ベクトル公式集

竹田航太

2021年2月8日

1 ベクトルの公式

*随時更新

Theorem 1.1. $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ とする. このとき以下が成り立つ.

(1)
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

(2)
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$$

(3)
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

(4)
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det([\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}])$$

Theorem 1.2. $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$
- (2) $\nabla \times (\nabla \mathbf{f}) = \mathbf{o}$

(3)
$$\nabla (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} + \mathbf{f} \times (\nabla \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \times (\nabla \times \mathbf{f})$$

(4)
$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$$

(5)
$$\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}) = (u\cdot\nabla)\mathbf{f} + \mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{f})$$

(6)
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{f}$$

参考文献

[1] J.E. Marsden Alexandre J. Chorin. A mathematical introduction to fluid mechanics, volume 3. Springer, 1993.