$f : E \to \mathbb{R}^1$ - непр. в x_0

если $f(x^0) > 0 \Rightarrow$

1 Глобальные св-ва функций

Теор (непрерывный образ компатка)

$f \in C(E, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f : E \to \mathbb{R}^m$ *- непр. в* E

K *- компакт* $\qquad K \subset \mathbb{R}^n$

$f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда $f(K)$ *- компакт*

рисунок 1

Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *- откр. покр* $f(K)$

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$\Rightarrow f^{-1}(U_\alpha)$ *- откр, причем*

$K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha)$ *- откр. покр. комп* $\Rightarrow \exists f^{-1}(U_{\alpha 1}) ... f^{-1}(U_{\alpha_N})$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(U_{\alpha_k}) \Rightarrow$$

$f(K) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_{\alpha_k}$ *- выделили конечное подпокрытие*

$f(K)$ *- компакт*

Теор (Вейерштрасс)

K *- компакт;* $f \in C(K, \mathbb{R}^m)$

Тогда

1. f - *огр.*
2. *Если* $m = 1$, *то* f *достигает* $\sup$ *и* $\inf$ *на* K

Док-во

$$f : K \to \mathbb{R}^m \text{ - огр} \Leftrightarrow \exists M : \forall x \in K \quad d(f(x), 0) < M$$

1. $f(k)$ - *комп* $\Rightarrow$ *огр*
2. $f : K \to \mathbb{R} \Rightarrow M = \sup\limits_{x \in K} f(x) < +\infty$ *рисунок 2*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x^k \in K :$$
$$M - \frac{1}{k} < f(x^k) \leq M \Rightarrow f(x^k) \underset{k\to\infty}{\to} M$$
$$f(x^k) \in f(K) \text{ - компакт } \Rightarrow \text{ замнг}$$
$$M \in f(K)$$

Теор (Кантор)

$$f \in C(K, \mathbb{R}^m) \quad K \subset \mathbb{R}^n \text{ - компакт } \Rightarrow f \text{ - равном. непр на } K$$

Док-во

$$f \text{ - непр } \Rightarrow \text{ непр. } \forall x \in K \quad \forall \mathcal{E} > 0 \exists \delta_x :$$
$$\forall x' \in K \quad d(x', x) < 2\delta_x \Rightarrow d(f(x'), f(x)) < \frac{\mathcal{E}}{2}$$

рисунок 3

$\{B_x(\delta_x)\}_{x \in K}$ - *откр. покрытие* K - *комп.*

выделим конечное поддпокр.

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{x_j}(\delta_{x_j})$$
$$\delta = \min_{1 \leq j \leq N} \delta_{x_j} \text{ - то, что надо}$$

Пусть $d(\widetilde{x}, \widetilde{\widetilde{x}}) < \delta$

$$\widetilde{x} \in K \Rightarrow \exists x_l : \widetilde{x} \in B(x_l, \delta_{x_l})$$
$$d(\widetilde{\widetilde{x}}, x_l) \leq d(\widetilde{\widetilde{x}}, \widetilde{x}) + d(\widetilde{x}, x_l) < \delta + \delta_{x_l} < 2\delta_{x_l}$$
$$\Rightarrow d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \frac{\mathcal{E}}{2} \text{ и } d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) < \frac{\mathcal{E}}{2}$$
$$d(f(\widetilde{x}), f(\widetilde{\widetilde{x}})) \leq d(f(\widetilde{x}), f(x_l)) + d(f(\widetilde{\widetilde{x}}), f(x_l)) < \mathcal{E}$$

$\mathbb{R}^n$ как лин. пр-во

Опр

$$\textit{Норма в } \mathbb{R}^n: \quad ||\cdot||: \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$$

Аксиомы нормы

1. $||x|| \geq 0$
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $||k \cdot x|| = |k| \cdot ||x||$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Стандартная норма в $\mathbb{R}^n$

$$||x|| = d(x, 0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$$

$$||x + y|| = d(x + y, 0) = d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(0, -y) = ||x|| + ||y||$$

Бывают другие нормы
УПР.1 пусть $|||\cdot|||$ *- другая норма в* $\mathbb{R}^n$
Тогда $\quad \exists c, C > 0:$

$$c \cdot ||x|| \leq |||x||| \leq C \cdot ||x|| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

УПР.2 $\forall$ *норма непр в* $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ - пр-во со скал. пр-нием

Опр

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x \cdot y = (x; y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$||x||^2 = (x; x)$$

н-во К-Б

$$(x, y)^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$$

Линейные операторы в $\mathbb{R}^n$

<u>Опр</u>

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - *лин. операторы*

$L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:

$\forall x, t \in \mathbb{R}^n; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$:

$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$

пишут Lx *вместо* $L(x)$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - *лин. пр-во:*

если $A, B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

то $(A + B)(x) = Ax + Bx$

$A + B \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$\forall k \in \mathbb{R}$

$(kA)(x) : k \cdot Ax$

kA - *тоже лин. оператор*

Кроме того $A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

$AB = A \circ B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - *базис (ортонорм) в* $\mathbb{R}^n$; $\quad \{e_j^*\}_{j=1}^m$ - *базис в* $\mathbb{R}^m$

Тогда $\forall$ *лин. оператору соотв.* $Mat(A)$

$$Ae_j = \sum_{k=1}^m ae_k^* \qquad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \simeq Mat_{\mathbb{R}}(m \times n) \simeq \mathbb{R}^{mn}$

$Mat(A \cdot B) = Mat(A) \cdot Mat(B)$ - *матричное произв.*

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad B \in LL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

<u>Теор</u>

$LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Док-во

$$d(x,y) = ||x-y||$$

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - *лин. оператор*

$$||Ax - Ay|| = || \underbrace{A(x-y)}_{A(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)e_j)} || = || \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j) \cdot Ae_j|| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \cdot ||Ae_j|| \leq M\sqrt{n}||x-y||$$

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} ||Ae_j|| \qquad \forall \mathcal{E} > 0 \quad \exists \delta = \frac{\mathcal{E}}{M\sqrt{n}}$$

$B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ - компакт

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ - непр на $B_0(1)$

$\Rightarrow$ огр.

$||Ax||$ - нерп $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ достигает наиб. знач. на комп. $B_0(1)$

След

$$\sup_{||x|| \leq 1} ||Ax|| = \max_{||x|| \leq 1} ||A_x|| < \infty$$

Опр

$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Норма лин. оператора A

$$||A|| = \max_{|x| \leq 1} ||A_x||$$

Теор

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||A_x||}{||x||}$$

т.е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad ||A_x|| \leq ||A|| \cdot ||x||$

Док-во

Если $A \equiv 0$ *- очев.* $\quad (||A|| = 0)$

Пусть $A \not\equiv 0 \Rightarrow$

$\exists x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : ||Ax^*|| \neq 0$

$$0 \neq \frac{||Ax^*||}{||x^*||} = ||A\underbrace{\frac{x^*}{||x^*||}}_{=y^* \in \phi_1 \subset B_0}||$$

$\Rightarrow ||A|| > 0$

Пусть max достигается внутри ед. шара:

$||A|| = ||A\widetilde{x}||$

где $||\widetilde{x}|| < 1$

Рассм. $\widetilde{y} = \dfrac{\widetilde{x}}{||x||}$

рисунок5?

$$||A\widetilde{y}|| = \frac{||A\widetilde{x}||}{||\widetilde{x}||} > ||A\widetilde{x}||$$

т.е. $||A\widetilde{x}||$ *не max!*

$\Rightarrow \max ||Ax||$ *в* $||x|| \leq 1$ $\quad$ *достиг. на сфере* $||x|| = 1$

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||A_x||$$

$$||A|| = max_{||x||=1}||Ax|| = \sup_{||x||=1} \frac{||Ax||}{||x||} \leq \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

$$\sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x|| \neq 0} ||A\frac{x}{||x||}|| \leq \max_{||y||=1} ||Ay|| = ||A||$$

Теор

1. *Норма оператора действительно норма*
2. $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Док-во

1. *проверим аксиомы нормы*

$$(1) \quad ||A|| \geq 0 \text{ - } \textit{очев}$$

$$(2) \quad ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ } \textit{(начало предыдущей теоремы)}$$

$$(3) \quad ||k \cdot A|| = \max_{||x||=1} ||(k \cdot A)x|| = \max_{||x||=1} |k| \cdot ||Ax|| = |k| \cdot ||A||$$

$$(4) \quad ||A + B|| = \max_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leq \max_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leq$$

$$\leq ||A|| + ||B||$$

2. $||(AB)x|| = ||A(Bx)|| \leq ||A|| \cdot ||Bx|| \leq ||A|| \cdot ||B|| \cdot ||x||$

$$\sup_{||x|| \neq 0} \frac{||ABx||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||B||$$

$$\sup = ||AB||$$

Теор (оценка нормы лин. оператора)

$$A \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad Mat(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$||A||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 = ||A||^2_{HS} \text{ - } \textit{норма Гильберта Шмидта}$$

$$y = Ax = A(\sum_{j=1}^{n} \cdot x_j \cdot e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot Ae_j$$

$$\underset{\textit{к-я координата}}{y_k} = \sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k \text{ - } \textit{к-я координата}$$

$$1 \leq k \leq m$$

$$|y_k|^2 = |\sum_{j=1}^{n} x_j (Ae_j)_k|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(Ae_j)^2_k}_{=a_{jk}} =$$

$$= ||x||^2 \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$||y||^2 = ||Ax||^2 = \sum_{k=1}^{m} |y_k|^2 \le ||x||^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2$$

$$||A|| = \sup_{||x|| \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|}$$

УПР $||A||_{HS} \le \sqrt{n} \cdot ||A||$

Дифференцирование

<u>Опр</u>

$$E \subset \mathbb{R}^n, \quad E \text{ - откр.} \quad a \in E$$

$$f : E \to \mathbb{R}^m$$

$$f \text{ - дифф-мо в т. } a, \text{ если } \exists L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$f(a+h) = f(a) + Lh + \underset{\alpha(h)}{o(||h||)} \qquad ||h|| \to 0$$

рисунок 6

$$(h : a+h \in E)$$

$$\alpha(h) = o(||h||) = o(h) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\alpha(h)||}{||h||} = 0$$

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(||h||) \Leftrightarrow \lim_{||h|| \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

Если такой L $\exists$ *то он ед.*

$$\text{Пусть } h \in \mathbb{R}^n : ||h|| = 1$$

$$a + t \cdot h$$

рисунок 7

$$f(a+th) = f(a) + \underbrace{L(th)}_{=t \cdot Lh} + o(th)$$

$||th|| \to 0$

$$\frac{f(a+th)f(a)}{t} = Lh + \frac{o(th)}{t} \underset{t\to 0}{\to} 0$$

$$Lh = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

$\forall h : ||h|| = 1 \quad L$ *опеределен однозначно* $\Rightarrow \forall x \neq 0$

$$Lx = ||x|| \cdot L\frac{x}{||x||}$$

L - *дифференциал.* f *в т.* a

$d_a f = L \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$h \in \mathbb{R}^n \qquad d_a f(h) \in \mathbb{R}^m$

Примеры

$$lim_{||h||\to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - Lh||}{||h||} = 0$$

1. $f = const \Rightarrow d_a f = 0$

2. $f \in LL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = f(a+h) - f(a) = f(h) \Rightarrow Lh = f(h)$

   $d_a f = f$ *(если f линеен)*

3. *если* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - *диф. в т.* a*, то*

   $$d_a(f+g) = d_a f + d_a g$$

   $$lim_{||h||\to 0} \frac{||(f+g)(a+h) - (f+g)(a) - d_a f(h) - d_a g(h)||}{||h||} =$$

   $$\leq \lim \frac{||f(a+h) = f(a) - d_a f(h)|| + ||g(a+h) - g(a) - d_a g(h)||}{||h||} = 0$$

4. $d_a(kf) = k d_a f$

Производная по направлению

<u>Опр</u>

$$\textit{Пусть } ||e|| = 1, \quad e \in \mathbb{R}^n \qquad f : E \to \mathbb{R}^m \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

<u>Теор</u> (о производной по напр.)

$$f : E \to \mathbb{R}^m \text{ - \textit{дифф. в т.} } a$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = d_a f(e)$$

рисунок 7

$$z = f(x, y)$$

$$f : E \to \mathbb{R}^1 \qquad E \subset \mathbb{R}^2$$

<u>Док-во</u>

$$f(a + te) - f(a) = d_a f(te) + o(te) \quad ||te|| \to 0 \qquad ||te|| = |t|$$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t} = d_a f(e)$$

<u>Опр</u>

Частные производные $\{e_k\}_{k=1}^n$ - *базис* $\mathbb{R}^n$

$$f : E \to \mathbb{R}^m \qquad E \subset \mathbb{R}^n \quad a \in E$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'_{x_k}(a) = \frac{\partial t}{\partial e_k}(a)$$

Матрица Якоби

Опр

Пусть f *- диф. в т.* $a \in E$

Временно вернмеся к обозначению$L = d_a f$

$Mat(L)$ *- матрица Якоби*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad j \text{ - й столбец - координаты вектора}$$

$$d_a f(e_j) = \frac{\partial f}{\partial e}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$a_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

$$Mat(d_a f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & & \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & & & \end{pmatrix}$$