Отчет о выполнении лабораторной работы 1.3.1

Определение модуля Юнга на основе исследования деформации растяжения и изгиба

Выполнил студент группы Б03-302: Танов Константин

1 Аннотация

Цель работы: Экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией для двух простейших напряженных состояний упругих тел: одностороннего сжатия и чистого изгиба; по результатам эксперимента вычислить модул Юнга.
Оборудование: в первой части - прибор Лермантова, проволка из исследуемого материала, зрительная трубка со шкалой, набор грузов, микрометр,рулетка; во второй части - стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величин прогиба, набор исследуемых стержней, грузы, линйка, штангенциркуль.

2 Определение модуля Юнга по измерения растяжения проволки

2.1 Теоретические сведения

Растяжение проволки соответствует напряженому состоянию вдоль одной оси, которое описывается формулой:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{1}$$

Измерения производятся на установке Лермантова. Направим зрительную трубку на зеркальце. Тогда учитывая параксиальность углов, для расчета растяжения проволки справедлива формула:

$$l = n\frac{r}{2h}, \tag{2}$$

где h - расстояние от шкалы до зеркальца, r - длина рычага, n - показания шкалы

2.2 Эксперимантельная установка

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермонтова, схема которого изображена на рис. 1. Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний - к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг r, связанный с зеркальцем 3. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркальца.

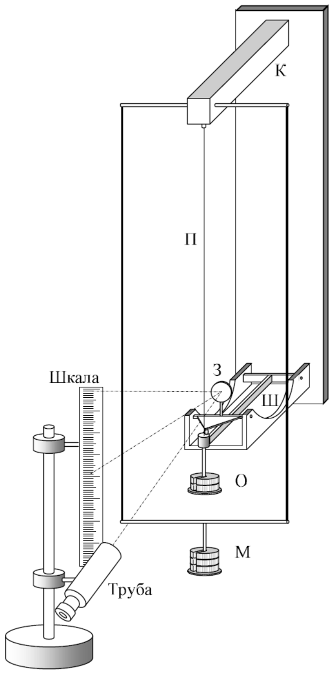

Рис. 1: Установка Лермантова и установка

Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с площадки М на площадку О и наоборот. Такая система позволяет исключить влияние деформации кронштейна К на точность измерений, так как нагрузка на нем все время остается постоянной.

2.3 Результаты эксперимента и обработка данных

- Сначалаа измерим параметры системы:

$$h = 147 \pm 0.1 \text{ см}, \quad r = 2 \text{ см}, \quad d_{\text{проволки}} = 0.51 \text{ мм}$$

- По полученным значениям вычисляем площадь:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 0.204 \text{ мм}^2$$

- Измеряем длину проволки $l = 174 \pm 0.1$ см.

- Позаботимся о том, чтобы в процессе эксперимента не выйти за пределы области, где удлинение проволки пропорционально ее натяжению. С учетом разрушительного напряжения: $\sigma_{\text{разрушения}} = 900\ H \cdot \text{мм}^{-2}$. Рассчитаем предельную массу груза, которую можно подвесить, чтобы не выйти из диапозона рабочих напряжений: $m_{\text{предельная}} = 0.3 \cdot \sigma_{\text{разрушения}} S/g = 5.5$ кг.

- С учетом полученного выше значения снимаем зависимость удлинения проволки от массы грузов m при увеличении и уменьшении нагрузки. Данные заносим в таблицу ниже. Расчет Δl производим по формуле, а погрешность измерения Δl оцениваем по формуле:

$$\varepsilon_{\Delta l} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2} \approx 0.34\%$$

№	m, кг	P, Н	n, мм	Δl,мм
1	0.7006	7.006	19.5	0.13
2	0.9463	9.463	21.7	0.15
3	1.1921	11.921	23.6	0.16
4	1.438	14.38	25.4	0.173
5	1.6833	16.833	27.2	0.185

Таблица 1: Измерения величин при повышении нагрузки

№	m, кг	P, Н	n, мм	Δl,мм
1	1.6833	16.833	27.1	0.18
2	1.438	14.38	25.6	0.17
3	1.1921	11.921	23.2	0.16
4	0.9463	9.463	21.1	0.14
5	0.7006	7.006	18.8	0.13

Таблица 2: Измерения величин при понижении нагрузки

- По полученным данным строим график зависимости $P(\Delta l)$ методом наименьших квадратов(МНК). Также учтем что в недеформированном состоянии проволока, как правило, изогнута, и при малых нагрузках ее удлинение определяется не растяжением, а выпрямлением.Поэтому исключим начальный участок зависимости из обработки данных.

  По формулам МНК находим коэффицент наклона графика для прямой и его случайную погрешность. Для коэффицента наклона графика имеем:

  $$k = \frac{\langle P\Delta l\rangle - \langle P\rangle\langle \Delta l\rangle}{\langle \Delta l^2\rangle - \langle \Delta l\rangle^2} = 182.24\ H \cdot \text{мм}$$

  Для систематической и случайной относительной погрешности имеем:

  $$\varepsilon_k^{\text{случ}} = \frac{1}{k\sqrt{N-2}}\sqrt{\frac{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2}{\langle \Delta l^2\rangle - \langle \Delta l\rangle^2} - k^2} = 6.75\%, \quad \varepsilon_k^{\text{сист}} = \sqrt{\varepsilon_P^2 + \varepsilon_{\Delta l}^2} \approx \varepsilon_{\Delta l} = 0.38\%$$

  $$\varepsilon_k = \sqrt{\varepsilon_{\text{сист}}^2 + \varepsilon_{\text{случ}}^2} = 6.76\%$$

- С учетом формул выше получаем, как выражается модуль Юнга через коэффицент наклона графика, и выражение для его погрешности:

  $$E = \frac{kl}{S} = 155.4\ \text{ГПа}$$

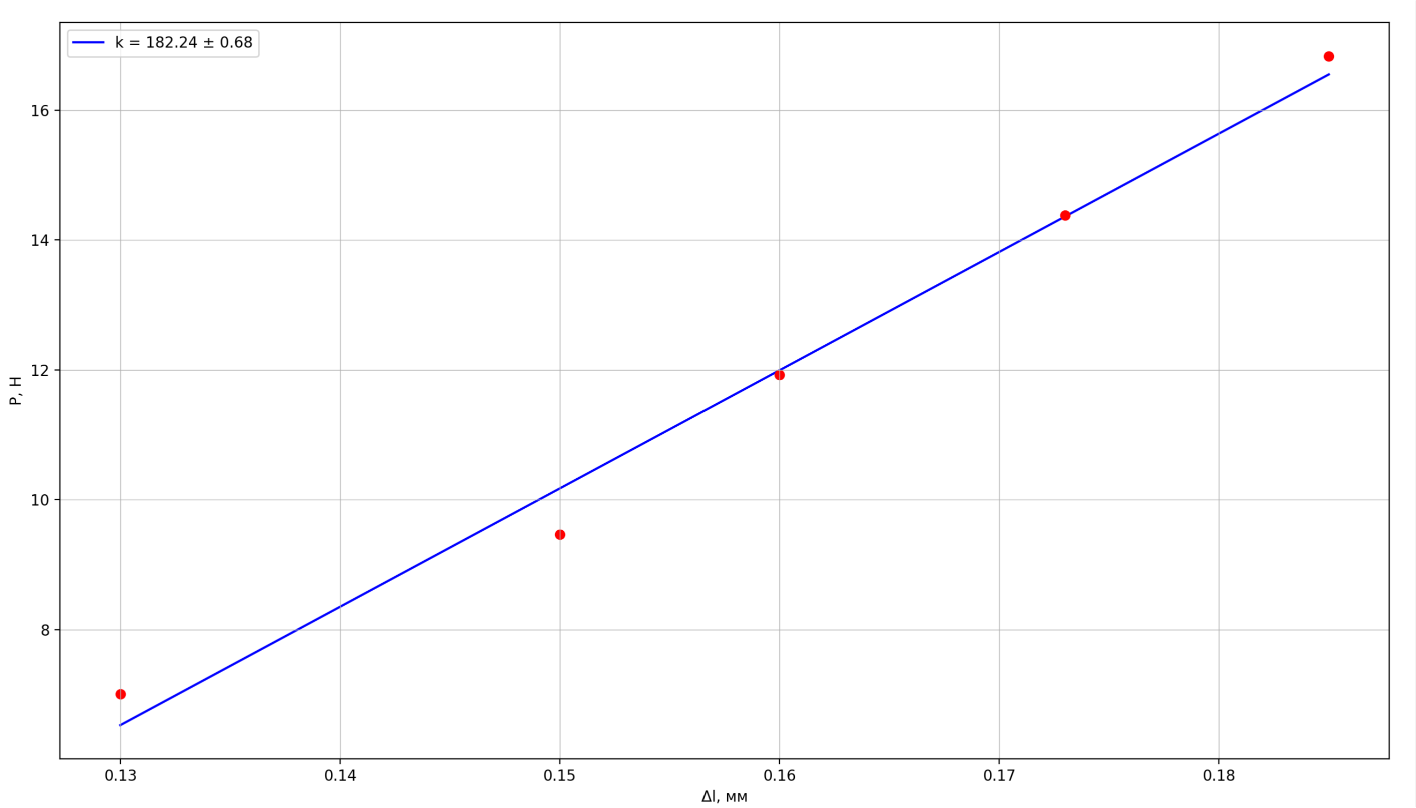

Рис. 2: График зависимости $P(\Delta l)$ от Δl

$$\varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_S^2 + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_l^2} \approx \varepsilon_k = 6.76\%, \quad \sigma_E = \varepsilon \cdot E = 10.5 \text{ ГПа}$$

По итогу получаем значение для модуля Юнга проволки: $E = 155.4 \pm 10.5$ ГПа и относительной погрешность $\varepsilon_E = 6.76\%$

3 Определение модуля Юнга по измерению изгиба балки

3.1 Теоретические сведения

Модуль Юнга материала стержня E связан со стрелой прогиба y_{max} как:

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3 y_{max}} \tag{3}$$

где P - нагрузка на стержень, l - расстояние меду точками опоры, a - ширина балки ,b - высота балки

3.2 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка состоит из прочной стойки с опорныммми призмами А и Б (рис. 2). На ребра призм опирается исследуемый стержень (балка) В. В середине стержня на призме Д подвешена площадка П с грузами. Измерять стрелу прогиба можно с помощью индикатара И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный

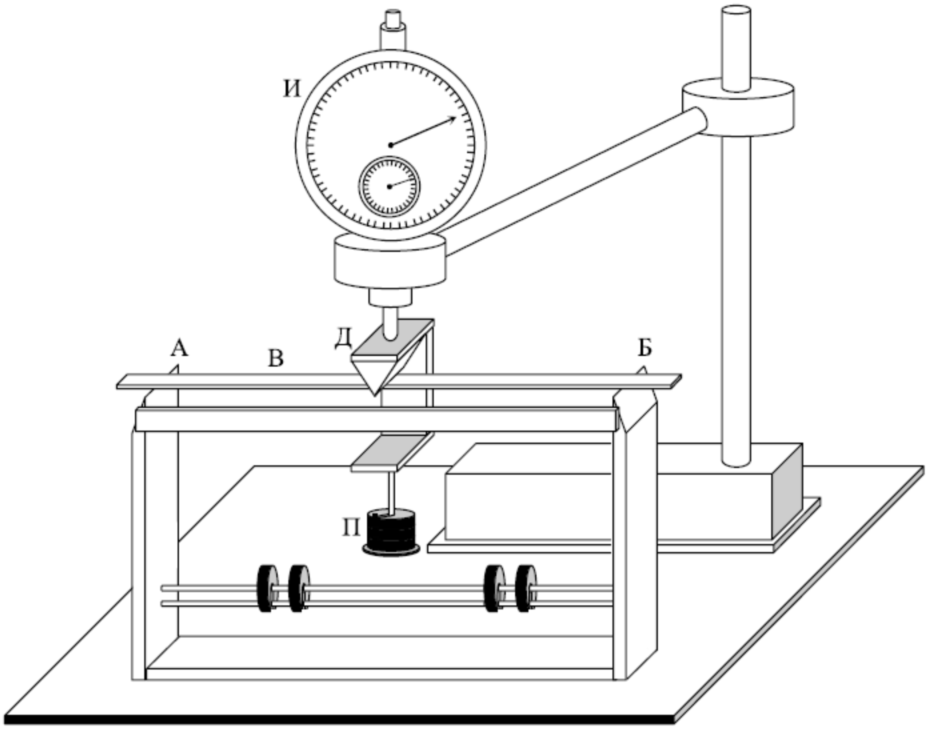

Рис. 3: Установка Лермантова и установка

оборот большой стрелки индикатора соответствует 1 мм и одному делению малого циферблата.

3.3 Результаты эксперимента и обработка данных

- Измерим расстояние между опорами $l = 50.4 \pm 0.05$см, $\varepsilon_l = 0.1\%$
- Измерим высоту d и ширину a балок из различных материалов и занесем данные в таблицу.

$N1$,дерево	1	2	3	4	5
a, см	2.05	2	2.03	2	2.05
b, см	1.05	1.05	1.03	1.03	1.05
$N2$,сталь	1	2	3	4	5
a, см	2.13	2.15	2.15	2.15	2.16
b, см	0.4	0.43	0.4	0.4	0.4

За истинное значение примим среднее по всей выборке. Погрешности измерений оцениваем по формулам:

$$\sigma^a_{\text{случ}} = \sqrt{\sum_i (a_i - \langle a \rangle)^2 / N(N-1)}, \quad \sigma^a_{\text{сист}} = \Delta a$$

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma^2_{\text{случ}} + \sigma^2_{\text{сист}}}$$

Получаем значения для дерева: $a_{\text{дер}} = 2.026 \pm 0.09$ см, $b_{\text{дер}} = 1.042 \pm 0.05$ см и для относительных погрешностей имеем: $\varepsilon_{a_{\text{дер}}} = 4.4\%$, $\varepsilon_{b_{\text{дер}}} = 4.8\%$
Получаем значения для стали: $a_{\text{сталь}} = 2.148 \pm 0.1$ см, $b_{\text{сталь}} = 0.406 \pm 0.07$ см и для относительных погрешностей имеем: $\varepsilon_{a_{\text{сталь}}} = 4.7\%$, $\varepsilon_{b_{\text{сталь}}} = 17.2\%$

- Кладем исследуемую балку на стойку. Устанавливаем индикатор в центре балки и снимаем зависимость стрелы прогиба Δy_{max} от величины нагрузкиP. Проделываем эти измерения при возрастающей и убывающей нагрузки, заносим данные в таблицу. Заносим эти данные в таблицу и строим по этим точкам график методом намименьших квадратов (МНК).

m, гр	$\Delta_{y_{\max}} \Uparrow$,см	P, Н	y_{max}, см	m, гр	$\Delta_{y_{\max}} \Downarrow$,см	P, Н	y_{max}, см
461.8	0.061	4.618	0.061	2437.1	-0.077	24.371	0.349
925.4	0.065	9.254	0.126	1928.4	-0.075	19.284	0.272
1428.4	0.071	14.284	0.197	1428.4	-0.07	14.284	0.197
1928.4	0.075	19.284	0.272	925.4	0.069	9.254	0.127
2437.1	0.077	24.371	0.349	461.8	0.073	4.618	0.058

Таблица 3: Величина прогиба в зависимости от массы при повышении $\Uparrow$ и при понижении массы $\Downarrow$ для деревянной балки

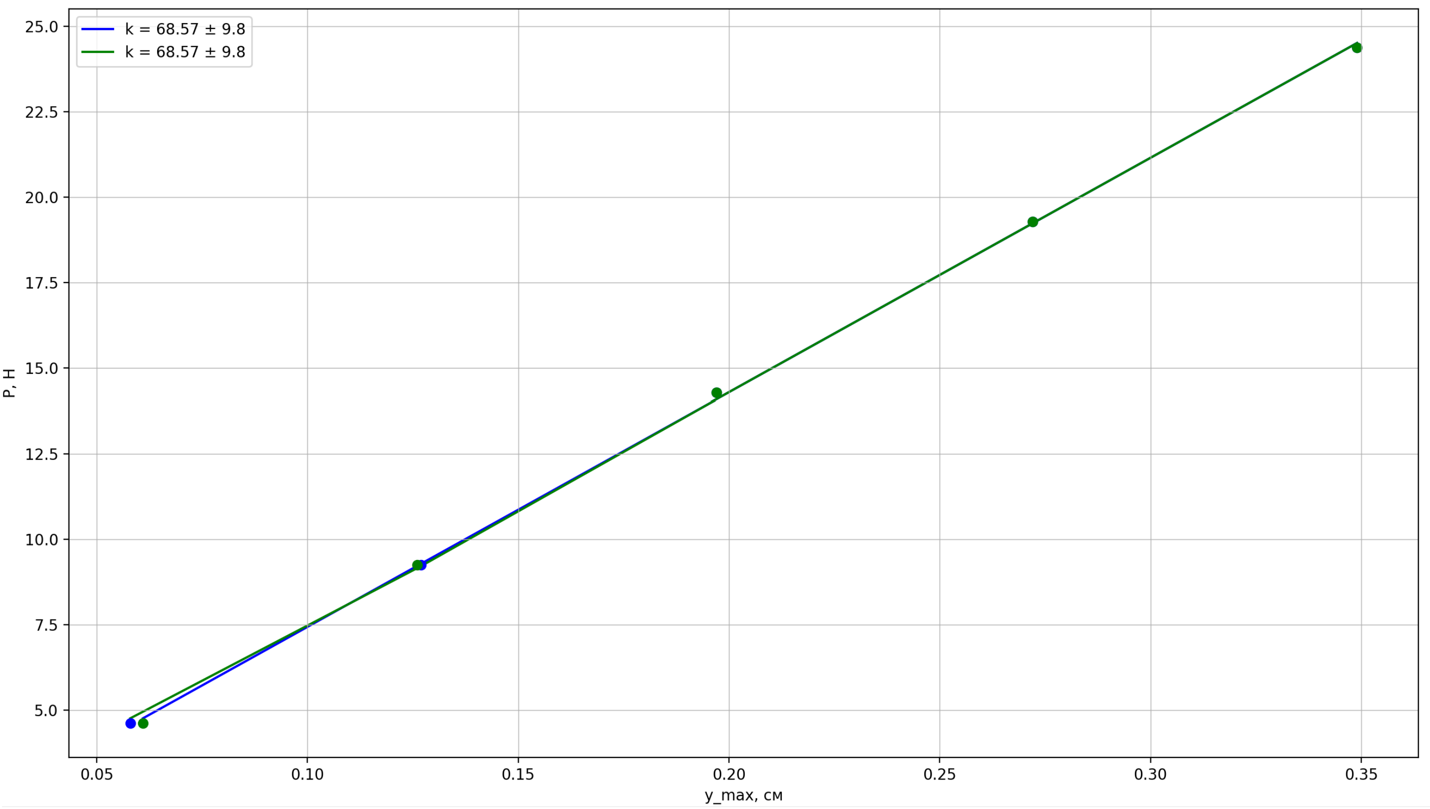

Рис. 4: График зависимости $P(y_{max})$ от y_{max} для деревянной балки при прямом и обратном ходе

Как видно точки первой и второй функции графика лежат практически на одной прямой, коэффиценты наклона находим по формулам:

$$k = \frac{\langle P\Delta y_{max}\rangle - \langle P\rangle\langle\Delta y_{max}\rangle}{\langle y_{max}^2\rangle - \langle y_{max}\rangle^2}$$

Учтем, что $\varepsilon_{\Delta_{y_{\max}}} \approx 14.3\%$, а $\varepsilon_m \approx 0.01\%$
Для оценики систематической и случайной относительной погрешности пользуемся формулами получаем:

$$\varepsilon_k^{\text{случ}} = \frac{1}{k\sqrt{N-2}}\sqrt{\frac{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2}{\langle y_{max}^2\rangle - \langle y_{max}\rangle^2} - k^2} = 1.05\%, \quad \varepsilon_k^{\text{сист}} = \sqrt{\varepsilon_P^2 + \varepsilon_{y_{max}}^2} \approx \varepsilon_{y_{max}} = 14.3\%$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\varepsilon_{\text{сист}}^2 + \varepsilon_{\text{случ}}^2} \approx \varepsilon_{y_{max}} = 14.3\%$$

Для итоговых значений коэффицентов наклона имеем:

$$k_{\text{дер}} = 68.57 \pm 9.8 \text{ Н/см},$$

- Теперь посчитаем модуль Юнга по формуле 3:

$$E_{\text{дер}} = \frac{kl^3}{4ab^3} = 9.57 \text{ ГПа}, \quad \varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_k^2 + 9\varepsilon_l^2} = 14.3\%$$

По итогу получаем значение: $E_{\text{дер}} = 9.57 \pm 1.37$ Гпа.

- Кладем исследуемую балку на стойку. Устанавливаем индикатор в центре балки и снимаем зависимость стрелы прогиба Δy_{max} от величины нагрузкиP. Проделываем эти измерения при возрастающей и убывающей нагрузки, заносим данные в таблицу. Заносим эти данные в таблицу и строим по этим точкам график методом намименьших квадратов (МНК).

m, гр	$\Delta_{y_{\max}} \Uparrow$,см	P, Н	y_{max}, см	m, гр	$\Delta_{y_{\max}} \Downarrow$,см	P, Н	y_{max}, см
461.8	0.109	4.618	0.109	2437.1	-0.126	24.371	0.592
925.4	0.111	9.254	0.22	1928.4	-0.124	19.284	0.466
1428.4	0.12	14.284	0.34	1428.4	-0.122	14.284	0.342
1928.4	0.125	19.284	0.465	925.4	-0.12	9.254	0.222
2437.1	0.127	24.371	0.592	461.8	-0.115	4.618	0.107

Таблица 4: Величина прогиба в зависимости от массы при повышении $\Uparrow$ и при понижении массы $\Downarrow$ для деревянной балки

Как видно точки первой и второй функции графика лежат практически на одной прямой, коэффиценты наклона находим по формулам:

$$k = \frac{\langle P\Delta y_{max}\rangle - \langle P\rangle\langle\Delta y_{max}\rangle}{\langle y_{max}^2\rangle - \langle y_{max}\rangle^2}$$

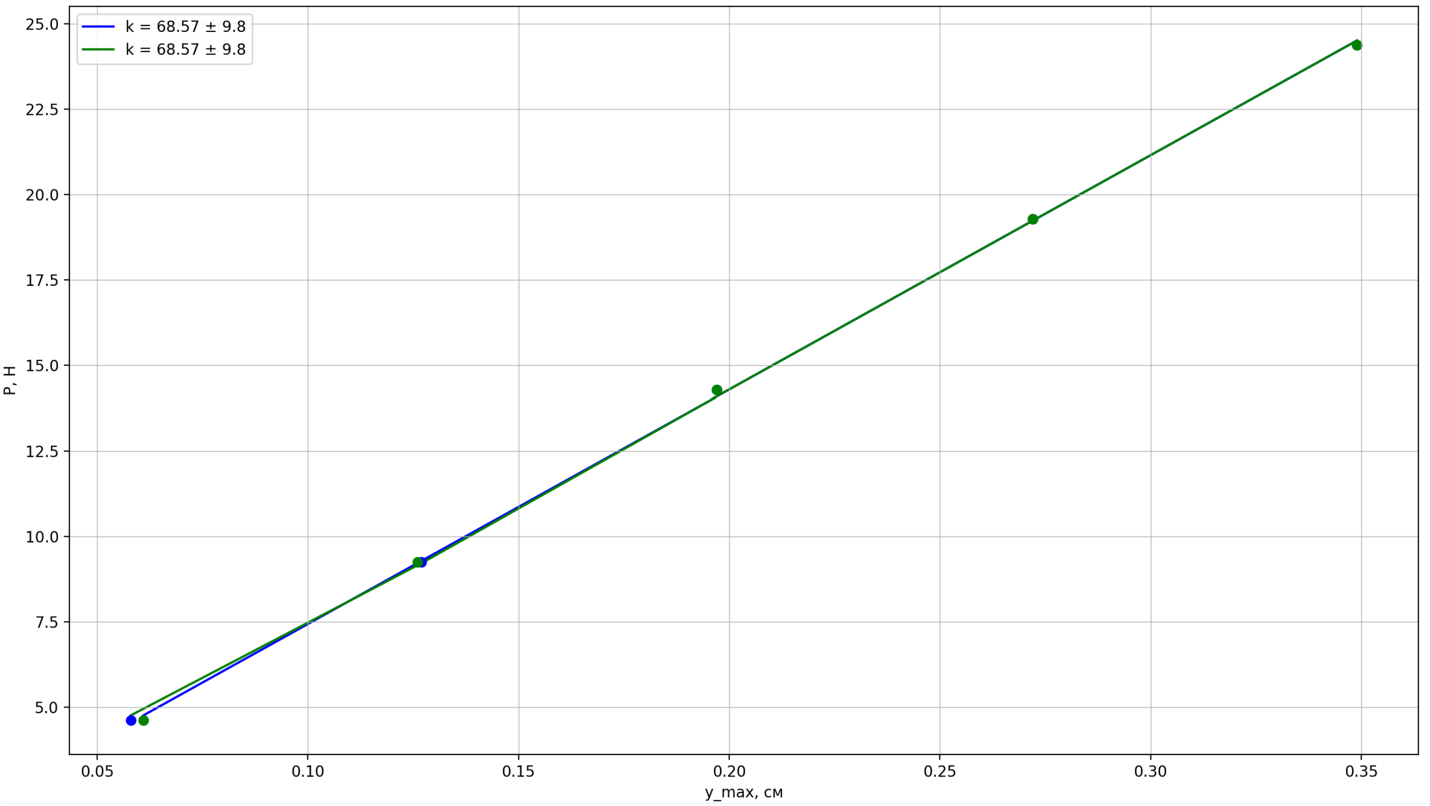

Рис. 5: График зависимости $P(y_{max})$ от y_{max} для стальной балки при прямом и обратном ходе

Учтем, что $\varepsilon_{\Delta_{y\max}} \approx 8.45\%$, а $\varepsilon_m \approx 0.01\%$
Для оценики систематической и случайной относительной погрешности пользуемся формулами получаем:

$$\varepsilon_k^{\text{случ}} = \frac{1}{k\sqrt{N-2}}\sqrt{\frac{\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2}{\langle y_{max}^2\rangle - \langle y_{max}\rangle^2} - k^2} = 0.66\%, \quad \varepsilon_k^{\text{сист}} = \sqrt{\varepsilon_P^2 + \varepsilon_{y_{max}}^2} \approx \varepsilon_{y_{max}} = 8.45\%$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\varepsilon_{\text{сист}}^2 + \varepsilon_{\text{случ}}^2} \approx \varepsilon_{y_{max}} = 8.45\%$$

Для итоговых значений коэффицентов наклона имеем:

$$k_{\text{сталь}} = 40.89 \pm 3.46 \text{ Н/см},$$

- Теперь посчитаем модуль Юнга по формуле 3:

$$E_{\text{сталь}} = \frac{kl^3}{4ab^3} = 91 \text{ ГПа}, \quad \varepsilon_E = \sqrt{\varepsilon_k^2 + 9\varepsilon_l^2} = 8.45\%$$

По итогу получаем значение: $E_{\text{сталь}} = 91.0 \pm 7.7$ Гпа.

4 Выводы

В результате выполнения работы было поддтверждено несколько теоретических зависимостей. Получены ожидаемые линейные зависимости между стрелой прогиба

и весом нагрузки.
В первой части работы были получено значение модуля Юнга проволки: $E = 155.4 \pm 10.5$ Гпа которое в пределах погрешности совпадает с табличным значением для стали и железа.
Во второй части работы получены значения для модулей Юнга стали $E_{\text{сталь}} = 91.0 \pm 7.7$ Гпа и дерева $E_{\text{дер}} = 9.57 \pm 1.37$ Гпа соответственно, которые совпадают с табличными значениями в пределах погрешности.