Chapter12 Stochastic Galerkin Method

竹田航太

2020 年 12 月 30 日

1 Weak Formulation of Nonlinearities

weak problem の定式化をする．次のような形の問題を考える．input data d に対して以下を満たす解 $u \in \mathcal{U}$ を求めたい．($\mathcal{U}$ は Banach 空間)

$$\mathcal{R}(u; d) = 0$$

この問題を以下のような weak problem に緩める

$$\langle \tau | \mathcal{R}(u; d) \rangle = 0 \ \forall \tau \in \mathcal{T} \subset \mathcal{U}'$$

応用上は $\mathcal{T}$ は有限次元にとる必要がある．

この章では確率空間 $(\Theta, \mathcal{F}, \mu)$ を仮定し，input data と output の解を確率変数として扱う．ランダムな空間 $S := L^2(\theta, \mu; \mathbb{R})$ と，deterministic な解の空間 $\mathcal{U}$ に対して確率変数としての解の空間は $\mathcal{U} \otimes S$ とする．また，S の直交基底となる多項式系 $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ をとって有限次元部分空間 $S_K := \mathrm{span}\{\psi_0, \cdots, \psi_K\}$ を考える． 方程式の非線型性を gPC 展開で扱う．gPC 展開の係数により確率変数の積の gPC 展開係数から計算する必要がある．

Definition 1.1 (Galerkin Multiplication)**.** $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ に対する *multiplication tensor*M_{ijk} を以下で定める．

$$M_{ijk} := \frac{\langle \psi_i \psi_j \psi_k \rangle_\mu}{\langle \psi_k^2 \rangle_\mu} \qquad \forall i, j, k \in \mathbb{N}_0$$

また，*index(i,j,k)* が有限の場合にも同様の *notation* を使う．

Remark 1.2. *(1)* $M_{ijk} = M_{jik}$ ただし，k についての対称性はない．
(2) (M_{ijk}) は *sparse*

Example 1.3 (Multiplication tensor)**.** S 内の確率変数の積を *gPC* 展開する．
$U = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} u_k \psi_k, V = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} v_k \psi_k \in S, W = UV \in S$ とする．今 $W = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} w_k \psi_k$ と *gPC*

展開したときの係数 w_k を u_k, v_k で表す．

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} u_i v_j \psi_i \psi_j \\ \Rightarrow w_k &= \frac{\langle W\psi_k\rangle}{\psi_k^2} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} M_{ijk} u_i v_j \end{aligned}$$

また，有限次元空間 S_K で同じことを考える場合 $U, V \in S_K$ に対し，$W = UV$ は S_K に入るとは限らない．そのため，$W = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{i,j=0}^{K} M_{ijk} u_i v_j \psi_k$ を $k = K$ で打ち切って

$$U * V := \sum_{k\in K} Mijku_i v_j \psi_k$$

定める．*Galerkin product* や *pseudo product* と呼ばれる．これは $W(= UV)$ の S_K への直交射影となっている．

Theorem 1.4 (Galerkin product)**.** *$K \in \mathbb{N}_0$ とする．$U, V, W \in S_K$ に対して Galerkin product $*$ は以下を満たす．*

(1) $U * V = \pi_{S_K}(UV)$(直交射影)
(2) $U * V = V * U$
(3) $(\alpha U) * (\beta V) = \alpha\beta(U * V)$
(4) $(U + V) * W = U * W + V * W$

しかし，結合則は満たさない．つまり $\exists U, V, W \ s.t.\ U * (V * W) \neq (U * V) * W$

Proof. $U = \sum_{i=0}^{K} u_i\psi_i, V = \sum_{i=0}^{K} v_i\psi_i \in S_K$ とする．

(1):

$$UV - U * V = \sum_{k\geq K}\sum_{i,j=0}^{K} M_{ijk} u_i v_k \psi_k \in S_K^{\perp}$$

(2): M_{ijk} の i, j に対する対称性から従う．

$$U * V = \sum_{i,j,k}^{K} M_{ijk} u_i v_j \psi_k = \sum_{i,j,k}^{K} M_{ijk} v_j u_i \psi_k = V * U$$

(3),(4): 自明

結合則について □

Remark 1.5. $U, V \notin S_K \Rightarrow U * V \neq \pi_{S_K}(UV)$

Proof. □

2 Random ODE

微分方程式の初期条件や係数が不確実な場合である Random ODE の例を 2 つ挙げる．用語として確率微分方程式 (Stochastic ODE) とは区別されるべきである．

Example 2.1 (radio deactive)．まず，*deterministic* な放射能半減の方程式

$$\dot{u}(t) = -\lambda u(t) \qquad u(0) = b \tag{2.1}$$

を考える．ただし，$\lambda, b > 0$．この解は $u(t) = be^{-\lambda t}$ であり半減期は $\lambda^{-1}\log 2$ となる．

次に，λ, b が *uncertain* な場合を考える．確率空間 (Θ, μ) を仮定．確率変数 $U(t), \Lambda, B \in S = L^2(\Theta, \mu; \mathbb{R})$ に対して，*(2.1)* に対応する方程式を考える．

$$\dot{U}(t) = -\Lambda U(t) \qquad U(0) = B \tag{2.2}$$

S の *gPC basis*$(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ を考えて

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \lambda_k \psi_k \\
B &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k \psi_k \\
U(t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} u(t)_k \psi_k
\end{aligned}$$

という *gPC* 展開を仮定する．*(2.2)* の ψ_k 方向への射影は

$$\begin{aligned}
\langle \dot{U}(t)\psi_k \rangle = -\langle \Lambda U(t)\psi_k \rangle &\Leftrightarrow \langle \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \dot{u}_j(t)\psi_j\psi_k \rangle = -\langle \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} \lambda_i u_j(t)\psi_i\psi_j\psi_k \rangle \\
&\Leftrightarrow \dot{u}_j(t)\langle \psi_k^2 \rangle = -\sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} \lambda_i u_j(t) \langle \psi_i\psi_j\psi_k \rangle \\
&\Leftrightarrow \dot{u}_j(t) = -\sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} \lambda_i u_j(t) M_{ijk}
\end{aligned}$$

これは可算個の *ODE* になっている．$K \in \mathbb{N}$ での打ち切りを考えると，

$$A(\Lambda) \coloneqq (\sum_{i=0}^{K} \lambda_i M_{ijk})_{j,k=0}^{K} \in \mathbb{R}^{(K+1)\times(K+1)}$$

として *ODE* の行列表示が得られる．

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A(\Lambda)^\top \mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{b} \tag{2.3}$$

ただし，$\mathbf{u}(t) = (u_0(t), \cdots, u_K(t))^\top, \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_K)^\top$ *Galerkin truncation* 表示は

$$\frac{dU^{(K)}(t)}{dt} = -(\Pi_{S_K}\Lambda) * U^{(K)}(t), \qquad U^{(K)}(0) = \Pi_{S_K} B \tag{2.4}$$

Example 2.2 (harmonic oscillator)**.** 不確実な Ω に対して調和振動子の方程式

$$\ddot{U}(t) = -\Omega^2 U(t), \qquad U(0) = 1, \dot{U}(0) = 0 \tag{2.5}$$

を考える．$\Omega, \Omega^2 \in S = L^2(\Theta, \mu; \mathbb{R})$ として S の *gPC basis*$(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ に対して

$$\Omega = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \omega_k \psi_k$$

という展開を仮定．さらに $Y := \Omega^2 \in S$ を

$$Y = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\sum_{p,q\in\mathbb{N}_0} \omega_p \omega_q M_{pqk} \right) \psi_k$$

と展開できる．$y_k = \sum_{p,q\in\mathbb{N}_0} \omega_p \omega_q M_{pqk}$ とおく．*Example2.1* と同様に考えて，

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}_0} M_{ijk} y_i u_j(t) \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$K \in \mathbb{N}$ で打ち切って $A \in\in \mathbb{R}^{(K+1)\times(K+1)}$ を以下で定めて

$$A = \left(\sum_{i=0}^{K} y_i M_{ijk} \right)_{j,k=0}^{K} = \left(\sum_{i=0}^{K} \left[\sum_{p,q\in\mathbb{N}_0} \omega_p \omega_q M_{pqi} \right] M_{ijk} \right)_{j,k=0}^{K}$$

Random Harmonic Oscillator の *Galarkin Equation* 行列表示

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -A^\top \mathbf{u}(t), \qquad \mathbf{u}(0) = (1, 0, \cdots, 0)^\top, \dot{\mathbf{u}}(0) = (0, \cdots, 0)^\top \tag{2.6}$$

を得る．ただし，$\mathbf{u}(t) = (u_0(t), \cdots, u_k(t))^\top$

3 Lax-Milgram and Random ODE

Theorem 3.1 (Lax-Milgram Theorem)**.** *$(H, \|\cdot\|)$: Hilbert* 空間*, $a : H \times H \to \mathbb{R}$:* 双線形形式で以下を満たすとする．

(a) $\exists C > 0$ *s.t.* $\forall u, v \in H$, $|a(u, v)| \le C\|u\|\|v\|$
(b) $\exists c > 0$ *s.t.* $\forall v \in H$, $|a(v, v)| \ge c\|v\|^2$

このとき，任意の *dual* の元 $f \in H'$ に対して $\exists! u \in H$ *s.t.*

$$a(u, v) = \langle f | v \rangle \qquad \forall v \in H \tag{3.1}$$

さらに，この u に対して

$$\|u\|_H \le c^{-1} \|f\|_{H'} \tag{3.2}$$

が成り立つ．

Proof. □

Definition 3.2 (Galerkin projection)**.** *Hilbert* 空間 H の有限次元部分空間 $\mathcal{U}_M$ を考える．*Theorem3.1* から得られる *weak problem* の解 u に対して，$\mathcal{U}_M$ に *Theorem3.1* を適用して得られる解 $u^{(M)}$ を u の *Galerkin solution* という．

Lemma 3.3 (Galerkin 直交性)**.** *(3.1)* の *weak solution* u と *Galerkin solution* $u^{(M)}$ に対し，その残差 $u - u^{(M)}$ は $\mathcal{U}_M$ で a-直交である．つまり，以下が成り立つ．

$$a(u - u^{(M)}, v) = 0 \qquad \forall v^{(M)} \in \mathcal{U}_M \tag{3.3}$$

Proof. $\forall v^{(M)} \in \mathcal{U}_M$ を取る $v^{(M)} \in H$ でもあるので，$a(u, v^{(M)}) = \langle f | v^{(M)} \rangle$ と $a(u^{(M)}, v^{(M)}) = \langle f | v^{(M)} \rangle$ が成り立ち，辺々引くと (3.3) が成り立つ． □

Lemma 3.4 (Céa's Lemma)**.** $C, c > 0$ を *Theorem3.1* の定数とすると，*(3.1)* の *weak solution* u と *Galerkin solution* $u^{(M)}$ は以下を満たす．

$$\|u - u^{(M)}\| \leq \frac{C}{c} \inf\{\|u - v^{(M)}\|; v^{(M)} \in \mathcal{U}_M\} \tag{3.4}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
c\|u - u^{(M)}\|^2 &\leq |a(u - u^{(M)}, u - u^{(M)})| \\
&\leq |a(u - u^{(M)}, u - v^{(M)})| + |a(u - u^{(M)}, v^{(M)} - u^{(M)})| \\
&\text{Galerkin 直交性から第 2 項は 0} \\
&\leq C\|u - u^{(M)}\|\|u - v^{(M)}\|
\end{aligned}$$

□

Remark 3.5. *Céa's Lemma* により定数倍の違いを除けば *Galerkin solution* は *optimal* である．

3.1 Stochastic Setting

$\mathcal{U}$: Hilbert 空間，$(\Theta, \mathcal{F}, \mu)$: 確率空間．$S = L^2(\Theta, \mu; \mathbb{R})$ に対して，$H \coloneqq \mathcal{U} \otimes S \cong L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ と定める．(同型は S に可分性を仮定すると成り立つ．) $X, Y \in H$ に対して内積を $\langle X, Y \rangle_H = \mathbb{E}_\mu[\langle X, Y \rangle_{\mathcal{U}}]$ で定める．

Definition 3.6 (H 上の双線形形式と線形汎関数)**.** $\mathcal{U}$ 上の双線形形式-値確率変数 $A : \Theta \to (\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R})$ を用いて，H 上の双線形形式 α を以下で定める．

$$\alpha(X, Y) \coloneqq \mathbb{E}_\mu[A(X, Y)] = \int_\Theta A(\theta)(X(\theta), Y(\theta)) d\theta \tag{3.5}$$

また，$\mathcal{U}'$-値確率変数 $F : \Theta \to \mathcal{U}'$ を用いて $\beta \in H'$ を以下で定める．

$$\langle \beta | X \rangle_H \coloneqq \mathbb{E}_\mu[\langle F | X \rangle_{\mathcal{U}}] \tag{3.6}$$

Definition 3.7 (Stochastic Weak Problem)**.** *Stochastic Weak Problem* を以下で定める．

与えられた α, β に対して

$$\alpha(U, V) = \langle \beta | V \rangle \qquad \forall V \in L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U}) \tag{3.7}$$

を満たす $U \in L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ を求める．

Theorem 3.8 (Stochastic 'Uniform' Lax-Milgram)**.** α, β を *Definition3.6* で定義し，$\exists C, c > 0$ が $\theta \in \Theta$ に対して一様に取れて $\forall \theta \in \Theta$ で $A(\theta)$ が *Hilbert* 空間 $\mathcal{U}$ に対して *Theorem3.1* の仮定を満たすとする．このとき *Stochastic Weak Problem(3.7)* の解 $U \in L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ が唯一存在する．

Proof. $\alpha : H \times H \to \mathbb{R}$ が Theorem3.1 の仮定を満たすことを確認する．$X, Y \in H = L^2(\Theta, \mu; \mathcal{U})$ に対して，

(a):

$$\begin{aligned}
|\alpha(X, Y)| &\leq \mathbb{E}_\mu[|A(X, Y)|] \\
&\leq \mathbb{E}_\mu[C\|X\|_{\mathcal{U}}\|Y\|_{\mathcal{U}}] \\
&\leq C\mathbb{E}_\mu[\|X\|_{\mathcal{U}}^2]^{1/2}\mathbb{E}_\mu[\|Y\|_{\mathcal{U}}^2]^{1/2} \\
&= C\|X\|_H\|Y\|_H
\end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned}
\alpha(X, X) &= \mathbb{E}_\mu[A(X, X)] \\
&\geq \mathbb{E}_\mu[c\|X\|_{\mathcal{U}}^2] \\
&= c\|X\|_H^2
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63. Springer, 2015.