

Определение систематических и случайных погрешностей при измерении удельного сопротивления нихромовой проволоки

Выполнил студент группы Б03-302: Танов Константин

1 Цель работы:

Измерить удельное сопротивление нихромовой проволоки и вычислить систематические и случайные погрешности при использовании измерительных приборов.

2 Оборудование:

Линейка, штангенциркуль, микрометр, отрезок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоянного тока, реостат, ключ.

3 Теоретические сведения:

Удельное сопротивление проволоки круглого сечения, изготовленной из однородного материала и имеющую всюду одинаковую толщину, рассчитывается по формуле:

$$\rho = R_{\text{пр}} \frac{\pi d^2}{4l}, \quad (1)$$

где $R_{\text{пр}}$ – сопротивление проволоки, d – диаметр проволоки, l – длина проволоки. Согласно закону Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R} \quad (2)$$

Для измерения напряжения использовалась схема рис.1. Ввиду неидеальности используемого вольтметра необходимо учесть поправку на его конечное сопротивление R_V . Показания амперметра I_A и вольтметра V_B связаны соотношением:

$$V_B = R' I_A, \quad (3)$$

где R' – сопротивление параллельно соединенных проволоки и вольтметра, причём $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{\text{пр}}} + \frac{1}{R_V} \Leftrightarrow$

$R' = \frac{R_{\text{пр}} R_V}{R_{\text{пр}} + R_V}$, и $R_V \gg R_{\text{пр}}, R'$. График зависимости $V_B(I_A)$ должен представлять прямую, угловой коэффициент которой R' , откуда сопротивление образца может быть найдено как:

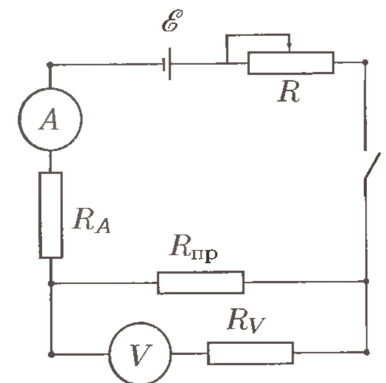


Рис. 1: Схема измерения вольт-амперной характеристики проволоки

$$R_{\text{пр}} = \frac{R_V R'}{R_V - R'} \approx R' \left(1 + \frac{R'}{R_V} \right) \quad (4)$$

Формула (4) получена с использованием округления: $\frac{1}{1+a} \approx 1-a$.

Член, стоящий в скобках в формуле (4), определяет поправку, которую следует внести в измерения.

4 Оборудование и инструментальные погрешности

- **Линейка:** $\Delta_{\text{лин}} = \pm 0,5$ мм (по цене деления). При определении положений контактов имеется дополнительная погрешность, которая может быть оценена как $\Delta_{\text{лин}} = \pm 2$ мм.
- **Штангенциркуль:** $\Delta_{\text{шт}} = \pm 0,1$ мм.
- **Микрометр:** $\Delta_{\text{мкм}} = \pm 0,01$ мм.
- **Вольтметр и амперметр:**

	Вольтметр	Амперметр
Система	Магнитно-электрическая	Цифровая
Класс точности	0,2	—
Предел измерения X_n	0,6 В	2 А
Число делений шкалы n	150	—
Разрядность дисплея	—	5 ед.
Цена деления $\frac{X_n}{n}$	4 $\frac{\text{мВ}}{\text{дел}}$	—
Чувствительность $\frac{n}{X_n}$	250 $\frac{\text{дел}}{\text{В}}$	—
Абсолютная погрешность Δ	1,2 мВ	$\pm(0,002 \cdot X + 2k)$, где X – измеряемая величина, k – единица младшего разряда (k = 0,01 мА).
Внутреннее сопротивление прибора(на данном пределе измерения)	4000 Ом	1,2 Ом
Погрешность считывания	2 мВ	—
Максимальная погрешность	$\pm 3,75$ мВ(0,5%)	—

Таблица 1: Основные характеристики приборов

При измерениях в диапазоне от 32 мА до 150 мА погрешность амперметра составила соответственно от $\Delta_{A_{\min}} = \pm 0,084$ мА (0,42%) до $\Delta_{A_{\max}} = \pm 0,32$ мА (0,213%).

Используя тот факт, что сопротивление проволоки по порядку величины равно 5 Ом, а внутреннее сопротивление вольтметра 4000 Ом, то по

формуле (4) можно оценить величину поправки при измерении. После вычислений получилось, что поправка составляет 0,125%. Так как данная поправка меньше максимальной относительной погрешности измерений вольтметра, то неидеальность вольтметра не оказывает влияния на измерение сопротивления. Значит:

$$R_{\text{пр}} \approx R'$$

- **Мост постоянного тока Р4833:**

Класс точности	0,1
Разрядность магазина сопротивлений	5 ед.
Используемый диапазон измерений	$10^{-4} - 10$ Ом
Погрешность измерений в используемом диапазоне	$\pm 0,01$ Ом

Таблица 2: Основные характеристики моста постоянного тока Р4833

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 Измерения диаметра d проволоки

Измерения проводились при помощи штангенциркуля (значения d_1) и микрометра (значения d_2) 10 раз на разных участках проволоки, см. табл. 3.

N, изм.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_1 , мм	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
d_2 , мм	0,35	0,35	0,34	0,34	0,35	0,36	0,36	0,35	0,36	0,37
	$\overline{d_1} = 0,4$ мм					$\overline{d_2} = 0,353$ мм				

Таблица 3: Результаты измерения проволоки штангенциркулем и микрометром

Таким образом, при измерении диаметра проволоки штангенциркулем случайная погрешность измерений отсутствует. Значит точность результата определяется только точностью систематической погрешности штангенциркуля:

$$\overline{d_1} = (0,4 \pm 0,1) \text{ мм}$$

Измерения с помощью микрометра содержат как систематическую, так и случайную погрешности:

- **Систематическая**

$$\sigma_{\text{сист}} = \Delta_{\text{МКМ}} = \pm 0,01 \text{ мм}$$

- Случайная

1. Среднее значение диаметра:

$$\overline{d_2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d_{2j} = 0,353 \text{ мм}$$

2. Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n (d_{2j} - \overline{d_2})^2} \approx 0,00955 \text{ мм}$$

3. Средняя квадратичная погрешность отдельного измерения

$$\sigma_{\text{сл}} = \frac{\sigma_{\text{отд}}}{\sqrt{N}} \approx 0,00302 \text{ мм}$$

4. Суммарная погрешность измерения диаметра проволоки

$$\sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2} \approx 0,0104 \text{ мм}$$

Таким образом, поскольку $\sigma_{\text{сл}}^2 \ll \sigma_{\text{сист}}^2$, то можно считать проволоку однородной по диаметру, а погрешность при измерении диаметра проволоки микрометром определяется только точностью систематической погрешности микрометра.

Окончательные результаты измерения диаметра проволоки:

Штангенциркулем: $d_1 = 0,4 \pm 0,01 \text{ мм}$.

Микрометром: $d_2 = 0,353 \pm 0,01 \text{ мм}$ ($\varepsilon_{d_2} = 2,83\%$).

5.2 Определение площади поперечного сечения проволоки:

Для этого воспользуемся значением диаметра проволоки, полученным микрометром, так как оно более точно, и соответствующей формулой:

$$S = \frac{\pi d_2^2}{4} \approx 0,978 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2$$

Велечину погрешности площади поперечного сечения найдем по формуле:

$$\sigma_S = 2 \frac{\sigma_{\text{полн}}}{d_2} S \approx 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2$$

5.3 Измерение сопротивления проволоки

Опыт проводим для следующих трех длин проволоки:

$$l_1 = (20,0 \pm 0,1) \text{ см}; l_2 = (30,0 \pm 0,1) \text{ см}; l_3 = (50,0 \pm 0,1) \text{ см};$$

Измерения ведем при убывающих и возрастающих значений тока. Показания приборов записываем в табл.4. Результаты измерения сопротивлений с помощью моста постоянного тока Р4833 заносим в табл.5.

Строим графики зависимостей $V = f(I)$ для всех трёх отрезков проволоки, проводя прямые через экспериментальные точки (рис. 2). Из графиков видно, что случайный разброс точек пренебрежимо мал и что экспериментальные данные с хорошей точностью (в пределах инструментальных погрешностей опыта) ложатся на теоретическую прямую $V = RI$, исходящую из начала координат.

	$l_1 = (20,0 \pm 0,2) \text{ см}$									
$V_B, \text{ мВ}$	272	228	180	148	96	92	128	160	224	284
$I_A, \text{ мА}$	128,7	107,6	84,6	69,1	44,12	43,67	60,2	75,7	106,0	134,9
	$l_2 = (30,0 \pm 0,2) \text{ см}$									
$V_B, \text{ мВ}$	476	400	288	192	108	116	208	308	388	484
$I_A, \text{ мА}$	147,2	124,1	89,0	59,6	33,3	35,1	64,4	95,5	120,2	150
	$l_3 = (50,0 \pm 0,2) \text{ см}$									
$V_B, \text{ мВ}$	584	456	336	244	168	172	284	396	508	604
$I_A, \text{ мА}$	110,3	85,3	66,6	45,6	31,8	32,5	53,4	74,0	95,6	114

Таблица 4: Зависимость V_B от I_A для разных длин проволоки l .

Для каждой длины l строим аппроксимирующие прямые, определяя их угловой коэффициент \bar{R} , используя метод наименьших квадратов, по формуле:

$$\bar{R} = \frac{\langle VI \rangle}{\langle I^2 \rangle}$$

где угловые скобки означают усреднение. Для каждой величины значения для соответствующего усреднения указаны в табл. 5.

Среднеквадратичную случайную погрешность определения углового коэффициента вычисляем как:

$$\sigma_{\bar{R}}^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\frac{\langle V^2 \rangle}{\langle I^2 \rangle} - \bar{R}^2 \right)}$$

Результаты заносим в табл. 6.

	$\langle I \rangle \text{ мА}$	$\langle V \rangle \text{ мВ}$	$\langle I^2 \rangle \text{ мА}^2$	$\langle V^2 \rangle \text{ мВ}^2$	$\langle VI \rangle \text{ мА} \cdot \text{мВ}$
l_1	85,46	181,2	8271,56	37076,8	17512,04
l_2	91,84	296,8	10109,836	105443,2	32649,75
l_3	70,91	375,2	5848,75	163958,4	30963,9

Таблица 5: Усредненные величины

Оценим возможную систематическую погрешность, обусловленную инструментальными погрешностями приборов. Предполагая, что при всех измерениях относительная погрешность одинакова, оценим погрешность вычисления

частного $R = V/I$ при максимальных значениях V и I :

$$\sigma_{\frac{V}{R}}^{\text{сист}} = R \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I_{\max}}\right)^2}$$

где σ_V и σ_I – средние квадратичные ошибки измерения вольтметром и амперметром. Результаты заносим в табл. 6.

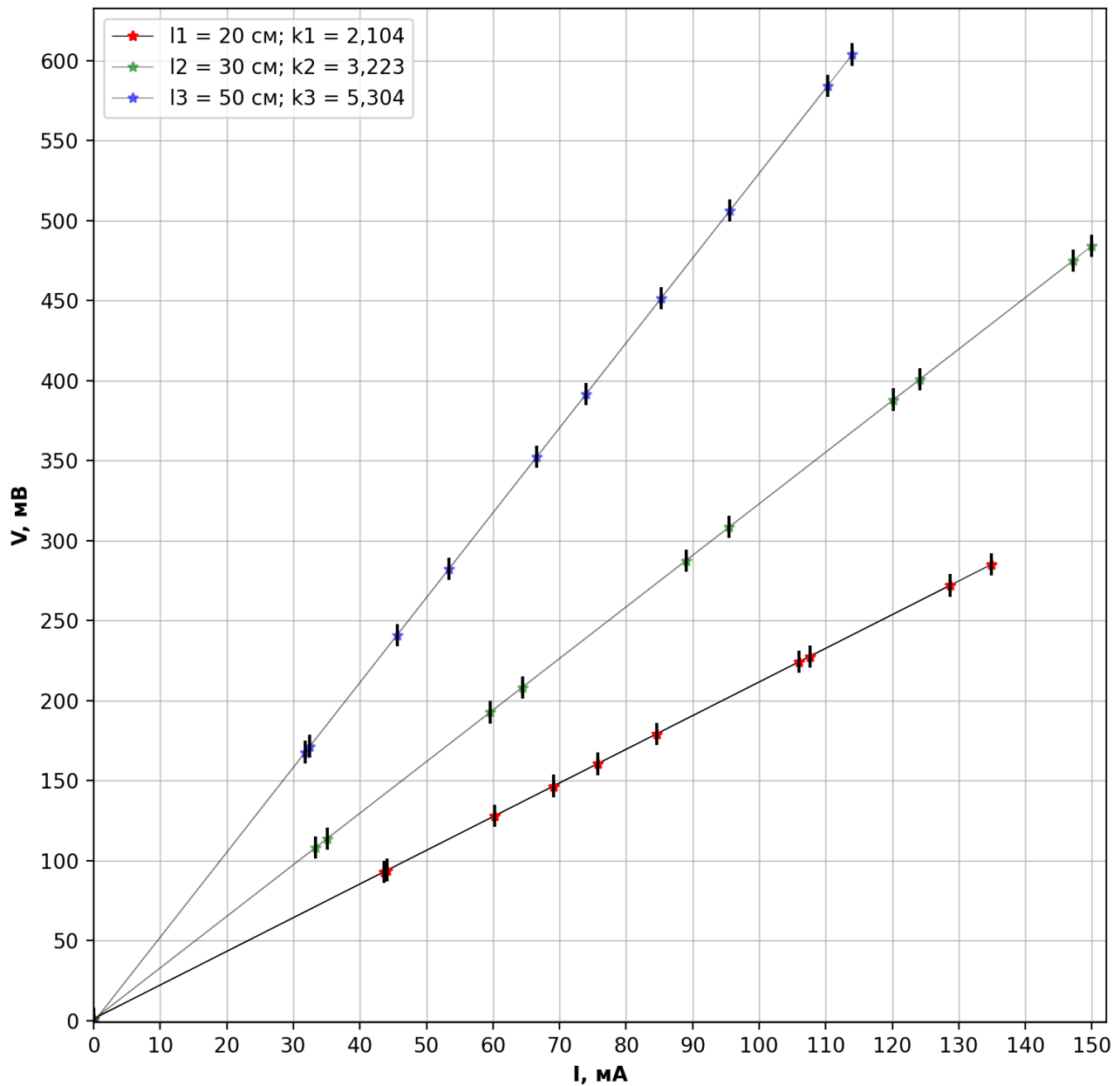


Рис. 2: Результаты измерений напряжения V_B в зависимости от тока I_A для проволок разной длины l и их линейная аппроксимация $y=kx$. Отмечены инструментальные погрешности по вертикальной оси (3,75 мВ), погрешность по горизонтальной оси не отмечена ввиду её малости

Для вольтметра средняя квадратичная ошибка вычисляется как половина абсолютной погрешности вольтметра:

$$\sigma_V = \frac{\Delta_B}{2} = 0,6$$

А для амперметра аналогично:

$$\sigma_I = \frac{\Delta_A^{\text{ср}}}{2} = 0,1 \text{ мА}$$

где $\Delta_A^{\text{ср}}$ – средняя абсолютная погрешность амперметра ($\Delta_A^{\text{ср}} = \frac{\Delta_{A_{\text{min}}} + \Delta_{A_{\text{max}}}}{2} = 0,2 \text{ мА}$).

Полная погрешность измерения \bar{R} равна:

$$\sigma_{\bar{R}}^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{R}}^{\text{сист}})^2 + (\sigma_{\bar{R}}^{\text{сл}})^2}$$

Для всех трёх длин l вносим поправку в измеренное значение сопротивления по формуле:

$$R_{\text{пр}} = \bar{R} + \frac{\bar{R}^2}{R_B}$$

где R_B – внутреннее сопротивление вольтметра. Ввиду малости поправки считаем $\sigma_{\bar{R}}^{\text{пр}} = \sigma_{\bar{R}}^{\text{полн}}$.

Результаты сведены в табл. 6. Там же для сравнения приведены результаты измерения \bar{R} с помощью моста постоянного тока Р4833 с учётом его погрешности.

	\bar{R} , Ом	$R_{\text{пр}}$	$\sigma_{\bar{R}}^{\text{сл}}$, Ом	$\sigma_{\bar{R}}^{\text{сист}}$, Ом	$\sigma_{\bar{R}}^{\text{полн}}$, Ом	$R_{\text{мост}}$, Ом
l_1	2,117	2,118	0,0092	0,0047	0,01	$2,116 \pm 0,01$
l_2	3,2295	3,23	0,0032	0,0045	0,0055	$3,224 \pm 0,01$
l_3	5,294	5,3	0,027	0,007	0,013	$5,284 \pm 0,01$

Таблица 6: Результаты измерения сопротивления проволоки двумя методами

Таким образом, контрольные измерения с помощью моста постоянного тока занижены по сравнению с полученными при опыте $R_{\text{пр}}$, но все отклонения находятся в пределах $\pm 2\sigma_{\bar{R}}^{\text{полн}}$.

5.4 Вычисление удельного сопротивления

Определяем удельное сопротивление проволоки по формуле (1) и погрешность σ_ρ по формуле:

$$\sigma_\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{R}}^{\text{полн}}}{R_{\text{пр}}}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$$

Значения удельных сопротивлений и их погрешностей указаны в табл. 8.

	$\rho, 10^{-4} \text{ Ом}\cdot\text{см}$	$\sigma_\rho, 10^{-4}, \text{ Ом}\cdot\text{см}$
l_1	1,036	6
l_2	1,053	6
l_3	1,036	5,9

Таблица 7: Значения удельных сопротивлений и их погрешностей

Усредняя результаты 3-х опытов, окончательно получаем:

$$\bar{\rho} = (1,042 \pm 0,06) \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м} (\varepsilon_\rho = 5,76\%)$$

6 Выводы по работе

В ходе выполнения лабораторной работы экспериментальным путем было получено значение удельного сопротивления нихромовой проволоки с точностью $\approx 5,76\%$. Основной вклад в погрешность вносит измерение диаметра проволоки, составляющая $\approx 2,83\%$, но так как из-за возведения в квадрат она удваивается, вклад в погрешность окончательного результата составляет $\approx 5,7\%$. Табличные значения для нихрома при 20°C в зависимости от массового содержания компонент меняются от $0,97 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ до $1,12 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Измеренное значение попадает в этот диапазон в пределах одного стандартного отклонения.