DA と Dynamical Model

竹田航太

2023 年 4 月 1 日

目次

1	はじめに	1
1.1	これまでの流れ	1
1.2	準備	2
2	基本の仮定	3
3	Lorenz63	4
4	Lorenz96	6
5	2 次元 Navier-Stokes	7
6	3 次元正則化 Navier-Stokes	8
付録 A	Gronwall の不等式	8

1 はじめに

データ同化を数学的に扱う際のモデルの解析について整理する．まずは気象で用いられる方程式に絞る．データ同化の文脈において求められるモデルの解析は well-posed 性に加えて，global attractor の存在や初期誤差の発達レートの評価である．無限次元力学系の理論 [1] に基づく．また，[2] のように，Lyapnov 関数を用いた評価・解析も基本的である．

1.1 これまでの流れ

[3, Hayden 2011] は Lorenz63(L63) と 2 次元 Navier-Stokes(2dNS) に対して解の存在から誤差発達までの結果を示した．[4, Law 2016] は Lorenz96(L96) に対する同様の解析を行なった．

どちらも対象の方程式を以下のような形の Hibert 空間上の ODE として表現した.

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u,u) = f.$$

[5, Kelly 2014] は $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に条件を設けて一般的な形で誤差発達について議論した.

1.2 準備

Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle, |\cdot|)$ を考える.

Definition 1.1 (自励系 ODE と力学系)**.** 自励系[*1]の *ODE* を考える.

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad u(0) = u_0.$$

この *ODE* が任意の $u_0 \in \mathcal{H}$ に対して，時間大域的な一意解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathcal{H})$ を持つとき，1 パラメータ半群 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が

$$\Psi(t, u_0) = u(t)$$

で定義できる．$\Psi_t(\cdot) = \Psi(t, \cdot)$ と書き，元の *ODE* や 1 パラメータ半群を力学系と呼ぶ.

Definition 1.2. $B \subset \mathcal{H}$ が半群 Ψ_t について *forward invariant* であるとは

$$\Psi_t(B) \subset B, \quad \forall t \geq 0$$

が成り立つことを言う.

Definition 1.3. 半群 $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ の *attractor* とは以下を満たす集合 $\mathscr{A} \subset \mathcal{H}$.

(1) $\Psi_t \mathscr{A} = \mathscr{A}$.
(2) ある近傍 U が存在し，$\forall u_0 \in U$ で $d(\Psi_t u_0, \mathscr{A}) \to 0 \quad (t \to \infty)$.

また，*attractor* $\mathscr{A}$ がコンパクトであり，任意の有界集合 B に対して，B の点を一様に *attract* するとき，$\mathscr{A}$ は *global attractor* と呼ばれる.

Definition 1.4 (absorbing set)**.** 力学系 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ が有界な *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs}$ を持つとは，任意の $R > 0$ に対して，ある $T = T(R) > 0$ が存在して

$$\Psi_t(B(0,R)) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq T$$

が成り立つことを言う.

[*1] 速度ベクトル場が時間に依存しない.

Theorem 1.5. 半群 $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ が十分大きな t で一様コンパクト[*2]，つまり，任意の有界集合 B に対して，ある $T = T(B) > 0$ が存在し $\cup_{t\geq T}\Psi_t B$ が $\mathcal{H}$ で相対コンパクト，とする．また，開集合 $U \subset \mathcal{H}$ とその上での *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs}$ が存在するとする．このとき，*global attractor* を

$$\mathscr{A} = \cap_{T\geq 0}\overline{\cup_{t\geq T}\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs})} \tag{1.1}$$

で定めることができ，U で包含関係について極大となる．

Proof. Theorem 1.1 of [1]. □

Remark 1.6. Ψ_t に関する一様コンパクト性の条件は V での有界な *absorbing set* の存在と V の H への埋め込みがコンパクトであれば満たされる．

Remark 1.7. 有界な *absorbing set* の存在は以下の形の *a priori estimate* が得られるとわかる．

$$|u(t)|^2 \leq e^{-\alpha t}|u_0|^2 + R^2(1-e^{-\alpha t})$$

ただし，$\alpha, R > 0$ は u_0 によらない定数．これより，任意の $R_1 \geq R$ について，$|u_0| \leq R_1$ のとき，

$$|u(t)|^2 \leq e^{-\alpha t}R_1^2 + R^2(1-e^{-\alpha t}) = R^2 + (R_1^2 - R^2)e^{-\alpha t} \leq R_1^2$$

となるので，H における閉球 $B_H(0, R_1)$ は *forward invariant* である．また，$R_1 > R$ について，$B_H(0, R_1)$ は H で *absorbing set* になることもわかる．

2　基本の仮定

状態空間として Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ を考える．

Assumption 2.1. *Banach* 空間 $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ を $\mathcal{H}$ に連続的に埋め込めるとする[*3]．以下の形の力学系を仮定する．

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u,u) = f, \quad u(0) = u_0. \tag{2.1}$$

ただし，$\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は非有界線形作用素で，ある $\lambda > 0$ が存在して以下が成り立つ．

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle \geq \lambda\|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.2}$$

さらに，$\mathcal{B} : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{H}$ は対称な双線形形式で以下を満たし，

$$\langle B(u,u), u\rangle = 0, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \tag{2.3}$$

[*2] 証明には，ある T で Ψ_T がコンパクトという条件で十分．

[*3] $\exists C > 0$, s.t. $|u| \leq C|u|, \forall u \in V$.

ある $c > 0$ が存在して，以下が成り立つとする．

$$\langle B(u,v), v\rangle \le c\|u\|\|v\||v|, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}. \tag{2.4}$$

また，任意の $u(0) \in \mathcal{H}$ に対して，(2.1) は一意な弱解を持つとし，$\mathcal{H}$ に拡張可能な 1-パラメータ半群 $\Psi_t : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ を生成するとする．さらに，*global attractor* $\mathscr{A} \subset \mathcal{V}$ が存在し，ある $R > 0$ が存在して任意の $u_0 \in \mathscr{A}$ に対して $\sup_{t\ge 0} |u(t)| \le R$ が成り立つとする．

Remark 2.2. 空間の包含関係は $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$.

Remark 2.3. *Lorenz63, 96,* トーラス上 2 次元 *Navier-Stokes* はこの仮定を満たす.

Remark 2.4. 有限次元の場合は *global attractor* の存在は他の仮定から導かれる．

Remark 2.5. *global attractor* と有界性の証明には，*Remark 1.7* の *a priori estimate* を示せば良い．

Lemma 2.6 (初期値連続性/誤差発達 [5])**.** *Assumption 2.1* を仮定すると，ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して以下が成り立つ．

$$|\Psi_h(v_0) - \Psi_h(w_0)| \le e^{\beta h}|v_0 - w_0|, \quad \forall v_0 \in \mathscr{A}, h > 0, w_0 \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

Proof. [5] □

Remark 2.7. 初期値は片方だけが *global attractor* $\mathscr{A}$ に入っているという条件だけが課せられている．これはデータ同化において，信号 $u_t \in \mathscr{A}$ の推定値 $\hat{u}_t$ が $\mathscr{A}$ に入っているとは限らない場合を想定している．

3 Lorenz63

$\sigma, b, r \in \mathbb{R}$ に対して，$r + a$ シフトした Lorenz63 を考える．

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\
\frac{dy}{dt} &= -\sigma x - y - xz, \\
\frac{dz}{dt} &= xy - bz - b(r + \sigma).
\end{aligned}$$

これは $\mathcal{H}=\mathcal{V}=\mathbb{R}^3$ として，$u=(x,y,z)^\top$ に対して，(2.1) を用いて以下のように書ける．

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b(r+\sigma) \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}(u,\tilde{u})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ x\tilde{z}+z\tilde{x} \\ -(x\tilde{y}+y\tilde{x}) \end{bmatrix}.$$

以下，$\sigma>0, b>1, r>0$ とする．($\sigma=10, b=8/3, r=28$ はこれを満たす．)

Lemma 3.1. $\forall u,\tilde{u}\in\mathbb{R}^3$ で以下が成り立つ．

(1) $\langle \mathcal{A}u,u\rangle \geq |u|^2$.
(2) $\langle \mathcal{B}(u,u),u\rangle = 0$.
(3) $\mathcal{B}(u,\tilde{u})=\mathcal{B}(\tilde{u},u)$.
(4) $|\mathcal{B}(u,\tilde{u})|\leq 2^{-1}|u||u|$.

Proof. $\langle \mathcal{A}u,u\rangle=\sigma x^2+y^2+bz^2\geq |u|^2$，$(y^2+\tilde{y}^2)(z^2+\tilde{z}^2)\geq (y\tilde{y}+z\tilde{z})$. □

Lemma 3.2. $K=\frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}$ とおく．

(1) $\forall u_0\in\mathbb{R}^3$ に対して，全ての $t>0$ で定義された一意な解 $u\in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0};\mathbb{R}^3)$ が存在し，以下が成り立つ．

$$\limsup_{t\to\infty}|u(t)|^2\leq K.$$

(2) absorbing set $\mathfrak{B}_{abs}=B(0,K^{1/2})$ は *forward invariant*，つまり以下が成り立つ．

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs})\subset\mathfrak{B}_{abs},\quad \forall t\geq 0$$

(3) global attractor $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0\in\mathscr{A}$ で，以下が成り立つ．

$$|u(t)|^2\leq K,\quad \forall t\geq 0.$$

Proof. [3] 解の存在は速度ベクトル場の局所リプシッツ性から従う．$\langle \mathcal{A}u+\mathcal{B}(u,u)-f,u\rangle\leq K-|u|^2$ を示す．Gronwall の不等式から従う． □

Theorem 3.3. $\beta=2(K^{1/2}-1)$ とおく．$\forall v_0\in\mathscr{A}$，$w_0\in\mathbb{R}^3$，$t>0$ で以下が成り立つ．

$$|v(t)-w(t)|\leq e^{\beta t}|v_0-w_0|.$$

Proof. β の存在は，[5] からわかる．具体的な β は [3] を見よ． □

4 Lorenz96

$J \in \mathbb{N}$ に対して，J 変数の Lorenz96 モデルは 1 次元周期境界の領域を J 点格子で離散化した以下のような力学系．$u = (u_1, \cdots, u_J)^\top \in \mathbb{R}^J$,

$$\frac{du_j}{dt} = u_{j-1}(u_{j+1} - u_{j-2}) - u_j + F, \quad \text{for } j = 1, 2, \cdots, J,$$
$$u_0 = u_J, \quad u_{J+1} = u_1, \quad u_{-1} = u_{J-1}.$$

$F \in \mathbb{R}$ は外力パラメータ．

$\mathcal{H} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^J$ として，(2.1) の形で以下のように書ける．

$$\mathcal{A} = I, f = \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ F \end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 u_J + u_2 \tilde{u}_J - \tilde{u}_J u_{J-1} - u_J \tilde{u}_{J-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{j-1} u_{j+1} + u_{j-1} \tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_{j-2} u_{j-1} - u_{j-2} \tilde{u}_{j-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{J-1} u_1 + u_{J-1} \tilde{u}_1 - \tilde{u}_{J-2} u_{J-1} - u_{J-2} \tilde{u}_{J-1} \end{bmatrix}.$$

Lemma 4.1. $\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^J$ に対して，以下が成り立つ．

(1) $\langle \mathcal{A}u, u \rangle = |u|^2$.

(2) $\langle \mathcal{B}(u, u), u \rangle$.

(3) $\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \mathcal{B}(\tilde{u}, u)$.

(4) $|\mathcal{B}(u, \tilde{u})| \leq 2|u||u|$.

(5) $2\langle \mathcal{B}(u, \tilde{u}), u \rangle = \langle \mathcal{B}(u, u), \tilde{u} \rangle$.

Lemma 4.2. $K = 2JF^2$ とおく．

(1) $\forall u_0 \in \mathbb{R}^J$ に対して，全ての $t > 0$ で定義された一意な解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^J)$ が存在し，以下が成り立つ．

$$\limsup_{t \to \infty} |u(t)|^2 \leq K.$$

(2) *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs} = B(0, K^{1/2})$ は *forward invariant*, つまり以下が成り立つ．

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs}) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq 0$$

(3) *global attractor* $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0 \in \mathscr{A}$ で，以下が成り立つ．

$$|u(t)|^2 \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Proof. [4] □

Theorem 4.3. $\beta = 2(K^{1/2} - 1)$ とする．$\forall v_0 \in \mathscr{A}$，$w_0 \in \mathbb{R}^J$，$t > 0$ で以下が成り立つ．

$$|v(t) - w(t)| \leq e^{\beta t}|v_0 - w_0|.$$

Proof. β の存在は，[5] からわかる．具体的な β は [4] を見よ． □

5 2 次元 Navier-Stokes

$L > 0$，$\Omega = [0, L]^2$ に対して，$\dot{L}^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega u dx = 0\}$,

$$\mathcal{H} = \{u \in \dot{L}^2_{per}(\Omega)^2 \mid \nabla \cdot u = 0\},$$
$$\mathcal{V} = \{u \in \dot{H}^1_{per}(\Omega)^2 \mid \nabla \cdot u = 0\}$$

とおく．L^2 内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)$，$|\cdot|$ と書き，H^1 内積とノルムをそれぞれ $((\cdot,\cdot))$，$\|\cdot\|$ と書く．$H^1(\Omega)$ の $L^2(\Omega)$ への埋め込みがコンパクトなので $\mathcal{V}$ の $\mathcal{H}$ への埋め込みはコンパクト．

Leray-Helmholtz 射影と呼ばれる L^2 直交射影 $P_H : L^2(\Omega) \to H$ を用いて，

$$Au = -P_H \triangle u$$

と定める．定義域は

$$D(A) = \dot{H}^2_{per}(\Omega)^2 \cap \mathcal{V}.$$

2 次元 Navier-Stokes 方程式は次のように表せる．

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = f, \tag{5.1}$$

ただし，$B(u, u) = \frac{1}{2}(P_H[(u \cdot \nabla)v] + P_H[(v \cdot \nabla)u])$ であり，$P_H f = f$ を仮定する．

解の存在は Theorem 2.1 in [1, p.108].

Theorem 5.1. $u_0 \in \mathcal{V}$，$f \in \mathcal{H}$ とする．このとき，(5.1) の一意な解が存在し以下を満たす．

$$u \in C([0, T]; \mathcal{V}) \cap L^2([0, T]; D(A)), \quad \forall T > 0,$$

任意の $t > 0$ で $u : t \mapsto D(A)$ が解析的，$\mathcal{H} \ni u_0 \mapsto u(t) \in D(A)$ は連続[*4]．

Lemma 5.2 (A について)**.** A^{-1} は $\mathcal{H}$ 上の *(*自己共役*)* コンパクト作用素である．固有値の列 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2, \ldots,$ と $\mathcal{H}$ で正規直交な $(w_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ が存在し，以下が成り立つ．

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

[*4] 半群 $\Psi_t : \mathcal{H} \ni u_0 \mapsto u(t) \in D(A)$ が定義できる．

Lemma 5.3. 以下の *a priori estimate* が成り立つ.

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|f|^2}{\nu^2\lambda_1^2}(1 - e^{-\nu\lambda_1 t}). \tag{5.3}$$

また，ある $\rho_1 > 0$ が存在して $\mathcal{B}_1 = B_{\mathcal{V}}(0, \rho_1)$ は $\mathcal{V}$ での有界な absorbing set であるので，Ψ_t の $\mathcal{H}$ での一様コンパクト性が従う．これより，global attractor の存在もわかる．

Lemma 5.4 ([3])**.** $K = \frac{|f|^2}{\nu^2\lambda_1}$ とする．*global attractor* $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0 \in \mathscr{A}$ で，以下が成り立つ．

$$\|u(t)\|^2 \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

B に関する評価 [3] を用いると誤差評価が得られる．

Theorem 5.5 ([3])**.** ある無次元の定数 C_1 と $\beta = C_1\nu^{-5/3}\lambda_1^{-1/3}K^{4/3}$ に対し，$\forall v_0 \in \mathscr{A}$, $w_0 \in \mathbb{R}^J$，$t > 0$ で以下が成り立つ．

$$\|v(t) - w(t)\| \leq e^{\beta t}\|v_0 - w_0\|.$$

L^2 ノルムと H^1 ノルムでの評価の違いを整理する必要がある．

6　3 次元正則化 Navier-Stokes

[6]

付録 A　Gronwall の不等式

Lemma 付録 A.1. $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$ に対して，$u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R})$ が

$$\frac{du}{dt} \leq au + b, u(0) = u_0$$

を満たすとする．このとき，以下が成り立つ．

$$u(t) \leq e^{at}u_0 + \frac{b}{a}(e^{at} - 1).$$

参考文献

[1] Roger Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer New York, NY, 1997.

[2] Xin T Tong, Andrew J Majda, and David Kelly. Nonlinear stability and ergodicity of ensemble based kalman filters. *Nonlinearity*, 29(2):657, jan 2016.

[3] Kevin Hayden, Eric Olson, and Edriss S. Titi. Discrete data assimilation in the lorenz and 2d navier-stokes equations. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 240(18):1416–1425, SEP 1 2011.

[4] K. J. H. Law, D. Sanz-Alonso, A. Shukla, and A. M. Stuart. Filter accuracy for the lorenz 96 model: Fixed versus adaptive observation operators. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 325:1–13, JUN 15 2016.

[5] D. T. B. Kelly, K. J. H. Law, and A. M. Stuart. Well-posedness and accuracy of the ensemble kalman filter in discrete and continuous time. *NONLINEARITY*, 27(10):2579–2603, OCT 2014.

[6] C. Foias, D. D. Holm, and E. S. Titi. The three dimensional viscous camassa-holm equations, and their relation to the navier-stokes equations and turbulence theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 14(1), 2001.

[7] Andrew J. Majda and John Harlim. *Filtering Complex Turbulent Systems*. Cambridge University Press, 2012.

[8] K. J. H. Law, A. M. Stuart, and K. C. Zygalakis. *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, 2015.

[9] Kody Law, Abhishek Shukla, and Andrew Stuart. Analysis of the 3dvar filter for the partially observed lorenz'63 model. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 34(3, SI):1061–1078, MAR 2014.

[10] Don A Jones and Edriss S Titi. On the number of determining nodes for the 2d navier-stokes equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168(1):72–88, 1992.