

Lions 1992

竹田航太

2022 年 12 月 8 日

目次

1	設定	1
2	平均場方程式	2
2.1	発見的議論	2
2.2	定理	3

概要

Lions らによる “A special class of stationary flows for two-dimensional Euler equations: a statistical mechanics description” [1] についてのノート．有界領域上の 2 次元 Euler 方程式の定常解を点渦統計理論を用いて調べている．平均場近似の定式化と平均場方程式の導出についてまとめる．

1 設定

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかで有界な領域とする． Ω 上で N 点渦 x_1, \dots, x_N の循環が全て $\Gamma > 0$ である場合を考える． N 点渦に対して，関数 $U : \Omega^N \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$U(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N G(x_i, x_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g(x_i, x_i)$$

で定める．ただし， Ω (resp. \mathbb{R}^2) 上の Poisson 方程式^{*1}の Green 関数を $G(x, y)$ (resp. $G_0(x, y)$) と書き， $g := G - G_0$ とした．これを用いて， N 点渦系のハミルトニアンを $\Gamma^2 U$ と書くことができる．さらに，逆温度パラメータ $\beta \in \mathbb{R}$ に対して，Gibbs 測度 $\mu^{N, \Gamma, \beta} \in \mathcal{M}_1(\Omega^N)$ を

$$\mu^{N, \Gamma, \beta}(dx_1, \dots, dx_N) = Z_{\Gamma, \beta}(N)^{-1} e^{-\beta \Gamma^2 U} dx_1 \dots dx_N$$

で定める．

^{*1} Dhiriclet-0 条件．

Lemma 1.1. $Z_{\Gamma,\beta}(N) < \infty$ となる必要十分条件は

$$\beta \in \left(-\frac{8\pi}{\Gamma^2 N}, +\infty \right) \quad (1.1)$$

である. さらにこのとき, ある $C = C(\beta\Gamma, N\Gamma, |\Omega|^N) > 0$ が存在して, 次の不等式が成り立つ.

$$Z_{\Gamma,\beta}(N) \leq C^N \quad (1.2)$$

この結果から $\beta\Gamma, N\Gamma$ を固定すると分配関数 $Z_{\Gamma,\beta}(N)$ と Gibbs 測度 $\mu^{N,\Gamma,\beta}$ は N のみに依存する. 特に正規化逆温度 $\tilde{\beta} \in (-8\pi, \infty)$ を固定して, N に対して

$$\Gamma = \frac{1}{N}, \quad \beta = \tilde{\beta}N \quad (1.3)$$

ととれば (1.1) を満たし, $\beta\Gamma, N\Gamma$ が固定される. このスケーリング (1.3) の下で分配関数と Gibbs 測度をそれぞれ $Z(N), \mu^N$ と書き $N \rightarrow \infty$ の極限について調べる.

2 平均場方程式

2.1 発見的議論

$j = 1, \dots, N$ に対して, j 点渦の相関関数 (同時分布) ρ_j^N を

$$\rho_j^N(x_1, \dots, x_j) = \int_{\Omega^{N-j}} \mu^N(x_1, \dots, x_N) dx_{j+1} \dots dx_N \quad (2.1)$$

で定めると, 簡単な式変形から

$$\rho_j^N(X_j) = \frac{e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}U(X_j)}}{Z(N)} \int_{\Omega^{N-j}} e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}W(X_j|X_{N-j})} e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}U(X_{N-j})} dX_{N-j} \quad (2.2)$$

と書ける. ただし, $X_j = \{x_1, \dots, x_j\}, X_{N-j} = \{x_{j+1}, \dots, x_N\}$ として

$$W(X_j|X_{N-j}) = \sum_{x \in X_j} \sum_{y \in X_{N-j}} G(x, y) \quad (2.3)$$

とおいた. ρ_j^N の j を固定した $N \rightarrow \infty$ の極限を考えるため, さらに

$$\begin{aligned} \rho_j^N(X_j) &= \frac{Z(N-j)}{Z(N)} e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N}U(X_j)} \\ &\quad \prod_{i=1}^j \int e^{-\frac{\tilde{\beta}}{N} \sum_{k=N-j}^N V(x_i, x_k)} e^{-\frac{j\tilde{\beta}}{N(N-j)}U(X_{N-j})} \mu^{N-j}(dX_{N-j}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

と書き直す.

ここで、平均場近似を考える。次の点渦に関する経験測度

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{x_j}(dx)$$

がある測度 $\rho \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ に弱収束すると仮定したとき、同時分布は積測度に弱収束する。

$$\rho_j^N \rightarrow \rho^{\otimes j}.$$

という状況を予想する。このとき、(2.4) から ρ は次の方程式を満たす必要がある。

$$\rho(x) = Z^{-1} e^{-\tilde{\beta} G * \rho} e^{\frac{1}{2} \tilde{\beta}(\rho, G * \rho)} \quad (2.5)$$

ただし、 $Z := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z(N)}{Z(N-1)}$ とおいた。さらに、(2.5) から

$$Z e^{-\frac{1}{2} \tilde{\beta}(\rho, G * \rho)} = \int_{\Omega} e^{-\tilde{\beta} G * \rho} dx$$

が成り立つことがわかる。

2.2 定理

Theorem 2.1. 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して ρ_j^N の弱集積点 $d\rho_j \in \mathcal{M}_1(\Omega^j)$ が存在するとする^{*2}。このとき、 $d\rho_j$ は *Lebesgue* 測度に絶対連続である。（密度関数を ρ_j と書く）

$$d\rho_j(X_j) = \rho_j(X_j) dX_j.$$

また、 $L_1(\Omega)$ 上の弱位相についてのある *Borel* 確率測度 ν が存在して、

$$\rho_j(x_1, \dots, x_j) = \int_{L_1(\Omega)} \prod_{k=1}^j \rho(x_k) \nu(d\rho) \quad (2.6)$$

が成り立つ。さらに、 $\tilde{\beta} > 0$ (*resp.* $\tilde{\beta} < 0$) のとき、 ν は次の自由エネルギー汎関数の $\rho \in L_{\infty}(\Omega) \cap \mathcal{M}_1(\Omega)$ での最小化点 (*resp.* 最大化点) に集積する。

$$f(\rho) = \frac{1}{\tilde{\beta}} \int_{\Omega} \rho \log \rho dx + \frac{1}{2}(\rho, G * \rho). \quad (2.7)$$

Remark 2.2. $\tilde{\beta} > 0$ のときは (2.7) の一意な解 ρ が存在し、 $\rho_j^N \rightarrow \rho^{\otimes j}$ が部分列を取らずに成り立つ。 $-8\pi < \tilde{\beta} < 0$ のときは、一般の Ω で (2.7) の解が一意とは限らないが Ω が単位円盤上のときは一意な解が存在し、 $\rho_j^N \rightarrow \rho^{\otimes j}$ が成り立つ。このように、積測度で欠けることを “*propagation of chaos*” と呼ぶ。

^{*2} 部分列が弱収束するという意味。

Remark 2.3. さらに, 流れ関数 $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$-\Delta\psi = \rho, \psi|_{\partial\Omega} = 0$$

を満たすように取ると, (2.5) から次の *Liouville* 方程式と呼ばれる平均場方程式が成り立つ.

$$-\Delta\psi = \tilde{Z}^{-1}e^{-\tilde{\beta}\psi}, \tag{2.8}$$

$$\tilde{Z} = \int_{\Omega} e^{-\tilde{\beta}\psi} dx, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.9}$$

Remark 2.4. $u = (-\partial_y\psi, \partial_x\psi)$ とおくと, これは 2 次元 *Euler* 方程式の定常流となる.

参考文献

- [1] Emanuele Caglioti, Pierre L. Lions, Carlo Marchioro, and Mario Pulvirenti. A special class of stationary flows for two-dimensional euler equations: a statistical mechanics description. *Communications in Mathematical physics*, 143(3):501–525, 1992.