多様体論

竹田航太

2021 年 7 月 4 日

目次

概要

※書きかけ.

現代数学を研究する上で外せない多様体論について，基礎的な定義や結果をまとめる．備忘録的なものなので定義が抜けていることがある．

1 多様体

Definition 1.1. 位相空間 M が n 次元多様体 *(mfd)*
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$

(1) M は *Hausdorff.*

(2) $\forall x \in M, \exists U$*: open nbd of* x *on* M *s.t.* $U \underset{homeo}{\sim} \exists V \subset \mathbb{R}^n$

Theorem 1.2. n 次元 *mfd* M が単連結とする．このとき以下は同値.

(1) M は距離つけ可能.

(2) M は σ-コンパクト.

(3) M はパラコンパクト.

(4) M は第 *2* 可算.

2　ベクトル場

Definition 2.1. *M: n 次元 C^∞ 多様体に対して，$X : M \to \mathbb{R}^n$ が M 上の vector field（ベクトル場）*

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $X : M \ni x \mapsto X(x) \in T_x M$

また，M 上の C^∞ ベクトル場全体を $\mathfrak{X}^\infty(M)$ とかく.

Remark 2.2. n 次元多様体 M 上のベクトル場 X と C^∞ 局所座標 (U, ϕ) から誘導される $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $T\phi(X) : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ を次で定めることができる．$x \in U$ に対して，

$$T\phi(X)(\phi(x)) \coloneqq T_x\phi(X(x))$$

ただし，$T_x\phi : T_x M \ni [c]_x \mapsto (\phi \dot{\circ} c(0)) \in \mathbb{R}^n$

Definition 2.3 (括弧積)**.** $f \in C^\infty(M)$ と $X \in \mathfrak{X}^\infty$ に対して，「f の $x \in M$ での $X(x)$ 方向の微分 $X(x)f$」を以下のように定義できる.

任意の $X(x)$ の積分曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ に対して $X(x)f = f\frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0}$ と定めると $Xf \in C^\infty(M)$ であり，これは c の取り方に依らない.

このベクトル場による微分を用いてベクトル場同士の括弧積を定める.$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ *s.t.* $\forall C^\infty$

$$\{X, Y\}f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Definition 2.4 (接束の切断)**.** $\Gamma : M \to TM$ が接束 TM の切断とは $\pi_M \circ \Gamma^{-1} = Id_M$ が成り立つこと．ただし，接束 $TM = \{(x, v); x \in M, v \in T_x M\}$ で与えられる.

またベクトル場 X に対し，$\Gamma_X : M \ni x \mapsto (x, X(x)) \in TM$ は切断を定める.

Proposition 2.5 (ベクトル場と切断は 1:1)**.** 切断 $\Gamma : M \to TM$ に対して，$\exists X_\Gamma \in \mathfrak{X}^\infty$ *s.t.* $\Gamma(x) = (x, X_\Gamma(x))$

Definition 2.6 (flow)**.** 積分曲線： 区間 $I \subset \mathbb{R}, c : I \to M; C^\infty$ に対し

$$\frac{dc}{dt}(t) \coloneqq [s \mapsto c(t+s)]_{c(t)} \in T_{c(t)}M$$

で t における速度ベクトルを定める．$X \in \mathfrak{X}^\infty$ に対して，$c : I \to M; C^\infty$ が X の**積分曲線**とは

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t)) \ \forall t \in I$$

が成り立つこと．

C^∞ *flow*：*0* を含む開区間 $I \subset \mathbb{R}$ と開集合 $U \subset M$ に対して，$\Phi : I \times U \to M$ が X の生成する C^∞ ***local flow*** とは以下が成り立つこと．

(1) $\Phi : C^\infty$
(2) $\forall x \in U, \Phi(0, x) = x$
(3) $t \mapsto \Phi(t, x)$ は X の積分曲線．

特に $I = \mathbb{R}, U = M$ のとき C^∞ *(global) flow* と呼ばれる．

flow：$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ が M 上の ***flow*** とは以下が成り立つこと．

(1) $\Phi(0, x) = x$
(2) $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M, \Phi(t, \Phi(s, x))\Phi(t + s, x)$

3　交代 k 形式

Definition 3.1 (交代 k 形式)**.** V をベクトル空間とする．$k \geq$ として，$\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ が交代 k 形式（*k-form*）とは以下を満たすこと．

(1) α は多重線形（*multi-linear*）．
(2) α は交代的（*anti-symmetric*）．

また，$\overset{k}{\wedge} V^* = \{V$ 上の k 形式全体 $\}$ とかく．

Definition 3.2 (ウェッジ積)**.** $\alpha \in \overset{k}{\wedge} V^*, \beta \in \overset{l}{\wedge} V^*$ に対して

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+l)})$$

により $\alpha \wedge \beta \in \overset{k+l}{\wedge} V^*$ を定める．

Remark 3.3. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \overset{k}{\wedge} V^*, \beta \in \overset{l}{\wedge} V^*, \gamma \in \overset{m}{\wedge} V^*, c \in \mathbb{C}$ に対して以下が成り立つ．

(1) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$
(2) $c(\alpha \wedge \beta) = (c\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \beta$
(3) $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} (\alpha \wedge \beta)$
(4) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

また，$\alpha_i \in \overset{k_i}{\wedge} V^*$ $(i = 1, \cdots, d)$ とすると，$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d$ が自然に定まる．

Definition 3.4 (differential k-form)**.** 余接空間 *(cotangent space)* $T_x^* M = (T_x M)^*$ に対して，

$\overset{k}{\wedge}T^*M = \{(x,\alpha); x \in M, \alpha \in \overset{k}{\wedge}(T_x^*M)\}$ とかく．

$\Omega^k = \{(x,\alpha) \in \overset{k}{\wedge}T^*M; \alpha : C^\infty\}$ と定め，この元を *differential k-form* という．

Proposition 3.5 (外微分)**.** $k \geq 0, \alpha \in \Omega^k(M)$ に対して次を満たす $d\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$ が存在する．$X_0, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ に対し，

$$d\alpha(X_0,\cdots,X_k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\alpha(X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_k)) + \sum_{0\leq l<m\leq k}(-1)^{l+m}\alpha(\{X_l,X_m\},X_0,\cdots,\hat{X}_l,\cdots,\hat{X}_m,\cdots,X_k)$$

ただし，$\hat{X}_i$ は X_i を除くという意味．この $\alpha \mapsto d\alpha$ の操作を**外微分**という．

Proposition 3.6. $\alpha \in \Omega^k(M), (U,\phi) : C^\infty$ *loc. coord.* とし

$$(\phi^{-1})^*\alpha = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} f_{i_1,\cdots,i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$

とかけているとき，$(\phi^{-1})^*d\alpha$ は次のように表せる．

$$(\phi^{-1})^*d\alpha = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial y_l} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$

Proposition 3.7. $M_1, M_2 : C^\infty$ *mfd*, $F : M_1 \to M_2; C^\infty$ とする．$\alpha \in \Omega^k(M)$ に対して以下が成り立つ．

$$F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha)$$

4　多様体上の積分

Definition 4.1 (向き)**.** $\mathscr{A} = \{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を C^∞ *mfd* M の *chart* とする．このとき $\mathscr{A}$ が M の向きを定めるとは以下が成り立つことである．

- $M = \cup_{\alpha\in A}U_\alpha$
- $\forall\alpha,\beta \in A, \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta, \det J(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) > 0$

C^∞ *loc. coord.* (U,ϕ) が正の向き
$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in U, \exists\alpha \in A$ *s.t.* $x \in U_\alpha$ かつ $\det J(\phi \circ \phi^{-1}) > 0$

その他，*2* つの C^∞ *loc. coords.* が同じ向きであることや *2* つの *chart* が同じ向きであることも $\det J > 0$ で特徴付けられる．

Definition 4.2 (volume form)**.** n 次元 C^∞ *mfd* M に対して，$\omega \in \Omega^n(M)$ が体積形式 *(volume form)* $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in M, \omega_x \neq 0$

Remark 4.3. M の C^∞ *loc. coord.* (U,ϕ)，$\omega \in \Omega^n(M)$ に対して $\exists f_\phi \in C^\infty(\phi(U))$ *with* $\forall y \in \phi(U), f_\phi(y) \neq 0$ *s.t.*

$$(\phi^{-1})^*\omega = f_\phi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

Proposition 4.4 (volume form と向き)**.** $\omega \in \Omega^n(M)$ *volume form* に対して，$\mathscr{A}_\omega = \{(U,\phi); C^\infty loc.\ coord.\ of\ M\ s.t.\ \forall y \in \phi(U), f_\phi(y) > 0\}$

逆に $\mathscr{A} = \{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が M の向きを定めるとする．このとき $\exists\omega \in \Omega^n(M)$*; volume form s.t.* $\mathscr{A}$ と $\mathscr{A}_\omega$ は同じ向きを定める．

Definition 4.5 (積分)**.** C^∞ *oriented mfd* M とその正の向きの *loc.coord.*(U,ϕ) に対して，$\omega \in \Omega_c^n(M)$ が *supp*$(\omega) \subset U$ であり，

$$(\phi^{-1})^*\omega = f_\phi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

とする．このとき

$$I(\omega,\phi) = \int_{\phi(U)} f_\phi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

を定める．

さらに，より一般の $\omega \in \Omega_c^n(M)$ に対して，*supp*(ω) の有限開被覆 $\{(U_i,\phi_i)\}_i^m$ と $(U_i)_i^m$ に対する *1* の分割 $(f_i)_i^m$ をとると M 上での ω の積分を

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^m I(f_i\omega,\phi_i)$$

で定めることができる．

5 リーマン計量

Definition 5.1 (リーマン計量)**.** C^∞ *mfd* M 上の 2 次対称テンソル場 ω が $\forall p \in M$ で正定値であるとき，ω を M の**リーマン計量**という．

リーマン計量 g を持つ *mfd* M をリーマン多様体 (M,g) とかく．

Remark 5.2. リーマン計量は多様体の接空間に内積を与え，多様体上で距離を考えることができるようになる．

リーマン多様体 (M,g) 上の各点 $p \in M$ での接ベクトル $X \in T_pM$ の長さは次で与えられる．

$$\|X\| = \sqrt{g(X,X)}$$