N 点渦系

竹田航太

2021 年 6 月 9 日

目次

概要

非粘性非圧縮流体において渦度が delta 関数の線形和で表される系を点渦系と呼ぶ．ここではいくつかの領域における点渦系の Hamiltonian についてまとめる．

1　基礎的な問い

主に [1] の 1.3 による．N 点渦に対する基礎的な問いをまとめる．

(1) N 点渦系が完全可積分になる条件は？：点渦の強さ，領域に依存する．
(2) 完全可積分系では解は全時間で存在するか？準周期的/閉な解であるか？有限時間渦衝突は起きるか？
(3) どのような（固定/相対）平衡状態が存在するか？どのような性質を持つか？
(4) どの点渦問題が非可積分系となるか？可積分性が壊れるメカニズムはなにか？
(5) 与えられた N 点渦配置からどのような瞬間的流線パターンが得られるか？特にトポロジーはどのように遷移するか？
(6) 特定の N 点渦配置を得るために（離散・連続的）対称性はどのように利用できるか？
(7) KAM 理論を渦系に適用し物理的な結論を得られるか？どんな座標を取れば相空間の次元を下げ，一般渦問題に KAM 理論を適用できるか？
(8) どんな渦配置から幾何的位相が生じるか？それを計算できるか？物理的関係を見出せるか？
(9) N が大きい場合，N 点渦問題にどんな道具が使えるか．２次元乱流が意味するものは何か？
(10) 2 次元から 3 次元渦問題への一般化

2　Preliminary

2.1　Notation

いくつか Notation をまとめる．$N \in \mathbb{N}$ が明らかな場合は省略する．

和の記号

- $\sum_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N$
- $\sum_{\beta\neq\alpha}^N = \sum_{\beta=1,\beta\neq\alpha}^N$
- $\sum_{\alpha\neq\beta} = \sum_\alpha \sum_{\beta\neq\alpha}^N$

ベクトル

- $(x,y)^\perp = (-y,x)$ と書く．2 次元での時計回り 90° 回転を表す．
- 2 次元の流れ関数 $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して，回転を次のように定める．$\nabla \times \psi = \nabla^\perp \psi$

2.2　渦度場

3 次元の流れ場 $u \in \mathbb{R}^3$ から誘導される渦度は以下で与えられる．

$$\omega = \nabla \times u \tag{2.1}$$

非圧縮流体を扱うので

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ．

(2.1) の勾配と回転をとると次がわかる．

$$\nabla \cdot \omega = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla^2 u = -\nabla \times \omega \tag{2.4}$$

Theorem 2.1 (渦度 flux)**.** *(2.3) から閉曲面での渦度 flux の合計は 0*

Proof. (2.3) と発散定理から閉曲面 S とその外向き法ベクトル n，S で囲まれた領域 V として

$$\int_S \omega \cdot n dS = \int_V \nabla \cdot \omega dV = 0$$

□

2.3　Poison 方程式

一般のベクトル値関数に対して以下が成り立つ

Theorem 2.2 (Helmholtz/Hodge decomposition)**.** 任意の $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対して，$\exists \phi, \psi$ *s.t.*

$$u = u_\phi + u_\psi = \nabla\phi + \nabla \times \psi \tag{2.5}$$

流体の分野では ϕ を速度ポテンシャル，ψ を流れ関数と呼ぶ．

Remark 2.3. 渦なしの流れ $\nabla \times u_\phi = 0$ に対して，スカラーポテンシャル ϕ *s.t.* $u = \nabla\phi$ の存在がわかり，非圧縮の流れ $\nabla \cdot u_\psi = 0$ に対して，ベクトルポテンシャル ψ *s.t.* $u = \nabla \times \psi$ の存在がわかる．

今，非圧縮性の条件 (2.2) から以下を満たす流れ関数 ψ の存在が言える

$$u = \nabla \times \psi \tag{2.6}$$

(2.1) に代入して，非圧縮性から整理すると流れ関数は以下の Poison 方程式を満たす．

$$\nabla^2 \psi = -\omega \tag{2.7}$$

Poison 方程式は Laplace 作用素の (全空間の)Green 関数を用いて

$$\psi(x) = \int G(x,z)\omega(z)dz \tag{2.8}$$

と表される．

2.4 Bio-Savart の法則

与えられた渦度 ω に対して (2.8) から流れ関数が定まり，それより誘導される速度場は $u_\omega = \nabla \times \psi$ より次を満たす

Theorem 2.4. 非圧縮流体において，与えられた ω に対して誘導される速度場 u_ω は次で与えられる．

$$\begin{align} u_\omega(x) &= \nabla \times \int G(x,z)\omega(z)dz \tag{2.9} \\ &= \int K(x-z)\omega(z)dz \tag{2.10} \end{align}$$

ただし，*Bio-Savart Kernel* K は次で与えられる．

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\|x\|^2}(-y,x) & (in\ \mathbb{R}^2) \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|x\|^3}\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} & (in\ \mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{2.11}$$

Remark 2.5. $\mathbb{R}^3$ の場合 *Bio-Savart* の法則はよく次のように表される．

$$u_\omega = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{(x-z)\times\omega(z)}{\|x-z\|^3}dz \tag{2.12}$$

3 点渦

3.1 N 点渦系

$N \in \mathbb{N}$ とする．非粘性非圧縮 d 次元流体において以下のような渦度の分解を考える．

$$\omega(x) = \sum_{\alpha=1}^{N} \Gamma_\alpha \delta(x - x_\alpha)$$

ただし，渦度の強さ Γ_α は $\Gamma > 0$ または $-\Gamma$ のみを値にとる．孤立した点渦 x_α $(\alpha = 1, \cdots, N)$ から誘導される位置 $x \in \mathbb{R}^d$ 上の速度場は

$$\begin{align} \dot{x} &= u(x,t) \\ &= \nabla^\perp \psi_\alpha(x,t) \end{align}$$

ここで ψ_α は流れ関数であり，Green 関数 $G(x,z)$ を用いて

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x,t) &= \Gamma_\alpha \int G(x,z)\delta(z-x_\alpha)dz \\ &= \Gamma_\alpha G(x,x_\alpha)\end{aligned}$$

と表される．

さらに，点渦系は Hamilton 系になることが知られており，Green 関数を用いて系の Hamiltonian は以下で与えられる．$X_N = (x_1,\cdots,x_N)$ とおいて，

$$\begin{aligned}H(X_N) &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta G(x_\alpha,x_\beta) \qquad (3.1)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\Gamma_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}^{N}\psi_\beta(x_\alpha)\end{aligned}$$

点渦系は Hamilton 方程式 (のようなもの) を満たす．

$$\Gamma_\alpha\dot{x}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial y_\alpha},\ \Gamma_\alpha\dot{y}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \qquad \alpha = 1,\cdots,N \tag{3.2}$$

定数 Γ_α の分だけ厳密には Hamilton 方程式を満たしていないが，各変数 x_α, y_α を $\sqrt{\Gamma_\alpha}\mathrm{sign}(\Gamma_\alpha)$ 倍すれば定数なしの Hamilton 方程式を満たすようにできる．

また，(3.2) は Bio-Savart の法則から次のようにもかける．$r_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ と書いて，

$$\dot{r}_\alpha = \frac{1}{2\pi}\sum_{\beta\neq\alpha}^{N}\Gamma_\beta\frac{(r_\alpha - r_\beta)^\perp}{\|r_\alpha - r_\beta\|^2} \tag{3.3}$$

4　2 次元

4.1　無限平面

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ における Poison 方程式の Green 関数は次で与えられる．この Green 関数を G_0 とかく．

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log(|x-y|) = G_0(x,y)$$

N 点渦系の Hamiltonian は

$$H(X_N) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta\log(|x_\alpha - x_\beta|)$$

4.2　単位円盤

境界がある場合は境界での流れ関数を 0 にするように境界の形に合わせて Green 関数を調整する必要がある．

4.2.1　鏡像法

鏡像法を使う．単位円盤 $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ では x_α にある点渦に対して，次のように鏡像渦があたえられる．

$$\bar{x}_\alpha = \left. \frac{R^2}{|x_\alpha|^2} x_\alpha \right|_{R=1} = \frac{x_\alpha}{|x_\alpha|^2}$$

これを使って $\mathbb{D}$ 上の Poison 方程式の Green 関数は次で与えられる．

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - y| + \frac{1}{2\pi} \log|x - \bar{y}| + \frac{1}{2\pi} \log|y| \tag{4.1}$$

x, y について対称性が直ちには確認できないが後で確かめられる．

また，N 点渦系の Hamiltonian は次で与えられる．

$$\begin{aligned} H(X_N) = &-\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|x_\alpha - x_\beta| \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|x_\alpha - \bar{x}_\beta| \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|x_\beta| \end{aligned} \tag{4.2}$$

ただし，半径 R の円盤の場合は定数が入る．*1 第 3 項は $\sum_\alpha \Gamma_\alpha = 0$ のとき 0 になるが，流れ関数を境界で 0 にするために必要．

上記の Hamiltonian を複素数 $z = x + iy$ で表すと次のようになる．

$$\begin{aligned} H(Z_N) = &-\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|z_\alpha - z_\beta| \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|1 - z_\alpha z_\beta^*| \end{aligned}$$

*1 第 3 項が $-\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log \frac{R}{|x_\alpha|}$

4.2.2 解析

Lemma 4.1 ([1] の Chapter 3 Exercise 8 p.138)**.** *$\mathbb{D}$ 上の N 点渦系の Hamiltonian は次のように表せる．*

$$H = \frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha}\Gamma_\alpha^2 \log(1-|x_\alpha|^2) + \frac{1}{8\pi}\sum_{\alpha\neq\beta}\Gamma_\alpha\Gamma_\beta \log\left(1+\frac{(1-|x_\alpha|^2)(1-|x_\beta|^2)}{|x_\alpha - x_\beta|^2}\right) \tag{4.3}$$

Proof. 次の恒等式が証明の本質である．

$$(x-y)^2 + (1-x^2)(1-y^2) = (xy-1)^2 \tag{4.4}$$

$$(|x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2) = |xy^*-1|^2 \text{ for complex})$$

□

Remark 4.2. *(4.4) を実質的に適用することで $\mathbb{D}$ 上の Green 関数の対称性が確かめられる．*

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| + \frac{1}{4\pi}\log\left[|x-y|^2 + (1-|x|^2)(1-|y|^2)\right]$$

4.2.3 中立渦

N 点渦系において正負の点渦が同数である条件を中立渦条件という．

Definition 4.3 (中立渦)**.** $N \in 2\mathbb{N}$ の場合に，ある $\lambda > 0$ が存在して，渦の強さが

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda & (i = 1, \cdots, N/2) \\ -\lambda & (i = N/2+1, \cdots, N) \end{cases} \tag{4.5}$$

と表されるとき中立渦という．

ここでは $\mathbb{D}$ 上 2 点中立渦を考える．系の Hamiltonian は次のように整理できる．

Proposition 4.4 ($\mathbb{D}$ 上 2 点中立渦の Hamiltonian)**.** *$\mathbb{D}$ 上 2 点中立渦系の Hamiltonian は次のようにかける．*

$$\begin{aligned} H(x_1,x_2) &= \frac{\lambda^2}{4\pi}\log\left[\frac{(1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2)|x_1-x_2|^2)}{|x_1-x_2|^2 + (1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2)}\right] \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi}\log\left[\frac{1}{2}S((1-|x_1|^2)(1-|x_2|^2), |x_1-x_2|^2)\right] \end{aligned}$$

ただし，$S(a,b) = 2ab/(a+b)$

Remark 4.5. *Proposition 4.4 から次のことがわかる．*

- *中立渦系の Hamiltonian は自己相互作用と渦間相互作用の「平均」で表される．*
- *境界と渦衝突での特異性を持つ．($|x_1| = 1$ or $|x_2| = 1$ or $|x_1 - x_2|$)*

4.3　一般の領域

一般の領域 Ω 上の Green 関数を G とかき，全平面に対する残差を g とかく．

$$g(x, y) = G(x, y) - G_0(x, y)$$

N 点渦系の Hamiltonian は次のようにかける．

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta G(x_\alpha, x_\beta) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha} \Gamma_\alpha^2 g(x_\alpha, x_\alpha) \tag{4.6}$$

5　単位球面

球面はコンパクトであるため渦度場に次のような制限がかかる．球面 S に対して，

$$\int_S \omega \cdot dA = 0$$

これは Stokes の定理の帰結であり，次のように示される．球面上の閉曲線 C で球面を $S_1 \cup S_2$ と分割する，Stokes の定理から

$$\int_C u \cdot dl = -\int_{S_1} \omega \cdot dA = \int_{S_2} \omega \cdot dA$$

なので

$$0 = \int_{S_1} \omega \cdot dA + \int_{S_2} \omega \cdot dA = \int_S \omega \cdot dA$$

5.1　一般的な表示

$\mathbb{R}^2$ での運動方程式を一般的化する．

Definition 5.1 (2 次元点渦の運動方程式)**.** 平面と球面に共通な点渦の運動方程式は以下で与えられる．

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i}^{N} \frac{\Gamma_i}{2\pi} \left(\frac{\hat{n}_j \times (x_i - x_j)}{l_{ij}^2} \right) \tag{5.1}$$

ただし，$l_{ij} = \|x_i - x_j\|$ であり，外向き法ベクトル $\hat{n}_j$ は次で与えられる．

$$\hat{n}_j = \begin{cases} x_j / R \\ \hat{e}_z \end{cases}$$

また，球面上では方程式 (5.1) は以下のようにも書ける．

Proposition 5.2 (球面上の点渦の運動方程式)**.** 球面上では弦距離 *(chord distance)*l_{ij} は

$$l_ij^2 = \|x_i - x_j\|^2 = 2(R^2 - x_i \times x_j)$$

と表せ，運動方程式は以下のように書ける．

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i}^{N} \frac{\Gamma_i}{4\pi R} \left(\frac{x_j \times x_i}{R^2 - x_i \cdot x_j} \right) \tag{5.2}$$

5.2 球座標表示

直交座標表示はグローバルでシンプルだが，ここでは計算などで便利な球座標パラメータで表示する．

Theorem 5.3 (球面の点渦運動方程式の球座標表示)**.** 球座標 (R, θ, ϕ) に対して，球面の点渦運動方程式は次のように書ける．

$$\dot{\theta}_i = -\frac{1}{4\pi R} \sum_{j \neq i}^{N} \Gamma_j \frac{\sin\theta_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{1 - \cos\gamma_{ij}} \tag{5.3}$$

$$(\sin\theta_i)\dot{\phi}_i = \frac{1}{4\pi R} \sum_{j \neq i}^{N} \Gamma_j \frac{\sin\theta_i \cos\theta_j - \cos\theta_i \sin\theta_j \cos(\phi_i - \phi_j)}{1 - \cos\gamma_{ij}} \tag{5.4}$$

ただし，$\cos\gamma_{ij} = \cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j \cos(\phi_i - \phi_j)$.

5.3 Hamiltonian

Theorem 5.4 (球面上の点渦系のハミルトニアン)**.** 球面上の点渦系は以下のハミルトニアンと正準座標 (Q, P) によりハミルトン系となる．

$$H = -\frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i<j} \Gamma_i \Gamma_j \log(R^2 - x_i \cdot x_j) \tag{5.5}$$

with $Q_i = \mathrm{sign(\Gamma_i)\sqrt{|\Gamma_i|}\phi_i, P_i = \sqrt{|\Gamma_i|}\cos\theta_i \ (i = 1, \cdots, N)}$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

Definition 5.5. *Poison bracket* $\{\}$ を次のように定める．

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_i} \frac{\partial g}{\partial \cos\theta_i} - \frac{\partial f}{\partial \cos\theta_i} \frac{\partial g}{\partial \phi_i} \right)$$

5.4　可積分性

Definition 5.6 (重心 (center of vorticity))**.** 次のように渦度の重心 $\mathbf{c}$ を定める.

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}/\Gamma$$

ただし，$\mathbf{M} = \sum_i \Gamma_i x_i, \Gamma = \sum_i \Gamma_i$ 特に $\mathbf{c}$ の *3* 成分は

$$\begin{aligned}
Q &= R^{-1} \sum_i \Gamma_i \sin\theta_i \cos\phi_i \\
P &= R^{-1} \sum_i \Gamma_i \sin\theta_i \sin\phi_i \\
S &= R^{-1} \sum_i \Gamma_i \cos\theta_i
\end{aligned}$$

$\mathbf{c}$ とその各成分について以下のことがわかる.

Lemma 5.7.

$$\dot{\mathbf{c}} = 0$$

さらに,

$$\{Q, P\} = S, \qquad \{P, S\} = Q, \qquad \{S, Q\} = P$$

Proof. まず，$\dot{\mathbf{c}} = 0$ を示す.

$$\Gamma\dot{\mathbf{c}} = \sum_i \Gamma_i \dot{x}_i = \frac{1}{4\pi R} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \frac{x_j \times x_i}{R^2 - x_i \cdot x_j} = 0$$

($\because -x_i \times x_j = x_j \times x_j$ から相殺する.)

$\{Q, P\} = S$ などについては具体的な計算で得られる.

$$\begin{aligned}
\{Q, P\} &= \sum_i \Gamma_i^{-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial \phi_i} \frac{\partial P}{\partial \cos\theta_i} - \frac{\partial Q}{\partial \cos\theta_i} \frac{\partial P}{\partial \phi_i}\right) \\
&= \sum_i \Gamma_i^{-1} \left[\Gamma_i \frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i} \sin\phi \Gamma_i \sin\theta \sin\phi - \Gamma_i \sin\theta_i \cos\phi \left(-\Gamma_i \frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i} \cos\phi\right)\right] \\
&= \sum_i \Gamma_i \cos\theta_i (\cos^2\phi + \sin^2\phi) \\
&= S \\
\{P, S\} &= \sum_i \Gamma_i^{-1} (\Gamma_i \sin\theta_i \cos\phi_i \Gamma_i - 0) = \sum_i \Gamma_i \sin\theta_i \cos\phi_i = Q \\
\{S, Q\} &= \sum_i \Gamma_i^{-1} (0 - \Gamma_i(-\Gamma_i \sin\theta_i \sin\phi_i)) = P
\end{aligned}$$

$\square$

これらを用いて可積分性に関する基礎的な定理が示される.

Theorem 5.8 (Kidambi and Newton(1998))**.** 球面上の *3* 点渦問題は任意の Γ で可積分. $\mathbf{c}=0$ のとき *4* 点渦問題も可積分となる.

Proof. Lemma 5.7 から $\mathbf{c}$ の各成分 Q,P,S に対して

$$\dot{Q}=\{Q,H\}=0, \qquad \dot{P}=\{P,H\}=0, \qquad \dot{S}=\{S,H\}=0$$

これより,

$$\{H,P^2+Q^2\}=2P\{H,P\}+2Q\{H,Q\}=0$$

また,

$$\{P^2+Q^2,S\}=2P\{P,S\}+2Q\{Q,S\}=2PQ+2Q(-P)=0$$

以上から 3 点渦問題では H,S,P^2+Q^2 という 3 つの独立した可換な保存量が存在する.
さらに, $\mathbf{c}=$ の場合には 4 つの保存量 H,Q,P,S が可換となる. $\square$

参考文献

[1] Paul K. Newton. *The N-Vortex Problem.* Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, NY, 1 edition, 2001.