(3) Para qualquer número **positivo** x, dizemos que os números $x + 1$ e $\frac{x}{x+1}$ são *filhos* de x e que os dois são irmãos. Por exemplo, $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{3}$ são irmãos, pois são filhos de $\frac{1}{2}$; de fato, $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+1$ e $\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}$.

(a) Encontre um irmão de $\frac{5}{7}$.

$\frac{5}{7}$ não é da forma $x+1$, pois aí $x=\frac{5}{7}-1=\frac{-2}{7}<0$, não positivo.

Logo $\frac{5}{7}$ é da forma $\frac{x}{x+1}$: $\frac{x}{x+1}=\frac{5}{7} \Rightarrow 7x=5x+5 \Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}}$.

Um outro filho de $\frac{5}{2}$ é $\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$, irmão de $\frac{5}{7}$.

(b) Um número pode ser filho de dois números positivos diferentes? Por quê?

Suponha que y seja filho de x. Suponha $y=x+1$.

〃 〃 y 〃 〃 〃 z. 〃 $y=\frac{z}{z+1}$.

Logo $x+1=\frac{z}{z+1} \Rightarrow x=\frac{z}{z+1}-1=\frac{z-(z+1)}{z+1}=\frac{-1}{z+1}$. Ou seja, ou z é negativo ou x é negativo. Impossível ser filho de números positivos diferentes.

(c) Mostre que $\frac{1}{2008}$ é descendente de 1, isto é, ele é filho de um filho de um filho … de um filho de 1.

O pai de $\frac{1}{2008}$ é $\frac{1}{2008}-1$ (impossível) ou x, de modo que $\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2008}$.

Então $2008x=x+1 \Rightarrow 2007x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2007}$. Logo $\frac{1}{2008}$ é filho de $\frac{1}{2007}$.

Sucessivamente até um pai igual a $\frac{1}{2}$, que é filho de 1: $\frac{1}{1+1}$.