(5) Um número inteiro n é *simpático* quando existem inteiros positivos a, b e c tais que $a<b<c$ e $n=a^2+b^2-c^2$. Por exemplo, os números 1 e 2 são simpáticos, pois $1=4^2+7^2-8^2$ e $2=5^2+11^2-12^2$.

(a) Verifique que $(3x+1)^2+(4x+2)^2-(5x+2)^2$ é igual a $2x+1$, qualquer que seja x.

$$\left.\begin{aligned}(3x+1)^2 &= 9x^2+6x+1\\ (4x+2)^2 &= 16x^2+16x+4\\ (5x+2)^2 &= 25x^2+20x+4\end{aligned}\right\} x^2(9+16-25)+x(6+16-20)+(1+4-4)$$

$$= x^2\cdot 0 + x\cdot 2 + 1 = 2x+1.$$

(b) Encontre números inteiros m e n tais que $(3x-m)^2+(4x-n)^2-(5x-5)^2=2x$, qualquer que seja x.

$$\left.\begin{aligned}(3x-m)^2 &= 9x^2-6mx+m^2\\ (4x-n)^2 &= 16x^2-8nx+n^2\\ (5x-5)^2 &= 25x^2-50x+25\end{aligned}\right\} x^2(9+16-25)+x(-6m-8n+50)+(m^2+n^2-25)$$

$$= x(-6m-8n+50)+(m^2+n^2-25) = 2x+0$$

Logo $-6m-8n+50=2 \Rightarrow 3m+4n=24$
e $m^2+n^2=25$ } Solução: $m=4$ e $n=3$, por tentativa e erro. OBS: Dá pra fazer por substituição.

(c) Mostre que o número 4 é simpático.

Seguindo a fórmula de (B) para $2x=4 \Rightarrow x=2$, encontramos $3x-4=3\cdot2-4=2$, $4x-3=4\cdot2-3=5$ e $5x-5=5\cdot2-5=5$.
Logo: $2^2+5^2-5^2=2\cdot2=4$ e portanto 4 é simpático.

(d) Mostre que todos os números inteiros positivos são simpáticos.

Os números inteiros positivos ou são ímpares ou são pares. Se forem ímpares, iguale a $2x+1$ e encontre a, b e c pela substituição de x na fórmula de (A). Analogamente aos pares, igualando a $2x$ e fazendo como em (C).