多様体論

竹田航太

2021 年 7 月 1 日

目次

概要

※書きかけ.

現代数学を研究する上で外せない多様体論について，基礎的な定義や結果をまとめる．備忘録的なものなので定義が抜けていることがある．

1 多様体

Definition 1.1. 位相空間 M が n 次元多様体 *(mfd)*
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$

(1) M は *Hausdorff.*

(2) $\forall x \in M, \exists U$*: open nbd of* x *on* M *s.t.* $U \underset{homeo}{\sim} \exists V \subset \mathbb{R}^n$

Theorem 1.2. n 次元 *mfd* M が単連結とする．このとき以下は同値.

(1) M は距離つけ可能.

(2) M は σ-コンパクト.

(3) M はパラコンパクト.

(4) M は第 *2* 可算.

2　ベクトル場

Definition 2.1. *M: n* 次元 C^∞ 多様体に対して，$X : M \to \mathbb{R}^n$ が M 上の *vector field*（ベクトル場）
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $X : M \ni x \mapsto X(x) \in T_xM$

また，M 上の C^∞ ベクトル場全体を $\mathfrak{X}^\infty(M)$ とかく.

Remark 2.2. n 次元多様体 M 上のベクトル場 X と C^∞ 局所座標 (U, ϕ) から誘導される $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $T\phi(X) : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ を次で定めることができる．$x \in U$ に対して，

$$T\phi(X)(\phi(x)) \coloneqq T_x\phi(X(x))$$

ただし，$T_x\phi : T_xM \ni [c]_x \mapsto (\phi \dot{\circ} c(0)) \in \mathbb{R}^n$

Definition 2.3 (括弧積)**.** $f \in C^\infty(M)$ と $X \in \mathfrak{X}^\infty$ に対して，「f の $x \in M$ での $X(x)$ 方向の微分 $X(x)f$」を以下のように定義できる.

任意の $X(x)$ の積分曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ に対して $X(x)f = f\frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0}$ と定めると $Xf \in C^\infty(M)$ であり，これは c の取り方に依らない.

このベクトル場による微分を用いてベクトル場同士の括弧積を定める.$X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ *s.t.* $\forall C^\infty$

$$\{X, Y\}f = X(Yf) - Y(Xf)$$

Definition 2.4 (接束の切断)**.** $\Gamma : M \to TM$ が接束 TM の切断とは $\pi_M \circ \Gamma^{-1} = Id_M$ が成り立つこと．ただし，接束 $TM = \{(x, v); x \in M, v \in T_xM\}$ で与えられる.

またベクトル場 X に対し，$\Gamma_X : M \ni x \mapsto (x, X(x)) \in TM$ は切断を定める.

Proposition 2.5 (ベクトル場と切断は 1:1)**.** 切断 $\Gamma : M \to TM$ に対して，$\exists X_\Gamma \in \mathfrak{X}^\infty$ *s.t.* $\Gamma(x) = (x, X_\Gamma(x))$

Definition 2.6 (flow)**.** 積分曲線： 区間 $I \subset \mathbb{R}, c : I \to M; C^\infty$ に対し

$$\frac{dc}{dt}(t) \coloneqq [s \mapsto c(t+s)]_{c(t)} \in T_{c(t)}M$$

で t における速度ベクトルを定める．$X \in \mathfrak{X}^\infty$ に対して，$c : I \to M; C^\infty$ が X の**積分曲線**とは

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t)) \ \forall t \in I$$

が成り立つこと.

C^∞ *flow*：*0* を含む開区間 $I \subset \mathbb{R}$ と開集合 $U \subset M$ に対して，$\Phi : I \times U \to M$ が X **の生成する** C^∞ ***local flow*** とは以下が成り立つこと.

(1) $\Phi : C^\infty$

(2) $\forall x \in U, \Phi(0, x) = x$

(3) $t \mapsto \Phi(t, x)$ は X の積分曲線.

特に $I = \mathbb{R}, U = M$ のとき C^∞ *(global) flow* と呼ばれる.

flow：$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ が M 上の ***flow*** とは以下が成り立つこと.

(1) $\Phi(0, x) = x$

(2) $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M, \Phi(t, \Phi(s, x))\Phi(t + s, x)$

3　交代 k 形式

Definition 3.1 (交代 k 形式)**.**

Definition 3.2 (ウェッジ積)**.**

Definition 3.3 (differential k-form)**.**

Proposition 3.4 (外微分)**.**

4　多様体上の積分

Definition 4.1 (向き)**.**

Definition 4.2 (volume form)**.**

4.1　積分

5　リーマン計量

Definition 5.1 (リーマン計量)**.**