# DA と Dynamical Model

竹田航太

2023 年 3 月 7 日

## 目次



## 1 はじめに

データ同化を数学的に扱う際のモデルの解析について整理する．まずは気象で用いられる方程式に絞る．データ同化の文脈において求められるモデルの解析は well-posed 性に加えて，global attractor の存在や初期誤差の発達レートの評価である．無限次元力学系の理論 [1] に基づく．また，[2] のように，Lyapnov 関数を用いた評価・解析も基本的である．

### 1.1 これまでの流れ

[3, Hayden 2011] は Lorenz63(L63) と 2 次元 Navier-Stokes(2dNS) に対して解の存在から誤差発達までの結果を示した．[4, Law 2016] は Lorenz96(L96) に対する同様の解析を行なった．

どちらも対象の方程式を以下のような形の Hibert 空間上の ODE として表現した.

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u,u) = f.$$

[5, Kelly 2014] は $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に条件を設けて一般的な形で誤差発達について議論した.

## 1.2 準備

Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle, |\cdot|)$ を考える.

**Definition 1.1** (自励系 ODE と力学系)**.** 自励系[*1]の *ODE* を考える.

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad u(0) = u_0.$$

この *ODE* が任意の $u_0 \in \mathcal{H}$ に対して，時間大域的な一意解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathcal{H})$ を持つとき，1 パラメータ半群 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が

$$\Psi(t, u_0) = u(t)$$

で定義できる．$\Psi_t(\cdot) = \Psi(t, \cdot)$ と書き，元の *ODE* や 1 パラメータ半群を力学系と呼ぶ.

**Definition 1.2.** 半群 $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ の *attractor* とは以下を満たす集合 $\mathscr{A} \subset \mathcal{H}$.

*(1)* $\Psi_t \mathscr{A} = \mathscr{A}$.
*(2)* ある近傍 $U$ が存在し，$\forall u_0 \in U$ で $d(S(t)u_0, \mathscr{A}) \to 0 \quad (t \to \infty)$.

また，*attractor* $\mathscr{A}$ がコンパクトであり，任意の有界集合 $B$ に対して，$B$ の点を一様に *attract* するとき，$\mathscr{A}$ は *global attractor* と呼ばれる.

**Definition 1.3** (absorbing set)**.** 力学系 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ が有界な *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs}$ を持つとは，任意の $R > 0$ に対して，ある $T = T(R) > 0$ が存在して

$$\Psi_t(B(0,R)) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq T$$

が成り立つことを言う.

**Theorem 1.4.** $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ を半群とする．任意の有界集合 $B$ に対して，ある $T = T(B) > 0$ が存在し $\cup_{t\geq T} S(t)B$ が $\mathcal{H}$ で相対コンパクトとする．また，開集合 $U \subset \mathcal{H}$ とその上での *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs}$ が存在するとする．このとき，*global attractor* を

$$\mathscr{A} = \cap_{T\geq 0} \overline{\cup_{t\geq T} \Psi_t(\mathfrak{B}_{abs})} \tag{1.1}$$

で定めることができ，$U$ で包含関係について極大となる.

*Proof.* [1] □

[*1] 速度ベクトル場が時間に依存しない.

## 2 基本の仮定

状態空間として Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ を考える.

**Assumption 2.1.** *Banach* 空間 $(\mathcal{V}, |\cdot|)$ を $\mathcal{H}$ に連続的に埋め込めるとする[*2]. 以下の形の力学系を仮定する.

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u,u) = f, \quad u(0) = u_0. \tag{2.1}$$

ただし，$\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は非有界線形作用素で，ある $\lambda > 0$ が存在して以下が成り立つ.

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq \lambda \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.2}$$

さらに，$\mathcal{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ は対称な双線形形式で以下を満たし，

$$\langle B(u,u), u \rangle = 0, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \tag{2.3}$$

ある $c > 0$ が存在して，以下が成り立つとする.

$$\langle B(u,v), v \rangle \leq c\|u\|\|v\||v|, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}. \tag{2.4}$$

また，任意の $u(0) \in \mathcal{H}$ に対して，(2.1) は一意な弱解を持つとし，$\mathcal{H}$ に拡張可能な 1-パラメータ半群 $\Psi_t : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ を生成するとする．さらに，*global attractor* $\mathscr{A} \subset \mathcal{V}$ が存在し，ある $R > 0$ が存在して任意の $u_0 \in \mathscr{A}$ に対して $\sup_{t \geq 0} |u(t)| \leq R$ が成り立つとする.

**Remark 2.2.** 空間の包含関係は $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$.

**Remark 2.3.** *Lorenz63, 96,* トーラス上 2 次元 *Navier-Stokes* はこの仮定を満たす.

**Remark 2.4.** 有限次元の場合は *global attractor* の存在は他の仮定から導かれる.

**Lemma 2.5** (初期値連続性/誤差発達 [5])**.** *Assumption 2.1* を仮定すると，ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して以下が成り立つ.

$$|\Psi_h(v_0) - \Psi_h(w_0)| \leq e^{\beta h}|v_0 - w_0|, \quad \forall v_0 \in \mathscr{A}, h > 0, w_0 \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

*Proof.* [5] □

**Remark 2.6.** 初期値は片方だけが *global attractor* $\mathscr{A}$ に入っているという条件だけが課せられている．これはデータ同化において，信号 $u_t \in \mathscr{A}$ の推定値 $\hat{u}_t$ が $\mathscr{A}$ に入っているとは限らない場合を想定している.

---

[*2] $\exists C > 0$, s.t. $|u| \leq C|u|, \forall u \in V$.

## 3 Lorenz63

$\sigma, b, r \in \mathbb{R}$ に対して，$r+a$ シフトした Lorenz63 を考える．

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y-x),$$
$$\frac{dy}{dt} = -\sigma x - y - xz,$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz - b(r+\sigma).$$

これは $\mathcal{H} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ として，$u = (x,y,z)^\top$ に対して，(2.1) を用いて以下のように書ける．

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b(r+\sigma) \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}(u,\tilde{u}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ x\tilde{z} + z\tilde{x} \\ -(x\tilde{y} + y\tilde{x}) \end{bmatrix}.$$

以下，$\sigma > 0, b > 1, r > 0$ とする．($\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ はこれを満たす．)

**Lemma 3.1.** $\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^3$ で以下が成り立つ．

*(1)* $\langle \mathcal{A}u, u\rangle \geq |u|^2$.

*(2)* $\langle \mathcal{B}(u,u), u\rangle = 0$.

*(3)* $\mathcal{B}(u,\tilde{u}) = \mathcal{B}(\tilde{u},u)$.

*(4)* $|\mathcal{B}(u,\tilde{u})| \leq 2^{-1}|u||u|$.

*Proof.* $\langle \mathcal{A}u, u\rangle = \sigma x^2 + y^2 + bz^2 \geq |u|^2$，$(y^2+\tilde{y}^2)(z^2+\tilde{z}^2) \geq (y\tilde{y} + z\tilde{z})$. □

**Lemma 3.2.** $K = \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}$ とおく．

*(1)* $\forall u_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して，全ての $t > 0$ で定義された一意な解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^3)$ が存在し，以下が成り立つ．

$$\limsup_{t\to\infty} |u(t)|^2 \leq K.$$

*(2) absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs} = B(0, K^{1/2})$ は *forward invariant*，つまり以下が成り立つ．

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs}) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq 0$$

*(3) global attractor* $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0 \in \mathscr{A}$ で，以下が成り立つ．

$$|u(t)|^2 \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

*Proof.* [3] 解の存在は速度ベクトル場の局所リプシッツ性から従う．$\langle \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u,u) - f, u\rangle \leq K - |u|^2$ を示す．Gronwall の不等式から従う． $\square$

**Theorem 3.3.** $\beta = 2(K^{1/2} - 1)$ とおく．$\forall v_0 \in \mathscr{A}$，$w_0 \in \mathbb{R}^3$，$t > 0$ で以下が成り立つ．

$$|v(t) - w(t)| \leq e^{\beta t}|v_0 - w_0|.$$

*Proof.* $\beta$ の存在は，[5] からわかる．具体的な $\beta$ は [3] を見よ． $\square$

# 4 Lorenz96

$J \in \mathbb{N}$ に対して，$J$ 変数の Lorenz96 モデルは 1 次元周期境界の領域を $J$ 点格子で離散化した以下のような力学系．$u = (u_1, \cdots, u_J)^\top \in \mathbb{R}^J$，

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= u_{j-1}(u_{j+1} - u_{j-2}) - u_j + F, \quad \text{for } j = 1, 2, \cdots, J, \\ u_0 &= u_J, \quad u_{J+1} = u_1, \quad u_{-1} = u_{J-1}. \end{aligned}$$

$F \in \mathbb{R}$ は外力パラメータ．

$\mathcal{H} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^J$ として，(2.1) の形で以下のように書ける．

$$\mathcal{A} = I, f = \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ F \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \tilde{u}_2 u_J + u_2 \tilde{u}_J - \tilde{u}_J u_{J-1} - u_J \tilde{u}_{J-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{j-1} u_{j+1} + u_{j-1}\tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_{j-2} u_{j-1} - u_{j-2}\tilde{u}_{j-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{J-1} u_1 + u_{J-1}\tilde{u}_1 - \tilde{u}_{J-2} u_{J-1} - u_{J-2}\tilde{u}_{J-1} \end{bmatrix}.$$

**Lemma 4.1.** $\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^J$ に対して，以下が成り立つ．

*(1)* $\langle \mathcal{A}u, u\rangle = |u|^2$.
*(2)* $\langle \mathcal{B}(u, u), u\rangle$.
*(3)* $\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \mathcal{B}(\tilde{u}, u)$.
*(4)* $|\mathcal{B}(u, \tilde{u})| \leq 2|u||u|$.
*(5)* $2\langle \mathcal{B}(u, \tilde{u}), u\rangle = \langle \mathcal{B}(u, u), \tilde{u}\rangle$.

**Lemma 4.2.** $K = 2JF^2$ とおく．

*(1)* $\forall u_0 \in \mathbb{R}^J$ に対して，全ての $t > 0$ で定義された一意な解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^J)$ が存在し，以

下が成り立つ．

$$\limsup_{t\to\infty} |u(t)|^2 \le K.$$

*(2) absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs} = B(0, K^{1/2})$ は *forward invariant*，つまり以下が成り立つ．

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs}) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \ge 0$$

*(3) global attractor* $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0 \in \mathscr{A}$ で，以下が成り立つ．

$$|u(t)|^2 \le K, \quad \forall t \ge 0.$$

*Proof.* [4] □

**Theorem 4.3.** $\beta = 2(K^{1/2} - 1)$ とする．$\forall v_0 \in \mathscr{A}$，$w_0 \in \mathbb{R}^J$，$t > 0$ で以下が成り立つ．

$$|v(t) - w(t)| \le e^{\beta t}|v_0 - w_0|.$$

*Proof.* $\beta$ の存在は，[5] からわかる．具体的な $\beta$ は [4] を見よ． □

## 5　2 次元 Navier-Stokes

[1, 3]

## 6　3 次元正則化 Navier-Stokes

[6]

## 付録 A　Gronwall の不等式

**Lemma 付録 A.1.** $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$ に対して，$u \in C^1(\mathbb{R}_{\ge 0}; \mathbb{R})$ が

$$\frac{du}{dt} \le au + b, u(0) = u_0$$

を満たすとする．このとき，以下が成り立つ．

$$u(t) \le e^{at}u_0 + \frac{b}{a}(e^{at} - 1).$$

## 参考文献

[1] Roger Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer New York, NY, 1997.

[2] Xin T Tong, Andrew J Majda, and David Kelly. Nonlinear stability and ergodicity of ensemble based kalman filters. *Nonlinearity*, 29(2):657, jan 2016.

[3] Kevin Hayden, Eric Olson, and Edriss S. Titi. Discrete data assimilation in the lorenz and 2d navier-stokes equations. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 240(18):1416–1425, SEP 1 2011.

[4] K. J. H. Law, D. Sanz-Alonso, A. Shukla, and A. M. Stuart. Filter accuracy for the lorenz 96 model: Fixed versus adaptive observation operators. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 325:1–13, JUN 15 2016.

[5] D. T. B. Kelly, K. J. H. Law, and A. M. Stuart. Well-posedness and accuracy of the ensemble kalman filter in discrete and continuous time. *NONLINEARITY*, 27(10):2579–2603, OCT 2014.

[6] C. Foias, D. D. Holm, and E. S. Titi. The three dimensional viscous camassa-holm equations, and their relation to the navier-stokes equations and turbulence theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 14(1), 2001.

[7] Andrew J. Majda and John Harlim. *Filtering Complex Turbulent Systems*. Cambridge University Press, 2012.

[8] K. J. H. Law, A. M. Stuart, and K. C. Zygalakis. *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, 2015.

[9] Kody Law, Abhishek Shukla, and Andrew Stuart. Analysis of the 3dvar filter for the partially observed lorenz'63 model. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 34(3, SI):1061–1078, MAR 2014.