Appendix.A アンジュレータ放射の電場計算

[?] を参考に導出を行う。

リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルは

$$\boldsymbol{E}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{c}\frac{\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}}{R(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\Bigg|_r \tag{0.0.1}$$

これをフーリエ変換することによって、回折格子で波長ごとに分光された電場振幅を求めることができる。

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}_r(t_r)e^{-i\omega t}dt \tag{0.0.2}$$

この時、観測者が観測する振幅を求める必要があるため、積分変数は観測者の時刻である。遅延時間との関係は

$$t = t_r + \frac{R_r}{c} \tag{0.0.3}$$

である。また

$$dt = (1-\boldsymbol{n\beta})dt_r \tag{0.0.4}$$

の関係から、積分変数を変換して、

$$\boldsymbol{E}_r(\omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}}{R(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}\Bigg|_r e^{-i\omega(t_r+R_r/c)}dt_r \tag{0.0.5}$$

$$\tag{0.0.6}$$

さらに R が一定であると仮定し、

$$\frac{\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}}{R(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})}{1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}} \tag{0.0.7}$$

の関係式を用いると

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \frac{-ie\omega}{4\pi\epsilon_0 cR}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\beta})\right]_r e^{-i\omega(t_r+R_r/c)}dt_r \tag{0.0.8}$$