線形作用素

竹田航太

2025 年 5 月 30 日

目次

概要

行列，線形作用素の基礎事項について，応用数学で必要な内容を中心にまとめる．

1 行列

1.1 対角化

Definition 1.1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，

- A が正規 *(normal)* $\overset{def}{\Leftrightarrow} A^*A = AA^*$.
- A がユニタリ *(unitary)* $\overset{def}{\Leftrightarrow} A^*A = AA^* = I$.

Theorem 1.2. *(*対角化*)* $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，ユニタリ対角化可能であることと正規行列であることは同値.

1.2 自己共役

Definition 1.3. 自己共役，正定値を定義する．

- $A \in M_n(\mathbb{C})$ が自己共役 *(self-adjoint)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $A^* = A$ 自己共役行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_{sa}$ とかく.
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ が正定値 *(positive-definite)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $x^*Ax > 0$ $(\forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n)$ 同様に全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_+$ とかく.
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ が半正定値 *(positive-definite)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $x^*Ax \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{C}^n)$ 同様に全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_{+=}$ とかく.

Theorem 1.4. $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ とする.

(1) A の固有値は全て実数

Theorem 1.5 (正定値行列の特徴づけ)**.** $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ に対して以下は同値

(1) $A \in M_n(\mathbb{C})_+$
(2) A の固有値は正
(3) 正の対角行列でユニタリ対角化できる
(4) $\exists S \in M_n(\mathbb{C}), S:$ 正則 *s.t.* $A = S^*S$

Theorem 1.6. $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ に対して以下は同値

(1) $A \in M_n(\mathbb{C})_{+=}$
(2) A の固有値は非負
(3) 非負の対角行列でユニタリ対角化できる
(4) $\exists S \in M_n(\mathbb{C})$ *s.t.* $A = S^*S$

Theorem 1.7. $A \in M_n(\mathbb{C})_+$ の固有値は全て正であり $det(A) > 0$ が成り立つので，A は正則であり，$A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})_+$.

1.3 逆行列

Lemma 1.8. $P, I \in M_n(\mathbb{C})$ で I は単位行列．$I + P:$ 可逆とする．このとき以下が成り立つ.

$$(I+P)^{-1} = I - (I+P)^{-1}P$$

Proof.

$$LHS = (I+P)^{-1}(I+P-P) = I - (I+P)^{-1}P = RHS$$

□

Lemma 1.9. $P \in M_{n\times m}(\mathbb{C}), Q \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), I_n(I_m)$ をそれぞれ $n(m)$ 次単位行列とする．$I_n + PQ, I_m + QP:$ 可逆とする．このとき以下が成り立つ.

$$(I+PQ)^{-1}P = P(I+QP)^{-1}$$

Proof.

$$P + PQP = P(I+QP) = (I+PQ)P$$

より右の等式で左から $(I+PQ)^{-1}$, 右から $(I+QP)^{-1}$ をかけると従う． □

Lemma 1.10. $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$: 可逆とする．このとき以下が成り立つ．

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$$

Proof. I_n を n 次単位行列として $(PQ)Q^{-1}P^{-1} = I_n,\ Q^{-1}P^{-1}(PQ) = I_n$ □

Theorem 1.11. $A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_{n\times m}(\mathbb{C}), C \in M_{m\times n}(\mathbb{C}), D \in M_m(\mathbb{C})$ として，$A, D, D + CA^{-1}B$: 可逆とする．このとき以下が成り立つ．

$$(A + BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(A + BD^{-1}C)^{-1} &= (A(I + A^{-1}BD^{-1}C))^{-1} \\
&\overset{1.10}{=} (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1} \\
&\overset{1.8}{=} \{I - (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}C\}A^{-1} \\
&= A^{-1} - (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}CA^{-1} \\
&\overset{1.9}{=} A^{-1} - A^{-1}B(I + D^{-1}CA^{-1}B)^{-1}D^{-1}CA^{-1} \\
&\overset{1.10}{=} A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}
\end{aligned}$$

*等号の上の数字は Lemma の番号 □

Theorem 1.12. $P \in M_n(\mathbb{C})_+$(正定値)$, R \in M_m(\mathbb{C})_+, B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ とする．このとき $(BPB^* + R)$ は可逆で以下が成り立つ．

$$(P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} = PB^*(BPB^* + R)^{-1}$$

Proof. Lemma を使う．

$$\begin{aligned}
(P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} &\overset{1.10}{=} (I + PB^*R^{-1}B)^{-1}PB^*R^{-1} \\
&\overset{1.9}{=} PB^*(I + R^{-1}BPB^*)^{-1}R^{-1} \\
&\overset{1.10}{=} PB^*(BPB^* + R)^{-1}
\end{aligned}$$

*等号の上の数字は Lemma の番号 □

Example 1.1 (Kalman filter)**.** y : 観測データ，C : 対称正定値，R : 対称正定値，H 観測 *operator* とすると

$$(I + CH^*R^{-1}H)x^a = x^f + CH^*R^{-1}y \Leftrightarrow x^a = x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f)$$

Proof. 左の式の両辺に左から $(I + CH^*R^{-1}H)^{-1} = (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}$ をかける

$$\begin{aligned}
x^a &= (I + CH^*R^{-1}H)^{-1}x^f + (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}CH^*R^{-1}y \\
&\overset{1.11,1.12}{=} \{I - CH^*(R + H^*CH)^{-1}H\}x^f + CH^*(HCH^* + R)^{-1}y \\
&= x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f)
\end{aligned}$$

□

Theorem 1.13 (逆行列の平方根の特殊な場合)**.** $v \in \mathbb{R}^n$ に対して，$A = I_n + vv^T$ という形をしているとき，逆行列の平方根は

$$A^{-\frac{1}{2}} = I_n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + ||v||^2}}\right) \frac{vv^T}{||v||^2} \tag{1.1}$$

と書ける．

Proof. A の固有値分解は，v に対する固有値が $1 + ||v||^2$ であり，その他は 1 である．$\lambda := 1 + ||v||^2$, $P := \frac{vv^T}{||v||^2}$ (射影) とおくと，A は $A = \lambda P \oplus (I_n - P)$ と（ブロック対角の形で）分解できる．したがって，

$$\begin{aligned} A^{-\frac{1}{2}} &= \lambda^{-\frac{1}{2}} P \oplus (I_n - P) \\ &= \lambda^{-\frac{1}{2}} P + (I_n - P) \\ &= I_n - P + \lambda^{-\frac{1}{2}} P \\ &= I_n - (1 - \lambda^{-\frac{1}{2}}) P \end{aligned}$$

これに $\lambda = 1 + ||v||^2$ と $P = \frac{vv^T}{||v||^2}$ を代入すれば，(1) を得る．

□

2 線形作用素

2.1 作用素

Definition 2.1 (作用素)**.** *Banach* 空間 X, Y に対して，線型写像 $T : X \to Y$ を作用素という．

Definition 2.2 (有界作用素)**.** 作用素 $T : X \to Y$ が有界 $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $TX_1 \subset Y$ が有界．ただし，$X_1 = \{x \in X | \|x\| \leq 1\}$ とした．さらに，有界作用素全体の集合を $B(X, Y)$ とかく．

Theorem 2.3 (連続性と有界性)**.** 作用素 $X \to Y$ について以下は同値.

(1) T は連続.
(2) T は $o \in X$ で連続.
(3) T は有界.

有界とは限らない作用素で重要なものに閉作用素がある．

Definition 2.4 (閉作用素)**.** *Banach* 空間 X, Y に対して，作用素 $T : D(T) \to Y$ を考える．ただし，T の定義域を $D(T)$ とかいた．T のグラフを $\mathcal{G}_T = \{(x, Tx) \in X \times Y, x \in D(T)\}$ で定める．さらに，$X \times Y$ のノルムを

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

で与え，このノルムに対して $\mathcal{G}_T$ が $X \times Y$ の閉部分空間であるとき，T を閉作用という．

2.2 Baire のカテゴリー定理

Baire のカテゴリー定理とそれか導かれる関数解析学の基本的な定理をまとめる．

Theorem 2.5 (Baire のカテゴリー定理)**.** X は完備距離空間，$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ は $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ を満たす閉集合の列とする．このとき，ある $n \in \mathbb{N}$ で F_n は内点を持つ．

Theorem 2.6 (逆写像定理)**.** X, Y を *Banach* 空間，$T \in B(X, Y)$ が全単射とする．このとき，$T^{-1} \in B(Y, X)$，つまり有界．

Theorem 2.7 (開写像定理)**.** X, Y を *Banach* 空間，$T \in B(X, Y)$ は全射とする．このとき，T は開写像．(T^{-1} は連続)

Theorem 2.8 (閉グラフ定理)**.** X, Y を *Banach* 空間，$T : X \to Y$ は閉作用素で $D(T) = X$ であるとする．このとき，$T \in B(X, Y)$.

2.3 コンパクト作用素

Definition 2.9 (自己共役作用素)**.** $A \in B(H)$ に対して，

$$A \text{ が自己共役作用素} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in H, \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

自己共役作用素全体の集合を $B_{sa}(H)$ とかく．

Definition 2.10 ((自己共役) 非負作用素)**.** $A \in B_{sa}(H)$ に対して

$$\begin{aligned} A \text{ が非負作用素} &\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists T \in B(H)\ s.t.\ A = T^*T \\ &\Leftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty) \end{aligned}$$

$A \in B_{sa}(H)$ が非負作用素であることを $A \geq 0$ と表す．T を A の平方根と呼び，$T = A^{1/2}$ とかく．

Definition 2.11 ((自己共役) 正作用素)**.** $A \in B_{sa}(H)$ に対して

$$A \text{ が正作用素 } \textit{(positive operator)} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists c > 0, \forall x \in H, \langle Ax, x\rangle \geq c\|x\|^2$$

$A \in B_{sa}(H)$ が正作用素であることを $A > 0$ と表す．A が正作用素であれば非負作用素でもある．

無限次元においては，正作用素の定義は非負かつ非退化 (i.e., $\langle Ax, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$) と同値ではないので注意が必要．

Definition 2.12 (コンパクト作用素)**.** $T \in B(H)$ がに対して $TB(0,1)$ が全有界であるとき T はコンパクト作用素であるという．ただし，$B(0,1) \coloneqq \{x \in H; \|x\| \leq 1\}$ は H の閉単位球．

Theorem 2.13 (コンパクト自己共役作用素のスペクトル分解)**.** H : 可分 *Hilbert* 空間とする. $A \in B_{sa}(H) \cap K(H)$ とすると，$\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ である．さらに A の固有値の列 $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ と対応する固有ベクトルからなる H の正規直交基底 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して，

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

が作用素ノルムでの収束の意味で成り立つ．ただし，$e_n \otimes e_n^* = P_n$ は $Ker(\lambda_n I - T)$ への射影．

2.4 クラス

Definition 2.14 (特異値)**.** $A \in K(H)$ に対し，絶対値作用素 $|A| = (A^*A)^{1/2}$ の固有値の列 $\{s_n(A)\}_{n=1}^N$ を特異値と呼ぶ.

Definition 2.15 (Schatten p class)**.** $1 \leq p < \infty$ に対して，*Schatten p* クラスを

$$C_p(H) \coloneqq \{A \in K(H); \|A\|_{C_p} < \infty\}$$

で定める．ただし，$\|A\|_{C_p} = (\sum_n s_n(A)^p)^{1/p}$ である．特に $C_2(H)$ を *Hilbert Schmidt* クラス，$C_1(H)$ をトレースクラスという.

Definition 2.16 (トレース)**.** $A \in B(H)_+$ に対してトレースを $Tr(A) \coloneqq \sum_n \langle Ae_n, e_n \rangle \in [0, \infty]$ と定める．ただし，$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の *CONS* でありトレースはこの取り方によらず定まる.

Lemma 2.17 (トレースクラス)**.** $A \in B(H)$ に対して $\|A\|_{C_1} = Tr(|A|)$ である．この値が有限のとき *(*つまり，A がトレースクラス作用素のとき*)*，$Tr(A)$ も有限.

Theorem 2.18 (Hilbert Schmidt class)**.** $T \in B(H)$ に対して $Tr(T^*T) < \infty \Leftrightarrow T \in C_2(H)$ である．さらにこのとき $Tr(T^*T) = \|T\|_{HS}^2 = \|T\|_{C_2}^2$ が成り立つ．また $Tr(T^*T) = \sum_n \|T_n e_n\|^2 = \sum_{n,m} |\langle T_n e_n, e_m \rangle|^2$ などもわかる.

Theorem 2.19 (class の関係)**.** $C_1(H) \subset C_2(H) \subset K(H) \subset B(H)$. $C_2(H)C_2(H) \subset C_1(H)$. $C_1(H)$ は $B(H)$ のイデアル.

2.5 Covariance operator

H を可分 Hilbert 空間とする.

Definition 2.20 (Covariance)**.** H-値確率変数 X について，*Pettis* 積分の意味で平均 $m = \mathbb{E}[X] \in H$ を定義する．さらに，*Covariance* 作用素 $C : H \to H$ を

$$C = \mathbb{E}[(X - m) \otimes (X - m)]$$

で定める.

Proposition 2.21. H-値確率変数 X の平均を $m \in H$ とする．X の *Covariance* 作用素 C は以下を満たす.

(1) $C \in B_{sa}(H)$.
(2) $C \geq 0$.
(3) $dim(S) \geq 1$ で $(X - m) \perp S$ *a.s.* となる部分空間 $S \subset H$ が存在しなければ C は非退化.

Theorem 2.22 (Sazonov[1, 2])**.** μ を平均 0 の H 上の正規分布とする．このとき，C の *covariance* 作用素 C_μ は以下を満たす.

(1) $C_\mu \in C_1(H)$

(2) *2* 次モーメントは *trace* に一致する．

$$tr(C_\mu) = \mathbb{E}_{X\sim\mu}[\|X\|^2].$$

逆に，$C \in B_{sa}(H) \cap C_1(H), C \geq 0$ に対して，$C_\mu = C$ となる正規分布 μ が存在する．

Remark 2.23. H が無限次元とする．$C \in B_{sa}(H)$ について，$C > 0$ と $C \in C_1(H)$ は両立しない．このため，$C > 0$ を *Covariance* としてもつ正規分布は存在しない．逆に正規分布の *Covariance* は可逆ではない．

参考文献

[1] V. Sazonov. A remark on characteristic functionals. *Theory of Probability & Its Applications*, 3(2):188–192, 1958.

[2] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63. Springer, 2015.

[3] 齋藤正彦. **線形代数学入門**. 東京大学出版, 2011.

[4] Ged Ridgway. Matrix inversion identities. `http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/g.ridgway/mil/mil.pdf` (2020/7/5).

[5] 黒田成俊. **関数解析**. 共立出版, 1980.