Geometric Measure Theory — The Area Fomula

竹田航太

2022 年 4 月 15 日

目次

1 目標

$\mathbb{R}^n$ に埋め込まれた曲面（多様体）の面積を考えるために Hausdorff 測度を導入し，曲面上の積分を Hausdorff 測度で表す．Lebesgue 積分との関係を示す The Area Formula が目標である．

2 Hausdorff 測度

$n \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{R}^n$ の Borel 集合全体の集合を $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ と書く．また，n 次元 Lebesgue 測度を $\mathscr{L}^n$ と書く．外測度から Carathéodory の方法を使って Hausdorff 測度を構成する．

Definition 2.1 (外測度)**.** $\Gamma : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ が次の *3* つの条件を満たすとき $\mathbb{R}^n$ 上の外測度という．

(1) $\Gamma(\emptyset) = 0$.
(2) *(*単調性*)* $A \subset B \Rightarrow \Gamma(A) \leq \Gamma(B)$.
(3) *(*可算劣加法性*)* $\Gamma(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma(A_i)$.

Definition 2.2. *(Carathéodory-*可測性*)* Γ を $\mathbb{R}^n$ 上の外測度とする．$E \subset \mathbb{R}^n$ が Γ-可測（または *Carathéodory*-可測）とは以下がなりたつことである．任意の $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^c)$$

となる．

Carathódory の方法により外測度の可測集合への制限により測度を定める．特に集合族として Borel 集合を考える．

Definition 2.3. $\mathbb{R}^n$ の外測度 Γ について *2* つの条件を考える．

(1) 任意の *Borel* 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が Γ-可測である．
(2) 任意の $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して，ある *Borel* 集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\Gamma(A) = \Gamma(B)$ となる．

(1) が成り立つとき，Γ*(の* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ への制限*)* を *Borel* 測度という．*(1)* に加えて *(2)* が成り立つとき，Γ*(の* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ への制限*)* を *Borel* 正則測度という．

$m \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 上の m 次元 Hausdorff 測度を定める．$S \subset \mathbb{R}^n$ に対して，S の直径 (diameter) を

$$\operatorname{diam}(S) \coloneqq \sup\{|x-y| \mid x, y \in S\}$$

で与える．

さらに，m 次元閉単位球の Lebesgue 測度を $\alpha_m = \mathscr{L}^m(B^m(0,1))$ とかく．$A \subset \mathbb{R}^n$，$\delta > 0$ に対して，直径が δ 以下の集合による A の可算被覆全体の集合族を $G_A(\delta)$ とかく．

$$G_A(\delta) = \{(S_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid A \subset \cup_j S_j, \forall j, \operatorname{diam}(S_j) \leq \delta\}.$$

これを用いて Hausdorff 外測度を次のように定める．

$$\mathscr{H}^m(A) \coloneqq \lim_{\delta\to 0} \inf_{S\in G_A(\delta)} \sum_{S_j\in S} \alpha_m \left(\frac{\operatorname{diam}(S_j)}{2}\right)^m. \tag{2.1}$$

このように定めた $\mathscr{H}^m$ は Borel 正則測度となる．

3 The Area Formula

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ と $A \subset \mathbb{R}^m$，$y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$N(f|A, y) = |\{x \in A \mid f(x) = y\}|$$

とおく．また，f が $a \in \mathbb{R}^m$ で微分可能なとき，$k \in \mathbb{N}$ に対して，k 次元 Jacobian $J_k f(a)$ を「$Df(a)$ による単位 k 次元立方体の像の最大 k 次元体積」で定める．

Theorem 3.1 (The Area Formula 1, theorem 3.2.3 in [1])**.** $m \leq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は *Lipschitz* 関数とする．

(1) $A \subset \mathbb{R}^m$ を $\mathscr{L}^m$-可測とすると

$$\int_A J_m f(x)\,\mathscr{L}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} N(f|A,y)\,\mathscr{H}^m(dy).$$

(2) $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を $\mathscr{L}^m$-可積分関数とすると

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(x) J_m f(x)\,\mathscr{L}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(y)} u(x)\,\mathscr{H}^m(dx).$$

Theorem 3.2 (The Area Formula 2, theorem 3.2.5 in [1])**.** $m \leq n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は *Lipschitz* 関数，$A \subset \mathbb{R}^m$ は $\mathscr{L}^m$-可測，$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする．さらに，以下のいずれかが成り立つとする．

(1) g は $\mathscr{H}^m$-可測.

(2) $N(f|A,y) < \infty$，$\mathscr{H}^m$-*a.e.* y.

(3) $\chi_A \cdot g \circ f \cdot J_m f$ は $\mathscr{L}^m$-可測.

このとき次が成り立つ.

$$\int_A g(f(x)) J_m f(x)\,\mathscr{L}^m(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(f|A,y)\,\mathscr{H}^m(dy).$$

参考文献

[1] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1 edition, 1996.

[2] Frank Morgan. *Geometric Measure Theory (Fifth Edition)*. Academic Press, 5 edition, 2016.