Lions 1992

竹田航太

2022 年 9 月 18 日

目次

概要

Lions らによる “A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: a statistical mechanics description”[1] についてのノート．有界領域上の 2 次元 Euler 方程式の定常解を点渦統計理論を用いて調べている．平均場近似の定式化と平均場方程式の導出についてまとめる．

1 設定

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかで有界な領域とする．Ω 上で N 点渦 $x_1, \ldots, x_N$ の循環が全て $\Gamma > 0$ である場合を考える．N 点渦に対して，関数 $U : \Omega^N \to \mathbb{R}$ を

$$U(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N} G(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} g(x_i, x_i)$$

で定める．ただし, Ω (resp. $\mathbb{R}^2$) 上の Poisson 方程式[*1]の Green 関数を $G(x, y)$ (resp. $G_0(x, y)$) と書き，$g \coloneqq G - G_0$ とした．これを用いて，N 点渦系のハミルトニアンを $\Gamma^2 U$ と書くことができる．さらに，逆温度パラメータ $\beta \in \mathbb{R}$ に対して，Gibbs 測度 $\mu^{N,\Gamma,\beta} \in \mathcal{M}_1(\Omega^N)$ を

$$\mu^{N,\Gamma,\beta}(dx_1, \ldots, dx_N) = Z_{\Gamma,\beta}(N)^{-1} e^{-\beta \Gamma^2 U} \, dx_1 \ldots dx_N$$

で定める．

[*1] Dhiriclet-0 条件.

Lemma 1.1. $Z_{\Gamma,\beta}(N)<\infty$ となる必要十分条件は

$$\beta\in\left(-\frac{8\pi}{\Gamma^2N},+\infty\right) \tag{1.1}$$

である．さらにこのとき，ある $C=C(\beta\Gamma,N\Gamma,|\Omega|^N)>0$ が存在して，次の不等式が成り立つ．

$$Z_{\Gamma,\beta}(N)\leq C^N \tag{1.2}$$

この結果から $\beta\Gamma,N\Gamma$ を固定すると分配関数 $Z_{\Gamma,\beta}(N)$ と Gibbs 測度 $\mu^{N,\Gamma,\beta}$ は N のみに依存する．特に正規化逆温度 $\tilde{\beta}\in(-8\pi,\infty)$ を固定して，N に対して

$$\Gamma=\frac{1}{N},\quad \beta=\tilde{\beta}N \tag{1.3}$$

ととれば (1.1) を満たし，$\beta\Gamma,N\Gamma$ が固定される．このスケーリング (1.3) の下で分配関数と Gibbs 測度をそれぞれ $Z(N),\mu^N$ と書き $N\to\infty$ の極限について調べる．

2　平均場方程式

2.1　発見的議論

$j=1,\ldots,N$ に対して，j 点渦の相関関数（同時分布）ρ_j^N を

$$\rho_j^N(x_1,\ldots,x_j)=\int_{\Omega^{N-j}}\mu^N(x_1,\ldots,x_N)\,dx_{j+1}\ldots dx_N \tag{2.1}$$

で定めると，簡単な式変形から

$$\rho_j^N(X_j)=\frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}U(X_j)}}{Z(N)}\int_{\Omega^{N-j}}e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}W(X_j|X_{N-j})}e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}U(X_{N-j})}\,dX_{N-j} \tag{2.2}$$

と書ける．ただし，$X_j=\{x_1,\ldots,x_j\},X_{N-j}=\{x_{j+1},\ldots,x_N\}$ として

$$W(X_j|X_{N-j})=\sum_{x\in X_j}\sum_{y\in X_{N-j}}G(x,y) \tag{2.3}$$

とおいた．ρ_j^N の j を固定した $N\to$ の極限を考えるため，さらに

$$\begin{aligned}\rho_j^N(X_j)=&\frac{Z(N-j)}{Z(N)}e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}U(X_j)}\\ &\prod_{i=1}^{j}\int e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}\sum_{k=N-j}^{N}V(x_i,x_k)}e^{-\frac{j\tilde{\beta}}{N(N-j)}U(X_{N-j})}\mu^{N-j}(dX_{N-j})\end{aligned} \tag{2.4}$$

と書き直す．

ここで，平均場近似を考える．次の点渦に関する経験測度

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{x_j}(dx)$$

がある測度 $\rho \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ に弱収束すると仮定したとき，同時分布は積測度に弱収束する．

$$\rho_j^N \to \rho^{\otimes j}.$$

という状況を予想する．このとき，(2.4) から ρ は次の方程式を満たす必要がある．

$$\rho(x) = Z^{-1}e^{-\tilde{\beta}G*\rho}e^{\frac{1}{2}\tilde{\beta}(\rho,G*\rho)} \tag{2.5}$$

ただし，$Z \coloneqq \lim_{N\to\infty}\frac{Z(N)}{Z(N-1)}$ とおいた．さらに，(2.5) から

$$Ze^{-\frac{1}{2}\tilde{\beta}(\rho,G*\rho)} = \int_{\Omega} e^{-\tilde{\beta}G*\rho}\,dx$$

が成り立つことがわかる．

2.2 定理

Theorem 2.1. 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して ρ_j^N の弱集積点 $d\rho_j \in \mathcal{M}_1(\Omega^j)$ が存在するとする[*2]．このとき，$d\rho_j$ は *Lebesgue* 測度に絶対連続である．（密度関数を ρ_j と書く）

$$d\rho_j(X_j) = \rho_j(X_j)\,dX_j.$$

また，ある $L_1(\Omega)$ 上の弱位相についての *Borel* 確率測度 ν が存在して，

$$\rho_j(x_1,\ldots,x_j) = \int_{L_1(\Omega)}\prod_{k=1}^{j}\rho(x_k)\,\nu(d\rho) \tag{2.6}$$

が成り立つ．さらに，$\tilde{\beta} > 0$（*resp.* $\tilde{\beta} < 0$）のとき，ν は次の自由エネルギー汎関数の $\rho \in L_\infty(\Omega)\cap\mathcal{M}_1(\Omega)$ での最小化点（*resp.* 最大化点）に集積する．

$$f(\rho) = \frac{1}{\tilde{\beta}}\int_{\Omega}\rho\log\rho\,dx + \frac{1}{2}(\rho, G*\rho). \tag{2.7}$$

Remark 2.2. $\tilde{\beta} > 0$ のときは *(2.7)* の一意な解 ρ が存在し，$\rho_j^N \to \rho^{\otimes j}$ が部分列を取らずに成り立つ．$-8\pi < \tilde{\beta} < 0$ のときは，一般の Ω で *(2.7)* の解が一意とは限らないが Ω が単位円盤上のときは一意な解が存在し，$\rho_j^N \to \rho^{\otimes j}$ が成り立つ．このように，積測度で欠けることを *“propagation of chaos”* と呼ぶ．

[*2] 部分列が弱収束するという意味．

Remark 2.3. さらに，流れ関数 $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$-\triangle\psi = \rho, \psi|_{\partial\Omega} = 0$$

を満たすように取ると，*(2.5)* から次の *Liouville* 方程式と呼ばれる平均場方程式が成り立つ．

$$-\triangle\psi = \widetilde{Z}^{-1} e^{-\tilde{\beta}\psi}, \tag{2.8}$$

$$\widetilde{Z} = \int_\Omega e^{-\tilde{\beta}\psi}\, dx, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.9}$$

Remark 2.4. $u = (-\partial_y\psi, \partial_x\psi)$ とおくと，これは 2 次元 *Euler* 方程式の定常流となる．

参考文献

[1] Emanuele Caglioti, Pierre L. Lions, Carlo Marchioro, and Mario Pulvirenti. A special class of stationary flows for two-dimensional euler equations: a statistical mechanics description. *Communications in Mathematical physics*, 143(3):501–525, 1992.