

# Содержание

<b>1</b>	<b>Дифф. геом. кривых</b>	<b>2</b>
	Теорема о неявной функции . . . . .	2
	Свойства пределов . . . . .	3
	Гладкая кривая, регулярная кривая . . . . .	4
	<b>Ф-ма Тейлора</b>	<b>6</b>
	Длина кривой . . . . .	6
	Т. о длине кривой . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Репер Френе</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Вектор кривизны</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Формула Френе</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Вычисление кривизны кручения</b>	<b>16</b>
5.1	Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми . . . . .	18
5.2	Дополнение 2: натур. ур-я кривой . . . . .	20
5.3	Дифференциальная геометрия поверхностей . . . . .	22
5.3.1	Понятие поверхности . . . . .	22
5.3.2	Первая квадратичная плоскость . . . . .	25

Дифф. геометрия кривых (в  $\mathbb{R}^3$ ) и поверхностей (в  $\mathbb{R}^3$ ) 2019-09-09

## 1 Дифф. геом. кривых

### Опр

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  - вектор-функция. Образ  $f$  называется кривой, а  $f$  - параметризация этой кривой.

Способы задания кривых:

1. Параметрический  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

2. Явное задание кривой  $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$

(особенно хорошо на плоскости  $y = f(x)$ )

3. Неявное задание кривой (на плоскости)  $F(x, y) = 0$

### Пример

Окружность:  $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$  явное задание

рис3

### Теорема (о неявной функции)

$$F(x, y) = 0$$

$F$  - дифф ( $\exists \frac{\partial F}{\partial x}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y}$  - непр в окр  $(x_0, y_0)$ ),  $F(x_0, y_0) = 0$

Если  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \mathcal{E} > 0 \exists f : (x_0 - \mathcal{E}, x_0 + \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, f(x)) = 0$$

### Напоминание

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$y = f(x) \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Как задавать вектор-функцию?  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  - вектор-функция, тогда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta > 0 : \text{если } \rho(t, t_0) < \delta, \text{ то } \rho(f(t), (x_0, y_0)) < \mathcal{E}$$

$$(\rho(t, t_0) = |t - t_0|, \quad f(t) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2})$$

### Теорема (свойства пределов)

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \pm g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot g(t)) = (\lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)) - \text{скалярное умножение}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(x) \times g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x) \times \lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$$

### Док-во

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = (\lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t))$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\text{Пусть } \mathcal{E} > 0, \quad \text{выберем } \delta : |x(t) - x_0| < \frac{\mathcal{E}}{3}$$

$$\text{если } |t - t_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y(t) - y_0| < \frac{\mathcal{E}}{3} \\ |z(t) - z_0| < \frac{\mathcal{E}}{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{3}}$$

### Опр

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0}$$

### Теорема (свойства)

$$1. (f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm g'(t)$$

2.  $(cf(t))' = cf'(t)$
3.  $(f(t); g(t))' = (f'(t); g(t)) + (f(t); g'(t))$
4.  $(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$
5.  $(f(t), g(t), h(t))' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h')$

Доказывается через  $f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\begin{aligned}
 \text{Докажем ВП: } (f(t) \times g(t))'|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x) \times g(x) - f(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g(t) - f(t_0) \times g(t_0)}{t - t_0} \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(f(t) - f(t_0)) \times g(t)}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t_0) \times (g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = \\
 &= f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)
 \end{aligned}$$

### Пример

Контрпример

Т. Лагранжа - неверна рис 4

$$\int_b^a \vec{f}(t) dt = \left( \int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right)$$

$$\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$$

$$\vec{F}(b) - \vec{F}(a) = \int_a^b \vec{f}(t) dt$$

$$F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

$$f(t) = (X'(t), Y'(t), Z'(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left( \int_a^b x(t) dt, \dots \right) = (X(b) - X(a), \dots)$$

**Опр**

Гладкая кривая - образ вектороднозначной функции

**Опр**

Кривая называется регулярной, если существует производная и  $f'(t) \neq \vec{0}$

**Опр**

Кривая называется бирегулярной, если существует вторая производная и  $f''(t) \nparallel f'(t)$

**Опр**

Параметризации  $\vec{f}(t)$  и  $\vec{g}(t)$  эквивалентны

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Если  $\exists$  биекция  $\tau : [a, b] \rightarrow [c, d]$

$$\tau(a) = c; \quad \tau(b) = d :$$

$$f(t) = g(\tau(t)) \quad (\tau \text{ возрастает и гладкая})$$

**Лемма**

Эквив параметризаций - эквививалентность

**Док-во**

Докажем, что экв. параметризаций - отношение эквивалентности:

1. (рефл.)  $\tau = id$
2. (симм.)  $f(t) = g(\tau(t)), g(t) = f(\tau(t))$
3. (тран.)  $f(t) = g(b(t)), g(t) = h(\tau(t)), f(t) = h(\tau(b(t)))$

**Лемма**

$\vec{f}(t)$  - вектор-функция/ регуляря.

$$|\vec{f}(t)| = 1 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

**Док-во**

$$(f(t); f(t)) = 1$$

$$0 = (f(t), f(t))' = 2(f'(t), f(t))$$

$$f(t) \neq 0$$

$$f'(t) \neq 0 \rightarrow f'(t) \perp f(t)$$

2019-09-16

**Теорема (Ф-ма Тейлора)**

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{t}_0 + \vec{f}'(t_0)(t - t_0) + \frac{\vec{f}''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{\vec{f}^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n \\ \vec{g}(t) &= o(t - t_0)^n, \text{ если} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{g}(t)}{(t - t_0)^n} &= \vec{0} \end{aligned}$$

**Опр (Длина кривой)** рисунок 1 Пусть есть кривая  $\vec{f}(t), t \in [a, b]$ 

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

$$\text{а) } \sup \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

$$\text{б) } \lim_{\max_{i=1..n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0} \dots$$

-длина кривой

**Утв**

Оба определения эквивалентны

**Теорема**

$$S - \text{длина кривой} \Rightarrow S = \int_a^b |\vec{f}'(t)| dt$$

**Опр**

Кривая называется спрямляемой, если её длина конечна

**Замечание**Если  $|\vec{f}'(t)|$  - интегр.  $\Rightarrow$  кривая спрямляемая**Пример**

$$y = \sin \frac{1}{x} \quad (0, 1]$$

рисунок 2

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

рисунок 3

Док-во  $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$ ,  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $\Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1})$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \right| &\leq \left| \int_a^b |f'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=1}^n |f'(\tau_i)| \Delta_i t - \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right| = I + II \end{aligned}$$

$$II \leq \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| \Delta_i t - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^n ||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| \Delta_i t$$

$f'(t)$  - непр на  $[a, b] \Rightarrow$  равномерно непр. на  $[a, b]$  (т. Кантора)

$\forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0$ , если  $|\tau_i - \sigma_i| < \delta \Rightarrow |f'(\tau_i) - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$

$||f'(\tau_i)| - |f'(\sigma_i)|| < \mathcal{E}$ , если  $|\sigma_i - \tau_i| < \delta$

$$II \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{E} \Delta_i t = \mathcal{E}(b - a) \xrightarrow{\mathcal{E} \rightarrow 0} 0$$

$$||f'(\tau_i)| - |f(t_i) - f(t_{i-1})|| \leq ||f'(\tau_i)| - ||f(t_i)| - |f(t_{i-1})||$$

$$|f(t_i)| - |f(t_{i-1})| = |f(\sigma_i)| \Delta_i t$$

## Опр

Параметризация  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  называется натуральной, если  $|f'(t)| = 1$

## Теорема

Натуральная параметризация  $\exists$  и ед.

## Лемма

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  - монотонная биекция ( $\tau' > 0$ ), тогда  $f \circ \tau : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Длина кривой ( $f$ ) не зависит от перепараметризации ( $f \circ \tau$ )

## Док-во

$$\int_a^b |f'(t)| dt \stackrel{?}{=} \int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds$$

$$\int_c^d |(f \circ \tau)(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)| ds = \int_c^d |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \int_a^b |f'(t)| dt$$

$$t = \tau(s)$$

Док-во (Т)

Существование

Хотим подобрать  $\tau : |f'(\tau(s))| = 1$ 

$$\sigma(t) = \int_a^t |f'(s)| ds$$

$$\sigma : [a, b] \rightarrow [0, S]$$

 $S$  - длина кривой $\sigma$  - возрастающая и дифф. ( $\sigma'(t) = |f'(t)|$ ) $\sigma$  - биекция  $\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$ 

$$\begin{aligned} \int_0^t |(f \circ \tau)'(s)| ds &= \int_0^t |f'(\tau(s))| \cdot \tau'(s) ds = \\ &= \int_0^t |f'(\tau(s))| \frac{ds}{\sigma'(\tau(s))} = \int_0^t \frac{|f'(\tau(s))|}{|f'(\tau(s))|} ds = t \end{aligned}$$

Единственность

 $f(t)$  и  $g(t)$  - нат. параметризации

$$f, g : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f - g$$

$$\int_0^s |(f \circ g)(t)| dt = \int_0^s |f'(t) - g'(t)| dt \leq \int_0^s ||f'(t)| - |g'(t)|| dt = 0$$

Примеры

$$1. y = y(x)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)} dx$$



2.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$s = \int_a^b \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} dt$$

3.  $r = r(\varphi)$ 

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi \\ y' = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi \end{cases}$$

$$\left| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= \sqrt{r'^2 + r^2}$$

$$S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

## 2 Репер Френе

### Опр

$$\vec{v} = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

$\vec{v} = f'(t)$  - если парам. натуральн.

$v$  - касательный вектор

Опр Прямая, содержащая  $\vec{v}$  наз. касательной к  $\vec{f}(t)$  в точке  $t_0$

$$\overrightarrow{f(t_0)} + \vec{f}'(t_0) \cdot (t - t_0) = \vec{g}(t)$$

$\vec{g}(t)$  - ур-е касат. прямой

Нормальная плоскость

$$f'(t_0) \cdot (\vec{h} - \vec{f}(t_0)) = 0$$

**Теорема**

$\delta$  - расстояние от  $f(t)$  до касат. прямой

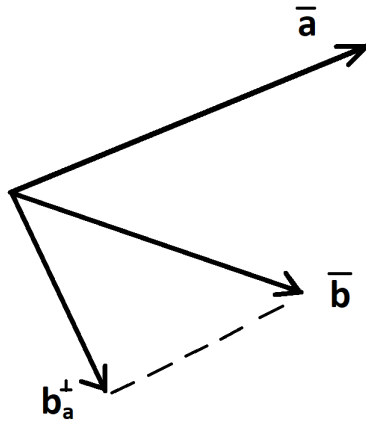
$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|} = 0$$

Касательная прямая единств. с таким свойством

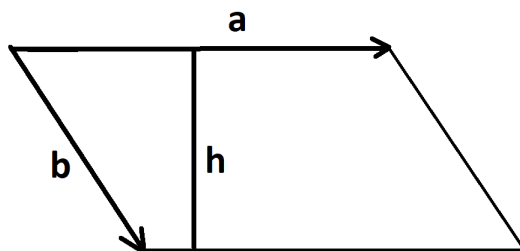
2019-09-23

Напоминание

$$\begin{aligned}
& \left| \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum \|f(t_i) - f(t_{i-1})| - |f'(\tau_i)\Delta t_i| \right| \leq \\
& \leq \sum \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t)| dt - \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(\tau_i)| dt \right| = \\
& \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(t) - f'(\tau_i)| dt < \sum \mathcal{E} \Delta_i t = \mathcal{E}(b-a) \\
& \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ если } f_i - f_{i-1} < \delta \\
& \Rightarrow |f'(t) - f'(\tau_i)| < \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Лемма

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \text{Pr}_a b + b \frac{1}{a} \\
\overrightarrow{\text{Pr}_a b} &= \frac{(a, b)}{|a|^2} \vec{a} \\
\left| b \frac{1}{a} \right| &= \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|a|}
\end{aligned}$$



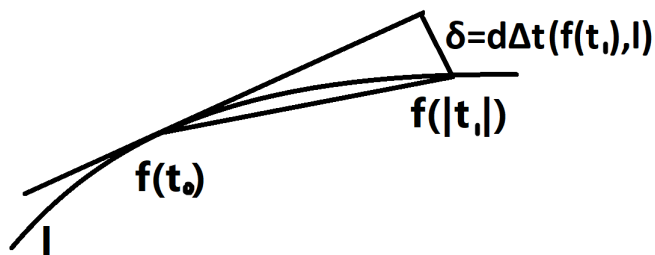
### ДОК-ВО

$$h = \frac{S}{|a|}$$

$$\frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|a|^2} = b \frac{1}{a}$$

$(a, b, a \times b)$  - прав. тройка

$(a \times b, a, b)$  - прав. тройка



### Теорема

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t_1) - f(t_0)|} = 0$$

$$\vec{f}'(t_0) \Rightarrow \text{по лемме}$$

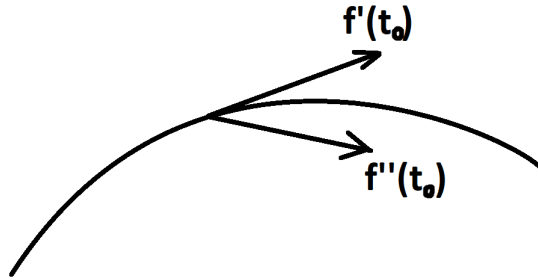
$$\delta = \frac{|f'(t_0) \times (f(t_1) - f(t_0))|}{|f'(t_0)|}$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\delta}{\underbrace{|f(t_1) - f(t_0)|}_{\vec{a}(t_0)}} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{|f'(t_0) \times \vec{a}(t_1)|}{|f'(t_0)| \cdot |a(t_1)|}$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\left| f'(t_0) \times \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \right|}{\left| f'(t_0) \cdot \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \right|} = \frac{f'(t_0) \times f'(t_0)}{|f'(t_0)|^2} = 0$$

$\Leftarrow$  очев

### 3 Вектор кривизны



#### Опр

$$g(\varphi(t)) = g(s) = f(t) \quad s = \varphi(t)$$

$$\vec{f}'(t) = (g(\varphi_i t_i))' = \vec{g}' \cdot \varphi'(t)$$

$$\vec{v}(t_0) = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} \quad \vec{n} : |\vec{n}| = 1; \quad \vec{n} \perp \vec{v}$$

$$n \in \langle f', f'' \rangle \quad \vec{n} \text{ и } \vec{f}'' \text{ в одной полуплоскости } f'(t)$$

$$\vec{v}'(t) \perp \vec{v}(t)$$

$$\vec{v}'(t) = k \cdot \vec{n}$$

$$|\vec{n}| = 1 \quad k(t) - \text{кривизна кривой} \quad k(t) \geq 0 \text{ в точке } t$$

$$\vec{n} - \text{вектор главной нормали}$$

$$\vec{v} - \text{касат. вект}$$

#### Утв

$$f(t) - \text{натуральная парам.}$$

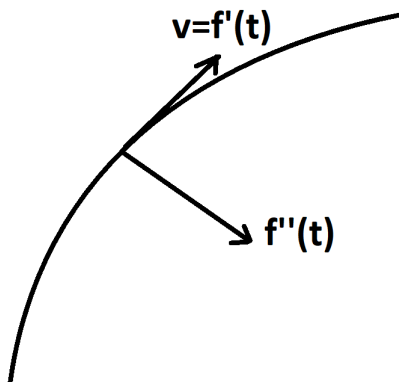
$$|f'(t)| = 1 \Rightarrow v = f'(t)$$

$$f''(t) = k \vec{n}$$

$$\vec{n} = \frac{f''(t)}{|f''(t)|}$$

$$k = |f''(t)|$$

рисунок 5 (центростр. ускорение)



$f(t)$  - любая параметризация,  $g(s)$  - натур. парам.

$f(t) = g(\varphi(t))$       $s = \varphi(t)$  - нат. парам

$$s = \underbrace{\int_a^t (f'(\tau)) d\tau}_{=\varphi(t)}$$

$$f'(t) = g'(s) \cdot \varphi'(t)$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= (g'(\varphi(t)))' \cdot \varphi'(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) = \\ &= \underbrace{g''(s) \cdot \varphi'^2(t)}_{\perp \vec{v}} + \underbrace{g'(s) \varphi''(t)}_{\|g'(s)=v} \end{aligned}$$

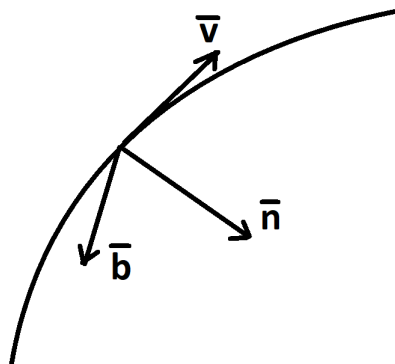
### Теорема

Плоск. на вект  $f'(t)$  и  $f''(t)$  не зависит от параметризации

### Опр

Эта плоскость (на вект.  $\vec{v}$  и  $\vec{n}$ ) наз. соприкасающейся плоск.

## 4 Формула Френе



### Опр

$\vec{b} = \vec{v} \times \vec{n}$  - вектор бинормали

$(\vec{v}, \vec{n}, \vec{b})$  - базис Френе

Трёхвекторник Френе или ренер Френе

$$\vec{v}' = k \cdot \vec{n}$$

$$b' \perp b$$

$$b' = (\vec{v} \times \vec{n})' = \underbrace{\vec{v}' \times \vec{n}}_{=0} + \vec{v} \times n' \perp \vec{v}$$

$$\vec{v}' = k \vec{n}$$

$$\Rightarrow b' \parallel \vec{n} \Rightarrow b' = -\kappa \cdot \vec{n} \text{ - капа}$$

$\kappa$  наз. кручением кривой

### Теорема

$$\kappa = 0 \Leftrightarrow \text{Кривая плоская}$$

$$\text{Кривая плоская} \Leftrightarrow \text{она лежит в плоск } \langle v, n \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{нормаль к } \langle v, n \rangle \text{ постоянна} \Leftrightarrow b = \text{const} \Leftrightarrow b' = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$$

$$n' = (\vec{b} \times v)' = b' \times v + b \times v' = -\varkappa n \times v + k \cdot b \times n =$$

$$\varkappa \cdot \vec{b} - k \vec{v}$$

$$v' = kn$$

$$n' = -kv + \varkappa b$$

$$b' = -\varkappa n$$

	v	n	b
v'	0	k	0
n'	-k	0	$\varkappa$
b'	0	$-\varkappa$	0

## 5 Вычисление кривизны кручения

### Теорема

$$k = \frac{|f'(t) \times f''(t)|}{|f'(t)|^3}$$

### Док-во

$$g(s) - \text{нат. парам } f(t) = g(\varphi(t)) \quad s = \varphi(t) \quad \varphi(t) = \int_a^t |f'(\tau)| d\tau$$

$$g'(s) = \vec{v} \quad g''(s) = k \vec{n} \quad \varphi'(t) = |f'(t)|$$

$$f''(t) = g''(s) \cdot \varphi^2(t) + g'(s) \cdot \varphi''(t) = k \cdot \vec{n} \cdot |f'(t)|^2 + v \cdot \varphi''(t)$$

$$f''(t) \times f'(t) = k |f'(t)|^2 \cdot \vec{n} \times f'(t) + 0 = \quad v'(t) = |f'(t)| \vec{v}$$

$$k \cdot \vec{n} \times \vec{v} |f'(t)|^3$$

$$|f''(t) \times f'(t)| = k |f'(t)|^3$$

$$k = \frac{|f''(t) \times f'(t)|}{|f'(t)|^3}$$



2019-09-30 Вычисление кручения

### Напоминание

$$(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) = (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c} + \alpha \vec{a})$$

$$k = \frac{|f' \times f''|}{|f'|^3}$$

### Теорема

$g(s)$  - нат. парам., тогда:

$$\kappa = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

### Док-во

$$g'(s) = \vec{v} \quad |\vec{v}| = 1$$

$$g''(s) = v' = k \vec{n}$$

$$g'''(s) = kn' = k(-k \vec{v} + \kappa \vec{b}) = -k^2 \vec{v} + \kappa k \vec{b}$$

$$(g', g'', g''') = (\vec{v}; k \vec{n}; -k^2 \vec{v} + \kappa k \vec{b}) = (v; kn; \kappa kb) = \kappa k^2$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{(g', g'', g''')}{k^2}$$

### Теорема

$f(t)$  - парам  $(\forall)$ , тогда:

$$\kappa = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}$$

### Док-во

$f(t)$  - парам  $(\forall)$

$$S = \psi(t) = \int_a^t |f'(\tau)| d\tau \quad g(s) - \text{нат. парам}$$

$$\psi'(t) = |f'(t)|$$

$$g(S) = g(\psi(t)) = f(t)$$

$$f'(t) = g'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) = g'(s) \cdot |f'(t)|$$

$$\begin{aligned}
 f''(t) &= g''(\psi(t))(\psi(t))^2 + g'(\psi(t))\psi''(t) = g''(s) \cdot |f'(t)|^2 + g'(s) \cdot \psi''(t) \\
 f'''(t) &= g'''(\psi(t))(\psi'(t))^3 + g''(\psi(t)) \cdot 3\psi'(t)\psi''(t) + g'(\psi(t)) \cdot \psi'''(t) \\
 (f', f'', f''') &= (\vec{f}'(s) \cdot |f'(t)|; \vec{g}''(s) |f'(t)|^2, g'''(s) \cdot |f'(t)|^3) = \\
 &= (g', g'', g''') \cdot |f'(t)|^6 \\
 \kappa &= \frac{(g', g'', g''')}{k^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f'(t)|^6} \cdot \frac{|f'(t)|^6}{|f' \times f''|^2} = \frac{(f', f'', f''')}{|f' \times f''|^2}
 \end{aligned}$$

### Пример

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

$$y = f(x) \quad \vec{f} = (x; f(x); 0) \quad \vec{f}' = (1; f'(x); 0) \quad f'' = (0; f''(x); 0)$$

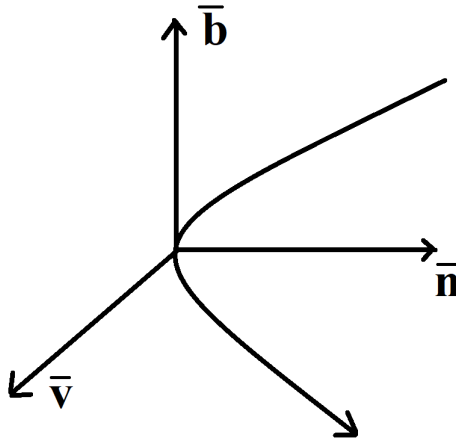
$$f''' = (0; f'''(x); 0)$$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

$$f' \times f'' = (0; 0; f''(x))$$

$$\kappa = 0$$

## 5.1 Дополнение 1: плоскости, связ. с кривыми



## Опр

Соприкас плоскость :  $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

Нормальная плоскость кривой :  $\langle n, b \rangle$

Спрямяющая плоскость :  $\langle v, b \rangle$

## Теорема

$\vec{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t))$  ур-е нормали плоск.

$$\vec{v} \parallel f'(t) = (f'_1, f'_2, f'_3) \quad f'_1(t_0) \cdot (x - f_1(t_0)) + f'_2(t_0) \cdot (y - f_2(t_0)) + f'_3(t_0) \cdot (z - f_3(t_0)) = 0$$

$$f' \times f'' \parallel b$$

так как л.н.

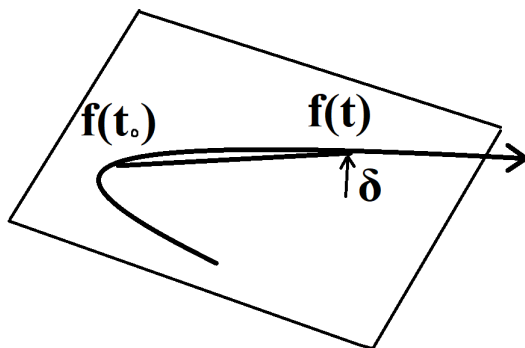
$$(f'_1, f'_2, f'_3) \times (f''_1, f''_2, f''_3) = (f'_2 f''_3 - f'_3 f''_2; f'_3 f''_1 - f'_1 f''_3; f'_1 f''_2 - f'_2 f''_1)$$

Соприкас плоск.

$$\begin{vmatrix} f'_1(t_0) & f'_2(t_0) & f'_3(t_0) \\ f''_1(t_0) & f''_2(t_0) & f''_3(t_0) \\ x - f_1(t_0) & y - f_2(t_0) & z - f_3(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

$$(f'(t_0) \times f''(t_0)) \times f'(t_0) \parallel \vec{n}$$

Ур-е спрям. плоск - УПР



## Теорема

$\delta$  - расст. от  $f(t)$  до соприкас. плоскости

Если плоскость явл. соприкас., то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\delta}{|f(t) - f(t_0)|^2} = 0$$

Плоскость с таким соотношением ед.

Док-во Условия достигаются за счет подходящей системы координат

- a)  $f(t_0) = (0, 0, 0)$
- b)  $OX \parallel \vec{v}(t_0)$
- c)  $OY \parallel \vec{n}(t_0)$
- d)  $t_0 = 0$
- e)  $t$  - нат. параметр
- б, в  $\Rightarrow OZ \parallel \vec{b}(t_0)$

$$f(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t)) \Rightarrow \delta = |f_3(t)s|$$

Соприкас  $z = 0$

$$\vec{v} \parallel f' = (f'_1, f'_2, f'_3) \parallel OX \Rightarrow f'_2(0) = 0, \quad f'_3(0) = 0 \quad f'_1(0) \neq 0$$

$$\vec{n} \parallel f'' = (f''_1, f''_2, f''_3) \parallel OY \Rightarrow f''_1(0) = 0; \quad f''_3(0) = 0$$

Следует из пункта е)

$$\text{Хотим } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f_3(t)|}{|f(t)|^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_3(t)}{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'_3(t)}{2f_1(t)f'_1(t) + 2f_2(t)f'_2(t) + 2f_3(t)f'_3(t)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f''_3(t)}{f_1'^2(t) + f_1(t)f''_1(t) + f_2(t)f''_2(t) + f_3'^2(t) + f_3(t)f''_3(t)} \end{aligned}$$

Все кроме первого слагаемого в знаменателе стремятся к 0, числитель тоже стремится к 0. Замечание. Можно было разложить  $f_1, f_2, f_3$  по Тейлору. Можно зачеркнуть пункт д(е)) и  $f''_1(0) = 0$

## 5.2 Дополнение 2: натур. ур-я кривой

Теорема

$g_1(s)$  и  $g_2(s)$  - нат. парам. двух кривых

$k_1(s) \quad k_2(s)$   
 $\mathfrak{a}_1(s) \quad \mathfrak{a}_2(s)$  - кривизны и кручения

Если  $k_1(s) = k_2(s)$   
 $\mathfrak{a}_1(s) = \mathfrak{a}_2(s) \Rightarrow$  кривые наклад. при движении пр-ва

# Док-во

$v_1(s), n_1(s), b_1(s)$  - базис Френе I кривой

$v_2(s), n_2(s), b_2(s)$  - базис Френе II кривой

Считаем  $v_1(s_0) = v_2(s_0)$

$n_1(s_0) = n_2(s_0)$

$b_1(s_0) = b_2(s_0)$

В данной точке базисы кривой одинаковы, а дальше возможно не совпадают. Почему не может?

$$h(s) = \vec{v}_1(s) \vec{v}_2(s) + \vec{n}_1(s) \vec{n}_2(s) + \vec{b}_1(s) \vec{b}_2(s) \quad h(s_0) = 3$$

$$h'(s) = v_1'v_2 + v_1v_2' + n_1'n_2 + n_1n_2' + b_1'b_2 + b_1b_2' =$$

По формуле Френе

$$= \underline{k_1 n_1 v_2} + \underline{k_2 v_1 n_2} + (\underline{-k_1 v_1} + \underline{\varkappa_1 b_1}) n_2 + n_1 (\underline{-k_2 v_2} + \underline{\varkappa_2 b_2}) - \underline{\varkappa_1 n_1 b_2} - \underline{\varkappa_2 b_1 n_2} = 0$$

$$\Rightarrow h(s_0) \equiv 3$$

$$\Rightarrow v_1 \equiv v_2 \quad n_1 \equiv n_2 \quad b_1 \equiv b_2$$

2019-09-30

### 5.3 Дифференциальная геометрия поверхностей

#### 5.3.1 Понятие поверхности

Пример (способы задания поверхностей) 1.  $z = f(x, y)$  - явное задание

2.  $F(x, y, z) = 0$  - неявное задание

Теорема (о неявной функции)

$$F(x, y, z) = 0, \quad F - \text{непр. дифф.}, \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists f(x, y) : F(x, y, f(x, y)) = 0 \text{ в некоторой окр.}$$

Опр

$$D \subset \mathbb{R}^2, \quad \forall (u, v) \in D, \quad \bar{r} -$$

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad \bar{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Пример

$$z = f(x, y)$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Координат. линии поверхности:

$$u = u_0 \quad \bar{r}(u, v) - \text{кривая}$$

$$\bar{r}(u, v) - \text{другое семейство}$$

Замечание

Линии перпендикулярны

Опр

Перепараметризация биекция

Опр

Параметризация называется регулярной, если

$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$  и  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$  не перпендикулярны ни в одной точке

$$(\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq 0)$$

Опр

Кривая лежит на поверхности, если все её точки лежат на поверхности

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{r} = (x(u(t), v(t)), y(\dots)\dots)$$

Опр

Вектор называется касательным, если он является касательным к кривой на поверхности

Теорема

Если поверхность регулярная  $\Rightarrow$  касательные векторы образуют плоскость

Опр

Касательная плоскость - плоскость из касательных векторов

Док-во

Базис:  $\frac{\partial r}{\partial u} A$  и  $\frac{\partial r}{\partial v} A$

$$\begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 = u_0 \\ v = t \end{cases} \quad \bar{r}(t) = (x(t_0, v_0), y(t_0, v_0), z(t_0, v_0))$$

$$\bar{r}'(t) = (x'(t_0, v_0), y'(t_0, v_0), z'(t_0, v_0)) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \dots \right)$$

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_A = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right) \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \Big| + a$$

Наоборот  $\alpha \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \Big|_A + \beta \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \Big|_A$  - вектор

$$\begin{cases} u(t) = \alpha t \\ v(t) = \beta t \end{cases}$$

Как задать касательную плоскость в координатах?

Пусть  $\bar{n}$  - нормаль к плоскости

$$\bar{n} = (A, B, C)$$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

$$\bar{r} = (x, y, z)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$\bar{n} = \left( \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 \text{ - уравнение касательной плоскости}$$



### УТВ

В неявном виде

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) - \text{перп. плоскости}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\frac{dF}{dt} = 0 \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla F \circ \underset{\text{касат. вектор}}{(x', y', z')} = 0$$

$$\nabla F \perp \text{касат. вектору (любому)} \Rightarrow \nabla F - \text{норм пов-ть}$$

### УТВ

Уравнение касательной плоскости:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0)$$

### 5.3.2 Первая квадратичная плоскость

Длина кривой на поверхности

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

$\bar{r}$  - пов-ть

$$r = (x, y, z) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

$$\text{Длина кривой} = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d}{dt} \bar{r}(u(t), v(t)) \right| dt = \int_{t_0}^{t_1} \left| \left( \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v', \frac{\partial y}{\partial u} u' + \frac{\partial y}{\partial v} v', \frac{\partial z}{\partial u} u' + \frac{\partial z}{\partial v} v' \right) \right| dt$$

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$$

### Опр

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt - \text{первая квадратичная форма}$$

2019-10-14

### Теорема

Угол между кривыми

$$\cos \alpha = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv + 1'v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu'_1v'_1 + Gv_1'^2}\sqrt{\dots}}$$

### Док-во

Найдем, как вычисляется угол между кривыми

$$\begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_2(t) \end{cases} \quad \begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}$$

Нужно найти угол между  $\bar{r}'_t(u_1(t), v_1(t))$  и  $\bar{r}'_t(u_2(t), v_2(t))$

$$\cos \alpha = \frac{\bar{r}'_t(u_1(t), v_1(t)) * \bar{r}'_t(u_2(t), v_2(t))}{|\bar{r}'_t(u_1(t), v_1(t))|} \bar{r}'_t(u_2(t), v_2(t))|$$

$$r'_t(u_1(t), v_1(t)) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv_1}{dt}; \dots \right)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt}(u_i(t), v_i(t)) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} u'_i + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} v'_i$$

$$\frac{dr}{dt}(u_1(t), v_1(t)) \frac{dr}{dt}(u_2(t), v_2(t)) = \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} u'_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} v'_1 \right) \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} u'_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} v'_2 \right) = Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv + 1'v'_2$$

$$\cos \alpha = \frac{Eu'_1u'_2 + F(u'_1v'_2 + u'_2v'_1) + Gv + 1'v'_2}{\sqrt{Eu_1'^2 + 2Fu'_1v'_1 + Gv_1'^2}\sqrt{\dots}}$$

### Опр

Поверхности  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  называются изометричными, если  $\exists$  параметризации  $\bar{r}_1$  у  $\Phi_1$  и  $\bar{r}_2$  у  $\Phi_2$   $r_1, r_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  и  $\forall$  кривой D длины  $|r_1(l)| = |r_2(l)|$

### Опр

Внутренняя метрика поверхности  $(A, B) = \inf\{\text{длина кривой на поверхности, с}$

### Теорема

Если у  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  совпадают коэффициенты I кв. формы, то они изометричны

### Док-во

Уже доказали, потому что форма вычисления длины кривой одинаковая на обеих поверхностях

Замечание

Если поверхности изометричны, то  $\exists D$  и параметризации  $\bar{r}_1, \bar{r}_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $r_i$  - параметризация поверхности  $\Phi_i$  такие что  $E, F, G$  совпадают для  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$

Док-во

f - изометрия

Кривая в D:  $\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = v_0 & v' = 0 \end{cases}$

$$l_1 = \int_a^b \sqrt{E_1} dt$$

$$l_2 = \int_a^b \sqrt{E_2} dt$$

т.к.  $l_1 = l_2 \Rightarrow E_1 = E_2$

Аналогично  $G_1 = G_2$  ( $\begin{cases} u = u_0 \\ v = t \end{cases}$ )

$$\begin{cases} u = t + u_0, & u' = 1 \\ v = t + v_0, & v' = 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \sqrt{E_1 + 2F_1 + G_1} dt = \int_a^b \sqrt{E_2 + 2F_2 + G_2} dt$$

$$E_1 + 2F_1 + G_1 = E_2 + 2F_2 + G_2 \Rightarrow F_1 = F_2$$

Следствие

I кв. форма определяет внутреннюю геометрию

Пример

Сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \psi \\ y = R \sin \varphi \cos \psi \\ z = R \sin \psi \end{cases}$$

$$\bar{r} = (R \cos \varphi \cos \psi, R \sin \varphi \cos \psi, R \sin \psi)$$

$$r'_\varphi = (-R \sin \varphi \cos \psi, R \cos \varphi \cos \psi, 0)$$

$$r'_\psi = (R \cos \varphi \sin \psi, -R \sin \varphi \sin \psi, R \cos \psi)$$

$$E = r_\varphi'^2 = R^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = R^2 \cos^2 \psi$$

$$F = R^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \varphi \sin \psi - R^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi + 0 = 0$$

$$G = R^2$$

### Пример (параметризация поверхности вращения)

$$\begin{cases} x = f(t) \cos \varphi \\ y = f(t) \sin \varphi \\ z = g(t) \end{cases}$$

### Упр

У любой поверхности вращения  $F = 0$ ,  $E$  не зависит от  $\varphi$ ,  $G$  тоже

### Теорема

$$|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

### Док-во

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = (\bar{x}_u, \bar{y}_u, \bar{z}_u) \times (\bar{x}_v, \bar{y}_v, \bar{z}_v) = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

$$\begin{aligned} |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| &= \sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + (z_u x_v - x_u z_v)^2 + (x_u y_v - y_u x_v)^2} = \\ &= \sqrt{\underbrace{(y_u^2 z_v^2 + z_u^2 y_v^2)}_{=A} - 2 \underbrace{(y_u z_v z_u y_v + z_u x_v x_u z_v + x_u x_v y_u y_v)}_{=B}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(z_v^2 + y_v^2 + x_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2 = \\ &= (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) + (A) - (x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + z_u^2 z_v^2) - 2(B) \end{aligned}$$

### Следствие

$$EG - F^2 > 0$$

### Теорема

Площадь поверхности  $S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$