6. Um número inteiro n é chamado de *bilegal* se n é maior do que 1 e n^2 é igual à soma de n inteiros positivos consecutivos. Por exemplo, 3 é bilegal, pois $3^2 = 9 = \underbrace{2+3+4}_{\text{3 inteiros consecutivos}}$.

a) Verifique que 5 é bilegal.

Lembrete:
A soma $1+2+3+\cdots+(k-1)$ é igual a $\frac{k(k-1)}{2}$.

Fórmula do lembrete.

$5^2=25$, então $25=(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+5)=5x+\frac{5\cdot 6}{2}=5x+15$

↳ 5 números consecutivos

$\Rightarrow 25=5x+15 \Rightarrow x=2$, logo,

$5^2=3+4+5+6+7$.

b) Verifique que 4 não é bilegal.

Usando a ideia de (A), $4^2=16=(x+1)+\cdots+(x+4)=4x+\frac{4\cdot 5}{2}=4x+10$

$\Rightarrow 4x=6 \Rightarrow 2x=3$, absurdo pois x deve ser inteiro. Logo, 4 não é bilegal.

c) Explique por que nenhum número par é bilegal e todo número ímpar maior do que 1 é bilegal.

Par

É da forma $(2n)^2=4n^2=(x+1)+\cdots+(x+2n)=2nx+\frac{\cancel{2}n\cdot(2n+1)}{\cancel{2}}=2nx+2n^2+n$

$\Rightarrow 2n^2=2nx+n \Rightarrow 2n=2x+1$, impossível.

↳ $\div n \neq 0$, pois $n>1$ pelo enunciado

Ímpar

É da forma $(2n+1)^2=(x+1)+\cdots+(x+(2n+1))=(2n+1)x+\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{2}$

$=(2n+1)x+(2n+1)(n+1)=(2n+1)(x+n+1)$

$\Rightarrow 2n+1=x+n+1 \Rightarrow x=n$. Ou seja, para todo ímpar da forma $2n+1$, seu quadrado pode ser escrito pela soma $(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+(2n+1))$.