**Problema 28.** Um correio vende cinco tipos diferentes de envelopes e 4 tipos de selos. De quantas maneiras pode-se comprar um envelope e um selo?

1 Envelope: 5 maneiras
1 Selo: 4 maneiras
PFC ⇒ $5 \cdot 4 = 20$ maneiras //

**Problema 29.** De quantas maneiras é possível escolher uma vogal e uma consoante da palavra "TOCAIA"?

Vogal: $\{O, A, I\}$
Consoante: $\{T, C\}$
PFC ⇒ $3 \cdot 2 = 6$ maneiras //

**Problema 30.** Estão escritos em um quadro negro sete substantivos, cinco verbos e dois adjetivos. Podemos formar uma frase escolhendo uma palavra de cada tipo, sem nos importarmos sobre se a frase faz sentido ou não. Quantas frases podemos formar desta maneira? (em ordem?)

Frase: S V A ⇒ $3! = 6$ formas de escolher a ordem (SVA, SAV, VSA, VAS, AVS, ASV).

S: 7
V: 5
A: 2
PFC ⇒ 70

↳ resposta considerando somente as palavras sem ordem

$70 \cdot 6 = 420$ frases //

↳ Considerando a ordem

**Problema 31.** Cada um de dois novos colecionadores tem 20 selos e 10 cartões postais. Dizemos que uma troca é justa se um selo é trocado por um selo e um cartão postal é trocado por um cartão postal. Quantas trocas é possível fazer entre esses dois colecionadores?

Selos do Col. 1: 20
" " Col. 2: 20
1 troca $= 20 \cdot 20 = 400$

Análogo aos cartões: $10 \cdot 10 = 100$

Soma $= 500$ //

↳ Soma pq não é trocar selo E cartão, são trocas independentes.

**Problema 32.** Quantos números com cinco algarismos têm todos os seus algarismos com a mesma paridade (todos pares ou todos ímpares)?

Pares: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
ou
Ímpares: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Soma: $5^4(4+5) = 9 \cdot 5^4$ //

**Problema 33.** De quantas maneiras podemos enviar seis cartas urgentes se podemos usar três mensageiros e cada carta pode ser dada a qualquer um deles?

Carta 1: 3 mensageiros
" 2: 3 "

$\Big\}$ 6 cartas $\Rightarrow \overbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}^{6 \text{ vezes}} = 3^6$ //

**Problema 35.** Uma prateleira tem cinco livros. De quantas maneiras podemos empilhar alguns ou todos esses livros? A pilha pode conter apenas um livro.

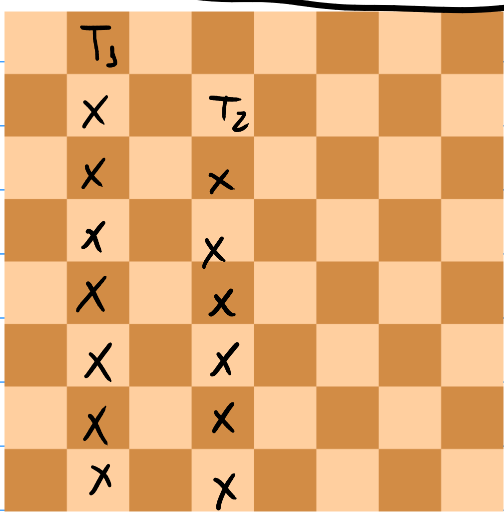
Pilha com 1 livro: 5
ou " " 2 livros: $5 \cdot 4$
ou " " 3 " : $5 \cdot 4 \cdot 3$
ou " " 4 " : $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
ou " " 5 " : $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\Big\}$ soma = 325 //

**Problema 36.** De quantas maneiras podemos posicionar oito torres em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se atacar entre si?

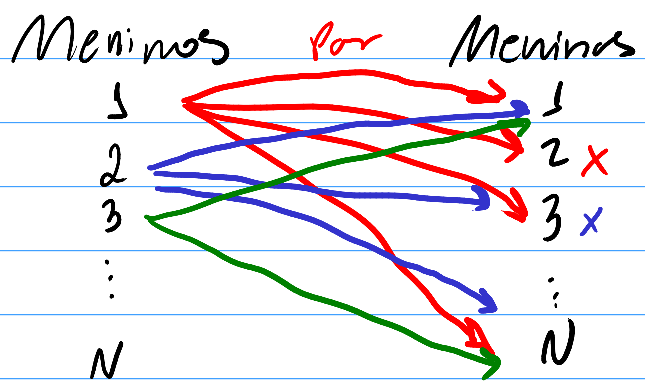
A torre da primeira linha pode estar em 8 casas.
" " " segunda " " " " 7 casas (menos 1)
⋮
" " " oitava " " " " 1 casa.

PFC = 8! //




→ Linha 1, 8 maneiras
→ Linha 2, 7 maneiras
⋮

**Problema 37.** Uma aula de dança tem N meninos e N meninas. De quantas maneiras podemos arrumá-los em pares (um menino com uma menina) para uma dança?



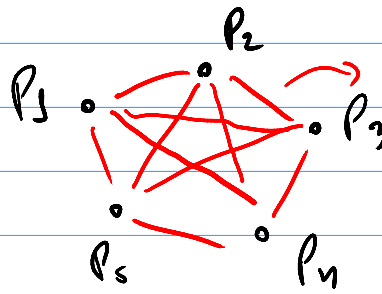

O menino 1 tem N opções, e após escolher o par, o menino 2 tem N-1 opções, o menino 3 tem N-2 e assim sucessivamente até o menino N:

$N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\cdots(1) = N!$ //

**Problema 38.** As regras de um torneio de xadrez estipulam que cada participante tem que jogar com cada um dos outros exatamente uma vez. Quantas partidas serão jogadas se o torneio tem 18 participantes?

Escolha 2 participantes para cada partida (ordem da escolha não importa): $C_{2,18} = \frac{18\cdot 17}{2} = 153$. //

É interessante visualizar como uma "rede", onde cada participante é um vértice e as partidas são segmentos:




→ Partidas entre eles é o mesmo que escolher 2 pontos entre 5, e o segmento não tem ordem ($P_1P_2 = P_2P_1$) $\Rightarrow C_{2,5} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

↳ 5 jogadores de exemplo

**Problema 40.** Uma mãe tem duas maçãs, três peras e quatro laranjas. Durante nove dias ela dá uma fruta para seu filho no café da manhã. De quantas maneiras isto pode ser feito?

1º Dia ... Dia 9

MMPPPLLLL → A ordem das letras indica a ordem que a mãe dá as frutas. Logo, permutação: $P_9^{2,3,4} = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260$ //

**Problema 41.** Um dormitório tem três quartos: um para um único aluno, um para dois alunos e um para quatro alunos. De quantas maneiras podemos colocar sete estudantes neste dormitório?

$D_1 \quad D_2 \quad D_3$

$7 \quad C_{2,6} \quad C_{4,4} \Rightarrow PFC = 7 \cdot 15 = 105$ maneiras,,

já escolhemos o do Dormitório 1

$\hookrightarrow \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \quad \hookrightarrow 1$

$\hookrightarrow$ ordem da escolha não importa

**Problema 43.** Quantas "palavras" podem ser escritas usando-se exatamente cinco letras A, não mais do que três letras B e nenhuma outra letra?

AAAAA

$\hookrightarrow$ 0B ou, 1B ou, 2B ou 3B

$\hookrightarrow P_5^5 \quad \hookrightarrow P_6^5 \quad \hookrightarrow P_7^{5,2} \quad \hookrightarrow P_8^{5,3}$

Soma

$= 1 + 6 + 21 + 56 = 84$,,

**Problema 44.** Quantos número de dez algarismos têm pelo menos dois algarismos iguais?

Total: $9 \cdot 10^9$

O que não queremos: Todos os algarismos diferentes $= 9 \cdot 9!$

Resposta: Total − Não queremos $= 9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9! = 9 \cdot (10^9 - 9!)$,,

**Problema 45:** Será que os números com sete algarismos diferentes de 1 constituem mais de 50% de todos os números com sete algarismos?

$\hookrightarrow 9 \cdot 10^6 \qquad \hookrightarrow 8 \cdot 9^6$

$$\frac{8 \cdot 9^6}{9 \cdot 10^6} = \frac{8 \cdot 9^5}{10^6} > 50\%$$,,

**Problema 46.** Jogamos um dado seis vezes. Entre todos os resultados possíveis, em quantos aparece pelo menos um seis?

Total: $6^6$

Não queremos: Nenhum $6 \Rightarrow 5^6$ $\Big\}$ Total − Não q. $= 6^6 - 5^6$ //

**Problema 47.** De quantas maneiras podemos dividir 14 pessoas em sete pares?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Par 1: } C_{2,14} = \frac{14 \cdot 13}{2} \\ \text{Par 2: } C_{2,12} = \frac{12 \cdot 11}{2} \\ \text{Par 3: } C_{2,10} = \frac{10 \cdot 9}{2} \\ \vdots \\ \text{Par 7: } C_{2,2} = \frac{2 \cdot 1}{2} \end{array}\right\} \text{PFC: } \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{7 \text{ vezes}}} = \frac{14!}{2^7}$$

Porém a ordem dos pares escolhidos não importa, $P_1 P_2 \cdots P_7$ pode ser organizada de 7! maneiras e portanto a resposta é

$$\frac{14!}{7! \cdot 2^7} = 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \ //$$

**Problema 48:** Quantos números com nove algarismos têm a soma de seus algarismos par?

Escolha os oito primeiros algarismos. Se a soma deles for par, o último algarismo deve ser par (5 maneiras). Se a soma for ímpar, o último " " " ímpar (5 maneiras). Ou seja, após escolher os oito algarismos só precisamos escolher o último dentre 5 opções: $\underbrace{9 \cdot 10^7}_{8 \text{ algarismos}} \cdot \underbrace{5}_{\text{par ou ímpar}}$.