DA と Dynamical Model

竹田航太

2023 年 11 月 15 日

目次

1 はじめに

データ同化を数学的に扱う際のモデルの解析について整理する．まずは気象で用いられる方程式に絞る．データ同化の文脈において求められるモデルの解析は well-posed 性に加えて，global attractor の存在や初期誤差の発達レートの評価である．無限次元力学系の理論 [1] に基づく．また，[2] のように，Lyapunov 関数を用いた評価・解析も基本的である．

1.1 これまでの流れ

[3, Hayden 2011] は Lorenz63(L63) と 2 次元 Navier-Stokes(2dNS) に対して解の存在から誤差発達までの結果を示した．[4, Law 2016] は Lorenz96(L96) に対する同様の解析を行なった．どちらも対象の方程式を以下のような形の Hibert 空間上の ODE として表現した．

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u,u) = f.$$

[5, Kelly 2014] は $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に条件を設けて一般的な散逸的方程式として誤差発達について議論した．

一方で，[2] では，有限次元の model dynamics として SDE が考えられており，SDE についてのエネルギー不等式と Lyapunov 関数に注目して有界性を議論している．

1.2 準備

Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle, |\cdot|)$ を考える．

Definition 1.1 (自励系 ODE と力学系)**.** 自励系[*1]の *ODE* を考える．

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad u(0) = u_0.$$

この *ODE* が任意の $u_0 \in \mathcal{H}$ に対して，時間大域的な一意解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathcal{H})$ を持つとき，1 パラメータ半群 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が

$$\Psi(t, u_0) = u(t)$$

で定義できる．$\Psi_t(\cdot) = \Psi(t, \cdot)$ と書き，元の *ODE* や 1 パラメータ半群を力学系と呼ぶ．

Definition 1.2. $B \subset \mathcal{H}$ が半群 Ψ_t について *forward invariant* であるとは

$$\Psi_t(B) \subset B, \quad \forall t \geq 0$$

が成り立つことを言う．

Definition 1.3. 半群 $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ の *attractor* とは以下を満たす集合 $\mathscr{A} \subset \mathcal{H}$.

(1) $\Psi_t \mathscr{A} = \mathscr{A}$.
(2) ある近傍 U が存在し，$\forall u_0 \in U$ で $d(\Psi_t u_0, \mathscr{A}) \to 0 \quad (t \to \infty)$.

また，*attractor* $\mathscr{A}$ がコンパクトであり，任意の有界集合 B に対して，B の点を一様に *attract* するとき，$\mathscr{A}$ は *global attractor* と呼ばれる．

Definition 1.4 (absorbing set)**.** 力学系 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ が有界な *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs}$ を持つとは，任意の $R > 0$ に対して，ある $T = T(R) > 0$ が存在して

$$\Psi_t(B(0,R)) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq T$$

が成り立つことを言う．

[*1] 速度ベクトル場が時間に依存しない．

Theorem 1.5. 半群 $(\Psi_t)_{t\geq 0}$ が十分大きな t で一様コンパクト[*2]，つまり，任意の有界集合 B に対して，ある $T=T(B)>0$ が存在し $\cup_{t\geq T}\Psi_t B$ が $\mathcal{H}$ で相対コンパクト，とする．また，開集合 $U\subset\mathcal{H}$ とその上での *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs}$ が存在するとする．このとき，*global attractor* を

$$\mathscr{A}=\cap_{T\geq 0}\overline{\cup_{t\geq T}\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs})} \tag{1.1}$$

で定めることができ，U で包含関係について極大となる．

Proof. Theorem 1.1 of [1]. □

Remark 1.6. Ψ_t に関する一様コンパクト性の条件は V での有界な *absorbing set* の存在と V の H への埋め込みがコンパクトであれば満たされる．

Remark 1.7. 有界な *absorbing set* の存在は以下の形のエネルギー不等式が得られるとわかる．

$$|u(t)|^2\leq e^{-\alpha t}|u_0|^2+R^2(1-e^{-\alpha t})$$

ただし，$\alpha,R>0$ は u_0 によらない定数．これより，任意の $R_1\geq R$ について，$|u_0|\leq R_1$ のとき，

$$|u(t)|^2\leq e^{-\alpha t}R_1^2+R^2(1-e^{-\alpha t})=R^2+(R_1^2-R^2)e^{-\alpha t}\leq R_1^2$$

となるので，H における閉球 $B_H(0,R_1)$ は *forward invariant* である．また，$R_1>R$ について，$B_H(0,R_1)$ は H で *absorbing set* になることもわかる．

1.3 (関連) 半群と generator の関係

半群の Lipshitz 性と generator の Lipshitz 性は少し意味が違う．連続時間の力学系で定式化している場合は generator の Lipshitz 性を仮定し議論を進めている．一方で

2 基本の仮定と準縮小評価

2.1 Chaotic dynamics

状態空間として Hilbert 空間 $(\mathcal{H},|\cdot|)$ を考える．

Assumption 2.1. *Banach* 空間 $(\mathcal{V},\|\cdot\|)$ を $\mathcal{H}$ に連続的に埋め込めるとする[*3]．以下の形の力学系を仮定する．

$$\frac{du}{dt}+\mathcal{A}u+\mathcal{B}(u,u)=f,\quad u(0)=u_0. \tag{2.1}$$

ただし，$\mathcal{A}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は非有界線形作用素で，ある $\lambda>0$ が存在して以下が成り立つ．

$$\langle\mathcal{A}u,u\rangle\geq\lambda\|u\|^2,\quad\forall u\in\mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.2}$$

[*2] 証明には，ある T で Ψ_T がコンパクトという条件で十分．

[*3] $\exists C>0$, s.t. $|u|\leq C|u|,\forall u\in V$.

さらに，双線形形式 $\mathcal{B}:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{H}$ は以下を満たし，

$$B(u,v)=B(v,u),\quad \forall u,v\in\mathcal{V}, \tag{2.3}$$
$$\langle B(u,u),u\rangle=0,\quad \forall u\in\mathcal{V}, \tag{2.4}$$

ある $c>0$ が存在して，以下が成り立つとする．

$$|\langle B(u,v),v\rangle|\le c\|u\|\|v\||v|,\quad \forall u,v\in\mathcal{V}. \tag{2.5}$$

また，任意の $u(0)\in\mathcal{H}$ に対して，(2.1) は一意な弱解を持つとし，$\mathcal{H}$ に拡張可能な 1-パラメータ半群 $\Psi_t:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ を生成するとする．さらに，*global attractor* $\mathscr{A}\subset\mathcal{V}$ が存在し，ある $R>0$ が存在して任意の $u_0\in\mathscr{A}$ に対して $\sup_{t\ge 0}|u(t)|\le R$ が成り立つとする．

Remark 2.2. 空間の包含関係は $\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{H}\subset\mathcal{V}'$.

Remark 2.3. *Lorenz63, 96,* トーラス上 2 次元 *Navier-Stokes* はこの仮定を満たす．有限次元の場合は *global attractor* の存在は他の仮定から導かれる．*global attractor* と有界性の証明には，*Remark 1.7* のエネルギー不等式を示せば良い．

Theorem 2.4 (初期値連続性/誤差発達 [5])**.** *Assumption 2.1* を仮定すると，ある $\beta\in\mathbb{R}$ が存在して以下が成り立つ．

$$|\Psi_h(v_0)-\Psi_h(w_0)|\le e^{\beta h}|v_0-w_0|,\quad \forall v_0\in\mathscr{A},h>0,w_0\in\mathcal{H}. \tag{2.6}$$

Proof. [5] □

Remark 2.5. 初期値は片方だけが *global attractor* $\mathscr{A}$ に入っているという条件だけが課せられている．これはデータ同化において，信号 $u_t\in\mathscr{A}$ の推定値 $\hat{u}_t$ が $\mathscr{A}$ に入っているとは限らない場合を想定している．

2.2 Lyapunov 関数とエネルギー原理

[2] は有限次元の model dynamics として，伊藤過程が時間離散化された Markov chain を考えている．特に，Section 2.5 では，model の Markov chain の Lyapunov 関数を通した有界性の評価を提案し，十分条件を model dynamics のエネルギー不等式と結び付けている．具体的な dynamics について不等式を導出している．

3 Lorenz63

$\sigma,b,r\in\mathbb{R}$ に対して，$r+a$ シフトした Lorenz63 を考える．

$$\frac{dx}{dt}=\sigma(y-x),$$
$$\frac{dy}{dt}=-\sigma x-y-xz,$$
$$\frac{dz}{dt}=xy-bz-b(r+\sigma).$$

これは $\mathcal{H}=\mathcal{V}=\mathbb{R}^3$ として，$u=(x,y,z)^\top$ に対して，(2.1) を用いて以下のように書ける．

$$\mathcal{A}=\begin{bmatrix}\sigma & -\sigma & 0\\ \sigma & 1 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -b(r+\sigma)\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(u,\tilde{u})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ x\tilde{z}+z\tilde{x}\\ -(x\tilde{y}+y\tilde{x})\end{bmatrix}.$$

以下，$\sigma>0,b>1,r>0$ とする．($\sigma=10,b=8/3,r=28$ はこれを満たす．)

Lemma 3.1. $\forall u,\tilde{u}\in\mathbb{R}^3$ で以下が成り立つ．

(1) $\langle\mathcal{A}u,u\rangle\geq|u|^2$.
(2) $\langle\mathcal{B}(u,u),u\rangle=0$.
(3) $\mathcal{B}(u,\tilde{u})=\mathcal{B}(\tilde{u},u)$.
(4) $|\mathcal{B}(u,\tilde{u})|\leq 2^{-1}|u||u|$.

Proof. $\langle\mathcal{A}u,u\rangle=\sigma x^2+y^2+bz^2\geq|u|^2$，$(y^2+\tilde{y}^2)(z^2+\tilde{z}^2)\geq(y\tilde{y}+z\tilde{z})$. □

Lemma 3.2. $K=\frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}$ とおく．

(1) $\forall u_0\in\mathbb{R}^3$ に対して，全ての $t>0$ で定義された一意な解 $u\in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0};\mathbb{R}^3)$ が存在し，以下が成り立つ．

$$\limsup_{t\to\infty}|u(t)|^2\leq K.$$

(2) absorbing set $\mathfrak{B}_{abs}=B(0,K^{1/2})$ は *forward invariant*，つまり以下が成り立つ．

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs})\subset\mathfrak{B}_{abs},\quad\forall t\geq 0$$

(3) global attractor $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0\in\mathscr{A}$ で，以下が成り立つ．

$$|u(t)|^2\leq K,\quad\forall t\geq 0.$$

Proof. [3] 解の存在は速度ベクトル場の局所リプシッツ性から従う．$-\langle\mathcal{A}u+\mathcal{B}(u,u)-f,u\rangle\leq K-|u|^2$ を示す．Gronwall の不等式から従う． □

Theorem 3.3. $\beta=K^{1/2}-1$ とおく．$\forall v_0\in\mathscr{A}$，$w_0\in\mathbb{R}^3$，$t>0$ で以下が成り立つ．

$$|v(t)-w(t)|\leq e^{\beta t}|v_0-w_0|.$$

Proof. β の存在は，[5] からわかる．具体的な β は [3] を見よ． □

4 Lorenz96

$J\in\mathbb{N}$ に対して，J 変数の Lorenz96 モデルは 1 次元周期境界の領域を J 点格子で離散化した以下のような力学系．$u=(u_1,\cdots,u_J)^\top\in\mathbb{R}^J$,

$$\frac{du_j}{dt}=u_{j-1}(u_{j+1}-u_{j-2})-u_j+F,\quad\text{for } j=1,2,\cdots,J,$$
$$u_0=u_J,\quad u_{J+1}=u_1,\quad u_{-1}=u_{J-1}.$$

$F \in \mathbb{R}$ は外力パラメータ．

$\mathcal{H} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^J$ として，(2.1) の形で以下のように書ける．

$$\mathcal{A} = I, f = \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ F \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 u_J + u_2 \tilde{u}_J - \tilde{u}_J u_{J-1} - u_J \tilde{u}_{J-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{j-1} u_{j+1} + u_{j-1} \tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_{j-2} u_{j-1} - u_{j-2} \tilde{u}_{j-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{J-1} u_1 + u_{J-1} \tilde{u}_1 - \tilde{u}_{J-2} u_{J-1} - u_{J-2} \tilde{u}_{J-1} \end{bmatrix}.$$

Lemma 4.1 ([4])**.** $\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^J$ に対して，以下が成り立つ．

(1) $\langle \mathcal{A}u, u \rangle = |u|^2$.

(2) $\langle \mathcal{B}(u, u), u \rangle = 0$.

(3) $\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \mathcal{B}(\tilde{u}, u)$.

(4) $|\mathcal{B}(u, \tilde{u})| \leq 2|u||\tilde{u}|$.

(5) $2 \langle \mathcal{B}(u, \tilde{u}), u \rangle = - \langle \mathcal{B}(u, u), \tilde{u} \rangle$.

Lemma 4.2 ([4])**.** $K = 2JF^2$ とおく．

(1) $\forall u_0 \in \mathbb{R}^J$ に対して，全ての $t > 0$ で定義された一意な解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^J)$ が存在し，以下が成り立つ．

$$\limsup_{t \to \infty} |u(t)|^2 \leq K.$$

(2) absorbing set $\mathfrak{B}_{abs} = B(0, K^{1/2})$ は *forward invariant*，つまり以下が成り立つ．

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs}) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq 0$$

(3) global attractor $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0 \in \mathscr{A}$ で，以下が成り立つ．

$$|u(t)|^2 \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Proof. [4] □

Theorem 4.3. $\beta = K^{1/2} - 1$ とする．$\forall v_0 \in \mathscr{A}$，$w_0 \in \mathbb{R}^J$，$t > 0$ で以下が成り立つ．

$$|v(t) - w(t)| \leq e^{\beta t} |v_0 - w_0|.$$

Proof. β の存在は，[5] からわかる．具体的な β は [4] を見よ． □

5 Notations

[6, 7, 3]. $\Omega = [0, L]^n$ $(n = 2, 3)$ とおく．

(1) 可積分関数の空間 X に対して

$$\dot{X} = \{\varphi \in X \mid \int_\Omega \varphi(x)dx = 0\}$$

と書く．

(2) $\mathscr{V} = \{\varphi \mid \varphi$ は Ω 上の三角多項式$, \nabla \cdot \varphi = 0, \int_\Omega \varphi dx = 0\}$ とし，

$$\mathcal{H} = \overline{\mathscr{V}}^{L^2}, \mathcal{V} = \overline{\mathscr{V}}^{H^1}$$

とする．$\mathcal{H}^\perp = \{\nabla p \mid p \in H^1(\Omega)\}$ が成り立つ．

(3) Leray-Helmholtz 射影と呼ばれる L^2 直交射影 $P_\sigma : \dot{L}^2(\Omega)^n \to \mathcal{H}$ を用いて，Stokes 作用素

$$A = -P_\sigma \triangle, \quad D(A) = (H^2(\Omega))^n \cap \mathcal{V}$$

を定める ($n = 2, 3$)．周期境界条件の場合には，$A = -\triangle|_{D(A)}$ となり，自己共役正作用素となる．さらに，A^{-1} がコンパクトとなる．このため，固有値の列 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2, \ldots, \lambda_j \to \infty$ と $\mathcal{H}$ で正規直交な $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ が存在し，$Aw_j = \lambda_j w_j$ が成り立つ．

(4) L^2 内積とノルムをそれぞれ $\langle\cdot,\cdot\rangle$，$|\cdot|$ と書く．Poincaré の不等式からある $c > 0$ が存在し

$$\begin{aligned} c|Aw| &\leq \|w\|_{H^2} \leq c^{-1}|Aw|, \quad \forall w \in D(A), \\ c|A^{1/2}w| &\leq \|w\|_{H^1} \leq c^{-1}|A^{1/2}w|, \quad \forall w \in V \end{aligned}$$

が成り立ち，$V = D(A^{1/2})$ もわかる．$((\cdot,\cdot)) = \left\langle A^{1/2}\cdot, A^{1/2}\cdot\right\rangle$，$\|\cdot\| = |A^{1/2}\cdot|$ と書くとそれぞれ $\mathcal{V}$ の内積とノルムになる．

6　2 次元 Navier-Stokes

$L > 0$，$\Omega = [0, L]^2$ 上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式を $\mathcal{H}$ で考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\triangle u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho_1}\nabla p = f.$$

$\mathcal{A} = A$ とする．

次に双線形形式 $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ を

$$B(u, v) = P_\sigma[(u \cdot \nabla)v]$$

で与え，対称な双線形形式 $\mathcal{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ を

$$\mathcal{B}(u, v) = \frac{1}{2}[B(u, v) + B(v, u)] \tag{6.1}$$

で定める．

2 次元 Navier-Stokes 方程式は次のように表せる．

$$\frac{du}{dt} + \nu\mathcal{A}u + \mathcal{B}(u, u) = f, \tag{6.2}$$

ただし，外力は $f \in \mathcal{H}$ とする[*4]．

解の存在は Theorem 2.1 in [1, p.108].

[*4] もしくは f の勾配部分 $f - P_\sigma f$ を圧力勾配 ∇p に加えて $P_\sigma f$ を改めて f とおく．

Theorem 6.1. $u_0, f \in \mathcal{H}$ とする．このとき，(6.2) の一意な解が存在し以下を満たす.

$$u \in C([0,T];\mathcal{H}) \cap L^2((0,T);\mathcal{V}), \quad \forall T > 0,$$

また，$t > 0$ について，$u(t) \in D(A)$ は解析的であり，$\mathcal{H} \ni u_0 \mapsto u(t) \in D(A)$ は連続[*5]．さらに，$u_0 \in \mathcal{V}$ のとき

$$u \in C([0,T];\mathcal{V}) \cap L^2((0,T);D(A)), \quad \forall T > 0$$

が成り立つ.

Lemma 6.2 (A について)**.**

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq \lambda_1 \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{V} \tag{6.3}$$

が成り立つ.

Lemma 6.3 ($\mathcal{B}$ の評価)**.** 任意の $u, v \in \mathcal{V}$ について以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(v,u)$.
(2) $\langle \mathcal{B}(u,u), u \rangle = 0$.
(3) $|\langle \mathcal{B}(u,v), v \rangle| \leq \exists c \|u\| \|v\| |v|$.

ただし，$c > 0$ は $\mathcal{B}$ にのみ依存.

Proof. まず，[3] から B について以下が成り立つ.

i) $\langle B(u,v), v \rangle = 0, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$.
ii) $\langle B(u,v), w \rangle = \langle B(u,w), v \rangle, \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}$.
iii) $|\langle B(u,v), w \rangle| \leq \exists c |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| |w|^{1/2} \|w\|^{1/2}, \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}$.

(1), (2) は明らか.

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{B}(u,v), v \rangle| &\leq \frac{1}{2}[|\langle B(u,v), v \rangle| + |\langle B(v,u), v \rangle|] \leq 0 + \frac{c}{2}|v|^{1/2}\|v\|^{1/2}\|u\||v|^{1/2}\|v\|^{1/2} \\ &= \frac{c}{2}\|u\|\|v\||v|. \end{aligned}$$

2 つ目の不等式では i) と iii) を用いた. □

Lemma 6.4. 以下のエネルギー不等式が成り立つ.

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{|f|^2}{\nu^2\lambda_1^2}(1 - e^{-\nu\lambda_1 t}). \tag{6.4}$$

また，ある $\rho_1 > 0$ が存在して $\mathcal{B}_1 = B_{\mathcal{V}}(0, \rho_1)$ は $\mathcal{V}$ での有界な absorbing set であるので，Ψ_t の $\mathcal{H}$ での一様コンパクト性が従う．これより，global attractor の存在もわかる.

Lemma 6.5 ([3])**.** $K = \frac{|f|^2}{\nu^2\lambda_1}$ とする．*global attractor* $\mathscr{A}$ を (1.1) で定めると，$\forall u_0 \in \mathscr{A}$ で，以下が成り立つ.

$$\|u(t)\|^2 \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

[*5] 半群 $\Psi_t : \mathcal{H} \ni u_0 \mapsto u(t) \in D(A)$ が定義できる.

以上から $\mathbb{T}^2$ 上 Navier-Stokes 方程式は基本の仮定を満たすので $\mathcal{H}$ のノルム (L^2 ノルム $|\cdot|$) に対して，Lemma 2.4 の結果が従う．[3] は $\mathcal{V}$ のノルム ($\|\cdot\|$) に対して同様の評価をしている．

Theorem 6.6. *$\forall v_0 \in \mathscr{A}$，$w_0 \in \mathcal{V}$ を初期値とする $[0,T]$ での (6.2) の解をそれぞれ $v(t), w(t)$ と書く．ある無次元の定数 C_1 と $\beta = C_1 \nu^{-5/3} \lambda_1^{-1/3} K^{4/3}$ に対し，$t \in [0,T]$ で以下が成り立つ．*

$$\|v(t) - w(t)\| \le e^{\beta t} \|v_0 - w_0\|.$$

7 3 次元正則化 Navier-Stokes

$L > 0$ とし周期境界の $\Omega = [0,L]^3$ 上 3 次元 Camassa-Holm(Navier-Stokes-α) 方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_0^2 u - \alpha_1^2 \triangle u) - \nu(\alpha_0^2 u - \alpha_1^2 \triangle u) - u \times (\nabla \times (\alpha_0^2 u - \alpha_1^2 \triangle u)) + \frac{1}{\rho_1} \nabla p = f, \\
&\nabla \cdot u = 0, \\
&u(x,0) = u_0(x).
\end{aligned}$$

ただし，$\frac{p}{\rho_1} = \frac{\pi}{\rho_0} + \alpha_0^2 |u|^2 - \alpha_1^2 (u \cdot \triangle u)$ は修正圧力であり，圧力 π，粘性係数 $\nu > 0$，密度 $\rho_0 > 0$，f は外力を表す．$\alpha_0 > 0$ と $\alpha_1 \ge 0$ はスケールパラメータであり $\alpha_0 = 1$，$\alpha_1 = 0$ のとき，3 次元 Navier-Stokes 方程式に一致する．f は時間に依存しないと仮定する．また，$\int_\Omega u dx = 0$ となるように，$\int_\Omega u_0 dx = \int_\Omega f dx = 0$ を仮定する．

また，$((\cdot,\cdot))$ を $\mathcal{V}$ に制限すると $\alpha_1 > 0$ のとき以下の H^1 内積と同値になる．

$$[u,v] = \alpha_0^2 \langle u,v \rangle + \alpha_1^2 ((u,v)), \quad u,v \in \mathcal{V}.$$

次に双線形形式 $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ を

$$B(u,v) = P_\sigma[(u \cdot \nabla) v], \quad u,v \in V$$

で与え，$B(u)v = B(u,v), u,v \in \mathcal{V}$ とおく．さらに，

$$\tilde{B}(u,v) = -P_\sigma(u \times (\nabla \times v)), \quad u,v \in V$$

3 次元 Camassa-Holm 方程式は ODE として以下のように表せる．

$$\frac{d}{dt}(\alpha_0^2 u + \alpha_1^2 A u) + \nu A(\alpha_0^2 u + \alpha_1^2 A u) + \tilde{B}(u, \alpha_0^2 u + \alpha_1^2 A u) = f, \tag{7.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{7.2}$$

ただし，$f \in \mathcal{H}$ を仮定する．

Lemma 7.1 ([7])**.** *(1) $\langle B(u,v), w \rangle = -\langle B(u,w), v \rangle$.*
(2) $\tilde{B}(u,v) = (B(v) - B^*(v))u, \quad \forall u,v \in V$.

Definition 7.2 (Regular solution)**.** $f \in \mathcal{H}$, $T > 0$ とする．$u \in C([0,T];\mathcal{V}) \cap L^2([0,T];D(A))$, $\frac{du}{dt} \in L^2([0,T];\mathcal{H})$ が以下を満たすとき (7.1) の *regualr solution* と呼ばれる．

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\alpha_0^2 u + \alpha_1^2 A u), w \right\rangle_{D(A)'} + \nu \left\langle A(\alpha_0^2 u + \alpha_1^2 A u), w \right\rangle_{D(A)'} + \left\langle \tilde{B}(u, \alpha_0^2 u + \alpha_1^2 A u), w \right\rangle_{D(A)'} = \langle f, w \rangle,$$

$\forall w \in D(A)$, $a.e.\ t \in [0,T)$.

Theorem 7.3 ([7])**.** *$f \in \mathcal{H}$, $u_0 \in \mathcal{V}$ とする．任意の $T > 0$ に対して，(7.1) の regular solution u が一意に存在し，以下を満たす．*

(1) $u \in L^\infty_{loc}((0,T]; H^3(\Omega))$.
(2) $\nu, \alpha_0, \alpha_1, f$ にのみ依存する定数 R_k $(k = 0,1,2,3)$ が存在し，

$$\limsup_{t\to\infty}(\alpha_0^2|A^{k/2}u|^2 + \alpha_1^2|A^{\frac{k+1}{2}}u|^2) = R_k^2$$

が成り立つ．

Corollary 7.4. *(7.1) の解 u に対して，$\Psi_t u_0 = u(t)$ とおくと Ψ_t はコンパクトな半群となる．また，$\mathfrak{B}_{abs} = \{u \in \mathcal{V} \mid \|u\| \le \frac{R_0}{\alpha_1}\}$ とおくと，V での absorbing set となる．(1.1) で $\mathscr{A}$ を定めるとコンパクトとなる．*

Theorem 7.5. *$f \in \mathcal{H}$, $T > 0$ とする．$v_0 \in \mathscr{A}$，$w_0 \in \mathcal{V}$ を初期値とする (7.1) の $[0,T)$ での解をそれぞれ $v(t), w(t)$ と書き，$\delta u(t) = v(t) - w(t)$ とおく．ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在し，$t \in [0,T)$ で以下が成り立つ．*

$$(\alpha_0^2|\delta u(t)|^2 + \alpha_1^2\|\delta u(t)\|^2) \le e^{\beta t}(\alpha_0^2|\delta u(0)|^2 + \alpha_1^2\|\delta u(0)\|^2).$$

Proof. [7] の p.20 にある regular solution の一意性の議論から従う． □

Remark 7.6. 初期値の条件 $w_0 \in \mathcal{V}$ に注意．

付録 A　Gronwall の不等式

Lemma 付録 A.1. *$a, b, u_0 \in \mathbb{R}$ に対して，$u \in C^1(\mathbb{R}_{\ge 0}; \mathbb{R})$ が*

$$\frac{du}{dt} \le au + b, u(0) = u_0$$

を満たすとする．このとき，以下が成り立つ．

$$u(t) \le e^{at}u_0 + \frac{b}{a}(e^{at} - 1).$$

参考文献

[1] Roger Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Springer New York, NY, 1997.

[2] Xin T Tong, Andrew J Majda, and David Kelly. Nonlinear stability and ergodicity of ensemble based kalman filters. *Nonlinearity*, 29(2):657, jan 2016.

[3] Kevin Hayden, Eric Olson, and Edriss S. Titi. Discrete data assimilation in the lorenz and 2d navier-stokes equations. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 240(18):1416–1425, SEP 1 2011.

[4] K. J. H. Law, D. Sanz-Alonso, A. Shukla, and A. M. Stuart. Filter accuracy for the lorenz 96 model: Fixed versus adaptive observation operators. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 325:1–13, JUN 15 2016.

[5] D. T. B. Kelly, K. J. H. Law, and A. M. Stuart. Well-posedness and accuracy of the ensemble kalman filter in discrete and continuous time. *NONLINEARITY*, 27(10):2579–2603, OCT 2014.

[6] P. Constantin and C. Foias. *Navier-Stokes Equations*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1988.

[7] C. Foias, D. D. Holm, and E. S. Titi. The three dimensional viscous camassa-holm equations, and their relation to the navier-stokes equations and turbulence theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 14(1), 2001.

[8] Andrew J. Majda and John Harlim. *Filtering Complex Turbulent Systems*. Cambridge University Press, 2012.

[9] K. J. H. Law, A. M. Stuart, and K. C. Zygalakis. *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, 2015.

[10] Kody Law, Abhishek Shukla, and Andrew Stuart. Analysis of the 3dvar filter for the partially observed lorenz'63 model. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 34(3, SI):1061–1078, MAR 2014.

[11] J. L. Guermond, J. T. Oden, and S. Prudhomme. Mathematical perspectives on large eddy simulation models for turbulent flows. *JOURNAL OF MATHEMATICAL FLUID MECHANICS*, 6(2):194–248, JUN 2004.

[12] Don A Jones and Edriss S Titi. On the number of determining nodes for the 2d navier-stokes equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168(1):72–88, 1992.