}^N$

$\sum\limits_{n=1}^N f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{N+1} f \leqslant \sum\limits_{n=1}^N f(n)$, при $N \to +\infty$ получим наше уравнение

1) Если $\sum\limits_1^\infty f(n)$ - сх $\Leftrightarrow \sum\limits_1^N f(n) \leqslant A \in \mathbb{R} \Rightarrow F(N+1) = \int\limits_1^{N+1} f \leqslant A \in \mathbb{R}$ сх

2) Если $\int\limits_1^\infty f$ - сх $\Rightarrow \sum\limits_1^N f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{N+1} f \leqslant \int\limits_1^\infty f \in \mathbb{R}$ - огр $\Rightarrow \sum\limits_1^N f(n+1)$ сх

Примеры

1. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 0 - (-1)$ - сх

2. $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$. Сх. при $\alpha > 1$, расх. при $\alpha \leqslant 1$ (аналогично интегралу $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$)

6 Признаки сравнения для несобственных интегралов.

Теорема (I признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f, g \geqslant 0, \quad f, g \in R[a, b], \quad b \in (a, \omega),$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, \omega)$$

Тогда $\int\limits_a^\infty g$ - сх $\Rightarrow \int\limits_a^\omega f$ - сх ($\int\limits_a^\omega f$ - расх $\Rightarrow \int\limits_a^\infty g$ - расх)

Док-во

$$F(b) := \int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g \leqslant \int\limits_a^\omega g \in \mathbb{R}$$

То есть $\int\limits_a^\omega f$ - сх, т.к. $F \nearrow$ и огр сверху на $[a, \omega)$

Теорема (II признак сравнения)

$$f, g : [a, \omega) \to (0, +\infty)$$

, $f, g \in R[a, b]$ $\forall b \in (a, \omega)$Тогда если $\exists \lim\limits_{x \to \omega_-} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, то $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ - сх или расх одновременно

Док-во

$$k := \lim_{x \to \omega_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$$

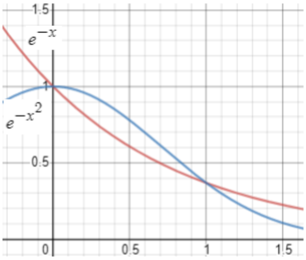
, $\mathcal{E} := \dfrac{k}{2}$

$$\Rightarrow \exists b \in (a, \omega) : \forall x \in (b, \omega) \ |\frac{f(x)}{g(x)} - k| < \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} < \frac{f(x)}{g(x)} < 3\mathcal{E}$$

То есть с некоторого места $f(x) \leqslant g(x)$, а так как $\int\limits_a^\omega = \int\limits_a^b + \int\limits_b^\omega$ и $\int\limits_a^b f, \int\limits_a^b g$ - конечные числа, то $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ - сх или расх одновременно по первому признаку

Пример

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}$$



$$e^{-x^2} \geqslant e^{-x} \Rightarrow x \in [0,1], \quad \int\limits_0^1 e^{-x} = \frac{1}{e} \underset{\text{по I пр. ср.}}{\Rightarrow} \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} \text{ - сх}$$

Пример

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx \text{ и } \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ - сх или расх одновр} \Rightarrow \text{сх}$$

7 Абсолютная и условная сходимость интегралов. Сходимость следует из абсолютной сходимости.

Опр

$f : [a, \omega) \to \mathbb{R},\ f \in R[a, b]\ \forall b \in (a, \omega)$

$\int\limits_a^\omega f$ - сх абсолютно $\Leftrightarrow \int\limits_a^\omega |f|$ - сх

$\int\limits_a^\omega f$ - сх условно $\Leftrightarrow \int\limits_a^\omega f$ - сх, $\int\limits_a^\omega |f|$ - расх

Утв

$\int\limits_a^\omega f$ - сх абсолютно $\Rightarrow$ сходится

Док-во

Пусть $\int\limits_a^\omega |f|$ - сх $\Leftrightarrow$ (кр. Больцано-Коши) $\forall \mathcal{E} > 0\ \exists A \in (a, \omega) : \forall b_1, b_2 \in (A, \omega)$

$|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f|| < \mathcal{E} \Rightarrow$ т.к. $|\int\limits_{b_1}^{b_2} f| \leqslant |\int\limits_{b_1}^{b_2} |f|| < \mathcal{E}$, то по кр. Б-К $\int\limits_{b_1}^{b_2} f$ - сх

Пример

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3)dx = \begin{vmatrix} x^3 = t \\ x = \sqrt[3]{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty} \cos t \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}\frac{\sin t}{t^{\frac{2}{3}}}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{9}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{9}\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}}$$

$$\text{Исследуем } \int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^{1} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} + \int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} :$$

$$\text{а) } \int\limits_0^{1} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}$$

, $|sint| \leqslant t$ на $[0, 1]$

$$\int\limits_0^{1} \frac{t}{t^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^{1} t^{-\frac{2}{3}} = 3t^{\frac{1}{3}}|_0^1 = 3 \text{ - сх} \underset{\text{по I пр ср}}{\Rightarrow} \int\limits_0^{1} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \text{ - сх}$$

$$\text{б) } \int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}}, \quad \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}}$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} = -\frac{3}{2}t^{-\frac{2}{3}}|_1^{\infty} = \frac{3}{2} \text{ - сх} \underset{\text{по I пр ср}}{\Rightarrow} \int\limits_1^{\infty} \frac{|\sin t|}{t^{\frac{5}{3}}} \text{ - сх}$$

$$\text{Значит } \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{5}{3}}} \text{ - абс сх } \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \cos(x^3) \text{ - сх}$$

8 Абсолютная и условная сходимость. Пример: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$

Определения и теорему см. в билете 27

Пример

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}$$

$$1) \quad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{-\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\infty - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}$$

Исследуем $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}$ на абс сходимость. $\frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{1}{x^2}$ - сходится

$\Rightarrow$ по 1 признаку сравнения $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}$ - сх $\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}$ - сх абс $\Rightarrow \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}$ - сх

$$2) \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x}$$

Знаем, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x} = 1$. Кроме того, $\frac{|\sin x|}{x} < 1$, значит на конечном промежутке $(0, \frac{\pi}{2}]$ интеграл конечный $\Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}$ - сх

3) Покажем, что $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\sin x|}{x}$ - расх. $\Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}$ - расх

$$|\sin x| \geqslant |\sin^2 x|, \quad \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin^2 x}{x} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dx}{x}(\text{расх}) + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos 2x}{x}(\text{сх})$$

9 Признаки Дирихле и Абеля для несобственных интегралов (док-во одного из них).

<u>Теорема</u> (признак Абеля-Дирихле)

$$f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}, \quad f \in C[a, \omega), \quad g \in C^1[a, \omega), \text{ g - монотонна.}$$

Тогда если выполнено одно из условий:

$$\text{(А)} \int_a^\omega \text{f - сх, g - огр}$$

$$\text{(Д)} \ F(x) := \int\limits_a^x \text{f - огр, } g(x) \underset{x \to \omega_-}{\to} 0$$

Тогда $\int\limits_a^\omega fg$ - сх

<u>Док-во</u>

(Д) без теоремы Бонне

$$|F(x)| \leqslant C : g(x) \underset{x \to \omega_-}{\to} 0$$

$$\lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b fg = \lim_{b \to \omega_-} (Fg|_a^b - \int\limits_a^b Fg') = F(a)g(a) - \lim_{b \to \omega_-} \int\limits_a^b Fg'$$

Исследуем интеграл на абс сходимость.

$$\int\limits_a^b |Fg'| \leqslant C \int\limits_a^b |g'| = \text{(т.к. g - монотонна)} C|\int\limits_a^b g'| = C|g(b) - g(a)| \underset{b \to \omega_-}{\to} C|g(a)|$$

Таким образом инт. ограничен $\Rightarrow$ изначальный сходится

10 Признаки Дирихле и Абеля для рядов (док-во одного из них).

Опр

$A_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ A_0 = 0$

Теорема **(преобразование Абеля)**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Док-во

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Теорема **(признак Дирихле для рядов)**

Пусть A_n - огр., $b_k \to 0$, b_k - монотонно. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх

Док-во

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ - сх $\Leftrightarrow$ все частичные суммы огр

$\sum\limits_{k=1}^{N} |A_k||b_k - b_{k+1}| \leqslant M \sum\limits_{k=1}^{N} |b_k - b_{k+1}| = M|b_1 - b_{N+1}| \leqslant 2M|b_1| \Rightarrow$ исх ряд сх

Теорема **(признак Абеля для рядов)**

Пусть A_n - сх. b_k - монотонно, b_k - огр. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сх