Professor Giovanni Armando

Avaliação II de EDOs

1) Use o método de separação de variáveis para resolver cada uma das equações diferenciais abaixo:

(a) $y' = \frac{1+y}{1+x}$. $(x \neq -1)$

$$\frac{dy}{1+y} = \frac{dx}{1+x} \Rightarrow \int \frac{1}{1+y}\,dy = \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$\ln|1+y| = \ln|1+x| + C \Rightarrow |1+y| = C|1+x| \Rightarrow 1+y = C + Cx \Rightarrow \boxed{y = Cx + (C-1)}$$

(b) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\arctan y = \arctan x + C \Rightarrow \boxed{y = \tan(\arctan x + C)}$$

(c) $y' = (1+y)(1+x)$.

$$\frac{dy}{1+y} = (1+x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \ln|1+y| = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1}$$

(d) $y' - 2xy = x$.

$$I = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2}$$

$$\frac{d(e^{-x^2}y)}{dx} = xe^{-x^2} \Rightarrow e^{-x^2}y = \int xe^{-x^2}\,dx = \frac{e^{-x^2}}{-2} + C$$

$$\boxed{y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}}$$

2) Resolva a equação diferencial dada.

(a) $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = t \Rightarrow dy = x\,dt + t\,dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t$$

$$x\frac{dt}{dx} + t = e^{t} + t \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = e^{t} \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt\, e^{-t}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int e^{-t}dt \Rightarrow \ln|x| = -e^{-t} + C \Rightarrow \ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + C$$

$$\Rightarrow -\ln(C - \ln|x|)\cdot x = y$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x\ln\left(\frac{1}{C - \ln|x|}\right)}$$

(b) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

$$xy = t \Rightarrow y\,dx = dt - x\,dy$$

$(t \neq 0)$

$$dt + 2\sqrt{t}\,dy = 0 \Rightarrow \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2dy \Rightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int -2dy$$

$$2\sqrt{t} = -2y + C \Rightarrow \boxed{2\sqrt{xy} = -2y + C}$$

(c) $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$ $(x, y \neq 0)$

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)dx - 2dy = 0$$

$$t = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dt + t\,dy = dx$$

$$\left(t - \frac{1}{t}\right)(y\,dt + t\,dy) = 2dy$$

$$\left(\frac{t^2-1}{t}\right)y\,dt + (t^2-1)\,dy = 2dy$$

$$\left(\frac{t^2-1}{t}\right)dt = \frac{dy}{y}(3 - t^2) \Rightarrow \left(\frac{t^2-1}{3t-t^3}\right)dt = \frac{dy}{y}$$

$$\int\left(\frac{t^2-1}{3t-t^3}\right)dt = \ln|y| + C$$

$$= \frac{-1}{3}\left(\ln(3t - t^3)\right)$$

$$\Rightarrow yC = (3t - t^3)^{-1/3}$$

$$y^{-3}C = 3\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3 \Rightarrow C = 3xy^2 - x^3$$

$$\boxed{\therefore\ y = \pm\sqrt{\frac{C + x^3}{3x}}}$$

3) Verifique se cada uma das equações a seguir é exata. E, caso afirmativo, resolva-a.

(a) $((x^3 + y^2)\,dx + (2xy + \cos y)\,dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(x^3+y^2)}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\partial(2xy+\cos y)}{\partial x} &= 2y \end{aligned}\right\} \therefore \text{é exata}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^3+y^2 \Rightarrow F = \int (x^3+y^2)\,dx + g(y) = \frac{x^4}{4} + y^2x + g(y) \,{}^{*}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + \cos y \overset{*}{\Rightarrow} 2xy + g'(y) = 2xy + \cos y \Rightarrow g(y) = \operatorname{Sen} y + C$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{x^4}{4} + y^2x + \operatorname{Sen} y + C = 0}$$

(b) $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial e^y}{\partial y} &= e^y \\ \frac{\partial(xe^y - 2y)}{\partial x} &= e^y \end{aligned}\right\} \therefore \text{é exata}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y \Rightarrow F = xe^y + g(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y - 2y \Rightarrow xe^y + g'(y) = xe^y - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + C$$

$$\boxed{\therefore\ xe^y - y^2 + C = 0}$$

(c) 2x tg y dx + sec² y dy = 0

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(2x\,tg\,y)}{\partial y} &= 2x\sec^2 y\\ \frac{\partial(\sec^2 y)}{\partial x} &= 0\end{aligned}\right\} \therefore \text{não é exata}$$

(d) (y - x²)dx + 2xdy = 0

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(y-x^2)}{\partial y} &= 1\\ \frac{\partial(2x)}{\partial x} &= 2\end{aligned}\right\} \therefore \text{não é exata}$$

4) Resolva a equação diferencial de ordem superior.

a) y'''' - 5y'' – 36y = 0

$$y = e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha^4 - 5\alpha^2 - 36 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 1\cdot(-36)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$\alpha^2 = 9$ ou $\alpha^2 = -4$

Logo $\alpha \in \{3; -3; 2i; -2i\}$

$\boxed{y = e^{3x}}$ $\boxed{y = e^{-3x}}$ $\boxed{y = \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)i}$ $\boxed{y = \cos(-2x) + \operatorname{sen}(-2x)i}$

b) y'''' - 3y''' - 30y'' + 128y' – 96y = 0

$y = e^{\alpha x} \Rightarrow \alpha^4 - 3\alpha^3 - 30\alpha^2 + 128\alpha - 96 = 0 \Rightarrow \alpha \in \{-6; 1; 4\}$

$\boxed{y = e^{-6x}}$ $\boxed{y = e^{x}}$ $\boxed{y = e^{4x}}$

5) Sabe-se que a população de uma certa comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes em qualquer instante. Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará? Suponha que a população da comunidade do problema anterior seja 10000 após 3 anos. Qual era a população inicial? Qual será a população em 10 anos?

$\frac{dy}{dt} = Ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dt \Rightarrow \ln|y| = Kt + C \Rightarrow y = Ce^{tK}$

$y(0) = C \Rightarrow y(5) = 2C = Ce^{5K} \Rightarrow 2 = e^{5K} \Rightarrow K = \ln(2)/5$

$\Rightarrow y = C\left(e^{\ln(2)}\right)^{t/5} = C \cdot 2^{t/5}$

$y(t) = 3C \Rightarrow 2^{t/5} = 3 \Rightarrow t/5 = \log_2 3 \Rightarrow t = 5 \cdot \log_2 3 \approx 7{,}9$ anos para triplicar

$y(3) = 10^4 = C \cdot 2^{3/5} \Rightarrow C = \frac{10^4}{2^{3/5}} \approx 6597$ pessoas $= y(0)$ (pop. inicial)

$y(10) = \frac{10^4}{2^{3/5}} \cdot 2^{10/5} = 10^4 \cdot 2^{7/5} \approx 26.390$ pessoas em 10 anos.