

Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса

Выполнил студент группы Б03-302: Танов Константин

1 Цель работы:

Измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчётами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

2 Оборудование:

Трифилярный подвес, секундомер, счётчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (брусок, кольцо, цилиндр и другие).

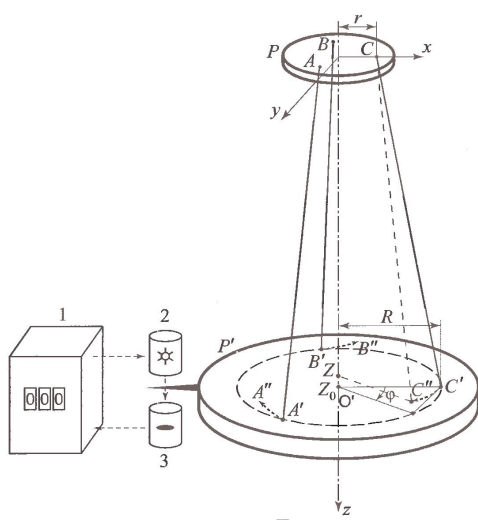


Рис. 1: Физический маятник

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

3 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (2)$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ . Первый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} (R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 &= L^2 \\ z^2 &= L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2 \\ z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0} \end{aligned}$$

Подставляя z в уравнение (2), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \quad (3)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0 \quad (4)$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right) \quad (5)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крutiльных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I z_0}{mgRr}} \quad (6)$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kmT^2 \quad (7)$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки.

4 Ход работы

1. При возбуждении крutiльных колебаний маятникообразных движений платформы не наблюдается – устройство функционирует нормально.

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T \quad (8)$$

Проверим данное условие. Амплитуду необходимо уменьшать до тех пор, пока период колебаний не перестанет зависеть от амплитуды. При отклонении на угол $\alpha \approx 30^\circ$ время, за которое амплитуда уменьшится в 2 раза, $\tau \approx 87,33$ с, а $T \approx 4,4$ с. Соотношение выполняется – установка пригодна для проведения эксперимента. Рабочий диапазон начинается с 20 колебаний.

2. Измеряем параметры установки: z_0 , R и r . Результаты вместе с погрешностями, обусловленными инструментальными погрешностями приборов заносим в таблицу 1.

m , г	R , мм	r , мм	L , см	z_0 , см
1066,8	114,6	30,2	215,6	215,4
σ_m , г	σ_R , мм	σ_r , мм	σ_L , см	σ_{z_0} , см
0,5	0,5	0,3	0,1	0,1

Таблица 1: Параметры установки

где z_0 вычисляется по формуле:

$$z_0 = \sqrt{L^2 - (R - r)^2} \approx 198,39 \pm 0,1 \text{ см}$$

По полученным данным вычисляем константу установки k , входящую в формулу 7. Получается, что $k = 4,42 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$. А её погрешность по формуле:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0,048 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

3. Определить момент инерции платформы можно по формуле (7). Для этого нам необходимо определить период колебаний ненагруженной платформы. Измеряем период, получаем:

№	Количество полных колебаний	Время колебаний – t_n , с	Период колебаний – T , с
1	20	87,73	4,387
2		87,33	4,367

Тогда, средний период колебания платформы будет: $\bar{T} \approx 4,377\text{с}$

Давайте здесь же и определим погрешность времени:

$$\sigma_T^{\text{сист}} = 0,001\text{с}$$

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2} \approx 0,01\text{с}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \approx 0,01\text{с}$$

Значит $T = (4,38 \pm 0,01)\text{с}$. Теперь мы можем определить момент инерции платформы:

$$I_{\text{пл}} = k m T^2 \approx 9,046 \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Найдем погрешность найденного нами момента инерции платформы:

$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = I_{\text{пл}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \approx 0,107 \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Получаем момент инерции для платформы $I_{\text{пл}} = (9,046 \pm 0,107) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$

4. Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы, а именно – 5 измерений по 20 колебаний для каждого набора тел, получаем:

Набор тел	t , с	T , с	σ_T	m , г	$I \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$\sigma_I \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
Платформа и брусок	73,95	3,697	0,045	2339,8	14,135	0,377
Платформа и кольцо	84,33	4,216	0,045	1887,9	14,832	0,355
Платформа и кольцо и брусок	75,96	3,798	0,045	3160,9	20,153	0,525

Таблица 2: Моменты инерции платформы с различными телами

Для подтверждения аддитивности необходимо показать, что выполняется:

$$I_{\text{пл}+\text{б}+\text{к}} = I_{\text{пл}+\text{б}} + I_{\text{пл}+\text{к}} - I_{\text{пл}}$$

Так как $(20,153 \pm 0,525) = (14,832 \pm 0,355) + (14,135 \pm 0,377) - (9,046 \pm 0,107) = (19,921 \pm 0,625)$, то моменты инерции аддитивны.

Теперь можно экспериментально рассчитать моменты инерции кольца и бруска:

$$I_{\text{к}} = I_{\text{пл}+\text{к}} - I_{\text{пл}} = (5,786 \pm 0,248), \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

$$I_{\text{б}} = I_{\text{пл}+\text{б}} - I_{\text{пл}} = (5,089 \pm 0,270), \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$$

Теперь сравним полученные нами моменты инерции для тел, и их теоретические значения. Для кольца момент инерции вычисляется как: $I_{\text{к}} = m_{\text{к}} R_{\text{к}}^2$. Радиус данного кольца $R_{\text{к}} = 0,0825 \text{ м}$, тогда $I_{\text{к}} = 5,589 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, что подтверждает экспериментальное значение в пределах погрешности.

Для бруска момент инерции высчитывается по формуле: $I_{\text{б}} = \frac{m_{\text{б}}}{12}(a^2 + l^2) = 4,767 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, что тоже совпадает с полученным экспериментальным значением в пределах погрешности.

- Определим зависимость момента инерции системы двух тел от их взаимного расположения. Затем используя формулу 7, определим зависимость $I(h^2)$.

Полученные результаты измерений занесем в таблицы (3),(4) соответственно. Основываясь на результатах таблицы (4), построим график зависимости $I(h^2)$ (Рис. 2). По графику понятно, что $I = kh^2 + b$. Тогда $b = I_0$ – момент инерции платформы + диска относительно оси, проходящей через центр масс. Для вычисления коэффициентов k и b воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,159 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{см}^2} \quad (9)$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 10,778 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad (10)$$

где $x = h^2$, $y = I$.

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

№ изм.	T, с	h, мм	№ изм.	T, с	h, см	№ изм.	T, с	h, см
1	3,116	0	4	3,196	20	7	3,648	50
2	3,124	5	5	3,315	30	8	3,861	60
3	3,144	10	6	3,472	40	9	4,209	75

Таблица 3: Зависимость Периода колебаний от расстояния

№ изм.	I · 10 ⁻³ кг · м ²	h, см	№ изм.	I · 10 ⁻³ кг · м ²	h, см	№ изм.	I · 10 ⁻³ кг · м ²	h, см
1	10.77	0	4	11.33	20	7	14.76	50
2	10.825	5	5	12.19	30	8	16.535	60
3	10.964	10	6	13.37	40	9	19.65	75

Таблица 4: Зависимость момента инерции системы от расстояния

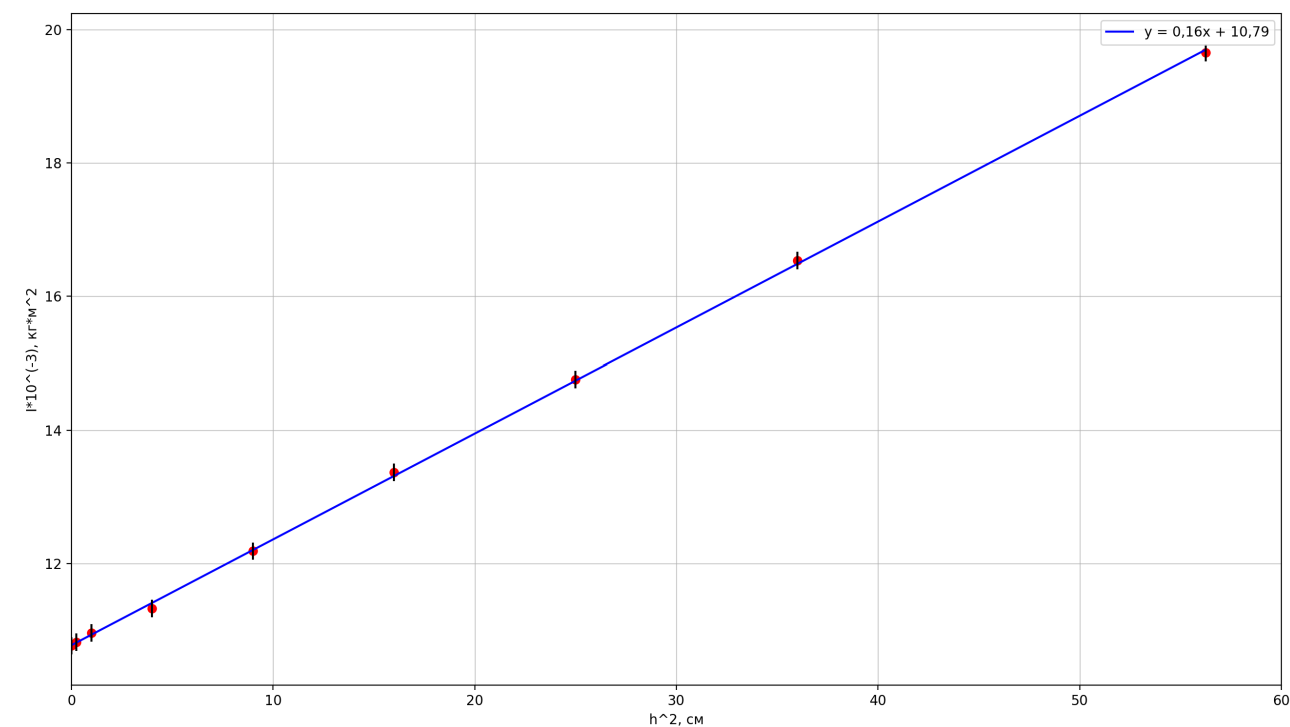


Рис. 2: График зависимости $I(h^2)$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,00077 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{см}^2} \quad (11)$$

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,014 \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2 \quad (12)$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{(\varepsilon_I)^2 + (\varepsilon_{h^2})^2} \approx b \cdot \varepsilon_I \approx 0,127 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2 \quad (13)$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0,127 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2 \quad (14)$$

Необходимый нам момент инерции можно найти по графику, тогда $b = I_{\text{пл+д}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}} = (10,778 \pm 0,127) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$. Так как момент инерции платформы уже известен, и он равняется: $I_{\text{пл}} = (9,046 \pm 0,107) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$, то момент инерции диска $I_{\text{д}} = (1,732 \pm 0,234) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$.

Зная радиус диска $R_{\text{д}} = (0,048 \pm 0,0001) \text{ м}$, мы можем определить его массу: $m_{\text{д}} = 2I_{\text{д}}/R_{\text{д}}^2 \approx 1,503 \text{ кг}$, $\sigma_{m_{\text{д}}} = m_{\text{д}} \cdot \sqrt{\varepsilon_I^2 + (2\varepsilon_R)^2} \approx 0,036 \text{ кг}$. Значит, что экспериментальная масса диска $m_{\text{д}} = (1,503 \pm 0,036) \text{ кг}$, что совпадает с реальной полной массой диска в пределах погрешности $m = (1442,6 \pm 0,1) \text{ г}$.

5 Вывод

С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции с достаточно большой точностью $\varepsilon \approx 1,18\%$. Такая точность обусловлена малой погрешностью измерения времени и условиями, при которых колебания подвеса можно считать слабозатухающими.

Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел.

Полученная зависимость $I(h^2)$ аппроксимируется линейной зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ($I = I_c + Mh^2$, где I – момент инерции тела, I_c – момент инерции тела относительно центра масс, M – масса тела, а h – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).