N 点渦系

竹田航太

2021 年 4 月 17 日

目次

1 Preliminary 1

1.1 Notation 1

1.2 渦度場 2

1.3 Poison 方程式 2

1.4 Bio-Savart の法則 3

2 点渦 4

2.1 N 点渦系 4

3 2 次元 5

3.1 無限平面 5

3.2 単位円盤 5

3.3 一般の領域 6

概要

非粘性非圧縮流体において渦度が delta 関数の線形和で表される系を点渦系と呼ぶ．ここではいくつかの領域における点渦系の Hamiltonian についてまとめる．

1 Preliminary

1.1 Notation

いくつか Notation をまとめる．$N \in \mathbb{N}$ が明らかな場合は省略する．

和の記号

- $\sum_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N$
- $\sum_{\beta\neq\alpha}^N = \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^N$
- $\sum_{\alpha\neq\beta} = \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha}^N$

ベクトル

- $(x, y)^\perp = (-y, x)$ と書く．2 次元での時計回り 90° 回転を表す.
- 2 次元の流れ関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して，回転を次のように定める．$\nabla \times \psi = \nabla^\perp \psi$

1.2 渦度場

3 次元の流れ場 $u \in \mathbb{R}^3$ から誘導される渦度は以下で与えられる.

$$\omega = \nabla \times u \tag{1.1}$$

非圧縮流体を扱うので

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1.2}$$

が成り立つ.

(1.1) の勾配と回転をとると次がわかる.

$$\nabla \cdot \omega = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla^2 u = -\nabla \times \omega \tag{1.4}$$

Theorem 1.1 (渦度 flux)**.** *(1.3) から閉曲面での渦度 flux の合計は 0*

Proof. (1.3) と発散定理から閉曲面 S とその外向き法ベクトル n，S で囲まれた領域 V として

$$\int_S \omega \cdot n dS = \int_V \nabla \cdot \omega dV = 0$$

□

1.3 Poison 方程式

一般のベクトル値関数に対して以下が成り立つ

Theorem 1.2 (Helmholtz/Hodge decomposition)**.** 任意の $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対して，$\exists \phi, \psi$ *s.t.*

$$u = u_\phi + u_\psi = \nabla\phi + \nabla \times \psi \tag{1.5}$$

流体の分野では ϕ を速度ポテンシャル，ψ を流れ関数と呼ぶ.

Remark 1.3. 渦なしの流れ $\nabla \times u_\phi = 0$ に対して，スカラーポテンシャル ϕ *s.t.* $u = \nabla\phi$ の存在がわかり，非圧縮の流れ $\nabla \cdot u_\psi = 0$ に対して，ベクトルポテンシャル ψ *s.t.* $u = \nabla \times \psi$ の存在がわかる．

今，非圧縮性の条件 (1.2) から以下を満たす流れ関数 ψ の存在が言える

$$u = \nabla \times \psi \tag{1.6}$$

(1.1) に代入して，非圧縮性から整理すると流れ関数は以下の Poison 方程式を満たす．

$$\nabla^2\psi = -\omega \tag{1.7}$$

Poison 方程式は Laplace 作用素の (全空間の)Green 関数を用いて

$$\psi(x) = \int G(x,z)\omega(z)dz \tag{1.8}$$

と表される．

1.4 Bio-Savart の法則

与えられた渦度 ω に対して (1.8) から流れ関数が定まり，それより誘導される速度場は $u_\omega = \nabla \times \psi$ より次を満たす

Theorem 1.4. 非圧縮流体において，与えられた ω に対して誘導される速度場 u_ω は次で与えられる．

$$u_\omega(x) = \nabla \times \int G(x,z)\omega(z)dz \tag{1.9}$$

$$= \int K(x-z)\omega(z)dz \tag{1.10}$$

ただし，*Bio-Savart Kernel* K は次で与えられる．

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\|x\|^2}(-y,x) & (in\ \mathbb{R}^2) \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|^3}\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} & (in\ \mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{1.11}$$

Remark 1.5. $\mathbb{R}^3$ の場合 *Bio-Savart* の法則はよく次のように表される．

$$u_\omega = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(x-z)\times\omega(z)}{\|x-z\|^3}dz \tag{1.12}$$

2　点渦

2.1　N 点渦系

$N \in \mathbb{N}$ とする．非粘性非圧縮 d 次元流体において以下のような渦度の分解を考える．

$$\omega(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha \delta(x - x_\alpha)$$

ただし，渦度の強さ Γ_α は $\Gamma > 0$ または $-\Gamma$ のみを値にとる．孤立した点渦 x_α $(\alpha = 1, \cdots, N)$ から誘導される位置 $x \in \mathbb{R}^d$ 上の速度場は

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u(x,t)\\ &= \nabla^\perp \psi_\alpha(x,t)\end{aligned}$$

ここで ψ_α は流れ関数であり，Green 関数 $G(x,z)$ を用いて

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x,t) &= \Gamma_\alpha \int G(x,z)\delta(z - x_\alpha)dz\\ &= \Gamma_\alpha G(x, x_\alpha)\end{aligned}$$

と表される．

さらに，点渦系は Hamilton 系になることが知られており，Green 関数を用いて系の Hamiltonian は以下で与えられる．$X_N = (x_1, \cdots, x_N)$ とおいて，

$$\begin{aligned}H(X_N) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta G(x_\alpha, x_\beta) \qquad (2.1)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha} \Gamma_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha}^{N} \psi_\beta(x_\alpha)\end{aligned}$$

点渦系は Hamilton 方程式 (のようなもの) を満たす．

$$\Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial y_\alpha},\ \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \qquad \alpha = 1, \cdots, N \qquad (2.2)$$

定数 Γ_α の分だけ厳密には Hamilton 方程式を満たしていないが，各変数 x_α, y_α を $\sqrt{\Gamma_\alpha}\mathrm{sign}(\Gamma_\alpha)$ 倍すれば定数なしの Hamilton 方程式を満たすようにできる．

また，(2.2) は Bio-Savart の法則から次のようにもかける．$r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ と書いて，

$$\dot{r}_\alpha = \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N} \Gamma_\beta \frac{(r_\alpha - r_\beta)^\perp}{\|r_\alpha - r_\beta\|^2} \qquad (2.3)$$

3　2 次元

3.1　無限平面

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ における Poison 方程式の Green 関数は次で与えられる．この Green 関数を G_0 とかく．

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x-y|) = G_0(x,y)$$

N 点渦系の Hamiltonian は

$$H(X_N) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log(|x_\alpha - x_\beta|)$$

3.2　単位円盤

境界がある場合は境界での流れ関数を 0 にするように境界の形に合わせて Green 関数を調整する必要がある．

3.2.1　鏡像法

鏡像法を使う．単位円盤 $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ では x_α にある点渦に対して，次のように鏡像渦があたえられる．

$$\bar{x}_\alpha = \left.\frac{R^2}{|x_\alpha|^2}x_\alpha\right|_{R=1} = \frac{x_\alpha}{|x_\alpha|^2}$$

これを使って $\mathbb{D}$ 上の Poison 方程式の Green 関数は次で与えられる．

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + \frac{1}{2\pi}\log|x-\bar{y}| + \frac{1}{2\pi}\log|y| \tag{3.1}$$

x, y について対称性が直ちには確認できないが後で確かめられる．

また，N 点渦系の Hamiltonian は次で与えられる．

$$\begin{aligned} H(X_N) = &-\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|x_\alpha - x_\beta| \\ &+\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|x_\alpha - \bar{x}_\beta| \\ &+\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|x_\beta| \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし，半径 R の円盤の場合は定数が入る.[*1] 第 3 項は $\sum_\alpha \Gamma_\alpha = 0$ のとき 0 になるが，流れ関数を境界で 0 にするために必要.

上記の Hamiltonian を複素数 $z = x + iy$ で表すと次のようになる.

$$
\begin{aligned}
H(Z_N) = &-\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \log|z_\alpha - z_\beta| \\
&+\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \log|1 - z_\alpha z_\beta^*|
\end{aligned}
$$

3.2.2 解析

Lemma 3.1 ([1] の Chapter 3 Exercise 8 p.138)**.** *$\mathbb{D}$ 上の N 点渦系の Hamiltonian は次のように表せる.*

$$
H = \frac{1}{4\pi}\sum_\alpha \Gamma_\alpha^2 \log(1 - |x_\alpha|^2) + \frac{1}{8\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \log\left(1 + \frac{(1-|x_\alpha|^2)(1-|x_\beta|^2)}{|x_\alpha - x_\beta|^2}\right) \tag{3.3}
$$

Proof. 次の恒等式が証明の本質である.

$$
(x-y)^2 + (1-x^2)(1-y^2) = (xy-1)^2 \tag{3.4}
$$
$$
(|x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2) = |xy^* - 1|^2 \text{ for complex})
$$

□

Remark 3.2. *(3.4) を実質的に適用することで $\mathbb{D}$ 上の Green 関数の対称性が確かめられる.*

$$
G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + \frac{1}{4\pi}\log\left[|x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2)\right]
$$

3.3 一般の領域

一般の領域 Ω 上の Green 関数を G とかき，全平面に対する残差を g とかく.

$$
g(x,y) = G(x,y) - G_0(x,y)
$$

N 点渦系の Hamiltonian は次のようにかける.

$$
H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta G(x_\alpha, x_\beta) + \frac{1}{2}\sum_\alpha \Gamma_\alpha^2 g(x_\alpha, x_\alpha) \tag{3.5}
$$

[*1] 第 3 項が $-\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \log\frac{R}{|x_\alpha|}$

参考文献

[1] Paul K. Newton. *The N-Vortex Problem.* Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, NY, 1 edition, 2001.