(6) Fernando e Isaura inventaram um jogo diferente, cujas regras são as seguintes:

1. eles começam uma partida com 128 palitos cada um;
2. em cada jogada, eles tiram par ou ímpar; se sai par, Fernando dá metade dos palitos que tem para Isaura e, se sai ímpar, Isaura dá a metade dos palitos que tem para Fernando.
3. eles repetem o procedimento da regra 2 até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida onde a seqüência das três primeiras jogadas é **par**, **ímpar**, **par**:

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\textbf{par}}$	64	192	$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\textbf{ímpar}}$	160	96	$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\textbf{par}}$	80	176	...

(a) Complete o esquema com o número de palitos de Fernando e Isaura, de acordo com as jogadas indicadas.

(b) Uma partida acabou quando Fernando ficou com 101 palitos. Na última jogada saiu par ou ímpar?

(c) Qual foi a seqüência de pares e ímpares da partida que acabou quando Fernando ficou com 101 palitos?

(d) Mostre que qualquer partida acaba com exatamente sete jogadas.

(a)

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura		Fernando	Isaura	
128	128	$\xrightarrow[\text{1ª jogada}]{\textbf{ímpar}}$	192	64	$\xrightarrow[\text{2ª jogada}]{\textbf{ímpar}}$	224	32	$\xrightarrow[\text{3ª jogada}]{\textbf{par}}$	112	144	...

b)

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura
x	$256-x$	$\xrightarrow{\text{ímpar}}$	$x+\frac{256-x}{2}$	$\frac{256-x}{2}$

Percebe que o número total de palitos sempre é 256. Se Fernando tinha x palitos na última jogada, Isaura tinha $256-X$. Se saiu ímpar, Isaura fica com metade e Fernando ganha a outra metade.

Pelo enunciado: $x+\frac{256-x}{2}=101 \Rightarrow 2x+256-x=202 \Rightarrow x=202-256=-54$

Como é impossível Fernando ter -54 palitos, a última jogada deve ter sido par.

Fernando	Isaura		Fernando	Isaura
x	$256-x$	$\xrightarrow{\text{par}}$	$\frac{x}{2}$	$256-x+\frac{x}{2}$

$\frac{x}{2}=101 \Rightarrow x=202$ e $256-x=54$.

c) Vamos fazer como em (B). Seja N o número de Fernando após uma jogada. Se foi uma jogada ímpar, Fernando tinha $x+\frac{256-x}{2}=N \Rightarrow x=2N-256$. Logo, como $x>0$, devemos ter $2N-256>0$ e portanto $N>128$. Assim, uma jogada ímpar só ocorre se o resultado de Fernando for maior que 128 e uma jogada par é feita caso contrário.

Assim, montamos de trás pra frente olhando esses critérios:

F	I
128	128

$\xrightarrow[1^a]{P}$

F	I
64	192

$\xrightarrow[2^a]{I}$

F	I
160	96

$\xrightarrow[3^a]{P}$

F	I
80	176

$\xrightarrow[4^a]{P}$

F	I
40	216

$\xrightarrow[5^a]{I}$

F	I
148	108

$\xrightarrow[6^a]{I}$

F	I
202	54

$\xrightarrow[7^a]{P}$

F	I
101	155

A sequência foi: PIPPIIP.

d) Toda operação ímpar divide o número de Isaura por 2 e o de Fernando se torna $x + \frac{256-x}{2} = \frac{256+x}{2}$, também dividindo-o por 2.
Toda operação par também divide o número de ambos por 2.
Como os números iniciais são $128 = 2^7$, só se pode dividir por 2 exatamente 7 vezes até restarem números ímpares (sem o fator 2).