N 点渦系

竹田航太

2021 年 12 月 1 日

目次

概要

非粘性非圧縮流体において渦度が delta 関数の線形和で表される系を点渦系と呼ぶ．ここではいくつかの領域における点渦系の Hamiltonian についてまとめる．

1　基礎的な問い

主に [1] の 1.3 による．N 点渦に対する基礎的な問いをまとめる．

(1) N 点渦系が完全可積分になる条件は？：点渦の強さ，領域に依存する．
(2) 完全可積分系では解は全時間で存在するか？準周期的/閉な解であるか？有限時間渦衝突は起きるか？
(3) どのような（固定/相対）平衡状態が存在するか？どのような性質を持つか？
(4) どの点渦問題が非可積分系となるか？可積分性が壊れるメカニズムはなにか？
(5) 与えられた N 点渦配置からどのような瞬間的流線パターンが得られるか？特にトポロジーはどのように遷移するか？
(6) 特定の N 点渦配置を得るために（離散・連続的）対称性はどのように利用できるか？
(7) KAM 理論を渦系に適用し物理的な結論を得られるか？どんな座標を取れば相空間の次元を下げ，一般渦問題に KAM 理論を適用できるか？
(8) どんな渦配置から幾何的位相が生じるか？それを計算できるか？物理的関係を見出せるか？
(9) N が大きい場合，N 点渦問題にどんな道具が使えるか．2 次元乱流が意味するものは何か？
(10) 2 次元から 3 次元渦問題への一般化

2 Preliminary

2.1 Notation

いくつか Notation をまとめる．$N \in \mathbb{N}$ が明らかな場合は省略する．

和の記号

- $\sum_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N$
- $\sum_{\beta\neq\alpha}^N = \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^N$
- $\sum_{\alpha\neq\beta} = \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha}^N$

ベクトル

- $(x, y)^\perp = (-y, x)$ と書く．2 次元での時計回り 90° 回転を表す．
- 2 次元の流れ関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して，回転を次のように定める．$\nabla \times \psi = \nabla^\perp \psi$

2.2 渦度場

3 次元の流れ場 $u \in \mathbb{R}^3$ から誘導される渦度は以下で与えられる．

$$\omega = \nabla \times u \tag{2.1}$$

非圧縮流体を扱うので

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ．

(2.1) の勾配と回転をとると次がわかる．

$$\nabla \cdot \omega = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla^2 u = -\nabla \times \omega \tag{2.4}$$

Theorem 2.1 (渦度 flux)**.** *(2.3) から閉曲面での渦度 flux の合計は 0*

Proof. (2.3) と発散定理から閉曲面 S とその外向き法ベクトル n，S で囲まれた領域 V として

$$\int_S \omega \cdot n dS = \int_V \nabla \cdot \omega dV = 0$$

□

2.3 Poison 方程式

一般のベクトル値関数に対して以下が成り立つ

Theorem 2.2 (Helmholtz/Hodge decomposition)**.** 任意の $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対して，$\exists \phi, \psi$ *s.t.*

$$u = u_\phi + u_\psi = \nabla\phi + \nabla \times \psi \tag{2.5}$$

流体の分野では ϕ を速度ポテンシャル，ψ を流れ関数と呼ぶ.

Remark 2.3. 渦なしの流れ $\nabla \times u_\phi = 0$ に対して，スカラーポテンシャル ϕ *s.t.* $u = \nabla\phi$ の存在がわかり，非圧縮の流れ $\nabla \cdot u_\psi = 0$ に対して，ベクトルポテンシャル ψ *s.t.* $u = \nabla \times \psi$ の存在がわかる.

今，非圧縮性の条件 (2.2) から以下を満たす流れ関数 ψ の存在が言える

$$u = \nabla \times \psi \tag{2.6}$$

(2.1) に代入して，非圧縮性から整理すると流れ関数は以下の Poison 方程式を満たす.

$$\nabla^2\psi = -\omega \tag{2.7}$$

Poison 方程式は Laplace 作用素の (全空間の)Green 関数を用いて

$$\psi(x) = \int G(x, z)\omega(z)dz \tag{2.8}$$

と表される.

2.4 Bio-Savart の法則

与えられた渦度 ω に対して (2.8) から流れ関数が定まり，それより誘導される速度場は $u_\omega = \nabla \times \psi$ より次を満たす

Theorem 2.4. 非圧縮流体において，与えられた ω に対して誘導される速度場 u_ω は次で与えられる.

$$u_\omega(x) = \nabla \times \int G(x, z)\omega(z)dz \tag{2.9}$$

$$= \int K(x - z)\omega(z)dz \tag{2.10}$$

ただし，*Bio-Savart Kernel* K は次で与えられる．

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\|x\|^2}(-y, x) & (in\ \mathbb{R}^2) \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|^3}\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} & (in\ \mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{2.11}$$

Remark 2.5. $\mathbb{R}^3$ の場合 *Bio-Savart* の法則はよく次のように表される．

$$u_\omega = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(x-z)\times\omega(z)}{\|x-z\|^3}dz \tag{2.12}$$

3　点渦

3.1　N 点渦系

$N \in \mathbb{N}$ とする．非粘性非圧縮 d 次元流体において以下のような渦度の分解を考える．

$$\omega(x) = \sum_{\alpha=1}^{N}\Gamma_\alpha\delta(x - x_\alpha)$$

ただし，渦度の強さ Γ_α は $\Gamma > 0$ または $-\Gamma$ のみを値にとる．孤立した点渦 x_α $(\alpha = 1, \cdots, N)$ から誘導される位置 $x \in \mathbb{R}^d$ 上の速度場は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x,t) \\ &= \nabla^\perp\psi_\alpha(x,t) \end{aligned}$$

ここで ψ_α は流れ関数であり，Green 関数 $G(x,z)$ を用いて

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(x,t) &= \Gamma_\alpha\int G(x,z)\delta(z - x_\alpha)dz \\ &= \Gamma_\alpha G(x, x_\alpha) \end{aligned}$$

と表される．

さらに，点渦系は Hamilton 系になることが知られており，Green 関数を用いて系の Hamiltonian は以下で与えられる．$X_N = (x_1, \cdots, x_N)$ とおいて，

$$\begin{aligned} H(X_N) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta G(x_\alpha, x_\beta) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\Gamma_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}^{N}\psi_\beta(x_\alpha) \end{aligned} \tag{3.1}$$

点渦系は Hamilton 方程式 (のようなもの) を満たす.

$$\Gamma_\alpha \dot{x}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha},\ \Gamma_\alpha \dot{y}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \qquad \alpha = 1, \cdots, N \tag{3.2}$$

定数 Γ_α の分だけ厳密には Hamilton 方程式を満たしていないが, 各変数 x_α, y_α を $\sqrt{\Gamma_\alpha}\mathrm{sign}(\Gamma_\alpha)$ 倍すれば定数なしの Hamilton 方程式を満たすようにできる.

また, (3.2) は Bio-Savart の法則から次のようにもかける. $r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ と書いて,

$$\dot{r}_\alpha = \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N}\Gamma_\beta \frac{(r_\alpha - r_\beta)^\perp}{\|r_\alpha - r_\beta\|^2} \tag{3.3}$$

4 2次元

4.1 無限平面

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ における Poison 方程式の Green 関数は次で与えられる. この Green 関数を G_0 とかく.

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x-y|) = G_0(x,y)$$

N 点渦系の Hamiltonian は

$$H(X_N) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \log(|x_\alpha - x_\beta|)$$

4.2 単位円盤

境界がある場合は境界での流れ関数を 0 にするように境界の形に合わせて Green 関数を調整する必要がある.

4.2.1 鏡像法

鏡像法を使う. 単位円盤 $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ では x_α にある点渦に対して, 次のように鏡像渦があたえられる.

$$\bar{x}_\alpha = \left.\frac{R^2}{|x_\alpha|^2}x_\alpha\right|_{R=1} = \frac{x_\alpha}{|x_\alpha|^2}$$

これを使って $\mathbb{D}$ 上の Poison 方程式の Green 関数は次で与えられる.

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + \frac{1}{2\pi}\log|x-\bar{y}| + \frac{1}{2\pi}\log|y| \tag{4.1}$$

x, y について対称性が直ちには確認できないが後で確かめられる.

また，N 点渦系の Hamiltonian は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
H(X_N) = &-\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|x_\alpha - x_\beta| \\
&+\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|x_\alpha - \bar{x}_\beta| \\
&+\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|x_\beta|
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

ただし，半径 R の円盤の場合は定数が入る．*1 第 3 項は $\sum_\alpha \Gamma_\alpha = 0$ のとき 0 になるが，流れ関数を境界で 0 にするために必要．

上記の Hamiltonian を複素数 $z = x + iy$ で表すと次のようになる．

$$
\begin{aligned}
H(Z_N) = &-\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|z_\alpha - z_\beta| \\
&+\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log|1 - z_\alpha z_\beta^*|
\end{aligned}
$$

4.2.2 解析

Lemma 4.1 ([1] の Chapter 3 Exercise 8 p.138)**.** *$\mathbb{D}$ 上の N 点渦系の Hamiltonian は次のように表せる．*

$$
H = \frac{1}{4\pi}\sum_\alpha \Gamma_\alpha^2\log(1 - |x_\alpha|^2) + \frac{1}{8\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log\left(1 + \frac{(1-|x_\alpha|^2)(1-|x_\beta|^2)}{|x_\alpha - x_\beta|^2}\right) \tag{4.3}
$$

Proof. 次の恒等式が証明の本質である．

$$
(x-y)^2 + (1-x^2)(1-y^2) = (xy-1)^2 \tag{4.4}
$$
$$
(|x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2) = |xy^* - 1|^2 \text{ for complex})
$$

□

Remark 4.2. *(4.4) を実質的に適用することで $\mathbb{D}$ 上の Green 関数の対称性が確かめられる．*

$$
G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + \frac{1}{4\pi}\log\left[|x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2)\right]
$$

4.2.3 中立渦

N 点渦系において正負の点渦が同数である条件を中立渦条件という．

*1 第 3 項が $-\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log\frac{R}{|x_\alpha|}$

Definition 4.3 (中立渦)**.** $N \in 2\mathbb{N}$ の場合に，ある $\lambda > 0$ が存在して，渦の強さが

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda & (i = 1, \cdots, N/2) \\ -\lambda & (i = N/2+1, \cdots, N) \end{cases} \tag{4.5}$$

と表されるとき中立渦という．

ここでは $\mathbb{D}$ 上 2 点中立渦を考える．系の Hamiltonian は次のように整理できる．

Proposition 4.4 ($\mathbb{D}$ 上 2 点中立渦の Hamiltonian)**.** *$\mathbb{D}$ 上 2 点中立渦系の Hamiltonian は次のようにかける．*

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2) &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \log \left[\frac{(1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2)|x_1 - x_2|^2)}{|x_1 - x_2|^2 + (1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2)} \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \log \left[\frac{1}{2} S((1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2), |x_1 - x_2|^2) \right] \end{aligned}$$

ただし，$S(a,b) = 2ab/(a+b)$

Remark 4.5. *Proposition 4.4 から次のことがわかる．*

- 中立渦系の *Hamiltonian* は自己相互作用と渦間相互作用の「平均」で表される．
- 境界と渦衝突での特異性を持つ．*($|x_1| = 1$ or $|x_2| = 1$ or $|x_1 - x_2|$)*

4.3 一般の領域

一般の領域 Ω 上の Green 関数を G とかき，全平面に対する残差を g とかく．

$$g(x,y) = G(x,y) - G_0(x,y)$$

N 点渦系の Hamiltonian は次のようにかける．

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta G(x_\alpha, x_\beta) + \frac{1}{2} \sum_\alpha \Gamma_\alpha^2 g(x_\alpha, x_\alpha) \tag{4.6}$$

5 単位球面

球面はコンパクトであるため渦度場に次のような制限がかかる．球面 S に対して，

$$\int_S \omega \cdot dA = 0$$

これは Stokes の定理の帰結であり，次のように示される．球面上の閉曲線 C で球面を $S_1 \cup S_2$ と分割する，Stokes の定理から

$$\int_C u \cdot dl = -\int_{S_1} \omega \cdot dA = \int_{S_2} \omega \cdot dA$$

なので

$$0 = \int_{S_1} \omega \cdot dA + \int_{S_2} \omega \cdot dA = \int_S \omega \cdot dA$$

5.1 一般的な表示

$\mathbb{R}^2$ での運動方程式を一般的化する．

Definition 5.1 (2 次元点渦の運動方程式)**.** 平面と球面に共通な点渦の運動方程式は以下で与えられる．

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i}^{N} \frac{\Gamma_i}{2\pi} \left(\frac{\hat{n}_j \times (x_i - x_j)}{l_{ij}^2} \right) \tag{5.1}$$

ただし，$l_{ij} = \|x_i - x_j\|$ であり，外向き法ベクトル $\hat{n}_j$ は次で与えられる．

$$\hat{n}_j = \begin{cases} x_j/R \\ \hat{e}_z \end{cases}$$

また，球面上では方程式 (5.1) は以下のようにも書ける．

Proposition 5.2 (球面上の点渦の運動方程式)**.** 球面上では弦距離 *(chord distance)*l_{ij} は

$$l_i j^2 = \|x_i - x_j\|^2 = 2(R^2 - x_i \times x_j)$$

と表せ，運動方程式は以下のように書ける．

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i}^{N} \frac{\Gamma_j}{4\pi R} \left(\frac{x_j \times x_i}{R^2 - x_i \cdot x_j} \right) \tag{5.2}$$

5.2 球座標表示

直交座標表示はグローバルでシンプルだが，ここでは計算などで便利な球座標パラメータで表示する．

Theorem 5.3 (球面の点渦運動方程式の球座標表示)**.** 球座標 (R, θ, ϕ) に対して，球面の点渦運動方程式は次のように書ける．

$$\dot{\theta}_i = -\frac{1}{4\pi R^2} \sum_{j \neq i}^{N} \Gamma_j \frac{\sin\theta_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{1 - \cos\gamma_{ij}} \tag{5.3}$$

$$(\sin\theta_i)\dot{\phi}_i = \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{j \neq i}^{N} \Gamma_j \frac{\sin\theta_i \cos\theta_j - \cos\theta_i \sin\theta_j \cos(\phi_i - \phi_j)}{1 - \cos\gamma_{ij}} \tag{5.4}$$

ただし，$\cos\gamma_{ij} = \cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j \cos(\phi_i - \phi_j)$.

5.3 Hamiltonian

Theorem 5.4 (球面上の点渦系のハミルトニアン)**.** 球面上の点渦系は以下のハミルトニアンと正準座標 (Q, P) によりハミルトン系となる.

$$H = -\frac{1}{4\pi R^2}\sum_{i<j}\Gamma_i\Gamma_j\log(R^2 - x_i\cdot x_j) \tag{5.5}$$

with $Q_i = \mathrm{sign}(\Gamma_i)\sqrt{|\Gamma_i|}\phi_i, P_i = \sqrt{|\Gamma_i|}\cos\theta_i\ (i = 1, \cdots, N)$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

Definition 5.5. *Poison bracket* $\{\}$ を次のように定める.

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_i}\frac{\partial g}{\partial\cos\theta_i} - \frac{\partial f}{\partial\cos\theta_i}\frac{\partial g}{\partial\phi_i}\right)$$

5.4 可積分性

Definition 5.6 (重心 (center of vorticity))**.** 次のように渦度の重心 $\mathbf{c}$ を定める.

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}/\Gamma$$

ただし，$\mathbf{M} = \sum_i\Gamma_i x_i, \Gamma = \sum_i\Gamma_i$ 特に $\mathbf{c}$ の *3* 成分は

$$Q = R^{-1}\sum_i\Gamma_i\sin\theta_i\cos\phi_i$$
$$P = R^{-1}\sum_i\Gamma_i\sin\theta_i\sin\phi_i$$
$$S = R^{-1}\sum_i\Gamma_i\cos\theta_i$$

$\mathbf{c}$ とその各成分について以下のことがわかる.

Lemma 5.7.

$$\dot{\mathbf{c}} = 0$$

さらに,

$$\{Q, P\} = S, \qquad \{P, S\} = Q, \qquad \{S, Q\} = P$$

Proof. まず，$\dot{\mathbf{c}} = 0$ を示す．

$$\Gamma\dot{\mathbf{c}} = \sum_i \Gamma_i \dot{x}_i = \frac{1}{4\pi R}\sum_{i\neq j}\Gamma_i\Gamma_j \frac{x_j \times x_i}{R^2 - x_i\cdot x_j} = 0$$

($\because -x_i \times x_j = x_j \times x_j$ から相殺する．)

$\{Q, P\} = S$ などについては具体的な計算で得られる．

$$\begin{aligned}
\{Q,P\} &= \sum_i \Gamma_i^{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_i}\frac{\partial P}{\partial \cos\theta_i} - \frac{\partial Q}{\partial \cos\theta_i}\frac{\partial P}{\partial \phi_i}\right)\\
&= \sum_i \Gamma_i^{-1}\left[\Gamma_i \frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i}\sin\phi\Gamma_i\sin\theta\sin\phi - \Gamma_i\sin\theta_i\cos\phi\left(-\Gamma_i\frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i}\cos\phi\right)\right]\\
&= \sum_i \Gamma_i\cos\theta_i(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\\
&= S\\
\{P,S\} &= \sum_i \Gamma_i^{-1}(\Gamma_i\sin\theta_i\cos\phi_i\Gamma_i - 0) = \sum_i \Gamma_i\sin\theta_i\cos\phi_i = Q\\
\{S,Q\} &= \sum_i \Gamma_i^{-1}(0 - \Gamma_i(-\Gamma_i\sin\theta_i\sin\phi_i)) = P
\end{aligned}$$

□

これらを用いて可積分性に関する基礎的な定理が示される．

Theorem 5.8 (Kidambi and Newton(1998))**.** 球面上の *3* 点渦問題は任意の Γ で可積分．$\mathbf{c} = 0$ のとき *4* 点渦問題も可積分となる．

Proof. Lemma 5.7 から $\mathbf{c}$ の各成分 Q, P, S に対して

$$\dot{Q} = \{Q,H\} = 0, \qquad \dot{P} = \{P,H\} = 0, \qquad \dot{S} = \{S,H\} = 0$$

これより，

$$\{H, P^2 + Q^2\} = 2P\{H,P\} + 2Q\{H,Q\} = 0$$

また，

$$\{P^2 + Q^2, S\} = 2P\{P,S\} + 2Q\{Q,S\} = 2PQ + 2Q(-P) = 0$$

以上から 3 点渦問題では $H, S, P^2 + Q^2$ という 3 つの独立した可換な保存量が存在する．

さらに，$\mathbf{c} = 0$ の場合には 4 つの保存量 H, Q, P, S が可換となる． □

6　点渦モデルと Euler 方程式

6.1　Marchioro Pulvirenti

非粘性非圧縮流体に関する標準的なテキスト"Mathematical Theory of Incompressible Non-viscous Fluids"[2] の 4 章による．

6.1.1　heuristic な導入

点渦モデルでは Dirac 測度の線形和で渦度が表される．

$$\omega(dx) = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta_{x_i}(dx)$$

この渦度の Euler 方程式に沿った時間発展を考えるが初期値が滑らかでないので弱形式を適用するのが自然である．任意の滑らかな有界関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\omega_t(f) = \omega_t(u \cdot \nabla f) \tag{6.1}$$

$$u(x,t) = \int_D \nabla_x^\top G_D(x,y)\omega_t(dy) \tag{6.2}$$

ただし，

$$\omega_t(f) = \int_D \omega_t(dx) f(x)$$

である．まず，簡単のため $D = \mathbb{R}^2$ で考える．渦度解に対してはこの弱形式でさえ Euler 方程式は意味を持たない．初期測度 $u(x,0)$ は x が x_i に近づくにつれて特異になるため，$t=0$ だけでも (6.1) の右辺が意味を持たない．

しかし，物理的な直感から境界から離れた 1 点渦は外力がなければ動かない．これは次のように考えるとわかる．(滑らかな関数列 ω_n で δ に弱収束するものをとる．$u_n = K_D * \omega_n$ とする．ω_n が球対称と仮定すると，簡単な計算で渦は自身による速度場で動かないことがわかる．)

このことから速度場の定義を u_r として，以下のように修正すれば Euler 方程式が意味を持つ．

$$\frac{d}{dt}\omega_t(f) = \omega_t(u_r \cdot \nabla f)$$

$$u_r(x,t) = \int_D \nabla_x^\top G_D(x,y)\chi(\{x \neq y\})\omega_t(dy)$$

6.1.2　厳密な点渦モデルの導出

初期渦度が点測度に弱収束するとき任意の時刻で渦度が点測度に弱収束することを示す．

Theorem 6.1. $\Lambda_\epsilon, \epsilon \in (0, \epsilon_0)$ を以下を満たす開集合族とする.

$$|\Lambda_\epsilon| = \epsilon^2, \Lambda_\epsilon \subset B(x^*, \alpha\epsilon)$$

ただし，$\alpha > 0, B(x^*, R)$ は半径 R で中心 x^* の円盤とする．初期渦度を

$$\omega_{\epsilon,0} = \epsilon^{-2}\chi_{\Lambda_\epsilon}(x)$$

とかき，以下の弱形式の *Euler* 方程式の解を $\omega_{\epsilon,t} = \epsilon^{-2}\chi_{\Lambda_\epsilon(t)}(x)$ と書く.

$$\frac{d}{dt}\omega_{\epsilon,t}(f) = \omega_{\epsilon,t}([u_{\epsilon,t} + F] \cdot \nabla f)$$
$$u_{\epsilon,t} = K * \omega_{\epsilon,t}$$

ただし，f は滑らかな関数．今，F を発散が 0，一様有界，時間依存なベクトル場で *Lipschit* 条件を満たすとする.

$$|F(x,t) - F(y,t)| \le L|x - y|$$

$L > 0$ は *Lipschitz* 定数.

このとき，任意の $T > 0$ を固定すると，以下が成り立つ.

(1)

$$\lim_{\epsilon \to 0} c_\epsilon(t) = c(t)$$

ただし，$c_\epsilon(t) = \int \omega_{\epsilon,t}(x)dx$ はパッチ Λ_ϵ の渦中心．また，$c(t)$ は次の初期値問題の解

$$\frac{d}{dt}c(t) = F(c(t), t)$$
$$c(0) = x^*$$

(2) $\lim_{\epsilon \to 0} \omega_{\epsilon,t}(f) = f(c(t)), \qquad t \in [0, T]$

(3) 任意の $d > 0$ に対して，$\epsilon_0(d, T) > 0$ が存在して，$\epsilon < \epsilon_0$ のとき

$$\Lambda_\epsilon(t) \subset B(c_\epsilon(t), d), \qquad t \in [0, T]$$

Remark 6.2. この結果により $\Lambda_\epsilon(t)$ は厳密に $c_\epsilon(t)$ に局在化していることが示された.

Theorem 6.3. 互いに素な領域 Λ_ϵ^i と $a_i \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\omega_\epsilon(x) = \epsilon^2 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{\Lambda_\epsilon^i}(x) \tag{6.3}$$

ただし,

$$|\Lambda_\epsilon|^i = \epsilon^2, \Lambda_\epsilon^i B(x_i, \alpha\epsilon), \alpha > 0$$

が成り立つとする．

このとき，任意の $T > 0$ に対して，以下が成り立つ．

$$\lim_{\epsilon \to 0} \omega_{\epsilon,t}(f) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i(t)) \tag{6.4}$$

ただし，$\omega_{\epsilon,t}$ は初期値を ω_ϵ とする *Euler* 方程式の弱形式の解とし，$(x_i(t))$ は初期値 x_i，渦強度 a_i の点渦モデルの解とし，時刻 T までに渦の衝突がないものとする．

6.1.3 Goodman

[3] では 2 次元 Euler 方程式の近似としての渦法の一貫性，安定性，収束にてついての定理を与えている．点渦モデルの正当性を示すものであり，点渦と渦班モデルのどちらが良いかを主張するものではない．Chorin の渦法による Euler 方程式の近似問題を扱う．メッシュサイズ h と blob size δ の 2 つのパラメータが存在するが，ここでは $\delta = 0$ に対する証明をする．証明は Hald の改善である．

Euler の渦度方程式は

$$\omega_t + (u \cdot \nabla)\omega = 0 \tag{6.5}$$

$$u(x,t) = \int K(x-y)\omega(y,t)dy \tag{6.6}$$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}(-x_2, x_1) \tag{6.7}$$

とかける．急減少な初期渦度 $\omega(x,0) = \omega^0(x), \omega^0 \in S$ に対して，上記の方程式の解が存在する．（$\omega(\cdot,t) \in S \forall t > 0$）Lagrange 座標 ξ を次を満たすような粒子軌道とする．

$$\frac{d}{dt} y(\xi,t) = u(y(\xi,t),t), y(\xi,0) = \xi \tag{6.8}$$

$\omega^0 \in S$ のとき，この変数変換は滑らかである．流れが非圧縮で $\det(\partial y/\partial \xi) = 1$ なので，$\xi \mapsto y$ は滑らかな逆写像を持つ．

点渦近似（渦法）により渦度方程式 (6.5)(6.6) は次で置き換えられる．

$$v_j(t) = h^2 \sum_{k \neq j} K(x_j(t) - x_k(t))\omega_k \tag{6.9}$$

$$\dot{x}_j(t) = v_j(t) \tag{6.10}$$

ただし，$x_j(0) = h \cdot j, j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2, h \in \mathbb{R}$ であり，$\omega_j = \omega^0(x_j(0))$ とする．

渦度局所化の結果として，遠方の粒子の動きはとても小さくなる．特に以下が成り立つ．

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{|\xi| \geq r, t \leq T} |y(\xi,t) - \xi| = 0$$

また，(6.5) から渦度は保存する．

$$\omega(y(\xi,t),t) = \omega(\xi,0) = \omega^0(\xi)$$

粒子の軌道 $y_j(t)$ は元の格子点の Lagrange map の像 $y_j(t) = y(\xi_j, t)$ として定まる．ただし，$\omega(y_j(t),t) = \omega^0(\xi_j) = \omega_j$ となるように $\xi_j = h \cdot j$ と書いた．

離散 ℓ^p ノルムを

$$\|f\|^p = h^2 \sum_j |f_j|^p$$

と定める．

$v(t)$ を (6.9) による近似速度場とし，$u_j = u(y_j(t),t)$ と厳密解を表す．

Theorem 6.4. 任意の $T > 0$ と $4 < p < \infty$ に対して，$C(T,p) > 0$ が存在して以下が成り立つ．

$$\|x(t) - y(t)\| \leq Ch^2 \tag{6.11}$$

$$\|v(t) - u(t)\| \leq Ch^2 \tag{6.12}$$

$$\tag{6.13}$$

Theorem 6.5. $\omega^0 \in S, 4 < p < \infty, T > 0$ として，

$$\|x(t) - y(t)\| \leq h^{2-1/4} \qquad (0 \leq t \in T) \tag{6.14}$$

が成り立つとする．このとき，ある $A(T,p)$ が存在して $0 \leq t \in T$ に対して以下が成り立つ．

$$\|v(t) - u(t)\| \leq A\|x(t) - y(t)\| + Ah^2 \tag{6.15}$$

$A(T,p)$ は T の非減少関数．

7 点渦統計

点渦系を統計力学的に取り扱う際の意味づけや注意点についてまとめる．

7.1 一般の統計力学

7.1.1 用語について

ミクロカノニカルアンサンブル（micro canonical ensemble），小正準集団は同じものを指す．また，カノニカルアンサンブル (canonical ensemble)，ギブスアンサンブル (Gibbs ensemble)，正準集団は同じものを指す．

7.2 micro canonical vs. Gibbs canonical

micro canonical ensemble は系のエネルギーと体積がわかっている孤立系に対して適用される考え方である．最も実現確率が大きい微視状態を考えることでラグランジュの未定乗数法によりマクスウェル-ボルツマン分布が得られる．マクスウェル-ボルツマン分布はとりうる微視状態の中で「ほとんど」の状態数を占めている．（粒子数 $N \to \infty$ のとき確率 1 となる．）

一方，canonical ensemble は熱浴と接した[*2]等温系に対して適用される．系の温度と体積がわかっているとする．熱浴と対象の系を合わせた孤立系に対して，micro canonical ensemble の考え方を適用し，対象の系に対応する分布を抜き出すことでカノニカル分布を得る．独立粒子ではなく相互作用のある粒子を考えることができるので micro canonical ensemble より一般的である．また，カノニカル分布の特殊な場合としてマクスウェル-ボルツマン分布が得られる．さらに，エネルギーの分散は平均エネルギーに比べて小さく，その比は $N \to \infty$ のときに 0 となる．

7.3 P.Newton の説明

[1] で Newton は Onsager の点渦統計理論（非粘性・非圧縮・平衡を仮定）を整理し直した．

統計物理はミクロ（微視）の情報といくつかの仮定からマクロ（巨視）な性質を予測することだと述べている．点渦の確率密度関数 f を以下の仮定から導出する．

7.3.1 仮定

(1) 各点渦は同じ強さを持つ．

(2) 非圧縮流れ．

(3) 点渦はハミルトン方程式に従い等エネルギー面を動く．

(4) (統計) 等エネルギーを持つ全ての微視状態は等確率．$P(E_k)dxdy$ とかく．

(5) (統計) ある系の部分系 A, B を合わせた系 $A+B$ のエネルギーは各系のエネルギーの和になる．

(6) 各系は独立．

7.3.2 導出

上記の仮定から $P(E)$ と f の関数系が Gibbs factor で表されることを示し．分配定数 β を求める．

$$P(E_k) = f(x,y)1_{\{(x,y)\in H^{-1}(E_k)\}}dxdy = f(E_k)1_{\{(x,y)\in H^{-1}(E_k)\}}dxdy$$

[*2] 考え方を変えれば熱浴と接していなくてもカノニカル分布を導ける．

仮定 (5),(6) から系のエネルギーに関する議論で

$$P'_A(E_A)P_B(E_B) = P_A(E_A)P'_B(E_B) \text{ から}$$
$$\frac{P'_A(E_A)}{P_A(E_A)} = \frac{P'_B(E_B)}{P_B(E_B)} = -\beta$$

部分系に依存しない定数 β が定まる．(エネルギーの形のみに依存) この β を用いて

$$P(E) = C_1 \exp(-\beta E)$$
$$(f(E) = C_2 \exp(-\beta E))$$

と表され定数は

$$C_1 = \left[\sum_k \exp(-\beta E_k)\right]^{-1}$$
$$C_2 = \left(\int_{(\mathbb{R}^2)^N} \exp(-\beta E) dxdy\right)^{-1}$$

もしくは

$$Z = C_1^{-1} = C_2^{-1} = \sum_k \exp(-\beta E_k) \text{ と書いて}$$

Z を分配関数と呼ぶこともある．

Remark 7.1. β は系の詳細の条件に依存せずエネルギー関数（ハミルトニアン）にのみ依存する．また，$P(E)$ はあるエネルギー E をとる各微視状態の確率なので E をとる状態数 $M(E)$（微視状態の数）をかけて $M(E)P(E)$ があるエネルギーをとる確率となる．

また，$beta$ の実体について次のように説明している．内部エネルギーを

$$U = Z^{-1} \sum_k E_k \exp(-\beta E_k)$$

と表す．Z を β の関数としてみて，

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_k \frac{\partial}{\partial \beta} \exp(-\beta E_k) = -\sum_k E_k \exp(-\beta E_k) \text{ から}$$
$$-\frac{\partial \log(Z)}{\partial \beta} = -Z^{-1}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = U$$

となる．$Z(\beta)$ を単純な系で評価して代入すると

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

が導かれる．

7.3.3 P. Newton まとめ

一般の統計力学理論で系が'extensive' であるとして Gibbs 分布を導いている．点渦の平衡状態に関しては PL76 と JM73 のアプローチを紹介し sinh-Poison を導いている．また，非平衡理論の一つとして BBGKY hierarchy をあげている．

7.4 P.L.Lions の説明

[4] で Lions は 2 次元 Euler 方程式の統計的な性質を渦度を使って調べるために数学的な定式化を行った．

2 次元 Euler 方程式の解は渦度方程式の解と流れ関数を用いて表される．離散的な渦度解が Dirichlet 境界条件の時にハミルトン系になることがわかる．次の仮定から Gibbs 測度を定義しその性質を調べる．

7.4.1 仮定

(1) 非圧縮 Euler 方程式

(2) ハミルトニアンは Green 関数と領域に依存する修正から構成される．

(3) DirichletB.C.

(4) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界，開集合，滑らかな境界，単連結．

(5) 各点渦は区別できず循環 $|\lambda_i| = \lambda > 0$ とする．

7.4.2 Gibbs 測度

系のハミルトニアンを $\lambda\mathcal{H}$ とかき Gibbs 測度を以下のように定める．

$$\mu = Z^{-1}\exp(-\tilde{\beta}\lambda\mathcal{H})$$
$$Z = \int_{\Omega^N} \exp(-\tilde{\beta}\lambda\mathcal{H})dx_1\cdots dx_N$$

Remark 7.2. $Z < \infty$ の時，μ が定義できていかがわかる．

- μ は Ω^N 上の確率測度．
- μ は $\mathcal{H}$ の関数なので $\lambda\mathcal{H}$ に対応するハミルトン系の不変測度となる．
- $\tilde{\beta}$ の解釈はさておき，$\tilde{\beta}$ を $\mathbb{R}$ 上で変化させる．
- Ω を固定すると（ハミルトニアンが決まり），μ と Z は $N, \tilde{\beta}\lambda$ に依存する．

有効な $N, \tilde{\beta}\lambda$ の範囲について以下が成り立つ．

$$Z(N, \tilde{\beta}\lambda) < \infty \Leftrightarrow \tilde{\beta}\lambda \in (-8\pi/N, 4\pi)$$

7.4.3 スケーリング

自然なスケーリングは

$$\beta = \tilde{\beta}\lambda N \in (-8\pi, \infty)$$

ととることである．この時以下の場合で μ は well-defined

(1) $-8\pi \leq \beta \leq 0$
(2) $\beta > 0, N > \frac{\beta}{4\pi}$

また，最も単純な循環の取り方は $N\lambda = 1$ を満たすように

$$\lambda = \frac{1}{N}, \tilde{\beta} = \beta$$

である．

7.4.4 P. L. Lions まとめ

canonical ensemble の考え方を用いて点渦系の統計を考えている．

7.5 Yatsuyanagi らの説明

[5] では，統計的不温度点渦系を説明するために状態密度の対数微分として系の逆温度を定義した．点渦系はエネルギー保存系なので渦の初期配置でエネルギーをコントロールすることにより系の温度を間接的にコントロールしている．

7.5.1 仮定

(1) 領域は半径 R の円盤.
(2) 中立渦条件．各循環は $|\Omega_i| = \Omega > 0$

7.5.2 統計力学的逆温度

エネルギーの状態密度関数を $W(E)$ とする．統計力学的逆温度 β を

$$\beta = \frac{d\log(W(E))}{dE}$$

で定める．

7.5.3 Canonical ensemble の問題点

点渦系のモンテカルロシミュレーションで Canonical ensemble を適用すると複数の問題があることが指摘されている．[6] 仮定の不自然さと点渦の「超凝集」である．まず，micro canonical

から canonical へ移行する際に孤立系に熱浴との接触の仮定を増やす必要があるが点渦系を熱浴と接触させることの解釈が難しい．また，canonical ensemble ではエネルギーが非有界であるため Gibbs 因子に従った最大確率を探索すると自然と点渦が 1 点に集まり潰れてしまう超凝集がおきる．この現象は canonical ensemble の分配関数が発散する温度帯で発生する．

7.5.4 Yatsuyanagi まとめ

点渦統計を micro canoncial ensemble で考えている．Gibbs canonical ensemble の問題点についても指摘している．

7.6 Ashbee の説明

7.6.1 仮定

(1) 有界領域 D.

(2) 中立渦：渦度の和が 0

(3) D 上の Green 関数からハミルトニアン $\mathcal{H}$ を定める．

(4) Gibbs 測度（大正準集団として捉える）を扱う場合には熱浴との接触を仮定.

7.6.2 導出

まず，相空間の体積をエネルギーで分ける．エネルギー E 以下の体積を $\Omega(E)$ とおく．

$$\Omega(\infty) = \int_{D^N} dx_1 \cdots dx_N = |D|^N$$
$$\Omega(E) = \int_{D^N} Hev(E - \mathcal{H}(x_1, \cdots, x_N))dx_1 \cdots dx_N$$

ただし，Hev はヘヴィサイド関数．$\Omega(-\infty) = 0$ となる．$\Omega(E)$ の微分を持って状態密度関数 $W(E)$ を定義する．

$$W(E) = \Omega'(E) = \int_{D^N} \delta(E - H(x_1, \cdots, x_N))dx_1 \cdots dx_N$$

これは非負関数で $W(\pm\infty) = 0$ となり，$W'(E_{max}) = 0$ を満たす E_{max} が存在する．

また，ボルツマンエントロピー $S(E)$ を次のように定める．

$$S(E) = \log(W(E))$$

ただし，ボルツマン定数 $k_B = 1$ とスケーリングする．温度 $\tilde{T}$ と逆温度 $\tilde{\beta}$ は $S(E)$ から以下のように定める．

$$\frac{1}{\tilde{T}} = \tilde{\beta} = \frac{1}{N}\frac{dS}{dE} = \frac{1}{N}\frac{W'(E)}{W(E)}$$

Remark 7.3. 関数 $\beta(E)$ は熱力学曲線と呼ばれる．

7.6.3　いくつかの意味づけ

小正準集団は点渦数 N を固定した孤立系に対して考えられ，density は以下のように与えられる．

$$p(x_1,\cdots,x_N)=\frac{\delta(E-H(x_1,\cdots,x_N))}{W(E)}$$

正準集団は固定した β と熱浴 (reservoir) に接した系に対して以下で density が与えられる．

$$p(x_1,\cdots,x_N)=\frac{e^{-\beta\mathcal{H}}}{\int_{D^N}e^{-\beta\mathcal{H}}dx_1\cdots dx_N}$$

Remark 7.4. 正準集団では熱浴とのエネルギーのやりとりにより系の温度は一定となる．また，小正準集団は正準集団の特別な場合として得られる．

大正準集団は正準集団を拡張したものでありエネルギーと粒子が reservoir と行き来する．density は以下．

$$p(x_1,\cdots,x_N)=\frac{e^{-\beta(\mathcal{H}-\mu N)}}{\int_{D^N}e^{-\beta(\mathcal{H}-\mu N)}dx_1\cdots dx_N}$$

7.6.4　microcanonical vs. canonical

ハミルトン系が extensive である場合にのみ microcanonical から canonical ensemble に移行できる．(Thermodynamics and statistical mechanics. Springer 1995) extensive とは 2 つの系を合わせた全エネルギーが各系のエネルギーの和となることを言う．しかし，点渦系は系を 2 つの系を足すと相互作用の項が現れるので extensive でない．このため，Ashbee は canonical ensemble で点渦統計を扱うのは適切でないと述べている．

7.7　sinh-Poison について

sinh-Poison 方程式とは渦度場の平衡分布（平均流）を記述するため方程式である．

7.7.1　Ashbee

Ashbee は sinh-Poisson 方程式 (SPE) の歴史と複数の導出を紹介している．hydrodynamical limit と渦度和が 0 であるという仮定のもと，領域に対応する点渦の Green 関数から SPE が導出される．

Joyce, Montgomery(JM73) でエントロピー最大化原理を使って SPE を導いた．一方，Pointin, Lundgren(PL76) はより一般的なキュムラント展開を用いた導出を行なった．前者が逆温度に関する仮定がないのに対して，後者は負の逆温度という仮定がつく．

Ashbee は ∇^2 を一般化した楕円型対称作用素に対してキュムラント展開による方法で SPE に似た elliptic-sinh 方程式 (ESE) を導いた．この方法を使えば Euler 方程式より一般の dynamics に対して，渦度の平衡分布を記述する方程式を考えることができる．

7.7.2 P. Newton

JM73 と PL96 の両方の方法を紹介している．

7.8 まとめ

逆温度の意味づけを考えるにあたってはまず点渦系の捉え方に気をつける必要がある．Ashbee の説明ではいくつかの捉え方が挙げられ，Gibbs 測度を考える場合には熱浴との接触による等温度系という前提が必要である．

一般に micro canonical と Gibbs canonical は N が大きい場合に等価とみなせるが点渦系に適用する場合には Gibbs canonical ensemble は超凝集がおきる温度帯を持つという問題がある．

参考文献

[1] Paul K. Newton. *The N-Vortex Problem*. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, NY, 1 edition, 2001.

[2] Carlo Marchioro Mario Pulvirenti. *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*. Springer, New York, NY, 1994.

[3] Jonathan Goodman, Thomas Y. Hou, and John Lowengrub. Convergence of the point vortex method for the 2-d euler equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(3):415–430, 1990.

[4] Pierre-Loius Lions. *On Euler Equations and Statistical Physics*. Pisa: SNS, 1997.

[5] 八柳祐一．絶対温度が負となる点渦系に関する力学的考察～専用計算機を用いたダイレクトシミュレーション結果，および解析的結果～．In **偏微分方程式と現象：***PDEs and Phenomena in Miyazaki*, 宮崎大学木花キャンパス, 2010.

[6] 光貞... [et al.] 佐野. N-点渦系のダイナミクスと統計力学：少数自由度系から大自由度系へ. **物性研究**, 84(4), 7 2005.

[7] Thomas Lowday Ashbee. *Dynamics and statistical mechanics of point vortices in bounded domains*. PhD thesis, University College London, 2013.

[8] David Montgomery and Glenn Joyce. Statistical mechanics of "negative temperature" states. *The Physics of Fluids*, 17(6):1139–1145, 1974.

[9] Y. B. Pointin and T. S. Lundgren. Statistical mechanics of two - dimensional vortices in a bounded container. *The Physics of Fluids*, 19(10):1459–1470, 1976.

[10] Michael Creutz. Microcanonical monte carlo simulation. *Phys. Rev. Lett.*, 50:1411–1414, May 1983.

[11] Ralph A. Smith and Thomas M. O’ Neil. Nonaxisymmetric thermal equilibria of a cylindrically bounded guiding - center plasma or discrete vortex system. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 2(12):2961–2975, 1990.

[12] Russel E. Caflisch and John S. Lowengrub. Convergence of the vortex method for vortex sheets. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26:1060–1080, 1989.