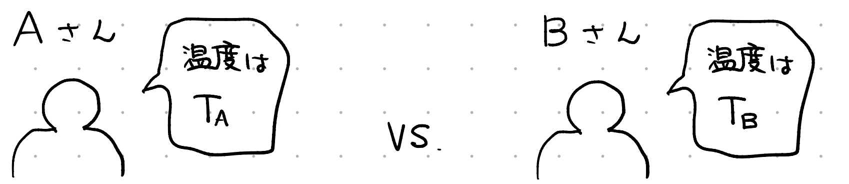
データ同化のエッセンスノート　竹田航太　2024/05/17

不確実性定量化と意思決定

問題1（室温の推定）

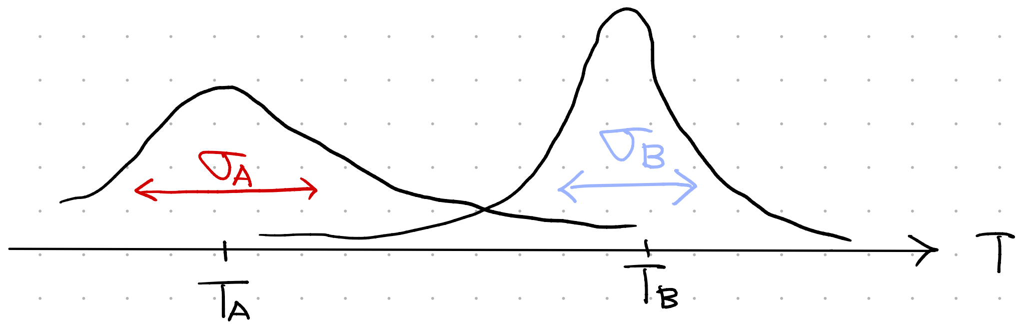
今の部屋の温度に関する情報



不確実性（信用度）σ_A　　不確実性（信用度）σ_B

Q1. σ_Aやσ_Bはどのように設定するか？

Q2. $\sigma_A > \sigma_B$のとき，どちらを信用するか？



2. know データ同化の数学と計算

問題1へのアプローチ（重みつき最小二乗法）

両方の情報を使うため平均を取る.

$$T_* = \frac{1}{2} T_A + \frac{1}{2} T_B \longrightarrow$$ 不確実性の情報が反映されていない

"不確実性で重みを付けた平均"を取る（重心）

$$T_* := \underset{T}{\mathrm{argmin}}\, \mathcal{L}(T), \quad \mathcal{L}(T) := \frac{(T-T_A)^2}{2\sigma_A^2} + \frac{(T-T_B)^2}{2\sigma_B^2}$$

これを解くため，$\mathcal{L}'(T) = 0$とすると

$$\frac{T-T_A}{\sigma_A^2} + \frac{T-T_B}{\sigma_B^2} = 0$$

より

$$T_* = \left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right)^{-1} \left(\frac{T_A}{\sigma_A^2} + \frac{T_B}{\sigma_B^2}\right) \quad \text{—} \; (1)$$

$$= \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} T_A + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} T_B$$

また，T_* を用いて以下のように表せる．

$$\mathcal{L}(T) = \frac{1}{2}\boxed{\frac{\sigma_A^2+\sigma_B^2}{\sigma_A^2\sigma_B^2}(T-T_*)^2} + \{\cdots\} \quad (2) \qquad \sigma_* := \left(\frac{\sigma_A^2\sigma_B^2}{\sigma_A^2+\sigma_B^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{とおく．}$$

$\because$) $\mathcal{L}(T) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_A^2}+\frac{1}{\sigma_B^2}\right)T^2 - \left(\frac{T_A}{\sigma_A^2}+\frac{T_B}{\sigma_B^2}\right)T + \frac{1}{2}\left(\frac{T_A^2}{\sigma_A^2}+\frac{T_B^2}{\sigma_B^2}\right)$

より 平方完成の公式

$$ax^2+bx+c$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

を使うと

$$\mathcal{L}(T) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_A^2}+\frac{1}{\sigma_B^2}\right)\Big[T - \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_A^2}+\frac{1}{\sigma_B^2}\right)^{-1}\left(\frac{T_A}{\sigma_A^2}+\frac{T_B}{\sigma_B^2}\right)}_{T_*}\Big]^2$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_A^2}+\frac{1}{\sigma_B^2}\right)^{-1}\left(\frac{T_A}{\sigma_A^2}+\frac{T_B}{\sigma_B^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{T_A^2}{\sigma_A^2}+\frac{T_B^2}{\sigma_B^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sigma_A^2+\sigma_B^2}{\sigma_A^2\sigma_B^2}(T-T_*)^2 + \{\cdots\}$$

見方1（精度）

精度を $C_A = \sigma_A^{-2}$, $C_B = \sigma_B^{-2}$ で定めると ☆ は精度での重み付き平均

$$T_* = \frac{1}{C_A+C_B}(C_A T_A + C_B T_B)$$

と表せる．

見方2（正規分布）

Aさんから得られる情報を平均 T_A, 分散 σ_A^2 の正規分布 $N(T_A, \sigma_A^2)$
B 〃 T_B 〃 σ_B^2 〃 $N(T_B, \sigma_B^2)$

→ 密度関数 P_A, P_B に対し，

$$P_A(T)P_B(T) \propto \exp\left(\frac{(T-T_A)^2}{2\sigma_A^2}\right)\exp\left(\frac{(T-T_B)^2}{2\sigma_B^2}\right)$$

定数倍を無視 $= \exp(\mathcal{L}(T))$

AとBを考慮した温度に対する推定の密度関数を

$$P_*(T) := \frac{P_A(t)P_B(t)}{\int P_A(t)P_B(t)dt} = \frac{e^{\mathcal{L}(T)}}{\int e^{\mathcal{L}(t)}dt}$$

とおくと (2) より

その平均と分散はそれぞれ T_*, σ_*^2 となる．とくに，$\sigma_* < \sigma_A, \sigma_B$ である．

時間発展する状態の推定　$x_1, x_2, \cdots$

推定したい量・状態 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ が以下に従うとする。

(3)　$x_n = a x_{n-1}$,　$n = 1, 2, \cdots$

ただし，x_0は不明．$a \in \mathbb{R}$．

また，各時刻で正規ノイズ ξ_n が加わった観測データが得られる．

(4)　$y_n = x_n + \xi_n$,　$n = 1, 2, \cdots$

$\xi_n \sim N(0, r_n^2)$,　$r_n > 0$　$n = 1, 2, \cdots$

問題2 フィルタリング問題

(3)(4)に従う系 $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ について，各時刻 N で $(y_n)_{n=1}^{N}$ の情報を用いて x_N の「最良の推定値と不確実性」を求めよ．

注：$(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$は given

cf. エクセンダール「確率微分方程式」

カルマン・フィルタ

x_n の不確実性を正規分布 $N(m_n, \sigma_n^2)$ で表し，これを逐次的に計算．

⓪ m_0 と σ_0 は適当に与える．σ_0は大きくとる

$\longrightarrow$ 初期値 $x_0 \sim N(m_0, \sigma_0^2)$　$\longrightarrow$ 不確実性が大きく何もわかっていないことを表す．

① 予測：in $m_{n-1}, \sigma_{n-1} \longrightarrow$ out $\hat{m}_n, \hat{\sigma}_n$

$x_{n-1} \sim N(m_{n-1}, \sigma_{n-1})$ と仮定する．

次の時刻 x_n がどのような分布に従うか予測する

(3)より a をかけるだけなので x_n も正規分布に従う．　$\longrightarrow$ 一般に線形写像なら成立．

予測値を $\hat{x}_n$ とおくと，

$$\hat{x}_n \sim N(a m_{n-1}, a^2 \sigma_{n-1}^2) \quad \text{と表せる．}$$

$$\begin{cases} \hat{m}_n = a m_{n-1} \\ \hat{\sigma}_n^2 = a^2 \sigma_{n-1}^2 \end{cases}$$

② 解析：in $\hat{m}_n, \hat{\sigma}_n, y_n \longrightarrow$ out m_n, σ_n

$\hat{x}_n \sim N(\hat{m}_n, \hat{\sigma}_n^2)$，(4)から $y_n \sim N(x_n, r_n^2)$

$\longrightarrow x_n \sim N(y_n, r_n^2)$ とも書ける．

$(\because -\xi_n \sim N(0, r_n^2)$ より$)$

x_n についての2つの情報 $N(\hat{m}_n, \hat{\sigma}_n^2)$，$N(y_n, r_n^2)$ から 見方2と同様にして

$$m_n = \frac{r_n^2}{\hat{\sigma}_n^2 + r_n^2} \hat{m}_n + \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\hat{\sigma}_n^2 + r_n^2} y_n, \quad \sigma_n^2 = \frac{\hat{\sigma}_n^2 r_n^2}{\hat{\sigma}_n^2 + r_n^2} \quad \text{が得られる．}$$