$$f(x,y)=e^{\frac{x+y}{2}}(x^2-4y^2)^3$$

Найти экстремум функции — ?

Чтобы экстремум существовал, необходимо, чтобы дифференциал функции, а следовательно частные производные равнялись 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x=\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^2(x^2-4y^2+12x)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=4y^2 \\ x^2+12x=4y^2 \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y=\frac{1}{2}e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}(x^2-4y^2)^2(x^2-4y^2-48y)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2=4y^2 \\ x^2=4y^2+48y \end{array}\right.$$

Теперь решим систему:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=4y^2 \\ x^2+12x=4y^2 \end{cases} \\ x^2=4y^2+48y \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4y \\ x=0 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

$$16y^2=4y^2+48y \Rightarrow 12y(y+4)=0$$

$$\boxed{y=-4} \Rightarrow \boxed{x=16}$$

Получим две точки: $(0,0)$ и $(-4,16)$

Необходимо проверить на достаточное условие экстремума:

$$f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2>0 \quad (1)$$

Посчитав производные $2^{ой}$ порядка и подставив в них значения $(x,y)=(0,0)$, получим что $f''_{xx}f''_{yy}-f''_{xy}=0$, что говорит, о том что нельзя ~~сказать~~ утверждать, что $(0,0)$ точка экстремума.

А для $(16;-4)$ получим верное неравенство (1)

$\Rightarrow (16,-4)$ — экстремум