DA(Filtering Problem)/Bayes 推定の理論的 review(メモ)

竹田航太

2023 年 2 月 19 日

目次

1 数学的定式化

データ同化やその元となる Bayes 推定の数学的定式化と示すべき事項について整理する．ベイズの定理に従って観測値から逆推定を行う．観測作用素とノイズの仮定から尤度を定め，事前分布を修正し事後分布が定義される．理論的な事後分布に対して，理論的保証を与えることがまず必要である．(ここまで理想的な分布の話)

実際のデータ同化アルゴリズムは理論的な事後分布を何らかの方法で近似する．この近似に対する評価も同時に必要となる．

1.1 Wellposedness

事後分布推定問題における解の存在と一意性とパラメータ（観測データ）に対する連続性.

1.2 Posterior consistency

十分なデータが得られれば，真の状態 $v^\dagger$ を recover できること．データ数が ∞，観測ノイズが 0 の極限において事後分布が真の状態にサポートを持つ Dirac 測度に収束することが保証されるべき

1.3 Bayesian Quality Assesmennt

理論的な事後分布 μ の個別のアルゴリズムによる近似 μ_{approx} がどれくらい近いかを評価すること．(離散化パラメータに対する連続性とも言える？)

1.4 Signal Quality Assesmennt

信号推定（点推定）問題において推定値 v_{approx} が真の状態 $v^\dagger$ をどれくらい近いかを評価すること．まず, データが真の状態を recover するのに十分な情報を持っているか (MLE consistency とも言える？) を評価し，また，個別のアルゴリズムがどの程度情報を取り出せるかを評価する必要がある.

2 結果

2.1 Bayes[1]

定式化の際には，尤度やポテンシャル (= -log 尤度) に対して条件が課せられる．これは観測関数とノイズの設計に対する条件とも言える.

(1) Standard assumption[1]: ポテンシャルに関する有界性や Lipschitz 性．Wellposedness に必要.
(2) Identifiable[1]: 推定パラメータに対する尤度の"単射"性.
(3) Regularity assumption[1]: 尤度に対する可微分性，可積分性の条件．最尤推定と比較する文脈 (Consistency) において用いられる.

2.1.1 Wellposedness

無限次元 (1)generalized Bayes(H: Banach to Euclid): これで事後分布の形が決まる．(2)well-defined posterior: 事後分布が well-defined であることが示される．(3)Locally Lipshitz: 観測データに対する Hellinger 距離での Lipshitz 性.

2.1.2 Posterior Consistency

Bernstein–von Mises(Bayesian)

2.2 (MLE Consistency)[1]

(1)Consistency of the MLE, (2)Local asymptotic normality of the MLE

2.3 DA[2]

2.3.1 Wellposedness

Locally Lipshitz w.r.t. data (Theorem 2.15 in [2])([1] の Locally Lip と比較すべき) MAP/4DVar と事後分布の関係 (Theorem 3.10, 12)

2.3.2 Bayesian Quality Assessment

PF の離散化誤差 (Theorem 4.5 in [2])

2.3.3 Signal Quality Assessment

1 次元 KF の Cov の長時間挙動 (Table 4.1), (部分観測)3DVar の stability(Theorem 4.10)

2.4 Model

モデルの解析について [3, 4, 5] が Lorenz63, 96 や 2 次元周期境界 Navier-Stokes 方程式の解の存在や誤差発達について議論した.

参考文献

[1] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2015.

[2] K. J. H. Law, A. M. Stuart, and K. C. Zygalakis. *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, 2015.

[3] Kevin Hayden, Eric Olson, and Edriss S. Titi. Discrete data assimilation in the lorenz and 2d navier-stokes equations. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 240(18):1416–1425, SEP 1 2011.

[4] K. J. H. Law, D. Sanz-Alonso, A. Shukla, and A. M. Stuart. Filter accuracy for the lorenz 96 model: Fixed versus adaptive observation operators. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 325:1–13, JUN 15 2016.

[5] D. T. B. Kelly, K. J. H. Law, and A. M. Stuart. Well-posedness and accuracy of the ensemble kalman filter in discrete and continuous time. *NONLINEARITY*, 27(10):2579–2603, OCT 2014.

[6] Richard Nickl. Statistical theory. *Statistical Laboratory, Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge*, 2013.

[7] Kody Law, Abhishek Shukla, and Andrew Stuart. Analysis of the 3dvar filter for the partially observed lorenz'63 model. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 34(3, SI):1061–1078, MAR 2014.

[8] Marco A Iglesias, Kody J H Law, and Andrew M Stuart. Ensemble kalman methods for inverse problems. *Inverse Problems*, 29(4):045001, mar 2013.

[9] Kody Law, Abhishek Shukla, and Andrew Stuart. Analysis of the 3dvar filter for the partially observed lorenz'63 model. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 34(3, SI):1061–1078, MAR 2014.