

N 点渦系

竹田航太

2021 年 4 月 15 日

目次

1	Preliminary	1
1.1	Notation	1
1.2	渦度場	2
1.3	Poisson 方程式	2
1.4	Bio-Savart の法則	3
2	点渦	4
2.1	N 点渦系	4
3	2 次元	5
3.1	無限平面	5
3.2	単位円盤	5
3.3	一般の領域	6

概要

非粘性非圧縮流体において渦度が delta 関数の線形和で表される系を点渦系と呼ぶ。ここではいくつかの領域における点渦系の Hamiltonian についてまとめる。

1 Preliminary

1.1 Notation

いくつか Notation をまとめる。 $N \in \mathbb{N}$ が明らかな場合は省略する。

和の記号

- $\sum_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N$
- $\sum_{\beta \neq \alpha}^N = \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N$
- $\sum_{\alpha \neq \beta} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha}^N$

ベクトル

- $(x, y)^{\perp} = (-y, x)$ と書く. 2次元での時計回り 90° 回転を表す.
- 2次元の流れ関数 $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 回転を次のように定める. $\nabla \times \psi = \nabla^{\perp} \psi$

1.2 渦度場

3次元の流れ場 $u \in \mathbb{R}^3$ から誘導される渦度は以下で与えられる.

$$\omega = \nabla \times u \quad (1.1)$$

非圧縮流体を扱うので

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1.2)$$

が成り立つ.

(1.1) の勾配と回転をとると次がわかる.

$$\nabla \cdot \omega = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 u = -\nabla \times \omega \quad (1.4)$$

Theorem 1.1 (渦度 flux). (1.3) から閉曲面での渦度 *flux* の合計は 0

Proof. (1.3) と発散定理から閉曲面 S とその外向き法ベクトル n , S で囲まれた領域 V として

$$\int_S \omega \cdot n dS = \int_V \nabla \cdot \omega dV = 0$$

□

1.3 Poisson 方程式

一般のベクトル値関数に対して以下が成り立つ

Theorem 1.2 (Helmholtz/Hodge decomposition). 任意の $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して, $\exists \phi, \psi$ s.t.

$$u = u_{\phi} + u_{\psi} = \nabla \phi + \nabla \times \psi \quad (1.5)$$

流体の分野では ϕ を速度ポテンシャル, ψ を流れ関数と呼ぶ.

Remark 1.3. 渦なしの流れ $\nabla \times u_\phi = 0$ に対して, スカラーポテンシャル ϕ *s.t.* $u = \nabla \phi$ の存在がわかり, 非圧縮の流れ $\nabla \cdot u_\psi = 0$ に対して, ベクトルポテンシャル ψ *s.t.* $u = \nabla \times \psi$ の存在がわかる.

今, 非圧縮性の条件 (1.2) から以下を満たす流れ関数 ψ の存在が言える

$$u = \nabla \times \psi \quad (1.6)$$

(1.1) に代入して, 非圧縮性から整理すると流れ関数は以下の Poisson 方程式を満たす.

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (1.7)$$

Poisson 方程式は Laplace 作用素の (全空間の)Green 関数を用いて

$$\psi(x) = \int G(x, z) \omega(z) dz \quad (1.8)$$

と表される.

1.4 Bio-Savart の法則

与えられた渦度 ω に対して (1.8) から流れ関数が定まり, それより誘導される速度場は $u_\omega = \nabla \times \psi$ より次を満たす

Theorem 1.4. 非圧縮流体において, 与えられた ω に対して誘導される速度場 u_ω は次で与えられる.

$$u_\omega(x) = \nabla \times \int G(x, z) \omega(z) dz \quad (1.9)$$

$$= \int K(x - z) \omega(z) dz \quad (1.10)$$

ただし, *Bio-Savart Kernel* K は次で与えられる.

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|x\|^2} (-y, x) & (in \mathbb{R}^2) \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x\|^3} \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} & (in \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (1.11)$$

Remark 1.5. \mathbb{R}^3 の場合 *Bio-Savart* の法則はよく次のように表される.

$$u_\omega = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(x - z) \times \omega(z)}{\|x - z\|^3} dz \quad (1.12)$$

2 点渦

2.1 N 点渦系

$N \in \mathbb{N}$ とする．非粘性非圧縮 d 次元流体において以下のような渦度の分解を考える．

$$\omega(x) = \sum_{\alpha=1}^N \Gamma_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha})$$

ただし，渦度の強さ Γ_{α} は $\Gamma > 0$ または $-\Gamma$ のみを値にとる．孤立した点渦 x_{α} ($\alpha = 1, \dots, N$) から誘導される位置 $x \in \mathbb{R}^d$ 上の速度場は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x, t) \\ &= \nabla^{\perp} \psi_{\alpha}(x, t) \end{aligned}$$

ここで ψ_{α} は流れ関数であり，Green 関数 $G(x, z)$ を用いて

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}(x, t) &= \Gamma_{\alpha} \int G(x, z) \delta(z - x_{\alpha}) dz \\ &= \Gamma_{\alpha} G(x, x_{\alpha}) \end{aligned}$$

と表される．

さらに，点渦系は Hamilton 系になることが知られており，Green 関数を用いて系の Hamiltonian は以下で与えられる． $X_N = (x_1, \dots, x_N)$ とおいて，

$$\begin{aligned} H(X_N) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} G(x_{\alpha}, x_{\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha}^N \psi_{\beta}(x_{\alpha}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

点渦系は Hamilton 方程式 (のようなもの) を満たす．

$$\Gamma_{\alpha} \dot{x}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial y_{\alpha}}, \quad \Gamma_{\alpha} \dot{y}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial x_{\alpha}} \quad \alpha = 1, \dots, N \tag{2.2}$$

定数 Γ_{α} の分だけ厳密には Hamilton 方程式を満たしていないが，各変数 x_{α}, y_{α} を $\sqrt{\Gamma_{\alpha}} \text{sign}(\Gamma_{\alpha})$ 倍すれば定数なしの Hamilton 方程式を満たすようにできる．

また，(2.2) は Bio-Savart の法則から次のようにもかける． $r_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha})$ と書いて，

$$\dot{r}_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta \neq \alpha}^N \Gamma_{\beta} \frac{(r_{\alpha} - r_{\beta})^{\perp}}{\|r_{\alpha} - r_{\beta}\|^2} \tag{2.3}$$

3 2次元

3.1 無限平面

2次元平面 \mathbb{R}^2 における Poisson 方程式の Green 関数は次で与えられる．この Green 関数を G_0 とかく．

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log(|x - y|) = G_0(x, y)$$

N 点渦系の Hamiltonian は

$$H(X_N) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log(|x_\alpha - x_\beta|)$$

3.2 単位円盤

境界がある場合は境界での流れ関数を 0 にするように境界の形に合わせて Green 関数を調整する必要がある．

3.2.1 鏡像法

鏡像法を使う．単位円盤 $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ では x_α にある点渦に対して、次のように鏡像渦があたえられる．

$$\bar{x}_\alpha = \frac{R^2}{|x_\alpha|^2} x_\alpha \Big|_{R=1} = \frac{x_\alpha}{|x_\alpha|^2}$$

これを使って \mathbb{D} 上の Poisson 方程式の Green 関数は次で与えられる．

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - y| + \frac{1}{2\pi} \log|x - \bar{y}| + \frac{1}{2\pi} \log|y| \quad (3.1)$$

x, y について対称性が直ちには確認できないが後で確かめられる．

また、N 点渦系の Hamiltonian は次で与えられる．

$$\begin{aligned} H(X_N) = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|x_\alpha - x_\beta| \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|x_\alpha - \bar{x}_\beta| \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \log|x_\beta| \end{aligned} \quad (3.2)$$

ただし、半径 R の円盤の場合は定数が入る。^{*1} 第3項は $\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} = 0$ のとき 0 になるが、流れ関数を境界で 0 にするために必要。

上記の Hamiltonian を複素数 $z = x + iy$ で表すと次のようになる。

$$H(Z_N) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \log |z_{\alpha} - z_{\beta}| \\ + \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \log |1 - z_{\alpha} z_{\beta}^*|$$

3.2.2 解析

Lemma 3.1 ([1] の Chapter 3 Exercise 8 p.138). \mathbb{D} 上の N 点渦系の *Hamiltonian* は次のように表せる。

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^2 \log(1 - |x_{\alpha}|^2) + \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \log \left(1 + \frac{(1 - |x_{\alpha}|^2)(1 - |x_{\beta}|^2)}{|x_{\alpha} - x_{\beta}|^2} \right) \quad (3.3)$$

Proof. 次の恒等式が証明の本質である。

$$(x - y)^2 + (1 - x^2)(1 - y^2) = (xy - 1)^2 \quad (3.4) \\ (|x - y|^2 + (1 - |x|^2)(1 - |y|^2) = |xy^* - 1|^2 \text{ for complex})$$

□

3.3 一般の領域

一般の領域 Ω 上の Green 関数を G とかき、全平面に対する残差を g とかく。

$$g(x, y) = G(x, y) - G_0(x, y)$$

N 点渦系の Hamiltonian は次のようにかける。

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} G(x_{\alpha}, x_{\beta}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^2 g(x_{\alpha}, x_{\alpha}) \quad (3.5)$$

参考文献

- [1] Paul K. Newton. *The N-Vortex Problem*. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, NY, 1 edition, 2001.

^{*1} 第3項が $-\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \log \frac{R}{|x_{\alpha}|}$