

DA と Dynamical Model

竹田航太

2023 年 3 月 14 日

目次

1	はじめに	1
1.1	これまでの流れ	1
1.2	準備	2
2	基本の仮定	3
3	Lorenz63	4
4	Lorenz96	6
5	2 次元 Navier-Stokes	7
6	3 次元正則化 Navier-Stokes	7
付録 A	Gronwall の不等式	7

1 はじめに

データ同化を数学的に扱う際のモデルの解析について整理する．まずは気象で用いられる方程式に絞る．データ同化の文脈において求められるモデルの解析は well-posed 性に加えて, global attractor の存在や初期誤差の発達レートの評価である．無限次元力学系の理論 [1] に基づく．また, [2] のように, Lyapunov 関数を用いた評価・解析も基本的である．

1.1 これまでの流れ

[3, Hayden 2011] は Lorenz63(L63) と 2 次元 Navier-Stokes(2dNS) に対して解の存在から誤差発達までの結果を示した．[4, Law 2016] は Lorenz96(L96) に対する同様の解析を行なった．

どちらも対象の方程式を以下のような形の Hilbert 空間上の ODE として表現した.

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u, u) = f.$$

[5, Kelly 2014] は \mathcal{A}, \mathcal{B} に条件を設けて一般的な形で誤差発達について議論した.

1.2 準備

Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \| \cdot \|)$ を考える.

Definition 1.1 (自励系 ODE と力学系). 自励系^{*1}の ODE を考える.

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad u(0) = u_0.$$

この ODE が任意の $u_0 \in \mathcal{H}$ に対して, 時間大域的な一意解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathcal{H})$ を持つとき, 1 パラメータ半群 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が

$$\Psi(t, u_0) = u(t)$$

で定義できる. $\Psi_t(\cdot) = \Psi(t, \cdot)$ と書き, 元の ODE や 1 パラメータ半群を力学系と呼ぶ.

Definition 1.2. $B \subset \mathcal{H}$ が半群 Ψ_t について *forward invariant* であるとは

$$\Psi_t(B) \subset B, \quad \forall t \geq 0$$

が成り立つことを言う.

Definition 1.3. 半群 $(\Psi_t)_{t \geq 0}$ の *attractor* とは以下を満たす集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$.

- (1) $\Psi_t \mathcal{A} = \mathcal{A}$.
- (2) ある近傍 U が存在し, $\forall u_0 \in U$ で $d(\Psi_t u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$.

また, *attractor* \mathcal{A} がコンパクトであり, 任意の有界集合 B に対して, B の点を一様に *attract* するとき, \mathcal{A} は *global attractor* と呼ばれる.

Definition 1.4 (absorbing set). 力学系 $\Psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ が有界な *absorbing set* \mathfrak{B}_{abs} を持つとは, 任意の $R > 0$ に対して, ある $T = T(R) > 0$ が存在して

$$\Psi_t(B(0, R)) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq T$$

が成り立つことを言う.

^{*1} 速度ベクトル場が時間に依存しない.

Theorem 1.5. 半群 $(\Psi_t)_{t \geq 0}$ が十分大きな t で一様コンパクト^{*2}, つまり, 任意の有界集合 B に対して, ある $T = T(B) > 0$ が存在し $\cup_{t \geq T} \Psi_t B$ が \mathcal{H} で相対コンパクト, とする. また, 開集合 $U \subset \mathcal{H}$ とその上での *absorbing set* \mathfrak{B}_{abs} が存在するとする. このとき, *global attractor* を

$$\mathcal{A} = \cap_{T \geq 0} \overline{\cup_{t \geq T} \Psi_t(\mathfrak{B}_{abs})} \quad (1.1)$$

で定めることができ, U で包含関係について極大となる.

Proof. [1] □

Remark 1.6. Ψ_t に関する一様コンパクト性の条件は V での有界な *absorbing set* の存在と V の H への埋め込みがコンパクトであれば満たされる.

Remark 1.7. 有界な *absorbing set* の存在は以下の形の *a priori estimate* が得られるとわかる.

$$|u(t)|^2 \leq e^{-\alpha t} |u_0|^2 + R^2(1 - e^{-\alpha t})$$

ただし, $\alpha, R > 0$ は u_0 によらない定数. これより, 任意の $R_1 \geq R$ について, $|u_0| \leq R_1$ のとき,

$$|u(t)|^2 \leq e^{-\alpha t} R_1^2 + R^2(1 - e^{-\alpha t}) = R^2 + (R_1^2 - R^2)e^{-\alpha t} \leq R_1^2$$

となるので, H における閉球 $B_H(0, R_1)$ は *forward invariant* である. また, $R_1 > R$ について, $B_H(0, R_1)$ は H で *absorbing set* になることもわかる.

2 基本の仮定

状態空間として Hilbert 空間 $(\mathcal{H}, |\cdot|)$ を考える.

Assumption 2.1. Banach 空間 $(\mathcal{V}, |\cdot|)$ を \mathcal{H} に連続的に埋め込めるとする^{*3}. 以下の形の力学系を仮定する.

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u, u) = f, \quad u(0) = u_0. \quad (2.1)$$

ただし, $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ は非有界線形作用素で, ある $\lambda > 0$ が存在して以下が成り立つ.

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq \lambda \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \quad (2.2)$$

さらに, $\mathcal{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$ は対称な双線形形式で以下を満たし,

$$\langle \mathcal{B}(u, u), u \rangle = 0, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \quad (2.3)$$

^{*2} 証明には, ある T で Ψ_T がコンパクトという条件で十分.

^{*3} $\exists C > 0$, s.t. $|u| \leq C|u|, \forall u \in V$.

ある $c > 0$ が存在して、以下が成り立つとする.

$$\langle B(u, v), v \rangle \leq c \|u\| \|v\| |v|, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}. \quad (2.4)$$

また、任意の $u(0) \in \mathcal{H}$ に対して、(2.1) は一意な弱解を持つとし、 \mathcal{H} に拡張可能な 1-パラメータ半群 $\Psi_t : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ を生成するとする. さらに、*global attractor* $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ が存在し、ある $R > 0$ が存在して任意の $u_0 \in \mathcal{A}$ に対して $\sup_{t \geq 0} |u(t)| \leq R$ が成り立つとする.

Remark 2.2. 空間の包含関係は $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$.

Remark 2.3. *Lorenz63, 96*, トーラス上 2 次元 *Navier-Stokes* はこの仮定を満たす.

Remark 2.4. 有限次元の場合は *global attractor* の存在は他の仮定から導かれる.

Remark 2.5. *global attractor* と有界性の証明には、*Remark 1.7* の *a priori estimate* を示せば良い.

Lemma 2.6 (初期値連続性/誤差発達 [5]). *Assumption 2.1* を仮定すると、ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して以下が成り立つ.

$$|\Psi_h(v_0) - \Psi_h(w_0)| \leq e^{\beta h} |v_0 - w_0|, \quad \forall v_0 \in \mathcal{A}, h > 0, w_0 \in \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

Proof. [5] □

Remark 2.7. 初期値は片方だけが *global attractor* \mathcal{A} に入っているという条件だけが課せられている. これはデータ同化において、信号 $u_t \in \mathcal{A}$ の推定値 \hat{u}_t が \mathcal{A} に入っているとは限らない場合を想定している.

3 Lorenz63

$\sigma, b, r \in \mathbb{R}$ に対して、 $r + a$ シフトした *Lorenz63* を考える.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -\sigma x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz - b(r + \sigma). \end{aligned}$$

これは $\mathcal{H} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ として, $u = (x, y, z)^\top$ に対して, (2.1) を用いて以下のように書ける.

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \sigma & -\sigma & 0 \\ \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b(r + \sigma) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ x\tilde{z} + z\tilde{x} \\ -(x\tilde{y} + y\tilde{x}) \end{bmatrix}.$$

以下, $\sigma > 0, b > 1, r > 0$ とする. ($\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ はこれを満たす.)

Lemma 3.1. $\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^3$ で以下が成り立つ.

- (1) $\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq |u|^2$.
- (2) $\langle \mathcal{B}(u, u), u \rangle = 0$.
- (3) $\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \mathcal{B}(\tilde{u}, u)$.
- (4) $|\mathcal{B}(u, \tilde{u})| \leq 2^{-1}|u||\tilde{u}|$.

Proof. $\langle \mathcal{A}u, u \rangle = \sigma x^2 + y^2 + bz^2 \geq |u|^2$, $(y^2 + \tilde{y}^2)(z^2 + \tilde{z}^2) \geq (y\tilde{y} + z\tilde{z})$. □

Lemma 3.2. $K = \frac{b^2(r+\sigma)^2}{4(b-1)}$ とおく.

- (1) $\forall u_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 全ての $t > 0$ で定義された一意な解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^3)$ が存在し, 以下が成り立つ.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)|^2 \leq K.$$

- (2) absorbing set $\mathfrak{B}_{abs} = B(0, K^{1/2})$ は forward invariant, つまり以下が成り立つ.

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs}) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq 0$$

- (3) global attractor \mathcal{A} を (1.1) で定めると, $\forall u_0 \in \mathcal{A}$ で, 以下が成り立つ.

$$|u(t)|^2 \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Proof. [3] 解の存在は速度ベクトル場の局所リプシッツ性から従う. $\langle \mathcal{A}u + \mathcal{B}(u, u) - f, u \rangle \leq K - |u|^2$ を示す. Gronwall の不等式から従う. □

Theorem 3.3. $\beta = 2(K^{1/2} - 1)$ とおく. $\forall v_0 \in \mathcal{A}, w_0 \in \mathbb{R}^3, t > 0$ で以下が成り立つ.

$$|v(t) - w(t)| \leq e^{\beta t} |v_0 - w_0|.$$

Proof. β の存在は, [5] からわかる. 具体的な β は [3] を見よ. □

4 Lorenz96

$J \in \mathbb{N}$ に対して, J 変数の Lorenz96 モデルは 1 次元周期境界の領域を J 点格子で離散化した以下のような力学系. $u = (u_1, \dots, u_J)^\top \in \mathbb{R}^J$,

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= u_{j-1}(u_{j+1} - u_{j-2}) - u_j + F, \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, J, \\ u_0 &= u_J, \quad u_{J+1} = u_1, \quad u_{-1} = u_{J-1}. \end{aligned}$$

$F \in \mathbb{R}$ は外力パラメータ.

$\mathcal{H} = \mathcal{V} = \mathbb{R}^J$ として, (2.1) の形で以下のように書ける.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= I, f = \begin{bmatrix} F \\ \vdots \\ F \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(u, \tilde{u}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 u_J + u_2 \tilde{u}_J - \tilde{u}_J u_{J-1} - u_J \tilde{u}_{J-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{j-1} u_{j+1} + u_{j-1} \tilde{u}_{j+1} - \tilde{u}_{j-2} u_{j-1} - u_{j-2} \tilde{u}_{j-1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{J-1} u_1 + u_{J-1} \tilde{u}_1 - \tilde{u}_{J-2} u_{J-1} - u_{J-2} \tilde{u}_{J-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lemma 4.1. $\forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}^J$ に対して, 以下が成り立つ.

- (1) $\langle \mathcal{A}u, u \rangle = |u|^2$.
- (2) $\langle \mathcal{B}(u, u), u \rangle$.
- (3) $\mathcal{B}(u, \tilde{u}) = \mathcal{B}(\tilde{u}, u)$.
- (4) $|\mathcal{B}(u, \tilde{u})| \leq 2|u||\tilde{u}|$.
- (5) $2\langle \mathcal{B}(u, \tilde{u}), u \rangle = \langle \mathcal{B}(u, u), \tilde{u} \rangle$.

Lemma 4.2. $K = 2JF^2$ とおく.

- (1) $\forall u_0 \in \mathbb{R}^J$ に対して, 全ての $t > 0$ で定義された一意な解 $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}^J)$ が存在し, 以下が成り立つ.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)|^2 \leq K.$$

- (2) *absorbing set* $\mathfrak{B}_{abs} = B(0, K^{1/2})$ は *forward invariant*, つまり以下が成り立つ.

$$\Psi_t(\mathfrak{B}_{abs}) \subset \mathfrak{B}_{abs}, \quad \forall t \geq 0$$

- (3) *global attractor* \mathcal{A} を (1.1) で定めると, $\forall u_0 \in \mathcal{A}$ で, 以下が成り立つ.

$$|u(t)|^2 \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Proof. [4] □

Theorem 4.3. $\beta = 2(K^{1/2} - 1)$ とする. $\forall v_0 \in \mathcal{A}, w_0 \in \mathbb{R}^J, t > 0$ で以下が成り立つ.

$$|v(t) - w(t)| \leq e^{\beta t} |v_0 - w_0|.$$

Proof. β の存在は, [5] からわかる. 具体的な β は [4] を見よ. □

5 2次元 Navier-Stokes

[1, 3]

6 3次元正則化 Navier-Stokes

[6]

付録 A Gronwall の不等式

Lemma 付録 A.1. $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $u \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R})$ が

$$\frac{du}{dt} \leq au + b, u(0) = u_0$$

を満たすとする. このとき, 以下が成り立つ.

$$u(t) \leq e^{at} u_0 + \frac{b}{a} (e^{at} - 1).$$

参考文献

- [1] Roger Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer New York, NY, 1997.
- [2] Xin T Tong, Andrew J Majda, and David Kelly. Nonlinear stability and ergodicity of ensemble based kalman filters. *Nonlinearity*, 29(2):657, jan 2016.
- [3] Kevin Hayden, Eric Olson, and Edriss S. Titi. Discrete data assimilation in the lorenz and 2d navier-stokes equations. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 240(18):1416–1425, SEP 1 2011.
- [4] K. J. H. Law, D. Sanz-Alonso, A. Shukla, and A. M. Stuart. Filter accuracy for the lorenz 96 model: Fixed versus adaptive observation operators. *PHYSICA D-NONLINEAR PHENOMENA*, 325:1–13, JUN 15 2016.

- [5] D. T. B. Kelly, K. J. H. Law, and A. M. Stuart. Well-posedness and accuracy of the ensemble kalman filter in discrete and continuous time. *NONLINEARITY*, 27(10):2579–2603, OCT 2014.
- [6] C. Foias, D. D. Holm, and E. S. Titi. The three dimensional viscous camassa-holm equations, and their relation to the navier-stokes equations and turbulence theory. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 14(1), 2001.
- [7] Andrew J. Majda and John Harlim. *Filtering Complex Turbulent Systems*. Cambridge University Press, 2012.
- [8] K. J. H. Law, A. M. Stuart, and K. C. Zygalakis. *Data Assimilation: A Mathematical Introduction*. Springer, 2015.
- [9] Kody Law, Abhishek Shukla, and Andrew Stuart. Analysis of the 3dvar filter for the partially observed lorenz’63 model. *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*, 34(3, SI):1061–1078, MAR 2014.