

4. Dois números naturais formam um casal quando eles têm o mesmo número de algarismos e em sua soma aparece apenas o algarismo 9. Por exemplo, 225 e 774 formam um casal, pois ambos têm três algarismos e $225 + 774 = 999$.



a) Qual é o número que forma um casal com 2010?

O casal deve somar com 2010 e dar 9999, pois tem 4 algarismos e somente o algarismo 9. Fazendo $9999 - 2010 = 7989$ obtemos o número que faz casal com 2010.

b) Quantos são os casais formados por números de dois algarismos?

Os casais são da forma AB e $(9-A)(9-B)$ em notação decimal. A varia de 1 até 8, pois se $A=9$, $9-A=0$ e não seria um número de 2 dígitos. B varia de 0 até 9. Pelo princípio Fundamental da Contagem, temos $8 \cdot 10 = 80$ casais. Mas como contamos o dobro de casais repetidos (12 e 87 é o mesmo que 87 e 12), temos $80/2 = 40$ casais únicos.

Casais especiais são casais em que os dois números têm os mesmos algarismos e, em cada número, os algarismos são distintos. Por exemplo, 36 e 63 formam um casal especial, mas 277 e 722 não.

c) Dê um exemplo de um casal especial com números de quatro algarismos.

1287 e 8712.

d) Explique por que não existem casais especiais com números de três algarismos.

Casais especiais com três algarismos são da forma ABC e $(9-A)(9-B)(9-C)$. Escolhendo A , só nos resta $9-B=A$ ou $9-C=A$, pois $A=9-A \Rightarrow 2A=9$, impossível. Assumindo $9-B=A$ sem perda de generalidade, agora temos $9-A=B$ ou $9-A=C$. A primeira igualdade equivale a $9-B=A$, sendo a única possível*. Assim, só nos resta $C=9-C \Rightarrow 2C=9$, impossível. Logo, não existem casais especiais de 3 algarismos.

* pois $9= A+C \Rightarrow B=C$, contradição.