

Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Выполнил студент группы Б03-302: Танов Константин

1 Цель работы:

Исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующий на ось гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

2 Оборудование:

Гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

3 Теоретические сведения:

В этой работе исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа подвешиваются грузы. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемому секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует преподнять на 5-6 градусов. Опять надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

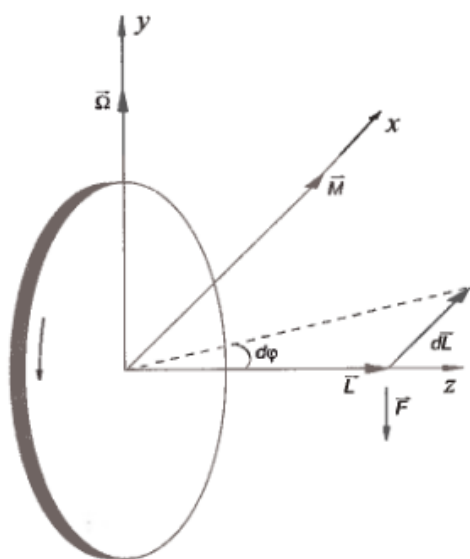


Рис. 1. Маховик

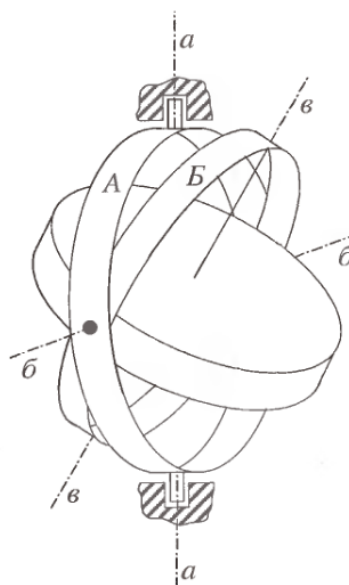


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (1)$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа, I_z – момент инерции гироскопа по его главной оси вращения. ω_0 – частота его вращения относительно главной оси, Ω – частота прецессии.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на десткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}. \quad (2)$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (3)$$

Здесь $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

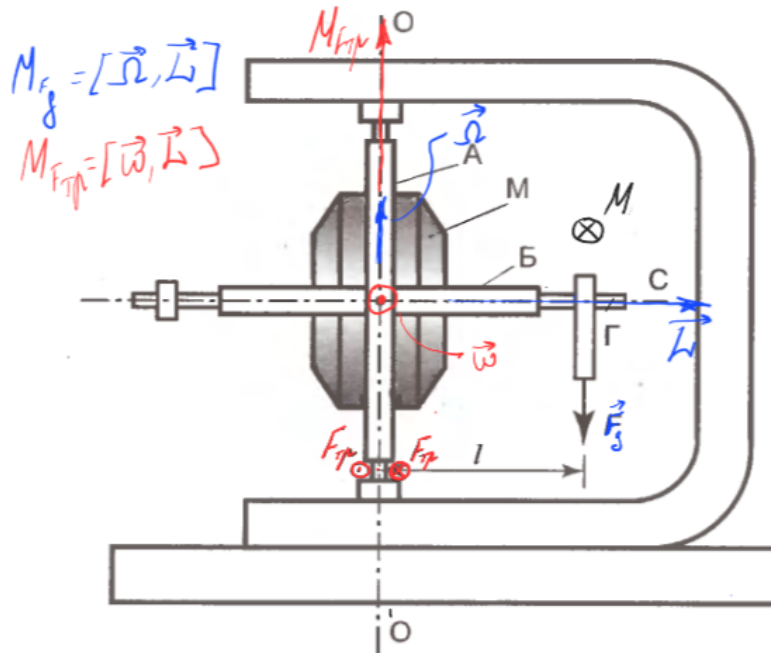


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет

две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую – для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой – переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

4 Ход работы

1. Устанавливаем ось гироскопа в горизонтальное положение, поворачивая его за рычаг С.
2. Включаем питание гироскопа и ждем, пока вращение ротора не стабилизируется.
3. Убеждаемся в том, что ротор вращается достаточно быстро: при легком постукивании по рычагу С последний не должен изменять своего положения в пространстве.

Причина: Он не меняет своего положения, так как момент импульса настолько большой вдоль оси вращения, что полная составляющая момента импульса почти сонаправлена с ним, что не дает гироскопу изменить своего положения при легком постукивании

Как движется гироскоп при нажатии на рычаг? При нажатии гироскоп начинает вращаться вдоль вертикальной оси. Пояснение иллюстрирует рисунок 3.

4. Подвешиваем к рычагу С груз Г. При этом должна начаться прецессия гироскопа. Трение в оси (в ОО) приводит к тому, что рычаг С начинает медленно опускаться. Пояснение также иллюстрирует рисунок 3.
5. Отклоняем гироскоп на 5-6 градусов и измеряем угловую скорость регулярной прецессии Ω . Продолжаем измерения, пока рычаг не отклонится на 5-6 градусов ниже горизонтальной плоскости.
6. Данные для частоты прецессии и опускания гироскопа: $\Omega = \frac{2\pi N}{t}$

Масса	T, c	N	Ω, c^{-1}	Масса	T, c	N	Ω, c^{-1}
$m = 338 \text{ г}$	88,61	3	$21,26 \cdot 10^{-2}$	$m = 268 \text{ г}$	115,33	3	$16,34 \cdot 10^{-2}$
	89	3	$21,17 \cdot 10^{-2}$		112,86	3	$16,69 \cdot 10^{-2}$
	93,95	3	$20 \cdot 10^{-2}$		111,64	3	$16,88 \cdot 10^{-2}$
	88	3	$21,4 \cdot 10^{-2}$		113	3	$16,67 \cdot 10^{-2}$
	90,6	3	$20,8 \cdot 10^{-2}$		111,72	3	$16,86 \cdot 10^{-2}$
Среднее	90,03	3	$20,93 \cdot 10^{-2}$	Среднее	112,91	3	$16,69 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$	Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$
$m = 215 \text{ г}$	140,37	3	$13,42 \cdot 10^{-2}$	$m = 173 \text{ г}$	115,5	2	$10,9 \cdot 10^{-2}$
	139,99	3	$13,46 \cdot 10^{-2}$		115,41	2	$10,88 \cdot 10^{-2}$
	140,47	3	$13,41 \cdot 10^{-2}$		115,22	2	$10,9 \cdot 10^{-2}$
	140,47	3	$13,41 \cdot 10^{-2}$		115,65	2	$10,86 \cdot 10^{-2}$
	139,92	3	$13,46 \cdot 10^{-2}$		115,21	2	$10,9 \cdot 10^{-2}$
Среднее	140,24	3	$13,43 \cdot 10^{-2}$	Среднее	115,4	2	$10,89 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T, \text{с}$	N	$\Omega, \text{с}^{-1}$
$m = 142 \text{ г}$	142,34	2	$8,82 \cdot 10^{-2}$
	142,03	2	$8,84 \cdot 10^{-2}$
	141,77	2	$8,86 \cdot 10^{-2}$
	141,88	2	$8,85 \cdot 10^{-2}$
	142,36	2	$8,85 \cdot 10^{-2}$
Среднее	142,08	2	$8,84 \cdot 10^{-2}$

Каждый раз рычаг опускался на 12° , что равняется $\frac{\pi}{15}$. Для каждой массы посчитаем скорость опускания рычага по формуле: $v = \omega l = \frac{\pi/15}{T}l$, и момент $M = mgl$, где $l = 121 \text{ мм}$:

- $m = 338 \text{ г}$, $v = 2,81 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 40,898 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 268 \text{ г}$, $v = 2,24 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 32,428 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 215 \text{ г}$, $v = 1,81 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 26,015 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 173 \text{ г}$, $v = 2,15 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 20,933 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 142 \text{ г}$, $v = 1,78 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 17,182 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$

Построим график зависимости $\Omega(M)$ рисунок 1.

- Измеряем момент инерции I_0 относительно оси симметрии. Для этого подвешиваем ротор к концу вертикально висящей проволоки так, чтобы ось симметрии гироскопа была вертикальна, и измеряем период крутильных колебаний маятника T_0 . Заменяем ротор на цилиндр известного радиуса и известной массы.

Известный цилиндр				Ротор			
	N	t, c	σ_t, c		N	t, c	σ_t, c
1	10	39,13	-	1	10	31,94	-
2	10	39,53	-	2	10	31,98	-
Среднее	10	39,33	0,2	Среднее	10	31,96	0,022
$T_{\text{ц}} = (3,93 \pm 0,02)c$				$T_0 = (3,196 \pm 0,002)c$			

Далее найдем момент инерции ротора гироскопа по формуле (3), для этого посчитаем момент инерции цилиндра, с известной нам массой и диаметром: $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}mr^2 \approx 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, а периоды: $T_0 = 3,196 \text{ с}$ и $T_{\text{ц}} = 3,93 \text{ с}$. Тогда $I_0 \approx 0,81 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

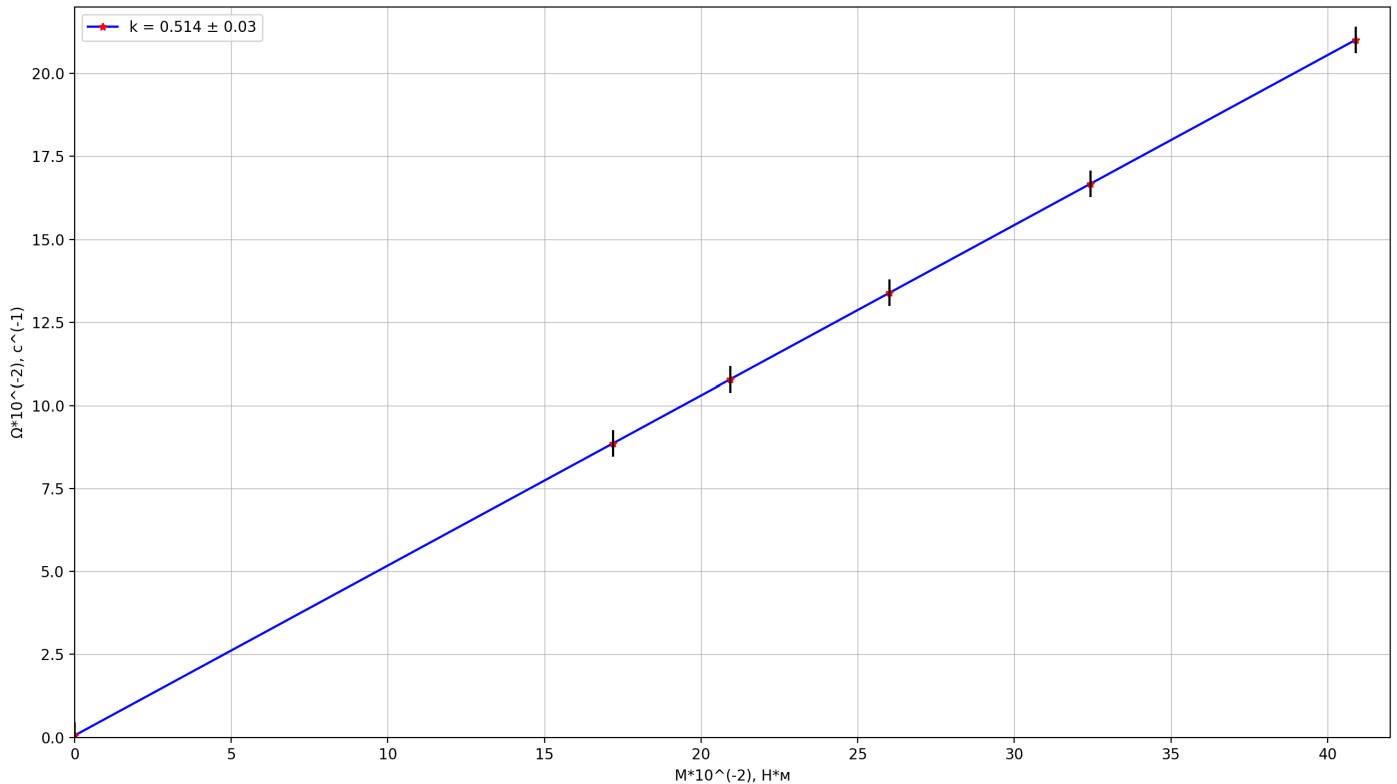


Рис. 1: Зависимость Ω от M

8. Оцениваем погрешности в определении I_0 и Ω .

$$\sigma_{\Omega} = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}; \quad \sigma_{\Omega}^{\text{сист}} = \sigma_T^{\text{сист}}; \quad \sigma_{\Omega}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Omega_i - \bar{\Omega})^2} \quad (4)$$

Каждая частота Ω с учетом погрешностей:

- $\Omega = (20,93 \pm 1,2) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (16,69 \pm 0,58) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$

- $\Omega = (13,43 \pm 0,09) \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}$
- $\Omega = (10,89 \pm 0,07) \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}$
- $\Omega = (8,84 \pm 0,08) \cdot 10^{-2} \text{ c}^{-1}$

$$\sigma_{I_c} = I_c \sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2} \approx 4,46 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{2 \left(\frac{\sigma_{T_c}}{T_c}\right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_c}}{I_c}\right)^2} \approx 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Получаем, что $I_0 = (0,81 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

9. Определить частоту вращения ротора можно по формуле $\omega_0 = \frac{1}{kI_0}$, где $k = \frac{\Omega}{M}$ – коэффициент наклона графика зависимости $\Omega(M)$.

По методу наименьших квадратов определяем коэффициент наклона и его погрешность.

$$k = \frac{\langle \Omega M \rangle}{\langle M^2 \rangle} \approx 0,514 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}} \quad (5)$$

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\frac{\langle \Omega^2 \rangle}{\langle M^2 \rangle} - k^2 \right)} \approx 0,0013 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}} \quad (6)$$

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k \sqrt{\left(\frac{\sigma_\Omega}{\Omega_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_M}{M_{\max}}\right)^2} \approx 0,03 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}} \quad (7)$$

Тогда $\omega_0 = 2401,88 \text{ c}^{-1}$, а погрешность:

$$\sigma_{\omega_0} = \omega_0 \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0}\right)^2} \approx 152,34 \text{ c}^{-1} \quad (8)$$

Используя полученную угловую скорость можно определить частоту вращения ротора гироскопа: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 382,46 \text{ Гц}$, а $\sigma_\nu = \nu \varepsilon_{\omega_0} \approx 24,26 \text{ Гц}$

Таким образом получаем: $\nu = (382,46 \pm 24,26) \text{ Гц}$, что с учетом сигмы попадает в значение полученное с помощью осциллографа $\nu_0 = 388 \text{ Гц}$, определённое при помощи фигуры Лиссажу, изображенной на рисунке 2.

10. При измерении угловой скорости двумя разными методами результаты совпали с точностью 1%, при том, что реальная частота гироскопа находится в пределах погрешности. Теория согласуется с практикой, небольшие расхождения можно объяснить трением в осях карданного подвеса, хотя и его момент много меньше моментов других сил. Гипотеза о том, что $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$ подтвердилась.

