2019-10-28

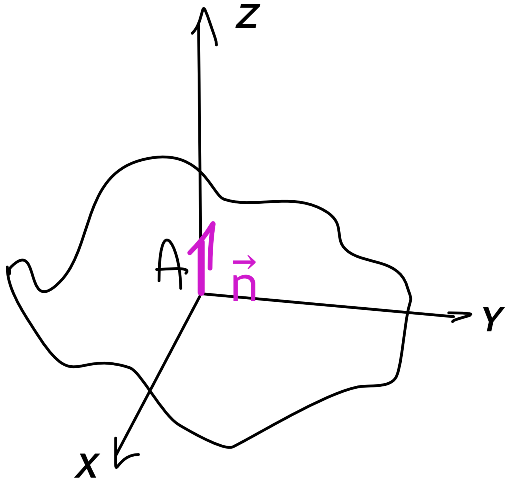
**Напоминание**

## 0.1 Соприкас. парабалоид

«Введем нового героя»

**Опр**

$A$ - точка на пов-ти




$\Rightarrow$ в окр. $A$ поверхность задается $z = f(x, y)$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \quad z_0 = f(x_0,\ y_0) = 0$

Разложим $z = f(x, y)$ по ф. Тейлора

$$z = f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y +$$

$$\frac{1}{2}(f_{xx}(x_0, y_0)x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0))xy + f_{yy}(x_0, y_0)y^2)$$

$$f_x(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 0$$

$$r(v, u) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \qquad r_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \qquad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}$$

$r_u$ и $r_v$ - лежат в кас. плоск, а это $OXY$

$$z = \underbrace{\frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2)}_{\text{пов-ть 2 порядка}} + o(x^2 + y^2)$$

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$z = Ax^2 + Cy^2$ можем поворотом привести к этому

Это может быть:
- эллиптич. параболоид А, С - одного знака
- гипербол. параболоид А, С - разных знаков
- параболический цилиндр $A = 0, \quad C \neq 0$ или наоборот
- плоскость А $=0$, С $=0$

**Опр**

Точка А наз. элиптической, если соприкас. параболоид - элипт.
А - гиперболическая, если соприкас параболоид - гиперб.
А - парабол., если соприкас параб - параб. цилинд или плоскость

**Опр**

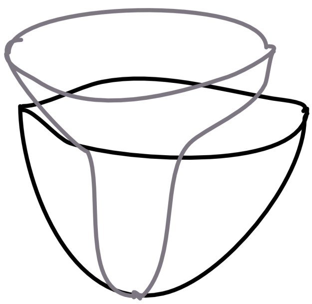
Точка А наз. точкой округления (омбилическая), если сопр. параб. - пар. вращения

**Опр**

Точка А - точка уплощения, если соприкас. параб - плоскость

**Теорема**

I и II формы в точке $A$ у поверхности и параболоида совпадают



В параметризации $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$

**Док-во**

очевидно
Давайте поймем, от чего зависят $E, F, G, ..., M, V$?
от $\overline{r}_u,\ \overline{r}_v,\ \overline{r}_{uu},\ \overline{r}_{uv},\ \overline{r}_{vv}$

**Следствие**

Норм. кривизны у поверх-ти и соприкас. параб совпадают

**Опр**

Главные кривизны $k_1$ и $k_2$

$\overrightarrow{a}$ - направление в кас. плоск

$\overline{k}_{\overrightarrow{a}}$ - нормальная кривизна

$k_{\overrightarrow{a}}$ - норм. кривизина в напр. $\overrightarrow{a}$

$\overline{k}_{\overrightarrow{a}} = k_{\overrightarrow{a}}\overline{n}$

$k_1 = \min\limits_{\overrightarrow{a}} k_{\overrightarrow{a}} \qquad k_2 = \max\limits_{\overrightarrow{a}} k_{\overrightarrow{a}}$

**Опр**

$\overrightarrow{a}_1$ и $\overrightarrow{a}_2$, соотв $k_1$ и $k_2$ наз. главными направлениями

**Утв**

$\overrightarrow{a}_1 \perp \overrightarrow{a}_2$(докажем позже)

**Опр**

$K = k_1 \cdot k_2$ - гауссова кривизна

«Главный герой всего нашего курса»

**Свойства**

$K > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ - эллипт типа
$K < 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ - гиперб. типа
$K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ - параб. типа

**Утв ("Блистательная теорема Гаусса")**

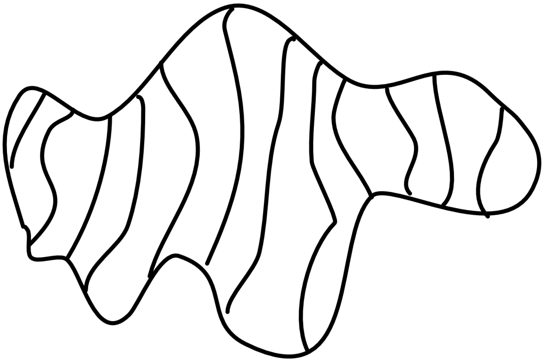
$K$ - инвариант относительно изометрии пов-ти

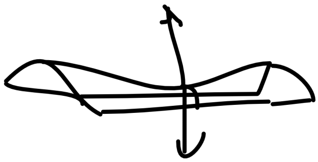
**Опр**

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \text{ - средняя кривизна}$$

Смысл: В мыльных пленках (незамкн.) средняя кривизна $= 0$

Пример: мыльная плёнка





**Теорема (Эйлера)**

$$k_{\overrightarrow{a}} = k_1 \cos^2 \Theta + k_2 \sin^2 \Theta$$

где $k_1, k_2$ - гл. кривизны, $\Theta$ - угол между напр. $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{a}_1$

**Док-во**

$z = Ax^2 + Cy^2$ - сопр. парабол.

$\overrightarrow{a} = (\cos\Theta;\ \sin\Theta)$ - направление

$$\begin{cases} x = t\cos\Theta \\ y = t\sin\Theta \\ z = Ax^2 + Cy^2 = t^2(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = \begin{cases} \cos\Theta \\ \sin\Theta \\ rt(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{cases}$$

$$r''(t) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ r(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{cases}$$

$$k = \frac{|r'(t_0) \times r''(t_0)|}{|r'(t_0)|^{3/2}}$$

$$t_0 = 0$$

$$r'(t_0) = \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ \cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |r'(t)| = 1$$

$$r''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta) \end{pmatrix}$$

$$|r''(t_0)| = 2\left|A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta\right|$$

$$r'' \perp r'$$

В данном случае $k = |r''(t_0)| = 2\left|A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta\right|$

$k_{\overrightarrow{a}} = \pm k \quad$ (от сонапр. с $\overrightarrow{n}$)

$$k_{\overrightarrow{a}} = 2(A\cos^2\Theta + C\sin^2\Theta)$$

Хотим теперь найти минимум и максимум этой штуки

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

$$z = Ax^2 + Cy^2$$

$$\frac{dk_{\overrightarrow{a}}}{d\Theta} =$$

Мы не хотим брать произв.

$$k_{\overrightarrow{a}} = 2(A\cos^2\Theta + C(1 - \cos\Theta)) = 2C + \cos^2\Theta(2A - 2C)$$

При $A = C \qquad$ A - точка округл.

$$\urcorner A > C$$

$\max k_{\overrightarrow{a}}$ достиг при $\Theta = 0 \quad$ (или $\pi$)

$$k_1 = 2C + 2A - 2C = 2A$$

$\min k_{\overrightarrow{a}}$ при $\dfrac{\pi}{2} \quad$ (или $-\dfrac{\pi}{2}$)

$$k_2 = 2C$$

**<u>Следствие</u> (1)**

Пов-ть задана ур-ем $z = f(x, y)$

$$f(0,0) = 0 \qquad f_x(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 0 \qquad f_{xy}(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = f_{xx}(0,0) \quad k_2 = f_{yy}(0,0)$$

(или наоборот мы рассматривали только $A > C$)

**<u>Следствие</u> (2)**

Главные напр $\perp$