Розрахункова робота

З теми «Випадкові вектори»

З дисципліни «Теорія ймовірностей»

Варіант №85

Виконав:

Студент 2-ого курсу

Косицький Вадим Вікторович

Київ 2020

Завдання №1:

Умова завдання:

Дано:

Таблиця розподілу випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-6	2	6	8
-4	0,03	0,05	0,11	0,05
-3	0,01	0,02	0,08	0,16
-2	0,13	0,07	0,03	0,26

Знайти:

1) Ряди розподілу координат ξ_1,ξ_2
2) Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ і $F_{\xi_2}(x)$ координат ξ_1і ξ_2 відповідно та побудувати графіки цих функцій.
3) Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x)$ випадкового вектора.
4) Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5) Умовні ряди розподілу для координат ξ_1, ξ_2
6) Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Розв'язок:

Запишемо:

$n = 3$ – кількість значень, що набуває координата ξ_1,

$m = 4$ – кількість значень, що набуває координата ξ_2.

З поданої таблиці розподілу запишемо також значення, які набуває кожна координата.

Для ξ_1: $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = -2$.

Для ξ_2: $y_1 = -6\,, y_2 = 2\,, y_3 = 6,\; y_4 = 8$.

Позначимо: $p_{ij} = P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\}$, $\quad i = \overrightarrow{1,n} = \overrightarrow{1,3}\,,\; j = \overrightarrow{1,m} = \overrightarrow{1,4}$.

1) Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2

$P\{A_k\} = P\{\xi_1 = x_k\}, k = \overrightarrow{1,3}$. Кожна подія A_k виконується разом з гіпотезами

$B_i = \{\xi_2 = y_i\}, i = \overrightarrow{1,4}$. Очевидно, що система подій B_1, B_2, B_3, B_4 утворює повну групу подій.

Дійсно:

I. $\bigcup_{i=1}^{4} B_i = \bigcup_{i=1}^{4}\{\xi_2 = y_i\} = \{\xi_2 \in \{y_1, y_2, y_3, y_4\}\} = \Omega$

II. Попарно несумісні, тобто:

$\forall\, i = \overrightarrow{1,4}, j = \overrightarrow{1,4} : i \neq j : B_i \cap B_j = \{\xi_2 = y_i, \xi_2 = y_j\} = \emptyset$

Для розрахунку ймовірності $P(A_k)$ скористаємося формулою повної ймовірності:

$$P(A_k) = \sum_{i=1}^{4} P(A_k|\, B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{4}(A_k \cap B_i) = \sum_{i=1}^{4}\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_i\} = \sum_{i=1}^{4} p_{ki} \quad (1)$$

Тепер аналогічні міркування для події B_k:

$P\{B_k\} = P\{\xi_2 = x_k\}, k = \overrightarrow{1,4}$. Кожна подія B_k виконується разом з гіпотезами

$A_i = \{\xi_1 = x_j\}, i = \overrightarrow{1,3}$. Очевидно, що система подій A_1, A_2, A_3 утворює повну групу подій.

Дійсно:

I. $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \bigcup_{i=1}^{3}\{\xi_1 = x_i\} = \{\xi_1 \in \{x_1, x_2, x_3\}\} = \Omega$

II. Попарно несумісні, тобто:

$\forall\, i = \overrightarrow{1,3}, j = \overrightarrow{1,3} : i \neq j : A_i \cap A_j = \{\xi_1 = x_i, \xi_1 = x_j\} = \emptyset$

Для розрахунку ймовірності $P(B_k)$ скористаємося формулою повної ймовірності:

$$P(B_k) = \sum_{i=1}^{3} P(B_k|\, A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{3}(B_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^{3}\{\xi_2 = y_k, \xi_1 = x_i\} = \sum_{i=1}^{3} p_{ik} \quad (2)$$

Використовуючи формулу (1), знайдемо ймовірності набуття дискретною випадковою величиною ξ_1 значень x_1, x_2, x_3.

$$p_1 = P\{\xi_1 = -4\} = \sum_{i=1}^{4} p_{1i} = p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 0.03 + 0.05 + 0.11 + 0.05 = 0.24$$

$$p_2 = P\{\xi_1 = -3\} = \sum_{i=1}^{4} p_{2i} = p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} = 0.01 + 0.02 + 0.08 + 0.16 = 0.27$$

$$p_3 = P\{\xi_1 = -2\} = \sum_{i=1}^{4} p_{3i} = p_{31} + p_{32} + p_{33} + p_{34} = 0.13 + 0.07 + 0.03 + 0.26 = 0.49$$

Перевіримо, що $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, оскільки A_1, A_2, A_3 – повна група подій.

$\sum_{i=1}^{3} p_i = p_1 + p_2 + p_3 = 0.24 + 0.27 + 0.49 = 1$. Отже, перевірка успішна.

Отримали Ряд розподілу для ξ_1:

ξ_1	-4	-3	-2
p	0.24	0.27	0.49

Використовуючи формулу (2), знайдемо ймовірності набуття дискретною випадковою величиною ξ_2 значень y_1, y_2, y_3, y_4.

$$p_1 = P\{\xi_2 = -6\} = \textstyle\sum_{i=1}^{3} p_{i1} = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0.03 + 0.01 + 0.13 = 0.17$$

$$p_2 = P\{\xi_2 = 2\} = \sum_{i=1}^{3} p_{i2} = p_{12} + p_{22} + p_{32} = 0.05 + 0.02 + 0.07 = 0.14$$

$$p_3 = P\{\xi_2 = 6\} = \sum_{i=1}^{3} p_{i3} = p_{13} + p_{23} + p_{33} = 0.11 + 0.08 + 0.03 = 0.22$$

$$p_4 = P\{\xi_2 = 8\} = \sum_{i=1}^{3} p_{i4} = p_{14} + p_{24} + p_{34} = 0.05 + 0.16 + 0.26 = 0{,}47$$

Перевіримо, що $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$, оскільки B_1, B_2, B_3, B_4 – повна група подій.

$\sum_{i=1}^{4} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0.17 + 0.14 + 0.22 + 0.47 = 1$. Отже, перевірка успішна.

Отримали Ряд розподілу для ξ_2:

ξ_2	-6	2	6	8
p	0.17	0.14	0.22	0.47

2) **Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2 .**

За означенням: $F_{\xi_i}(x) = P\{\xi_i < x\},\ (i = 1, 2), x \in \mathbb{R}$.

Ряд розподілу ξ_1:

ξ_1	-4	-3	-2
p	0.24	0.27	0.49

$$F_{\xi_1}(x) = P\{\xi_1 < x\}$$
$$= \begin{cases} P(\emptyset) = 0\text{, при } (x \le -4); \\ P(\xi_1 = -4) = 0.24\text{, при } (-4 < x \le -3); \\ P(\{\xi_1 = -4\} \cup \{\xi_1 = -3\}) = P(\xi_1 = -4) + P(\xi_1 = -3) = 0.51\text{, при } (-3 < x \le -2); \\ P(\{\xi_1 = -4\} \cup \{\xi_1 = -3\} \cup \{\xi_1 = -2\}) = P(\xi_1 = -4) + P(\xi_1 = -3) + P(\xi_1 = -2) = 1\text{, при } (x > -2); \end{cases}$$

Отже, функція розподілу має вигляд:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4, \\ 0{,}24, & -4 < x \le -3, \\ 0{,}51, & -3 < x \le -2, \\ 1, & x > -2. \end{cases}$$

Перевіримо, що отримана функція розподілу задовольняє властивостям функцій розподілу.

1) $E\left(F_{\xi_1}(x)\right) \subset [0,1]$, $D\left(F_{\xi_1}(x)\right) = \mathbb{R}$

   Усі значення даної функції (0, 0.24, 0.51, 1) дійсно належать проміжку [0,1]

   А з нерівностей : $x \le -4, -4 < x \le -3,\ -3 < x \le -2,\ x > -2$, що функція визначена для будь-якого х.

2) Функція – монотонно неспадна.

Монотонна неспадність функції є очевидною з визначення функції розподілу. Більшим значенням х відповідають не менші значення функції рохподілу.

3)Гранична поведінка функції розподілу: $\lim_{x \to +\infty} F_{\xi_1}(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F_{\xi_1}(x) = 0$

4) Неперервність зліва

Розглянемо поведінку функції в точках розриву 1 роду $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = -2$.

$$\lim_{x\to -4-0} F_{\xi_1}(x) = 0 = F_{\xi_1}(-4)$$

$$lim_{x\to -3-0} F_{\xi_1}(x) = 0{,}24 = F_{\xi_1}(-3)$$

$$lim_{x\to -2-0} F_{\xi_1}(x) = 0{,}51 = F_{\xi_1}(-2)$$

Отже, неперервність зліва є.

Отже, $F_{\xi_1}(x)$ – задовольняє властивостям функції розподілу.

Графік функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$:

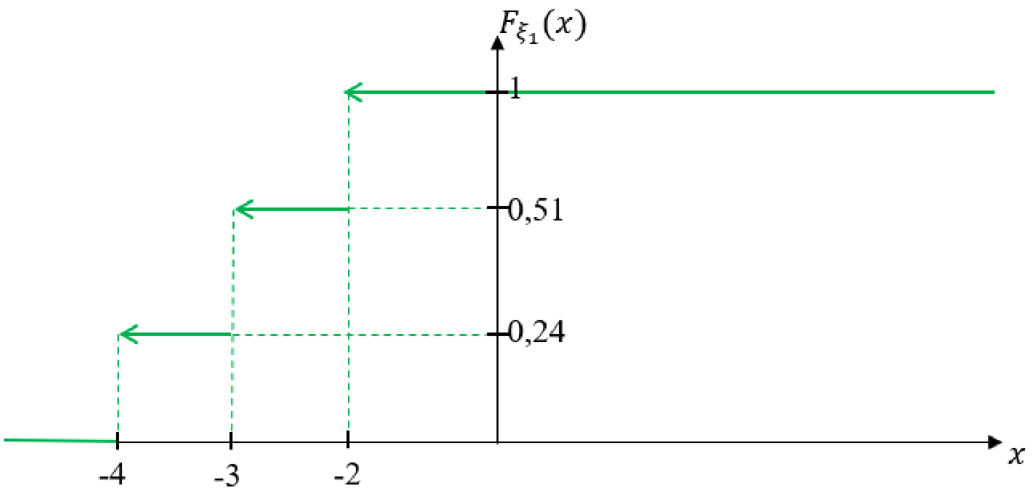


Рисунок 2.1. Графік $F_{\xi_1}(x)$

Зробимо аналогічні кроки для $F_{\xi_2}(y)$

За означенням: $F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\}$.

Ряд розподілу ξ_2 :

ξ_2	-6	2	6	8
p	0.17	0.14	0.22	0.47

Позначимо $p_i = P\{\xi_2 = y_i\}$.

$$F_{\xi_2}(y) = P\{\xi_2 < y\} = \begin{cases} P(\emptyset) = 0, \quad y \le -6 \\ P(\{\xi_2 = -6\}) = p_1 = 0.17, -6 < y \le 2 \\ P(\{\xi_2 = -6\} \cup \{\xi_2 = 2\}) = p_1 + p_2 = 0.31, \quad 2 < y \le 6 \\ P(\{\xi_2 = -6\} \cup \{\xi_2 = 2\} \cup \{\xi_2 = 6\}) = p_1 + p_2 + p_3 = 0.53, \quad 6 < y \le 8 \\ P(\{\xi_2 = -6\} \cup \{\xi_2 = 2\} \cup \{\xi_2 = 6\} \cup \{\xi_2 = 8\}) = P(\Omega) = 1, y > 8 \end{cases}$$

Отже, функція розподілу $F_{\xi_2}(y)$ має вигляд:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -6, \\ 0{,}17, & -6 < y \le 2, \\ 0{,}31, & 2 < y \le 6, \\ 0{,}53, & 6 < y \le 8, \\ 1, & y > 8; \end{cases}$$

Перевіримо, що отримана функція розподілу задовольняє властивостям функцій розподілу.

1) $E\left(F_{\xi_2}(y)\right) \subset [0,1]$, $D\left(F_{\xi_2}(y)\right) = \mathbb{R}$

   Усі значення даної функції (0, 0.17, 0.31, 0.53, 1) дійсно належать проміжку [0,1]

   А з нерівностей : $y \le -6, -6 < y \le 2,\ 2 < y \le 6,\ 6 < y \le 8,\ \ y > 8$, що функція визначена для будь-якого у.

2) Функція – монотонно неспадна.

Монотонна неспадність функції є очевидною з визначення функції розподілу. Більшим значенням у відповідають не менші значення функції розподілу.

3)Гранична поведінка функції розподілу: $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{\xi_2}(y) = 1$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F_{\xi_2}(y) = 0$

4) Неперервність зліва

Розглянемо поведінку функції в точках розриву 1 роду $y_1 = -6, y_2 = 2, y_3 = 6, y_4 = 8$.

$$\lim_{y\to-6-0} F_{\xi_2}(y) = 0 = F_{\xi_2}(-6)$$

$$\lim_{y\to2-0} F_{\xi_2}(y) = 0.17 = F_{\xi_2}(2)$$

$$\lim_{y\to6-0} F_{\xi_2}(y) = 0.31 = F_{\xi_2}(6)$$

$$\lim_{y\to8-0} F_{\xi_2}(y) = 0.53 = F_{\xi_2}(8)$$

Отже, неперервність зліва є.

Отже, $F_{\xi_2}(y)$ – задовольняє властивостям функції розподілу.

Графік функції розподілу $F_{\xi_2}(y)$:

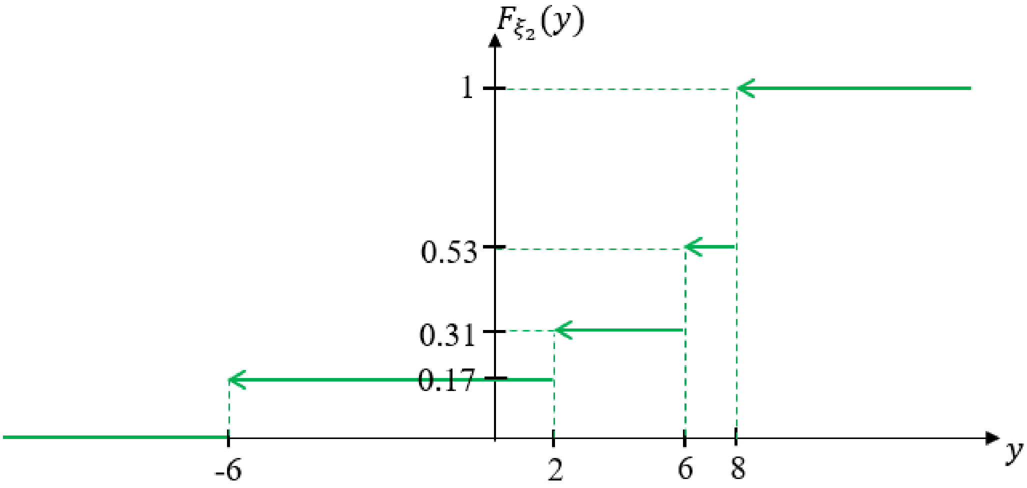


Рисунок 2.2. Графік $F_{\xi_2}(y)$

3) Функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x)$ випадкового вектора.

За означенням функція розподілу $F_{\vec{\xi}}(x)$ випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$:

$F_{\vec{\xi}}(x,\ y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$.

Тобто це ймовірність потрапляння випадкового вектора усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y).

Використаємо формулу, де $p_{ik} = \ P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_k\}$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \sum_{i: x_i < x} \sum_{k: y_k < y} p_{ik}$$

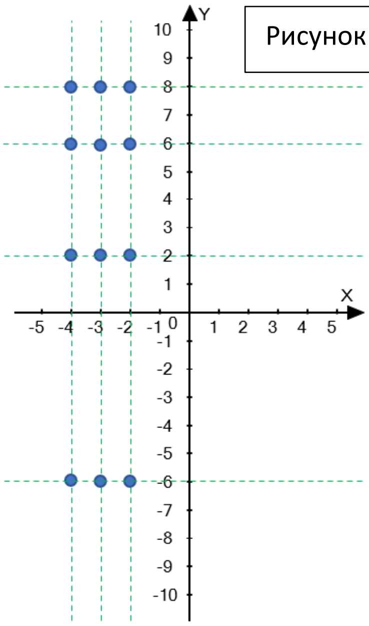
Значення функції розподілу в кожній точці координатної площини залежить від множини точок, які потрапили в квадрант.

Зрозуміло, що $F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$, якщо $x \le x_1$, або $y \le y_1$.

Іншу частину координатної площини розіб'ємо на області

$D_{k,j} = \{(x, y): x_k < x \le x_{k+1}, y_j < y \le y_{j+1}\}$, де $k = \overline{1, n-1} = \overline{1,2}$, $j = \overline{1, m-1} = \overline{1,3}$. При $k = 3$ матимемо умову $x > x_3$, а при $j = 4$ маємо $y > y_4$.

Рисунок 3.1



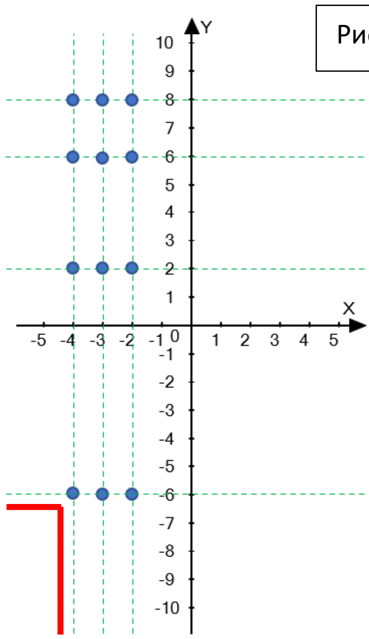
На рисунку 3.1 зображено декартову систему координат з усіма точками, що відповідають значенню вектора $\vec{\xi}$.

Тепер обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожні області $D_{k,j}$, де $k = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,4}$. Тепер для наочності кожен випадок зображено на рисунку (3.2-3.14)

1. $(x \leq -4) \vee (y \leq -6)$;

   $F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$

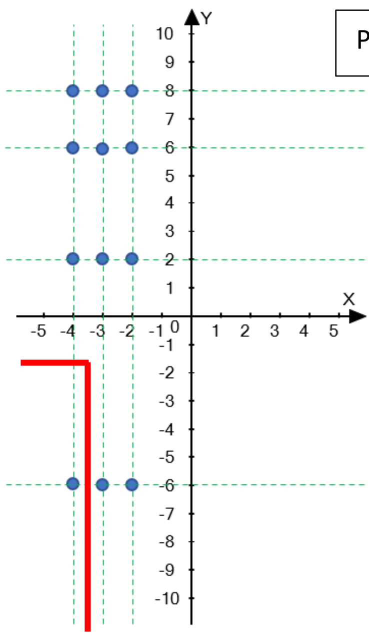
Рисунок 3.2



2. $D_{1,1} = \{(x, y): -4 < x \leq -3, -6 < y \leq 2\}$

   $F_{\vec{\xi}}(x, y) = P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} = 0.03$

Рисунок 3.3



3. $D_{2,1} = \{(x,y): -3 < x \leq -2, -6 < y \leq 2\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} =$

$= 0.03 + 0.01 = 0.04$

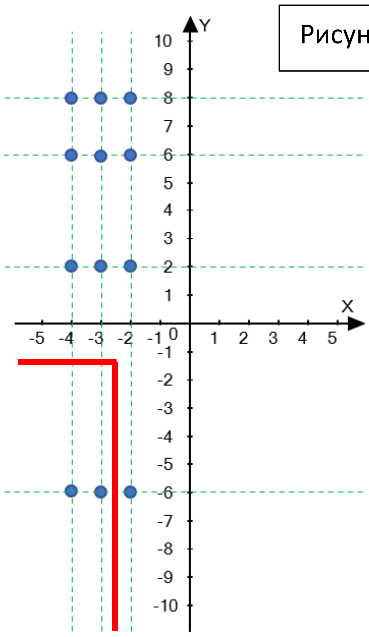


Рисунок 3.4

4. $D_{3,1} = \{(x,y): -2 < x, -6 < y \leq 2\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} +$

$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} =$

$= 0.03 + 0.01 + 0.13 = 0.17$

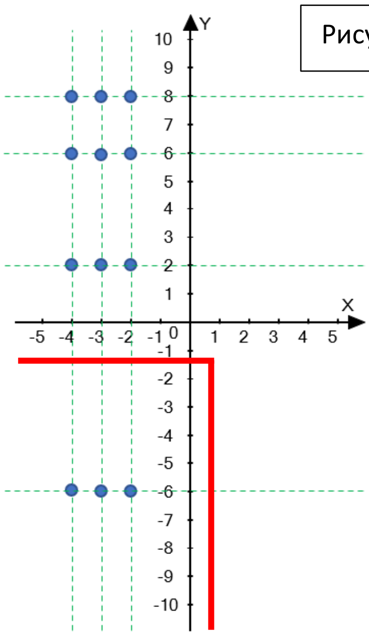


Рисунок 3.5

5. $D_{1,2} = \{(x,y): -4 < x \leq -3, \; 2 < y \leq 6\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} =$

$= 0.03 + 0.05 = 0.08$

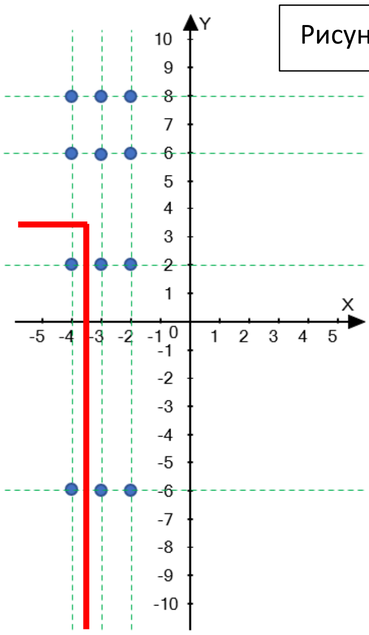


Рисунок 3.6

6. $D_{2,2} = \{(x,y){:}\, -3 < x \le -2,\ 2 < y \le 6\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 2\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.01 + 0.02 = 0.11$

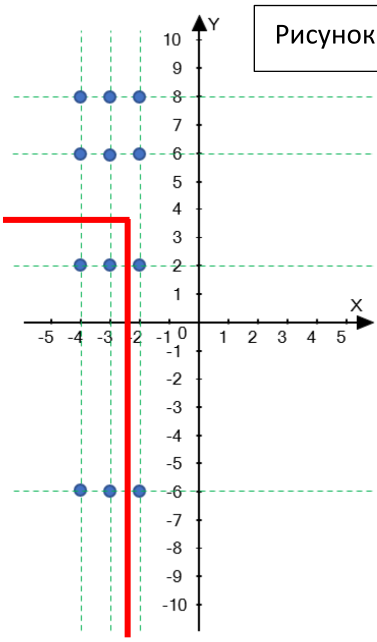


Рисунок 3.7

7. $D_{3,2} = \{(x,y){:}\, -2 < x,\ 2 < y \le 6\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 2\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.01 + 0.02 + 0.13 + 0.07 = 0.31$

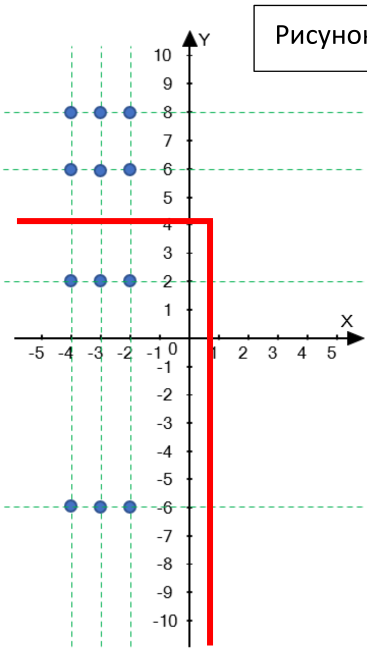


Рисунок 3.8

8. $D_{1,3} = \{(x,y){:}\, -4 < x \le -3,\ 6 < y \le 8\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 6\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.11 = 0.19$

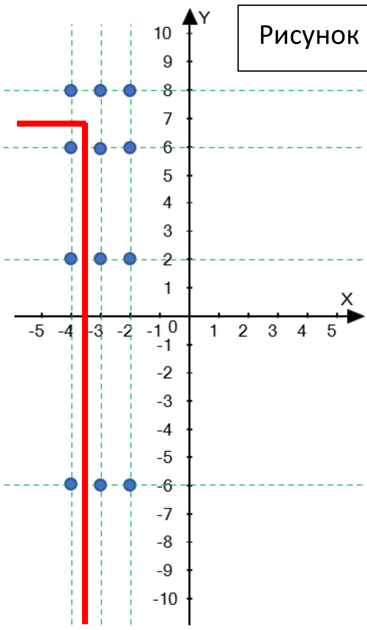


Рисунок 3.9

9. $D_{2,3} = \{(x, y): -3 < x \le -2\,,\ 6 < y \le 8\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} +$

$+ P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 6\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.11 + 0.01 + 0.02 + 0.08 = 0.3$

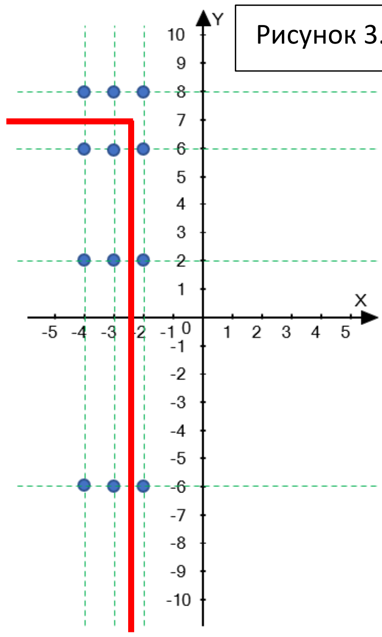


Рисунок 3.10

10. $D_{3,3} = \{(x, y): -2 < x\,,\ 6 < y \le 8\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} +$

$+ P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 2\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 6\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 2\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 6\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.11 + 0.01 + 0.02 + 0.08 +$

$+0.13 + 0.07 + 0.03 = 0.53$

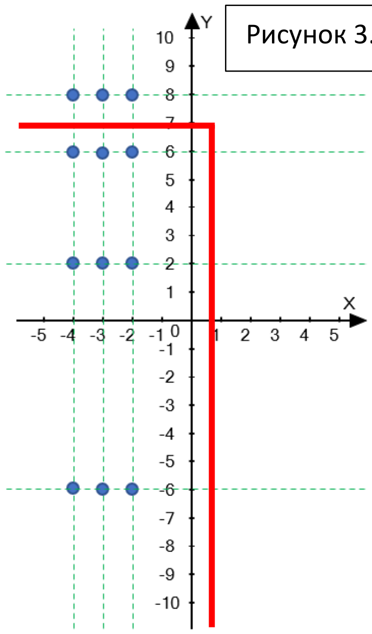


Рисунок 3.11

11. $D_{1,4} = \{(x, y): -4 < x \le -3,\ 8 < y\}$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 8\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.11 + 0.05 = 0.24$

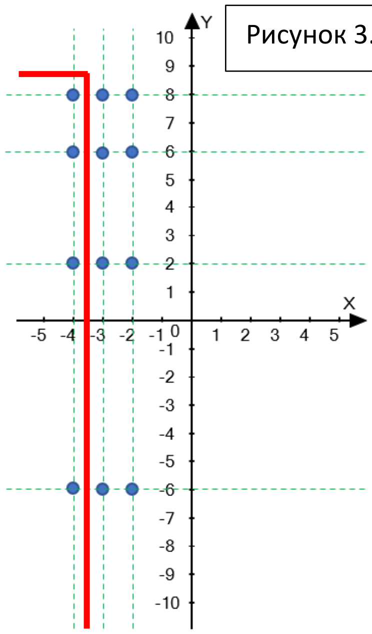


Рисунок 3.12

12. $D_{2,4} = \{(x,y): -3 < x \leq -2,\ 8 < y\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 8\} +$

$+P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.11 + 0.05 + 0.01 + 0.02 + 0.08 + 0.16 = 0.51$

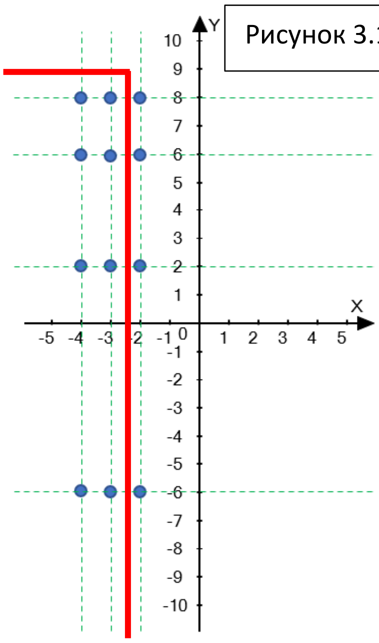


Рисунок 3.13

13. $D_{3,4} = \{(x,y): -2 < x,\ 8 < y\}$

$F_{\vec{\xi}}(x,y) =$

$P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -4, \xi_2 = 8\} +$

$+P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 8\} +$

$+P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = -6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 2\} +$

$+ P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 6\} + P\{\xi_1 = -2, \xi_2 = 8\} =$

$= 0.03 + 0.05 + 0.11 + 0.05 + 0.01 + 0.02 + 0.08 + 0.16 +$

$+ 0.13 + 0.07 + 0.03 + 0.26 = 1$

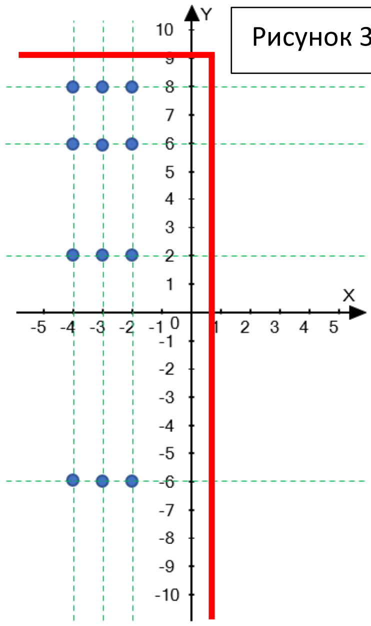


Рисунок 3.14

Отримали сумісну функцію розподілу, яку можна записати у вигляді таблиці 3.1.

y \ x	$x \leq -4$	$-4 < x \leq -3$	$-3 < x \leq -2$	$x > -2$
$y \leq -6$	0	0	0	0
$-6 < y \leq 2$	0	0,03	0,04	0,17
$2 < y \leq 6$	0	0,08	0,11	0,31
$6 < y \leq 8$	0	0,19	0,3	0,53
$y > 8$	0	0,24	0,51	1

Або:

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x \le -4) \vee (y \le -6); \\ 0{,}03, & \text{при } (-4 < x \le -3) \wedge (-6 < y \le 2); \\ 0{,}04, & \text{при } (-3 < x \le -2) \wedge (-6 < y \le 2); \\ 0{,}17, & \text{при } (x > -2) \wedge (-6 < y \le 2); \\ 0{,}08, & \text{при } (-4 < x \le -3) \wedge (2 < y \le 6); \\ 0{,}11, & \text{при } (-3 < x \le -2) \wedge (2 < y \le 6); \\ 0{,}31, & \text{при } (x > -2) \wedge (2 < y \le 6); \\ 0{,}19, & \text{при } (-4 < x \le -3) \wedge (6 < y \le 8); \\ 0{,}3, & \text{при } (-3 < x \le -2) \wedge (6 < y \le 8); \\ 0{,}53, & \text{при } (x > -2) \wedge (6 < y \le 8); \\ 0{,}24, & \text{при } (-4 < x \le -3) \wedge (y > 8); \\ 0{,}51, & \text{при } (-3 < x \le -2) \wedge (y > 8); \\ 1, & \text{при } (x > -2) \wedge (y > 8). \end{cases}$$

Тепер перевіримо, що отримана функція $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ дійсно задовольняє властивостям функції розподілу.

1) $E\left(F_{\vec{\xi}}(x,y)\right) = [0,1]$, $D\left(F_{\vec{\xi}}(x,y)\right) = \mathbb{R}^2$.

   Усі значення функції розподілу дійсно мітяться у інтервалі [0,1].

   Функція визначена для будь-якого x та y , що очевидно з поданих вище нерівностей.

2) Покоординатна монотонна неспадність.

   З таблиці видно, що значення функції зростають при просуванню вправо по усім строкам (тобто при збільшені x не зменшуються значення функції для фіксованого y). Аналогічно значення функції зростають при просуванню вниз по стовпцям (тобто при збільшенні y не зменшуються значення функції при фіскованому x.)

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = \lim\limits_{x,y\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0.$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$ (бо при $x \le -4$ значення $F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$).

   $\lim\limits_{y\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$(бо при $y \le -6$ значення $F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$).

   $\lim\limits_{x,y\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$ (бо при ($x \le -4$)∧($y \le -6$) маємо $F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$)

4) Умови узгодженості: $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$, $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$.

Знайдемо $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y)$ за різних значеннях y:

При $y \le -6$: $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0 = F_{\xi_2}(y)$.

При $-6 < y \le 2$: $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0{,}17 = F_{\xi_2}(y)$.

При $2 < y \le 6$: $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0{,}31 = F_{\xi_2}(y)$.

При $6 < y \le 8$: $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0{,}53 = F_{\xi_2}(y)$.

При $y > 8$: $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 1 = F_{\xi_2}(y)$

Отже, $\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y)$, при будь − якому y.

Знайдемо $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y)$ за різних значень x:

При $x \le -4$: $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0 = F_{\xi_1}(x)$.

При $-4 < x \le -3$: $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0{,}24 = F_{\xi_1}(x)$.

При $-3 < x \le -2$: $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0{,}51 = F_{\xi_1}(x)$.

При $x > -2$: $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 1 = F_{\xi_1}(x)$.

Отже, $\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x)$, при будь − якому x.

5) $\lim_{x,y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = 1$, оскільки при $(x > -2) \wedge (y > 8)$ маємо що $F_{\vec{\xi}}(x,y) = 1$

6) Покоординатна неперервність зліва, з того, що нерівності були строгі зліва і нестрогі справа

Отже знайдена функція дійсно є функцією розподілу для $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$.

4) Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

Знайдемо математичне сподівання координати ξ_1, яке має такий ряд розподілу:

ξ_1	-4	-3	-2
p	0.24	0.27	0.49

$E\xi_1 = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k\} = -4 * 0.24 - 3 * 0.27 - 2 * 0.49 = -2.75$

Знайдемо математичне сподівання координати ξ_2, яке має такий ряд розподілу:

ξ_2	-6	2	6	8
p	0.17	0.14	0.22	0.47

$$E\xi_2 = \sum_{k=1}^{4} y_k P\{\xi_2 = y_k\} = -6 * 0.17 + 2 * 0.14 + 6 * 0.22 + \ 8 * 0.47 = 4.34$$

Отже центр розсіювання вектора $\vec{\xi}$ – точка $(-2.75,\ 4.34)$

Тепер побудуємо кореляційну та нормовано-кореляційну матриці.

Спочатку побудуємо кореляційну матрицю $K = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K\xi_1\xi_2 \\ K\xi_1\xi_2 & D\xi_2 \end{pmatrix}$,

де $D\xi_i$ – дисперсія випадкової величини ξ_i, $i = 1,2$.

$K(\xi_1, \xi_2)$ – кореляційний момент ξ_1 та ξ_2.

Для обчислення кореляційного моменту скористаємося формолою: $K\xi_i\xi_k = E\xi_i\xi_k - E\xi_i E\xi_k$

Нехай $p_{ik} = P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_k\}$, тоді:

$E\xi_1\xi_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} x_i y_k p_{ik} = x_1y_1p_{11} + x_1y_2p_{12} + x_1y_3p_{13} + x_1y_4p_{14} + x_2y_1p_{21} + x_2y_2p_{22} + x_2y_3p_{23} + x_2y_4p_{24} + x_3y_1p_{31} + x_3y_2p_{32} + x_3y_3p_{33} + x_3y_4p_{34} =$

= - 4*(-6*0.03 + 2*0.05 + 6*0.11 + 8 * 0.05) - 3*(-6*0.01 + 2*0.02 + 6*0.08 + 8 * 0.16) –

- 2*(-6*0.13 + 2*0.07 + 6*0.03 + 8 * 0.26) = -3.92 -5.22 – 3.24 = -12.38

$E\xi_1$ = -2.75 (Знайдено раніше)

$E\xi_2$ = 4.34 (Знайдено раніше)

Отже $K\xi_1\xi_2 = K\xi_2\xi_1 = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = -12.38 + 2.75 * 4.34 = -0.445$

Тепер знайдемо диспресії, за формулою : $D\xi_i = E\xi_i^2 - (E\xi_i)^2$

$E\xi_1^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 P\{\xi_1 = x_i\} = 16 * 0.24 + 9 * 0.27 + 4 * 0.49 = 8.23$

$E\xi_2^2 = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 P\{\xi_1 = y_i\} = 36 * 0.17 + 4 * 0.14 + 36 * 0.22 + 64 * 0.47 = 44.68$

Отже:

$D\xi_1 = K\xi_1\xi_1 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = 8.23 - 2.75^2 = 0.6675 > 0$

$D\xi_2 = K\xi_2\xi_2 = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = 44.68 - 4.34^2 = 25.8444 > 0$

Отже, шукана кореляційна матриця має вигляд:

$K = \begin{pmatrix} 0.6675 & -0.445 \\ -0.445 & 25.8444 \end{pmatrix}$.

Оскільки $K(\xi_1, \xi_2) \neq 0$, то випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є корельованими та залежними.

Залежність можна також перевірити тим, що P($\xi_1 = -4, \xi_2 = -6$) = 0.03 ,

а P($\xi_1 = -4$) $*$ P($\xi_2 = -6$) $= 0.24 * 0.17 = 0.0408$

Тепер перевіримо матрицю K на додатно-визначеність (det K > 0):

det K = 0.6675*25.8444 – 0.445*0.445 = 17.053112 > 0, отже матриця додатно-визначена.

Тепер знайдемо нормовану кореляційну матрицю : $R = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_1, \xi_2) & 1 \end{pmatrix}$

де коефіцієнт кореляції $r(\xi_1, \xi_2) = \frac{K(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 \cdot D\xi_2}} = -\frac{0.445}{\sqrt{0.6675 * 25.8444}} \approx -0.107$

Отже, нормована матриця має вигляд $R = \begin{pmatrix} 1 & -0.107 \\ -0.107 & 1 \end{pmatrix}$

5. Умовні ряди розподілу для кожної координати.

Знайдемо умовні ймовірності $P\{\xi_1 = x_k / \xi_2 = y_j\}$ і $P\{\xi_2 = y_j / \xi_1 = x_k\}$, використовуючи формули:

$P\{\xi_1 = x_i / \xi_2 = y_k\} = \frac{P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_k\}}{P\{\xi_2 = y_k\}} = \frac{p_{ik}}{p_{*k}}$ (**1**), де i = $\overline{1,3}$, k = $\overline{1,4}$, $p_{ik} = P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_k\}$, $p_{*k} = P\{\xi_2 = y_k\}$

$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = x_k\} = \frac{P\{\xi_2 = y_i, \xi_1 = x_k\}}{P\{\xi_1 = x_k\}} = \frac{p_{ki}}{p_{k*}}$ (**2**), де i = $\overline{1,4}$, k = $\overline{1,3}$, $p_{ki} = P\{\xi_1 = x_k, \xi_2 = y_i\}$, $p_{k*} = P\{\xi_1 = x_k\}$

Обчислимо за формулою (1) умовні ймовірності для ДВВ ξ_1, при цьому має виконуватись умова:

$\forall k = \overline{1,4} \; - \; \sum_{i=1}^{3} P\{\xi_1 = x_i / \xi_2 = y_k\} = 1$

1) Якщо $\xi_2 = -6$

   $P\{\xi_1 = -4 \,/\, \xi_2 = -6\} = \frac{0.03}{0.17} = \frac{3}{17}$

   $P\{\xi_1 = -3 / \xi_2 = -6\} = \frac{0.01}{0.17} = \frac{1}{17}$

   $P\{\xi_1 = -2 \,/\, \xi_2 = -6\} = \frac{0.13}{0.17} = \frac{13}{17}$

   Перевіримо виконання умови: $\sum_{i=1}^{3} P\{\xi_1 = x_i / \xi_2 = -6\} = \frac{3+1+13}{17} = 1$

2) Якщо $\xi_2 = 2$

   $P\{\xi_1 = -4 \,/\, \xi_2 = 2\} = \frac{0.05}{0.14} = \frac{5}{14}$

$P\{\xi_1 = -3/\ \xi_2 = 2\} = \dfrac{0.02}{0.14} = \dfrac{2}{14}$

$P\{\xi_1 = -2/\ \xi_2 = 2\} = \dfrac{0.07}{0.14} = \dfrac{7}{14}$

Перевіримо виконання умови: $\sum_{i=1}^{3} P\{\xi_1 = x_i\ /\ \xi_2 = 2\} = \frac{5+2+7}{14} = 1$

3) Якщо $\xi_2 = 6$

$P\{\xi_1 = -4\ /\ \xi_2 = 6\} = \dfrac{0.11}{0.22} = \dfrac{11}{22}$

$P\{\xi_1 = -3\ /\ \xi_2 = 6\} = \dfrac{0.08}{0.22} = \dfrac{8}{22}$

$P\{\xi_1 = -2\ /\ \xi_2 = 6\} = \dfrac{0.03}{0.22} = \dfrac{3}{22}$

Перевіримо виконання умови: $\sum_{i=1}^{3} P\{\xi_1 = x_i\ \ /\ \xi_2 = 6\} = \frac{11+8+3}{22} = 1$

4) Якщо $\xi_2 = 8$

$P\{\xi_1 = -4\ /\ \xi_2 = 8\} = \dfrac{0.05}{0.47} = \dfrac{5}{47}$

$P\{\xi_1 = -3\ /\ \xi_2 = 8\} = \dfrac{0.16}{0.47} = \dfrac{16}{47}$

$P\{\xi_1 = -2\ /\ \ \xi_2 = 8\} = \dfrac{0.26}{0.47} = \dfrac{26}{47}$

Перевіримо виконання умови: $\sum_{i=1}^{3} P\{\xi_1 = x_i/\ \xi_2 = 8\} = \frac{5+16+26}{47} = 1$

Отже, маючи усі необхідні умовні ймовірності, можемо скласти умовний ряд розподілу для ξ_1, такого вигляду:

ξ_1	x_1	x_2	x_3
$P\{\xi_1 = x_i\ /\ \xi_2 = y_1\}$	$P\{\xi_1 = x_1\ /\ \xi_2 = y_1\}$	$P\{\xi_1 = x_2\ /\ \xi_2 = y_1\}$	$P\{\xi_1 = x_3\ /\ \xi_2 = y_1\}$
$P\{\xi_1 = x_i\ /\ \xi_2 = y_2\}$	$P\{\xi_1 = x_1\ /\ \xi_2 = y_2\}$	$P\{\xi_1 = x_2\ /\ \xi_2 = y_2\}$	$P\{\xi_1 = x_3\ /\ \xi_2 = y_2\}$
$P\{\xi_1 = x_i\ /\ \xi_2 = y_3\}$	$P\{\xi_1 = x_1\ /\ \xi_2 = y_3\}$	$P\{\xi_1 = x_2\ /\ \xi_2 = y_3\}$	$P\{\xi_1 = x_3\ /\ \xi_2 = y_3\}$
$P\{\xi_1 = x_i\ /\ \xi_2 = y_4\}$	$P\{\xi_1 = x_1\ /\ \xi_2 = y_4\}$	$P\{\xi_1 = x_2\ /\ \xi_2 = y_4\}$	$P\{\xi_1 = x_3\ /\ \xi_2 = y_4\}$

Тобто:

ξ_1	-4	-3	-2
$P\{\xi_1 = x_i \ / \ \xi_2 = -6\}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{13}{17}$
$P\{\xi_1 = x_i \ / \ \xi_2 = 2\}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{7}{14}$
$P\{\xi_1 = x_i \ / \ \xi_2 = 6\}$	$\frac{11}{22}$	$\frac{8}{22}$	$\frac{3}{22}$
$P\{\xi_1 = x_i \ / \ \xi_2 = 8\}$	$\frac{5}{47}$	$\frac{16}{47}$	$\frac{26}{47}$

Тепер аналогічно для ξ_2

Обчислимо за формулою (1) умовні ймовірності для ДВВ ξ_2, при цьому має виконуватись умова:

$\forall k = \overline{1,3} \ - \ \sum_{i=1}^{4} P\{\xi_2 = y_i \ / \ \xi_1 = x_k\} = 1$

1) Якщо $\xi_1 = -4$

$$P\{\xi_2 = -6/ \ \xi_1 = -4\} = \frac{0.03}{0.24} = \frac{3}{24}$$
$$P\{\xi_2 = 2/ \ \xi_1 = -4\} = \frac{0.05}{0.24} = \frac{5}{24}$$
$$P\{\xi_2 = 6/ \ \xi_1 = -4\} = \frac{0.11}{0.24} = \frac{11}{24}$$
$$P\{\xi_2 = 8/ \ \xi_1 = -4\} = \frac{0.05}{0.24} = \frac{5}{24}$$

Перевіримо виконання умови: $\sum_{i=1}^{4} P\{\xi_2 = y_i / \ \xi_1 = -4\} = \frac{3+5+11+5}{24} = 1$

2) Якщо $\xi_1 = -3$

$$P\{\xi_2 = -6/ \ \xi_1 = -3\} = \frac{0.01}{0.27} = \frac{1}{27}$$
$$P\{\xi_2 = 2/ \ \xi_1 = -3\} = \frac{0.02}{0.27} = \frac{2}{27}$$
$$P\{\xi_2 = 6/ \ \xi_1 = -3\} = \frac{0.08}{0.27} = \frac{8}{27}$$
$$P\{\xi_2 = 8/ \ \xi_1 = -3\} = \frac{0.16}{0.27} = \frac{16}{27}$$

Перевіримо виконання умови: $\sum_{i=1}^{4} P\{ \ \xi_2 = y_i / \ \xi_1 = -3\} = \frac{1+2+8+16}{27} = 1$

3) Якщо $\xi_1 = -2$

$$P\{\xi_2 = -6/ \ \xi_1 = -2\} = \frac{0.13}{0.49} = \frac{13}{49}$$
$$P\{\xi_2 = 2/ \ \xi_1 = -2\} = \frac{0.07}{0.49} = \frac{7}{49}$$
$$P\{\xi_2 = 6/ \ \xi_1 = -2\} = \frac{0.03}{0.49} = \frac{3}{49}$$
$$P\{\xi_2 = 8/ \ \xi_1 = -2\} = \frac{0.26}{0.49} = \frac{26}{49}$$

Перевіримо виконання умови: $\sum_{i=1}^{4} P\{\xi_2 = y_i \ / \ \xi_1 = -2\} = \frac{13+7+3+26}{49} = 1$

Отже, маючи усі необхідні умовні ймовірності, можемо скласти умовний ряд розподілу для ξ_2, такого вигляду:

ξ_2	y_1	y_2	y_3	y_4
$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = x_1\}$	$P\{\xi_2 = y_1 / \xi_1 = x_1\}$	$P\{\xi_2 = y_2 / \xi_1 = x_1\}$	$P\{\xi_2 = y_3 / \xi_1 = x_1\}$	$P\{\xi_2 = y_4 / \xi_1 = x_1\}$
$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = x_2\}$	$P\{\xi_2 = y_1 / \xi_1 = x_2\}$	$P\{\xi_2 = y_2 / \xi_1 = x_2\}$	$P\{\xi_2 = y_3 / \xi_1 = x_2\}$	$P\{\xi_2 = y_4 / \xi_1 = x_2\}$
$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = x_3\}$	$P\{\xi_2 = y_1 / \xi_1 = x_3\}$	$P\{\xi_2 = y_2 / \xi_1 = x_3\}$	$P\{\xi_2 = y_3 / \xi_1 = x_3\}$	$P\{\xi_2 = y_4 / \xi_1 = x_3\}$

Тобто:

ξ_2	-6	2	6	8
$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = -4\}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{5}{24}$
$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = -3\}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$
$P\{\xi_2 = y_i / \xi_1 = -2\}$	$\frac{13}{49}$	$\frac{7}{49}$	$\frac{3}{49}$	$\frac{26}{49}$

6. Умовні математичні сподівання кожної координати.

Умовне математичне сподівання ДВВ ξ_1 відносно значення $\xi_2 = y_j,\ j = \overline{1,4}$ обчислюється за формулою:

$$E(\xi_1/\xi_2 = y_j) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \varphi\left(y_j\right), \qquad \text{для } \forall\, j = \overline{1,4}$$

Умовне математичне сподівання ДВВ ξ_2 відносно значення $\xi_1 = x_j,\ j = \overline{1,3}$ обчислюється за формулою:

$$E(\xi_2/\xi_1 = x_j) = \sum_{k=1}^{4} y_k P\{\xi_2 = y_k/\xi_1 = x_j\} == \psi(x_j), \text{ для } \forall\, j = \overline{1,3}$$

Порахуємо усі $E(\xi_1/\xi_2 = y_j)$:

1) $E(\xi_1/\xi_2 = -6) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = -6\} = -4 * \frac{3}{17} - 3 * \frac{1}{17} - 2 * \frac{13}{17} = \frac{-41}{17}$
2) $E(\xi_1/\xi_2 = 2) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 2\} = -4 * \frac{5}{14} - 3 * \frac{2}{14} - 2 * \frac{7}{14} = \frac{-40}{14}$
3) $E(\xi_1/\xi_2 = 6) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 6\} = -4 * \frac{11}{22} - 3 * \frac{8}{22} - 2 * \frac{3}{22} = \frac{-74}{22}$

4) $E(\xi_1/\xi_2 = 8) = \sum_{k=1}^{3} x_k P\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 8\} = -4 * \frac{5}{47} - 3 * \frac{16}{47} - 2 * \frac{26}{47} = \frac{-120}{47}$

Тепер складемо ряд розподілу, що має вигляд:

$E(\xi_1/\xi_2)$	$E(\xi_1/\xi_2 = y_1)$	$E(\xi_1/\xi_2 = y_2)$	$E(\xi_1/\xi_2 = y_3)$	$E(\xi_1/\xi_2 = y_4)$
p	$P\{\xi_2 = y_1\}$	$P\{\xi_2 = y_2\}$	$P\{\xi_2 = y_3\}$	$P\{\xi_2 = y_4\}$

Тобто:

$E(\xi_1/\xi_2)$	$\frac{-41}{17}$	$\frac{-40}{14}$	$\frac{-74}{22}$	$\frac{-120}{47}$
p	0.17	0.14	0.22	0.47

Тепер перевіримо умову, що $E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = E\xi_1$:

$$E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = -\frac{41}{17} * 0.17 - \frac{40}{14} * 0.14 - \frac{74}{22} * 0.22 - \frac{120}{47} * 0.47 = -2.75 = E\xi_1.$$

Перевірка - успішна.

Тепер зробимо аналогічні кроки для ξ_2:

Порахуємо усі $E\big(\xi_2/\xi_1 = x_j\big)$:

1) $E(\xi_2/\xi_1 = -4) = \sum_{k=1}^{4} y_k P\{\xi_2 = y_k/\xi_1 = -4\} = -6 * \frac{3}{24} + 2 * \frac{5}{24} + 6 * \frac{11}{24} + 8 * \frac{5}{24} = \frac{98}{24}$
2) $E(\xi_2/\xi_1 = -3) = \sum_{k=1}^{4} y_k P\{\xi_2 = y_k/\xi_1 = -3\} = -6 * \frac{1}{27} + 2 * \frac{2}{27} + 6 * \frac{8}{27} + 8 * \frac{16}{27} = \frac{174}{27}$
3) $E\left(\frac{\xi_2}{\xi_1} = -2\right) = \sum_{k=1}^{4} y_k P\left\{\xi_2 = \frac{y_k}{\xi_1} = -2\right\} = -6 * \frac{13}{49} + 2 * \frac{7}{49} + 6 * \frac{3}{49} + 8 * \frac{26}{49} = \frac{162}{49}$

Тепер складемо ряд розподілу, що має вигляд:

$E(\xi_2/\xi_1)$	$E(\xi_2/\xi_1 = x_1)$	$E(\xi_2/\xi_1 = x_2)$	$E(\xi_2/\xi_1 = x_3)$
p	$P\{\xi_1 = x_1\}$	$P\{\xi_1 = x_2\}$	$P\{\xi_1 = x_3\}$

Тобто:

$E(\xi_2/\xi_1)$	$\frac{98}{24}$	$\frac{174}{27}$	$\frac{162}{49}$
p	0.24	0.27	0.49

Тепер перевіримо умову, що $E\left(E\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)\right) = E\xi_2$:

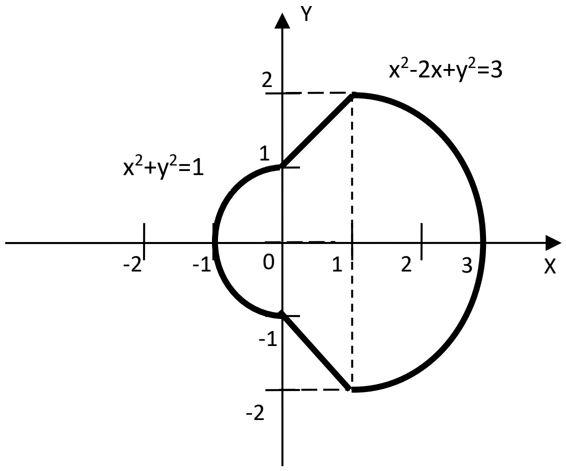
$$E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = \frac{98}{24} * 0.24 + \frac{174}{27} * 0.27 + \frac{162}{49} * 0.49 = 4.34 = E\xi_2$$

Перевірка – успішна, отже всі підрахунки вірні.

Завдання 2:

Дано: Випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1,\ \xi_2)$ рівномірно розподілений в заданій області G:

ξ_1 та ξ_2



Знайти:

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.
2. Функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно.
3. Функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x,\ y)$ випадкового вектора.
4. Математичні сподівання координат та кореляційну матрицю.
5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.
6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Розрахунок потрібних в подальшому інтегралів:

1) $I_1 = \int \sqrt{a - x^2}\, dx = \langle\, x = \sqrt{a} * \sin(b)\,,\ dx = \sqrt{a} * \cos(b)\, db\, \rangle =$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2 * \sin^2(b)} * \cos(b)\, db = a * \int \cos^2(b)\, db = \frac{a}{2} * \int (1 + \cos(2b)) db =$$

$= \frac{a}{2} * \left(b + \frac{\sin(2b)}{2}\right)$, де b $=$ $\arcsin(\frac{x}{\sqrt{a}})$

2) $I_2 = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \langle\, x = \sin(b)\,,\ dx = \cos(b)\, db\, \rangle =$

$$= \int \sqrt{1 - \sin^2(b)} * \cos(b)\, db = \int \cos^2(b)\, db = \frac{1}{2} * \int (1 + \cos(2b)) db =$$

$$= \frac{1}{2} * \left(\arcsin(x) + \frac{\sin(2 \arcsin(x))}{2}\right) = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x)) \cos(\arcsin(x))}{2} =$$

$$= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

3) $I_3 = \int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \langle\, x = 2 * \sin(b)\,,\ dx = 2 * \cos(b)\, db\, \rangle =$

$$= \int \sqrt{4 - 4 * \sin^2(b)} * \cos(b)\, db = 2 * \int \cos^2(b)\, db = \int (1 + \cos(2b)) db =$$

$$= 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Розв'язання

1. Щільність розподілу координат ξ_1 та ξ_2

Для початку обчислимо площу G. Для цього розіб'ємо нашу область на 2 половини(коли y>0 та коли y<0), які мають однакові площі. Обремо верхню та назвемо її GU. Розіб'ємо цю область на 3 частини:

GU1 = {(x,y) є GU | (-1 <= x <= 0)} – це чверть круга з радіусом 1, тому її площа рівна: $S_{GU1} = \frac{1}{4} * \pi * 1^2 = \frac{\pi}{4}$

GU2 = {(x,y) є GU | (0 <= x <= 1)}, це трапеція і її площа рівна:

$S_{GU2} = \frac{1+2}{2} * 1 = 1.5$

GU3 = {(x,y) є GU | (1<= x <= 3)}. Для знаходження площі подивимося на рівняння кривої: $x^2 - 2x + y^2 = 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$, тобто ми знаходимо площу четверті круга з рідусом 2: $S_{GU3} = \frac{1}{4} * \pi * 2^2 = \pi$

Отже $S_G = 2 * S_{GU} = 2 * (S_{GU1} + S_{GU2} + S_{GU3}) = 2 * \left(\frac{\pi}{4} + 1.5 + \pi\right) =$

$= 2.5\pi + 3$

Тоді за формулою $f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_G}, (x,y) \in G; \\ 0, \ (x,y) \notin G, \end{cases}$, щільність вектора

$\vec{\xi}$ рівномірно розподіленого в області G:

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2.5\pi + 3}, (x,y) \in G; \\ 0, \ (x,y) \notin G, \end{cases}$$

Тепер використовуючи формулу: $\begin{cases} f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy; \\ f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx; \end{cases}$, знайдемо маргінальні щільності, і для полегшення розрахунків, позначемо S = $S_G =$

$= 2.5\pi + 3$

Знайдемо $f_{\xi_1}(x)$:

Якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, то $f_{\xi_1}(x) = 0$

Якщо $x \in [-1; 0]$, то $f_{\xi_1}(x) = 2 * \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{s} dy = \frac{2}{s} * \sqrt{1-x^2}$

Якщо $x \in [0; 1]$, то $f_{\xi_1}(x) = 2 * \int_0^{x+1} \frac{1}{s} dy = \frac{2}{s} * (x+1)$

Якщо $x \in [1; 3]$, то $f_{\xi_1}(x) = 2 * \int_0^{\sqrt{4-(x-1)^2}} \frac{1}{s} dy = \frac{2}{s} * \sqrt{4-(x-1)^2}$

Отже,

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{2}{2.5\pi + 3} * \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty); \\ \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1; 0]; \\ (x+1), & x \in [0; 1]; \\ \sqrt{4-(x-1)^2}, & x \in [1; 3]; \end{cases}$$

Тепер перевіримо умови нормування ($\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) dx = 1$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) dx = \frac{2}{s} * \left(\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\, dx + \int_{0}^{1} (x+1)\, dx + \int_{1}^{3} \sqrt{4-(x-1)^2} dx \right) =$$

$$= \langle \text{використаємо } I_1 \rangle = \frac{2}{s} * \left(\frac{\pi}{4} + 1.5 + \pi \right) = \frac{2.5\pi + 3}{s} = 1.$$

Отже, перевірка успішна.

Знайдемо $f_{\xi_2}(y)$:

Якщо $y \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то $f_{\xi_2}(y) = 0$

Якщо $y \in [-2; -1]$, то $f_{\xi_2}(y) = \int_{-y-1}^{1+\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{s} dx = \frac{1}{s} * \left(1 + \sqrt{4-y^2} + y + 1\right) =$

$= \frac{1}{s} * \left(2 + \sqrt{4-y^2} + y\right)$

Якщо $y \in [-1; 1]$, то $f_{\xi_2}(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{s} dx = \frac{1}{s} * (1 + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2})$

Якщо $y \in [1; 2]$, то $f_{\xi_2}(y) = \int_{y-1}^{1+\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{s} dx = \frac{1}{s} * \left(1 + \sqrt{4-y^2} - y + 1\right) =$

$= \frac{1}{s} * \left(2 + \sqrt{4-y^2} - y\right)$

Отже,

$$f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2.5\pi + 3} * \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty); \\ \left(2 + \sqrt{4 - y^2} + y\right), & y \in [-2; -1]; \\ (1 + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{1 - y^2}\ ), & y \in [-1; 1]; \\ \left(2 + \sqrt{4 - y^2} - y\right), & y \in [1; 2]; \end{cases}$$

Тепер перевіримо умови нормування ($\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy = 1$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy =$$

$$= \frac{1}{s} * (\int_{-2}^{-1} \left(2 + \sqrt{4 - y^2} + y\right) dy + \int_{1}^{2} (2 + \sqrt{4 - y^2} - y)dy + \int_{-1}^{1} \left(1 + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{1 - y^2}\ \right)dy =$$

$$= \langle \text{використаємо } I_1 \rangle = \frac{1}{s} * \left(\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{7\pi}{6} + 2 + \sqrt{3}\right)\right) = \frac{1}{s} * \left(\frac{5\pi}{2} + 3\right) = 1$$

Отже, перевірка успішна.

2. Функції розподілу координат ξ_1 *та* ξ_2

Нехай $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ – функції розподілу координат вектора $\vec{\xi}$.

Застосуємо формули $\begin{cases} F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt; \\ F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)ds. \end{cases}$

Знайдемо $F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt$

При $x \in (-\infty; -1)$: $F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

При $x \in [-1; 0]$:

$$F_{\xi_1}(x) = \frac{2}{s}(\int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{x} \sqrt{1 - t^2}\, dt) = \frac{1}{s} * \left(\arcsin(x) + \frac{\sin(2\arcsin(x))}{2}\right) + \frac{\pi}{2s}$$

При $x \in [0; 1]$:

$$F_{\xi_1}(x) = \frac{2}{s}(\int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{0} \sqrt{1 - t^2}\, dt + \int_{0}^{x} (t + 1)dt) = \frac{2}{s}(\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{2} + x)$$

При $x \in [1;3]$:

$$F_{\xi_1}(x) = \frac{2}{s}\left(\int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{0} \sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{0}^{1} (t+1)dt + \int_{1}^{x} \sqrt{4-(t-1)^2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{s}\left(\frac{\pi}{4} + 1.5 + 2\left(\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)}{2}\right)\right)$$

При $x > 3$:

$$F_{\xi_1}(x) = \frac{2}{s}\left(\int_{-\infty}^{-1} 0dt + \int_{-1}^{0} \sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{0}^{1} (t+1)dt + \int_{1}^{3} \sqrt{4-(t-1)^2}\,dt + \int_{3}^{\infty} 0dt\right) = \frac{2}{s}\left(\frac{\pi}{4} + 1.5 + \pi\right) =$$

$$= \frac{2}{s}(1.25\pi + 1.5) = 1.$$

Отже,

$$F_{\xi_1}(x) = \frac{1}{2.5\pi + 3} * \begin{cases} 0 & x \in (-\infty;-1); \\ \left(\arcsin(x) + \frac{\sin(2\arcsin(x))}{2}\right) + \frac{\pi}{2} & x \in [-1;0]; \\ \frac{\pi}{2} + x^2 + 2x & x \in [0;1]; \\ \frac{\pi}{2} + 3 + 4\left(\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)}{2}\right) & x \in [1;3]; \\ 2.5\pi + 3 & x > 3; \end{cases}$$

Тепер виконаємо перевірку, що це дійсно функція розподілу.

1) З нерівностей від x очевидно, що $D\left(F_{\xi_1}(x)\right) = \mathbb{R}$

$E\left(F_{\xi_1}(x)\right) \subset \langle 0,1 \rangle$ - також виконується

2) Монотонно неспадна поведінка функції.

Взявши похідні, отримаємо функції щільності розподілу, які є невід'ємними на відповідних проміжках, тому вихідні функції монотонно неспадні.

3) Гранична поведінка функції розподілу: $\lim_{x\to+\infty} F_{\xi_1}(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_{\xi_1}(x) = 0$

4) Неперервність:

$F_{\xi_1}(-1-0) = 0$

$F_{\xi_1}(-1+0) = \frac{1}{s} * \left(\arcsin(-1) + \frac{\sin(2\arcsin(-1))}{2}\right) + \frac{\pi}{2s} = \frac{1}{s} * (-\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2}) = 0$

$F_{\xi_1}(0-0)=\frac{1}{s}*(\left(\arcsin(0)+\frac{\sin(2\arcsin(0))}{2}\right)+\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2s}$

$F_{\xi_1}(0+0)=\frac{1}{s}*(\frac{\pi}{2}+0^2+2*0)=\frac{\pi}{2s}$

$F_{\xi_1}(1-0)=\frac{1}{s}*(\frac{\pi}{2}+1^2+2*1)=\frac{1}{s}*(3+\frac{\pi}{2})$

$F_{\xi_1}(1+0)=\frac{1}{s}*(\frac{\pi}{2}+3+4\left(\arcsin(0)+\frac{\sin(2\arcsin(0))}{2}\right))=\frac{1}{s}*(\frac{\pi}{2}+3)$

$F_{\xi_1}(3-0)=\frac{1}{s}*\left(\frac{\pi}{2}+3+4\left(\arcsin(1)+\frac{\sin(2\arcsin(1))}{2}\right)\right)=\frac{1}{s}*\left(\frac{\pi}{2}+3+2\pi\right)=1$

$F_{\xi_1}(3+0)=\frac{1}{s}(2.5\pi+3)=1$

Отже, функція неперервна в стикових точках, а між ними неперервність є очевидною.

Отже функція розподілу координат ξ_1 знайдено правильно.

Знайдемо $F_{\xi_2}(y)=\int_{-\infty}^{y}f_{\xi_2}(t)dt$

При y∈ $(-\infty;\ -2)$: $F_{\xi_2}(y)=\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{y}0dt=0$

При y∈ $[-2;-1]$:

$$F_{\xi_2}(y)=\frac{1}{s}\left(\int_{-\infty}^{-2}0dt+\int_{-2}^{y}\left(2+\sqrt{4-t^2}+t\right)dt\right)=\frac{1}{s}*(2y+\frac{y^2}{2}+2(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2})+\pi+2)$$

При y∈ $[-1;1]$:

$$F_{\xi_2}(y)=\frac{1}{s}\left(\int_{-\infty}^{-2}0dt+\int_{-2}^{-1}\left(2+\sqrt{4-t^2}+t\right)dt+\int_{-1}^{y}\left(1+\sqrt{4-t^2}++\sqrt{1-t^2}\right)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+y+2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{2}\right)+1+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{s}(y+2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{2}\right)++\frac{3}{2}+$$
$$\frac{5\pi}{4})$$

При y∈ $[1;2]$:

$$F_{\xi_2}(y)=\frac{1}{s}\left(\int_{-\infty}^{-2}0dt+\int_{-2}^{-1}(2+\sqrt{4-t^2}+t)dt+\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt{4-t^2}++\sqrt{1-t^2}\right)dt+\int_{1}^{y}(2+\sqrt{4-t^2}-t)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{s}\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{11\pi}{6}+2y-2+2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right)-2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$= \frac{1}{s}(1 + 2y - \frac{y^2}{2} + \frac{9\pi}{6} + 2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right))$$

При $y > 2$:

$$F_{\xi_2}(y) = \frac{1}{s}(\int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1}\left(2 + \sqrt{4-t^2} + t\right)dt + \int_{-1}^{1}\left(1 + \sqrt{4-t^2} + +\sqrt{1-t^2}\right)dt +$$

$$+ \int_{1}^{2}\left(2 + \sqrt{4-t^2} - t\right)dt + \int_{2}^{y} 0dt) = \frac{1}{s}\left(1 + 4 - 2 + \frac{9\pi}{6} + \pi\right) = \frac{1}{s}(3 + 2.5\pi) = 1$$

Отже,

$$F_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2.5\pi + 3} * \begin{cases} 0 & y \in (-\infty; -2); \\ (2y + \frac{y^2}{2} + 2(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}) + \pi + 2) & y \in [-2; -1]; \\ (y + 2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{2}\right) + \frac{3}{2} + \frac{5\pi}{4}) & y \in [-1; 1]; \\ (1 + 2y - \frac{y^2}{2} + \frac{9\pi}{6} + 2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right)) & y \in [1; 2]; \\ (3 + 2.5\pi) & y > 2; \end{cases}$$

Тепер виконаємо перевірку, що це дійсно функція розподілу.

1) З нерівностей від y очевидно, що $D\left(F_{\xi_2}(y)\right) = \mathbb{R}$

$E\left(F_{\xi_2}(y)\right) \subset \langle 0,1 \rangle$ - також виконується

2) Монотонно неспадна поведінка функції.

Взявши похідні, отримаємо функції щільності розподілу, які є невід'ємними на відповідних проміжках, тому вихідні функції монотонно неспадні.

3) Гранична поведінка функції розподілу: $\lim_{y\to+\infty} F_{\xi_2}(y) = 1$, $\lim_{y\to-\infty} F_{\xi_2}(y) = 0$

4) Неперервність:

$F_{\xi_2}(-2-0) = 0$

$F_{\xi_2}(-2+0) =$ -4+2+2$(\frac{-\pi}{2}) + \pi + 2 = 0$

$$F_{\xi_2}(-1-0) = -2 + \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \pi + 2 = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\xi_2}(-1+0) = -1 + 2\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} + \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\xi_2}(1-0) = 1 + 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} + \frac{5\pi}{4} = 2.5 + \frac{11\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\xi_2}(1+0) = 1 + 2 - \frac{1}{2} + \frac{9\pi}{6} + 2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2.5 + \frac{11\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\xi_2}(2-0) = 1 + 4 - 2 + \frac{9\pi}{6} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + \frac{15\pi}{6} = 3 + 2.5\pi$$

$$F_{\xi_2}(2+0) = 3 + 2.5\pi$$

Отже, функція неперервна в стикових точках, а між ними неперервність є очевидною.

Отже функція розподілу координат ξ_2 знайдено правильно.

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$.

За означенням сумісна функція розродiлу: $F_{\vec{\xi}}(x,\ y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$.

Тобто це ймовірність потрапляння випадкового вектора усередину нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y).

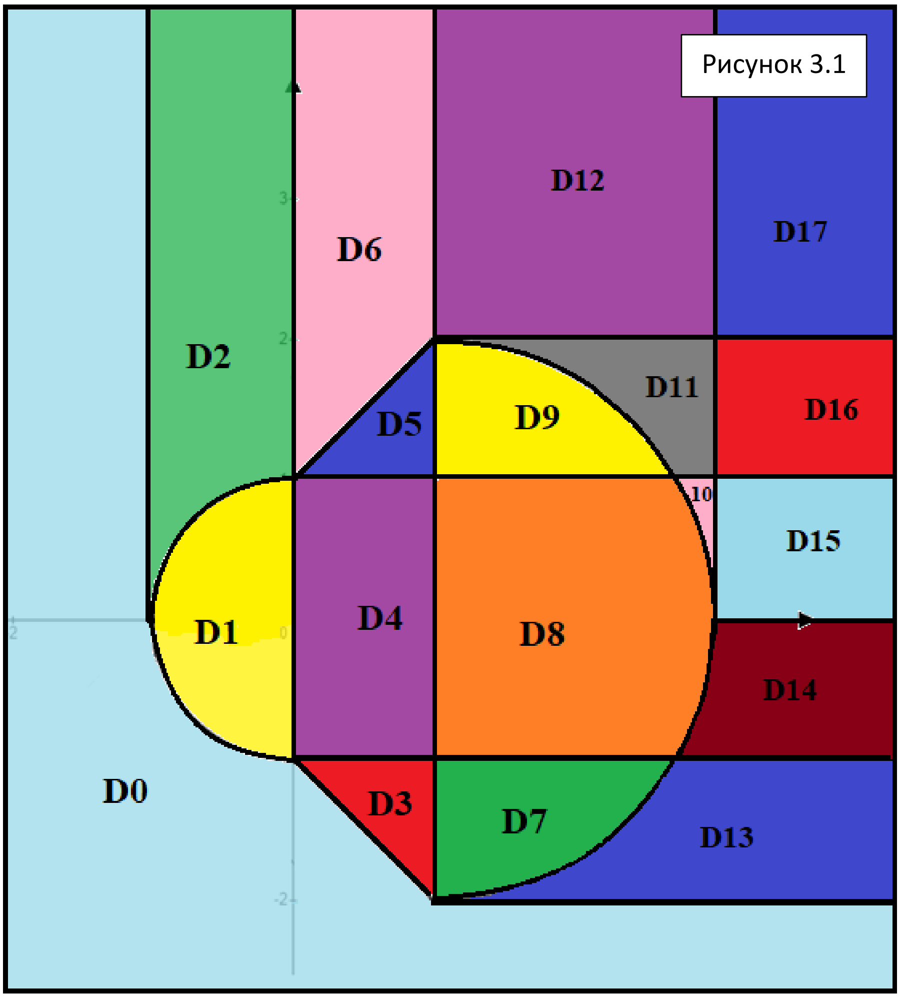
Для того, щоб обчислити сумісну функцію розподілу, скористаємось формулою:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} f_{\vec{\xi}}(t, s) ds.$$

Оскільки наш випадковий вектор розподілений рівномірно на області G, то функція щільності розподілу у кожній точці, що належить даній області це $\frac{1}{S}$. В усіх інших точках – 0.

Тоді, $F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{S^*(x,y)}{S}$, де $S^*(x, y) -$ площа перетину квадранта з вершиною у точці (x, y) та області G.

Тепер розіб’ємо площину XoY на частини, що попарно не перетинаються та в об’єднані дають $\mathbb{R}^2$. Покажемо це розбиття на рисунку 3.1



Тепер запишемо усі області в аналітичному вигляді:

$$D_0 = \left\{(x,y)\middle|(x \le -1) \vee (y \le -2) \vee \left((-1 \le x \le 0) \wedge \left(-2 \le y \le -\sqrt{1-x^2}\right)\right) \vee \left((0 \le x \le 1) \wedge (-2 \le y \le -1-x)\right)\right\}$$

$$D_1 = \{(x,y)|\ (x^2 + y^2 \le 1) \wedge (x \le 0)\}$$

$$D_2 = \{(x,y)|\ (y \ge \sqrt{1-x^2}) \wedge (-1 \le x \le 0)\}$$

$$D_3 = \{(x,y)|\ (-1-x \le y \le -1) \wedge (0 \le x \le 1)\}$$

$$D_4 = \{(x,y)|\ (0 \le x \le 1) \wedge (-1 \le y \le 1)\}$$

$$D_5 = \{(x,y)|\ (0 \le x \le 1) \wedge (1 \le y \le x+1)\}$$

$$D_6 = \{(x,y)|\ (0 \le x \le 1) \wedge (x+1 \le y)\}$$

$$D_7 = \{(x,y)|\ (1 \le x \le 3) \wedge (-\sqrt{4-(x-1)^2} \le y \le -1)\}$$

$$D_8 = \{(x,y)|\ (1 \le x \le 1 + \sqrt{4-y^2}) \wedge (-1 \le y \le 1)\}$$

$$D_9 = \{(x,y)|\ (1 \le x \le 3) \wedge (1 \le y \le \sqrt{4-(x-1)^2})\}$$

$D_{10} = \{(x,y)|\ (1 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 3) \wedge (0 \le y \le 1)\}$

$D_{11} = \{(x,y)|\ (1 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 3) \wedge (1 \le y \le 2)\}$

$D_{12} = \{(x,y)|\ (1 \le x \le 3) \wedge (2 \le y)\}$

$D_{13} = \{(x,y)|\ (1 + \sqrt{4-y^2} \le x) \wedge (-2 \le y \le -1)\}$

$D_{14} = \{(x,y)|\ (1 + \sqrt{4-y^2} \le x) \wedge (-1 \le y \le 0)\}$

$D_{15} = \{(x,y)|\ (3 \le x) \wedge (0 \le y \le 1)\}$

$D_{16} = \{(x,y)|\ (3 \le x) \wedge (1 \le y \le 2)\}$

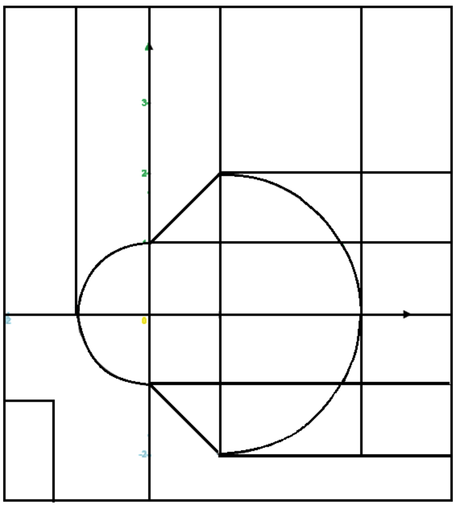
$D_{17} = \{(x,y)|\ (3 \le x) \wedge (2 \le y)\}$

Таке розбиття зумовлене виглядом подвійного інтеграла від сумісної щільності вектора $\vec{\xi}$ по області, яка утворилася в результаті перетину області G та нескінченного квадранта з вершиною у точці (x, y). Перейдемо до системи координат tOs, оскільки x та y тут є параметрами. Примітка: t – горизонатальна вісь, s – вертикальна.

Площі зафарбованих різними кольорами областей будемо позначати літерами G_i, де і вказує на номер зафарбованної області, що належить відповідному D_i.

Розглянемо кожну з областей D_i окремо:

1) $(x, y) \in D_0$



$S^*(x,y) = G_0(x,y) = 0$

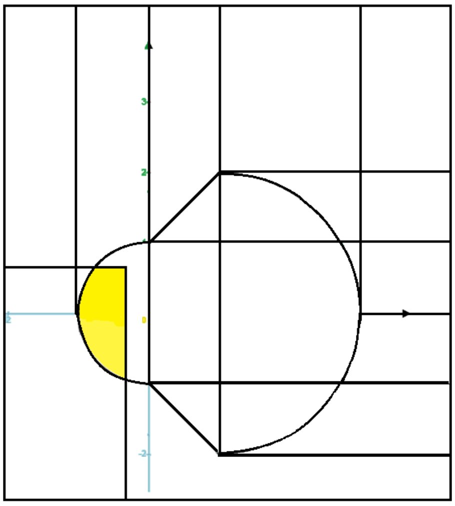
$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \dfrac{S^*(x,y)}{S} = \mathbf{0}$

2) $(x,y) \in D_1$

$$S^*(x,y) = G_1(x,y) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{y} \left(\sqrt{1-s^2}+x\right) ds =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + xy + + \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) +$$

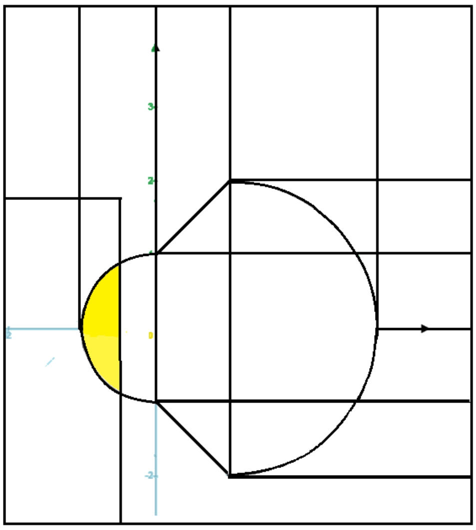
$$+ \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{4} + x\sqrt{1-x^2}$$



3) $(x,y) \in D_2$

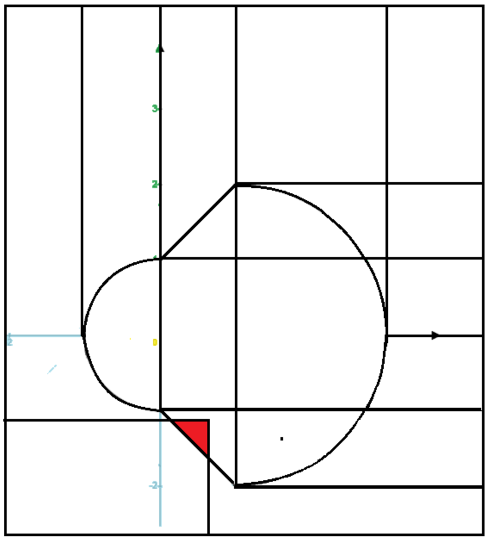
$$S^*(x,y) = G_1(x,y) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{1-s^2}+x\right) ds =$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{2} + 2x\sqrt{1-x^2}$$



4) $(x,y) \in D_3$

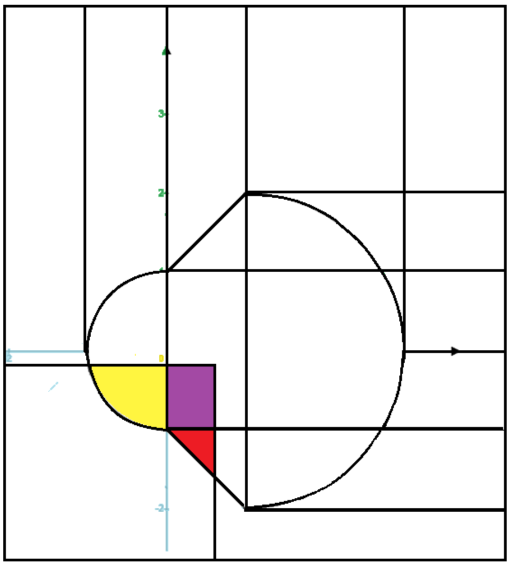
$$S^*(x,y) = G_3(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+1)^2$$



5) $(x, y) \in D_4$

$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) =$

$$= \left(\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}x^2 + x * (1 + y)$$



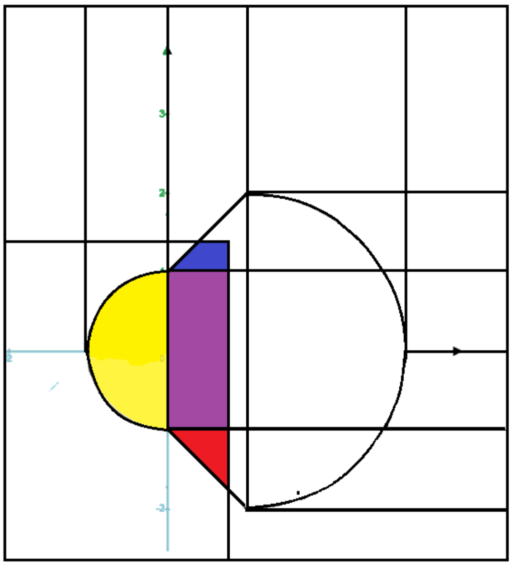
---

6) $(x, y) \in D_5$

$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_5(x,y) =$

$$= \frac{1}{2} * \pi * 1^2 + \frac{1}{2} * x^2 + 2x + \frac{1}{2}(x^2 - (x - y + 1)^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2}$$



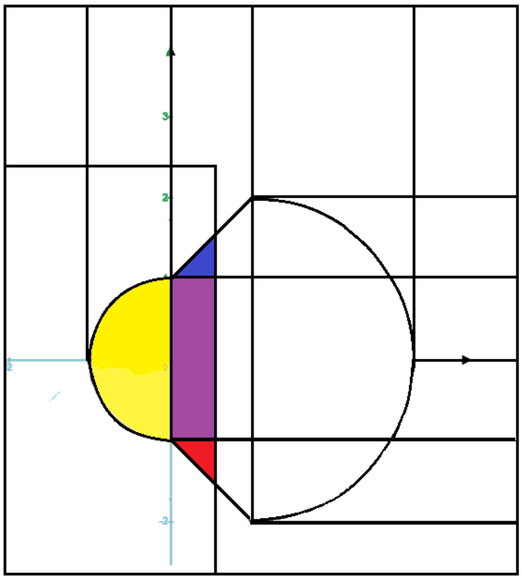
---

7) $(x, y) \in D_6$

$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_5(x,y) =$

$$= \frac{1}{2} * \pi * 1^2 + \frac{1}{2} * x^2 + 2x + \frac{1}{2}x^2 =$$

$$= x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}$$

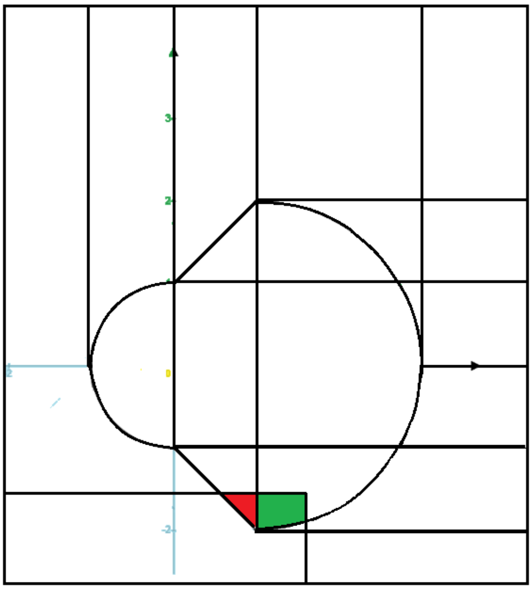


8) $(x, y) \in D_7$

$S^*(x,y) = G_3(x,y) + G_7(x,y) =$

$= \frac{1}{2} * (1 + 1 + y)^2 + \int_1^x \left(\sqrt{4 - (t-1)^2} + y\right) dt =$

$= \frac{1}{2}(2+y)^2 + xy - y + 2\left(\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)}{2}\right)$



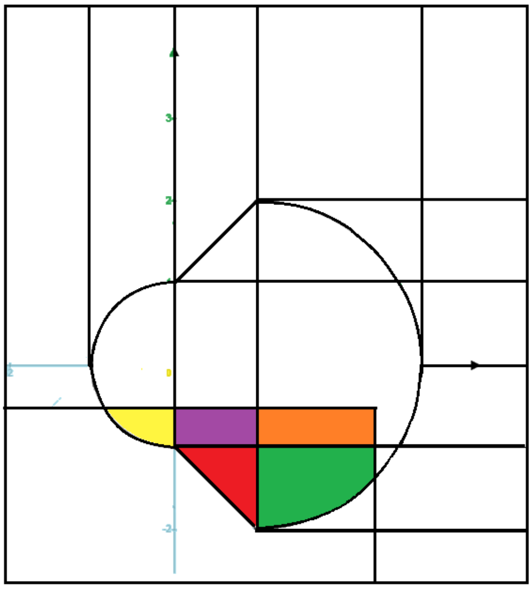
9) $(x, y) \in D_8$

$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_7(x,y) + G_8(x,y) =$

$= (\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} + x * (1 + y) +$

$+ \int_1^x \left(\sqrt{4 - (t-1)^2} - 1\right) dt = \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} +$

$+ \frac{\pi}{4} + 1.5 + xy + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)$



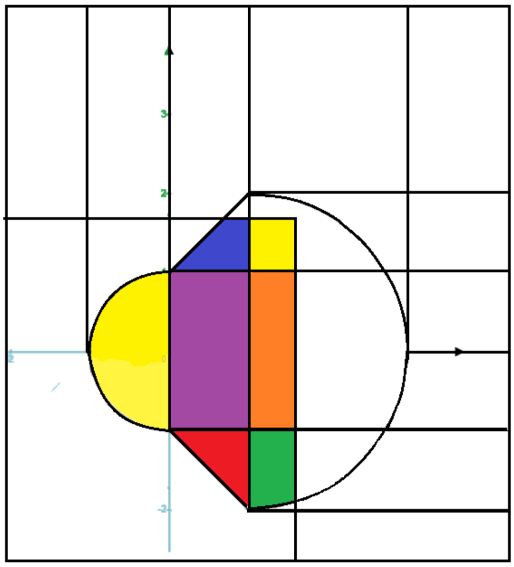
10) $(x, y) \in D_9$

$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_5(x,y) + G_7(x,y) +$

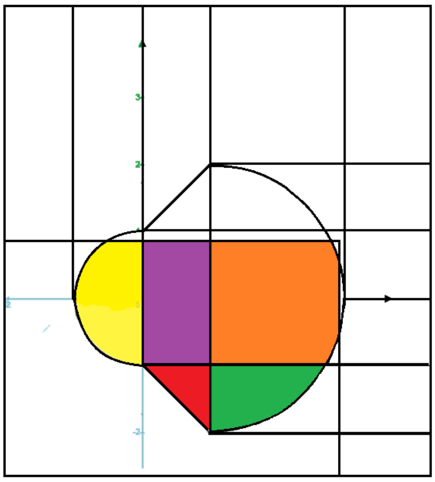
$+ G_8(x,y) + G_9(x,y) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 2x + \frac{1}{2}(1 - (2-y)^2) + (x-1)(y-1) +$

$+ (2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) - x + 1) = \frac{\pi}{2} + 2 + x - \frac{1}{2}(2-y)^2 +$

$+ 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) + (x-1)(y-1)$



11) $(x,y) \in D_{10}$



$$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_7(x,y) + G_8(x,y) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} + y + 1 +$$

$$+\int_1^{1+\sqrt{4-y^2}} \left(y+\sqrt{4-(t-1)^2}\right)dt + 2\int_{1+\sqrt{4-y^2}}^{x}\left(\sqrt{4-(t-1)^2}\right)dt =$$

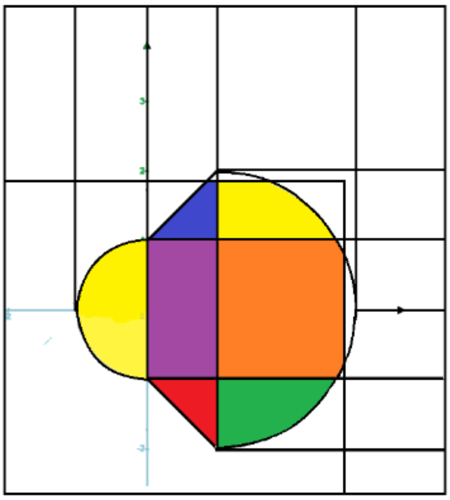
$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + y + 1 +$$

$$+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + 1.5y\sqrt{4-y^2} - 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) - y\sqrt{4-y^2} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

---

12) $(x,y) \in D_{11}$



$$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_5(x,y) + G_7(x,y) + G_8(x,y) +$$

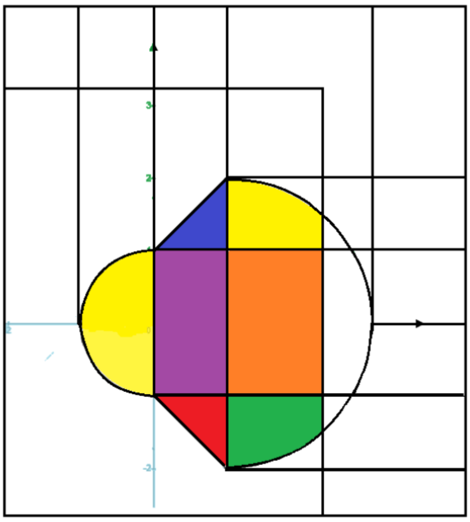
$$+G_9(x,y) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2}(1-(2-y)^2) + \int_1^{1+\sqrt{4-y^2}} \left(y+\sqrt{4-(t-1)^2}\right)dt +$$

$$+2\int_{1+\sqrt{(4-y)^2}}^{x}\left(\sqrt{4-(t-1)^2}\right)dt = \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-y)^2}{2} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) +$$

$$+\frac{\boldsymbol{y}\sqrt{4-y^2}}{2} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

---

13) $(x,y) \in D_{12}$

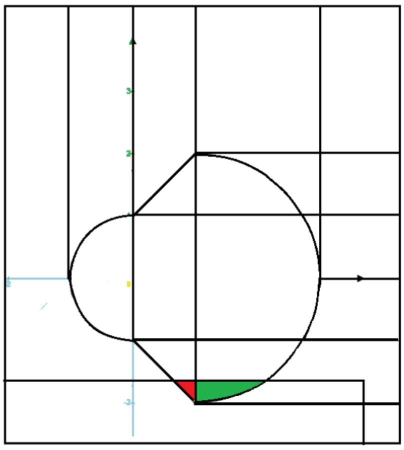


$$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_5(x,y) + G_7(x,y) + G_8(x,y) +$$

$$+G_9(x,y) = \frac{\pi}{2} + 1 + 2 + 2\int_1^{x}\left(\sqrt{4-(t-1)^2}\right)dt =$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 3 + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)}$$

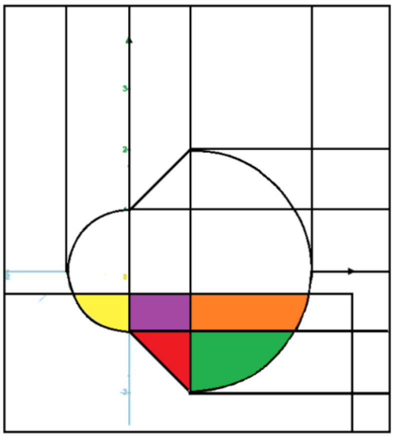
14) $(x,y) \in D_{13}$



$$S^*(x,y) = G_3(x,y) + G_7(x,y) = \frac{1}{2} * (2+y)^2 + \int_1^{1+\sqrt{4-y^2}} \left(\sqrt{4-(t-1)^2} + y\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} * (2+y)^2 + y\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right)$$

15) $(x,y) \in D_{14}$



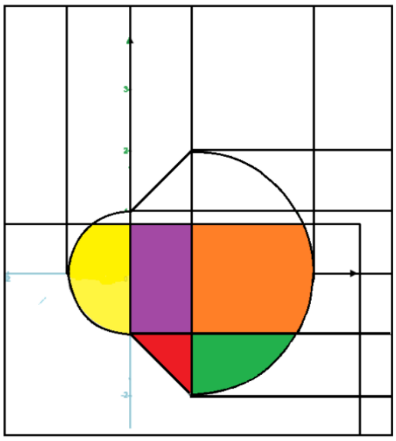
$$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_7(x,y) + G_8(x,y) =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} + 1 + y + \int_{-2}^{y}\left(1+\sqrt{4-s^2}-1\right)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right) + \pi =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + 1.5 + y + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4}$$

16) $(x,y) \in D_{15}$



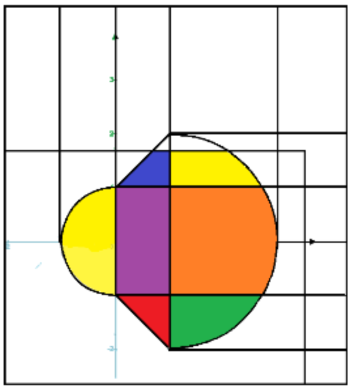
$$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_7(x,y) + G_8(x,y) =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} + 1 + y + \int_{-2}^{y}\left(1+\sqrt{4-s^2}-1\right)ds =$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right) + \pi =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + 1.5 + y + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4}$$

17) $(x,y) \in D_{16}$

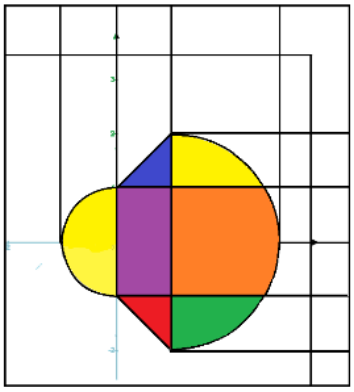


$$S^*(x,y) = G_1(x,y) + G_3(x,y) + G_4(x,y) + G_5(x,y) + G_7(x,y) + G_8(x,y) + G_9(x,y) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2}(1-(2-y)^2) + \int_{-2}^{y}\left(1+\sqrt{4-s^2}-1\right)ds = \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{1}{2}(2-y)^2 + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) +$$

$$+ \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right) + \pi = 1.5\pi + 3 - \frac{1}{2}(2-y)^2 + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$

18) $(x, y) \in D_{17}$



$S^*(x, y) = G(x, y) = \frac{\pi}{2} + 1 + 2 + \pi * \frac{4}{2} = \mathbf{2.5\pi + 3}$

Примітка: найчастіше площі областей я рахував як площі фігур, а не беручи інтеграли: G_1-інколи була площею півкола з радіусом 1, G_3- була площею прямокутного рівнобедренного трикутника, G_4- була площею прямокутника, G_5- була площею трапеції, площу якої я рахував як різницю великого трикутника і верхнього трикутника.

Примітка: якщо площа деякої області була вже знайдена, то я одразу записував її значення, без розписування інтгералу або формули площі.

Примітка: з результатів видно, що області D_{14} та D_{15} – мають однакову площу перетину $S^*(x, y)$

Тепер запишемо функції розподілу, використовуючи формулу: $F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{S^*(x,y)}{S}$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2.5\pi + 3} *$$

$$\begin{cases}
0, & (x \le -1) \vee (y \le -2) \vee \left((-1 \le x \le 0) \wedge \left(-2 \le y \le -\sqrt{1-x^2}\right)\right) \vee ((0 \le x \le 1) \wedge (-2 \le y \le -1-x)) \\
\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + xy + \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{4} + x\sqrt{1-x^2}, & (x^2 + y^2 \le 1) \wedge (x \le 0) \\
\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{2} + 2x\sqrt{1-x^2}, & \left(y \ge \sqrt{1-x^2}\right) \wedge (-1 \le x \le 0) \\
\frac{1}{2}(x + y + 1)^2, & (-1 - x \le y \le -1) \wedge (0 \le x \le 1) \\
\left(\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}x^2 + x * (1 + y), & (0 \le x \le 1) \wedge (-1 \le y \le 1) \\
\frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^2}{2} + y - \frac{1}{2}, & (0 \le x \le 1) \wedge (1 \le y \le x + 1) \\
x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}, & (0 \le x \le 1) \wedge (x + 1 \le y) \\
\frac{1}{2}(2 + y)^2 + xy - y + 2\left(\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)}{2}\right), & \left(1 \le x \le 1 + \sqrt{4-y^2}\right) \wedge (-2 \le y \le -1) \\
\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + xy + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right), & (1 \le x \le 1 + \sqrt{4-y^2}) \wedge (-1 \le y \le 1) \\
\frac{\pi}{2} + 2 + x - \frac{1}{2}(2 - y)^2 + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) + (x - 1)(y - 1), & \left(1 \le x \le 1 + \sqrt{4-y^2}\right) \wedge (1 \le y \le 2) \\
\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right), & \left(1 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 3\right) \wedge (0 \le y \le 1) \\
\frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-y)^2}{2} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \frac{\boldsymbol{y}\sqrt{4-y^2}}{2} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right), & \left(1 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 3\right) \wedge (1 \le y \le 2) \\
\frac{\pi}{2} + 3 + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right), & (1 \le x \le 3) \wedge (2 \le y) \\
\frac{1}{2} * (2 + y)^2 + y\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right), & \left(1 + \sqrt{4-y^2} \le x\right) \wedge (-2 \le y \le -1) \\
\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + 1.5 + y + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4}, & ((x \ge 3) \wedge (-1 \le y \le 1)) \vee ((1 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 3) \wedge (-1 \le y \le 0)) \\
1.5\pi + 3 - \frac{1}{2}(2 - y)^2 + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right), & (3 \le x) \wedge (1 \le y \le 2) \\
2.5\pi + 3, & (3 \le x) \wedge (2 \le y)
\end{cases}$$

Перевірку виконання умов функції розподілу виконано в додатку 1

4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

Виконаємо обчислення математичних сподівань координати:

$$\boldsymbol{E\xi_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)dx = \frac{2}{2.5\pi+3} * \left(\int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1} (x^2+x\,)dx + \int_{1}^{3} x\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-3}^{+\infty} 0dx \right) = \frac{2}{2.5\pi+3} * \left(\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{-3} \Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6}\sqrt{4-(x-1)^2}(2x^2-x-9) + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)\Big|_1^3 \right) =$$

$$= \frac{2}{2.5\pi+3} * \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\pi-\frac{2}{6}(2-1-9)\right) = \frac{2}{2.5\pi+3} * \left(\frac{1}{2}+\pi+\frac{8}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2.5\pi+3} * \left(\frac{19}{3}+2\pi\right)}$$

$$\boldsymbol{E\xi_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{2.5\pi+3} * \left(\int_{-\infty}^{-2} 0dy + \int_{-2}^{-1} y\left(2+\sqrt{4-y^2}+y\right)dy + \int_{-1}^{1} y\left(1+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}\right)dy + \right.$$

$$\left. + \int_{1}^{2} y\left(2+\sqrt{4-y^2}-y\right)dy + \int_{2}^{+\infty} 0dy \right) = \frac{1}{2.5\pi+3} * \left(\left(\frac{y^3}{3}+y^2-\frac{(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_{-2}^{-1} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{y^2}{2}-\frac{(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(-\frac{y^3}{3}+y^2-\frac{(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_1^2 \right) = \frac{1}{2.5\pi+3} * \left(-\frac{2}{3}-\sqrt{3}+0+\frac{2}{3}+\sqrt{3}\right) = \boldsymbol{0}$$

Отже, центр розсіювання випадкового вектора $\vec{\xi}$ має координати: $(E\xi_1, E\xi_2) = \left(\frac{19+6\pi}{3(2.5\pi+3)}, 0\right)$

Перейдемо до побудови кореляційної та нормованої кореляційної матриці.

За означенням: $K = \begin{pmatrix} D\xi_1 & K\xi_1\xi_2 \\ K\xi_1\xi_2 & D\xi_2 \end{pmatrix}$, де $D\xi_i$ -дисперсія ДВВ ξ_i , $i = 1{,}2$. $K\xi_i\xi_k$- кореляційний момент двох випадкових величин: ξ_1та ξ_2.

Кореляційний момент рахується за формулою: $K\xi_i\xi_k = E\xi_i\xi_k - E\xi_i E\xi_k$. Підрахуємо необхідні початкові моменти:

$$\boldsymbol{E\xi_1^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx = \frac{2}{2.5\pi+3} * \left(\int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{0} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1} (x^3+x^2\,)dx + \int_{1}^{3} x^2\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx + \int_{3}^{+\infty} 0dx \right) =$$

$$= \frac{2}{2.5\pi+3} * \left(\frac{1}{8}\left(x\sqrt{1-x^2}(2x^2-1) + \arcsin(x)\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{12}\sqrt{4-(x-1)^2}(3x^3-x^2-7x-27) + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)\Big|_1^3 \right) = \frac{2}{2.5\pi+3} * \left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+2\pi+\frac{16}{3}\right) = \frac{99\pi+284}{24(2.5\pi+3)}$$

$$\boldsymbol{E\xi_2^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{2.5\pi+3} *$$

$$* \left(\int_{-\infty}^{-2} 0dy + \int_{-2}^{-1} y^2\left(2+\sqrt{4-y^2}+y\right) dy + \int_{-1}^{1} y^2(1+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2})dy + \int_{1}^{2} y^2\left(2+\sqrt{4-y^2}-y\right) dy + \int_{2}^{+\infty} 0dy \right) =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi+3} * (\left(\frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + 2\arcsin(\frac{y}{2}) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} - \frac{y(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} \right)|_{-2}^{-1} + (\frac{y^3}{3} + \frac{\arcsin(y)}{8} - \frac{y(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} - \frac{y(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} +$$

$$+ \frac{y\sqrt{1-y^2}}{8} + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right))|_{-1}^{1} + \left(\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + 2\arcsin(\frac{y}{2}) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} - \frac{y(4-y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} \right)|_{1}^{2}) = \frac{1}{2.5\pi+3} * (\frac{2\pi}{3} + \frac{11}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{19\pi}{24} +$$

$$+ \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{11}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{1}{2.5\pi+3}(\frac{51\pi}{24} + \frac{15}{6}) = \frac{17\pi+20}{8(2.5\pi+3)}$$

$$\boldsymbol{E\xi_1\xi_2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy = \frac{1}{2.5\pi+3} * \left(\int_{-1}^{0} xdx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} ydy + \int_{0}^{1} xdx \int_{-1-x}^{1+x} ydy + \int_{1}^{3} xdx \int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} ydy \right) =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi+3} * (0+0+0) = 0\,.$$

Усі ці інтеграли рівні 0, бо інтегрування відбувається по непарній функції y(x), з межами інтегрування – симетричними відносно y = 0;

Тепер обчислимо дисперсії:

$$\boldsymbol{D\xi_1} = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \frac{99\pi+284}{24(2.5\pi+3)} - \left(\frac{19+6\pi}{3(2.5\pi+3)}\right)^2 = \frac{99\pi+284}{24(2.5\pi+3)} - \frac{36\pi^2+228\pi+361}{9(2.5\pi+3)^2} =$$

$$= \frac{(7.5\pi+9)(99\pi+284) - 8(36\pi^2+228\pi+361)}{72(2.5\pi+3)^2} = \frac{909\pi^2+2394\pi-664}{144(2.5\pi+3)^2} \approx 0.933$$

$$\boldsymbol{D\xi_2} = E\xi_2^2 - (E\xi_2)^2 = \frac{17\pi+20}{8(2.5\pi+3)} - 0 \approx 0.845$$

Тепер обчислимо кореляцію:

$\boldsymbol{K\xi_1\xi_2} = K\xi_2\xi_1 = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1E\xi_2 = 0 - 0 = 0$. Отже випадкові величини – некорельовані.

Але ξ_1 та ξ_2 – залежні, бо $f_{\vec{\xi}}(0,0) = \frac{1}{2.5\pi+3}$, а $f_{\xi_1}(0,0) * f_{\xi_2}(0,0) = \frac{2*4}{(2.5\pi+3)^2}$

Отже, кореляційна матриця має вигляд: : $\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \frac{909\pi^2+2394\pi-664}{144(2.5\pi+3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{17\pi+20}{8(2.5\pi+3)} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.933 & 0 \\ 0 & 0.845 \end{pmatrix}$

Очевидно, що ця матриця додатно визначена.

Оскільки випадкові величини ξ_1та ξ_2- некорельовані, то коефіцієнт кореляції $\boldsymbol{r(\xi_1,\xi_2)} = r(\xi_2,\xi_1) = 0$

Отже нормована кореляційна матриця має вигляд: $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & r(\xi_1,\xi_2) \\ r(\xi_2,\xi_1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Умовні щільності розподілу для кожної координати.

Обчислимо умовні щільності $f_{\xi_1}(x/y)$ та $f_{\xi_2}(y/x)$:

Згадаємо щільності розподілу окремих координат вектора та самого вектора:

$$f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2.5\pi + 3}, (x,y) \in G; \\ 0, \ \ (x,y) \notin G, \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{2}{2.5\pi + 3} * \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty); \\ \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1; 0]; \\ (x+1), & x \in [0; 1]; \\ \sqrt{4-(x-1)^2}, & x \in [1; 3]; \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2.5\pi + 3} * \begin{cases} 0, & y \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty); \\ \left(2 + \sqrt{4-y^2} + y\right), & y \in [-2; -1]; \\ (1 + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{1-y^2}\,), & y \in [-1; 1]; \\ \left(2 + \sqrt{4-y^2} - y\right), & y \in [1; 2]; \end{cases}$$

Підрахуємо відповідні умовні щільності:

$$f_{\xi_1}(x/y) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)} = \begin{cases} 0, & y \le -2; \\ \dfrac{1}{\left(2+\sqrt{4-y^2}+y\right)}, & y \in \left(-2; -1\right], x \in \left[-1-y;\ 1+\sqrt{4-y^2}\right]; \\ 0, & y \in \left(-2; -1\right], x \notin \left[-1-y;\ 1+\sqrt{4-y^2}\right]; \\ \dfrac{1}{(1+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}\,)}, & y \in \left(-1; 1\right], x \in \left[-\sqrt{1-y^2};\ 1+\sqrt{4-y^2}\right]; \\ 0, & y \in \left(-1; 1\right], x \notin \left[-\sqrt{1-y^2};\ 1+\sqrt{4-y^2}\right]; \\ \dfrac{1}{\left(2+\sqrt{4-y^2}-y\right)}, & y \in \left(1; 2\right], x \in \left[y-1;\ 1+\sqrt{4-y^2}\right]; \\ 0, & y \in \left(1; 2\right], x \notin \left[y-1;\ 1+\sqrt{4-y^2}\right]; \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y/x)=\frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(x)}=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & x\in\left(-1;0\right], y\in\left[-\sqrt{1-x^2};\ \sqrt{1-x^2}\right];\\ 0, & x\in\left(-1;0\right], y\notin\left[-\sqrt{1-x^2};\ \sqrt{1-x^2}\right];\\ \dfrac{1}{2(x+1)}, & x\in(0;1], y\in[-1-x;\ 1+x];\\ 0, & x\in(0;1], y\notin[-1-x;\ 1+x];\\ \dfrac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}, & x\in\left(1;3\right], y\in\left[-\sqrt{4-(x-1)^2};\ \sqrt{4-(x-1)^2}\right];\\ 0, & x\in\left(1;3\right], y\notin\left[-\sqrt{4-(x-1)^2};\ \sqrt{4-(x-1)^2}\right];\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Перевіримо умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx \ =\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dx}{f_{\xi_2}(y)}=\int_{-1-y}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\left(2+\sqrt{4-y^2}+y\right)}dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{(1+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2}\,)}dx=\int_{y-1}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{1}{\left(2+\sqrt{4-y^2}-y\right)}dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x,y)dy}{f_{\xi_1}(x)}=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}dy=\ \int_{-1-x}^{1+x}\frac{1}{2(x+1)}dy=$$

$$=\int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}}\frac{1}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}dy=1$$

Перевірки – успшні.

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Щоб знайти шукані умовні математичні сподівання використаємо формули:

$$\begin{cases}E(\xi_2/\xi_1=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_{\xi_2}(y/x)dy=\psi(x)\,;\\ E(\xi_1/\xi_2=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\xi_1}(x/y)dx=\varphi(y)\ .\end{cases}$$

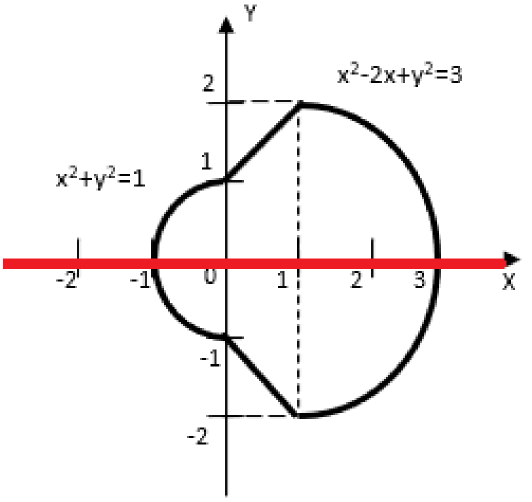
$$E(\xi_2/\xi_1=x)$$

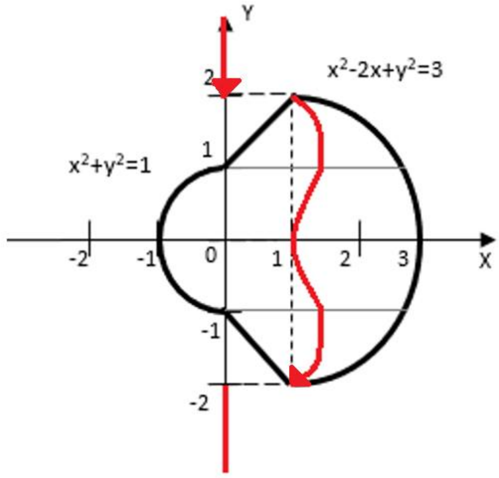
$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dy=0, & (x\le -1)\vee(x>3);\\ \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{y}{2\sqrt{1-x^2}}dy=\frac{0}{4\sqrt{1-x^2}}=0, & x\in(-1;0];\\ \displaystyle\int_{-1-x}^{1+x}\frac{y}{2(x+1)}dy=\frac{0}{4(x+1)}=\ 0, & x\in(0;1];\\ \displaystyle\int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}}\frac{y}{2\sqrt{4-(x-1)^2}}dy=\frac{0}{4\sqrt{4-(x-1)^2}}=0, & x\in(1;3].\end{cases}$$

$$E(\xi_1/\xi_2=y)=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0, & (y\le -2)\vee(y>2);\\ \displaystyle\int_{-1-y}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{x}{\left(2+\sqrt{4-y^2}+y\right)}dx=\frac{\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)^2-(-1-y)^2}{2\left(2+\sqrt{4-y^2}+y\right)}=\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{y^2+2y}}{\left(\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{y^2}}+\boldsymbol{y}\right)}, & y\in(-2;-1];\\ \displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{x}{(1+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2})}dx=\frac{\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)^2-\left(-\sqrt{1-y^2}\right)^2}{2(1+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{1-y^2})}=\frac{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{y^2}}}{\mathbf{1}+\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{y^2}}+\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{y^2}}}, & y\in(-1;1];\\ \displaystyle\int_{y-1}^{1+\sqrt{4-y^2}}\frac{x}{\left(2+\sqrt{4-y^2}-y\right)}dx=\frac{\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)^2-(y-1)^2}{2\left(2+\sqrt{4-y^2}-y\right)}=\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{y^2-2y}}{\left(\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{4}-\boldsymbol{y^2}}-\boldsymbol{y}\right)}, & y\in(1;2].\end{cases}$$

Зобразимо на рисунках знайдені лінії регресії $E(\xi_2/\xi_1=x)$ та $E(\xi_1/\xi_2=y)$ відповідно:





Перевіримо правильність розрахунків за допомогою формул повного математичного сподівання:

$$\begin{cases} E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big) = E\xi_1; \\ E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big) = E\xi_2. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E\big(E(\xi_1/\xi_2)\big)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi_1/\xi_2 = y) f_{\xi_2}(y)dy = \frac{1}{2.5\pi + 3} * \Big(\int_{-\infty}^{-2} 0dy +$$

$$+ \int_{-2}^{-1} \Big(1 - \frac{y^2 + 2y}{\big(2 + \sqrt{4 - y^2} + y\big)}\Big)\big(2 + \sqrt{4 - y^2} + y\big)dy + \int_{-1}^{1} \frac{(2 + \sqrt{4 - y^2})(1 + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{1 - y^2})}{1 + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{1 - y^2}} dy +$$

$$+ \int_{1}^{2} \Big(1 - \frac{y^2 - 2y}{\big(2 + \sqrt{4 - y^2} - y\big)}\Big)\big(2 + \sqrt{4 - y^2} - y\big)dy + \int_{2}^{+\infty} 0dy\Big) =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 3} * \left(\int_{-2}^{-1} \big(2 + \sqrt{4 - y^2} - y - y^2\big)dy + \int_{-1}^{1} \big(2 + \sqrt{4 - y^2}\big)dy + \int_{1}^{2} \big(2 + \sqrt{4 - y^2} + y - y^2\big)dy \right) =$$

$$= \frac{1}{2.5\pi + 3} * \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{6} + \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + 4 + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{6} \right) = \frac{2\pi + \frac{19}{3}}{2.5\pi + 3} = \boldsymbol{E\xi_1}$$

$$\boldsymbol{E\big(E(\xi_2/\xi_1)\big)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi_2/\xi_1 = x) f_{\xi_1}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot f_{\xi_1}(x)dx = 0 = \boldsymbol{E\xi_2}$$

Отже – перевірка успішна. Формули повного математичного сподівання дійсно виконуються.

Додаток 1

Перевіримо властивості отриманої функції розподілу:

1. D($F_{\vec{\xi}}$) = R^2 та E($F_{\vec{\xi}}$) = <0,1>.

2. Монотонна неспадність по кожній з координат очевидна з побудови.

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\vec{\xi}}\,(x;y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{\vec{\xi}}\,(x;y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F_{\vec{\xi}}\,(x;y) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}\,(x;y) = \frac{1}{2.5\pi+3} *$

$$\begin{cases} 0, & y \le -2 \\ \frac{1}{2} * (2+y)^2 + y\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right), & -2 \le y \le -1 \\ \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + 1.5 + y + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4}, & -1 \le y \le 1 \\ 1.5\pi + 3 - \frac{1}{2}(2-y)^2 + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right), & 1 \le y \le 2 \\ 2.5\pi + 3, & 2 \le y \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2.5\pi+3} * \begin{cases} 0 & y \in (-\infty;-2); \\ (2y + \frac{y^2}{2} + 2(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}) + \pi + 2) & y \in [-2;-1]; \\ (y + 2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{2}\right) + \frac{3}{2} + \frac{5\pi}{4}) & y \in [-1;1]; \\ (1 + 2y - \frac{y^2}{2} + 1.5\pi + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)) & y \in [1;2]; \\ (3 + 2.5\pi) & y > 2; \end{cases}$$

Рівність усіх рівнянь, окрім других – очевидні. На проміжку $y \in [-2;-1]$ (без урахування $\frac{1}{s}$)

$$\lim_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}\,(x;y) = \frac{1}{2} * (2+y)^2 + y\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right) =$$

$$2 + 2y + \frac{y^2}{2} + y\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) - y\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2} = 2 + 2y + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)$$

$$F_{\xi_2}(y) = \left(2y + \frac{y^2}{2} + 2\left(\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{2}\right) + \pi + 2\right) =$$

$$= \left(2 + 2y + \frac{y^2}{2} + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + \pi\right)$$

Отже $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x;y) - F_{\xi_2}(y) = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) - 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - \pi$, що рівний 0 на даному проміжку

Отже $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x;y) = F_{\xi_2}(y)$

$$\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x;y) = \frac{1}{2.5\pi+3} * \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{2} + 2x\sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0 \\ x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{\pi}{2} + 3 + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + 2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right), & 1 \le x \le 3 \\ 2.5\pi + 3, & x \ge 3 \end{cases}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \frac{1}{2.5\pi+3} * \begin{cases} 0 & x \in (-\infty;-1); \\ \left(\arcsin(\mathrm{x}) + \frac{\sin(2\arcsin(\mathrm{x}))}{2}\right) + \frac{\pi}{2} & x \in [-1;0]; \\ \frac{\pi}{2} + x^2 + 2x & x \in [0;1]; \\ \frac{\pi}{2} + 3 + 4\left(\arcsin\left(\frac{\mathrm{x}-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\mathrm{x}-1}{2}\right)\right)}{2}\right) & x \in [1;3]; \\ 2.5\pi + 3 & x > 3; \end{cases}$$

Рівність усіх рівнянь очевидна окрім других. На проміжку: $x \in [-1;0]$ (без урахування $\frac{1}{s}$)

$$\lim_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x;y) = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{2} + 2x\sqrt{1-x^2} = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + 2x\sqrt{1-x^2} +$$

$$-x\sqrt{1-x^2} = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + x\sqrt{1-x^2}$$

$$F_{\xi_1}(x) = \arcsin(\mathrm{x}) + \frac{\sin(2\arcsin(\mathrm{x}))}{2} + \frac{\pi}{2} = \arcsin(\mathrm{x}) + x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}$$

Отже, $F_{\xi_1}(x) - \lim\limits_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x;y) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(\mathrm{x}) - \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) = 0,$ на даному проміжку

Отже $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x;y) = F_{\xi_1}(x)$

Тепер перевіримо неперервність функції розподілу. Для цього перевіримо, що її значення на дотичних лініях та стикових точках різних областей збігаються. «Стик», тих областей, що ми перевіряємо, будемо позначати (D_i, D_j). Будемо порівнювати значення функції розподілу без множника $\frac{1}{2.5\pi+3}$, оскільки він присутній у функції розподілу в будь-якій точці!

Перевіримо «стики» з областю D_0:

1) (D_0, D_2):
   Крива перетину: x = -1, y>=0
   $F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_0\big) = 0$
   $F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_2\big) = \arcsin\left(\sqrt{1-(-1)^2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-(-1)^2}\right)\right)}{2} + 2(-1)\sqrt{1-(-1)^2} = 0$
2) (D_0, D_1):
   Крива перетину: $x = -\sqrt{1-y^2}$, y<=0
   $F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_0\big) = 0$
   $$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_1\big) = \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + (-\sqrt{1-y^2})y + \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-(-\sqrt{1-y^2})^2}\right) +$$
   $$+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-\left(-\sqrt{1-y^2}\right)^2}\right)\right)}{4} + \left(-\sqrt{1-y^2}\right)\sqrt{1-\left(-\sqrt{1-y^2}\right)^2} =$$
   $$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \left(-\sqrt{1-y^2}\right)y + \frac{1}{2}\arcsin(|y|) + \frac{\sin(2\arcsin(|y|))}{4} + \left(-\sqrt{1-y^2}\right)|y| = 0$$
3) (D_0, D_3):
   Крива перетину: $y = -1-x,\ x >= 0$
   $F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_0\big) = 0$
   $F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_3\big) = \frac{1}{2}(x-1-x+1)^2 = 0$
4) (D_0, D_{13}):
   Крива перетину: $y = -2,\ x > 0$
   $F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_0\big) = 0$
   $$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_{13}\big) = \frac{1}{2} * (2-2)^2 + y\sqrt{4-(-2)^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-(-2)^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-(-2)^2}}{2}\right)\right) = 0$$
5) (D_0, D_4):
   Точка стику (0;-1)
   $F_{\vec{\xi}}\big((0,-1)\epsilon D_0\big) = 0$
   $$F_{\vec{\xi}}\big((0,-1)\epsilon D_4\big) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(-1) + \frac{\sin\left(2\arcsin(-1)\right)}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}0^2 + 0 * (1-1) = 0$$
6) (D_0, D_7):
   Точка стику (1;-2)
   $F_{\vec{\xi}}\big((1,-2)\epsilon D_0\big) = 0$
   $$F_{\vec{\xi}}\big((1,-2)\epsilon D_7\big) = \frac{1}{2}(2-2)^2 + 1(-2) + 2 + 2\left(\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right)}{2}\right) = 0$$

Перевіримо «стики» з областю D_1:

1) (D_1, D_2):
   Крива перетину: y =$\sqrt{1-x^2}$, x<=0
   $$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_1\big) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{4} + x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) +$$

$$+\frac{\sin(2\arcsin(\sqrt{1-x^2}))}{4}+x\sqrt{1-x^2}=\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{2}+2x\sqrt{1-x^2}$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_2\big)=\ \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right)}{2}+\ 2x\sqrt{1-x^2}$$

2) (D_1, D_4):

Крива перетину: $x = 0$

$$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_1\big)=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{4}+0y+\ \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)+\ \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)\right)}{4}+0\sqrt{1-0^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{4}+\frac{\pi}{4}$$
$$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_4\big)=\left(\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}0^2+0*(1+y)=\ \frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{4}+\frac{\pi}{4}$$

3) (D_1, D_6):

Стикова точка (0;1)

$$F_{\vec{\xi}}\big((0{,}1)\epsilon D_1\big)=\frac{1}{2}\arcsin(1)+\frac{\sin(2\arcsin(1))}{4}+0*1+\ \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)+\ \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)\right)}{4}+0\sqrt{1-0^2}=$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$
$$F_{\vec{\xi}}\big((0{,}1)\epsilon D_6\big)=0^2+2*0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

4) (D_1, D_5):

Стикова точка (0;1)

$$F_{\vec{\xi}}\big((0{,}1)\epsilon D_1\big)=\frac{\pi}{2}$$
$$F_{\vec{\xi}}\big((0{,}1)\epsilon D_5\big)=\frac{\pi}{2}+\frac{0^2}{2}+0+0*1-\frac{1^2}{2}+1-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

5) (D_1, D_3):

Стикова точка (0;-1)

$$F_{\vec{\xi}}\big((0,-1)\epsilon D_1\big)=\frac{1}{2}\arcsin(-1)+\frac{\sin(2\arcsin(-1))}{4}+0(-1)+\ \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{1-0}\right)+\ \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-0}\right)\right)}{4}+0\sqrt{1-0}=$$
$$=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=0$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((0,-1)\epsilon D_3\big)=\ \frac{1}{2}(0-1+1)^2=0$$

Перевіримо «стики» з областю D_2

1) (D_2, D_6):

Крива перетину: x = 0, y>=0

$$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_2\big)=\ \arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)\right)}{2}+\ 2*0*\sqrt{1-0^2}=\frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((x,y)\epsilon D_6\big)=0^2+2*0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

2) (D_2, D_5):

Стикова точка (0;1)

$$F_{\vec{\xi}}\big((0;1)\epsilon D_2\big)=\arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)+\frac{\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{1-0^2}\right)\right)}{2}+\ 2*0*\sqrt{1-0^2}=\frac{\pi}{2}$$
$$F_{\vec{\xi}}\big((0;1)\epsilon D_5\big)=\ \frac{\pi}{2}+\frac{0^2}{2}+0+0*1-\frac{1^2}{2}+1-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

3) (D_2, D_4):

Стикова точка (0;1)

$$F_{\vec{\xi}}\big((0;1)\epsilon D_2\big)=\frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((0;1)\epsilon D_4) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}0^2 + 0*(1+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Перевіримо «стики» з областю D_3

1) (D_3, D_4):

Крива перетину: y = -1, x>=0

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_3) = \frac{1}{2}(x-1+1)^2 = \frac{1}{2}*x^2$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_4) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(-1) + \frac{\sin(2\arcsin(-1))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}x^2 + x*(1-1) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2$$

2) (D_3, D_7):

Крива перетину: x = 1, y<=0

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_3) = \frac{1}{2}(1+y+1)^2 = \frac{1}{2}(2+y)^2$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_7\big) = \frac{1}{2}(2+y)^2 + 1*y - y + 2\left(\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right)}{2}\right) = \frac{1}{2}(2+y)^2$$

3) (D_3, D_8):

Стикова точка (1;-1)

$$F_{\vec{\xi}}((1;-1)\epsilon D_3) = \frac{1}{2}(1-1+1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;-1)\epsilon D_8) = \frac{1}{2}\arcsin(-1) + \frac{\sin(2\arcsin(-1))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + 1*(-1) + 2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 - 1 = \frac{1}{2}$$

4) (D_3, D_{13}):

Стикова точка (1;-2)

$$F_{\vec{\xi}}((1;-2)\epsilon D_3) = \frac{1}{2}(1-2+1)^2 = 0$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;-2)\epsilon D_{13}) = \frac{1}{2}*(2-2)^2 - 2\sqrt{4-2^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-2^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-2^2}}{2}\right)\right) = 0$$

Перевіримо «стики» з областю D_4

1) (D_4, D_5):

Крива перетину: y = 1, x>=0

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_4) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}x^2 + x*(1+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} + x + x*1 - \frac{1^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{\pi}{2}$$

2) (D_4, D_8):

Крива перетину: x = 1

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_4) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}1^2 + 1*(1+y) =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_8) = \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y + 2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{\sin(2\arcsin(y))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y$$

3) (D_4, D_6):

Стикова точка (0;1)

$$F_{\vec{\xi}}((0;1)\epsilon D_4) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}0^2 + 0*(1+1) = \frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((0;1)\epsilon D_6) = 0^2 + 2*0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

4) (D_4, D_7):

Стикова точка (1;-1)

$$F_{\vec{\xi}}((1;-1)\epsilon D_4) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(-1) + \frac{\sin(2\arcsin(-1))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}1^2 + 1*(1-1) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;-1)\epsilon D_7) = \frac{1}{2}(2-1)^2 - 1 + 1 + 2\left(\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right)}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

5) (D_4, D_9):

Стикова точка (1;1)

$$F_{\vec{\xi}}((1;1)\epsilon D_4) = \left(\frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}1^2 + 1*(1+1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 2.5 + \frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;1)\epsilon D_9) = \frac{\pi}{2} + 2 + 1 - \frac{1}{2}(2-1)^2 + 2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) + (1-1)(1-1) = 2.5 + \frac{\pi}{2}$$

Перевіримо «стики» з областю D_5

1) (D_5, D_6):

Крива перетину: y = x+1, x>=0

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_5) = \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} + x + x(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + x + 1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + x^2 + 2x$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_6) = x^2 + 2x + \frac{\pi}{2}$$

2) (D_5, D_9):

Крива перетину: x=1

$$F_{\vec{\xi}}((\text{x};y)\epsilon D_5) = \frac{\pi}{2}+\frac{1^2}{2}+1+y-\frac{y^2}{2}+y-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}+1+2y-\frac{y^2}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((\text{x};y)\epsilon D_9) = \frac{\pi}{2}+2+1-\frac{1}{2}(2-y)^2+2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right)+(1-1)(y-1)=\frac{\pi}{2}+1+2y-\frac{y^2}{2}$$

3) (D_5, D_8):

Стикова точка (1;1)

$$F_{\vec{\xi}}((1;1)\epsilon D_5) = \frac{\pi}{2}+\frac{1^2}{2}+1+1-\frac{1^2}{2}+1-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}+2.5$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;1)\epsilon D_8) = \frac{1}{2}\arcsin(1)+\frac{\sin(2\arcsin(1))}{4}+\frac{\pi}{4}+1.5+1+2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}+2.5$$

4) (D_5, D_{11}):

Стикова точка (1;2)

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_5) = \frac{\pi}{2}+\frac{1^2}{2}+1+2-\frac{2^2}{2}+2-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}+3$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_{11}) = \frac{\pi}{2}+3-\frac{(2-2)^2}{2}-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-2^2}}{2}\right)+\frac{\mathbf{2}\sqrt{4-2^2}}{2}+(1-1)\sqrt{4-(1-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+3$$

5) (D_5, D_{12}):

Стикова точка (1;2)

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_5) = \frac{\pi}{2}+3$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_{12}) = \frac{\pi}{2}+3+4\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)+2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}+3$$

Перевіримо «стики» з областю D_6

1) (D_6, D_{12}):

Крива перетину: x=1

$$F_{\vec{\xi}}((\text{x};y)\epsilon D_6) = 1^2+2+\frac{\pi}{2}=3+\frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((\text{x};y)\epsilon D_{12}) = \frac{\pi}{2}+3+4\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)+2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}+3$$

2) (D_6, D_9):

Стикова точка (1;2)

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_6) = 1^2+2+\frac{\pi}{2}=3+\frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_9) = \frac{\pi}{2}+2+1-\frac{1}{2}(2-2)^2+2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right)+(1-1)(2-1)=\frac{\pi}{2}+3$$

3) (D_6, D_{11}):

Стикова точка (1;2)

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_6) = 3+\frac{\pi}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((1;2)\epsilon D_{11}) = \frac{\pi}{2}+3$$

Перевіримо «стики» з областю D_7

1) (D_7, D_8):

Крива перетину: y=-1

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_7) = \frac{1}{2}(2-1)^2 - x + 1 + 2\left(\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)}{2}\right) =$$

$$= 1.5 - x + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_8) = \frac{1}{2}\arcsin(-1) - \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 - x + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) =$$

$$= 1.5 - x + 2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)$$

2) (D_7, D_{13}):

Крива перетину: x = 1+$\sqrt{4-y^2}$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_7) = \frac{1}{2}(2+y)^2 + (1+\sqrt{4-y^2})y - y + 2\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2+y)^2 + \sqrt{4-y^2}y + 2\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right)}{2}\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{13}) = \frac{1}{2} * (2+y)^2 + y\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right)$$

3) (D_7, D_{14}):
Стикова точка (1+$\sqrt{3}$;-1)

$$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};-1)\epsilon D_7\right) = \frac{1}{2}(2-1)^2 - 1 - \sqrt{3} + 1 + 2(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};-1)\epsilon D_{14}\right) = \frac{1}{2} * (2-1)^2 - \sqrt{4-1^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - -\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Перевіримо «стики» з областю D_8

1) (D_8, D_9):

Крива перетину: y= 1

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_8)=\frac{1}{2}\arcsin(1)+\frac{\sin(2\arcsin(1))}{4}+\frac{\pi}{4}+1.5+x+2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)=$$
$$=\frac{\pi}{2}+1.5+x+2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_9)=\frac{\pi}{2}+2+x-\frac{1}{2}(2-1)^2+2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)+(x-1)(1-1)=$$
$$=\frac{\pi}{2}+1.5+x+2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)$$

2) (D_8, D_{10}):

Крива перетину: x = 1+$\sqrt{4-y^2}$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_8)=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{4}+\frac{\pi}{4}+1.5+\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)y+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)+$$
$$+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{4}+1.5+y+y\sqrt{4-y^2}+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)+\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+1.5y\sqrt{4-y^2}+\frac{\pi}{4}+1.5+y+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{10})=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{4}+1.5+y-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)+\sqrt{4-y^2}y+$$

$$+4\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\arcsin(y)+1.5y\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+\frac{\pi}{4}+1.5+y+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)$$

3) (D_8, D_{14}):

Крива перетину: x = 1+$\sqrt{4-y^2}$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_8)=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{4}+\frac{\pi}{4}+1.5+\left(1+\sqrt{4-y^2}\right)y+2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)+$$
$$+\sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{14})=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin(2\arcsin(y))}{4}+1.5+y+2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)+\frac{5\pi}{4}$$

Коли $y\ \epsilon\ [-1;0]$, то функції $F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_8)$ та $F_{\vec{\xi}}\left((\mathrm{x};y)\epsilon D_{14}\right)$співпадають

4) (D_8, D_{11}):

Стикова точка (1+$\sqrt{3}$; 1)

$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};\ 1)\epsilon D_8\right) = \frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + 1 + \sqrt{3} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2.5 + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\pi}{6} + 2.5 + 1.5\sqrt{3}$

$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};\ 1)\epsilon D_{11}\right) = \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-1)^2}{2} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{4-1^2}}{2} + \sqrt{3}\sqrt{4-\sqrt{3}^2} + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \frac{7\pi}{6} + 2.5 + 1.5\sqrt{3}$

5) (D_8, D_{13}):

Стикова точка (1+$\sqrt{3}$; -1)

$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};\ -1)\epsilon D_8\right) = \frac{1}{2}\arcsin(-1) + \frac{\sin(2\arcsin(-1))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 - \sqrt{3} - 1 + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$

$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}$

$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};\ -1)\epsilon D_{13}\right) = \frac{1}{2} * (2-1)^2 - \sqrt{4-1^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}$

6) (D_8, D_{15}):

Стикова точка (3; 0)

$F_{\vec{\xi}}\left((3;0)\epsilon D_8\right) = \frac{1}{2}\arcsin(0) + \frac{\sin(2\arcsin(0))}{4} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + 0 + 2\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right)\right) =$

$= \frac{\pi}{4} + 1.5 + \pi = \frac{5\pi}{4} + 1.5$

$F_{\vec{\xi}}\left((3;0)\epsilon D_{15}\right) = \frac{1}{2}\arcsin(0) + \frac{\sin(2\arcsin(0))}{4} + 1.5 + 0 + 2\arcsin\left(\frac{0}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{0}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4} =$

$= 1.5 + \frac{5\pi}{4}$

Перевіримо «стики» з областю D_9

1) (D_9, D_{11}):

Крива перетину: x = 1 + $\sqrt{4-y^2}$

$F_{\vec{\xi}}((x;y)\epsilon D_9) = \frac{\pi}{2} + 1 + 2 + \sqrt{4-y^2} - \frac{(2-y)^2}{2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right) +$

$+ \sqrt{4-y^2}(y-1) = \frac{\pi}{2} + 3 + y\sqrt{4-y^2} - \frac{(2-y)^2}{2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)\right) =$

$= \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-y)^2}{2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + y\sqrt{4-y^2} + \sqrt{4-y^2}\sqrt{1-\frac{4-y^2}{4}} =$

$= \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-y)^2}{2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + 1.5\,y\sqrt{4-y^2}$

$F_{\vec{\xi}}((x;y)\epsilon D_{11}) = \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-y)^2}{2} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \frac{\boldsymbol{y}\sqrt{4-y^2}}{2} + \sqrt{4-y^2}\sqrt{4-\sqrt{4-y^2}^2} + 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) =$

$$= \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-y)^2}{2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + 1.5\boldsymbol{y}\sqrt{4-y^2}$$

2) (D_9, D_{10}):

Стикова точка (1+$\sqrt{3}$; 1)

$$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};\ 1)\epsilon D_9\right) = \frac{\pi}{2} + 2 + 1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}(2-1)^2 + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + 0 =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 3 + \sqrt{3} - \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.5 + 1.5\sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}$$

$$F_{\vec{\xi}}\left((1+\sqrt{3};\ 1)\epsilon D_{10}\right) = \frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sqrt{4-1^2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-1^2} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + 1 - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + \sqrt{3}\sqrt{4-\sqrt{3}^2} +$$

$$+4\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4} + 2.5 - \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} = 2.5 + 1.5\sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}$$

3) (D_9, D_{12}):

Стикова точка (1; 2)

$$F_{\vec{\xi}}\left((1;\ 2)\epsilon D_9\right) = \frac{\pi}{2} + 2 + 1 - \frac{1}{2}(2-2)^2 + 2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) + (1-1)(2-1) = \frac{\pi}{2} + 3$$

$$F_{\vec{\xi}}\left((1;\ 2)\epsilon D_{12}\right) = \frac{\pi}{2} + 3 + 4\arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right) + 2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{1-1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 3$$

Перевіримо «стики» з областю D_{10}

1) (D_{10}, D_{11}):

Крива перетину: y=1, x>0

$$F_{\vec{\xi}}\left((\mathrm{x}; y)\epsilon D_{10}\right) = \frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sqrt{4-1^2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-1^2} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + 1 - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{4} + 2.5 - \frac{2\pi}{3} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}\left((\mathrm{x}; y)\epsilon D_{11}\right) = \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-1)^2}{2} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{4-1^2}}{2} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{1}{2} - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + (x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

2) (D_{10}, D_{15}):

Крива перетину: x =3, y>=0

$$F_{\vec{\xi}}\left((\mathrm{x}; y)\epsilon D_{10}\right) = \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + \frac{\pi}{4} + 1.5 + y - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + 2\sqrt{4-(2)^2} + 4\arcsin\left(\frac{2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2} + 1.5 + y + \frac{9\pi}{4} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{15}\big)=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{\sin\big(2\arcsin(y)\big)}{4}+1.5+y+2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\ \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)+\frac{5\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin(y)+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+1.5+y+\frac{5\pi}{4}+2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)$$

Коли $y\ \epsilon\ [0;1]$, то функції $F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{10}\big)$ та $F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{15}\big)$співпадають

3) (D_{10},D_{14}):

Стикова точка (3; 0)

$$F_{\vec{\xi}}\big((3;0)\epsilon D_{10}\big)=\ 0+0+0+\frac{\pi}{4}+1.5+0-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-0}}{2}\right)+(3-1)\sqrt{4-(3-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right)=$$

$$=\ \frac{\pi}{4}+1.5+\pi=\ \frac{5\pi}{4}+1.5$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((3;0)\epsilon D_{14}\big)=\ 0+0+1.5+y+0+0+\frac{5\pi}{4}=\ \frac{5\pi}{4}+1.5$$

4) (D_{10},D_{16}):

Стикова точка (3; 1)

$$F_{\vec{\xi}}\big((3;1)\epsilon D_{10}\big)=\ \frac{1}{2}\arcsin(1)+\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-1^2}+\frac{\pi}{4}+1.5+1-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right)+(3-1)\sqrt{4-(3-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right)=$$

$$=\ \frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}+2.5\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{11\pi}{6}+2.5+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((3;1)\epsilon D_{16}\big)=\ 1.5\pi\ +3-\frac{1}{2}(2-1)^2+2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{11\pi}{6}\ +2.5+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Перевіримо «стики» з областю D_{11}

1) (D_{11},D_{12}):

Крива перетину: y=2

$$F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{11}\big)=\frac{\pi}{2}+3-\frac{(2-2)^2}{2}-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-2^2}}{2}\right)+\frac{\mathbf{2}\sqrt{4-2^2}}{2}+(x-1)\sqrt{4-(x-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+3+(x-1)\sqrt{4-(x-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{12}\big)=\frac{\pi}{2}+3+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}+3+4\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+(x-1)\sqrt{4-(x-1)^2}$$

2) (D_{11},D_{16}):

Крива перетину: x=3

$$F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{11}\big)=\ \frac{\pi}{2}+3-\frac{(2-y)^2}{2}-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)+\frac{\boldsymbol{y}\sqrt{4-y^2}}{2}+(3-1)\sqrt{4-(3-1)^2}+4\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right)=$$

$$=\ 2.5\pi+3-\frac{(2-y)^2}{2}-2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right)+\frac{\boldsymbol{y}\sqrt{4-y^2}}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{16}\big)=1.5\pi\ +3-\frac{(2-y)^2}{2}+2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)\right)\ =$$

$$=\ 1.5\pi\ +3-\frac{(2-y)^2}{2}+2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}$$

Коли $y\ \epsilon\ [1;2]$, то функції $F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{11}\big)$ та $F_{\vec{\xi}}\big((\mathrm{x};y)\epsilon D_{16}\big)$ співпадають

3) (D_{11}, D_{15}):

Стикова точка (3; 1)

$$F_{\vec{\xi}}((3;1)\epsilon D_{11}) = \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-1)^2}{2} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{4-1^2}}{2} + (3-1)\sqrt{4-(3-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 2.5 - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} + 2.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((3;1)\epsilon D_{15}) = \frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + 1.5 + 1 + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) (D_{11}, D_{17}):

Стикова точка (3; 2)

$$F_{\vec{\xi}}((3;2)\epsilon D_{11}) = \frac{\pi}{2} + 3 - \frac{(2-2)^2}{2} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-2^2}}{2}\right) + \frac{\mathbf{2}\sqrt{4-2^2}}{2} + (3-1)\sqrt{4-(3-1)^2} + 4\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right) = 2.5\pi + 3$$

$$F_{\vec{\xi}}((3;2)\epsilon D_{17}) = 2.5\pi + 3$$

Перевіримо «стики» з областю D_{12}

1) (D_{12}, D_{17}):

Крива перетину: x=3

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{12}) = \frac{\pi}{2} + 3 + 4\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right) + 2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 3 + 2\pi = 2.5\pi + 3$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{17}) = 2.5\pi + 3$$

2) (D_{12}, D_{16}):

Стикова точка (3; 2)

$$F_{\vec{\xi}}((3;2)\epsilon D_{12}) = \frac{\pi}{2} + 3 + 4\arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right) + 2\sin\left(2\,arcsin\left(\frac{3-1}{2}\right)\right) = 2.5\pi + 3$$

$$F_{\vec{\xi}}((3;2)\epsilon D_{16}) = 1.5\pi + 3 - \frac{1}{2}(2-2)^2 + 2\arcsin\left(\frac{2}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{2}{2}\right)\right) = 1.5\pi + 3 + \pi = 2.5\pi + 3$$

Перевіримо «стики» з областю D_{13}

1) (D_{13}, D_{14}):

Крива перетину: y =-1

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{13}) = \frac{1}{2} * (2-1)^2 - \sqrt{4-1^2} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-1^2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{14}) = \frac{1}{2}\arcsin(-1) + \frac{\sin(2\arcsin(-1))}{4} + 1.5 - 1 + 2\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right) + \sin\left(2\,arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + 0.5 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}$$

Перевіримо «стики» з областю D_{14}

1) (D_{14}, D_{15}): $F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{14}) = F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x};y)\epsilon D_{15})$

Перевіримо «стики» з областю D_{15}

1) (D_{15}, D_{16}):

Крива перетину: y =1

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x}; y)\epsilon D_{15}) = \frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{\sin(2\arcsin(1))}{4} + 1.5 + 1 + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(2\, arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{5\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2.5 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x}; y)\epsilon D_{16}) = 1.5\pi + 3 - \frac{1}{2}(2-1)^2 + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(2\, arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= 1.5\pi + 2.5 + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\pi}{6} + 2.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Перевіримо «стики» з областю D_{16}

1) (D_{16}, D_{17}):

Крива перетину: y =2

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x}; y)\epsilon D_{16}) = 1.5\pi + 3 - \frac{1}{2}(2-2)^2 + 2\arcsin\left(\frac{2}{2}\right) + \sin\left(2\, arcsin\left(\frac{2}{2}\right)\right) = 2.5\pi + 3$$

$$F_{\vec{\xi}}((\mathrm{x}; y)\epsilon D_{17}) = 2.5\pi + 3$$