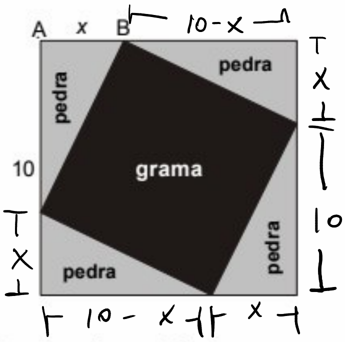
OBMEP 2005 Respostas sem justificativa não serão consideradas.

QUESTÃO 4



Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.

A) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.
B) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x.

Sabe-se que o canteiro de grama custa R$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

C) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
D) Se o prefeito tem apenas R$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

A) Se $x=2$, então $10-x=8$ e pelo Teorema de Pitágoras calculamos o lado ao quadrado (a área) do quadrado de grama: $l^2 = 2^2 + 8^2 = 4 + 64 = 68\ cm^2$.

B) Analogamente à A, $l^2 = x^2 + (10-x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$.

C) Sabe-se por B que o preço do canteiro de grama é $4 \cdot l^2$. Como os canteiros triangulares têm a área que sobram do quadrado de lado 10, eles têm área total $10^2 - l^2$ e custam $3 \cdot (100 - l^2)$. Somando os preços, obtemos
$4l^2 + 3 \cdot 100 - 3l^2 = l^2 + 300 = 2x^2 - 20x + 400 = 2(x^2 - 10x + 25) + 350$
$= 2(x-5)^2 + 350$, cujo valor mínimo é quando $x = 5$, com o valor de $2 \cdot (5-5)^2 + 350 = 350$ reais.

D) Fazendo $2(x-5)^2 + 350 = 358^* \Rightarrow 2(x-5)^2 = 8 \Rightarrow (x-5)^2 = 4 \Rightarrow (x-5)^2 = 2^2$
$\Rightarrow x - 5 = 2 \Rightarrow x = 7$ ou $x - 5 = -2 \Rightarrow x = 3$.
Se $x = 7$ ou 3, a área do canteiro de grama será a mesma,
$2 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3 + 100 = 18 + 40 = 58\ m^2$.

*Se fosse um valor menor que 358, a equação original teria resultados menores.