Portal da Matemática OBMEP

Professor Giovanni Armando

João Victor Santos

Avaliação I de EDOs

1) Dada a função $f(x,y)=\sqrt{25-9x^2-4y^2}$, determine f(1,2), o domínio e a imagem.

$$\boxed{f(1,2)=\sqrt{25-9\cdot 1^2-4\cdot 2^2}=\sqrt{25-9-16}=0}$$

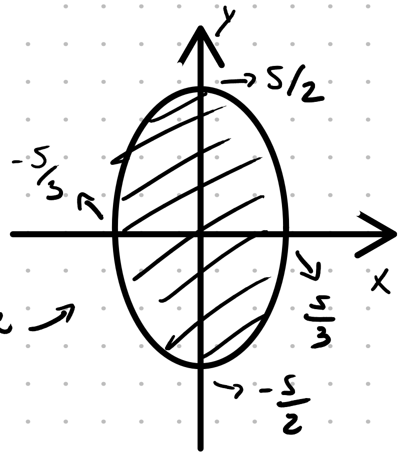
C.E.: $25-9x^2-4y^2\geq 0 \Rightarrow (3x)^2+(2y)^2\leq 25=5^2$

$$\boxed{D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (3x)^2+(2y)^2\leq 5^2\}}$$

Circunferência $\frac{1}{3}$ menor em x. $\Rightarrow a=\frac{5}{3}$

Circunferência $\frac{1}{2}$ menor em y. $\Rightarrow b=\frac{5}{2}$

Elipse



$\boxed{Im(f)=[0;5]}$

Maior valor possível com menor $(3x)^2+(2y)^2$, $f(0;0)$

Menor valor com máximo $(3x)^2+(2y)^2$, $f(1;2)$

2) Determine os domínios e a imagens das funções $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2y-y^2}$ e $g(x,y)=senxy\,.\,cosy^2$

$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2y-y^2}$
$=z$

C.E.: $x^2y-y^2\neq 0 \Rightarrow y(x^2-y)\neq 0 \Rightarrow y\neq 0$ e $x^2\neq y$.

$$\boxed{D(f)=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0 \wedge x^2\neq y\}}$$

Fixe $x=0 \Rightarrow z=\frac{y}{-y^2}=-\frac{1}{y}$. Logo $Im\left(-\frac{1}{y}\right)=\mathbb{R}^*\subset Im(f)$

Veja que $x=2$ e $y=-2 \Rightarrow z=\frac{0}{4\cdot(-2)-4}=0 \Rightarrow 0\in Im(f)$

$\therefore \boxed{Im(f)=\mathbb{R}}$.

$g(x,y)=senxy\,.\,cosy^2$

$$\boxed{D(g)=\mathbb{R}^2}$$

Suponha $y=\sqrt{2\pi}\Rightarrow g(x,\sqrt{2\pi})=sen(x\cdot\sqrt{2\pi})$. Logo $\boxed{Im(g)=Im(sen\,x)=[-1;1]}$

3) Quais são as derivadas parciais de primeira ordem da função $f(x,y) = x^2 sen(xy) + y^3 \cos(x^2+y^2)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 sen(xy) + \frac{\partial}{\partial x} y^3 \cos(x^2+y^2)$$

$$x^2 \cdot (y\cos(xy)) + sen(xy) \cdot (2x) \qquad -2xy^3 sen(x^2+y^2)$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 \cdot y\cos(xy) + x \cdot (2 sen(xy) - 2y^3 sen(x^2+y^2))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} x^2 sen(xy) + \frac{\partial}{\partial y} y^3 \cos(x^2+y^2)$$

$$x^3 \cos(xy) \qquad y^3 \cdot (-2y\, sen(x^2+y^2)) + \cos(x^2+y^2) \cdot (3y^2)$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -2y^4 sen(x^2+y^2) + 3y^2 \cos(x^2+y^2) + x^3 \cos(xy)}$$

4) Um móvel se movimenta segundo a função horária do espaço-tempo $f(a,b) = 70 + 3a^2b^3 - 5e^{a-b^2}$, determine as velocidades e acelerações relativas à posição f(4,2).

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 6ab^3 - 5e^{a-b^2} = 6 \cdot 4 \cdot 2^3 - 5 \cdot e^{4-2^2} = 187$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 6b^3 - 5e^{a-b^2} = 6 \cdot 2^3 - 5 \cdot e^{4-2^2} = 43$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 9a^2b^2 + 10be^{a-b^2} = 9 \cdot 4^2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 \cdot e^0 = 596$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 18a^2b - 20b^2e^{a-b^2} = 18 \cdot 4^2 \cdot 2 - 20 \cdot 2^2 \cdot e^0 = 496$$

5.1) Classifique as Equações Diferenciais de acordo com os critérios de ordem e linearidade:

a) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = senx$ Linear, ordem 2.

b) $(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x$ Não linear pois aparece o termo $y^2 \frac{d^2y}{dx^2}$, ordem 2.

c) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 1$ Linear, ordem 4.

d) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$ Não linear pois o termo xy^2 é não-linear em y, ordem 1.

e) $\frac{d^2y}{dx^2} + sen(x+y) = senx$ Não linear pois sen(x+y) é não-linear, ordem 2.

f) $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + (cos^2x)y = x^3$ Linear, ordem 3.

Todas têm grau 1.