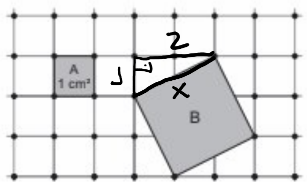
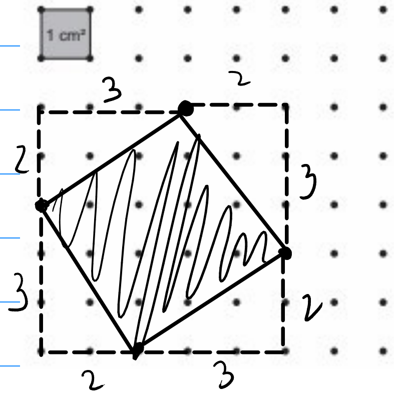
(2) Numa folha de papel marcamos pontos igualmente espaçados na horizontal e na vertical, de modo que o quadrado A tenha área 1 cm², como na figura. Dizemos que um quadrado é *legal* se seus vértices são quatro desses pontos; por exemplo, os quadrados A e B são legais.



(a) Qual é a área do quadrado B?

Cada lado mede 1 cm = $\sqrt{1\,cm^2}$. Pelo Teorema de Pitágoras (vide figura),
Área de B = $x^2 = 1^2 + 2^2 = 5\ cm^2$.

(b) Desenhe ao lado um quadrado legal de área 13 cm².



Note que $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$. Fazendo como em (A), desenhamos o quadrado ao lado.

(c) Existe um quadrado legal de área 41 cm²? E de área 43 cm²? Justifique sua resposta.

Todo quadrado legal é da forma desenhada em (B), com triângulos de lados a e b. Logo, a área de um quadrado legal é sempre da forma a^2+b^2, incluindo $a=0$ ou $b=0$ (como o □ de 1cm²).
Como $41 = 16+25 = 4^2+5^2$, existe quadrado legal de área 41 cm².
Já $43 = 1+42 = 4+39 = 9+34 = 16+27 = 25+18 = 36+7$, nenhuma soma de quadrados perfeitos resultam em 43 e portanto não existe quadrado legal de área 43 cm².

(d) Mostre que para cada quadrado legal existe outro quadrado legal com o dobro de sua área.

Se a área desse quadrado legal é a^2+b^2, então o dobro de sua área é $2a^2+2b^2 = (a+b)^2 + |b-a|^2$. Esses lados podem ser formados com um lado medindo $a+b$ e outro medindo $b-a$ (se $b \geq a$) ou $a-b$ (se $a \geq b$): $(a+b)^2 + (b-a)^2 = a^2+b^2+2ab+b^2-2ab+b^2 = 2a^2+2b^2$.