Сегодня мы, уважаемые подписчики, продолжаем рассмотрение важнейших циклических алгоритмов вычислительной математики.

Прежде чем вплотную заняться простыми числами, необходимо освоиться с подсчётом количества делителей натурального числа.

ПОДСЧЁТ КОЛИЧЕСТВА ДЕЛИТЕЛЕЙ

Построение алгоритма подсчёта количества делителей заданного натурального числа ***Q > 1*** проведём методом постепенного его улучшения в сторону повышения быстродействия. При этом случай числа ***Q = 1***, имеющего, очевидно, единственного делителя, равного единице, исключаем как тривиальный.

В простейшем случае задачу подсчёта количества делителей ***k*** достаточно легко решить на основе команды повторения с параметром:

k := 0
для D **от** 1 **до** Q
выполнять если Q **mod** D = 0 **то** k := k + 1

Тут ***k*** – счётчик количества делителей, обнуляемый перед циклом. Параметр цикла ***D*** является носителем значений потенциальных делителей числа ***Q*** (естественно, в пределах от ***1*** до ***Q***). Если очередное значение ***D*** является делителем, то это можно обнаружить, вычислив остаток от деления ***Q*** на ***D***. Нулевое значение остатка свидетельствует о том, что очередное значение ***D*** – делитель, и поэтому счётчик ***k*** должен быть увеличен на ***1***.

Улучшим этот алгоритм. Напомним, что минимум двух делителей имеет любое число ***Q > 1***. Это единица и само ***Q***. Раз это свойство касается всх чисел, то счётчик числа делителей можно сразу положить равным ***2***. Проверку же наличия других делителей будем проводить на промежутке от ***2*** до ***Q – 1***.

k := 2
для D **от** 2 **до** Q – 1
выполнять если Q **mod** D = 0 **то** k := k + 1

Нам удалось чуть-чуть ускорить работу алгоритма благодаря тому, что мы отдельно учли существование двух делителей, равного ***1*** и равного самому числу ***Q***. Цикл теперь выполняется не ***Q*** раз, а “всего” ***Q – 2*** раза. Интересно, что в данном варианте при ***Q = 2*** цикл не выполняется вообще (**для** D **от** 2 **до** 1). При этом результат ***k = 2***, что, конечно же, правильно.

Продолжим процесс усовершенствования.

Сначала вспомним одну простую вещь, состоящую в том, что “делители всегда парами ходят”. Действительно, если число ***Q*** имеет делителем число ***D***, то вполне естестественно, что в результате деления ***Q*** на ***D*** получим ещё одного делителя. Например, для числа ***Q = 42*** известен делитель ***D = 3***. Разделив ***42*** на ***3***, получим для числа ***Q = 42*** делителя, равного ***14***.

Сделаем следующий шаг. Предположим, что данный делитель ***D*** – наименьший возможный для числа ***Q*** (за исключением единицы). Тогда в результате деления ***Q*** на ***D*** мы получим наибольший возможный делитель (за исключением самого ***Q***). Теперь вспомним, что делителей, меньших ***2***, не бывает (за исключением единицы). Из этого немедленно следует, что наибольший возможный делитель числа ***Q*** (за исключением самого ***Q***) не может превышать его половины.

Например, для числа ***42*** наибольший возможный делитель равен 42 **div** 2 = 21, для числа ***100*** наибольший возможный делитель равен 100 **div** 2 = 50, для числа ***15*** наибольший возможный делитель равен ***5***, что не превышает числа 15 **div** 2 = 7, для числа ***33*** наибольший возможный делитель равен ***11***, что не превышает числа 33 **div** 2 = 16 и т. д.

Обратите внимание, что наибольший возможный делитель равен половине числа ***Q*** только в случае чётного ***Q***. При нечётном ***Q*** наибольший возможный делитель половины числа ***Q*** не достигает.

Всё это даёт нам возможность вдвое ускорить работу алгоритма подсчёта количества делителей.

k := 2

<u>для</u> D **<u>от</u>** 2 **<u>до</u>** Q **<u>div</u>** 2

<u>выполнять</u> **<u>если</u>** Q **<u>mod</u>** D = 0 **<u>то</u>** k := k + 1

Обратим внимание, что в данном варианте цикл не выполняется вообще не только при ***Q = 2***, но и при ***Q = 3*** (**<u>для</u>** D **<u>от</u>** 2 **<u>до</u>** 1). При этом результат ***k = 2*** остаётся правильным.

Продолжаем процесс усовершенствования.

Проанализируем утверждение о том, что "делители всегда парами ходят", несколько глубже. Подумаем о том, что обнаружение одного делителя фактически означает обнаружение двух. И если это учесть, то, наверняка, их количество удастся подсчитать быстрее.

Рассмотрим, например, делителей числа ***Q = 144***. Это число имеет ***15*** делителей. Исключим из них ***1*** и ***144***, а оставшиеся распределим парами так, чтобы в каждой паре произведение делителей равнялось бы ***144***. Для этого нам придётся делитель ***12*** записать дважды. Получаем такую таблицу делителей:

2	***3***	***4***	***6***	***8***	***9***	***12***
72	***48***	***36***	***24***	***18***	***16***	***12***

Для числа ***Q = 225***, имеющего ***9*** делителей (включая ***1*** и ***225***), аналогичная таблица выглядит следующим образом:

3	***5***	***9***	***15***
75	***45***	***25***	***15***

В этой таблице дважды записан делитель ***15***.

Теперь запишем таблицу делителей для числа ***Q = 132***:

2	***3***	***4***	***6***	***11***
66	***44***	***33***	***22***	***12***

Число ***Q = 132*** имеет ***12*** делителей (вместе с ***1*** и ***132***). При этом ни одного делителя не пришлось вносить в таблицу дважды.

Теперь обратим внимание, что ***Sqrt (144) = 12***, ***Sqrt (225) = 15***, а корень квадратный из ***132*** удовлетворяет условиям **11 < *Sqrt (132)* < 12**.

На основании этих примеров можно вывести достаточно простое правило для подсчёта общего количества делителей данного числа ***Q*** путём просмотра и проверки минимального количества потенциальных делителей:

1) первоначальное количество делителей равно ***2***;

2) потенциальные делители просматриваем в промежутке от ***2*** до ***Sqrt (Q)*** включительно;

3) при нахождении очередного делителя общее их количество увеличиваем на ***2***;

4) если ***Q*** представляет собой точный квадрат, то общее количество делителей следует уменьшить на единицу.

k := 2

<u>для</u> D **<u>от</u>** 2 **<u>до</u>** Sqrt(Q)

<u>выполнять</u> **<u>если</u>** Q **<u>mod</u>** D = 0 **<u>то</u>** k := k + 2

<u>если</u> Точный_квадрат (Q) **<u>то</u>** k := k – 1

Примечание. Здесь использовано обращение к алгоритму **Точный_квадрат** (X: **<u>нат</u>**): **<u>лог</u>** (см. материалы занятия 17).

В данном варианте алгоритма цикл, как и прежде, не выполняется вообще как при ***Q = 2***, так и при ***Q = 3*** (потому, что при этом ***Sqrt (Q) < 2***). Результат ***k = 2*** продолжает оставаться правильным.

Таким образом, основным результатом проведённых исследований является то, что нам удалось выяснить, какой минимальный числовой промежуток должен быть просмотрен для правильного определения количества делителей данного числа ***Q***. В этот промежуток входят все целые числа от ***2*** до ***Sqrt (Q)***. Например, число ***101*** имеет только два делителя (***1*** и ***101***). Чтобы это выяснить, достаточно проверить возможные делители от ***2*** до ***10*** включительно.

Уважаемые подписчики! При необходимости задать вопрос, проконсультироваться, уточнить или обсудить что-либо обращайтесь через **Гостевую книгу** моего персонального сайта http://a-morgun.narod.ru. При этом **настоятельно рекомендую** пользоваться браузером **Internet Explorer**.

С уважением, Александр.