

線形作用素

竹田航太

2023 年 11 月 1 日

目次

1	行列	1
1.1	対角化	1
1.2	自己共役	1
1.3	逆行列	2
2	線形作用素	3
2.1	作用素	3
2.2	Baire のカテゴリー定理	4
2.3	コンパクト作用素	4
2.4	クラス	5
2.5	Covariance operator	6

概要

行列, 線形作用素の基礎事項について, 応用数学に必要な内容を中心にまとめる.

1 行列

1.1 対角化

Definition 1.1. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して,

- A が正規 (*normal*) $\stackrel{def}{\iff} A^*A = AA^*$.
- A がユニタリ (*unitary*) $\stackrel{def}{\iff} A^*A = AA^* = I$.

Theorem 1.2. (対角化) $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, ユニタリ対角化可能であることと正規行列であることは同値.

1.2 自己共役

Definition 1.3. 自己共役, 正定値を定義する.

- $A \in M_n(\mathbb{C})$ が自己共役 (*self-adjoint*) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^* = A$ 自己共役行列全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_{sa}$ とかく.
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ が正定値 (*positive-definite*) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^*Ax > 0 \ (\forall x \neq 0 \in \mathbb{C}^n)$ 同様に全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_+$ とかく.
- $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ が半正定値 (*positive-definite*) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x^*Ax \geq 0 \ (\forall x \in \mathbb{C}^n)$ 同様に全体の集合を $M_n(\mathbb{C})_{+=}$ とかく.

Theorem 1.4. $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ とする.

(1) A の固有値は全て実数

Theorem 1.5 (正定値行列の特徴づけ). $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ に対して以下は同値

- (1) $A \in M_n(\mathbb{C})_+$
- (2) A の固有値は正
- (3) 正の対角行列でユニタリ対角化できる
- (4) $\exists S \in M_n(\mathbb{C}), S : \text{正則} \text{ s.t. } A = S^*S$

Theorem 1.6. $A \in M_n(\mathbb{C})_{sa}$ に対して以下は同値

- (1) $A \in M_n(\mathbb{C})_{+=}$
- (2) A の固有値は非負
- (3) 非負の対角行列でユニタリ対角化できる
- (4) $\exists S \in M_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } A = S^*S$

Theorem 1.7. $A \in M_n(\mathbb{C})_+$ の固有値は全て正であり $\det(A) > 0$ が成り立つので, A は正則であり, $A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})_+$.

1.3 逆行列

Lemma 1.8. $P, I \in M_n(\mathbb{C})$ で I は単位行列. $I + P$: 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(I + P)^{-1} = I - (I + P)^{-1}P$$

Proof.

$$LHS = (I + P)^{-1}(I + P - P) = I - (I + P)^{-1}P = RHS$$

□

Lemma 1.9. $P \in M_{n \times m}(\mathbb{C}), Q \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), I_n(I_m)$ をそれぞれ $n(m)$ 次単位行列とする. $I_n + PQ, I_m + QP$: 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(I + PQ)^{-1}P = P(I + QP)^{-1}$$

Proof.

$$P + PQP = P(I + QP) = (I + PQ)P$$

より右の等式で左から $(I + PQ)^{-1}$, 右から $(I + QP)^{-1}$ をかけると従う.

□

Lemma 1.10. $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$: 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$$

Proof. I_n を n 次単位行列として $(PQ)Q^{-1}P^{-1} = I_n$, $Q^{-1}P^{-1}(PQ) = I_n$ □

Theorem 1.11. $A \in M_n(\mathbb{C}), B \in M_{n \times m}(\mathbb{C}), C \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), D \in M_m(\mathbb{C})$ として, $A, D, D + CA^{-1}B$: 可逆とする. このとき以下が成り立つ.

$$(A + BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

Proof.

$$\begin{aligned} (A + BD^{-1}C)^{-1} &= (A(I + A^{-1}BD^{-1}C))^{-1} \\ &\stackrel{1.10}{=} (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1} \\ &\stackrel{1.8}{=} \{I - (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}C\}A^{-1} \\ &= A^{-1} - (I + A^{-1}BD^{-1}C)^{-1}A^{-1}BD^{-1}CA^{-1} \\ &\stackrel{1.9}{=} A^{-1} - A^{-1}B(I + D^{-1}CA^{-1}B)^{-1}D^{-1}CA^{-1} \\ &\stackrel{1.10}{=} A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \end{aligned}$$

*等号の上の数字は Lemma の番号 □

Theorem 1.12. $P \in M_n(\mathbb{C})_+$ (正定値), $R \in M_m(\mathbb{C})_+$, $B \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ とする. このとき $(BPB^* + R)$ は可逆で以下が成り立つ.

$$(P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} = PB^*(BPB^* + R)^{-1}$$

Proof. Lemma を使う.

$$\begin{aligned} (P^{-1} + B^*R^{-1}B)^{-1}B^*R^{-1} &\stackrel{1.10}{=} (I + PB^*R^{-1}B)^{-1}PB^*R^{-1} \\ &\stackrel{1.9}{=} PB^*(I + R^{-1}BPB^*)^{-1}R^{-1} \\ &\stackrel{1.10}{=} PB^*(BPB^* + R)^{-1} \end{aligned}$$

*等号の上の数字は Lemma の番号 □

Example 1.1 (Kálmán filter). y : 観測データ, C : 対称正定値, R : 対称正定値, H 観測 operator とすると

$$(I + CH^*R^{-1}H)x^a = x^f + CH^*R^{-1}y \Leftrightarrow x^a = x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f)$$

Proof. 左の式の両辺に左から $(I + CH^*R^{-1}H)^{-1} = (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}$ をかける

$$\begin{aligned} x^a &= (I + CH^*R^{-1}H)^{-1}x^f + (C^{-1} + H^*R^{-1}H)^{-1}C^{-1}CH^*R^{-1}y \\ &\stackrel{1.11, 1.12}{=} \{I - CH^*(R + H^*CH)^{-1}H\}x^f + CH^*(HCH^* + R)^{-1}y \\ &= x^f + CH^*S^{-1}(y - Hx^f) \end{aligned}$$

□

2 線形作用素

2.1 作用素

Definition 2.1 (作用素). *Banach* 空間 X, Y に対して, 線型写像 $T : X \rightarrow Y$ を作用素という.

Definition 2.2 (有界作用素). 作用素 $T : X \rightarrow Y$ が有界 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} TX_1 \subset Y$ が有界. ただし, $X_1 = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ とした. さらに, 有界作用素全体の集合を $B(X, Y)$ とかく.

Theorem 2.3 (連続性と有界性). 作用素 $X \rightarrow Y$ について以下は同値.

- (1) T は連続.
- (2) T は $o \in X$ で連続.
- (3) T は有界.

有界とは限らない作用素で重要なものに閉作用素がある.

Definition 2.4 (閉作用素). *Banach* 空間 X, Y に対して, 作用素 $T : D(T) \rightarrow Y$ を考える. ただし, T の定義域を $D(T)$ とかいた. T のグラフを $\mathcal{G}_T = \{(x, Tx) \in X \times Y, x \in D(T)\}$ で定める. さらに, $X \times Y$ のノルムを

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

で与え, このノルムに対して \mathcal{G}_T が $X \times Y$ の閉部分空間であるとき, T を閉作用という.

2.2 Baire のカテゴリー定理

Baire のカテゴリー定理とそれから導かれる関数解析学の基本的な定理をまとめる.

Theorem 2.5 (Baire のカテゴリー定理). X は完備距離空間, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ は $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$ を満たす閉集合の列とする. このとき, ある $n \in \mathbb{N}$ で F_n は内点を持つ.

Theorem 2.6 (逆写像定理). X, Y を *Banach* 空間, $T \in B(X, Y)$ が全単射とする. このとき, $T^{-1} \in B(Y, X)$, つまり有界.

Theorem 2.7 (開写像定理). X, Y を *Banach* 空間, $T \in B(X, Y)$ は全射とする. このとき, T は開写像. (T^{-1} は連続)

Theorem 2.8 (閉グラフ定理). X, Y を *Banach* 空間, $T : X \rightarrow Y$ は閉作用素で $D(T) = X$ であるとする. このとき, $T \in B(X, Y)$.

2.3 コンパクト作用素

Definition 2.9 (自己共役作用素). $A \in B(H)$ に対して,

$$A \text{ が自己共役作用素} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in H, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

自己共役作用素全体の集合を $B_{sa}(H)$ とかく.

Definition 2.10 ((自己共役) 非負作用素). $A \in B_{sa}(H)$ に対して

$$\begin{aligned} A \text{ が非負作用素} &\stackrel{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in H, \langle Ax, x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists T \in B(H) \text{ s.t. } A = T^*T \\ &\Leftrightarrow \sigma(A) \subset [0, \infty) \end{aligned}$$

$A \in B_{sa}(H)$ が非負作用素であることを $A \geq 0$ と表す. T を A の平方根と呼び, $T = A^{1/2}$ とかく.

Definition 2.11 ((自己共役) 正作用素). $A \in B_{sa}(H)$ に対して

$$A \text{ が正作用素 (positive operator)} \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \exists c > 0, \forall x \in H, \langle Ax, x \rangle \geq c\|x\|^2$$

$A \in B_{sa}(H)$ が正作用素であることを $A > 0$ と表す. A が正作用素であれば非負作用素でもある.

無限次元においては, 正作用素の定義は非負かつ非退化 (i.e., $\langle Ax, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$) と同値ではないので注意が必要.

Definition 2.12 (コンパクト作用素). $T \in B(H)$ が $TB(0, 1)$ が全有界であるとき T はコンパクト作用素であるという. ただし, $B(0, 1) := \{x \in H; \|x\| \leq 1\}$ は H の閉単位球.

Theorem 2.13 (コンパクト自己共役作用素のスペクトル分解). H : 可分 Hilbert 空間とする. $A \in B_{sa}(H) \cap K(H)$ とすると, $\sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}$ である. さらに A の固有値の列 $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ と対応する固有ベクトルからなる H の正規直交基底 $(e_n)_{n=1}^\infty$ が存在して,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \otimes e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

が作用素ノルムでの収束の意味で成り立つ. ただし, $e_n \otimes e_n^* = P_n$ は $\text{Ker}(\lambda_n I - T)$ への射影.

2.4 クラス

Definition 2.14 (特異値). $A \in K(H)$ に対し, 絶対値作用素 $|A| = (A^*A)^{1/2}$ の固有値の列 $\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty$ を特異値と呼ぶ.

Definition 2.15 (Schatten p class). $1 \leq p < \infty$ に対して, Schatten p クラスを

$$C_p(H) := \{A \in K(H); \|A\|_{C_p} < \infty\}$$

で定める. ただし, $\|A\|_{C_p} = (\sum_n s_n(A)^p)^{1/p}$ である. 特に $C_2(H)$ を Hilbert Schmidt クラス, $C_1(H)$ をトレースクラスという.

Definition 2.16 (トレース). $A \in B(H)_+$ に対してトレースを $Tr(A) := \sum_n \langle Ae_n, e_n \rangle \in [0, \infty]$ と定める. ただし, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の CONS でありトレースはこの取り方によらず定まる.

Lemma 2.17 (トレースクラス). $A \in B(H)$ に対して $\|A\|_{C_1} = Tr(|A|)$ である. この値が有限のとき (つまり, A がトレースクラス作用素のとき), $Tr(A)$ も有限.

Theorem 2.18 (Hilbert Schmidt class). $T \in B(H)$ に対して $Tr(T^*T) < \infty \Leftrightarrow T \in C_2(H)$ である. さらにこのとき $Tr(T^*T) = \|T\|_{HS}^2 = \|T\|_{C_2}^2$ が成り立つ. また $Tr(T^*T) = \sum_n \|T_n e_n\|^2 = \sum_{n,m} |\langle T_n e_n, e_m \rangle|^2$ などもわかる.

Theorem 2.19 (class の関係). $C_1(H) \subset C_2(H) \subset K(H) \subset B(H)$. $C_2(H)C_2(H) \subset C_1(H)$. $C_1(H)$ は $B(H)$ のイデアル.

2.5 Covariance operator

H を可分 Hilbert 空間とする.

Definition 2.20 (Covariance). H -値確率変数 X について, Pettis 積分の意味で平均 $m = \mathbb{E}[X] \in H$ を定義する. さらに, Covariance 作用素 $C : H \rightarrow H$ を

$$C = \mathbb{E}[(X - m) \otimes (X - m)]$$

で定める.

Proposition 2.21. H -値確率変数 X の平均を $m \in H$ とする. X の Covariance 作用素 C は以下を満たす.

- (1) $C \in B_{sa}(H)$.
- (2) $C \geq 0$.
- (3) $\dim(S) \geq 1$ で $(X - m) \perp S$ a.s. となる部分空間 $S \subset H$ が存在しなければ C は非退化.

Theorem 2.22 (Sazonov[1, 2]). μ を平均 0 の H 上の正規分布とする. このとき, C の covariance 作用素 C_μ は以下を満たす.

- (1) $C_\mu \in C_1(H)$
- (2) 2次モーメントは trace に一致する.

$$tr(C_\mu) = \mathbb{E}_{X \sim \mu}[\|X\|^2].$$

逆に, $C \in B_{sa}(H) \cap C_1(H), C \geq 0$ に対して, $C_\mu = C$ となる正規分布 μ が存在する.

Remark 2.23. H が無限次元とする. $C \in B_{sa}(H)$ について, $C > 0$ と $C \in C_1(H)$ は両立しない. このため, $C > 0$ を Covariance としても正正規分布は存在しない. 逆に正規分布の Covariance は可逆ではない.

参考文献

- [1] V. Sazonov. A remark on characteristic functionals. *Theory of Probability & Its Applications*, 3(2):188–192, 1958.
- [2] Timothy John Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*, volume 63. Springer, 2015.
- [3] 齋藤正彦. **線形代数学入門**. 東京大学出版, 2011.
- [4] Ged Ridgway. Matrix inversion identities. <http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/g.ridgway/mil/mil.pdf> (2020/7/5).
- [5] 黒田成俊. **関数解析**. 共立出版, 1980.