PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Professor Giovanni Armando

1) Calcule as derivadas parciais das funções a seguir:

a) $z = x^2 . \text{sen}\, y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,\text{sen}y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$$

b) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 4y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 8y$$

c) $z = \text{sen}(3x) . \cos(2y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\cos(2y)\cos(3x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2\,\text{sen}(3x)\,\text{sen}(2y)$$

d) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x+y+z} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y+z} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{x+y+z} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

2) Determinar as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ das funções abaixo:

a) $z = x^2 + 3y^2 + 4xy + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4x$$

b) $z = x^2\, \text{sen}\,(2xy)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,\text{sen}(2xy) + x^2 \cdot 2y\cos(2xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3\cos(2xy)$$

c) $z = e^{x^2 - 2y^2 + 4x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x+4)\left(e^{x^2-2y^2+4x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (-4y)\left(e^{x^2-2y^2+4x}\right)$$

d) $z = \dfrac{1}{x + 2y + 1} = (x+2y+1)^{-1}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{(x+2y+1)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2}{(x+2y+1)^2}$$

$f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

3) Dado o ponto $P(-1, 4)$ e $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcule:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

$2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+y^2)^{-1/2}$

$= x(x^2+y^2)^{-1/2}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,4)$

$-1 \cdot (1+16)^{-1/2}$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

c) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

$y(x^2+y^2)^{-1/2}$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,4)$

$4(1+16)^{-1/2}$

$= \frac{4\sqrt{17}}{17}$

4) Demonstrar que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1$, se $f(x, y, z) = x + \frac{x-y}{y-z}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{1} + \cancel{\frac{1}{y-z}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{-\frac{1}{y-z}} - \cancel{\frac{(x-y)}{(y-z)^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \cancel{+\frac{(x-y)}{(y-z)^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1$

5) Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y, z, t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$

$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\cancel{2}v}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}}$; $v \in \{x, y, z, t\}$

6) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção da superfície $f(x, y) = 4x^2y - xy^3$ com o plano $y = 2$ no ponto $P_0(3, 2, 48)$.

$y = 2 \Rightarrow z = f(x,2) = 8x^2 - 8x$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 16x - 8 \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right]^{x=3} = 16 \cdot 3 - 8 = 40$

7) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção da superfície $f(x, y) = 4x^2y - xy^3$ com o plano $x = 3$ no ponto $P_0(3, 2, 48)$.

$z = f(3,y) = 36y - 3y^3$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 36 - 9y^2 \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{y=2} = 36 - 36 = 0$

8) A função $T(x, y) = 60 - 2x^2 - 3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontrar a razão de variação da temperatura em relação a distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos x e y, no ponto (1, 2). Considerar a temperatura medida em graus Celsius e a distância em cm.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]^{x=1} = -4x\Big]^{x=1} \Rightarrow -4\,°C/cm \text{ em } x$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]^{y=2} = -6y\Big]^{y=2} \Rightarrow -12\,°C/cm \text{ em } y$$

9) Determine as derivadas parciais de 1ª ordem da função $z = xye^{xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + xy^2e^{xy} \qquad \Big| \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} + x^2ye^{xy}$$

10) Se $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ verifique que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(2x+y)}{x^2+xy+y^2} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(2x^2+xy)}{x^2+xy+y^2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(2y+x)}{x^2+xy+y^2} \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(2y^2+xy)}{x^2+xy+y^2}
\end{aligned}\right\} + = 2 \text{ //}$$

11) Determine as derivadas parciais de 2ª ordem da função: $z = \frac{y^2}{x} - \frac{x^2}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2} - \frac{2x}{y} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3} - \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x} + \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x} - \frac{x^2}{y^3}$$

12) Determine as derivadas parciais de 2ª ordem da função $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\frac{d}{dx} f(g(h(x))) = h'(x)\, g'(h(x))\, f'(g(h(x)))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

13) Determinar as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções:

a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + 8y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -18y + 8x^2$$

b) $z = x^2y^2 - xy$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

c) $z = \ln xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

d) $z = e^{xy}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$$

14) Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas e satisfaz a equação de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, ela é dita uma função harmônica. Verificar se as funções dadas são harmônicas:

a) $z = y^3 - 3x^2y$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -6y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 6y \end{aligned}\right\} S = 0 \therefore \text{harmônica}$$

b) $z = x^2 + 2xy$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}\right\} S = 2 \neq 0 \text{ não harmônica}$$

c) $z = e^x \cos y$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -e^x \cos y \end{aligned}\right\} S = 0 \therefore \text{harmônica}$$

15) Verifique que a função $w = e^{3x+4y} . \cos 5z$ é harmônica.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 3e^{3x+4y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 9e^{3x+4y}\cos(5z)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 16e^{3x+4y}\cos 5z$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -25e^{3x+4y}\cos(5z)$$

Soma = 0 e $\therefore$ é harmônica

16) Mostre que $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ para $z = xy + x.e^{\frac{y}{x}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{\frac{y}{x}} + x \cdot e^{\frac{y}{x}} \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right) = y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{ye^{\frac{y}{x}}}{x} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} = xy + xe^{\frac{y}{x}} - ye^{\frac{y}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{y}{x}} = x + e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + ye^{\frac{y}{x}} \Rightarrow x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + (xy + xe^{\frac{y}{x}}) = xy + z \quad \square$$