Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.2

Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

Выполнил студент группы Б03-302: Танов Константин

1. Цель:

С помощью оборотного маятника измерить величину ускорения свободного падения.

2. Оборудование:

Оборотный маятник с двумя подвесными призмами и двумя грузами (чечевицами); электронный счётчик времени и числа колебаний; подставка с остриём для определения положения центра масс маятника; закреплённая на стене консоль для подвешивания маятника; металлические линейки, штангенциркуль длиной 1м.

3. Теоретические сведения:

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести.

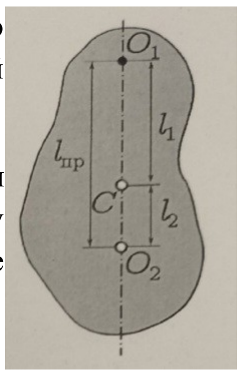
При малых колебаниях период колебаний физического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (1)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси качения, m – масса маятника, l – расстояние от оси качения до центра масс маятника.

Если сравнить (1) с известной формулой колебаний математического маятника длиной l ($T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$), можно определить приведённую длину физического маятника как:

$$l_{пр} = \frac{J}{ml} \quad (2)$$



Смысл приведённой длины в том, что при длине математического маятника, равной $l_{пр}$, его период колебаний совпадает с периодом колебаний физического маятника.

По теореме Гюйгенса об оборотном маятнике следует, что если периоды колебаний при подвешивании совпадают, то расстояние между точками подвеса равно приведённой длине маятника. Обратное утверждение тоже верно.

Если периоды колебаний маятника равны соответственно:

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}}, T_2=2\pi\sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}} \qquad (3)$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера имеем:

$$J_1=J_c+ml_1^2,\ J_2=J_c+ml_2^2 \qquad (4)$$

где J_c - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качения.

Тогда получаем, что:

$$l_{np}=l_1+l_2 \qquad (5)$$

Пусть $L=l_1+l_2$ - расстояние между двумя «сопряжёнными» точками подвеса физического маятника. Если соответствующие периоды малых колебаний равны, $T_1=T_2=T$, то по теореме Гюйгенса $L=l_{np}$. Тогда из (1) и (2) находим ускорение свободного падения:

$$g_0=(2\pi)^2\frac{L}{T^2} \qquad (6)$$

Точного совпадения $T_1=T_2$ на опыте добиться, конечно, невозможно. Поэтому получим формулу для определения ускорения свободного падения g, если измеренные периоды незначительно различаются: $T_1=T, T_2=T+\Delta T$. Из систем (3), (4) получаем:

$$g=(2\pi)^2\frac{l_1^2-l_2^2}{T_1^2 l_1-T_2^2 l_2} \qquad (7)$$

что также можно переписать как:

$$g=g_0\frac{\lambda-1}{\lambda-\frac{T_2^2}{T_1^2}} \qquad (8)$$

где $g_0=(2\pi)^2\frac{L}{T^2}$, и для краткости введено обозначение $\lambda=\frac{l_1}{l_2}$.

Пусть $\varepsilon=\frac{\Delta T}{T}\ll 1$ - относительное отклонение при измерении периодов. Тогда $\lambda\neq 1$, пользуясь малостью ε, получим:

$$g=g_0\frac{\lambda-1}{\lambda-(1+\varepsilon)^2}\approx g_0\frac{1}{1-\frac{2\varepsilon}{\lambda-1}}\approx g_0(1+2\beta\varepsilon) \qquad (9)$$

где обозначено $\beta=\frac{1}{\lambda-1}=\frac{l_2}{l_1-l_2}$

Видно, что поправка $\Delta g=2\beta\varepsilon g$ к формуле (6) остаётся малой, если мало относительное различие измеренных периодов ε, но при этом также мал и коэффициент β. В частности, при $l_2\rightarrow l_1$ эта поправка неограниченно возрастает при любом конечном ε. Поэтому на опыте l_2/l_1 не должно быть слишком близко к единице. На практике желательно, чтобы выполнялось условие:

$$l_1 > 2{,}5\, l_2 \qquad (10)$$

4. Обработка данных и результаты измерений:

1. Первоначально взвесим все элементы по отдельности. Результаты переведены в таблице (1):

	Груз 1	Груз 2	Призма 1	Призма 2	Стержень
Масса, г.	1481,3	1495,5	76,6	79,0	86,2

Таблица 1 — Массы элементов маятника

Измерения массы производились при помощи электронных весов, у которых только систематическая погрешность, обусловленная инструментальной погрешностью прибора. Значит, $\sigma_m = \Delta_{весов} = 0{,}1\, г$.

2. Закрепляем подвесные призмы симметрично на стержне. Необходимо, чтобы ребра призм были параллельны друг другу и «смотрят» в сторону центра маятника.

3. С помощью большого штангенциркуля максимально точно измеряем расстояние L между призмами. В дальнейшем призмы остаются закреплёнными на своих местах. Учитывая, что измерения производились один раз, то погрешность систематическая, обусловленная инструментальной погрешностью прибора ($\sigma_L = \Delta_{шт} = 0{,}1\, мм$). Вышло 52см. Тогда:

$$\frac{\sigma_L}{L} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-3} (0{,}02\%) \qquad (11)$$

4. Закрепим грузы так, чтобы один из них располагался между призмами, а другой за ними. С помощью $\perp$-образной подставки определим положение центра масс. Зафиксируем его при помощи мела. Измерив расстояния $l_1 = 37{,}8\, см, l_2 = 14{,}4\, см$: от центра масс до острия призм $П_1\, и\, П_2$ соответственно. Найдем их отношение. Так как $\frac{l_1}{l_2} = 2{,}63 > 2{,}5$ то их отношение удовлетворяет условию (10).

5. Подвесим маятник на консоли на призме $П_2$.

6. Проведём измерения времени для n = 20 колебаний 3 — 4 раза, отклоняя маятник на малый угол $\alpha \approx 5°$. Результаты измерений и соответственно периодов измерений приведены в таблице (2):

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
t_i, c	30,25	30,25	30,25	30,25
T_i, c	1,5125	1,5125	1,5125	1,5125

Таблица 2 — Измерения на $П_2$

Значения времён совпадают в пределах погрешности секундомера. Среднее значение периода $\langle T_2 \rangle = 1{,}5125\,c$.

7. Перевернём маятник, подвесив его на призму $П_1$(при неизменном положении вссех элементов на стержне). Аналогично пункту 6 проведем измерения и занесем результаты в таблицу (3):

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
t_i, с	29,54	29,55	29,55	29,55
T_i, с	1,477	1,4775	1,4775	1,4775

Таблица 3 — Измерения на $П_1$

Значения времён совпадают в пределах погрешности секундомера. Среднее значение периода $\langle T_1 \rangle = 1{,}4774\,c$.

8. Учитывая тот факт, что при измерении электронным счётчиком погрешность измерения полного измерения составляет порядка $\sigma_t = 0{,}01\,c$(погрешность округления). Тогда относительная погрешность измерения T составляет:

$$\frac{\sigma_T}{T} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-3} (0{,}67\,\%) \quad (12)$$

где T – среднее арифметическое $\langle T_2 \rangle$ и $\langle T_1 \rangle$.

9. Проведём окончательные измерения периодов T_2 и T_1 с максимальной точностью для n = 100. Результаты для $П_1$ и $П_2$ приведены в таблице (4):

	t_1, с	t_2, с	T_1, с	T_2, с
Для $П_1$	153,26	153,22	1,5326	1,5322
Для $П_2$	147,75	147,73	1,4775	1,4773

Таблица 4 — Измерения на $П_1$ и $П_2$ для n = 100.

Тогда $\langle T_1 \rangle = 1{,}5324\,c$ и $\langle T_2 \rangle = 1{,}4774\,c$

Учитывая тот факт, что при измерении электронным счётчиком погрешность измерения полного измерения составляет порядка $\sigma_t = 0{,}01\,c$(погрешность округления). Тогда относительная погрешность измерения T составляет:

$$\frac{\sigma_T}{T} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-3} (0{,}66\,\%) \quad (13)$$

где T – среднее арифметическое $\langle T_2 \rangle$ и $\langle T_1 \rangle$.

10. Тогда по формуле (8) определим значение ускорения свободного падения. Получается, что $g = 9{,}9\,\frac{м}{c^2}$. Оценим погрешность измерений при помощи формулы:

$$\sigma_g \approx g\sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 8\beta\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 8\left(\beta\frac{\sigma_T}{T}\frac{\sigma_l}{l}\right)^2} \approx 0,17 \qquad (14)$$

Итоговое значение ускорения свободного падения: $\underline{g = 9,9 \pm 0,17\frac{м}{с^2}}$

5. Выводы по работе

С помощью оборотного маятника практически была определена величина ускорения свободного падения g=(9,9±0,17) м/с2, которая в пределах рассчитанной в работе погрешности совпадает с истинным значением g=9,81 м/с2.