6. Dois grilos, Adonis e Basílio, pulam sempre para a frente; Adonis só dá pulos de 1 cm ou 8 cm e Basílio só dá pulos de 1 cm ou 7 cm. Eles percorrem qualquer distância com o menor número de pulos possível. Por exemplo, Adonis percorre 16 cm com apenas dois pulos de 8 cm cada, enquanto Basílio precisa de quatro pulos, sendo dois de 7 cm e outros dois de 1 cm. Por outro lado, para percorrer 15 cm, Adonis precisa de oito pulos, sendo um de 8 cm e sete de 1 cm, enquanto Basílio precisa de apenas três pulos, sendo dois de 7 cm e um de 1 cm.

Indicando por $A(d)$ e $B(d)$, respectivamente, o número de pulos que Adonis e Basílio dão para percorrer d centímetros, temos $A(15) = 8$, $B(15) = 3$, $A(16) = 2$ e $B(16) = 4$.

a) Complete a tabela abaixo.

d: distância em cm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$A(d)$: número de pulos de Adonis	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	8	2
$B(d)$: número de pulos de Basílio	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	2	3	4

b) Encontre um número d entre 200 e 240 tal que $B(d) < A(d)$ (isto é, encontre uma distância entre 200 cm e 240 cm tal que, para percorrê-la, Basílio dá menos pulos do que Adonis).

Perceba que $A(d)$ é a soma do quociente de d na divisão por 8 com o resto na divisão por 8 e $B(d)$ analogamente para 7.

Logo se $d = 8q_1 + r_1$ e $d = 7q_2 + r_2$ (divisão euclidiana), temos $A(d) = q_1 + r_1$ e $B(d) = q_2 + r_2$.

OBS.: É mais fácil preencher a tabela de $d=200$ até $d=240$.

Queremos $B(d) < A(d)$: $q_2 + r_2 < q_1 + r_1 \Rightarrow q_2 - q_1 < r_1 - r_2$. (I)

Como $d = 8q_1 + r_1$ e $d = 7q_2 + r_2$, subtraímos e:

$d - d = 8q_1 + r_1 - (7q_2 + r_2) \Rightarrow 0 = 8q_1 + r_1 - 7q_2 - r_2$

$\Rightarrow r_1 - r_2 = 7q_2 - 8q_1$. Substituindo em (I):

$7q_2 - 8q_1 > q_2 - q_1 \Rightarrow 6q_2 - 7q_1 > 0 \Rightarrow 6q_2 > 7q_1$.

d	q_1	$7q_1$
[201;207]	26	182
[208;215]	27	189
[216;231]	28	196
[232;239]	29	203
240	30	210

d	q_2	$6q_2$
[200;202]	28	168
[203;209]	29	174
[210;216]	30	180
[217;223]	31	186
[224;230]	32	192
[231;237]	33	198
[238;240]	34	204

Os únicos valores de d que cumprem a inequação são 231; 238 e 239.

$239 = 8 \cdot 29 + 7 \Rightarrow A(239) = 29 + 7 = 36$ e $239 = 7 \cdot 34 + 1 \Rightarrow B(239) = 34 + 1 = 35$.

c) Encontre o maior número d tal que $B(d) = A(d)$.

Como $d = 8q_1 + r_1$ e $d = 7q_2 + r_2$, então $8q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2$.
Se $B(d) = A(d)$, então $q_2 + r_2 = q_1 + r_1$.

$$\begin{cases} 8q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2 \\ q_1 + r_1 = q_2 + r_2 \end{cases}$$

$\ominus$ $7q_1 = 6q_2 \Rightarrow q_1 = 6x$ e $q_2 = 7x \Rightarrow d = 48x + r_1 = 49x + r_2$
$\Rightarrow x = r_1 - r_2$, máximo quando $r_2 = 0$ e $r_1 = 7$. Logo $x = 7 - 0 = 7$ e
portanto $d = 48 \cdot 7 + 7 = 343$ cm.