線形作用素

竹田航太

2020 年 8 月 14 日

概要

線形作用素，行列について必要なことをまとめる．執筆中．

1 行列

1.1 自己共役

Definition 1.1. 自己共役，正定値を定義する．

- $A \in M_n(\mathbb{C})$ が自己共役 *(self-adjoint)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $A^* = A$ 自己共役行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_{sa}$ とかく．
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ が正定値 *(positive-definite)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $x^*Ax > 0$ $(\forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n)$ 同様に全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_+$ とかく．
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ が半正定値 *(positive-definite)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $x^*Ax \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{C}^n)$ 同様に全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_{+=}$ とかく．

Theorem 1.2. $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ とする．

(1) A の固有値は全て実数

Theorem 1.3 (正定値行列の特徴づけ)**.** $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ に対して以下は同値

(1) $A \in M_n(\mathbb{C})_+$
(2) A の固有値は正
(3) 正の対角行列でユニタリ対角化できる
(4) $\exists S \in M_n(\mathbb{C}), S :$ 正則 *s.t.* $A = S^*S$

Theorem 1.4. $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ に対して以下は同値

(1) $A \in M_n(\mathbb{C})_{+=}$
(2) A の固有値は非負
(3) 非負の対角行列でユニタリ対角化できる

(4) $\exists S \in M_n(\mathbb{C})$ *s.t.* $A = S^*S$

Theorem 1.5. $A \in M_n(\mathbb{C})_+$ の固有値は全て正であり $det(A) > 0$ が成り立つので，A は正則であり，$A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})_+$.

1.2　逆行列

Lemma 1.6. $P, I \in M_n(\mathbb{C})$ で I は単位行列．$I + P$: 可逆とする．このとき以下が成り立つ．

$$(I+P)^{-1} = I - (I+P)^{-1}P$$

Proof.

$$LHS = (I+P)^{-1}(I+P-P) = I - (I+P)^{-1}P = RHS$$

□

Lemma 1.7. $P \in M_{n\times m}(\mathbb{C}), Q \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), I_n(I_m)$ をそれぞれ $n(m)$ 次単位行列とする．$I_n + PQ, I_m + QP$: 可逆とする．このとき以下が成り立つ．

$$(I+PQ)^{-1}P = P(I+QP)^{-1}$$

Proof.

$$P + PQP = P(I+QP) = (I+PQ)P$$

より右の等式で左から $(I+PQ)^{-1}$, 右から $(I+QP)^{-1}$ をかけると従う． □

Lemma 1.8. $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$: 可逆とする．このとき以下が成り立つ．

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$$

Proof. I_n を n 次単位行列として $(PQ)Q^{-1}P^{-1} = I_n$，$Q^{-1}P^{-1}(PQ) = I_n$ □

Theorem 1.9. $A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_{n\times m}(\mathbb{C}), C \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), D \in M_m(\mathbb{C})$ として，$A, D, D + CA^{-1}B$: 可逆とする．このとき以下が成り立つ．

$$(A+BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(A+BD^{-1}C)^{-1} &= (A(I+A^{-1}BD^{-1}C))^{-1} \\
&\overset{1.8}{=} (I+A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1} \\
&\overset{1.6}{=} \{I - (I+A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}C\}A^{-1} \\
&= A^{-1} - (I+A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}CA^{-1} \\
&\overset{1.7}{=} A^{-1} - A^{-1}B(I+D^{-1}CA^{-1}B)^{-1}D^{-1}CA^{-1} \\
&\overset{1.8}{=} A^{-1} - A^{-1}B(D+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}
\end{aligned}$$

*等号の上の数字は Lemma の番号 $\square$

Theorem 1.10. $P \in M_n(\mathbb{C})_+$(正定値)$, R \in M_m(\mathbb{C})_+, B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ とする．このとき $(BPB^* + R)$ は可逆で以下が成り立つ．

$$(P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} = PB^*(BPB^* + R)^{-1}$$

Proof. Lemma を使う．

$$\begin{aligned}(P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} &\overset{1.8}{=} (I + PB^*R^{-1}B)^{-1}PB^*R^{-1} \\ &\overset{1.7}{=} PB^*(I + R^{-1}BPB^*)^{-1}R^{-1} \\ &\overset{1.8}{=} PB^*(BPB^* + R)^{-1}\end{aligned}$$

*等号の上の数字は Lemma の番号 $\square$

Example 1.11 (Kálmán filter)**.** y : 観測データ，C : 対称正定値，R : 対称正定値，H 観測 *operator* とすると

$$(I + CH^*R^{-1}H)x^a = x^f + CH^*R^{-1}y \Leftrightarrow x^a = x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f)$$

Proof. 左の式の両辺に左から $(I + CH^*R^{-1}H)^{-1} = (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}$ をかける

$$\begin{aligned}x^a &= (I + CH^*R^{-1}H)^{-1}x^f + (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}CH^*R^{-1}y \\ &\overset{1.9,1.10}{=} \{I - CH^*(R + H^*CH)^{-1}H\}x^f + CH^*(HCH^* + R)^{-1}y \\ &= x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f)\end{aligned}$$

$\square$

2 線形作用素

Definition 2.1 (自己共役作用素)**.** $A \in B(H)$ に対して，

$$A \text{ が自己共役作用素} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in H, \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

自己共役作用素全体の集合を $B_{sa}(H)$ とかく．

Definition 2.2 (正作用素)**.** $A \in B_{sa}(H)$ に対して

$$\begin{aligned}A \text{ が正作用素} &\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists T \in B(H) \ s.t. \ A = T^*T \\ &\Leftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty)\end{aligned}$$

Theorem 2.3 (コンパクト作用素)**.** $T \in B(H)$ がに対して $TB(0,1)$ が全有界であるとき T はコンパクト作用素であるという．ただし，$B(0,1) := \{x \in H; \|x\| \leq 1\}$ は H の閉単位球.

Theorem 2.4 (コンパクト自己共役作用素のスペクトル分解)**.** H : 可分 *Hilbert* 空間とする. $A \in B_{sa}(H) \cap K(H)$ とすると, $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ である. さらに A の固有値の列 $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ と対応する固有ベクトルからなる H の正規直交基底 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

が作用素ノルムでの収束の意味で成り立つ. ただし, $e_n \otimes e_n^* = P_n$ は $Ker(\lambda_n I - T)$ への射影.

Theorem 2.5 (コンパクト作用素の特異値分解)**.**

Definition 2.6 (Schatten p class)**.** *Schatten p* クラスを

$$C_p(H) \coloneqq \{T \in K(H); (\sum_n s_n(T)^p)^{1/p} < \infty\}$$

で定める. 特に $C_2(H)$ を *Hilbert Schmidt* クラス, $C_1(H)$ をトレースクラスという.

Definition 2.7 (トレース)**.** $A \in B(H)_+$ に対してトレースを $Tr(A) \coloneqq \sum_n \langle Ae_n, e_n \rangle$ とおくと (e_n) の取り方によらない.

Definition 2.8 (トレースクラス)**.** $A \in B(H)$ に対して $\|A\|_{C_1} = Tr(|A|)$ であり. この値が有限のとき $Tr(A)$ も有限.

Lemma 2.9. $T \in B(H)$ に対して $Tr(T^*T) < \infty \Rightarrow T \in K(H)$

Theorem 2.10 (Hilbert Schmidt class)**.** $T \in B(H)$ に対して $Tr(T^*T) < \infty \Leftrightarrow T \in C_2(H)$ である. さらにこのとき $Tr(T^*T) = \|T\|_{HS}^2 = \|T\|_{C_2}^2$ が成り立つ. また $Tr(T^*T) = \sum_n \|T_n e_n\|^2 = \sum_{n,m} |\langle T_n e_n, e_m \rangle|^2$ などもわかる.

Theorem 2.11 (class の関係)**.** $C_1(H) \subset C_2(H) \subset K(H)$