

# 線形作用素

竹田航太

2022 年 2 月 10 日

## 概要

線形作用素, 行列について必要なことをまとめる. 執筆中.

## 1 行列

### 1.1 対角化

**Definition 1.1.**  $A \in M_n(\mathbb{C})$  に対して,

- $A$  が正規 (*normal*)  $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^*A = AA^*$ .
- $A$  がユニタリ (*unitary*)  $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^*A = AA^* = I$ .

**Theorem 1.2.** (対角化)  $A \in M_n(\mathbb{C})$  に対して, ユニタリ対角化可能であることと正規行列であることは同値.

### 1.2 自己共役

**Definition 1.3.** 自己共役, 正定値を定義する.

- $A \in M_n(\mathbb{C})$  が自己共役 (*self-adjoint*)  $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^* = A$  自己共役行列全体の集合を  $M_n(\mathbb{C})_{sa}$  とかく.
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$  が正定値 (*positive-definite*)  $\stackrel{\text{def}}{\iff} x^*Ax > 0$  ( $\forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ ) 同様に全体の集合を  $M_n(\mathbb{C})_+$  とかく.
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$  が半正定値 (*positive-semidefinite*)  $\stackrel{\text{def}}{\iff} x^*Ax \geq 0$  ( $\forall x \in \mathbb{C}^n$ ) 同様に全体の集合を  $M_n(\mathbb{C})_{+ =}$  とかく.

**Theorem 1.4.**  $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$  とする.

- (1)  $A$  の固有値は全て実数

**Theorem 1.5** (正定値行列の特徴づけ).  $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$  に対して以下は同値

- (1)  $A \in M_n(\mathbb{C})_+$
- (2)  $A$  の固有値は正
- (3) 正の対角行列でユニタリ対角化できる
- (4)  $\exists S \in M_n(\mathbb{C}), S : \text{正則} \text{ s.t. } A = S^* S$

**Theorem 1.6.**  $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$  に対して以下は同値

- (1)  $A \in M_n(\mathbb{C})_{+=}$
- (2)  $A$  の固有値は非負
- (3) 非負の対角行列でユニタリ対角化できる
- (4)  $\exists S \in M_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } A = S^* S$

**Theorem 1.7.**  $A \in M_n(\mathbb{C})_+$  の固有値は全て正であり  $\det(A) > 0$  が成り立つので,  $A$  は正則であり,  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})_+$ .

### 1.3 逆行列

**Lemma 1.8.**  $P, I \in M_n(\mathbb{C})$  で  $I$  は単位行列.  $I + P$  : 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(I + P)^{-1} = I - (I + P)^{-1} P$$

*Proof.*

$$LHS = (I + P)^{-1}(I + P - P) = I - (I + P)^{-1} P = RHS$$

□

**Lemma 1.9.**  $P \in M_{n \times m}(\mathbb{C}), Q \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), I_n(I_m)$  をそれぞれ  $n(m)$  次単位行列とする.  $I_n + PQ, I_m + QP$  : 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(I + PQ)^{-1} P = P(I + QP)^{-1}$$

*Proof.*

$$P + PQP = P(I + QP) = (I + PQ)P$$

より右の等式で左から  $(I + PQ)^{-1}$ , 右から  $(I + QP)^{-1}$  をかけると従う.

□

**Lemma 1.10.**  $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$  : 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1}$$

*Proof.*  $I_n$  を  $n$  次単位行列として  $(PQ)Q^{-1}P^{-1} = I_n, Q^{-1}P^{-1}(PQ) = I_n$

□

**Theorem 1.11.**  $A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_{n \times m}(\mathbb{C}), C \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), D \in M_m(\mathbb{C})$  として,  $A, D, D + CA^{-1}B$  : 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(A + BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} (A + BD^{-1}C)^{-1} &= (A(I + A^{-1}BD^{-1}C))^{-1} \\ &\stackrel{1.10}{=} (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1} \\ &\stackrel{1.8}{=} \{I - (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}C\}A^{-1} \\ &= A^{-1} - (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}CA^{-1} \\ &\stackrel{1.9}{=} A^{-1} - A^{-1}B(I + D^{-1}CA^{-1}B)^{-1}D^{-1}CA^{-1} \\ &\stackrel{1.10}{=} A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \end{aligned}$$

\*等号の上の数字は Lemma の番号

□

**Theorem 1.12.**  $P \in M_n(\mathbb{C})_+$  (正定値),  $R \in M_m(\mathbb{C})_+, B \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$  とする. このとき  $(BPB^* + R)$  は可逆で以下が成り立つ.

$$(P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} = PB^*(BPB^* + R)^{-1}$$

*Proof.* Lemma を使う.

$$\begin{aligned} (P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} &\stackrel{1.10}{=} (I + PB^*R^{-1}B)^{-1}PB^*R^{-1} \\ &\stackrel{1.9}{=} PB^*(I + R^{-1}BPB^*)^{-1}R^{-1} \\ &\stackrel{1.10}{=} PB^*(BPB^* + R)^{-1} \end{aligned}$$

\*等号の上の数字は Lemma の番号

□

**Example 1.1** (Kálmán filter).  $y$  : 観測データ,  $C$  : 対称正定値,  $R$  : 対称正定値,  $H$  観測 operator とすると

$$(I + CH^*R^{-1}H)x^a = x^f + CH^*R^{-1}y \Leftrightarrow x^a = x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f)$$

*Proof.* 左の式の両辺に左から  $(I + CH^*R^{-1}H)^{-1} = (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}$  をかける

$$\begin{aligned} x^a &= (I + CH^*R^{-1}H)^{-1}x^f + (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}CH^*R^{-1}y \\ &\stackrel{1.11, 1.12}{=} \{I - CH^*(R + H^*CH)^{-1}H\}x^f + CH^*(HCH^* + R)^{-1}y \\ &= x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f) \end{aligned}$$

□

## 2 線形作用素

**Definition 2.1** (自己共役作用素).  $A \in B(H)$  に対して,

$$A \text{ が自己共役作用素 } \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

自己共役作用素全体の集合を  $B_{sa}(H)$  とかく.

**Definition 2.2** (正作用素).  $A \in B_{sa}(H)$  に対して

$$\begin{aligned} A \text{ が正作用素 } &\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in H, \langle Ax, x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists T \in B(H) \text{ s.t. } A = T^*T \\ &\Leftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty) \end{aligned}$$

**Theorem 2.3** (コンパクト作用素).  $T \in B(H)$  が  $TB(0, 1)$  が全有界であるとき  $T$  はコンパクト作用素であるという. ただし,  $B(0, 1) := \{x \in H; \|x\| \leq 1\}$  は  $H$  の閉単位球.

**Theorem 2.4** (コンパクト自己共役作用素のスペクトル分解).  $H$ : 可分 Hilbert 空間とする.  $A \in B_{sa}(H) \cap K(H)$  とすると,  $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$  である. さらに  $A$  の固有値の列  $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$  と対応する固有ベクトルからなる  $H$  の正規直交基底  $(e_n)_{n=1}^\infty$  が存在して,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

が作用素ノルムでの収束の意味で成り立つ. ただし,  $e_n \otimes e_n^* = P_n$  は  $\text{Ker}(\lambda_n I - T)$  への射影.

**Theorem 2.5** (コンパクト作用素の特異値分解).

**Definition 2.6** (Schatten p class). Schatten  $p$  クラスを

$$C_p(H) := \{T \in K(H); (\sum_n s_n(T)^p)^{1/p} < \infty\}$$

で定める. 特に  $C_2(H)$  を Hilbert Schmidt クラス,  $C_1(H)$  をトレースクラスという.

**Definition 2.7** (トレース).  $A \in B(H)_+$  に対してトレースを  $Tr(A) := \sum_n \langle Ae_n, e_n \rangle$  とおくと  $(e_n)$  の取り方によらない.

**Definition 2.8** (トレースクラス).  $A \in B(H)$  に対して  $\|A\|_{C_1} = Tr(|A|)$  であり. この値が有限のとき  $Tr(A)$  も有限.

**Lemma 2.9.**  $T \in B(H)$  に対して  $Tr(T^*T) < \infty \Rightarrow T \in K(H)$

**Theorem 2.10** (Hilbert Schmidt class).  $T \in B(H)$  に対して  $Tr(T^*T) < \infty \Leftrightarrow T \in C_2(H)$  である. さらにこのとき  $Tr(T^*T) = \|T\|_{HS}^2 = \|T\|_{C_2}^2$  が成り立つ. また  $Tr(T^*T) = \sum_n \|T_n e_n\|^2 = \sum_{n,m} |\langle T_n e_n, e_m \rangle|^2$  などもわかる.

**Theorem 2.11** (class の関係).  $C_1(H) \subset C_2(H) \subset K(H)$

## 参考文献

- [1] 齋藤正彦. 線形代数学入門. 東京大学出版, 2011.
- [2] Ged Ridgway. Matrix inversion identities. <http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/g.ridgway/mil/mil.pdf> (2020/7/5).