Zadania

May 2, 2025

1 Realizacja część 1

** Przygotował:** Paweł Jan Tłusty

IDE: jupyter studio + IRKernel Export do pdf: pandoc

```
sudo apt-get install texlive texlive-latex-extra pandoc texlive-xetex
```

** Wersja online:** Notes dostępny również w serwisie GitHub (niektóre wykresy niewłaściwie dziedziczą style, zaleca zaleca się jasny motyw lub otwieranie poszczególnych wykresów jako obraz w nowej karcie)

1.1 Zadanie 1

Liczba strzelonych bramek w kolejnych meczach przez pewną drużynę piłkarską jest następująca:

2, 3, 0, 0, 1, 3, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 3, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 4, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2

Zbadać, czy ilość zdobytych goli w meczu jest zgodna z rozkładem Poissona. Parametry rozkładu oszacować na podstawie danych.

1.1.1 Hipotezy statystyczne:

- **H (hipoteza zerowa):** rozkład liczby goli jest zgodny z rozkładem Poissona.
- **H (hipoteza alternatywna):** rozkład liczby goli nie jest zgodny z rozkładem Poissona.

[1]:
```
gole <- c(2, 3, 0, 0, 1, 3, 1, 0, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 0, 2, 0, 1, 1, 2, 0,␣
↪3,
          1, 1, 0, 1, 0, 2, 4, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2)
```

[2]:
```
n <- length(gole)
```

[3]:
```
n
```

43

[4]:
```
# Oszacowanie parametru  dla rozkładu Poissona
lambda_hat <- mean(gole)
```

[5]:
```
lambda_hat
```

1.09302325581395

[6]:
```
## Dane empiryczne
### Ile razy występuje dana liczba goli
obs <- table(gole)
obs
```

```
gole
 0  1  2  3  4
15 15  8  4  1
```

[7]:
```
k <- 0:max(gole)
```

[8]:
```
k
```

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3 5. 4

[9]:
```
# Teoretyczne prawdopodobieństwa z rozkładu Poissona
probs <- dpois(k, lambda_hat)
```

[10]:
```
probs
```

1. 0.335201560212229 2. 0.366383100697087 3. 0.200232624799571 4. 0.0729529718262003 5. 0.0199348236966943

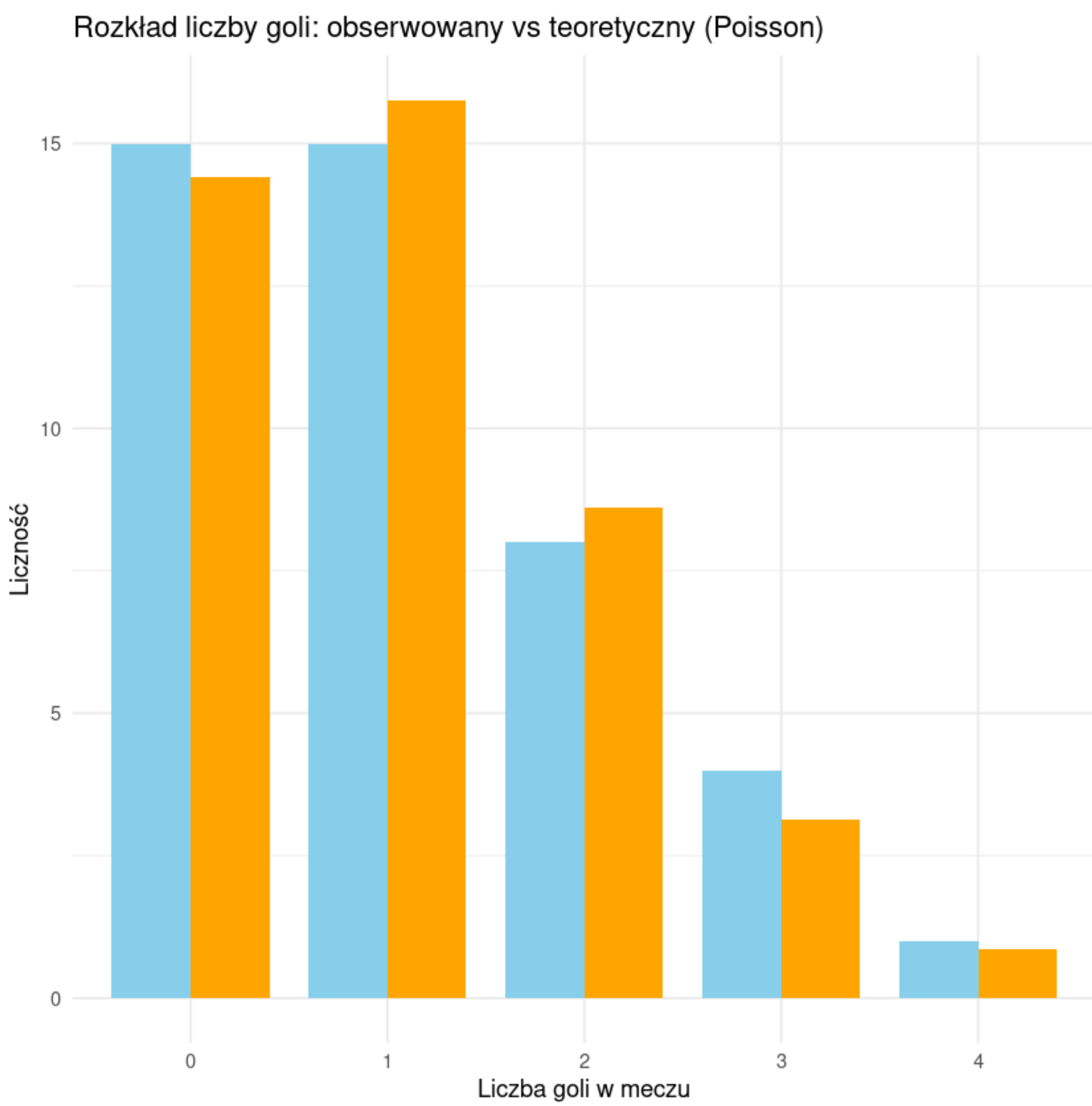
[11]:
```
# Oczekiwane liczności
exp <- probs * n
names(exp) <- k

exp
```

0 14.4136670891258 **1** 15.7544733299748 **2** 8.61000286638155 **3** 3.13697778852661 **4** 0.857197418957853

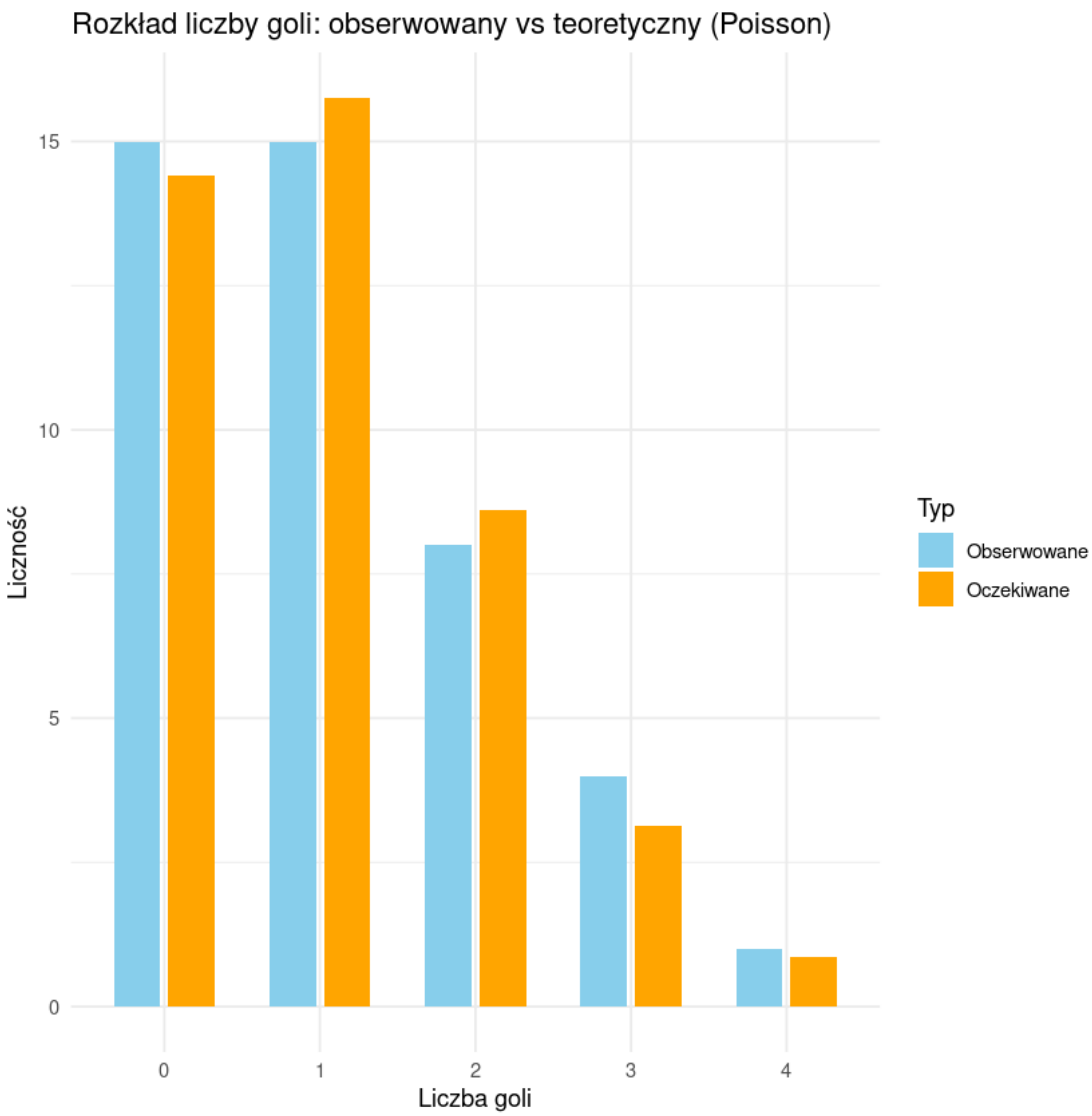
[12]:
```
## Wizualizacja
df <- data.frame(
  gole = factor(names(obs), levels = as.character(0:max(gole))),
  obserwowane = as.numeric(obs),
  oczekiwane = as.numeric(exp)
)
```

[13]:
```
# Załadowanie biblioteki
library(ggplot2)
```

```
[14]: ggplot(df, aes(x = gole)) +
  geom_bar(aes(y = obserwowane), stat = "identity", fill = "skyblue", width = 0.
↪4, position = position_nudge(x = -0.2)) +
  geom_bar(aes(y = oczekiwane), stat = "identity", fill = "orange", width = 0.
↪4, position = position_nudge(x = 0.2)) +
  labs(
    title = "Rozkład liczby goli: obserwowany vs teoretyczny (Poisson)",
    x = "Liczba goli w meczu",
    y = "Liczność"
  ) +
  theme_minimal()
```



[20]:
```
gole_kategorie <- as.character(0:max(gole))

obserwowane <- as.numeric(table(factor(gole, levels = 0:max(gole))))
oczekiwane <- exp

df_obserw <- data.frame(gole = gole_kategorie, liczność = obserwowane, typ =␣
↪"Obserwowane")
df_oczek <- data.frame(gole = gole_kategorie, liczność = oczekiwane, typ =␣
↪"Oczekiwane")
df_final <- rbind(df_obserw, df_oczek)

ggplot(df_final, aes(x = gole, y = liczność, fill = typ)) +
  geom_bar(stat = "identity", position = position_dodge(width = 0.7), width = 0.
↪6) +
  scale_fill_manual(values = c("Obserwowane" = "skyblue", "Oczekiwane" =␣
↪"orange")) +
  labs(
    title = "Rozkład liczby goli: obserwowany vs teoretyczny (Poisson)",
    x = "Liczba goli",
    y = "Liczność",
    fill = "Typ"
  ) +
  theme_minimal()
```



[ ]:
```
## Teraz powinniśmy przeprowadzić test zgodności
```

[21]:
```
# Oczekiwane liczności
oczekiwane

# Warunki:
sum(oczekiwane < 1)                 # ile klas ma < 1
sum(oczekiwane < 5) / length(oczekiwane)   # jaki % ma < 5
```

0 14.4136670891258 **1** 15.7544733299748 **2** 8.61000286638155 **3** 3.13697778852661 **4** 0.857197418957853

1

0.4

[22]:
```
# bazując na tych danych dobrze by było połączyć 3 i 4
obs
```

```
gole
 0  1  2  3  4
15 15  8  4  1
```

[23]:
```
obs["3+"] <- sum(obs["3"], obs["4"])
obs <- obs[c("0", "1", "2", "3+")]
```

[24]:
```
obs
```

```
 0  1  2 3+
15 15  8  5
```

[25]:
```
oczekiwane
```

0 14.4136670891258 **1** 15.7544733299748 **2** 8.61000286638155 **3** 3.13697778852661 **4** 0.857197418957853

[27]:
```
oczekiwane["3+"] <- sum(oczekiwane[4:5])
```

[28]:
```
oczekiwane
```

0 14.4136670891258 **1** 15.7544733299748 **2** 8.61000286638155 **3** 3.13697778852661 **4** 0.857197418957853 **3+** 3.99417520748446

[29]:
```
oczekiwane <- oczekiwane[c(1:3, 6)]
names(oczekiwane) <- names(obs)
```

[30]:
```
oczekiwane
```

0 14.4136670891258 **1** 15.7544733299748 **2** 8.61000286638155 **3+** 3.99417520748446

[31]:
```
test_chikwadrat <- chisq.test(
  x = as.numeric(obs),
  p = oczekiwane / sum(oczekiwane),
  rescale.p = TRUE
)
```

```
Warning message in chisq.test(x = as.numeric(obs), p =
oczekiwane/sum(oczekiwane), :
"Chi-squared approximation may be incorrect"
```

[32]:
```
test_chikwadrat
```

```
        Chi-squared test for given probabilities
```

```
data:  as.numeric(obs)
X-squared = 0.3534, df = 3, p-value = 0.9497
```

[33]:
```
rozn_bezwzgl <-  abs(obs - oczekiwane)
procent_dopasowanych <-mean(rozn_bezwzgl <= 1) * 100
```

[34]:
```
cat("Dopasowanie (klas z różnicą  1):", round(procent_dopasowanych, 1), "%\n")
```

```
Dopasowanie (klas z różnicą  1): 75 %
```

1.1.2 Wnioski zadanie 1

Hipotezy statystyczne: - **H (hipoteza zerowa):** rozkład liczby goli jest zgodny z rozkładem Poissona. - **H (hipoteza alternatywna):** rozkład liczby goli nie jest zgodny z rozkładem Poissona.

Wniosek: Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. p-value - bardzo duże / znacznie większe od 0.05.

Przemyślenia: Być może dodatkowa weryfiakcja przy pomocy Monte Carlo?

1.2 Zadanie 2: Weryfikacja zgodności z rozkładem chi-kwadrat

Na podstawie podanej próbki należy zweryfikować hipotezę, że cecha X ma rozkład chi-kwadrat.

1.0, 4.7, 5.2, 7.6, 2.9, 6.5, 4.3, 1.3, 1.6, 3.3, 0.5, 1.8, 15.4, 2.7, 9.6, 11.6, 23.2, 3.2, 3.4, 12.4, 19.5

Część (a): - Wykonać test Kołmogorowa-Smirnowa dla zgodności z rozkładem chi-kwadrat. - Porównać dystrybuantę empiryczną z teoretyczną (na wykresie).

Część (b): - Porównać kwantyle empiryczne i teoretyczne za pomocą wykresu Q-Q.

Hipotezy statystyczne: - **H (hipoteza zerowa):** próba pochodzi z rozkładu X^2. - **H (hipoteza alternatywna):** próba nie pochodzi z rozkładu X^2

[35]:
```
x <- c(1.0, 4.7, 5.2, 7.6, 2.9, 6.5, 4.3, 1.3, 1.6, 3.3,
       0.5, 1.8, 15.4, 2.7, 9.6, 11.6, 23.2, 3.2, 3.4, 12.4, 19.5)
```

[36]:
```
n <- length(x)
```

[37]:
```
n
```

21

1.2.1 Z2.a test Kołmogorowa-Smirnowa dla zgodności z rozkładem chi-kwadrat

[38]:
```
## est stopni swobody
df_hat <- mean(x)
```

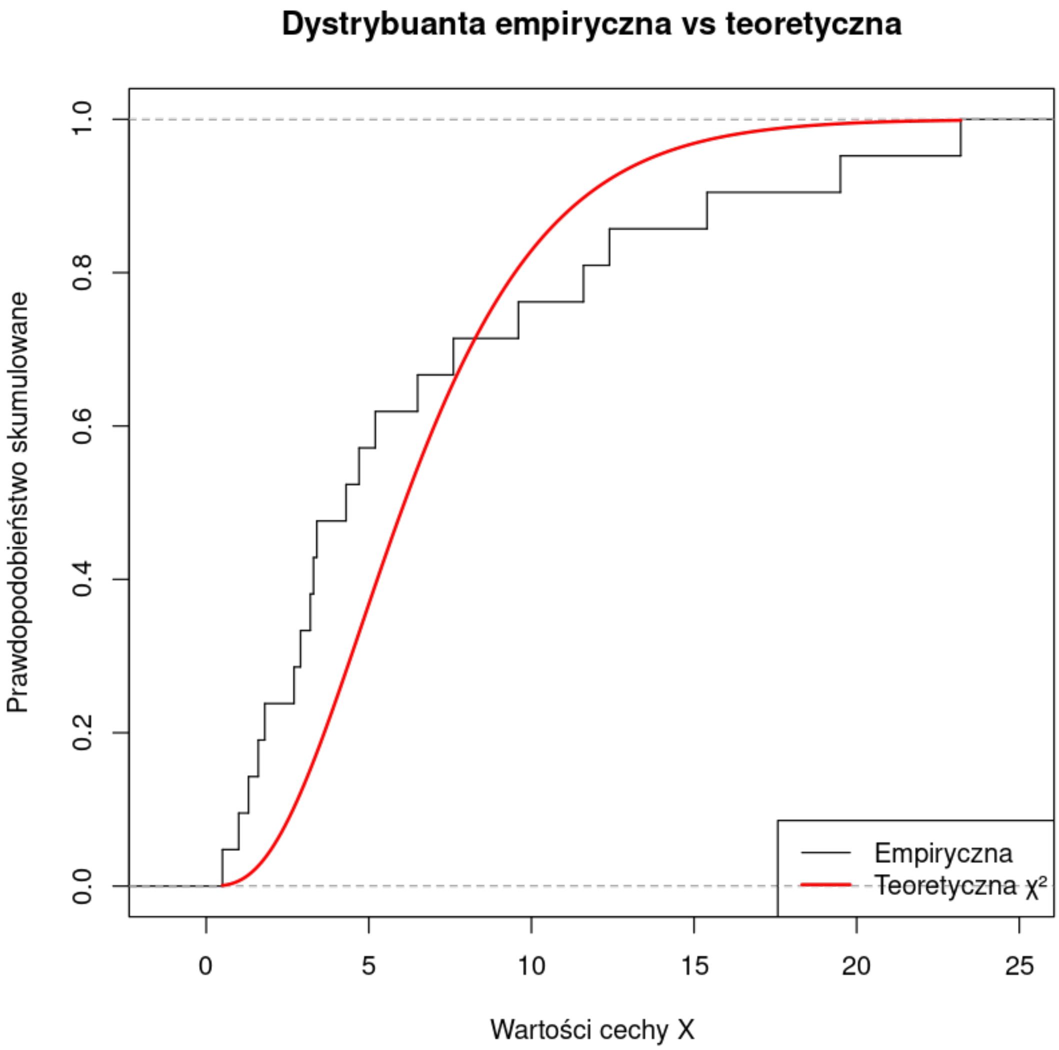
[39]:
```
df_hat
```

6.74761904761905

[40]:
```
ks.test(x, "pchisq", df = df_hat)
```

```
        Exact one-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  x
D = 0.30233, p-value = 0.03367
alternative hypothesis: two-sided
```

[41]:
```
dystr_empiryczna <- ecdf(x)

# Zakres wartości
x_wykres <- seq(min(x), max(x), length.out = 200)

# Rysowanie wykresu
plot(dystr_empiryczna, verticals = TRUE, do.points = FALSE,
     main = "Dystrybuanta empiryczna vs teoretyczna",
     xlab = "Wartości cechy X", ylab = "Prawdopodobieństwo skumulowane")

# Teoretyczna dystrybuanta chi-kwadrat
lines(x_wykres, pchisq(x_wykres, df = df_hat),
      col = "red", lwd = 2)

legend("bottomright", legend = c("Empiryczna", "Teoretyczna  ²"),
       col = c("black", "red"), lwd = c(1, 2))
```



[42]:
```
### Wnioski część (a)
Przy załozeniu progu istotności p-value == 0.05.
Test Kołmogorowa-Smirnowa wykazał p-wartość 0.033, co oznacza, że istnieją␣
↪statystyczne podstawy do odrzucenia hipotezy zgodności z rozkładem␣
↪chi-kwadrat
```

1.2.2 Z2.b wykres kwantylowy (Q–Q plot)

[43]:
```
# asc sort (kwantyle empiryczne)
x_empiryczne <- sort(x)

# # Kwantyle teoretyczne (z rozkładu chi-kwadrat o df_hat)
kwantyle_teoretyczne <- qchisq(ppoints(n), df = df_hat)
```

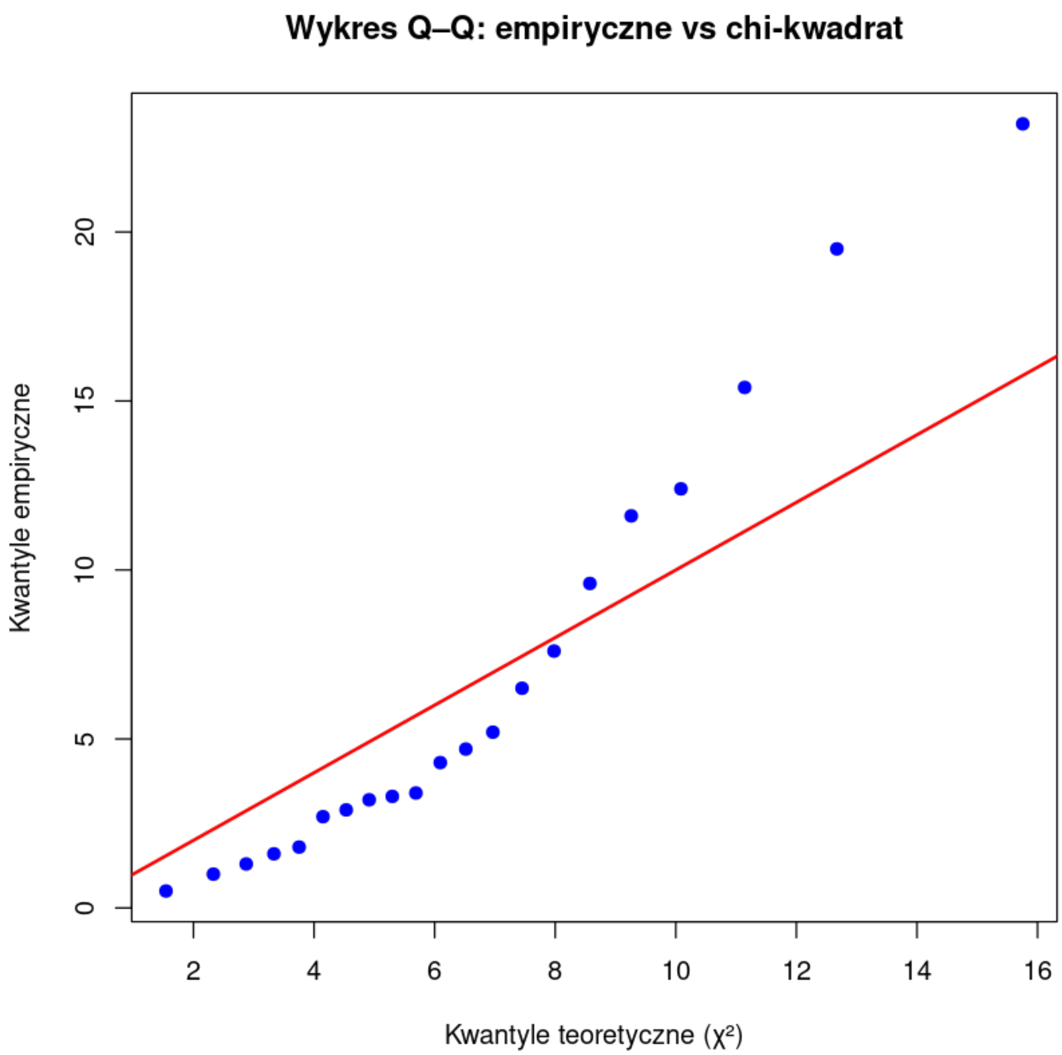
[45]:
```
x_empiryczne
```

1. 0.5 2. 1 3. 1.3 4. 1.6 5. 1.8 6. 2.7 7. 2.9 8. 3.2 9. 3.3 10. 3.4 11. 4.3 12. 4.7 13. 5.2 14. 6.5 15. 7.6 16. 9.6 17. 11.6 18. 12.4 19. 15.4 20. 19.5 21. 23.2

[44]:
```
kwantyle_teoretyczne
```

1. 1.54462427051942 2. 2.33096538125728 3. 2.8749947773806 4. 3.33476934436616 5. 3.75295516614992 6. 4.14883460199186 7. 4.53353548070311 8. 4.91466785143739 9. 5.29822204351978 10. 5.68954011714865 11. 6.09394293137503 12. 6.51725995266972 13. 6.96641529373264 14. 7.45022947387703 15. 7.98069095298224 16. 8.57521220448477 17. 9.26108836834429 18. 10.0855238579207 19. 11.1426621231644 20. 12.6717197778583 21. 15.755016482405

[46]:
```
# Wykres Q-Q
qqplot(kwantyle_teoretyczne, x_empiryczne,
       main = "Wykres Q-Q: empiryczne vs chi-kwadrat",
       xlab = "Kwantyle teoretyczne ( ²)", ylab = "Kwantyle empiryczne",
       pch = 19, col = "blue")

abline(0, 1, col = "red", lwd = 2)
```



[ ]:
```
### Z2.b Wnioski
Punkty znacząco odbiegają od linii idealnego dopasowania. Największe␣
↪rozbieżoności występują w górnych kwantylach
Wykres Q-Q wspiera wynik testu KS z punktu a.
```

1.3 Zadanie 3: Analiza wpływu nawozu na plony

1.3.1 Polecenie:

W pewnym doświadczeniu rolniczym bada się plony nowej odmiany pszenicy (w kwintalach na hektar) w zależności od rodzaju nawozu. Należy:

(a) Zweryfikować hipotezę H , że rozkłady plonów dla każdego typu nawozu są jednakowe, wykorzystując test Kruskala–Wallisa.

(b) Obliczyć średnią rangę dla każdej grupy.

Dane:

- n1 = c(35, 32, 33.5, 36, 38, 30, 32.5, 31, 34)
- n2 = c(28.5, 32, 33, 34, 28, 30.5, 30, 32)
- n3 = c(26.5, 29, 33, 31, 28, 25.5, 29, 32, 29.5, 32)
- n4 = c(30.5, 25.5, 32.5, 27, 34.5, 31)

1.3.2 Z3.a Kruskal-Wallis - rozkłady plonów dla każdego typu nawozu są jednakowe

[47]:
```
n1 <- c(35, 32, 33.5, 36, 38, 30, 32.5, 31, 34)
n2 <- c(28.5, 32, 33, 34, 28, 30.5, 30, 32)
n3 <- c(26.5, 29, 33, 31, 28, 25.5, 29, 32, 29.5, 32)
n4 <- c(30.5, 25.5, 32.5, 27, 34.5, 31)
```

[48]:
```
plony <- c(n1, n2, n3, n4)
```

[49]:
```
grupy <- factor(c(
  rep("n1", length(n1)),
  rep("n2", length(n2)),
  rep("n3", length(n3)),
  rep("n4", length(n4))
))
```

[50]:
```
grupy
```

1. n1 2. n1 3. n1 4. n1 5. n1 6. n1 7. n1 8. n1 9. n1 10. n2 11. n2 12. n2 13. n2 14. n2 15. n2 16. n2 17. n2 18. n3 19. n3 20. n3 21. n3 22. n3 23. n3 24. n3 25. n3 26. n3 27. n3 28. n4 29. n4 30. n4 31. n4 32. n4 33. n4

Levels: 1. 'n1' 2. 'n2' 3. 'n3' 4. 'n4'

[51]:
```
plony
```

1. 35 2. 32 3. 33.5 4. 36 5. 38 6. 30 7. 32.5 8. 31 9. 34 10. 28.5 11. 32 12. 33 13. 34 14. 28 15. 30.5 16. 30 17. 32 18. 26.5 19. 29 20. 33 21. 31 22. 28 23. 25.5 24. 29 25. 32 26. 29.5 27. 32 28. 30.5 29. 25.5 30. 32.5 31. 27 32. 34.5 33. 31

[52]:
```
test_kw <- kruskal.test(plony ~ grupy)
```

[53]:
```
test_kw
```

```
        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  plony by grupy
Kruskal-Wallis chi-squared = 8.9766, df = 3, p-value = 0.0296
```

1.3.3 Z3.a Wnioski

Wyniki testu: - Statystyka testowa: $^2 = 8.9766$ - Stopnie swobody: df = 3 - p-wartość: 0.0296

Hipotezy: - **H :** Rozkłady plonów w grupach n1, n2, n3 i n4 są identyczne. - **H :** Co najmniej jedna grupa różni się pod względem rozkładu plonów.

Wniosek: Ponieważ p-wartość < 0.05, odrzucamy hipotezę zerową. Istnieją statystycznie istotne różnice w rozkładach plonów między co najmniej dwoma rodzajami nawozów

1.3.4 Z3.b średnia ranga dla każdej próbki

[55]:
```r
# plony - wszystkie obserwacje
# grupy - wektor etykiet grupowych

rangi <- rank(plony)
```

[56]:
```r
df_rangi <- data.frame(
  grupa = grupy,
  ranga = rangi
)
```

[57]:
```r
df_rangi
```

A data.frame: 33 × 2

grupa <fct>	ranga <dbl>
n1	31.0
n1	20.0
n1	27.0
n1	32.0
n1	33.0
n1	11.5
n1	23.5
n1	16.0
n1	28.5
n2	7.0
n2	20.0
n2	25.5
n2	28.5
n2	5.5
n2	13.5
n2	11.5
n2	20.0
n3	3.0
n3	8.5
n3	25.5
n3	16.0
n3	5.5
n3	1.5
n3	8.5
n3	20.0
n3	10.0
n3	20.0
n4	13.5
n4	1.5
n4	23.5
n4	4.0
n4	30.0
n4	16.0

[58]:
```
srednie_rangi <- aggregate(ranga ~ grupa, data = df_rangi, FUN = mean)
```

[59]:
```
srednie_rangi
```

A data.frame: 4 × 2

grupa <fct>	ranga <dbl>
n1	24.72222
n2	16.43750
n3	11.85000
n4	14.75000

1.3.5 Z3.b Wnioski Średnie rangi dla każdej grupy nawozu

Najwyższą średnią rangę uzyskała grupa **n1**, co oznacza, że ta grupa miała generalnie **wyższe plony** niż pozostałe. Najniższą rangę uzyskała grupa **n3**, co sugeruje, że dawała najniższe plony.

Co potwierdza wynik testu Kruskala-Wallisa oraz jego interpretację z części Z3a Wynik

Wilcoxon - które grupy się istotnie różniły?

1.4 Zadanie 4 : Charakter losowości i niezależność cyfr

1.4.1 Polecenie:

(a) Zbadać, czy poniższa próbka ma charakter losowy.

(b)

Niech X będzie pierwszą, a Y drugą cyfrą w rozważanych liczbach. Zbadać, czy X i Y są statystycznie niezależne.

1.4.2 Dane (próbka losowa):

1.4.3 Z4.a Zbadać czy próbka ma charakter losowy?

Benford? histogram?

[61]:
```
x <- c(35, 60, 148, 75, 92, 243, 37, 48, 95, 740, 154, 292, 334, 421, 15,
       87, 36, 302, 250, 82, 101, 336, 230, 672, 55, 65, 17, 102, 21,
       304, 640, 25, 354, 85, 340, 395, 720, 407, 230, 84, 14, 26, 35,
       458, 370, 483, 310, 75, 300, 435, 92, 180, 405, 66, 315, 40, 532,
       326, 604, 157, 640, 45, 31, 258, 625, 152, 193, 32, 488, 166, 10,
       307, 260, 85, 450, 62, 345, 71, 165, 251, 236, 354, 58, 320, 81,
       71, 45, 310, 345, 127, 476, 420, 150, 23, 48, 60, 95, 470, 92,
       67, 325, 45, 157, 385, 125, 357, 582, 393, 175, 86, 830, 650, 40)
```

[62]:
```
# Benford
# Pierwsza cyfra
pierwsze_cyfry <- as.numeric(substring(as.character(x), 1, 1))
```

[63]:
```
pierwsze_cyfry
```

1. 3 2. 6 3. 1 4. 7 5. 9 6. 2 7. 3 8. 4 9. 9 10. 7 11. 1 12. 2 13. 3 14. 4 15. 1 16. 8 17. 3 18. 3 19. 2 20. 8 21. 1 22. 3 23. 2 24. 6 25. 5 26. 6 27. 1 28. 1 29. 2 30. 3 31. 6 32. 2 33. 3 34. 8 35. 3 36. 3 37. 7 38. 4 39. 2 40. 8 41. 1 42. 2 43. 3 44. 4 45. 3 46. 4 47. 3 48. 7 49. 3 50. 4 51. 9 52. 1 53. 4 54. 6 55. 3 56. 4 57. 5 58. 3 59. 6 60. 1 61. 6 62. 4 63. 3 64. 2 65. 6 66. 1 67. 1 68. 3 69. 4 70. 1 71. 1 72. 3 73. 2 74. 8 75. 4 76. 6 77. 3 78. 7 79. 1 80. 2 81. 2 82. 3 83. 5 84. 3 85. 8 86. 7 87. 4 88. 3 89. 3 90. 1 91. 4 92. 4 93. 1 94. 2 95. 4 96. 6 97. 9 98. 4 99. 9 100. 6 101. 3 102. 4 103. 1 104. 3 105. 1 106. 3 107. 5 108. 3 109. 1 110. 8 111. 8 112. 6 113. 4

[64]:
```
obs <- table(factor(pierwsze_cyfry, levels = 1:9))
```

[66]:
```
obs
```

```
 1  2  3  4  5  6  7  8  9
19 13 28 18  4 12  6  8  5
```

[67]:
```
# Warunki
# teoretyczne wystąpienie pierwszych cyfr
benford_probs <- log10(1 + 1 / (1:9))
```

[68]:
```
benford_probs
```

1. 0.301029995663981 2. 0.176091259055681 3. 0.1249387366083 4. 0.0969100130080564 5. 0.0791812460476248 6. 0.0669467896306132 7. 0.0579919469776867 8. 0.0511525224473813 9. 0.0457574905606751

[69]:
```
# liczności
exp <- benford_probs * length(x)
```

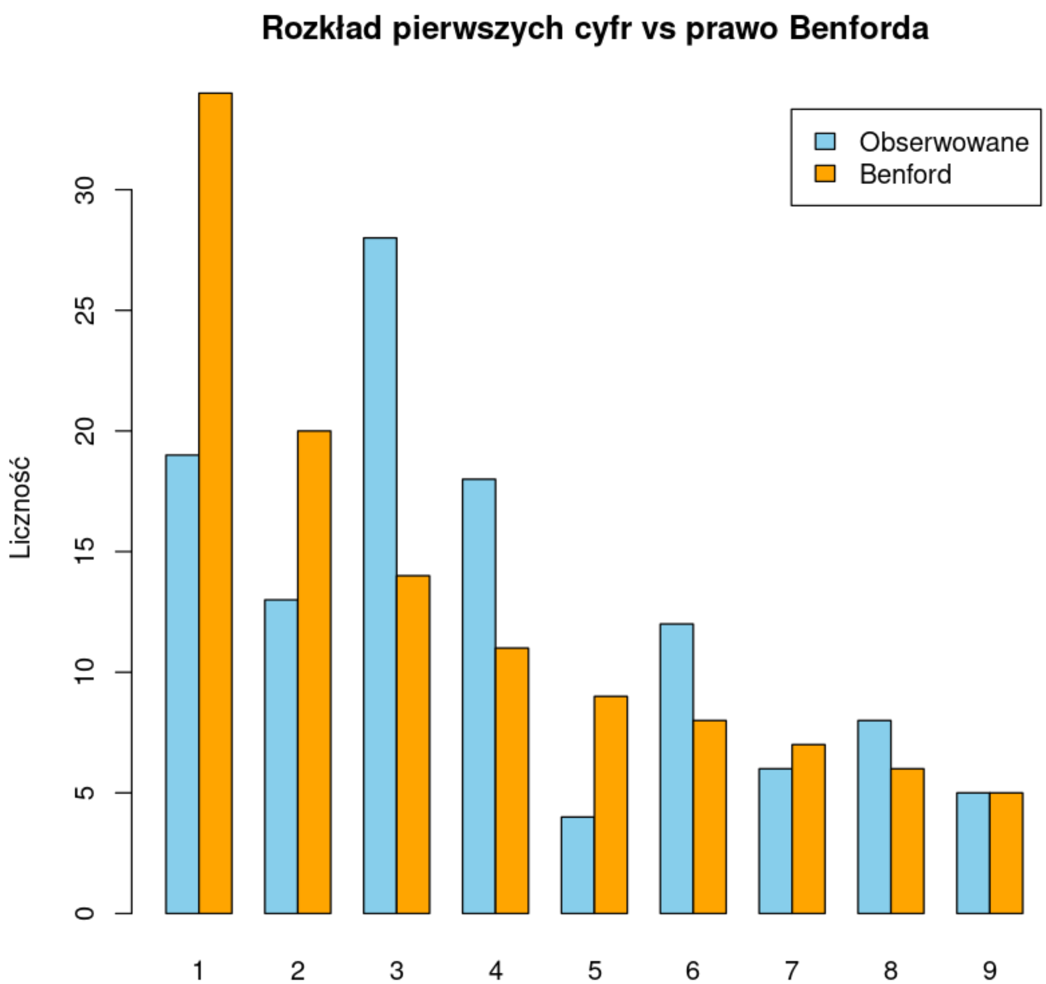
[70]:
```
exp
```

1. 34.0163895100299 2. 19.898312273292 3. 14.1180772367379 4. 10.9508314699104 5. 8.9474808033816 6. 7.56498722825929 7. 6.5530900084786 8. 5.78023503655409 9. 5.17059643335629

[71]:
```
chisq.test(x = obs, p = benford_probs, rescale.p = TRUE)
```

```
	Chi-squared test for given probabilities

data:  obs
X-squared = 33.448, df = 8, p-value = 5.112e-05
```

[72]:
```
barplot(rbind(obs, round(exp)),
        beside = TRUE, col = c("skyblue", "orange"),
        names.arg = 1:9, legend = c("Obserwowane", "Benford"),
        main = "Rozkład pierwszych cyfr vs prawo Benforda",
        ylab = "Liczność")
```



[77]:
```
install.packages("e1071")
```

```
Installing package into ‘/home/kotmin/R/x86_64-pc-linux-gnu-library/4.5’
(as ‘lib’ is unspecified)

also installing the dependency ‘proxy’
```

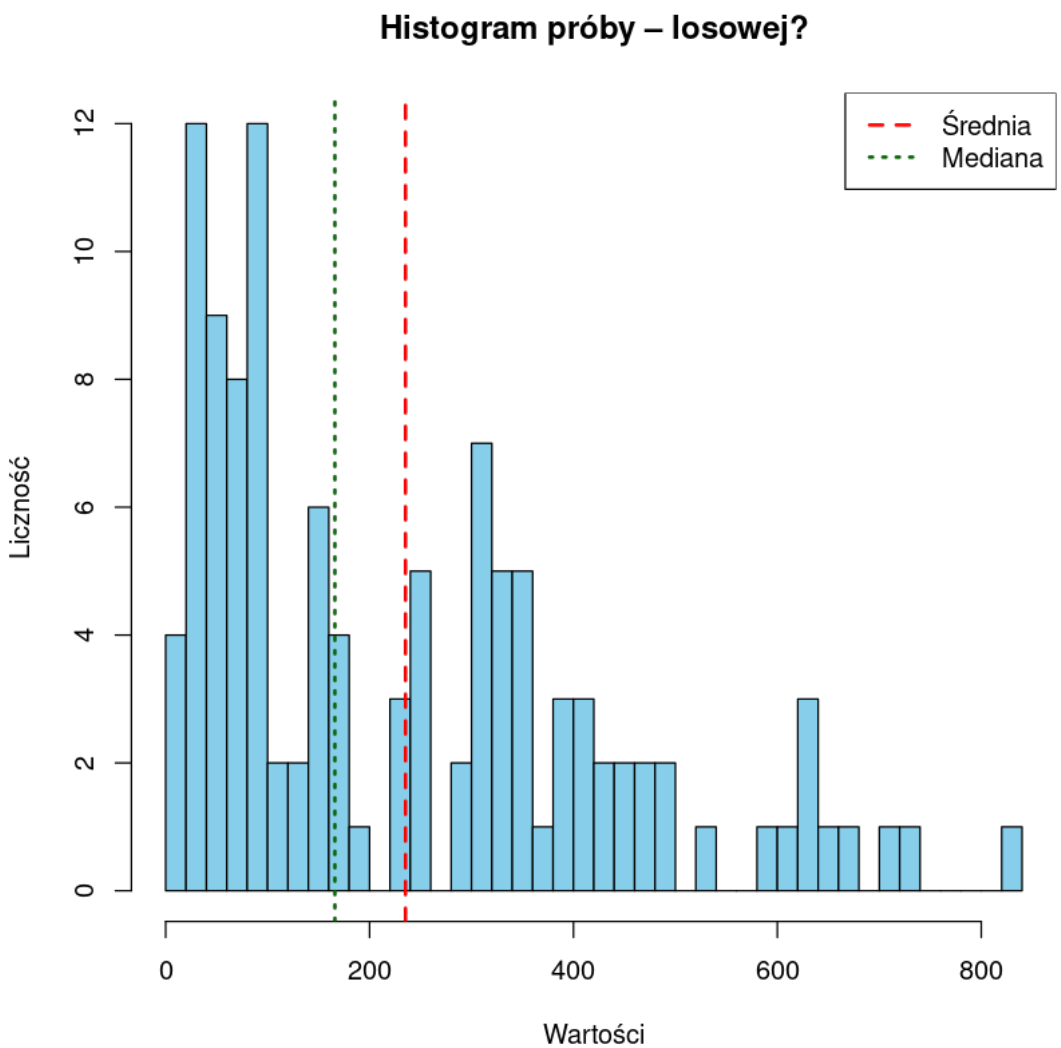
[78]:
```
# POM

srednia <- mean(x)
mediana <- median(x)
```

```
wariancja <- var(x)
odchylenie <- sd(x)


library(e1071)
skosnosc <- skewness(x)


pom <- mean(x, trim = 0.1)


data.frame(
  Średnia = round(srednia, 2),
  Mediana = round(mediana, 2),
  POM_10proc = round(pom, 2),
  Odchylenie = round(odchylenie, 2),
  Skośność = round(skosnosc, 2)
)
```

A data.frame: 1 × 5

Średnia	Mediana	POM_10proc	Odchylenie	Skośność
<dbl>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<dbl>
235.27	166	209.91	197.8	0.88

[80]:
```
## dodatkowo możemy zrobić histogram

hist(x,
     breaks = 30,
     col = "skyblue",
     main = "Histogram próby - losowej?",
     xlab = "Wartości",
     ylab = "Liczność")

# Dodajemy linię średniej
abline(v = mean(x), col = "red", lwd = 2, lty = 2)

# Dodajemy linię mediany
abline(v = median(x), col = "darkgreen", lwd = 2, lty = 3)

# Legenda
legend("topright",
       legend = c("Średnia", "Mediana"),
       col = c("red", "darkgreen"),
       lwd = 2,
       lty = c(2, 3))
```



[ ]:

1.4.4 4a Wnioski

Zostały sprawdzone warunki czy można wykonać testy zgodności z prawem Benforda.

Rozkład jest skośny dodatnio(prawostronnie) średnia > mediana.

Wysoka wartość współczynnika skośności i spora różnica między średnią, a medianą sugerują, że dane są **silnie niesymetryczne** i mogą pochodzić z próbki zdominowanej przez duże wartości.

Wniosek z testu zgodności z prawem Benforda: Test chi-kwadrat dał wynik: data: obs X-squared = 33.448, df = 8, p-value = 5.112e-05

Odrzucamy hipotezę zgodności z rozkładem Benforda – dane **nie mają naturalnego, losowego**

charakteru

Histogram, linie statystyk, klasyczne statystyki opisowe, obserwowana dodatnia skośność oraz test Benforda jednoznacznie wskazują, że dane **nie są naturalnie rozłożone ani całkiem losowe**.

1.4.5 Z4.b XY statystycznie niezależne

[120]:
```
# polecenie mówiło o cyfrach - chcemy mieć możliwość uzyskania X oraz Y
x_filtr <- x[x >= 10]
```

[121]:
```
x_filtr
```

1. 35 2. 60 3. 148 4. 75 5. 92 6. 243 7. 37 8. 48 9. 95 10. 740 11. 154 12. 292 13. 334 14. 421 15. 15 16. 87 17. 36 18. 302 19. 250 20. 82 21. 101 22. 336 23. 230 24. 672 25. 55 26. 65 27. 17 28. 102 29. 21 30. 304 31. 640 32. 25 33. 354 34. 85 35. 340 36. 395 37. 720 38. 407 39. 230 40. 84 41. 14 42. 26 43. 35 44. 458 45. 370 46. 483 47. 310 48. 75 49. 300 50. 435 51. 92 52. 180 53. 405 54. 66 55. 315 56. 40 57. 532 58. 326 59. 604 60. 157 61. 640 62. 45 63. 31 64. 258 65. 625 66. 152 67. 193 68. 32 69. 488 70. 166 71. 10 72. 307 73. 260 74. 85 75. 450 76. 62 77. 345 78. 71 79. 165 80. 251 81. 236 82. 354 83. 58 84. 320 85. 81 86. 71 87. 45 88. 310 89. 345 90. 127 91. 476 92. 420 93. 150 94. 23 95. 48 96. 60 97. 95 98. 470 99. 92 100. 67 101. 325 102. 45 103. 157 104. 385 105. 125 106. 357 107. 582 108. 393 109. 175 110. 86 111. 830 112. 650 113. 40

[122]:
```
length(x_filtr)
```

113

[123]:
```
cyfra_X <- as.numeric(substr(as.character(x_filtr), 1, 1))
cyfra_Y <- as.numeric(substr(as.character(x_filtr), 2, 2))
```

[124]:
```
cyfra_X
```

1. 3 2. 6 3. 1 4. 7 5. 9 6. 2 7. 3 8. 4 9. 9 10. 7 11. 1 12. 2 13. 3 14. 4 15. 1 16. 8 17. 3 18. 3 19. 2 20. 8 21. 1 22. 3 23. 2 24. 6 25. 5 26. 6 27. 1 28. 1 29. 2 30. 3 31. 6 32. 2 33. 3 34. 8 35. 3 36. 3 37. 7 38. 4 39. 2 40. 8 41. 1 42. 2 43. 3 44. 4 45. 3 46. 4 47. 3 48. 7 49. 3 50. 4 51. 9 52. 1 53. 4 54. 6 55. 3 56. 4 57. 5 58. 3 59. 6 60. 1 61. 6 62. 4 63. 3 64. 2 65. 6 66. 1 67. 1 68. 3 69. 4 70. 1 71. 1 72. 3 73. 2 74. 8 75. 4 76. 6 77. 3 78. 7 79. 1 80. 2 81. 2 82. 3 83. 5 84. 3 85. 8 86. 7 87. 4 88. 3 89. 3 90. 1 91. 4 92. 4 93. 1 94. 2 95. 4 96. 6 97. 9 98. 4 99. 9 100. 6 101. 3 102. 4 103. 1 104. 3 105. 1 106. 3 107. 5 108. 3 109. 1 110. 8 111. 8 112. 6 113. 4

[125]:
```
cyfra_Y
```

1. 5 2. 0 3. 4 4. 5 5. 2 6. 4 7. 7 8. 8 9. 5 10. 4 11. 5 12. 9 13. 3 14. 2 15. 5 16. 7 17. 6 18. 0 19. 5 20. 2 21. 0 22. 3 23. 3 24. 7 25. 5 26. 5 27. 7 28. 0 29. 1 30. 0 31. 4 32. 5 33. 5 34. 5 35. 4 36. 9 37. 2 38. 0 39. 3 40. 4 41. 4 42. 6 43. 5 44. 5 45. 7 46. 8 47. 1 48. 5 49. 0 50. 3 51. 2 52. 8 53. 0 54. 6 55. 1 56. 0 57. 3 58. 2 59. 0 60. 5 61. 4 62. 5 63. 1 64. 5 65. 2 66. 5 67. 9 68. 2 69. 8 70. 6 71. 0 72. 0 73. 6 74. 5 75. 5 76. 2 77. 4 78. 1 79. 6 80. 5 81. 3 82. 5 83. 8 84. 2 85. 1 86. 1 87. 5 88. 1 89. 4 90. 2 91. 7 92. 2 93. 5 94. 3 95. 8 96. 0 97. 5 98. 7 99. 2 100. 7 101. 2 102. 5 103. 5 104. 8 105. 2 106. 5 107. 8 108. 9 109. 7 110. 6 111. 3 112. 5 113. 0

[126]:
```r
# tablica liczności / kontyngencji
tablica_xy <- table(X = cyfra_X, Y = cyfra_Y)
```

[127]:
```r
tablica_xy
```

```
   Y
X   0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
  1 3 0 2 0 2 6 2 2 1 1
  2 0 1 0 4 1 4 2 0 0 1
  3 4 4 4 2 3 5 1 2 1 2
  4 4 0 2 1 0 5 0 2 4 0
  5 0 0 0 1 0 1 0 0 2 0
  6 3 0 2 0 2 2 1 2 0 0
  7 0 2 1 0 1 2 0 0 0 0
  8 0 1 1 1 1 2 1 1 0 0
  9 0 0 3 0 0 2 0 0 0 0
```

[128]:
```r
## test wstpępny
test_chi <- chisq.test(tablica_xy)
```

```
Warning message in chisq.test(tablica_xy):
"Chi-squared approximation may be incorrect"
```

[129]:
```r
test_chi
```

```

        Pearson's Chi-squared test

data:  tablica_xy
X-squared = 83.349, df = 72, p-value = 0.1698
```

[130]:
```r
oczekiwane <- test_chi$expected
```

[131]:
```r
oczekiwane
```

A matrix: 9×10 of type dbl

	0	1	2	3	4	5	6
1	2.3539823	1.3451327	2.5221239	1.5132743	1.6814159	4.876106	1.17699
2	1.6106195	0.9203540	1.7256637	1.0353982	1.1504425	3.336283	0.80530
3	3.4690265	1.9823009	3.7168142	2.2300885	2.4778761	7.185841	1.73451
4	2.2300885	1.2743363	2.3893805	1.4336283	1.5929204	4.619469	1.11504
5	0.4955752	0.2831858	0.5309735	0.3185841	0.3539823	1.026549	0.24778
6	1.4867257	0.8495575	1.5929204	0.9557522	1.0619469	3.079646	0.74336
7	0.7433628	0.4247788	0.7964602	0.4778761	0.5309735	1.539823	0.37168
8	0.9911504	0.5663717	1.0619469	0.6371681	0.7079646	2.053097	0.49557
9	0.6194690	0.3539823	0.6637168	0.3982301	0.4424779	1.283186	0.30973

[132]:
```r
str(test_chi)
```

```
List of 9
 $ statistic: Named num 83.3
  ..- attr(*, "names")= chr "X-squared"
 $ parameter: Named int 72
  ..- attr(*, "names")= chr "df"
 $ p.value  : num 0.17
 $ method   : chr "Pearson's Chi-squared test"
 $ data.name: chr "tablica_xy"
 $ observed : 'table' int [1:9, 1:10] 3 0 4 4 0 3 0 0 0 0 …
  ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
  .. ..$ X: chr [1:9] "1" "2" "3" "4" …
  .. ..$ Y: chr [1:10] "0" "1" "2" "3" …
 $ expected : num [1:9, 1:10] 2.354 1.611 3.469 2.23 0.496 …
  ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
  .. ..$ X: chr [1:9] "1" "2" "3" "4" …
  .. ..$ Y: chr [1:10] "0" "1" "2" "3" …
 $ residuals: 'table' num [1:9, 1:10] 0.421 -1.269 0.285 1.185 -0.704 …
  ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
  .. ..$ X: chr [1:9] "1" "2" "3" "4" …
  .. ..$ Y: chr [1:10] "0" "1" "2" "3" …
 $ stdres   : 'table' num [1:9, 1:10] 0.493 -1.441 0.351 1.381 -0.766 …
  ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
  .. ..$ X: chr [1:9] "1" "2" "3" "4" …
  .. ..$ Y: chr [1:10] "0" "1" "2" "3" …
 - attr(*, "class")= chr "htest"
```

[133]:
```
sum(oczekiwane < 1)
```

48

[134]:
```
mean(oczekiwane < 5) * 100
```

98.8888888888889

[135]:
```
test_chi$stdres
```

```
   Y
X             0           1           2           3           4           5
  1  0.49321893 -1.31917508 -0.38707207 -1.40590728  0.28215151  0.64723735
  2 -1.44130973  0.09155254 -1.49948971  3.22830403 -0.15617009  0.44801254
  3  0.35117240  1.71413865  0.18186204 -0.18517663  0.40057528 -1.09045828
  4  1.38098686 -1.27721502 -0.29500894 -0.41171750 -1.44176693  0.22396027
  5 -0.76577712 -0.56209059 -0.79668852  1.28129396 -0.63450837 -0.03094415
  6  1.40249851 -1.01139197  0.36634231 -1.07788826  1.00849829 -0.75476039
  7 -0.94660627  2.57663005  0.25167546 -0.74050423  0.69283364  0.44201439
  8 -1.10340764  0.62009184 -0.06696362  0.49152489  0.37713332 -0.04458740
  9 -0.86011945 -0.63133910  3.14983353 -0.67284795 -0.71267863  0.75073855
   Y
X             6           7           8           9
```

```
1  0.85877519  0.45219240 -0.33847255  0.44571472
2  1.46116534 -1.12749723 -1.05794050  0.86129938
3 -0.66393702 -0.18517663 -0.83451487  1.18963121
4 -1.18907640  0.53775346  2.73182101 -0.88640137
5 -0.52330159 -0.59904653  3.40767418 -0.39009709
6  0.32507529  1.17769273 -1.01139197 -0.70191723
7 -0.64687303 -0.74050423 -0.69482159 -0.48221388
8  0.76748957  0.49152489 -0.80991587 -0.56209059
9 -0.58777138 -0.67284795 -0.63133910 -0.43815633
```

[136]:
```r
# da się tu znaleźć wartości większe od 2
```

[137]:
```r
# w każdytm razie liczności w klasach są mniejsze od 5, test może stracić na␣
↪skuteczności. Test wykazał p-value < 0.05
# spróbujemy wykorzystać test Fishera

fisher.test(tablica_xy,simulate.p.value=TRUE)
```

```
	Fisher's Exact Test for Count Data with simulated p-value (based on
	2000 replicates)

data:  tablica_xy
p-value = 0.3628
alternative hypothesis: two.sided
```

[138]:
```r
# można spróbować symulacji Monte Carlo
chisq.test(tablica_xy, simulate.p.value = TRUE, B = 10000)
```

```
	Pearson's Chi-squared test with simulated p-value (based on 10000
	replicates)

data:  tablica_xy
X-squared = 83.349, df = NA, p-value = 0.1646
```

1.4.6 4.b Wnioski

Elementy podzielono zgodnie z poleceniem, stworzono tablice kontyngencji.

Sprawdzono warunki zastosowania klasycznego testu chi-kwadrat: - **48 komórek** (spośród 90) miało oczekiwaną liczność **mniejszą niż 1** - **98.9% wszystkich komórek** miało oczekiwaną liczność **mniejszą niż 5** Wynik testu chi-kwadrat mógł zostać uznany za niewiarygodny. Sugerował **statystyczną niezależność**

Hipotezy: - **H (hipoteza zerowa):** Cyfry X i Y są niezależne — rozkład drugiej cyfry nie zależy od pierwszej. - **H (hipoteza alternatywna):** Cyfry X i Y są zależne — rozkład drugiej cyfry zależy od pierwszej.

Wykonano dwa alternatywne testy nieparametryczne: 1. fisher (2000 permutacji) p ~0.36 2. chi-sqrt z symulacją Monte Carlo, p~0.16

W obu przypadkach p-wartość jest większa niż 0.05, **brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej**.

Cyfry X i Y mogą być uznane za **statystycznie niezależne** na podstawie dostępnych danych.

[ ]:

[ ]:

[ ]: