

# Phase Retrieval Based on GS Algorithm

Kotokowa

光学(H)

2025年11月27日

01

课题简介

02

相位恢复和GS算法原理分析

03

实验设计和数据分析

04

总结与结论

01

## 课题简介

02

相位恢复和GS算法原理分析

03

实验设计和数据分析

04

总结与结论

在光学领域，因为光波的**频率过快**，一般的探测器不能直接探测到其相位信息，只能获得强度信息，那么如何从强度信息中得到相位信息成为了长时间困扰光学研究者的一个问题。1972年(Gerchberg-Saxton) GS 算法被提出，用于从**两个已知的强度信息**中恢复**相位信息**。

## 课题简介

---

强度信息 → 相位信息

为什么?



课题简介



## 相位恢复和GS算法原理分析

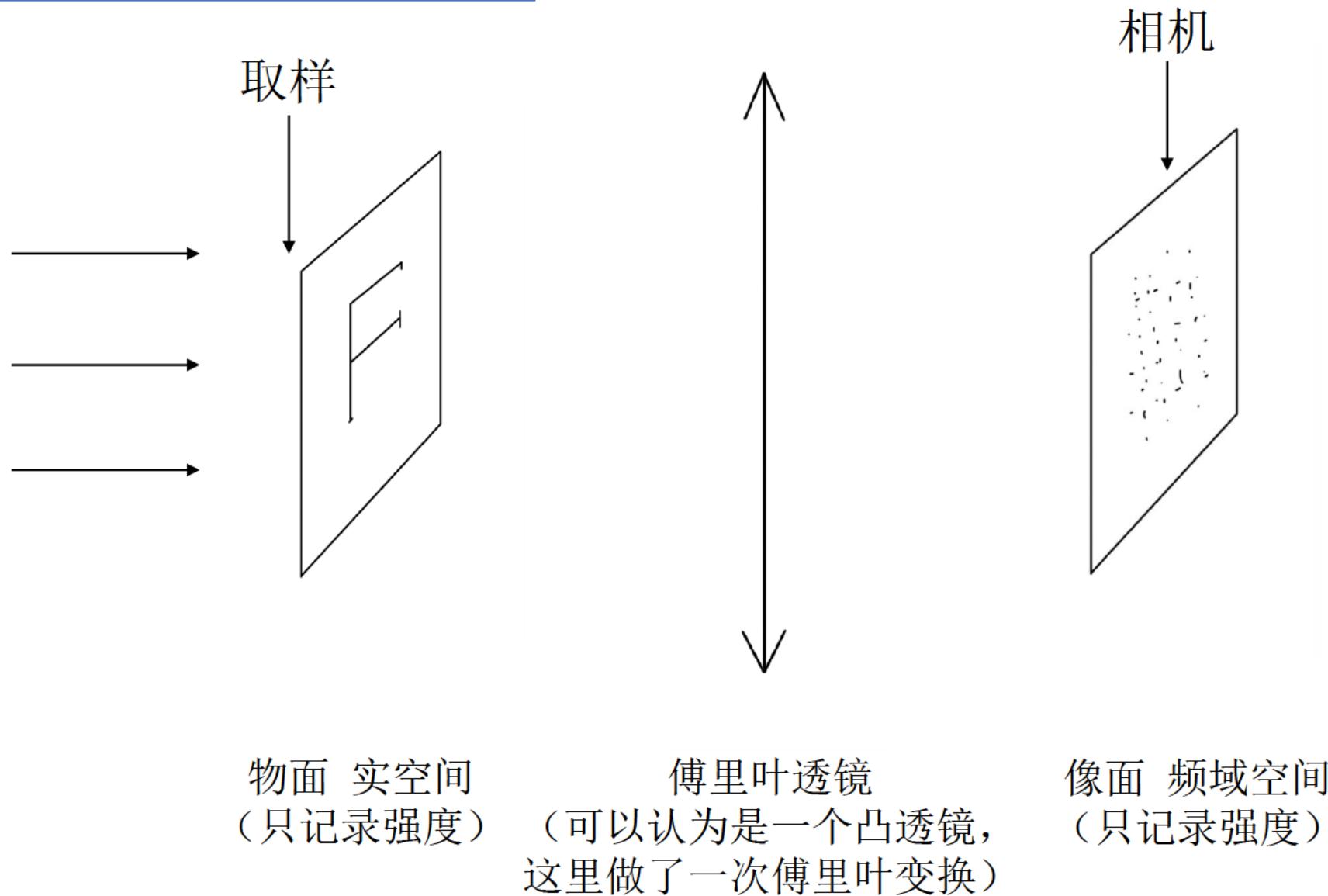


实验设计和数据分析

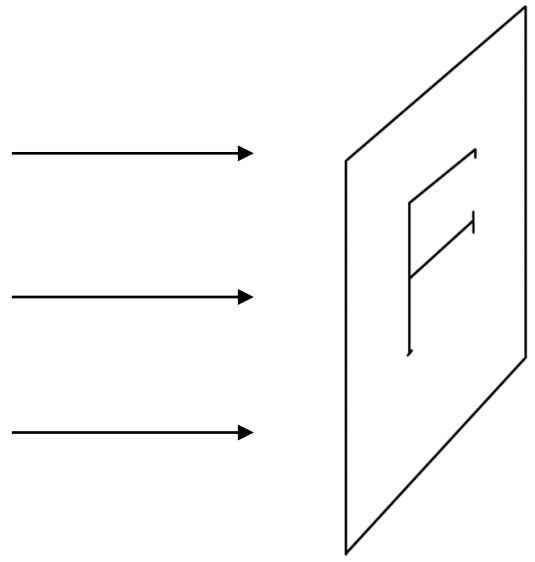


总结与结论

# 相位恢复和GS算法原理分析

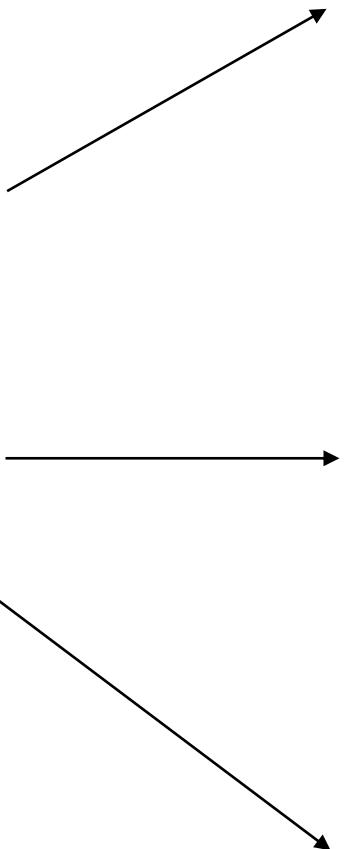


# 相位恢复和GS算法原理分析



0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

F



光强

0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

\*

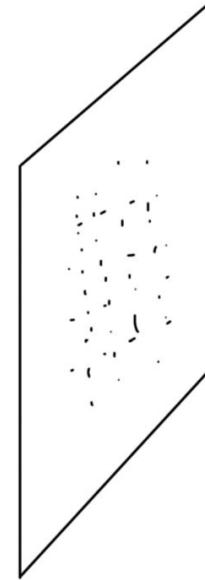
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$
$\varphi$	0	0	0	0	$\varphi$
$\varphi$	0	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$
$\varphi$	0	0	0	0	$\varphi$
$\varphi$	0	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$
$\varphi$	0	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$
$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$

\*

相位  
 $e^{i\phi}$

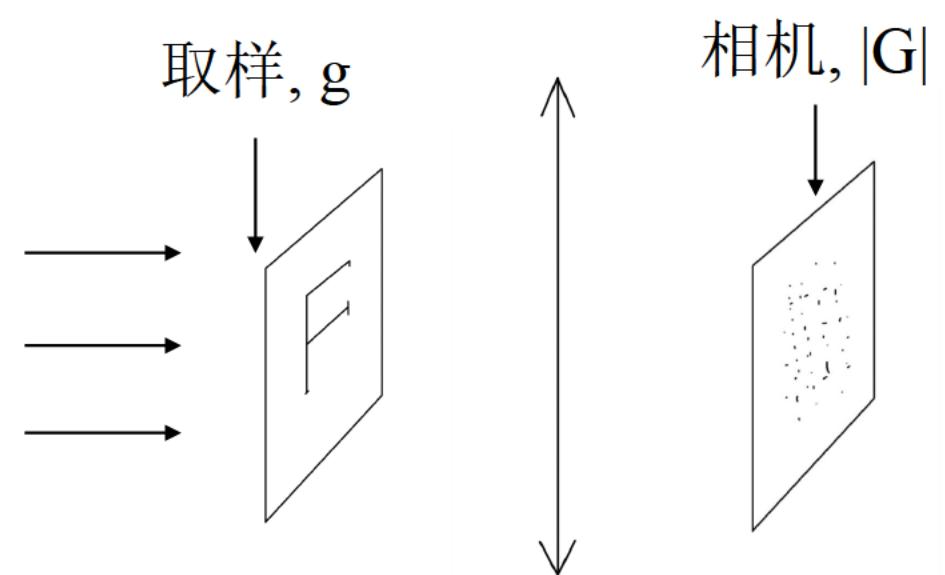
# 相位恢复和GS算法原理分析



像方 频域空间  
(只记录强度)

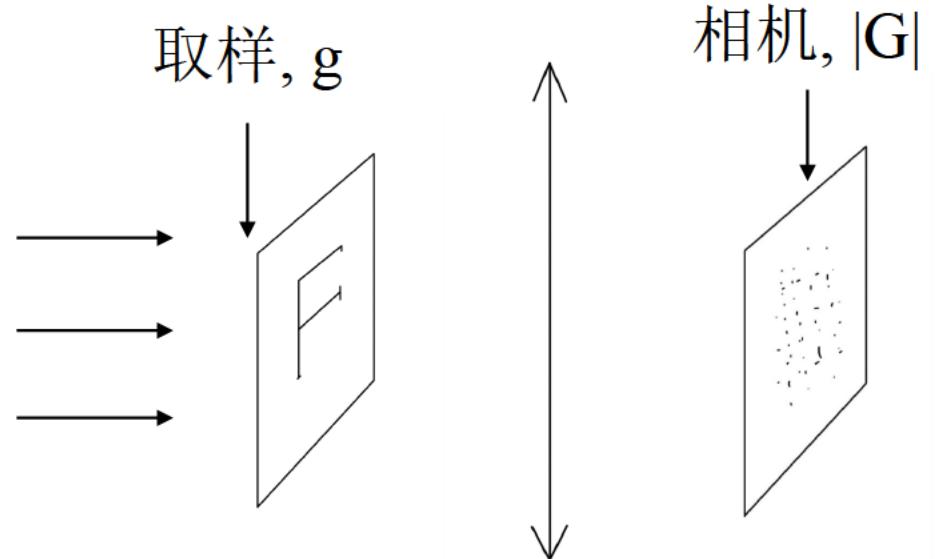
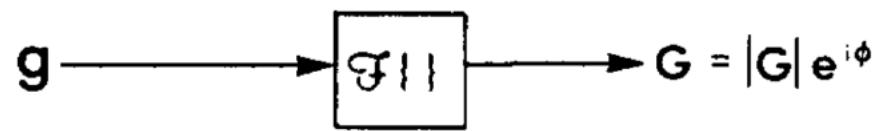
# 相位恢复和GS算法原理分析

g



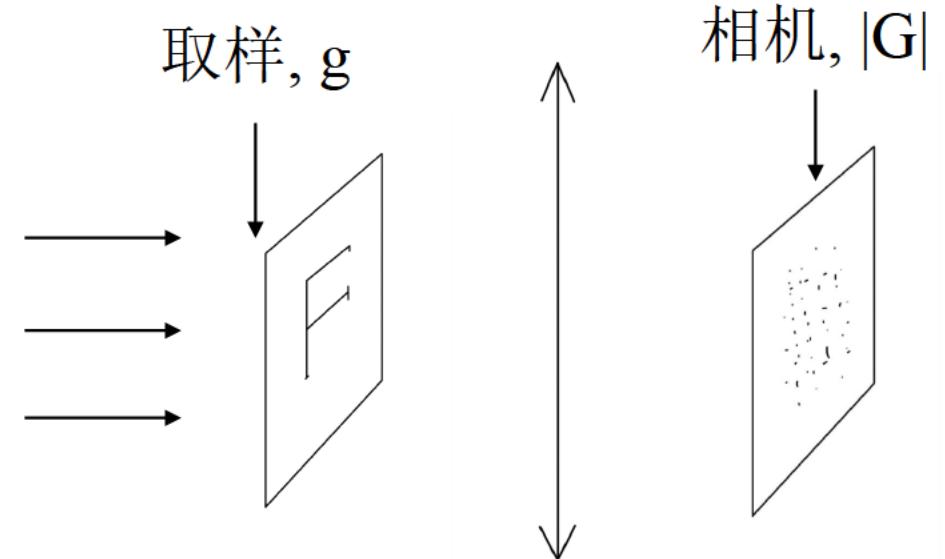
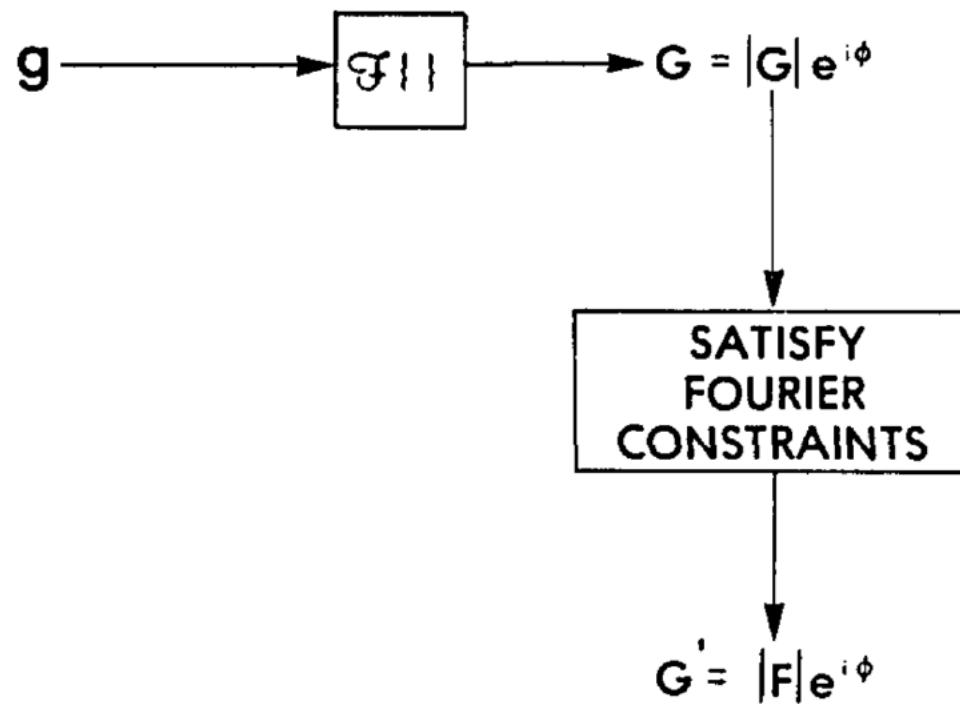
FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J/OL].  
Applied Optics, 1982, 21(15): 2758[2025-10-23].  
<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-21-15-2758>.  
DOI:[10.1364/AO.21.002758](https://doi.org/10.1364/AO.21.002758).

# 相位恢复和GS算法原理分析



FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J/OL].  
Applied Optics, 1982, 21(15): 2758[2025-10-23].  
<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-21-15-2758>.  
DOI:[10.1364/AO.21.002758](https://doi.org/10.1364/AO.21.002758).

# 相位恢复和GS算法原理分析



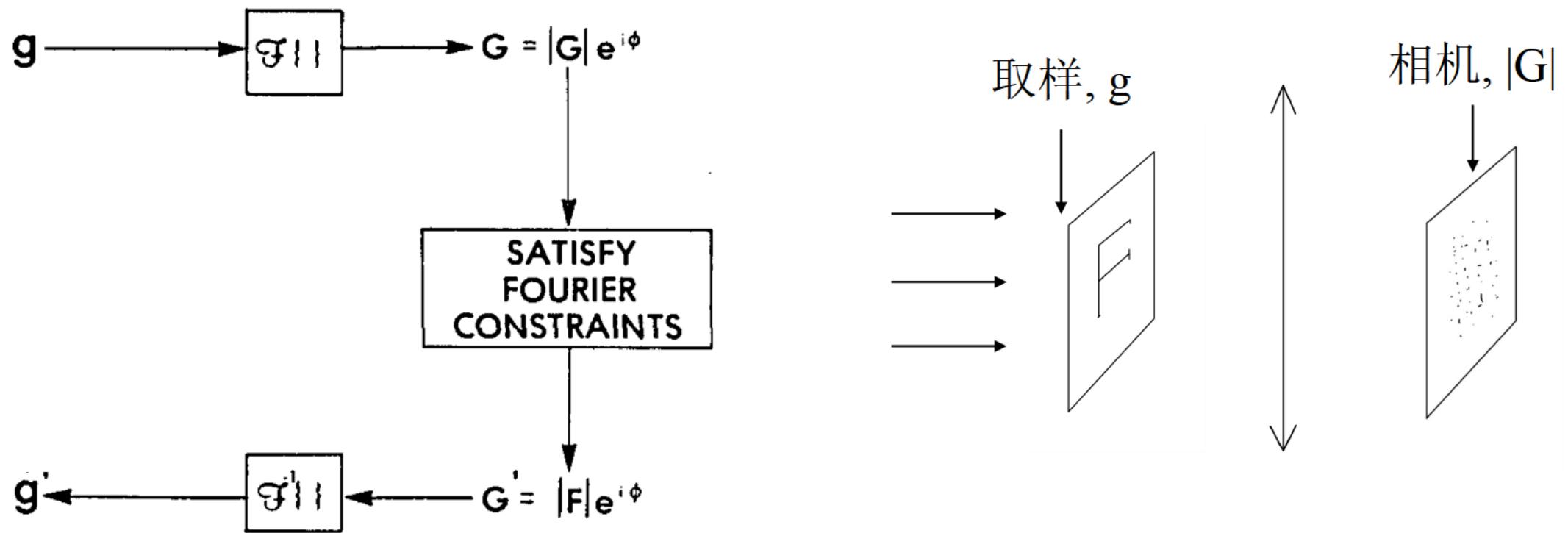
FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J/OL].

Applied Optics, 1982, 21(15): 2758[2025-10-23].

<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-21-15-2758>.

DOI:[10.1364/AO.21.002758](https://doi.org/10.1364/AO.21.002758).

# 相位恢复和GS算法原理分析



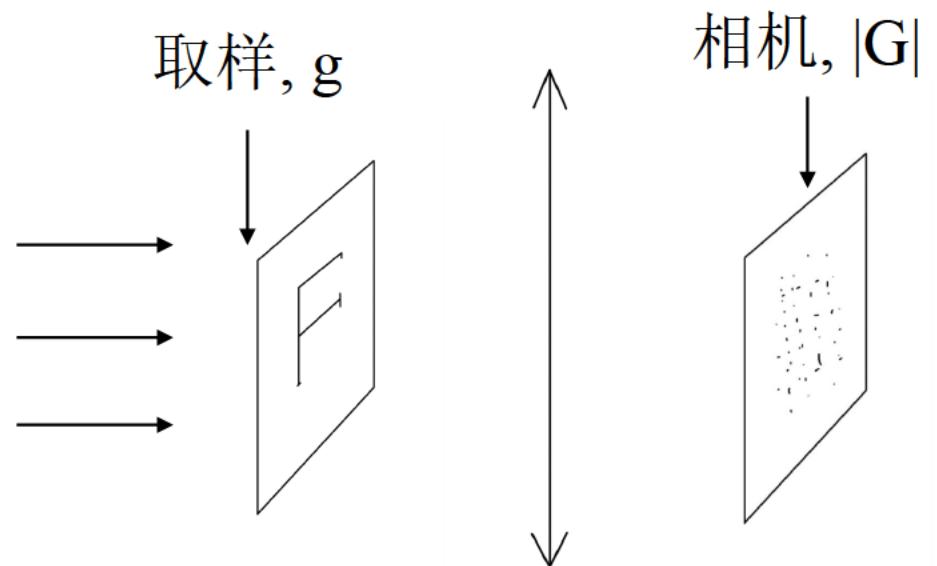
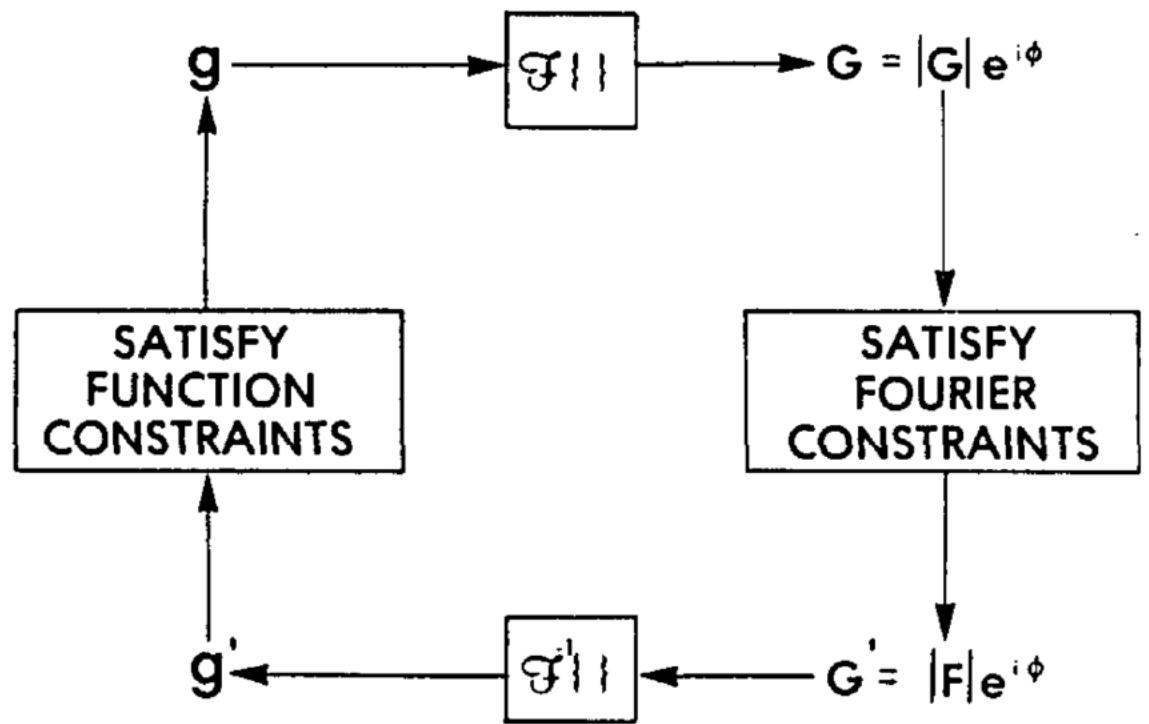
FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J/OL].

Applied Optics, 1982, 21(15): 2758[2025-10-23].

<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-21-15-2758>.

DOI:[10.1364/AO.21.002758](https://doi.org/10.1364/AO.21.002758).

# 相位恢复和GS算法原理分析



FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J/OL].

Applied Optics, 1982, 21(15): 2758[2025-10-23].

<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-21-15-2758>.

DOI:[10.1364/AO.21.002758](https://doi.org/10.1364/AO.21.002758).

01

课题简介

02

相位恢复和GS算法原理分析

03

实验设计和数据分析

04

总结与结论

# 实验设计和数据分析

相位	强度	均匀	不均匀
均匀			
不均匀			

# 实验设计和数据分析

objectAmplitude

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

objectPhase

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

$$Ae^{iP}$$

FFT

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

FourierComplex

abs

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

FourierAmplitude

# 实验设计和数据分析

objectAmplitude

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

objectPhase

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

$$Ae^{ip}$$

FFT

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

FourierComplex

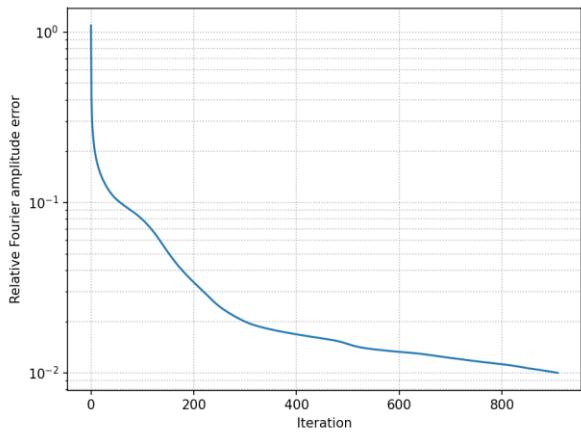
abs

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

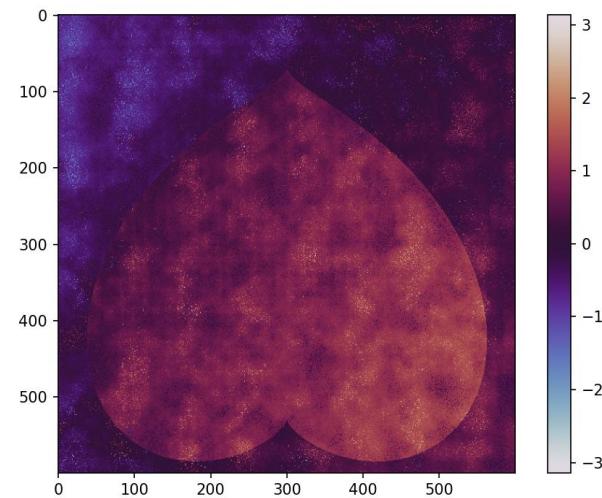
FourierAmplitude

# 实验设计和数据分析

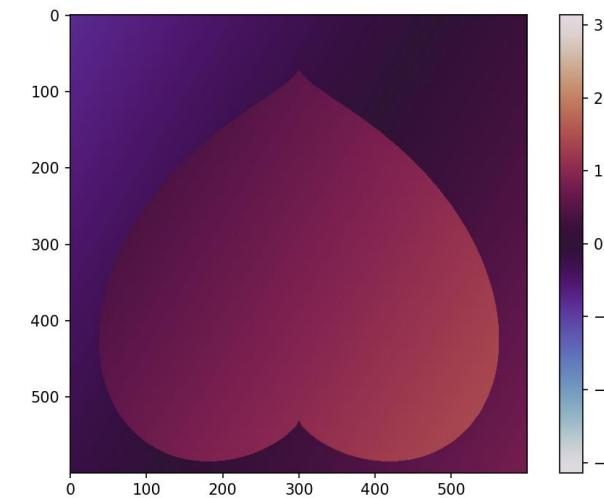
convergence\_curve



Complex NMSE (after removing global phase)  
= 9.755715e-03



reconstructed\_object\_phase  
\_with\_color\_bar

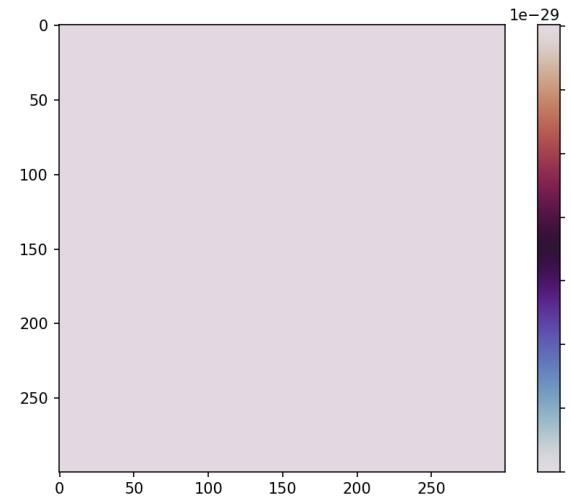
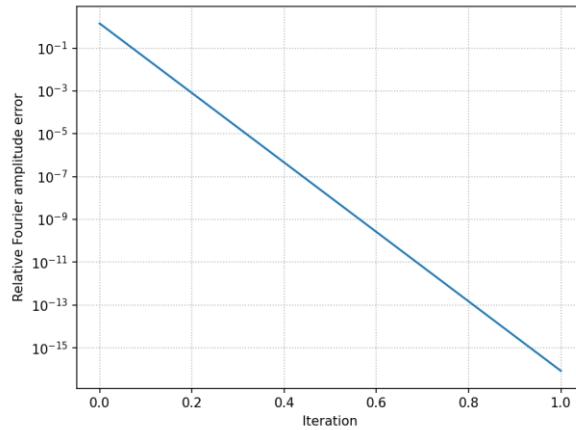


target\_object\_phase  
\_with\_color\_bar

# 实验设计和数据分析

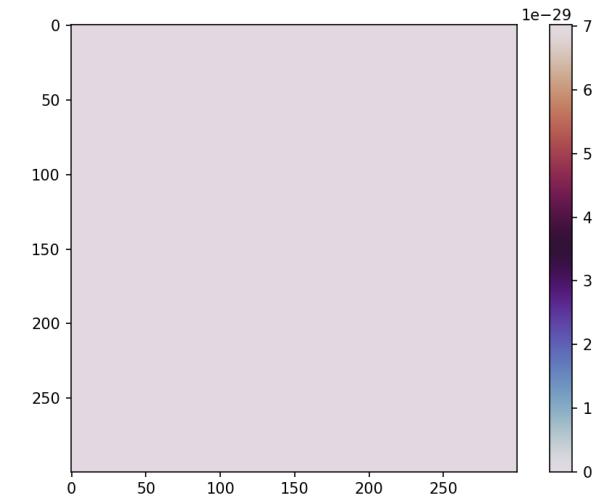
- 均匀强度均匀相位

convergence\_curve



reconstructed\_object\_phase  
\_with\_color\_bar

Complex NMSE (after removing global phase)  
 $= 0 * 1e-7$



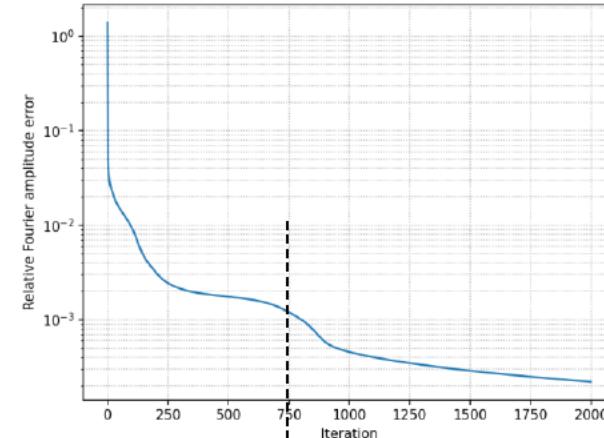
target\_object\_phase  
\_with\_color\_bar

# 实验设计和数据分析

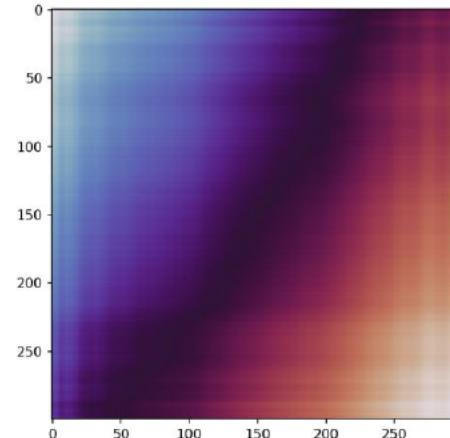
- 均匀强度不均匀相位

Size( $a^2$ )

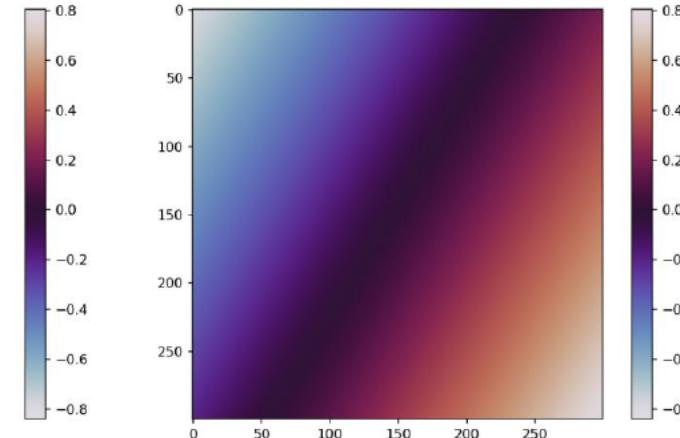
300



convergence\_curve  
Good at 99 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar

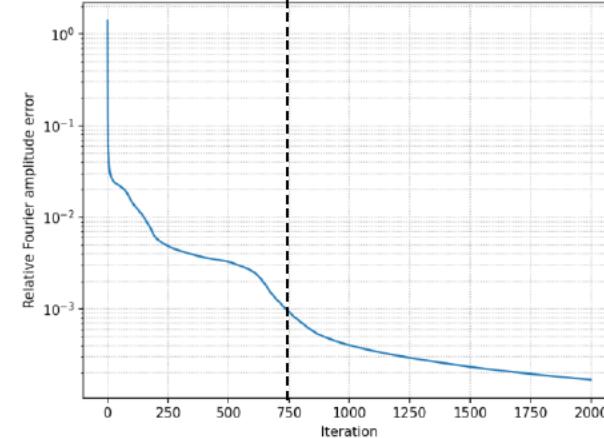


target\_object\_phase  
with\_color\_bar

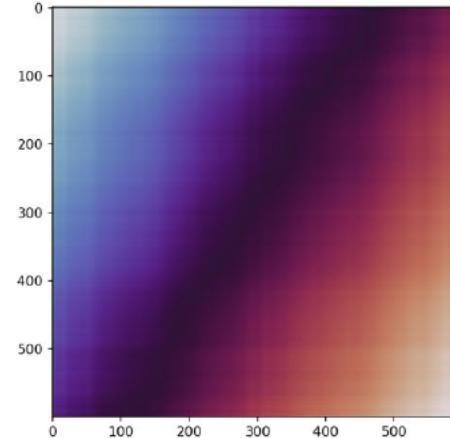
Complex NMSE

4.359640e-04

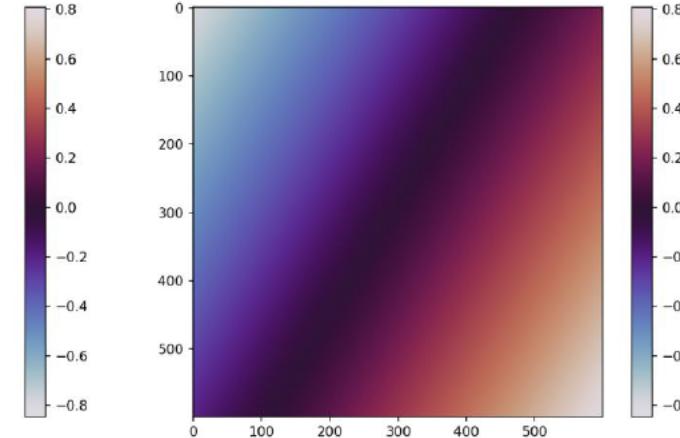
600



convergence\_curve  
Good at 153 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar



target\_object\_phase  
with\_color\_bar

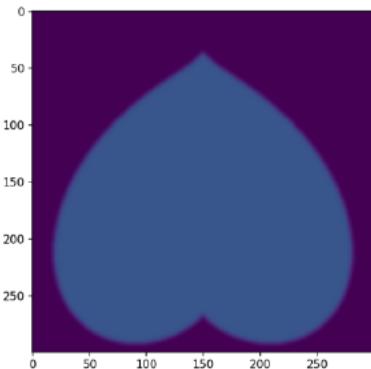
2.101703e-04

# 实验设计和数据分析

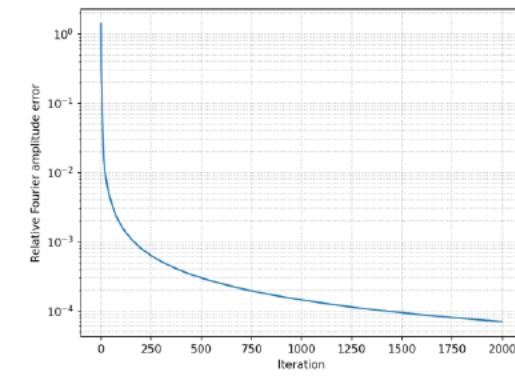
- 不均匀强度均匀相位

Size( $a^2$ )

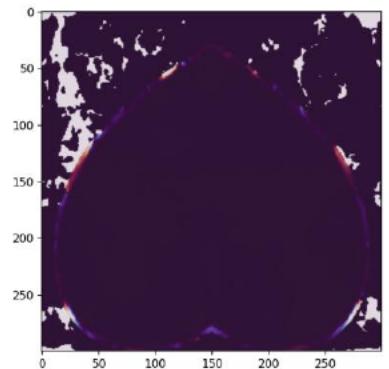
300



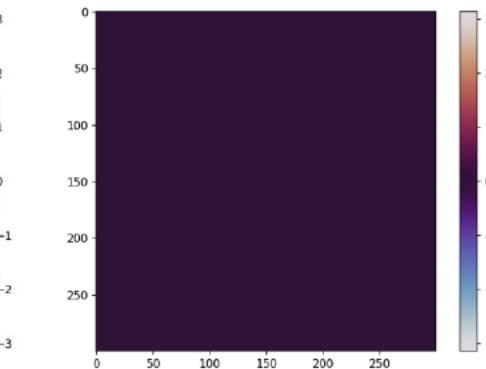
objectAmplitude



convergence\_curve  
Good at 33 iters



reconstructed\_object\_phase  
\_with\_color\_bar

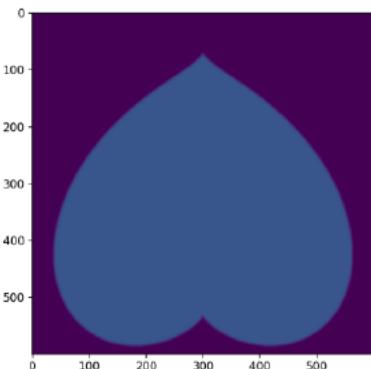


target\_object\_phase  
\_with\_color\_bar

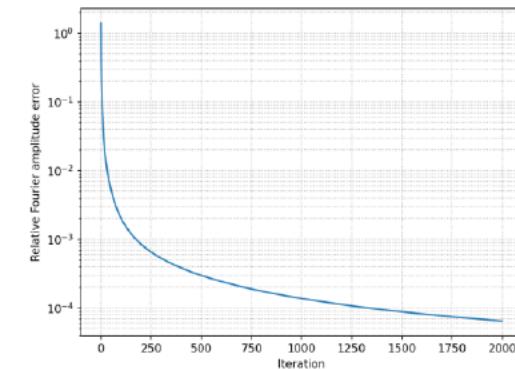
Complex NMSE

3.702202e-05

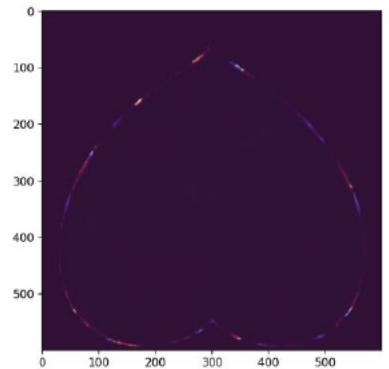
600



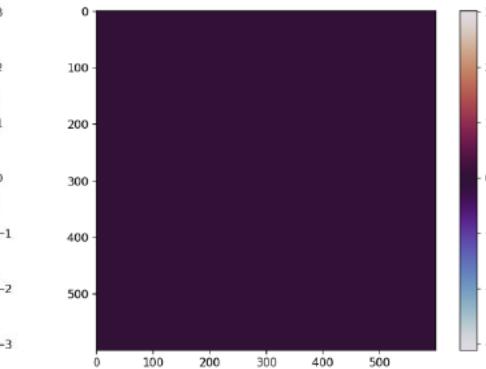
objectAmplitude



convergence\_curve  
Good at 23 iters



reconstructed\_object\_phase  
\_with\_color\_bar



target\_object\_phase  
\_with\_color\_bar

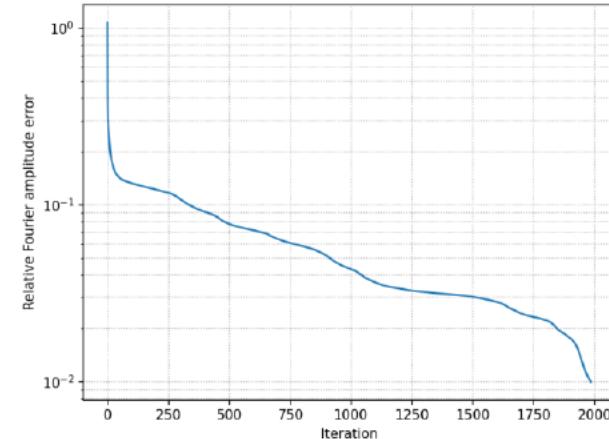
3.027791e-05

# 实验设计和数据分析

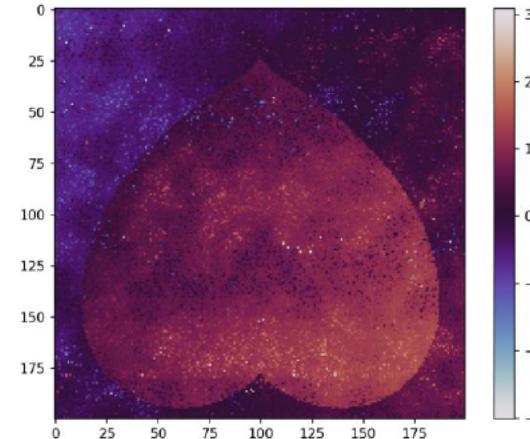
- 不均匀强度不均匀相位

Size( $a^2$ )

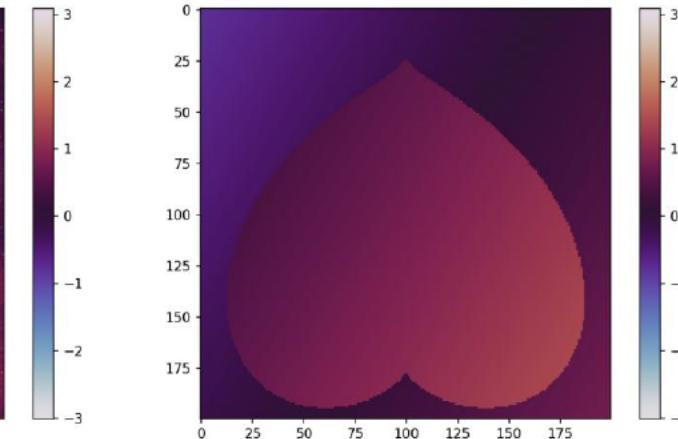
200



convergence\_curve  
Good at 1986 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar

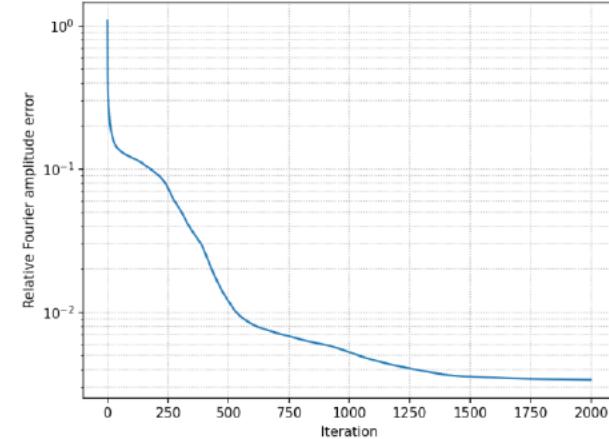


target\_object\_phase  
with\_color\_bar

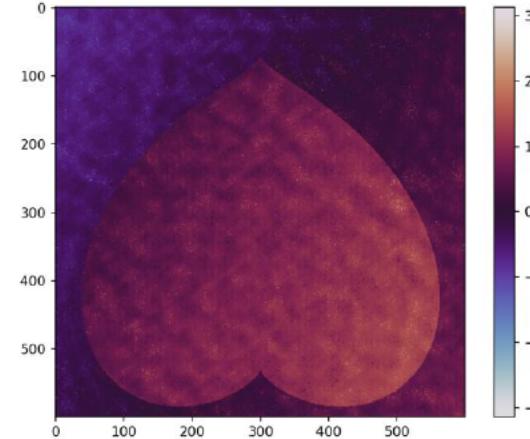
Complex NMSE

8.972314e-03

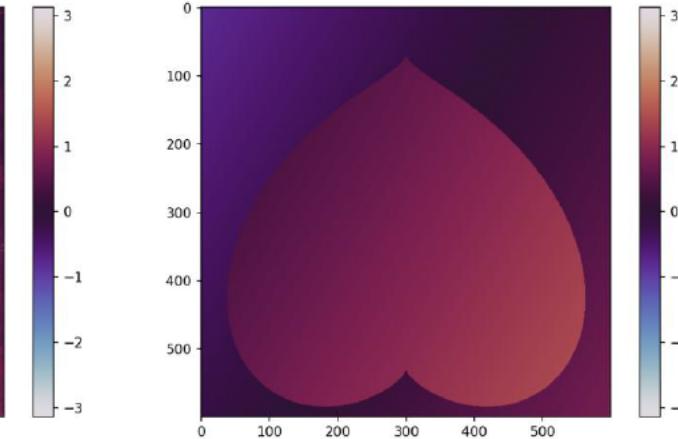
600



convergence\_curve  
Good at 536 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar



target\_object\_phase  
with\_color\_bar

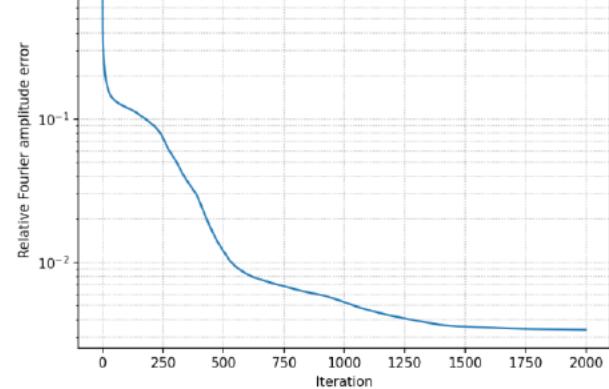
2.455510e-03

# 实验设计和数据分析

- 增设：2%噪声

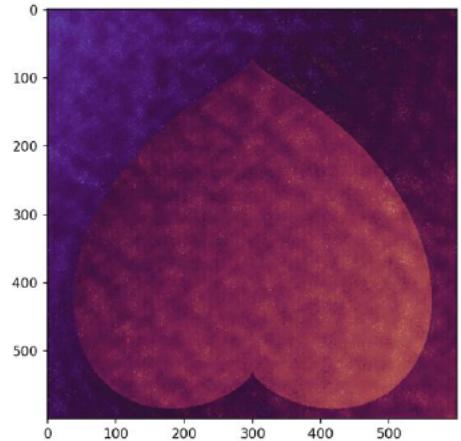
Size( $a^2$ )

600

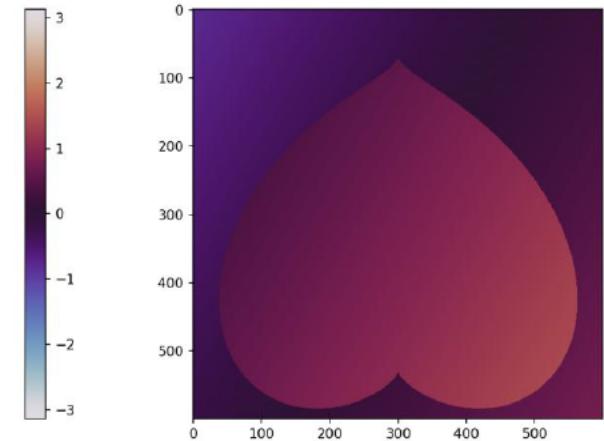


无噪声组

convergence\_curve  
Good at 536 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar

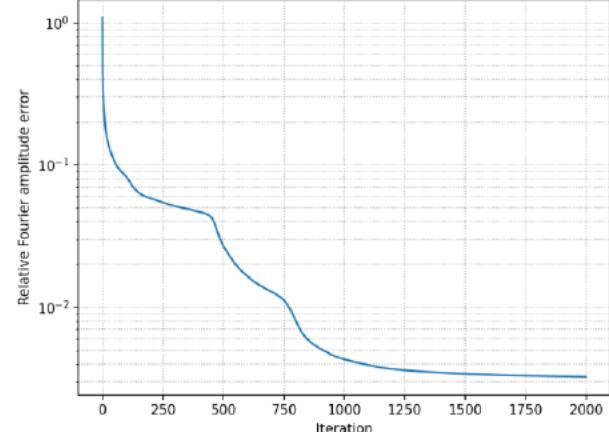


target\_object\_phase  
with\_color\_bar

Complex NMSE

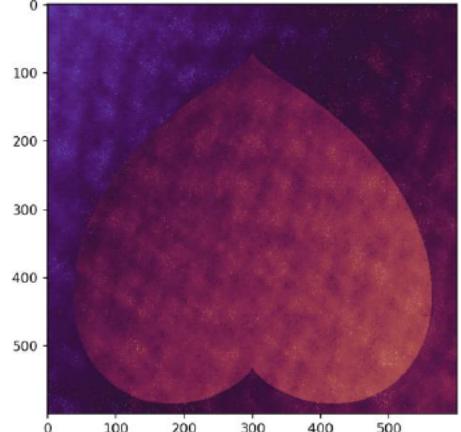
$2.455510e-03$

600

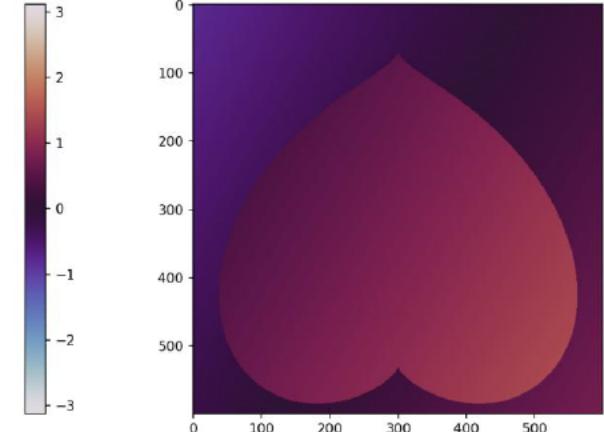


有噪声组

convergence\_curve  
Good at 774 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar



target\_object\_phase  
with\_color\_bar

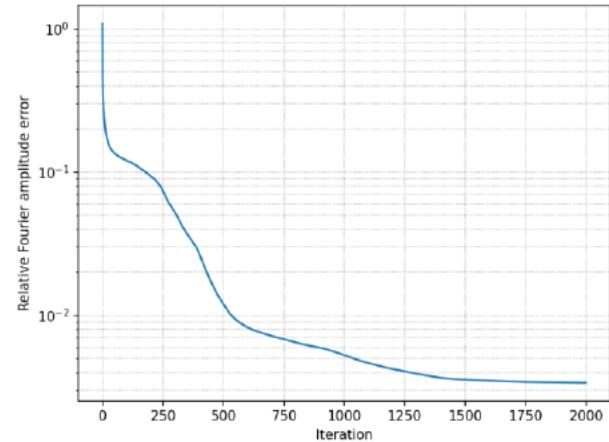
$2.445700e-03$

# 实验设计和数据分析

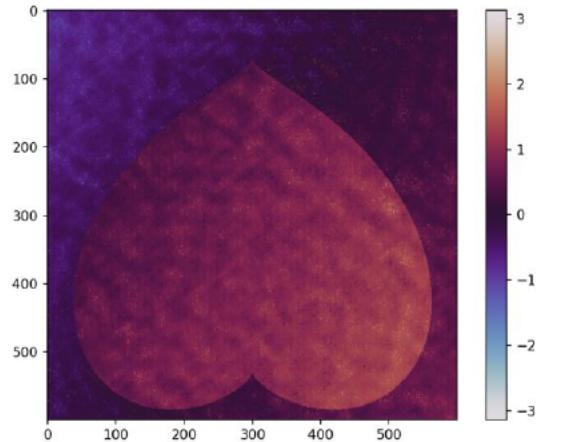
- 增设：长宽比

Size(a\*b)

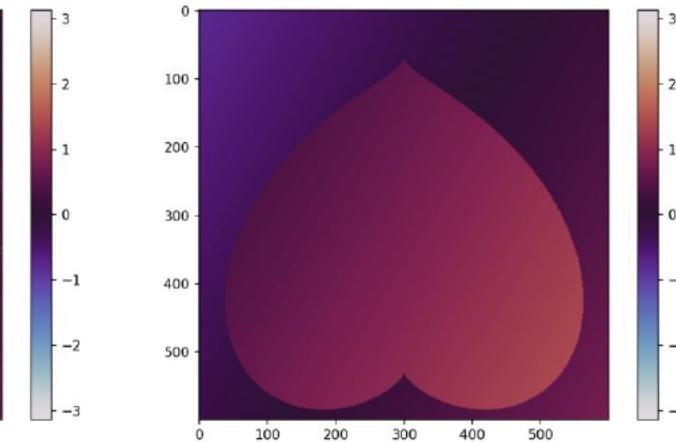
600\*600



convergence\_curve  
Good at 536 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar

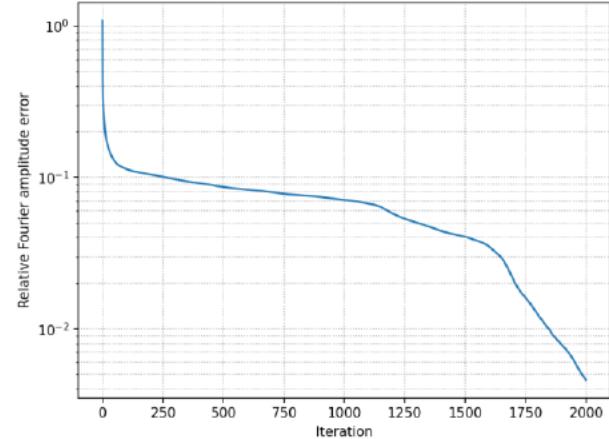


target\_object\_phase  
with\_color\_bar

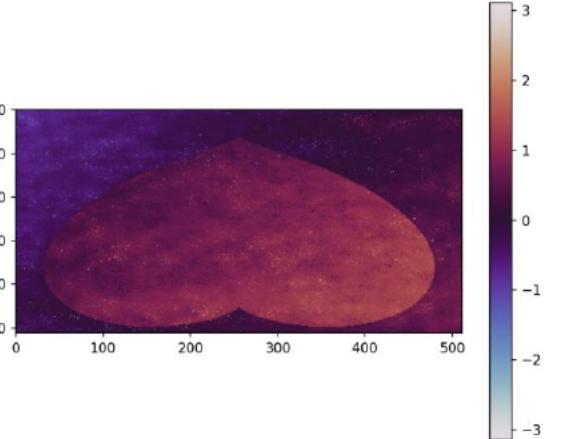
Complex NMSE

$2.455510e-03$

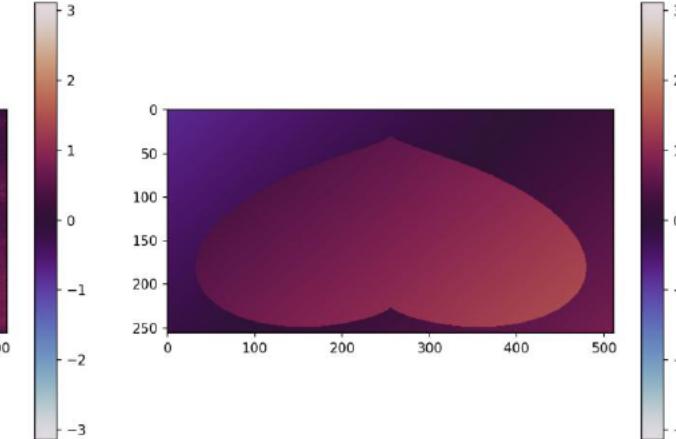
600\*256



convergence\_curve  
Good at 1849 iters



reconstructed\_object\_phase  
with\_color\_bar



target\_object\_phase  
with\_color\_bar

$3.125799e-03$

01

课题简介

02

相位恢复和GS算法原理分析

03

实验设计和数据分析

04

总结与结论

- 总结
  1. 增进了对光矢量、实空间和频域空间的关系的认识，以及对之间的纽带：傅里叶变换的认识
  2. 研究了解了相位恢复的概念以及 GS 算法的原理
  3. 成功复现了 GS 算法，探究了复杂强度和相位分布、分辨率、噪声对这种最基本的相位恢复算法的影响

- 结论
  1. GS 算法基于实空间和频域空间两个强度分布，可以对于各种简单的光强和相位分布较好地实现相位恢复，且效率较高，通常只需不到100个迭代即可。
  2. 实空间和频域空间两个强度分布图分辨率越大， GS 相位恢复效果越好，这与傅里叶二维变换有关。
  3. GS 算法鲁棒性较强，对于有噪声；非 1:1 分辨率图样都能较好地相位恢复
  4. GS 算法也有一定局限性。一方面，必须知道实空间的光强分布；另一方面，恢复后仍存在一定噪点。

# Reference

---

[1]

WANG AIYE 王爱业, PAN AN 潘安, MA CAIWEN 马彩文, 等. 相位恢复算法: 原理、发展与应用 (特邀) [J/OL]. Infrared and Laser Engineering, 2022, 51(11): 20220402[2025-11-21]. <http://www.opticsjournal.net/Articles/OJ9e8d3645ab1d9999/FullText>. DOI:[10.3788/IRLA20220402](https://doi.org/10.3788/IRLA20220402).

[2]

BOUTET S, ROBINSON I K. Coherent X-ray diffractive imaging of protein crystals[J/OL]. Journal of Synchrotron Radiation, 2008, 15(6): 576-583[2025-11-21]. <https://journals.iucr.org/paper?S0909049508029439>. DOI:[10.1107/S0909049508029439](https://doi.org/10.1107/S0909049508029439).

[3]

FIENUP J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J/OL]. Applied Optics, 1982, 21(15): 2758[2025-10-23].  
<https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ao-21-15-2758>. DOI:[10.1364/AO.21.002758](https://doi.org/10.1364/AO.21.002758).

[4]

Gerchberg, R.W. (1972) A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures. Optik, 35, 237-246.

[5]

Valentina Davidoiu. Nonlinear approaches for phase retrieval in the Fresnel region for hard X-ray imaging. Medical Imaging. INSA de Lyon, 2013. English. NNT : 2013ISAL0089 . tel-00952854

[6]

IL'INA I V, CHEREZOVA T Y, KUDRYASHOV A V. Gerchberg—Saxton algorithm: experimental realisation and modification for the problem of formation of multimode laser beams[J/OL]. Quantum Electronics, 2009, 39(6): 521-527[2025-11-23].  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1070/QE2009v039n06ABEH013642>. DOI:[10.1070/QE2009v039n06ABEH013642](https://doi.org/10.1070/QE2009v039n06ABEH013642).

感谢聆听， 请指正！

---

Kotokowa

光学 (H)

2025. 11. 27

# 附录

**傅里叶变换** 傅里叶变换是一种将函数（信号）分解为其构成频率的数学工具。

## 1. 欧拉公式

$$e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$$

简介：建立了复指数函数与三角函数（正弦/余弦波）之间的桥梁，是傅里叶变换的数学基础。

## 2. 正向傅里叶变换

$$F[k_x, k_y] = \sum f[x, y] e^{-j2\pi\left(\frac{k_x x}{N_x} + \frac{k_y y}{N_y}\right)}$$

简介：将时域（或空间域）信号  $f(x, y)$  转换为频域信号  $F(k_x, k_y)$ ，得到信号的频谱（振幅与相位分布）。

## 3. 逆傅里叶变换

$$f[x, y] = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{k_x, k_y} F[k_x, k_y] e^{+j2\pi\left(\frac{k_x x}{N_x} + \frac{k_y y}{N_y}\right)}$$

简介：将频域信号  $F(k_x, k_y)$  重构为原始的时域（或空间域）信号  $f(x, y)$ ，是正向变换的逆过程。

## 4. 卷积定理

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

简介：时域（或空间域）中复杂的卷积运算，在频域中等同于简单的乘积运算，极大简化了系统分析。

## 5. 帕塞瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

简介：信号在时域（或空间域）的总能量等于其在频域的总能量，体现了变换的能量守恒性。<sup>31</sup>

# 附录

## GS算法收敛性证明

算法中涉及的数学对象和操作：

物平面与频谱平面：

物平面的复振幅分布为 $g_n$ , 其中n为迭代次数。

频谱平面的复振幅分布为 $G_n$ 。

傅里叶变换：

正向傅里叶变换:  $G_n = \mathcal{F}\{g_n\}$

逆向傅里叶变换:  $g_n = \mathcal{F}^{-1}\{G_n\}$

已知约束：

物平面的真实振幅分布为 $|g_0|$ 。

频谱平面的真实振幅分布为 $|G_0|$ 。

投影算子：

GS算法的每一步“替换振幅”操作，本质上是在一个集合上进行投影。

物平面约束集合 $S_A$ : 所有满足物平面振幅约束的复振幅的集合。

$$S_A = \{g \mid |g| = |g_0|\}$$

频谱平面约束集合 $S_B$ : 所有满足频谱平面振幅约束的复振幅的集合。

$$S_B = \{G \mid |G| = |G_0|\}$$

相应的投影算子定义为：

$P_A$ : 将任意复振幅 $g$ 投影到 $S_A$ 上，即保留其相位，替换振幅为 $|g_0|$ 。

$$P_A(g) = |g_0| \exp(i \cdot \text{phase}(g)) \quad (1)$$

$P_B$ : 将任意复振幅 $G$ 投影到 $S_B$ 上，即保留其相位，替换振幅为 $|G_0|$ 。

$$P_B(G) = |G_0| \exp(i \cdot \text{phase}(G)) \quad (2)$$

一次完整的 GS 迭代可以表示为：

$$g_{n+1} = P_A(\mathcal{F}^{-1}(P_B(\mathcal{F}\{g_n\}))) \quad (3)$$

误差函数：

我们定义一个衡量当前猜测 $g_n$ 与真实解 $g^*$ （一个满足所有约束的真实复振幅）之间距离的函数。这里使用 L2 范数的平方作为距离度量。

$$E_n = \|g_n - g^*\|^2 \quad (4)$$

其中，真实解 $g^*$ 同时满足 $g^* \in S_A$ 和 $\mathcal{F}\{g^*\} \in S_B$ 。因此，必然有 $P_A(g^*) = g^*$ 和 $P_B(\mathcal{F}\{g^*\}) = \mathcal{F}\{g^*\}$ 收敛性证明：

我们的目标是证明误差函数 $E_n$ 是一个单调递减序列。

根据公式(4)(3)，我们有：

$$E_{n+1} = \|g_{n+1} - g^*\|^2 = \left\| P_A(\mathcal{F}^{-1}(P_B(\mathcal{F}\{g_n\}))) - g^* \right\|^2$$

由于真实解 $g^*$ 在物平面约束集合 $S_A$ 中，所以 $g^* = P_A(g^*)$ 。代入上式：

$$E_{n+1} = \left\| P_A(\mathcal{F}^{-1}(P_B(\mathcal{F}\{g_n\}))) - P_A(g^*) \right\|^2 \quad (5)$$

这里我们引入一个关键的数学性质：投影算子是非扩张的。

这意味着对于任意两点 $x$ 和 $y$ ，它们经过同一个投影算子 $P$ 后的距离不会变大：

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\| \quad (6)$$

将性质(6)应用于(5)式中的 $P_A$ 算子，令 $x = \mathcal{F}^{-1}(P_B(\mathcal{F}\{g_n\}))$ 且 $y = g^*$ ，我们得到：

$$E_{n+1} \leq \left\| \mathcal{F}^{-1}(P_B(\mathcal{F}\{g_n\})) - g^* \right\|^2 \quad (7)$$

# 附录

## GS算法收敛性证明

算法中涉及的数学对象和操作：

物平面与频谱平面：

物平面的复振幅分布为 $g_n$ , 其中n为迭代次数。

频谱平面的复振幅分布为 $G_n$ 。

傅里叶变换：

正向傅里叶变换:  $G_n = \mathcal{F}\{g_n\}$

逆向傅里叶变换:  $g_n = \mathcal{F}^{-1}\{G_n\}$

已知约束：

物平面的真实振幅分布为 $|g_0|$ 。

频谱平面的真实振幅分布为 $|G_0|$ 。

投影算子：

GS算法的每一步“替换振幅”操作，本质上是在一个集合上进行投影。

物平面约束集合 $S_A$ : 所有满足物平面振幅约束的复振幅的集合。

$$S_A = \{g \mid |g| = |g_0|\}$$

频谱平面约束集合 $S_B$ : 所有满足频谱平面振幅约束的复振幅的集合。

$$S_B = \{G \mid |G| = |G_0|\}$$

相应的投影算子定义为：

$P_A$ : 将任意复振幅 $g$ 投影到 $S_A$ 上，即保留其相位，替换振幅为 $|g_0|$ 。

$$P_A(g) = |g_0| \exp(i \cdot \text{phase}(g)) \quad (1)$$

$P_B$ : 将任意复振幅 $G$ 投影到 $S_B$ 上，即保留其相位，替换振幅为 $|G_0|$ 。

$$P_B(G) = |G_0| \exp(i \cdot \text{phase}(G)) \quad (2)$$

现在，我们对(7)式右边进行傅里叶变换。根据帕塞瓦尔定理，傅里叶变换是保范的（能量守恒），即 $\|\mathcal{F}\{u\}\| = \|u\|$ 。因此：

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}(P_B(\mathcal{F}\{g_n\})) - g^* \right\|^2 = \left\| P_B(\mathcal{F}\{g_n\}) - \mathcal{F}\{g^*\} \right\|^2 \quad (8)$$

将(8)代入(7)：

$$E_{n+1} \leq \left\| P_B(\mathcal{F}\{g_n\}) - \mathcal{F}\{g^*\} \right\|^2 \quad (9)$$

再次利用投影算子 $P_B$ 的非扩张性，我们知道真实解的频谱 $\mathcal{F}\{g^*\}$ 在约束集合 $S_B$ 中，所以 $\mathcal{F}\{g^*\} = P_B(\mathcal{F}\{g^*\})$ 。代入(9)式：

$$E_{n+1} \leq \left\| P_B(\mathcal{F}\{g_n\}) - P_B(\mathcal{F}\{g^*\}) \right\|^2 \leq \left\| \mathcal{F}\{g_n\} - \mathcal{F}\{g^*\} \right\|^2$$

最后，再次应用帕塞瓦尔定理：

$$\left\| \mathcal{F}\{g_n\} - \mathcal{F}\{g^*\} \right\|^2 = \left\| g_n - g^* \right\|^2 = E_n$$

至此，我们证明了：

$$E_{n+1} \leq E_n \quad (10)$$

结论：误差函数 $E_n$ 是一个单调递减序列。同时，由于 $E_n$ 是距离的平方，它必然有下界( $E_n \geq 0$ )。根据单调有界定理，序列 $\{E_n\}$ 必然收敛。当 $E_n$ 收敛时，意味着 $g_{n+1}$ 与 $g_n$ 的差异趋于零，即迭代序列 $\{g_n\}$ 收敛到一个不动点 $g^*$ 。

因此，GS 算法一定会收敛。

## 代码思路

gerchberg\_saxton(object\_amp, fourier\_amp, max\_iter=200, tol=1e-6, verbose=True)

这是最重要的 GS 算法模块，包含迭代过程，并允许用户指定循环次数上限和收敛目标，并打印收敛过程。

align\_reconstruction\_to\_target(rec, target)

将重建的复场中心化，去除相位恢复多解问题带来的相位平移

compute\_complex\_nmse(reconstructed, target)

这个模块用于计算恢复率，需要输入预知的目标，程序运行完 GS 算法后会自动比对

save\_image\_with\_colorbar(path, array, vmin=None, vmax=None, cmap='viridis')

保存恢复后强度、相位图以及 colorbar。强度图可以验证程序是否正常运行，相位图便于观察程序效果

除 GS 算法主体外还有

make\_gs\_testset.py 以及 make\_gs\_testset\_with\_noise.py

用于从物面强度和相位两个数据进行傅里叶变换获得频域强度数据，并支持增加噪声

make\_object\_info\_with\_shapefunction.py

用于绘制物面强度和相位表

read\_npy.py

用于将 python 友好的 numpy 数据类型 .npy 转换为可读的 .txt 文件，便于验证数据是否正确