多様体論

竹田航太

2021 年 6 月 24 日

目次

概要

※書きかけ.

現代数学を研究する上で外せない多様体論について，基礎的な定義や結果をまとめる．備忘録的なものなので定義が抜けていることがある.

1 多様体

Definition 1.1. 位相空間 M が n 次元多様体 *(mfd)* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

(1) M は *Hausdorff.*

(2) $\forall x \in M, \exists U$*: open nbd of* x *on* M *s.t.* $U \underset{homeo}{\sim} \exists V \subset \mathbb{R}^n$

Theorem 1.2. n 次元 *mfd* M が単連結とする．このとき以下は同値.

(1) M は距離つけ可能.

(2) M は σ-コンパクト.

(3) M はパラコンパクト.

(4) M は第 *2* 可算.

2　ベクトル場

Definition 2.1. *M: n 次元 C^∞ 多様体に対して，$X : M \to \mathbb{R}^n$ が M 上の vector field*（ベクトル場）
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $X : M \ni x \mapsto X(x) \in T_xM$

　また，M 上の C^∞ ベクトル場全体を $\mathfrak{X}^\infty(M)$ とかく．

Remark 2.2. n 次元多様体 M 上のベクトル場 X と C^∞ 局所座標 (U, ϕ) から誘導される $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $T\phi(X) : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$ を次で定めることができる．$x \in U$ に対して，

$$T\phi(X)(\phi(x)) \coloneqq T_x\phi(X(x))$$

ただし，$T_x\phi : T_xM \to \mathbb{R}^n$

3　交代 k 形式

Definition 3.1 (交代 k 形式)**.**

Definition 3.2 (ウェッジ積)**.**

Definition 3.3 (differential k-form)**.**

Proposition 3.4 (外微分)**.**

4　多様体上の積分

Definition 4.1 (向き)**.**

Definition 4.2 (volume form)**.**

4.1　積分

5　リーマン計量

Definition 5.1 (リーマン計量)**.**