Отчет о выполнении лабораторной работы 1.2.2

Эксперементальная проверка закона вращательного движения на крестообразном маятнике

Выполнил студент группы Б03-302: Танов Константин

1 Цель работы:

Экспериментально проверить уравнение вращательного движения, получив зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил, а также проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения.

2 Оборудование:

Крестообразный маятник, набор перегрузов, штангенциркуль, компьютер.

3 Теоретические сведения:

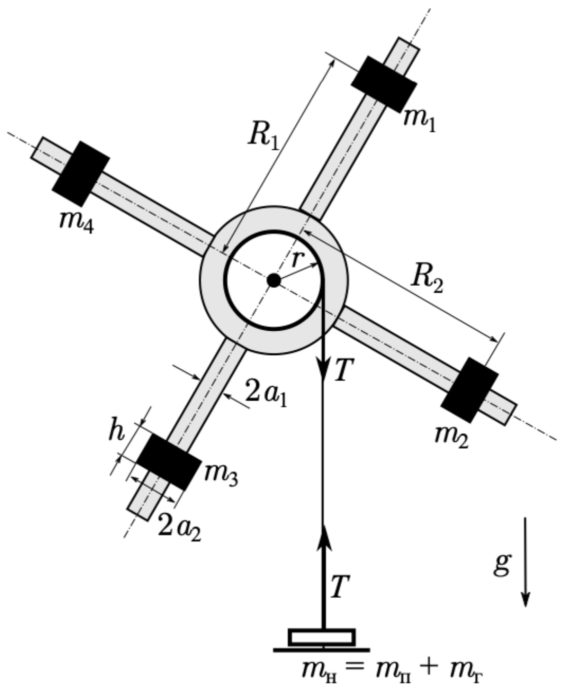
Основное уравнение вращательного движения тела вокруг закреплённой оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \tag{1}$$

где $\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$ – угловое ускорение (ω – угловая скорость), I – полный момент инерции тела относительно оси вращения, M – суммарный момент внешних сил относительно этой оси.

Для экспериментального исследования закона вращательного движения (1) в работе используется крестообразный «маятник» , устройство которого изображено на рис. ??. Маятник состоит из четырёх тонких стержней радиуса a, укреплённых на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радуисов (r_1 и r_2) насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции I маятника можно изменять, передвигая грузы $m_i (i = 1, \dots, 4)$ вдоль стержней и меняя R_i. На один из шкивов маятника навита тонкая нить. Привязанная к ней лёгкая платформа известной массы $m_\text{п}$ служит для размещения перегрузков $m_\text{г}$.

Установка оснащена датчиком, позволяющим фиксировать моменты времени прохождения концов стержней через него. Данные с датчика передаются на компьютер для последующей обработки и получения зависимостей угла поворота $\varphi(t)$, угловой скорости $\omega \equiv \dot{\varphi}$ и углового ускорения маятника $\beta \equiv \ddot{\varphi}$ от времени, а также углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$.



Рассмотрим силы, действующие на маятник. Основной вращающий момент поздаётся подвешенным на нити перегрузком. Непосредственно на маятник действует момент силы натяжения нити: $M_н = rT$, где r – радиус шкива (r_1 или r_2). Силу T выразим из уравнения движения платформы $m_н\ddot{y} = m_н g - T$, где $m_н = m_п + m_г$ – масса платформы с перегрузком. Ускорение платформы связано с угловым ускорением маятника условием нерастяжимости нити $\ddot{y} = \beta r$. Отсюда момент силы натяжения нити

$$M_н = m_н r(g - \beta r). \tag{2}$$

Вращению маятника препятствует момент силы трения в оси $M_{тр}$. Таким образом, с учётом (2) уравнение (1) может быть записано как

$$(I + m_н r^2)\beta = m_н g r - M_{тр}. \tag{3}$$

Заметим, что в наших опытах, как правило, $m_н r^2 \ll I$, и соответственно $M_н \approx m_н g r$, то маятник будет раскручиваться с постоянным угловым ускорением $\beta_0 \approx m_н g r / I$.

Поскольку зависимость момента силы трения от нагрузки на маятник и скорости его вращения не известна (её исследование – отдельная экспериментальная задача), методика измерения должна быть построена так, чтобы минимизировать или вовсе исключить влияние $M_{тр}$. Можно высказать следующие качественные соображения о природе и величине $M_{тр}$. Она может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси N (сухое трение в подшипниках), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости ω вращения маятника (вязкое трение в подшипниках и сопротивления воздуха). Учитывая, что сила реакции уравновешенного маятника равна $N = m_м g + T \approx (m_м + m_н)g \approx m_м g$, где $m_м$ – масса маятника (как правило,

$m_м \gg m_н$), можно записать

$$M_{тр} \simeq \left(1 + \frac{m_н}{m_м}\right) M_0 + \eta\omega \approx M_0 + \eta\omega, \tag{4}$$

где M_0 – момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса (минимальное значение силы трения), η – некоторый коэффициент, отвечающий за вязкое трение.

4 Ход работы:

Оценим момент сил трения в подшипниках. Граничное значение складывается из массы перегрузка и массы платформы и равно $m_{гр} = 4,80 + 6,17 = 10,97$г.

Измерения проводились на большом шкифе, радиус которого $r_1 = 1,78$см.

Тогда момент сил трения $M_0 = m_{гр} g r_1 \approx 1.95 \cdot 10^{-3}$(Н · м).

Проведём измерение коэффициентов прямой $\beta(\omega)$ k и β_0, чтобы оценить случайную погрешность β_0.

k, 1/с	β_0, рад/c^2	($\beta_{0сред}$ -β_{0i})^2, рад^2/c^4
$-0,0078 \pm 0,0058$	$0,5126 \pm 0,0012$	0,0015
$-0,0072 \pm 0,0021$	$0,4513 \pm 0,0008$	0,005
$-0,0079 \pm 0,0045$	$0,4388 \pm 0,0018$	0,0012
$-0,0090 \pm 0,0017$	$0,4666 \pm 0,0085$	0,0001
$-0,0085 \pm 0,0070$	$0,4737 \pm 0,0016$	0,0001
$-0,0084 \pm 0,0015$	$0,4999 \pm 0,0014$	0,0007
$-0,0088 \pm 0,0049$	$0,4749 \pm 0,0039$	0,0001

$\beta_{0сред} \approx 0,4740$(рад/с^2)

$\sigma_{случ} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\beta_{0сред} - \beta_{0n})^2}{n(n-1)}} \approx 0.01$(рад/с^2)

Проведём измерения коэффициентов прямой $\beta(\omega)$ k и β_0 при разных массах перегрузка.

$m_0 = 6,17$г – масса платформы

$r_1 = 1,78$см – радиус большего шкива

$m_г$, г	k, 1/c	β_0, рад/с^2	$M_Т$, Н · м
68.17	-0.0113 ± 0.0021	0.669 ± 0.002	$1.21 \cdot 10^{-2}$
106.17	-0.0123 ± 0.0022	1.067 ± 0.007	$1.89 \cdot 10^{-2}$
146.17	-0.0172 ± 0.0029	1.658 ± 0.001	$2.6 \cdot 10^{-2}$
176.17	-0.0221 ± 0.0019	1.907 ± 0.003	$3.1 \cdot 10^{-2}$
206.17	-0.0253 ± 0.0041	2.300 ± 0.008	$3.7 \cdot 10^{-2}$

где $M_Т = m_г g r_1$ – момент силы натяжения нити

Постороим график $\beta_0(M_Т)$ зависимости начального ускорения от момента силы натяжения. Полученная зависимость является прямой пропорциональностью, то есть $\beta_0 = a + bM_Т$.

Коэффициенты a и b вычислим по МНК.

$a \approx -0,141$(рад/с^2)

$b \approx 66,46$(1/кг · м^2)

Пересечение с осью абсцисс при $\beta_0 = 0 \Rightarrow M_0 = -a/b \approx 2,12 \cdot 10^{-3}$(Н · м) – момент сил трения. (Найденный ранее – $1.95 \cdot 10^{-3}$(Н · м)).

Вычислим $I = 1/b \approx 0.015$(кг · м^2).

Оценим погрешность I. Из формулы выше следует, что $\varepsilon_I = \varepsilon_b$.

$\sigma_b \approx 2,02$(1/кг · м^2)

$\varepsilon_b = \sigma_b/b \approx 0.03$

Тогда $\sigma_I = \varepsilon_I I = \varepsilon_b I \approx 0.00045$(кг · м^2)

В итоге имеем:

$$\boxed{I = (0.015 \pm 0.00045)\text{кг} \cdot \text{м}^2}$$

Проведём измерения зависимости углового ускорения от момента инерции ситемы.

$m_г = 106.17$(г) – масса груза $r = 1.78$(см) – радиус шкива

По формуле (3) имеем:

$$(I + m_н r^2)\beta = m_н g r - M_{тр}$$

$I \gg m_н r^2 \Rightarrow I_i \approx \dfrac{m_н g r - M_{тр}}{\beta_i}$.

Полученные значения I_i занесём в таблицу и построим по ним график $I(R^2)$.

R, см	k, 1/с	β, рад/с^2	I, кг · м^2
17	-0.0177 ± 0.0062	1.004 ± 0.0015	0.0182
15	-0.1540 ± 0.0030	1.1491 ± 0.0011	0.0159
13	-0.0136 ± 0.0015	1.3941 ± 0.0011	0.0131
18	-0.0163 ± 0.0017	0.9090 ± 0.0023	0.02201

Полученные по МНК коэффициенты прямой $I = a + bR^2$ равны:
$a \approx 0,0038$(кг $\cdot$ м^2)
$b \approx 0,535$(кг)
Вычислим I по формуле:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^{4} (I_i + m_i R_i^2)$$

где I_0 – момент инерции системы без грузов, а $I_i = \dfrac{1}{12} m_i h^2 + \dfrac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2)$. Поскольку массы грузов и расстояния до центра масс почти не отличаются $\sum\limits_{i=1}^{4} (I_i + m_i R_i^2) \approx 4I_1$. Вычислим эту величину и получим, что $4I_1 \approx 7.98 \cdot 10^{-5}$(кг $\cdot$ м^2) $\ll a \Rightarrow I_0 \approx a$.

Тогда $\sigma_I = \sigma_a = \sqrt{\dfrac{\left\langle I^2 \right\rangle - \left\langle I \right\rangle^2 - b^2 \left(\left\langle R^4 \right\rangle - \left\langle R^2 \right\rangle^2 \right)}{n}} \approx 0.000002$(кг $\cdot$ м^2)
Имеем

$$\boxed{I_0 = (0.0038 \pm 0.000002)(\text{кг} \cdot \text{м}^2)}$$

Найдём I_0 другим спососбм. Измерим k и β_0 при перегрузке массой $m_\text{п} = 106.17$(г) без грузов на маятнике.Полученные данные занесём в таблицу.

$k, 1/c$	β_0, (рад/с^2)
-0.0452 ± 0.0031	3.238 ± 0.006
-0.0407 ± 0.0056	3.189 ± 0.009
-0.0839 ± 0.001	3.776 ± 0.002

$\langle \beta_0 \rangle = 3,401$(рад/с^2)
$I_0 \approx \dfrac{m_\text{п} g r - M_0}{\beta_0} \approx 0,0048$(кг $\cdot$ м^2)

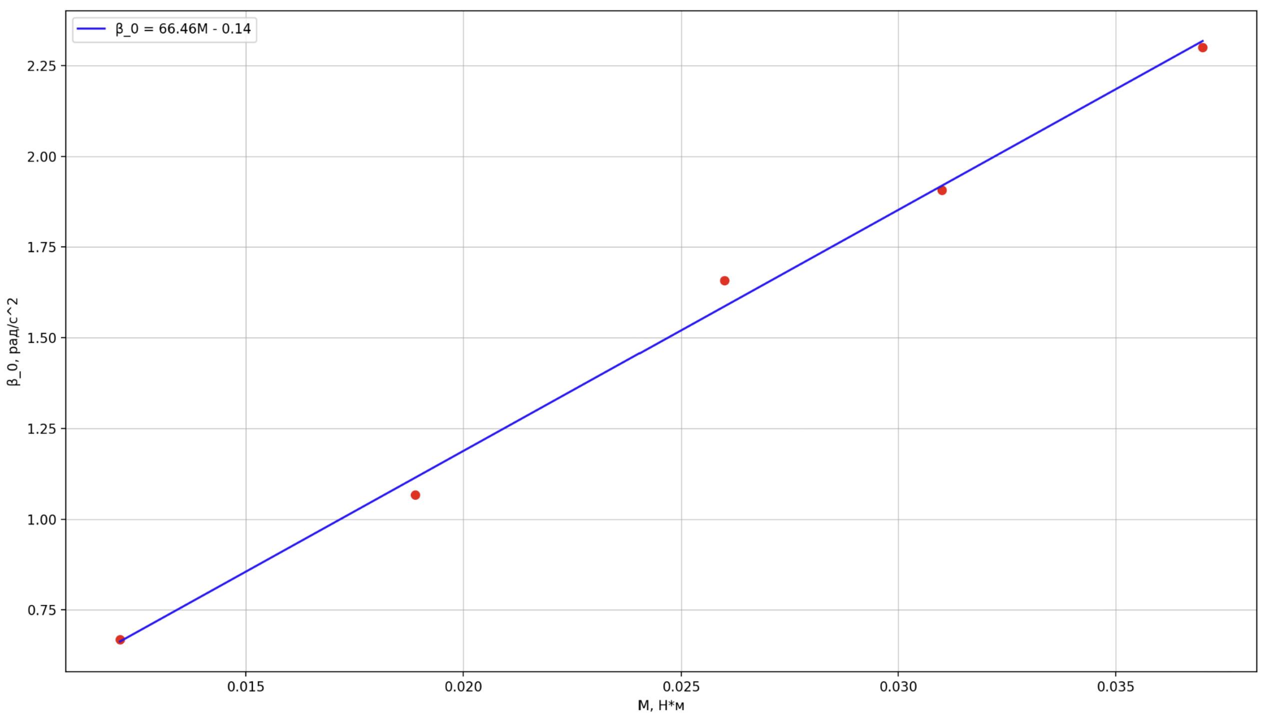


График зависимости $\beta_0 = a + bM_\text{Т}$

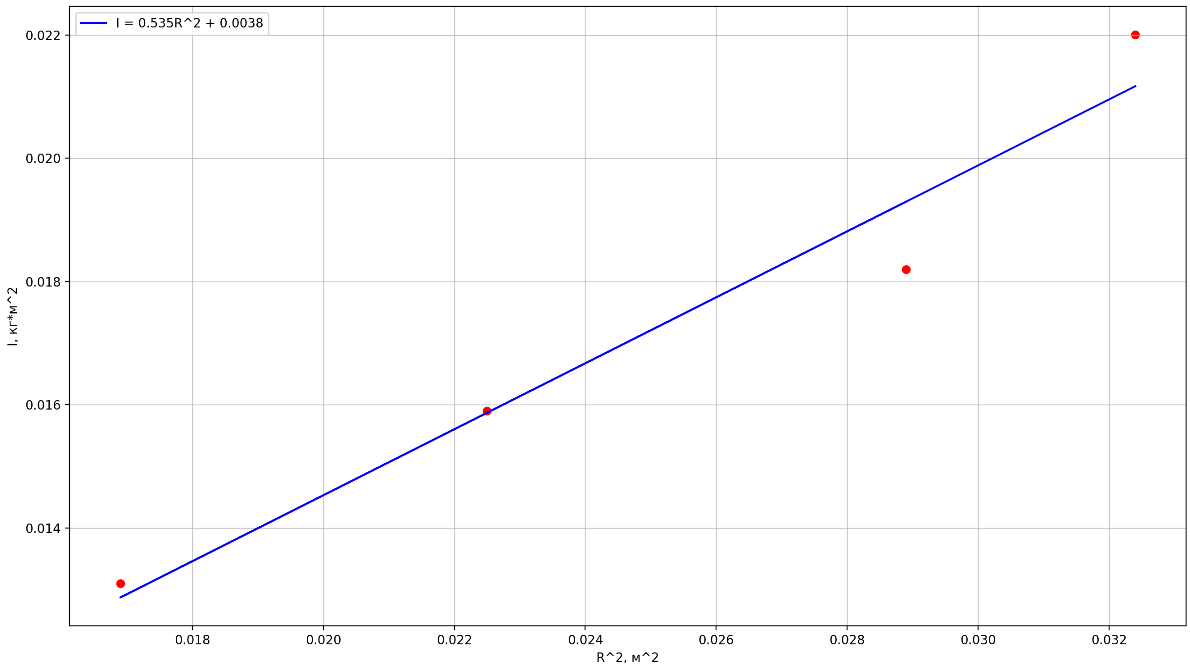


График зависимости $I = a + bR^2$

5 Вывод

Мы убедились, что угловое ускорение маятника обратно пропорционально моменту инерции тела и прямо пропорционально моменту прикладываемых сил.