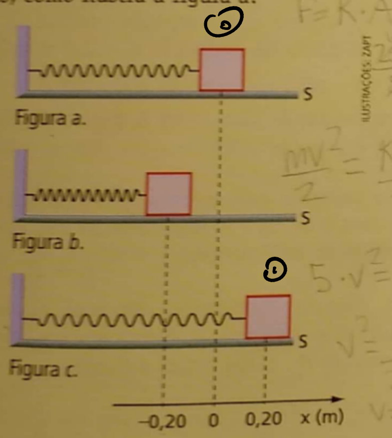
1 Um bloco de massa m = 5,0 kg oscila preso a uma mola ideal de constante elástica k = 20 N/m e apoiado sobre uma superfície horizontal *S* sem atrito, como ilustra a figura *a*.



Sabendo que a amplitude do movimento é A = 0,20 m, calcule:

a) o período do movimento;
b) a frequência do movimento;
c) a máxima velocidade adquirida pelo bloco;
d) a máxima aceleração adquirida pelo bloco.

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$ s.

b) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi}$

c) $E_{m_i} = \frac{k\cdot(0,2)^2}{2} = \frac{k}{50} = \frac{2}{5}$ J.

$E_{m_0} = \frac{mv^2}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow v^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow v = \frac{2}{5}$ m/s.

d) $F = -kx \Rightarrow ma = -kx \therefore a = -\frac{k}{m}x;\ x = -0,2$

$\Rightarrow a = -4\cdot(-0,2) = -0,8\ m/s^2$.

44. Consideremos uma partícula executando MHS de amplitude A = 6 cm e período T = 8 s, de modo que no instante inicial a elongação é −3 cm e a velocidade é negativa (fig. *a*).

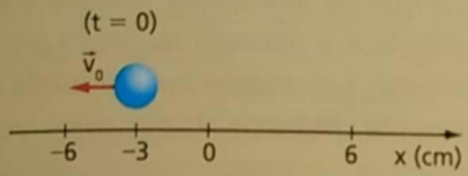


Figura *a*.

Determine:

a) as equações horárias da elongação, da velocidade escalar e da aceleração escalar;

b) a elongação, a velocidade escalar e a aceleração escalar no instante t = 4 s.

$$\omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 6 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \theta_0\right)$$

$$-3 = 6\cos(\theta_0)$$

$$-\frac{1}{2} = \cos\theta_0 \Rightarrow \theta_0 = 120° = \frac{2\pi}{3}$$

a)

$$\Rightarrow x = 6\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (cm)}$$

$$V = -\frac{\pi}{4} \cdot 6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (cm/s)}$$

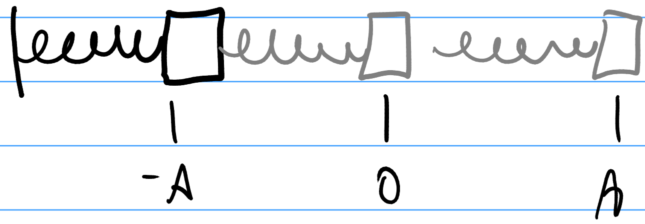
$$a = -\frac{\pi^2}{4^2} \cdot 6\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (cm/s}^2\text{)}$$

b) $x(4) = 6\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$ cm

$v(4) = -3\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ cm/s

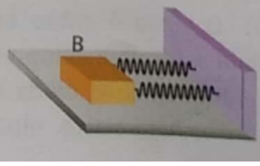
$a(4) = -\frac{3\pi^2}{16}$ cm/s²

5. Um bloco, preso a uma mola de constante elástica 20 N/m, realiza MHS, de modo que sua energia mecânica seja 90 J. Determine a amplitude do movimento.



$E_m = 90 \Rightarrow \frac{K \cdot A^2}{2} = 90 \Rightarrow A = 3\,m.$

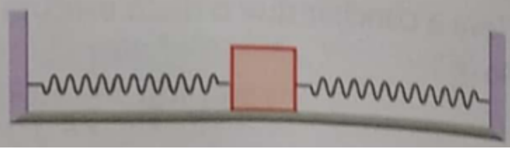
8. Um bloco *B*, de massa 16 kg, oscila sobre uma superfície horizontal *S* sem atrito, ligado a duas molas idênticas, cada uma com constante elástica 2,0 N/m, como ilustra a figura. Determine o período de oscilação.

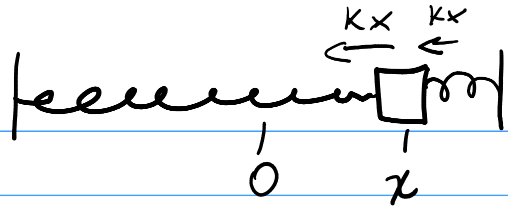


Associação em paralelo $\Rightarrow K = 2 + 2 = 4$ N/m.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 4\pi$ s.

9. Um corpo está preso nas extremidades de duas molas idênticas, não deformadas, de constante elástica 100 N/m, como ilustra a figura. Quando o corpo é afastado, horizontalmente, de uma pequena distância e, depois, abandonado, passa a oscilar. Supondo que não haja atrito e que a massa do corpo seja igual a 0,32 kg, calcule o período do movimento.





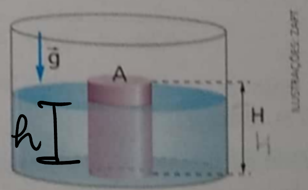
$F_R = k \cdot x + k \cdot x = 2kx$

$\therefore F_R = 200x$

$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{0,32}{200}} = 2\pi \cdot \sqrt{\dfrac{0,16}{100}}$

$= 2\pi \cdot \dfrac{0,4}{10} = 2\pi \cdot \dfrac{4}{100} = 8\pi \cdot 10^{-2}\,s.$

12. Um cilindro homogêneo, de área da base A, altura H e densidade d, flutua em um líquido de densidade d_L, como indica a figura.



O cilindro é afundado levemente e depois abandonado, passando a oscilar. Determine o período do movimento em função de A, d_L, d, H e da aceleração da gravidade g.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

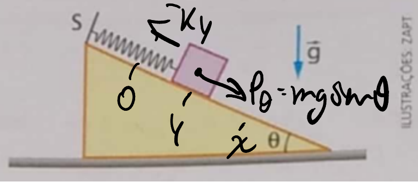
$$E = P$$

$$d_L \cdot A \cdot h \cdot g = d \cdot A \cdot H \cdot g$$

$$\therefore d_L \cdot h = dH \Rightarrow h = \frac{dH}{d_L}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{dH}{d_L g}}$$

14. Um bloco de massa m é preso a uma mola de constante elástica k, a qual tem sua outra extremidade presa a um suporte S, de modo que o bloco oscila sobre um plano inclinado, como mostra a figura. Determine o período dessa oscilação.

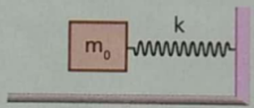


$$mg\,sen\,\theta - Ky = 0$$

$$y = \frac{mg\,sen\,\theta}{K}$$

$$F_R = mg\,sen\,\theta - K(y+x) = -Kx \quad \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

22. (ITA-SP) Uma forma de medir a massa m de um objeto em uma estação espacial com gravidade zero é usar um instrumento como o mostrado na figura.



Primeiro o astronauta mede a frequência f_0 de oscilação de um sistema elástico de massa m_0 conhecida. Depois, a massa desconhecida é adicionada a esse sistema e uma nova medida de frequência, f, de oscilação é tomada. Como podemos determinar a massa desconhecida a partir dos dois valores de medida da frequência?

a) $m = m_0\dfrac{f_0^2}{f^2}$

b) $m = m_0(f_0^2 - f^2)$

c) $m = m_0\left(\dfrac{f_0^2}{f^2} - 1\right)$

d) $m = m_0\left(\dfrac{f_0^2}{f^2} - 2\right)$

e) $m = m_0\left(\dfrac{f_0^2}{f^2} + 1\right)$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{K}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_0}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \qquad M = m + m_0$$

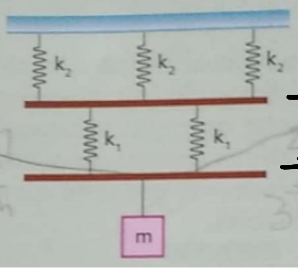
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\sqrt{\frac{1}{M}}}{\sqrt{\frac{1}{m_0}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{M}}{\frac{1}{m_0}}} = \sqrt{\frac{m_0}{M}}$$

$$\Rightarrow \frac{f^2}{f_0^2} = \frac{m_0}{M} \Rightarrow M = \frac{m_0 f_0^2}{f^2}$$

$$\therefore\ m = m_0\left(\frac{f_0^2}{f^2} - 1\right)$$

28. (ITA-SP) Um sistema massa-molas é constituído por molas de constantes k_1 e k_2, respectivamente, barras de massas desprezíveis e um corpo de massa m, como mostrado na figura. Determine a frequência desse sistema.

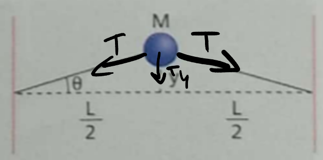


$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow K_{E1} = 3k_2 \\ &\rightarrow K_{E2} = 2K_1 \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{K_{E1}} + \frac{1}{K_{E2}} \Rightarrow k = \frac{K_{E1}K_{E2}}{K_{E1}+K_{E2}}$$

$$\Rightarrow K = \frac{6K_1k_2}{2K_1+3k_2}$$

$$\therefore\ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6K_1K_2}{m(2K_1+3K_2)}}$$

29. (ITA-SP) Uma bolinha de massa M é colocada na extremidade de dois elásticos iguais de borracha, cada qual de comprimento $\frac{L}{2}$, quando na posição horizontal. Desprezando o peso da bolinha, esta permanece apenas sob a ação da tensão T de cada um dos elásticos e executa no plano vertical um movimento harmônico simples, tal que $\text{sen}\,\theta \cong \text{tg}\,\theta$.



Considerando que a tensão não se altera durante o movimento, o período deste vale:

a) $2\pi\sqrt{\frac{4ML}{T}}$

b) $2\pi\sqrt{\frac{ML}{4T}}$

c) $2\pi\sqrt{\frac{ML}{T}}$

d) $2\pi\sqrt{\frac{ML}{2T}}$

e) $2\pi\sqrt{\frac{2ML}{T}}$

$F_R = 2T_y + \cancel{Mg}$

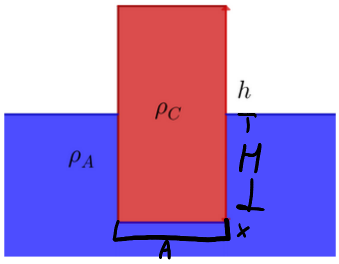
$\frac{T_y}{T} = \text{sen}\,\theta \approx \text{tg}\,\theta = \frac{y}{\frac{L}{2}}$

$\Rightarrow T_y = \frac{T \cdot y \cdot 2}{L}$

$F_R = \frac{4Ty}{L} \Rightarrow k = \frac{4T}{L} \therefore$ Período $= 2\pi\sqrt{\frac{ML}{4T}}$

B

Um cilindro de densidade $\rho_C = 500\,\mathrm{kg/m^3}$ se encontra parcialmente imerso num grande reservatório de água de densidade $\rho_A = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Se o cilindro possui altura $h = 20\,\mathrm{cm}$, encontre sua frequência angular de pequenas oscilações verticais em torno do ponto de equilíbrio supondo que somente o expuxo e a gravidade atuam sobre ele.



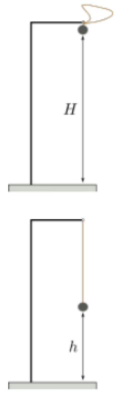
$F_R = E - P = \rho_A \cdot A \cdot x \cdot g$

$\therefore K = \rho_A \cdot A \cdot g \Rightarrow f = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_A \cdot A \cdot g}{h \cdot \rho_C \cdot A}} = \sqrt{\frac{\rho_A \cdot g}{h \cdot \rho_C}} = \sqrt{\frac{2g}{h}}$

$mg = \rho_A \cdot A \cdot \frac{h}{2} \cdot g \Rightarrow \rho_C \cdot \cancel{A} \cdot h = \rho_A \cdot \cancel{A} \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow \rho_C = \frac{\rho_A}{2} \Rightarrow \frac{\rho_C}{\rho_A} = \frac{1}{2}$

$K = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{20 \cdot 10^{-2}}} = 10\,s^{-1}$

(OBF) Em saltos de bungee jump o tamanho da tira elástica deve ser ajustado de acordo com a massa e a distância de queda. Uma estudante de física resolveu estudar esse fenômeno através de um modelo em escala reduzida. No laboratório uma pequena esfera de chumbo de massa $m = 0,4\ \mathrm{kg}$ é suspensa por uma tira elástica de massa desprezível. Ao lado, a figura superior corresponde à situação em que a esfera é abandonada do repouso da altura $H = 2,00\ \mathrm{m}$ para inicio do "salto", cujo objetivo é chegar o mais próximo possivel da base sem no entanto tocá-la. A figura inferior ao lado mostra a situação na qual a esfera está em equilíbrio estático. Imagine que em um salto real a parte mais baixa é a superfície de um rio ou lago. Considere que a tira elástica é equivalente a um conjunto de N molas ideais conectadas em série e que cada mola tem constante elástica $k = 200\ \mathrm{N/m}$ e comprimento $l = 5,00\ \mathrm{cm}$ quando relaxada. Determine: **(a)** o número N de molas necessárias para esse tipo de "salto", **(b)** a velocidade e **(c)** a aceleração máximas atingidas durante o "salto". Desconsidere a ação de forças resistivas.



$$\frac{1}{K_{eq}} = \overbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k}}^{N} = \frac{N}{k} \Rightarrow K_{eq} = \frac{k}{N}$$ → Associação em série

⇒ No salto

$$E_m = mgH \Rightarrow E_m = \frac{K_{eq}\cdot(H-Nl)^2}{2} \Rightarrow 16 = \frac{200}{N}(2-5\cdot10^{-2}\cdot N)^2$$

$$\Rightarrow 16N = \frac{2}{100}(200-5N)^2 \Rightarrow 800N = 25(40-N)^2 \Rightarrow 32N = 1600 + N^2 - 80N$$

$$\Rightarrow N^2 - 112N + 1600 = 0 \Rightarrow \boxed{N = 17}$$ pois a outra solução é absurda.

$$F_R = 0 \Rightarrow mg - K_{eq}x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k_{eq}} = \frac{4\cdot17}{200} = \frac{68}{200} = 0{,}34\ \mathrm{m}.$$

$$\Rightarrow mgH = \frac{mv^2}{2} + mg(H-(Nl+x_0)) + K_{eq}\cdot\frac{x_0^2}{2}$$

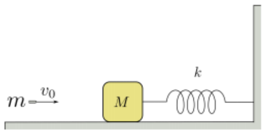
$$4(17\cdot5\cdot10^{-2} + 0{,}34) = 0{,}2v^2 + \frac{100}{17}\cdot0{,}34^2$$

$$\frac{4(0{,}85+0{,}34) - \frac{100}{17}\cdot0{,}34^2}{0{,}2} = v^2 \Rightarrow v = 4{,}51\ \mathrm{m/s}$$?

Preguiça de fazer a C.

(OBF) Em um laboratório de física, é usado um sistema massa-mola para determinar a velocidade com que um projétil é disparado. O sistema é constituído por um bloco de massa $M = 5,00\ kg$ que está apoiado em uma superfície horizontal de atrito desprezível e está preso a uma parede rígida vertical através de uma mola de constante elástica $k = 4500\ N/m$. Para fazer a medida da velocidade v_0 de um projétil de massa $m = 10,0\ g$, o mesmo é disparado contra o bloco, que está inicialmente em repouso, nas condições mostradas na figura. A parte do bloco que recebe o impacto é feita de um material deformável que aloja o projétil em seu interior. Considere que a mola se deforma apenas depois do projétil se alojar completamente no bloco (colisão projétil-bloco instantânea). Determine a velocidade v_0 do projétil, em m/s, no caso em que a medida da amplitude de oscilação do bloco após o impacto é de $2,50\ cm$.

$\hookrightarrow x$



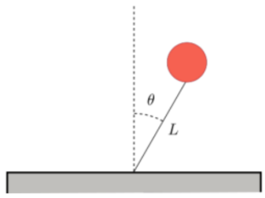
Conservação de momentum: $mv_0 = (M+m)v \Rightarrow v = \frac{mv_0}{m+M}$

Conservação de energia mecânica: $\frac{(m+M)v^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$

$\cancel{(m+M)}\frac{m^2 v_0^2}{(m+M)^{\cancel{2}}} = kx^2 \Rightarrow v_0 = \frac{x}{m}\sqrt{k(m+M)}$

(OBF) Um balão de festa preenchido com um gás de densidade $0,20\,\mathrm{kg/m^3}$, tem volume de $15\,\mathrm{litros}$ e está amarrado por um fio ideal, de comprimento $L = 80\,\mathrm{cm}$, a uma superfície horizontal (veja figura fora de escala). Quando o balão está vazio sua massa é de $3,0\,\mathrm{g}$.

$\rho_{ar} = 1{,}2\ kg/m^3$



a) Considere que o balão está em repouso na posição de equilíbrio $\theta = 0$. Determine a tração no fio, em N.

b) Considere que o balão é levemente deslocado da posição de equilíbrio e depois é abandonado a partir do repouso. Determine o intervalo de tempo, em s, para atingir, pela primeira vez, a posição $\theta = 0$. (Desconsidere eventuais forças dissipativas).

$V = 15\,(dm)^3 = 15\cdot(10^{-1}m)^3 = 15\cdot10^{-3}\,m^3$

$P - E + T = 0 \Rightarrow T = -P + E = -g(3\cdot10^{-3} + 15\cdot10^{-3}\cdot0{,}2) + 1{,}2\cdot15\cdot10^{-3}\cdot g$

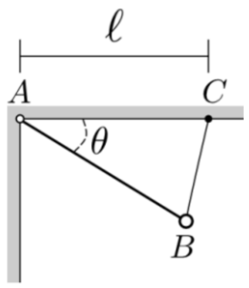
$= -6\cdot10^{-2} + 18\cdot10^{-2} = +12\cdot10^{-2} = 0{,}12\,N$ ← a

Como um pêndulo. Gravidade é dada por $\frac{E-P}{m} = \frac{T}{m} = \frac{0{,}12}{6\cdot10^{-3}} = \frac{12\cdot10^{-2}}{6\cdot10^{-3}} = 20\,m/s^2$.

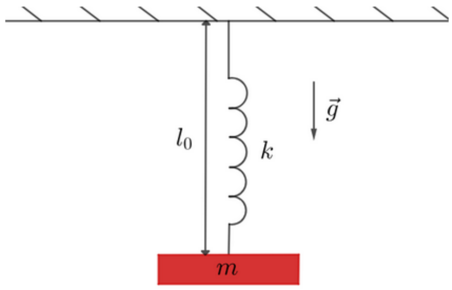
$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{20}} = 2\pi\cdot2\cdot10^{-1} = \frac{2\pi}{5}\,s$

$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{10}\,s$

(OBF) A figura abaixo mostra um sistema em equilíbrio estático. A haste homogênea AB de comprimento $l = 80,0\,\mathrm{cm}$ e massa desprezível está presa à parede vertical por um pino em torno do qual poderia girar livremente. Na extremidade B da haste está presa uma pequena esfera de massa $m = 200\,\mathrm{g}$. Fixada a essa esfera e ao ponto C do teto há um material elástico de constante elástica $k = 2,50\,\mathrm{N/m}$ e que quando relaxado tem comprimento desprezível. Determine (a) o ângulo $\theta = \theta_0$ de equilíbrio e (b) o período de oscilação deste sistema se a posição angular θ for levemente deslocada de θ_0.



Uma massa m foi pendurada ao teto por meio de uma mola de constante elástica k e comprimento natural l_0. Obtenha a equação horária $y(t)$ do movimento da massa. Considere que y é medido a partir do teto e, em $t = 0$, o bloco é solto a partir do repouso com $y = l_0$.



$F_R = 0 \iff x = x_0$

$x = x_0 + \Delta x \longrightarrow x = y - l_0 \Rightarrow y = \Delta x + x_0 + l_0$

$F_R = mg - kx = mg - k(x_0 + \Delta x) = -k\Delta x$

$\therefore \Delta x = A\cos(\omega t + \theta_0)$ onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$y = A\cos(\omega t + \theta_0) + x_0 + l_0 \Rightarrow \dot{y} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \theta_0)$

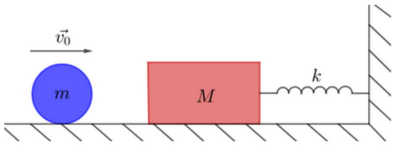
$A\cos\theta_0 = -x_0$ $\quad A = -x_0 \; (A > 0)$

$-A\omega\,\text{sen}\,\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$ ou $\boxed{\theta_0 = \pi}$

Logo $A = x_0 = mg/k$ e $\theta_0 = \pi$

$y = \frac{mg}{k}\left(-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \pi\right) + 1\right) + l_0$

Um bloco de massa M, capaz de deslizar com atrito desprezível sobre o chão, está preso a uma parede por uma mola de massa desprezível e constante elástica k, inicialmente relaxada. Uma bolinha de massa m, lançada com velocidade horizontal v_0, atinge-o no instante $t = 0$ e fica grudada nele. Ache a expressão $x(t)$ de deslocamento do sistema.



$$mV_0 = (m+M)V_i \Rightarrow V_i = \frac{mV_0}{m+M}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \pi/2 \text{ ou } \boxed{\theta_0 = -\pi/2} \longrightarrow \text{Na vdd ambos dão certo, só muda o sinal.}$$

$$x'(0) = V_i \Rightarrow V_i = +A\omega \Rightarrow A = +\frac{V_i}{\omega} = +\frac{mV_0}{(m+M)}\sqrt{\frac{m+M}{K}} = \frac{+mV_0}{\sqrt{(m+M)K}}$$

$$\therefore x(t) = \frac{+mV_0}{\sqrt{(m+M)k}}\cos\left(-\pi/2 + \sqrt{\frac{k}{m+M}}\,t\right) = \frac{mV_0}{\sqrt{k(m+M)}}\,\mathrm{Sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m+M}}\,t\right)$$

(OBF) A força necessária para comprimir ou distender uma mola com constante de rigidez elástica k é dada por $F = -kx$. Esta é a lei de Hooke. O trabalho realizado pela força aplicada a mola para promover uma deformação x na mesma é dada por $W = \frac{1}{2}kx^2$. A mola da figura 9 é comprimida em Δx . Ela lança o bloco com velocidade V_0 ao longo de uma superfície livre de atrito. As duas molas da figura 9b são idênticas à mola da figura 9a. Elas são comprimidas no mesmo valor Δx e são usadas para lançar o mesmo bloco.

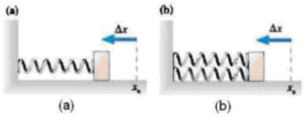


Fig. 9

a) Determine a constante de elasticidade k' da mola equivalente ao conjunto de molas

b) Qual será, agora, o módulo da velocidade do bloco, para a configuração $b)$?

$$W = \Delta T = \frac{mV_0^2}{2} \Rightarrow \frac{k(\Delta x)^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} \Rightarrow V_0 = \Delta x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

a) $K' = K + K = 2K$

b) $W = \Delta T \Rightarrow \frac{2k(\Delta x)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow V = \Delta x\sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}\,V_0.$