TESTTITLE

AUTHOR

2020 年 5 月 3 日

1　概要

次の公式を示す。

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \cdots \tag{1}$$

2　導出

次の関数を Taylor 展開することで示せる。

$$f(t) = e^{tA} B e^{-tA} \tag{2}$$

まず、一回微分 $f'(t)$、二階微分 $f''(t)$ は

$$\begin{aligned} f'(t) &= Ae^{tA}Be^{-tA} - e^{tA}BAe^{-tA} \\ &= e^{tA}ABe^{-tA} - e^{tA}BAe^{-tA} \qquad \because [e^{tA}, A] = 0 \\ &= e^{tA}(AB - BA)e^{-tA} \\ &= e^{tA}[A, B]e^{-tA} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= e^{tA}A[A, B]e^{-tA} - e^{tA}[A, B]Ae^{-tA} \\ &= e^{tA}(A[A, B] - [A, B]A)e^{-tA} \\ &= e^{tA}[A, [A, B]]e^{-tA} \end{aligned} \tag{4}$$

である。
ここで、交換子を $[A, B] = \mathrm{ad}_A[B]$ と書くことにし、さらに次のように約束する。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_A^0[B] &= B \\
\mathrm{ad}_A^1[B] &= \mathrm{ad}_A[B] = [A, B] \\
\mathrm{ad}_A^2[B] &= \mathrm{ad}_A[\mathrm{ad}_A[B]] = [A, [A, B]] \\
&\vdots \\
\mathrm{ad}_A^n[B] &= \underbrace{[A, [A, \ldots, [A}_{n}, B]] \cdots]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

この表記法を用いると、$f'(t) = e^{tA}$
, $\mathrm{ad}_A^1[B]$
, e^{-tA}, $f''(t) = e^{tA}$
, $\mathrm{ad}_A^2[B]$
, e^{-tA} となる。これを一般化する。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\,\mathrm{ad}_A^n[B]\,e^{-tA}\right) &= e^{tA} A\,\mathrm{ad}_A^n[B]\,e^{-tA} - e^{tA}\,\mathrm{ad}_A^n[B]\,Ae^{-tA} \\
&= e^{tA}\left(A\,\mathrm{ad}_A^n[B] - \mathrm{ad}_A^n[B]\,A\right)e^{-tA} \\
&= e^{tA}\,[A, \mathrm{ad}_A^n[B]]\,e^{-tA} \\
&= e^{tA}\,\mathrm{ad}_A^{n+1}[B]\,e^{-tA}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

以上より、

$$
f^{(n)}(t) = e^{tA}\,\mathrm{ad}_A^n[B]\,e^{-tA} \tag{7}
$$

が得られた。$t = 0$ では $f^{(n)}(0) = \mathrm{ad}_A^n[B]$ である。$f(t)$ の Taylor 展開により、

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\,t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{ad}_A^n[B]\,t^n
\end{aligned}
\tag{8}
$$

以上より、

$$
f(0) = e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{ad}_A^n[B] = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \cdots \tag{9}
$$

を示すことができた。
次のように書くこともできる。

$$
e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}_A[\cdot]} B \tag{10}
$$

3　交換子の性質

定義から明らかに、超演算子 $\mathrm{ad}_A[\cdot]$ は線形演算子である。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_A^n[B+C] &= [A,[A,\cdots,[A,B+C]\cdots]] \\
&= [A,[A,\cdots,[A,B]\cdots]] + [A,[A,\cdots,[A,C]\cdots]] \\
&= \mathrm{ad}_A^n[B] + \mathrm{ad}_A^n[C]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

演算子 A が Normal operator だと仮定すると、次のように固有値分解できる。

$$
A = \sum_k \lambda_k \left|k\right\rangle\!\left\langle k\right| \tag{12}
$$

この時、演算子 $|i\rangle$

!

! $\langle j|$ は超演算子 $\mathrm{ad}_A[\cdot]$ の固有値である。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_A\left[|i\rangle\langle j|\right] &= [A, |i\rangle\langle j|] \\
&= \left(\sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|\right)|i\rangle\langle j| - |i\rangle\langle j|\left(\sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|\right) \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)\,|i\rangle\langle j|
\end{aligned}
\tag{13}
$$

よって、A の同じ固有値に属する固有ベクトル $|i\rangle, |j\rangle$ について、$|i\rangle$

!

! $\langle j|$ は $\mathrm{ad}_A[|i\rangle$

!

! $\langle j|]$ の固有演算子であり、固有値はゼロ。 $|i\rangle, |j\rangle$ が A の異なる固有空間に属する場合、$|i\rangle$

!

! $\langle j|$ の固有値は $\lambda_i - \lambda_j$ である。

また次も成り立つ。

$$
\mathrm{ad}_A^n\left[|i\rangle\langle j|\right] = (\lambda_i - \lambda_j)^n\,|i\rangle\langle j| \tag{14}
$$

同様の議論から、超演算子 $\mathcal{I}_A[B] = e^A B e^{-A}$ を定義するとこれも線形演算子であり、$|i\rangle$

!

! $\langle j|$ は固有値 $e^{\lambda_i-\lambda_j}$ に属する固有演算子である。

4　応用

シュレディンガー表示からハイゼンベルク表示（もしくは相互作用表示）への移行を考えると、シュレディンガー表示で演算子 A はハイゼンベルク表示で $A(t) = e^{iH_0 t} A e^{-iH_0 t}$ であるから、

$$A(t) = A + (it)[A, H_0] + \frac{(it)^2}{2!}[A, [A, H_0]] + \frac{(it)^3}{3!}[A, [A, [A, H_0]]] + \cdots \tag{15}$$

ここで、演算子 $|i\rangle$

!

! $\langle j|$ が固有演算子であることを用いると

$$\begin{aligned} e^A |i\rangle\langle j| e^{-A} &= e^{\mathrm{ad}_A[\cdot]} |i\rangle\langle j| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{ad}_A^n [|i\rangle\langle j|] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_i - \lambda_j)^n |i\rangle\langle j| \\ &= e^{\lambda_i - \lambda_j} |i\rangle\langle j| \end{aligned} \tag{16}$$

である。

$A \to iH_0 t$ と置き換えると、摂動ハミルトニアン $H_1 = [h_{ij}]_{i,j}$ の相互作用表示 $H_1^I(t)$ は

$$H_1^I(t) = e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} = \sum_{i,j} e^{i(\epsilon_i - \epsilon_j)t} h_{ij} |i\rangle\langle j| \tag{17}$$

となり、実験マニュアル・基礎理論/基礎理論/回転座標変換と相互作用表示#量子力学 - dia-pe-titech.esa.io と同様の表式が得られた。注）今の所リンク先と符号が違うけど、向こうの記事が間違ってる...

また、エルミート演算子 K としてユニタリ演算子 $U = \exp(iK)$ によるユニタリ変換 $A' = UAU^\dagger$ を考えてみる。K の固有値は全て実数であるから、iK の固有値は全て純虚数。全ての i, j について $|e^{\lambda_i - \lambda_j}| = 1$ より、ユニタリ変換は行列要素の大きさを変えず、位相だけを変化させせることがわかる。

5　所感

- おもったより面白くてキレイな関係が得られた。
- 指数関数で挟む＝交換子を指数的に適用する　という対応ができる。
- 交換子を ad で表記するのはどこかで見たやり方だけど、一般的に通じるものではないと思う